Author(s): Joutsenlahti, Jorma; Perkkilä, Päivi; Tossavainen, Timo

Title: Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa

Year: 2017

Version:

Please cite the original version:

Joutsenlahti, J., Perkkilä, P., & Tossavainen, T. (2017). Näytteitä murtoluvun käsitteestä eri aikakausien oppikirjoissa. In Proceedings of the annual FMSERA symposium 2016 (pp. 99-109). Finnish Mathematics and Science Education Research Association (FMSERA). Proceedings of the FMSERA annual symposium. https://journal.fi/fmsera/article/view/60904

VERTAISARVIOITU
KOLLEGIALT GRANSKAD
PEER-REVIEWED
www.tsv.fi/tunnus

NÄYTTEITÄ MURTOLUVUN KÄSITTEESTÄ ERI AIKAKAUSIEN OPPIKIRJOISSA

Jorma Joutsenlahti[1], Päivi Perkkilä[2] ja Timo Tossavainen[3]

[1] Tampereen yliopisto, [2] Jyväskylän yliopisto, [3] Luulajan teknillinen yliopisto

TIIVISTELMÄ

Tässä artikkelissa kartoitamme sitä, miten murtoluvun käsitettä on opetettu eräissä 1800–2000-lukujen alaluokkien oppikirjoissa, ja millaisia murtoluvun käsitekuvia tarkasteluun valituista oppikirjoista välittyy. Osoittautuu, että murtolukua on käsitelty monipuolisesti ja eri tavoin jo 1800-luvun oppikirjoissa ja osa näistä käsittelytavoista on edelleen käytössä. Uuden matematiikan kirjoissa korostuu jonkin verran konseptuaalinen ajattelu, muuten murtolukujen käsittelyä hallitsee laskemisen näkökulma.

JOHDANTO

Tutkimusta matematiikan oppikirjoista on tehty Suomessa verrattain vähän. Aatu Nykänen (1945) tutki väitöskirjassaan geometrian opetusta oppikirjojen välittämänä ja Päivi Perkkilä (1999, 2002) alkuopetuksen matematiikan oppikirjoja. Jukka Törnroos (2004, 2005) tarkasteli TIMSS-aineiston avulla, millainen mahdollinen opetussuunnitelma toteutuu erityisesti seitsemännen luokan oppikirjoissa.

Tampereen yliopiston luokanopettajakoulutuksessa toteutettiin 2000-luvulla Matematiikan Oppimateriaalin Tutkimuksen projekti, jonka tuloksena syntyi kymmenkunta opinnäytetyötä alakoulun matematiikan oppikirjojen analyyseistä (Joutsenlahti & Vainionpää, 2008). Salme Sulonen (2010) on puolestaan tutkinut peruskoulun geometrian opetuksen muuttumista 1970-luvulta 2000-luvulle ja sitä, miten geometrian oppisisältö kokonaisuutena on vaihdellut eri vuosikymmenten aikana. Oppimateriaalien käyttöä on kartoitettu myös TIMSS- ja PISA-tutkimuksissa sekä Opetushallituksen vuosittain tekemissä perusopetuksen päättövaiheen osaamiskartoituksissa (esim. Joutsenlahti & Vainionpää, 2010). Tossavainen, Joutsenlahti, Lehtinen ja Merikoski (2017) kirjoittivat suomalaisten matematiikan oppikirjojen historiallisen yleiskatsauksen. Tossavainen (2014) on myös kartoittanut ja luokitellut matematiikan e-oppimateriaaleja niiden käytettävyyden näkökulmasta.

Meidän kartoituksemme täydentää aiempaa tutkimusta siinä, että tarkastelemme nyt oppikirjoja yksittäisen käsitteen määrittelyyn ja esitystapoihin liittyvän vaihtelun näkökulmasta. Käsitteeksi valikoitui murtoluku, joka on kuulunut suomalaisten oppikirjojen keskeiseen sisältöön alusta alkaen.

Koulumatematiikan sisällölliset ratkaisut olivat 1800-luvulla ja vielä itsenäisyyden alkuvuosikymmenillä oppikirjailijoiden omien näkemyksien mukaisia. Itsenäisyyden ensimmäisinä vuosikymmeninä oppikirjat ilmoittivat noudattavansa oppikirjakomitean ja 1920–30–luvuilla opetussuunnitelmakomitean suosituksia. Tämän jälkeen Kouluhallitus (myöhemmin Opetushallitus) hyväksyi erikseen kunkin oppikirjan koulukäyttöön. 1990-luvulta lähtien oppikirjoja ei ole tarvinnut enää erikseen ennakkotarkastaa. Voidaan siis olettaa, että oppikirjat ovat suurimman osan aikaa edustaneet ennen kaikkea tekijöidensä tulkintaa matemaattisista käsitteistä ja niiden keskeisistä ominaisuuksista.

TEOREETTINEN VIITEKEHYS

Kartoituksemme teoreettisena viitekehyksenä toimii Tallin ja Vinnerin (1981) teoria, jonka mukaan *käsitemääritelmä* (concept definition) tarkoittaa sitä sanallista ilmaisua, jolla yksilö tai matemaattinen yhteisö määrittää matemaattisen käsitteen sisällön. Tällainen ilmaisu voi olla esimerkiksi oppikirjassa esiintyvä "Murtoluku on kahden kokonaisluvun osamäärä".

Saman teorian mukaan yksilö kuitenkin käyttää matemaattista käsitettä soveltaessaan *käsitekuvaa* (concept image), jolla tarkoitetaan sitä kognitiivista kokonaisstruktuuria, jonka yksilö liittää käsitteeseen. Se voi sisältää monenlaisia uskomuksia, mielikuvia ja prosesseja, jotka voivat olla osittain tiedostamattomiakin ja keskenään ristiriitaisia. Tämän takia puhutaan myös *tilanteessa heräävistä käsitekuvista* (evoked concept image), jolla tarkoitetaan kokonaiskäsitekuvan sitä osaa, joka aktivoituu yksilön ajattelussa ja toiminnassa jossakin tietyssä kontekstissa.

TUTKIMUSAINEISTO, MENETELMÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Artikkelin kirjoittajilla on yli 300 suomalaisen laskennon ja matematiikan oppikirjan kokoelma, jonka voidaan katsoa edustavan varsin hyvin tutkittavaa aikakautta 1870–2016. Teokset jakautuvat ajallisesti kolmeen eri luokkaan: 1. ”Suurten nimien oppikirjat” (1870–1969), joiden tekijät olivat opettajankouluttajia ja kentän ansioituneita opettajia, jotka kirjoittivat useimmiten yksin; 2. ”Uusi matematiikka” (1970–1979) eli tiedematematiikan rakenteiden pohjalta kirjoittajatiimeissä luotu oppimateriaali; 3. "Uudet oppikirjat" (1980-), jotka myös on tehty tiimityönä ja joissa näkyy ainedidaktisen tutkimuksen huomioon ottaminen.

Tutkimusaineistoksi valikoitui edellä mainitusta kokoelmasta 42 teoksen näyte, ks. liite. Se ei välttämättä edusta kattavasti koko ajanjaksoa, mutta se on kuitenkin pyritty valitsemaan tutkimuseettisiä periaatteita noudattaen siten, että mukaan päätyneet teokset muodostaisivat informatiivisen näytteen siitä, kuinka murtoluvun käsitettä on suomenkielisissä oppikirjoissa eri aikoina käsitelty.

Suurten nimien aikakaudelta valitsimme tunnetuimmilta tekijöiltä 27 oppikirjaa, joista vanhin on vuodelta 1872. Tämä osaotos on näkemyksemme mukaan jopa edustava, sillä oppikirjailijoiden määrä oli tuolloin pieni ja toisaalta samat oppikirjat olivat käytössä vain vähäisin muutoksin useita vuosikymmeniä. Uuden matematiikan lyhyeksi jäänyttä aikakautta edustaa viidettä luokkaa varten tehty Matematiikka p5b (Hakalehto ym., 1974). Se on suuren suomalaisen kustantajan julkaisema ja useampaan painokseen yltänyt oppikirja. Uusiempien oppikirjojen joukosta valitsimme 14 teosta yleisimmin käytössä olevista kirjasarjoista.

Tutkimusaineiston analyysi perustuu kvalitatiiviseen sisällönanalyysiin. Keskeisenä tavoitteemme on selvittää, mitä matematiikan sisältöjä analysoiduissa oppikirjoissa murtoluvun käsitteeseen liitetään, ja millaisia käsittelytapoja sisältöjen esittämiseen liittyy. Näiden kartoituksella pyrimme muodostamaan kuvan siitä, millaisia murtoluvun käsitekuvia teosten tekijöillä on mahdollisesti ollut. Tarkemmin sanoen haemme vastausta seuraaviin kysymyksiin:

1. Miten murtoluvun käsitettä on kuvattu tarkasteluun valituissa oppikirjoissa?

2. Millaisia käsitekuvia oppikirjojen tekijöillä on ollut murtoluvusta?

Koska uuden matematiikan aikakausi oli pedagogisilta lähtökohdiltaan muista oleellisesti poikkeava (ks. Tossavainen, Joutsenlahti, Lehtinen & Merikoski, 2017), syvennymme analyysissämme tarkimmin tuon ajan oppikirjaan.

TULOKSET

Murtoluku suurten nimien kauden suomenkielisissä oppikirjoissa

Murtoluvun määrittelyt eivät ole tämän aikakauden teoksissa yhtenäisiä, vaan merkittäviä eroja löytyy sekä eri kirjoittajien että eri vuosikymmeniä edustavien oppikirjojen välillä. Esimerkiksi Bonsdorff (1884, 65) määritteli oppikirjassaan Luvunlaskun oppikirja kansakoulun tarpeeksi seuraavasti: ”Murtoluku on yksi tahi useampi yksikön yhtäsuuria osia.” Toisaalta oppikirjassaan Algebran alkeet koulujen tarpeeksi (Bonsdorff 1888, 33) hän määritteli: ”Murtoluku $\frac{a}{b}$ on se osamäärä, joka saadaan, kun a jaetaan b:llä”.

Samalla kirjoittajalla saattoi olla useampia erilaisia määrittelyjä murtoluvusta eri oppikirjoissaan, jotka oli ilmestynyt eri aikoina (esimerkiksi Myrsky), eri kirjasarjoissa (esimerkiksi Saarialho) tai oli tarkoitettu eri luokka-asteille (esimerkiksi

Bonsdorff). Osa kirjailijoista pitäytyi samaan kuvaukseen murtoluvusta eri aikakausina: Elo määritteli kirjassaan Laskuoppi (1912, 65) " Murtoluku on ykkösen tasaosa tai ykkösen tasaosan monistus" ja käytti sanatarkasti tätä kuvausta muun muassa vuosina 1948 ja 1963 ilmestyneissä oppikirjoissaan. Vahervuo kuvasi Laskennon oppikirjassaan (1954, 191) murtoluvun seuraavasti: "Murtoluku muodostuu yksikön kappaleista." Vahervuo on ainoa oppikirjailija, joka käyttää termiä "kappale" murtoluvun yhteydessä.

Väisälä (1963, 16) määritteli murtoluvun oppikirjassaan Algebran oppi- ja esimerkkikirja: "Murtoluvulla $\frac{a}{b}$ tarkoitetaan osamäärää $\frac{a}{b}$."Väisälän määritelmä vastaa Bondorffin (1888) määritelmää. Väisälä rakensi systemaattisesti murtoluvun käsitteen yhteydet osamäärän, suhteen ja rationaaliluvun käsitteisiin.

Tämän aikaperiodin teosten murtolukukuvaukset voidaan jakaa sisältönsä perusteella neljään luokkaan, jotka perustuvat kirjailijoiden käsitemääritelmien ilmaisuihin. Luokat on nimetty seuraavasti (Taulukko 1): "Ykkösen tasaosa", "Osamäärä", "Kokonaisen (yksikön) yhtäsuuria osia" ja "Yksikön kappale".

Taulukko 1. Murtolukujen kuvaukset laskennon oppikirjoissa 1870–1969.

	Ykkösen tasaosa	Osamäärä	Kokonaisen (yksikön) yhtäsuuria osia	Yksikön kappale
1870–1899	Wiwolin	Bonsdorff	Bonsdorff, Oksanen	
1900–1919	Elo		Ojala, Alho & Junttila, Malmberg	
1920–1949	Elo, Saarialho	Saarialho	Alho & Laurila, Koskinen, K. Merikoski, Ojala & Saarialho, Saarialho & Myrsky & Peltonen	
1950–1969	Elo, Kallio, Saarialho & Myrsky, Pajunen & Elimäki	Kallio, Karttunen, Saarialho & Myrsky, Pajunen & Elimäki, Väisälä	Vahervuo & Mäkelä & Immonen	Vahervuo

Yhteenvetona Taulukosta 1 toteamme, että tällä ajanjaksolla oppikirjailijoiden käsitekuvat murtoluvusta eroavat toisistaan ja toisaalta saman oppikirjailijan murtolukukuva on vaihdellut oppikirjoittain.

Murtoluku uuden matematiikan oppikirjassa

Murtoluvun käsittely eroaa uuden matematiikan kirjassa oleellisesti muiden aikakausien teoksista, ja siksi se esitellään tässä yksityiskohtaisemmin. Käsitteen määrittely alkaa (s. 161) murtomerkinnän $\frac{a}{b}$ esittelyllä ja sitä havainnollistetaan samalla joukkomallin avulla. Tämä rajoittaa tarkastelun merkintöihin, jotka edustavat murtolukuja välillä (0,1]. Kirjassa esitellään erikseen ykkösen murtomerkintä käyttäen esimerkkinä kolmealkioista joukkoa ja samalla perustelematta kerrotaan, että $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$ Tämän jälkeen oppilaita ohjataan keksimään itse, miten murtomerkintöjen yhteenlasku tulisi määritellä.

Seuraavaksi kirjassa perustellaan luonnollisten lukujen yhteenlaskun vaihdannaisuuden avulla murtomerkintöjen yhteenlaskun vaihdannaisuus, ja sen jälkeen määritellään murtomerkintöjen vähennyslasku kaavalla $\frac{m}{p} - \frac{n}{p} = \frac{m-n}{p}$. Tässä on pakko rajoittua tapaukseen $m > n$, mikä ilmoitetaankin eksplisiittisesti.

Tarina etenee sekamerkinnän esittelyyn, ja sitä on ilmeisesti tarkoitus käyttää lähinnä jakolaskujen lopputuloksen esittämiseen. Samassa yhteydessä murtomerkinnälle annetaan uusi tulkinta, eli se esitellään myös jakolaskuna. Tästä siirrytään murtomerkintöjen kertolaskuun, jossa johdatellaan taas oppilasta itse keksimään sääntö, jolla merkintöjen kertolasku määritellään. Kertolaskun lakien tarkastelussa vaihdannaisuus perustellaan yllättäen kokonaislukujen vaihdannaisuuden eikä luonnollisten lukujen vaihdannaisuuden kautta. Tämä on erikoista, koska tähän mennessä murtomerkintöjä on tarkasteltu vain välillä (0,1].

Seuraavassa vaiheessa kuitenkin esitellään negatiiviset murtomerkinnät ja niiden etumerkkisäännöt. Kirjassa ilmoitetaan (Emt., 243): "Sovimme: näillä uusilla murtomerkinnöillä lasketaan entisten tapaan." Mielenkiintoista on, että tähän mennessä kirjassa ei ole otettu vielä mitään kantaa siihen, mitä olioita murtomerkinnöillä merkitään, eli ovatko ne jonkin erityisen joukon alkioita tai muodostavatko ne jonkin tietyn lukujoukon tms.

Vihje tästä kuitenkin annetaan tässä yhteydessä alkavan uuden luvun otsikossa"Rationaaliluvut". Luvun aluksi kerrataan kokonaisluvun vastaluvun käsite ja sen avulla analogiaa ja esimerkkiä käyttäen esitellään murtomerkinnän vastaluvun käsite. Tämän jälkeen tulee (Emt., 247) seuraava Lue ja mieti -tehtävä (Kuva 1).

Kuva 1. Rationaalilukujen joukon määrittely

Murtomerkinnät todetaan siis rationaalilukujen esityksiksi. Mutta mitä rationaaliluvut ovat? Vastaus tähän näkyy Kuvassa 1, mutta sitä ei korosteta tekstissä. Tästä päästään vihdoin murtoluvun käsitteeseen, kun kirjassa seuraavaksi esimerkin avulla ilmoitetaan, että jokainen kokonaisluku voidaan esittää murtomerkintänä (tätä ei perustella muulla tavalla), joten jokainen kokonaisluku on rationaaliluku. Seuraavaksi tarkastellaan murtomerkintöjä, joista osa ei edusta kokonaislukuja, joten murtoluvuiksi määritellään kaikki ne rationaaliluvut, jotka eivät ole kokonaislukuja.

Edellä kuvatusta muodostuu käsitys, että tekijöiden käsitekuvat murtoluvusta perustuvat – uuden matematiikan hengen mukaisesti – symbolien ja niiden logiikkaan ja joukko-oppiin perustuvien muokkaussääntöjen käyttöön. Määrittely alkaa murtomerkintöjen tarkastelulla, ja niille kehitetään laskusääntöjä ilman, että murtomerkintää konkretisoidaan tai havainnollistetaan aluksi millään muulla tavalla kuin joukon ja sen osajoukon avulla. Asian edetessä merkinnöille annetaan tulkintoja mm. jakolaskuna ja geometrisen kuvion venytyksen avulla, mutta enimmäkseen asiaa havainnollistetaan janan osien tarkastelun kautta tai joukkomallin avulla. Käsitteen määrittely murtomerkinnästä murtolukuun vie kirjasta 89 sivua!

Toisaalta oppilaiden kannustaminen määrittelemään itse murtomerkintöjen yhteen- ja kertolasku korostavat sitä, että murtomerkinnät hahmotetaan luonnollisten lukujen suhteiksi, joiden laskutoimituksia ja -sääntöjä voidaan ymmärtää ja perustella ensin mainittujen lukujen ominaisuuksilla. Tässä tosin näyttää paljastuvan pieni ristiriita tai ainakin epätarkkuus tilanteessa heränneiden käsitekuvien osalta: vaikka toisaalla murtomerkintöjä esitetään luonnollisten lukujen suhteina ja niitä tarkastellaan eksplisiittisesti vain lukualueella (0,1], silti joissakin kohdissa niiden ominaisuuksia perustellaan kokonaislukujen ominaisuuksilla. Samanlainen lipsahdus liittyy murtomerkinnän kertomiseen nollalla; kirjassa määritetään murtomerkinnän kertominen luonnollisella luvulla sanomalla (Emt., 196) "kertolasku muistuttaa monistamista".

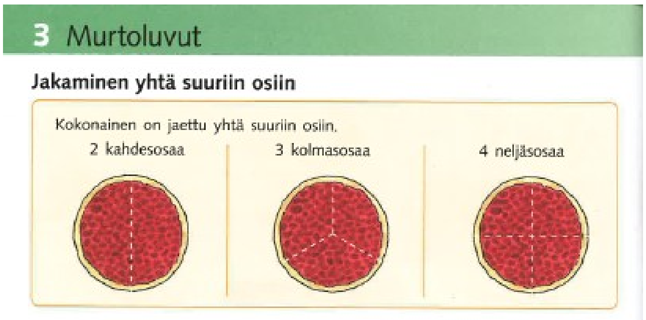
Kolmas havainto liittyy kirjan harjoitustehtäviin. Niissäkin korostuu murtomerkintöjen muodollinen manipulointi – laventaminen, supistaminen, laskutoimitusten suorittaminen jne. – sovellusten ja konkretisoinnin sijaan. Kokonaisuudesta hahmottuu pyrkimys algebrallisen struktuurin konstruoimiseen. Toisin sanoen tekijöiden käsitekuvissa murtolukujen merkitys on pikemminkin algebrallinen kuin geometrinen.

Tästä näkökulmasta on yllättävää, että tekijät määrittelevät murtoluvut rationaaliluvuiksi, jotka eivät ole kokonaislukuja. Tällöin murtoluvut eivät muodosta suljettua algebraa (esim. kahden murtoluvun summa ei ole aina murtoluku). Heidän käsitekuvissaan ja käsitteen määritelmässään murtomerkintä tarkoittaa rationaaliluvun esitystapaa, ei murtolukua.

Murtoluku uudemmissa suomalaisissa oppikirjoissa

Opettajankoulutuksen siirtyessä yliopistoihin 1970-luvun loppupuolella matematiikan didaktiikka tuli Suomessa yliopistolliseksi oppiaineeksi kasvatustieteellisissä tiedekunnissa. Samassa yhteydessä perustettiin matematiikan ainedidaktiikan lehtorin virkoja ainedidaktiikan professoreiden virkojen rinnalle. Näiden uudistusten myötä myös matematiikan ainedidaktinen tutkimus alkoi kehittyä tiedeperustaisesti. (Malinen, 2006, 5).

Ainedidaktisen tutkimuksen lisääntymisen vaikutus on nähtävissä myös matematiikan oppikirjoissa 1980-luvulta alkaen, jolloin oppikirjasarjat alkoivat erikoistua erilaisin didaktisin painotuksin. Matematiikan oppikirjasarjojen didaktisten painotusten uudistumisesta huolimatta murtoluvun käsitteen määrittelyt uusimmissa suomalaisissa oppikirjoissa eivät juurikaan poikkea toisistaan. Erityisesti alaluokkien oppikirjasarjat noudattavat hyvin samansuuntaista lähestymistapaa. Lähestymistavoilla on selkeä yhteys Bonsdorffin (1884) Luvunlaskun oppikirja kansakoulun tarpeeksi -oppikirjaan sekä Elon (1912) Laskuoppi-oppikirjaan. Esimerkiksi Rinne, Sintonen ja Uus-Leponiemi (2009, 52) lähestyvät Matikka 3 kevään kirjassa murtolukua yhtä suuriin osiin jakamisen näkökulmasta (Kuva 2).



Kuva 2. Kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin Matikka 3 kevät (2009, 52)

Laskutaito 4 oppilaan kevätosassa Rikala, Ilmavirta ja Strang (1995, 78) kirjoittavat vastaavasti viiteen yhtä suureen osaan jaetun ympyräkuvion viereen: ”Kuvio esittää murtolukua kaksi viidesosaa. Ympyrä on jaettu viiteen yhtä suureen osaan, joista kaksi osaa on väritetty.”

Yläluokille suunnatussa Kuutio 7 oppilaan kirjassa (Hassinen, Latva, Makkonen, Peltola, Pirttimaa & Tolvanen, 2016, 16) murtoluvun käsite -otsikon alla tyydytään esittämään kuva, jossa on pizza jaettu kahdeksaan yhtä suureen osaan, joista yksi osa on otettu erilleen. Tämä yksi osa on merkitty murtolukuna $\frac{1}{8}$, josta on nimetty osoittaja ja nimittäjä.

Yläluokkien seitsemännen luokan oppilaan kirjassa Laskutaito 7 (Laurinolli, Lindroos-Heinänen, Luoma-aho, Sankilampi, Selenius, Talvitie & Vähä-Vahe, 2009, 36) on murtolukua määritelty vastaavalla tavalla kuin Laskutaito 4 kevätosan oppilaan kirjassa. Ympyräkuvio on jaettu viiteen yhtä suureen osaan, joista on väritetty kolme. Ympyräkuvion viereen on kirjoitettu: ”Murtoluku $\frac{3}{5}$ eli kolme viidesosaa tarkoittaa, että kokonainen jaetaan viiteen yhtä suureen osaan ja näitä osia otetaan kolme.”

Oppilaan kirjassa Pii 8 (Heinonen, Luoma, Mannila, & Tikka, 2007, 6–7) murtolukua tarkastellaan rationaalilukuna. Siinä määritellään ensin rationaaliluvut ilmoittamalla, että ”Rationaalilukuja ovat sellaiset luvut, jotka saadaan kahden kokonaisluvun osamääränä.” Seuraavaksi todetaan, että ”Jos rationaaliluku ei ole kokonaisluku, se voidaan esittää murtolukuna. Esimerkiksi $\frac{5}{8}$ on murtoluku.”

Edellä kuvattu lähestymistapa muistuttaa Taulukon 1 osamäärä-lähestymistapaa. Toisaalta se on samankaltainen kuin edellä tarkastellussa uuden matematiikan oppikirjassa. Uusissa oppimateriaaleissa murtoluvun käsitteen yleisin lähestymistapa on ”Kokonaisen (yksikön) yhtäsuuria osia” -määritelmä (Taulukko 1). Tämä määritelmä on esiintynyt jo 1870-luvun oppimateriaaleissa. Ajanjakson oppikirjailijoiden murtoluvun käsitekuvassa korostuu se, että kokonainen jaetaan yhtä suuriin osiin (tasaosiin), joita otetaan tietty määrä. Kokonaisen käsite jää usein murtolukumerkinnän varjoon. Samalla tavalla se, mitä kaikkea murtolukumerkintä voi tarkoittaa, jää vähälle huomiolle.

POHDINTA JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Oppikirjat voidaan nähdä koulussa vallitsevan pedagogisen ajattelun ilmentyminä, jotka ohjaavat oppimistilannetta (vrt. Perkkilä, 2002). Suomalaisessa matematiikan opetuksessa oppikirjalla on myös keskeinen rooli (Joutsenlahti & Vainionpää, 2010), joten muutaman oppikirjailijan käsitykset käsitteiden sisällöstä ja merkityksestä vaikuttavat kokonaisten sukupolvien matemaattiseen ajatteluun.

Analyysimme paljasti, että oppikirjailijoilla on ollut eri aikakausina murtoluvun käsitteestä sen eri puolia korostavia käsitekuvia. Tämä näkyy erityisesti uuden matematiikan aikakauden teoksen vertailussa muihin. Toisaalta samallakin aikakaudella on ollut oppikirjoja, joissa murtolukua on käsitelty eri tavoilla. Viime vuosikymmenten oppikirjoja yhdistää puolestaan se, että niissä murtolukua tarkastellaan hyvin samankaltaisesti, merkittäviä lähestymistapaeroja ei löydy. Huomionarvoista on sekin, että uusimpien ja joidenkin vanhimpien teosten lähestymistavoissa on paljon yhteisiä piirteitä. Suurimmat erot liittyvät siihen, missä määrin kuvitusta on käytetty laskutoimitusten havainnollistamiseen.

Eri aikakausien oppikirjoja ja oppikirjailijoiden käsitekuvia murtoluvusta yhdistää proseduraalisen ajattelun korostuminen. Murtoluvut opetetaan laskemisen kautta, jossain määrin myös uuden matematiikan teoksessa. Tämä on ymmärrettävää, mutta vaihtoehtona olisi ollut myös mahdollisuus korostaa suhteen ilmoittamista ja kokonaislukuihin verrattuna rikkaamman algebrallisen struktuurin muodostumista. Selvästi vahvimmin konseptuaalinen käsitekuva murtoluvusta tulee esille uuden matematiikan oppikirjassa.

Tutkimus paljasti myös sen, että murtolukua on käsitelty kaikkina aikoina varsin monipuolisesti (vrt. Taulukko 1). Tästä voinee päätellä, että oppikirjojen tekijöillä on ollut varsin rikas käsitekuva murtoluvusta, vaikka edellä mainittu proseduraalinen ajattelu korostuukin. Varhaisimpien teosten perusteella voi tehdä myös sellaisen havainnon, että yksittäisen tekijän käsitekuva murtoluvusta on saattanut vaihdella uran eri vaiheissa. Tämä kuvannee yleisemminkin sitä, miten suomalaiset matematiikan oppikirjat kehittyivät 1800-luvulla sitä mukaa, kun suomen kieli kehittyi.

LÄHTEET

Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2008). Oppikirja vai harjoituskirja? Perusopetuksen luokkien 1-6 matematiikan oppimateriaalin tarkastelua MOTprojektissa. Teoksessa Arto Kallioniemi (toim.), *Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka. Ainedidaktinen symposiumi 8.2.2008 Helsingissä* (s. 547–558). Tutkimuksia 299. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Helsinki: Helsingin yliopisto.

Joutsenlahti, J., & Vainionpää, J. (2010). Oppimateriaali matematiikan opetuksessa ja osaamisessa. Teoksessa E.K. Niemi & J Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (s. 137–148). Koulutuksen seurantaraportti 2010:2. Opetushallitus. Helsinki: Edita.

Malinen, P. (2006). Miten matematiikan opetusopista tuli tiedettä. http://www.edu.helsinki.fi/malu/tutkimus/tutkimusseura/malinen.doc.

Nykänen, A. (1945*). Alkeisgeometrian opetuksesta Suomessa. Erityisesti oppikirjojen kehitystä silmällä pitäen*. Jyväskylä: K. J. Gummerus Osakeyhtiö.

Sulonen, S. (2010). Peruskoulun geometrian opetus 1970-luvulta 2000-luvulle: geometrian sisältöjen tarkastelua matematiikan oppikirjoissa. Teoksessa M. Asikainen, P. E. Hirvonen & K. Sormunen (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa* (s. 39–56). Joensuu, Suomi: Itä-Suomen yliopisto.

Perkkilä, P. (1999). *Kahden alkuopetuksen matematiikan oppikirja –sarjan didaktinen analyysi*. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitos. Lisensiaatintyö.

Perkkilä, P. (2002). *Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa*. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 195.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Tossavainen, T. (2014). Onko teknologiasta oppimisen tueksi? Esimerkkejä matematiikasta. *Kasvatus, 45*(5), 459–466.

Tossavainen, T., Joutsenlahti, J., Lehtinen, M., & Merikoski, J. (2017). Merkittäviä suomalaisia matematiikan oppikirjoja ja -kirjailijoita. Teoksessa P. Hiidenmaa, M. Löytönen & H. Ruuska (toim.), *Oppikirja Suomea rakentamassa* (s. 217–246). Helsinki, Suomi: Suomen tietokirjailijat ry.

Törnroos, J. (2004). *Opetussuunnitelma, oppikirjat ja oppimistulokset – seitsemännen luokan matematiikan osaaminen arvioitavana*. Tutkimuksia 13. Jyväskylä, Suomi: Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopisto.

Törnroos, J. (2005). Textbook, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation, 31*, 315–327.

LIITE – OPPIKIRJALÄHTEET

Alho, A. & Junttila, F. (1910). *Kansakoulun laskuoppi*. Helsinki: Otava.

Alho, A. & Laurila, J. (1926). *Kaupunkikansakoulun laskuoppi*. Helsinki: Otava.

Asikainen, A., Nyrhinen, K., Rokka, P. & Vehmas, P. (2009). *Tuhattaituri 5a*. Helsinki: Otava.

Bonsdorff, E. (1884). *Luvunlaskun oppikirja. Kansakoulun tarpeeksi*. Helsinki: Weilin & Göös.

Bonsdorff, E. (1888). *Algebran alkeet. Koulujen tarpeeksi*. Helsinki: G. W. Edlund.

Elo, E. (1912). *Laskuoppi alkeisoppilaitoksia varten*. Joensuu, Pohjois-Karjalan Kirjapaino.

Elo, E. (1948). *Laskuoppi*. Porvoo: WSOY.

Elo, E. (1963). *Laskuoppi etupäässä oppikouluja varten*. Helsinki: WSOY.

Hakalehto, J., Honkanen, S., Kaila, L., Ranta, E., & Strömmer, E. (1974). *Matematiikka p5b*. Helsinki: WSOY.

Hassinen, S., Latva, O., Makkonen, J.-P., Peltola, M., Pirttimaa, M., & Tolvanen, A. (2016). *Kuutio 7*. Helsinki: Sanoma Pro.

Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., & Tikka, T. (2007). *Pii 8. 1. – 4*. painos. Helsinki: Otava.

Helin, E., Ilomäki-Keisala, U., Saravesi, P., Satamo, K., Sohlman, L., & Virta, V. (1998). *Hei, nyt lasketaan!* Helsinki: Otava.

Kallio, N. (1952). *Laskuoppi*. Helsinki: Otava.

Kallio, N. (1961). *Laskuoppi*. Helsinki: Otava.

Karttunen, M. (1950). *Maalaisnuoren laskennonkirja*. Helsinki: Pellervo-Seura.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (2006). *Laskutaito 5*. 1. – 5. painos. Helsinki: WSOY.

Koivisto, M., Salonen, M., Uus-Leponiemi, T., & Ilmavirta, R. (1998). *Laskutaito 6*. Helsinki: WSOY.

Koskinen, J. (1927). *Kansakoulun laskuoppi*. Helsinki: Valistus.

Latva, O., Hassinen, S., Makkonen, J.-P., & Tolvanen, A. (2008). *Kuutio 7*. Helsinki: Tammi.

Laurinolli, T., Lindroos-Heinänen, R., Luoma-aho, E., Sankilampi, T., Selenius, R., Talvitie, K., & Vähä-Vahe, O. (2009). *Laskutaito 7*. Helsinki: WSOY.

Malmberg, E. (1919). *Kansakoulun laskennon oppikirja*. Helsinki: Valistus.

Merikoski, K. (1926). *Kansakoulun laskentokirja*. Helsinki: Valistus.

Ojala, N. (1910). *Seminaarin laskuoppi*. Porvoo: WSOY.

Ojala, N. & Saarialho, K. (1929). *Kansakoulun laskuoppi*. Porvoo: WSOY.

Oksanen, K. (1892). *Laskuoppi*. Tampere: J.F. Olan.

Pajunen, V. & Elimäki, L. (1955). *Opin laskemaan*. Helsinki: WSOY.

Putkonen, H., Sinnemäki, J., Makkonen, V., & Lilli, M. (2008). *Uusi matikkamatka 3 syksy*. Helsinki: Tammi.

Putkonen, H., & Sinnemäki, J. (2001). *Matikkamatka 3 syksy*. Helsinki: Tammi.

Rikala, S., Ilmavirta, R., & Strang, T. (1995). *Laskutaito 4. Kevätosa*. Helsinki: Weilin + Göös.

Rinne, S., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2008). *Matikka 3 kevät*. Helsinki: WSOY.

Saarialho, V. (1934). *Laskennon oppikirja*. Porvoo: WSOY.

Saarialho, K., Myrsky, V. & Peltonen, A. (1953). *Laskutaito ja elämä. Laskennon ja mittausopin oppikirja kaupunkien ja teollisuusseutujen kansakouluille A-laitos*. Helsinki: WSOY.

Sintonen, A.-M., Uus-Leponiemi, T., Ilmavirta, R., Uus-Leponiemi, M., & Rikala, S. (2003). *Laskutaito 3 kevätosa*. 12. – 13. painos. Helsinki: WSOY.

Sintonen, A.-M., Uus-Leponiemi, T., Ilmavirta, R., Uus-Leponiemi, M., & Rikala, S. (2009). *Laskutaito 4 kevätosa*. 11. – 15. painos. Helsinki: WSOY.

Vahervuo, T. (1954). *Laskennon oppikirja*. Porvoo: WSOY.

Vahervuo, T., Mäkelä, S. & Immonen, O. (1959). *Kansakoululaisen laskento*. Helsinki: Otava.

Väisälä, K. (1963). *Algebran oppi- ja esimerkkikirja I*. 12. painos. Helsinki, WSOY. Luettavissa osoitteessa http://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/vaisala [katsottu 8.5.2017].

Wiwolin, K. (1872). *Luvun-laskunoppikirja*. Turku: Wilen & Kumpp.