Topologinen aste

Lauri Huttunen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2017

Tiivistelmä: Lauri Huttunen, *Topologinen aste* (engl. *Topological degree*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 40 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2017.

Tämän tutkielman tarkoituksena on luoda perusta topologiselle asteelle, ja todistaa siihen liittyviä tuloksia. Topologinen aste määritellään aluksi jatkuvasti derivoituville funktioille jossakin kyseisen funktion kuvapisteessä. Nämä ovat useasti moniulotteisia funktioita, joiden määrittelyjoukko ja kuvapisteiden joukko ovat samassa ulottuvuudessa.

Topologinen aste tarkastelee funktion kuvapisteen alkukuvien ympäristön kuvautumista derivaattamatriisin determinantin avulla. Mikäli Jacobin determinantti saa positiivisen arvon, lisätään topologiseen asteeseen kokonaisluku yksi. Jos taas derivaattamatriisin arvo on negatiivinen kyseisen kuvapisteen alkukuvassa, topologisesta asteesta vähennetään luku yksi. Topologinen aste on siis funktio, joka laskee yhteen kuvapisteen alkukuvia, jossa derivaatan merkki määrää summattavan luvun.

Kun on luotu perustaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden asteteorialle, määritelmää laajennetaan myös jatkuville funktioille. Topologinen aste jatkuvalle funktiolle määritellään jatkuvasti derivoituvan funktion avulla, joka on lähellä alkuperäistä funktiota kaikissa pisteissä.

Niissä pisteissä, joissa funktion Jacobin determinantti saa arvon nolla, topologista astetta ei pystytä myöskään suoraan määrittelemään. Tämä voidaan kiertää muutaman tuloksen avulla. Topologista astetta ei kuitenkaan koskaan määritellä määrittelyjoukon reunan kuvapisteissä, sillä funktion käyttäytyminen joukon reunalla voi olla arvaamatonta. Tämä määrittelyjoukon reunan kuvajoukko on siis käytännössä jatkuville funktioille aina vähintään osa kuvajoukon reunasta.

Tutkielman lopuksi käydään läpi myös muutamia lauseita, esimerkiksi Brouwerin kiintopistelause ja Jordanin erotuslause, joiden todistamisessa topologista astetta voidaan käyttää hyödyksi.

Sisältö

Johdanto

Topologinen aste on matemaattinen työkalu, jolla tarkastellaan yleensä moniulotteista funktiota, rajoitetulla määrittelyjoukolla, jossakin kuvapisteessä. Topologinen aste kertoo kuvapisteiden alkukuvien määrästä, ja näiden kulkusuunnasta funktion graafilla. Jälkimmäistä tutkitaan luonnollisesti Jacobin determinantin avulla.

Topologinen aste riippuu tarkasteltavasta funktiosta, sen määrittelyjoukosta ja tarkastelupisteestä. Kuitenkin käytännössä funktion määrittelyjoukon reunan kuvapisteet määrittävät topologisen asteen. Jos kaksi jatkuvaa funktiota on määritelty samassa alueessa ja ne saavat yhtä suuren arvon kaikissa määrittelyjoukon reunan pisteissä, niin funktioiden topologiset asteet ovat samat kaikissa funktioiden kuvapisteissä.

Mikäli topologinen aste ei ole nolla, tarkasteltavalla funktiolla on ainakin yksi alkukuva tarkastelupisteelle määrittelyjoukossaan. Toisaalta, jos arvo on nolla, se ei itsessään vielä kerro mitään ratkaisujen lukumäärästä. Topologinen aste saa aina kokonaislukuarvon.

Aste määritellään jatkuvasti derivoituville funktioille, mutta määritelmää pystytään laajentamaan myös jatkuville funktioille. Määrittelyä kriittisille pisteille, eli pisteille joissa Jacobin determinantti saa arvon nolla, ei pystytä myöskään suoraan tekemään.

Topologisella asteella on yhteyksiä ja sovellutuskohteita myös Sobolev avaruuksille ja -funktioille. Myös differentiaalilaskennassa voi hyödyntää asteteorian tuloksia. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan perehdytä näihin, vaan topologisen asteen perustuloksiin ja niiden sovelluksiin, ja erityisesti niiden todistamiseen.

Määritelmiä voidaan lähestyä myös algebrallisen topologian ja ryhmäteorian keinoin, mutta tässä tutkielmassa topologista astetta lähestytään analyysin keinoin. Tämän lähestymistavan esitti ensimmäisenä Mito Nagamo teoksessaan *Degree of Mapping in Convex Linear Topological Spaces, 1951.* Äärellisissä dimensioissa topologista astetta voidaan kutsua myös Brouwerin asteeksi.

Tutkielmassa käytetään pääasiallisena lähteenä Irene Fonseca ja Wilfrid Gangbo, *Degree Theory in Analysis and Applications*, 1995, [**1**], ja mikäli tulosten todistaminen jätetään näyttämättä, ne löytyvät kyseisestä kirjasta.

Seuraava tiivistää topologisen asteen tiiviiseen pakettiin, johon voi palata tutkielman luettua:

Oletetaan, että X on topologinen avaruus, $D \subset X$ ja

$$A \subset \{(\phi, D, p) \mid \text{funktio } \phi : D \to X \text{ on jatkuva ja } p \notin \phi(\partial D)\}.$$

Tällöin sitä ainoaa funktiota $d : A \to \mathbb{Z}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot, kutsutaan topologiseksi asteeksi.

(1) Jos $X = \mathbb{R}^N, D$ on avoin ja rajoitettu ja jos $p \in D$, niin
$$d(I|_D, D, p) = 1,$$
missä I on joukon X identtinen kuvaus

(2) Jos $d(\phi, D, p) \neq 0$, niin on olemassa $x \in D$ siten, että $\phi(x) = p$.

(3) Jos $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ja jos $p \notin \phi(\partial D_1 \cup \partial D_2)$ niin
$$d(\phi|_{D_1}, D_1, p) + d(\phi|_{D_2}, D_2, p) = d(\phi, D_1 \cup D_2, p).$$

(4) Jos $h : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ on C^0 homotopia siten, että $p \notin h(t)(\partial D)$ kaikilla $t \in [0,1]$, niin
$$d(h(t), D, p) = d(h(0), D, p).$$

(5) Jos $p \notin \phi(\partial D)$, niin
$$d(\phi, D, p) = d(\phi - p, D, 0).$$

LUKU 1

Merkintöjä ja esitietoja

Tässä tutkielmassa pyritään käyttämäään vakiintuneita ja selkeitä merkintöjä. Osa merkinnöistä on selitetty asiayhteydessä kertaalleen, mutta listataan kuitenkin selkeyden vuoksi muutamia tärkeimpiä, ja mahdollisesti sekaannusta aiheuttavia merkintöjä. Samoja merkintöjä pyritään käyttämään läpi tutkielman.

1.1. Merkintöjä

- Pisteen $x \in \mathbb{R}^N$ ääretön normi on $|x| := \max\{|x_i| : i = 1, ..., N\}$. Pisteen x Euklidista normia merkitään $|x|_2 := \sqrt{x_1^2 +, ..., +x_N^2}$
- $\rho(x, y) := |x - y|$ ja $\mathrm{dist}(x, y) := |x - y|_2$
- Kun $S \subset \mathbb{R}^N$ niin pisteen x etäisyys joukosta S on $\rho(x, S) := \inf\{\rho(x, y) : y \in S\}$
- $Q(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^N : \rho(x, y) < r\}$
- $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x, y) < r\}$, eli $B(x, r)$ on x keskinen ja r-säteinen pallo.
- Kun $S \subset \mathbb{R}^N$ niin $\overline{S} := S \cup \partial S$, missä ∂S on joukon S reuna.
- $C(\overline{D})^N := \{f : \overline{D} \to \mathbb{R}^N : \text{funktio } f \text{ on jatkuva}\}$ kun $D \subset \mathbb{R}^N$ ja $||f|| := \sup\{|f(x) : x \in D\}$
- Olkoon $f : D \to \mathbb{R}^N$, tällöin $\mathrm{spt}(f) = \{x \in D : f(x) \neq 0\}$
- $C_c(D)^N := \{f \in C(\overline{D})^N : \mathrm{spt}(f) \subset\subset D\}$, missä $\subset\subset$ tarkoittaa että joukon sulkeuma on kompakti osajoukko.
- Jos funktio $f \in C^1(D)^N$, niin funktion derivaattamatriisi on $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,...,N}$ ja $J_f(x) := \det \nabla f(x)$.
- Jos funktio $f \in C^1(\overline{D})^N$ niin funktiolla f on jatke $\tilde{f}$ avoimella joukolla $D_{\tilde{f}} \supset \overline{D}$ ja $\nabla \tilde{f}$ on jatkuva joukossa $D_{\tilde{f}}$
- Jos funktio $f \in C^1(\overline{D})^N$ niin $||f||_1 := ||f|| + ||\nabla f||$.
- Piste x on funktion f p-piste jos $f(x) = p$
- $\mathrm{div} f$ tarkoittaa funktion f divergenssiä, $\mathrm{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$

1.2. Esitietoja

Käydään myös aluksi läpi muutamia määritelmiä ja tuloksia joita tarvitaan tätä tutkielmaa lukiessa.

Määritelmä 1.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^N$ on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa avoimet joukot $U, V \subset \mathbb{R}^N$ siten, että

(1) $A \cap V \neq \emptyset$
(2) $A \cap U \neq \emptyset$
(3) $U \cap V = \emptyset$

(4) $A \subset (V \cup U)$.

Muutoin joukko A on *yhtenäinen* [**2**].

KUVA 1.1. Joukko A on epäyhtenäinen ja joukko B on yhtenäinen.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^N$. Joukon A pisteen p sisältävä *yhtenäinen komponentti* (*p-komponentti*) on joukko

$$E := \cup\{C \subset A : C \text{ on yhtenäinen ja } p \in C\}. \qquad [\mathbf{2}]$$

HUOMAUTUS 1.3. Joukko $A \subset \mathbb{R}^N, A \neq \emptyset$ on yhtenäinen jos ja vain jos joukolla A on vain yksi komponentti. Eli jos $p, q \in A$ niin p-komponentti $=$ q-komponentti. Esimerkiksi kuvassa 1.1 joukolla A on kolme komponenttia, mutta joukolla B on vain yksi komponentti.

LAUSE 1.4. *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^N$ avoin. Tällöin joukon A yhtenäiset komponentit ovat avoimia.*

PROPOSITIO 1.5. *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^N$ avoin. Tällöin joukolla A on enintään numeroituva määrä yhtenäisiä komponentteja,* [**2**].

Joukkojen yhtenäisyys ja yhtenäiset komponentit ovat suuressa roolissa tämän tutkielman tuloksissa, sillä topologinen aste riippuu voimakkaasti missä funktion määrittelyjoukon komponentissa tarkasteltavan pisteen p alkukuvat sijaitsevat.

Seuraavat määritelmät ja lause ovat olennainen osa eräiden esitettyjen tulosten todistusta.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Funktio $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ on *kutistus*, jos on olemassa $q \in \mathbb{R}, 0 \leq q < 1$ siten, että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^N$ pätee

$$|f(x) - f(y)|_2 \leq q|x - y|_2. \qquad [\mathbf{3}]$$

LAUSE 1.7 (Banachin kiintopistelause). *Olkoon funktio $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ kutistus. Tällöin funktiolla f on täsmälleen yksi kiintopiste,* [**4**].

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon $B \subset A$. Funktio $g : A \to \mathbb{R}^N$ on funktion $f : B \to \mathbb{R}^N$ jatke, jos $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in B$, ja funktio g on funktion f *jatkuva jatke*, jos g on myös jatkuva.

MÄÄRITELMÄ 1.9. Määritellään kahden funktion f, g välinen *konvoluutio* seuraavasti:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} g(x-y)f(y)dy.$$

LUKU 2

Asteteoria jatkuville funktioille

Tässä luvussa käydään läpi topologisen asteen määritelmiä jatkuville ja jatkuvasti derivoituville funktioille. Ensimmäisenä tämä tehdään jatkuvasti derivoituville funktioille, jonka jälkeen määritelmää laajennetaan muutamien tuloksien kautta myös jatkuville funktioille. Topologiselle asteelle on ominaista, että sitä ei ole määritelty funktion kuvajoukon reunalla, vaan pikemminkin funktion kuvapisteiden reuna määrittelee funktion topologisen asteen jossain pisteessä p. Myös derivaattojen nollakohdat ovat hieman ongelmallisia, ja siksi topologisen asteen määrittelyä ns. kriittisille arvoille ei pystytä suoraan tekemään.

2.1. Topologinen aste jatkuvasti derivoituville funktioille

Topologinen aste määritellään ensimmäisenä jatkuvasti derivoituville funktioille. Tässä kappaleessa on tarkoitus rakentaa myös perustusta, jonka avulla määritelmää pystytään laajentamaan.

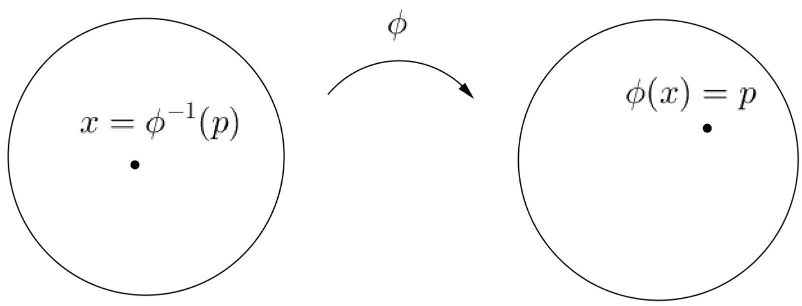
Jatkossa kaikilla käsiteltävillä funktiolla on aina N kappaletta muuttujia ja funktion kuvapisteet ovat joukon $\mathbb{R}^N$ pisteitä, ellei toisin mainita.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon $\phi \in C^1(\overline{D})^N, x \in \overline{D}$. Sanotaan, että x on funktion ϕ kriittinen piste jos $J_\phi(x) = 0$. Merkitään $Z_\phi := \{x \in \overline{D} : J_\phi(x) = 0\}$.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon $\phi \in C^1(\overline{D})^N$ ja $p \notin \phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial D)$. Funktion ϕ topologinen aste pisteessä p, rajoitetulle joukolle $D \subset \mathbb{R}^N$ on määritelty siten, että

$$d(\phi, D, p) := \sum_{x \in \phi^{-1}(p)} \operatorname{sgn}(J_\phi(x)), \tag{2.1}$$

jossa $\operatorname{sgn}(t) = 1$ kun $t > 0$ ja $\operatorname{sgn}(t) = -1$, kun $t < 0$.



KUVA 2.1. Funktion ϕ aste pisteessä p.

Huomaa, että Määritelmän 2.2 mukaan, jos $p \notin \phi(D)$ niin $d(\phi, D, p) = 0$. Topologisen asteen määritelmässä tarkastellaan siis Jacobin determinantin merkkiä pisteen p alkukuvapisteissä ja summataan joko -1 tai $+1$.

Esimerkki 2.3. Olkoon $\phi : [0, 2] \times [0, 2] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x, y) = (x + y, 2x + 3)$. Tällöin

$$J_\phi(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

ja pisteen $p = (2, 5)$ yksikäsitteinen alkukuva on piste $(1, 1)$ ja sen topologinen aste on

$$\sum_{x \in \phi^{-1}(2,5)} \operatorname{sgn} J_\phi(x) = \operatorname{sgn} J_\phi(1, 1) = \operatorname{sgn}(-2) = -1$$

Lemma 2.4. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^N$ avoin ja rajoitettu joukko, $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ ja $p \notin \phi(Z_\phi)$. Tällöin joukko $\phi^{-1}(p)$ on äärellinen.*

Todistus. Todistetaan tämä antiteesin kautta. Oletetaan, että on olemassa ääretön jono lukuja $\{x_k\} \in \phi^{-1}(p)$ ja $x_k \neq x_l$ kaikilla $k \neq l$. Koska $\overline{D}$ on kompakti joukko, voidaan olettaa, että on olemassa luku $\overline{x}$ jolle pätee $x_k \to \overline{x}, \overline{x} \in D$. Koska ϕ on jatkuva niin $\overline{x} \in \phi^{-1}(p)$. Funktio ϕ on jatkuvasti differentioituva, joten

$$0 = \phi(x_k) - \phi(\overline{x}) = \nabla\phi(\overline{x})(x_k - \overline{x}) + (x_k - \overline{x})\epsilon(x_k - \overline{x}), \tag{2.2}$$

missä $\lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$. Koska $\overline{x} \in \phi^{-1}(p)$ ja $p \notin \phi(Z_\phi)$, tällöin

$$0 < \gamma := \inf\{|\nabla\phi(\overline{x})u| : u \in \mathbb{R}^N, |u| = 1\}. \tag{2.3}$$

Suurilla k saadaan yhtälöistä 2.2 ja 2.3

$$\gamma \leq \left| \nabla\phi(\overline{x}) \left(\frac{x_k - \overline{x}}{|x_k - \overline{x}|} \right) \right| \leq \frac{\gamma}{2},$$

mikä on ristiriita. Näin siis $\phi^{-1}(p)$ on äärellinen. □

Mikäli Määritelmässä 2.2 sallittaisiin, että $p \in \phi(Z_\phi)$, pisteen p alkukuvajoukko ei olisi välttämättä äärellinen, eikä edellinen Lemma enää pitäisi paikkaansa.

Propositio 2.5. *Olkoon $\phi \in C^1(\overline{D})^N$ ja $p \notin (\phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial D))$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $\psi \in C^1(\overline{D})^N$ ja $||\phi - \psi||_1 \leq \delta$, niin $p \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial D)$ ja*

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$$

Todistus. Joukko $\phi^{-1}(p)$ on joko äärellinen, tai tyhjä (Lemma 2.4). Tarkastellaan nämä tapaukset erikseen.

Oletetaan ensin, että $\phi^{-1}(p) = \emptyset$.

Olkoon $\delta = \frac{1}{2}\rho(p, \phi(\overline{D})) > 0$ ja $\psi \in C^1(\overline{D})^N$ siten, että $||\phi - \psi||_1 \leq \delta$. Tällöin $\psi^{-1}(p) = \emptyset$. Siten myös $p \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial D)$ ja

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p) = 0$$

Olkoon nyt $\phi^{-1}(p) = \{a_1, ..., a_k\}$. Nyt näytetään että on olemassa $r > 0, \delta > 0$ siten, että aina kun $\psi \in C^1(\overline{D})^N$, $||\phi - \psi||_1 \leq \delta$, niin funktiolla ψ on täsmälleen yksi p-piste joukossa $Q(a_i, r), i = 1, ..., k$.

Koska joukko $\phi^{-1}(p)$ on äärellinen, niin on olemassa $r_0 > 0$ siten, että

$$0 < r_0 < \min\{\frac{\rho(a_i, a_j)}{3} : i \neq j, i, j = 1, ..., k\},$$
$$r_0 < \min\{\frac{\rho(a_i, \partial D) \cup Z_\phi}{3} : i = 1, ...k\}$$

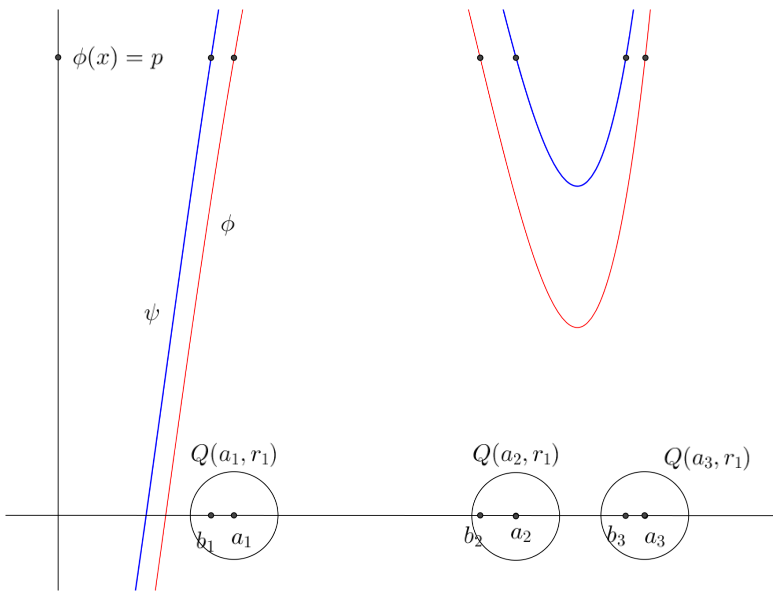
Olkoon $Q(r) := Q(a_1, r) \cup ... \cup Q(a_k, r)$ ja $c := \min\{|J_\phi(a_i)| : x \in \overline{D}\}$. Nyt siis c>0, sillä $J_\phi(a_i) \notin Z_\phi$, ja koska J_ϕ on jatkuva joukossa $\overline{D}$, on olemassa $0 < r_1 < r_0$ siten, että $|J_\phi(x)| \geq \frac{2}{3}c$ kaikilla $x \in Q(r_1)$. Valitaan $\delta_1 > 0$ siten, että

$$\sup\{|J_\phi(x) - J_\psi(x)| : x \in \overline{D}\} \leq \frac{1}{3}c$$

aina kun $||\phi - \psi||_1 \leq \delta_1$. Näin ollen

$$\sup\{|J_\psi(x)| : x \in Q(r_1)\} \geq \frac{1}{3}c,$$

jos $||\phi - \psi|| \leq \delta_1$.



KUVA 2.2. Suuntaa antava kuva todistuksen ajatuksesta.

Nyt kiinnitetään $i \in 1, ..., k$ ja halutaan ratkaista yhtälö $\psi(x) = p$ joukossa $Q(a_i, r_i)$. Merkitään

$$a := a_i, \quad h := \phi(a_i) - \psi(a_i), \quad V := (\nabla\psi(a))^{-1}.$$

Huomaa myös että V on olemassa sillä ψ on jatkuvasti differentioituva. Määritellään $T, W : Q(0, r_1) \to \mathbb{R}^N$.

$$T(z) := \psi(a + z) - \psi(a) - \nabla\psi(a)z, \quad W(z) := V\,(h - T(z)),$$

Nyt siis

$$\begin{aligned}\psi(a+z)=p,\ z\in Q(0,r_1) &\Leftrightarrow \psi(a+z)=\phi(a),\ z\in Q(0,r_1)\\ &\Leftrightarrow W(z)=z, \qquad\qquad z\in Q(0,r_1),\end{aligned}$$

sillä

$$W(z)=(\phi(a)-\psi(a)-\psi(a+z)+\psi(a)+\nabla\psi(a)z)(\nabla\psi(a))^{-1}=z$$

Väite 1. On olemassa $r<r_1$ ja $\delta<\delta_1$ siten, että kun $||\phi-\psi||_1<\delta$, niin yhtälöllä $W(z)=z$ on vain yksi ratkaisu.

Näytetään, että W on kutistus, ja Lauseen 1.7 mukaan sillä on silloin täsmälleen yksi kiintopiste. Nyt halutaan arvioida funktion komponenttia $(T(z)-T(y))_l$, jossa $y,z\in Q(0,r)$.

$$\begin{aligned}(T(z)-T(y))_l &= \psi_l(a+z)-\psi_l(a+y)-(\nabla\psi(a)(z-y))_l\\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta}\psi_l(a+\theta z+(1-\theta)y)d\theta-(\nabla\psi(a)(z-y))_l\\ &= \int_0^1\sum_{j=1}^N(z_j-y_j)\left[\frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a+\theta z+(1-\theta)y)-\frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a)\right]d\theta\\ &= \sum_{j=1}^N(z_j-y_j)\int_0^1[\frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(\xi)-\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi)+\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(\xi)-\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a)+\frac{\partial\phi_l}{\partial x_j}(a)\\ &\quad-\frac{\partial\psi_l}{\partial x_j}(a)]d\theta,\end{aligned}$$

jossa $\xi=a+\theta z+(1-\theta)y$. Tämän perusteella siis

$$|T(z)-T(y)|\le N|z-y|\int_0^1[2\delta+\epsilon(r)]d\theta=N|z-y|(2\delta+\epsilon(r)) \tag{2.4}$$

missä $\epsilon:[0,r_1]\to\mathbb{R}$ on määritelty siten, että

$$\epsilon(r):=\sup\{\int_0^1\left|\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}(a+\theta z+(1-\theta)y)-\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}(a)\right|d\theta: y,x\in\overline{Q}(0,r),i,j=1,\dots,N\}.$$

Funktio ϵ on kasvava ja $\lim_{r\to 0^+}\epsilon(r)=0$. Näin ollen

$$\begin{aligned}|W(z)-W(y)| &= |V(h-T(z))-V(h-T(y))|\\ &= |V(T(z)-T(y))|\\ &= |V||T(z)-T(y)|\\ &\le N|y-z||V|(2\delta+\epsilon(r)) \qquad \text{(yhtälöstä 2.4).}\end{aligned}$$

Myös pätee

$$\begin{aligned}|W(z)| &= |W(z) - W(0) + W(0)| \\ &\leq |W(z) - W(0)| + |W(0)| \\ &= |W(z) - W(0)| + |V(h - T(0))| \\ &\leq |W(z) - W(0)| + |V||h|.\end{aligned}$$

Otetaan $r \leq r_1$ siten, että

$$N|V|\epsilon(r) < \frac{1}{6},$$

ja valitaan $\delta \leq \delta_1$ siten, että

$$|V|\delta \leq \frac{r}{6} \text{ ja } N|V|2\delta < \frac{1}{6}$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned}|W(z) - W(y)| &\leq N|y - z||V|(2\delta + e(r)) \\ &= N|V|\epsilon(r)|y - z| + N|V|2\delta|y - z| \\ &< \frac{1}{6}|y - z| + \frac{1}{6}|y - z| \\ &= \frac{|y - z|}{3},\end{aligned}$$

kaikilla $y, z \in \overline{Q}(0, r)$ ja

$$\begin{aligned}|W(z)| &\leq |V||h| + |W(z) - W(0)| \\ &\leq |V|\delta + \frac{|z - 0|}{3} \\ &\leq \frac{r}{6} + \frac{r}{3} \\ &\leq r\end{aligned}$$

Siten $W : \overline{Q}(0, r) \to \overline{Q}(0, r)$ on kutistus ja yhtälöllä $W(z) = z$ on yksi ratkaisu joukossa $\overline{Q}(0, r)$.

Väite 2. $\psi^{-1}(p) \subset Q(r)$

Oletetaan, että $\psi(x) = p$ jollakin $x \in \overline{D} \setminus Q(r)$. Tällöin kun

$$\delta \leq \frac{1}{2}l(r) := \frac{1}{2}\min\{|\phi(x) - p| : x \notin Q(a_1, r) \cup \cdots \cup Q(a_k, r)\},$$

niin

$$|\phi(x) - \psi(x)| \geq l(r) \geq 2\delta > |\phi(x) - \psi(x)|,$$

mikä on ristiriita. Tällöin siis väite 2 on todistettu.

Merkitään

$$\psi^{-1}(p) = \{b_1, \ldots, b_k\}.$$

Väitteestä 2 ja $Q(r) \cap \partial D = \emptyset$, voidaan todeta, että $p \notin \psi(\partial D)$. Muistetaan, että

$$d(\phi, D, p) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{sgn}(J_\phi(a_i)),$$

mutta nyt myös

$$d(\psi, D, p) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{sgn}(J_\psi(b_i)).$$

Koska kaikilla $i = 1, \ldots, k$, J_ϕ on jatkuva joukossa $Q(a_i, r)$ ja $J_\phi(x) \neq 0$ kaikilla $x \in Q(a_i, r)$, voidaan päätellä, että J_ϕ on joko positiivinen tai negatiivinen joukossa $Q(a_i, r)$ ja siten

$$\mathrm{sgn}(J_\phi(a_i)) = \mathrm{sgn}(J_\phi(b_i)).$$

Lopultakin kun $|J_\phi(b_i) - J_\psi(b_i)| \leq \frac{c}{3}$, niin $\mathrm{sgn}(J_\phi(b_i)) = \mathrm{sgn}(J_\psi(b_i))$ ja päästään tulokseen

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p).$$

□

Tässä tuloksessa on hyvä huomata, että oletus $||\phi - \psi||_1$ on todella tarpeellinen. Tällä pystytään sanomaan, että funktion ψ heilahtelu on hallittavissa, eikä esimerkiksi olisi funktion $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ kaltaista.

Lemma 2.6 (Sardin Lemma). *Olkoon $\phi \in C^1(\overline{D})^N$. Tällöin $\phi(Z_\phi)$ on nollamittainen.*

Todistus. Koska $\phi \in C^1(\overline{D})^N$ ja $\overline{D}$ on kompakti joukko, on olemassa $M > 0$ siten, että

$$|\phi(x) - \phi(y)| + |\nabla\phi(x) - \nabla\phi(y)| \leq M|x - y| \tag{2.5}$$

kaikilla $x, y \in \overline{D}$. Määritellään pisteelle $x \in \overline{D}$, $T_x : \overline{D} \to \mathbb{R}^N$

$$T_x(y) := \phi(x) + \nabla\phi(x)(x - y)$$

Koska $\nabla\phi$ on tasaisesti jatkuva joukossa $\overline{D}$, kaikilla $\epsilon > 0$ voidaan valita $\delta > 0$ siten, että

$$\left| \frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial\phi_i(y)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{\epsilon}{N}$$

kaikilla $i, j = 1, ...N$ ja kaikille $x, y \in \overline{D}$ joille $|x - y| \leq \delta$. Tästä seuraa, että

$$|\phi(y) - T_x(y)| \leq \epsilon|x - y|, \tag{2.6}$$

kun $|x - y| \leq \delta$.

Voidaan olettaa, että D on kuutio jonka sivun pituus on $l > 0$. Valitaan $s \in \mathbb{N}$ siten, että $2\frac{l}{s} < \delta$ ja jaetaan D s^N osaan kuutioita $D_k, k = 1, ..., s^N$ joiden sivujen pituus on $\frac{l}{s}$. Näytetään aluksi, että jos joku joukko D_k sisältää kriittisen pisteen, tällöin joukolla $\phi(D_k)$ on pieni mitta. Jos $x \in D_k$ ja $J_\phi(x) = 0$, tällöin kaikilla $y \in D_k$ on $|x - y| \leq 2\frac{l}{s} < \delta$ ja yhtälöiden 2.5 ja 2.6 mukaan

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq 2M\frac{l}{s}, \quad |\phi(y) - T_x(y)| \leq 2\epsilon\frac{l}{s}. \tag{2.7}$$

Koska $J_\phi(x) = 0$ niin T_x kuvaa joukon $\overline{D}$ aliavaruuden osaksi P_x jonka dimensioksi tulee maksimissaan $N-1$, yhtälöstä 2.7 saadaan $\rho(\phi(y), P_x) \leq 2\epsilon\frac{l}{s}$. Tällöin jos $y \in D_k$, niin $\phi(y)$ on kuutiosssa jossa on $N-1$, joiden pituudet ovat vähemmän kuin $4M\frac{l}{s}$ joukossa P_x ja viimeinen N:s sivu on pituudeltaan vähemmän kuin $4\epsilon\frac{l}{s}$. Täten Lebesquen mitan monotonisuuden perusteella

$$\mathbb{L}^N(\phi(D_k)) \leq (4l)^N M^{N-1}\frac{\epsilon}{s^N}$$

ja

$$\mathbb{L}^N(\phi(Z_\phi)) \leq (4l)^N M^{N-1}\epsilon.$$

Joten $\mathbb{L}^N(\phi(Z_\phi)) = 0$. □

Sardin Lemma on tärkeä tulos kun määritellään topologinen aste niille pisteille joilla $J_\phi(x) = 0$.

LEMMA 2.7. *Olkoon funktio* $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N), K := spt\,(f)$ *ja* $D \subset \mathbb{R}^N$. *Olkoon* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ *jatkuva polku siten, että*

$$A := \{k + \gamma(s) : k \in K, s \in [0,1]\} \subset D. \tag{2.8}$$

Tällöin on olemassa funktio $v \in C_c^1(D)$ *siten, että*

$$div\, v(x) = f(x - \gamma(0)) - f(x - \gamma(1)).$$

Käydään läpi tämän todistuksen idea. Tarkan todistuksen voi lukea *Fonsecan* ja *Gangbon* kirjasta [**1**, s. 10-11]

TODISTUS. Oletetaan, että $\gamma(s) \equiv s\overline{x}$ ja määritellään

$$F(x) := \int_0^1 f(x - \theta\overline{x})d\theta, \quad v(x) = \overline{x}F(x).$$

Selvästikin $F \in C^1(\overline{D})$ ja $\mathrm{spt}(F) \subset A$. Jos $x \in \overline{D}$ ja $F(x) \neq 0$, niin tällöin on olemassa $\theta \in [0,1]$ siten, että $f(x - \theta\overline{x}) \neq 0$ ja siten $x - \overline{x} \in K \Leftrightarrow x \in K + \theta\overline{x}$, joten $x \in A$. Myös $A \subset\subset D$, joten lopulta $v \in C_c^1(D)^N$. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\ v(x) &= \sum_{i=1}^N \overline{x}_i \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j}(x - \theta\overline{x})\frac{\partial x_j}{\partial x_i}d\theta \\
&= \sum_{i=1}^N \overline{x}_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - \theta\overline{x})d\theta \\
&= -\int_0^1 \frac{d}{d\theta}f(x - \theta\overline{x})d\theta \\
&= f(x) - f(x - \overline{x}).
\end{aligned}$$

Yleisen tapauksen todistamiseen käytetään hyödyksi ekvivalenssirelaatiota. □

Propositio 2.8. *Olkoon* $\phi \in C^1(\overline{D})^N, p \notin \phi(\partial D) \cup \phi(Z_\phi)$ *ja funktio* $f_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *siten, että* $\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(x)\,dx = 1$ *ja spt* $(f_\epsilon) \subset Q(0,\epsilon)$. *Tällöin on olemassa* $\epsilon(p) > 0$ *siten, että*

$$d(\phi, D, p) = \int_D f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x)\,dx$$

kaikilla $0 < \epsilon < \epsilon(p)$

Todistus. Kun $p \notin \phi(Z_\phi)$, niin joko $\phi^{-1}(p) = \emptyset$ tai $\phi^{-1}(p) = \{a_1, ..., a_k\}$. Oletetaan aluksi, että $\phi^{-1}(p) = \emptyset$. Määritelmän 2.2 mukaan $d(\phi, D, p) = 0$. Kun asetetaan $\delta := \rho(p, \phi(\overline{D})) > 0$ saadaan $|\phi(x) - p| \geq \delta > \epsilon$ kaikilla $x \in \overline{D}, 0 < \epsilon < \delta$. Siten $f_\epsilon(\phi(x) - p) = 0$ kaikilla $x \in \overline{D}$ ja

$$\int_D f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx = 0.$$

Oletetaan seuraavaksi, että

$$\phi^{-1}(p) = \{a_i, .., a_k\}.$$

Valitaan $r > 0$ siten, että $\overline{B}(a_i, r) \subset\subset D, i = 1, ..., k$, ja $\overline{B}(a_i, r) \cap \overline{B}(a_j, r) = \emptyset$ jos $i \neq j$, ja $J_\phi(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \cup_{i=1}^k \overline{B}(a_i, r)$. Koska $J_\phi(a_i) \neq 0$ niin Käänteisfunktiolauseen mukaan on olemassa $\epsilon_1 > 0$ siten että

$$Q(p, \epsilon_1) \subset \phi(\overline{B}(a_i, r)), \text{kaikilla } i = 1, ..., k.$$

Myös on olemassa $\epsilon_2 > 0$ siten, että

$$|\phi(x) - p| < \epsilon_2, x \in D \Rightarrow x \in \cup_{i=1}^k \overline{B}(a_i, r).$$

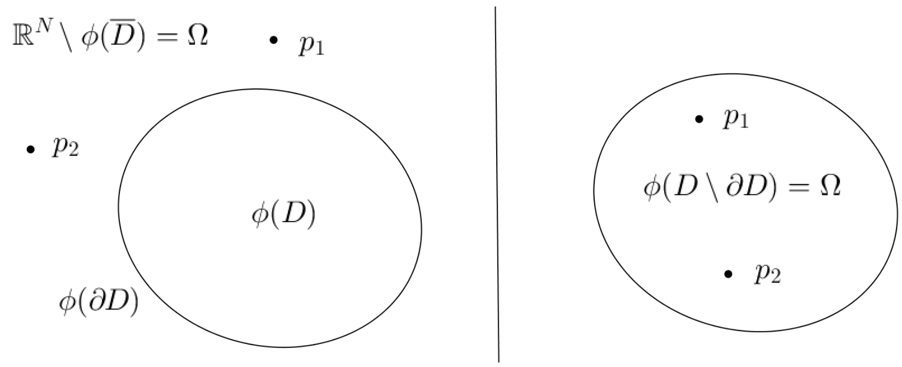
Kun valitaan $\epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ niin

$$\begin{aligned}
\int_D f_\epsilon(\phi(x) - p) J_\phi(x) dx &= \int_{|\phi(x)-p|<\epsilon} f_\epsilon(\phi(x) - p) |J_\phi(x)| \mathrm{sgn}(J_\phi(a_i)) dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{\overline{B}(a_i,r)\cap\phi^{-1}(Q(p,\epsilon))} f_\epsilon(\phi(x) - p) |J_\phi(x)| \mathrm{sgn}(J_\phi(a_i)) dx \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}(J_\phi(a_i)) \int_{\phi(\overline{B}(a_i,r))\cap Q(p,\epsilon)} f_\epsilon(z - p) dz \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}(J_\phi(a_i)) \int_{Q(0,\epsilon)} f_\epsilon(y) dy \\
&= \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}(J_\phi(a_i)) = d(\phi, D, p).
\end{aligned}$$

□

Propositio 2.9. *Olkoon* $\phi \in C^1(\overline{D})^N$, Ω *on joukon* $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ *yhtenäinen komponentti ja* $p_1, p_2 \in \Omega \setminus \phi(Z_\phi)$. *Tällöin*

$$d(\phi, D, p_1) = d(\phi, D, p_2)$$



Kuva 2.3. Kaksi vaihtoehtoa joukosta Ω

Todistus. Jos Ω on avaruuden $\mathbb{R}$ avoin joukko, Ω on yhtenäinen jos ja vain jos Ω on polkuyhtenäinen. Oletetaan lisäksi, että $\phi \in C^2(\overline{D})^N$. Olkoon $\gamma : [0,1] \to \Omega$ jatkuva polku siten, että $\gamma(0) = p_1$ ja $\gamma(1) = p_2$. Olkoon $f_\epsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ perhe jatkuvia funktioita siten, että $\operatorname{spt}(f_\epsilon) =: K_\epsilon \subset Q(0,\epsilon)$ ja $\int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(y)dy = 1$. Proposition 2.8 mukaan on olemassa $\epsilon_0 > 0$ siten, että $0 < \epsilon \le \epsilon_0$ ja

$$d(\phi, D, p_i) = \int_D f_\epsilon(\phi(x) - p_i) J_\phi(x) dx, \;\; i = 1, 2.$$

Otetaan

$$\epsilon_1 := \frac{1}{2} \min\{\epsilon_0, \rho(\gamma, \Omega^c)\}$$

ja asetetaan

$$A := \{k + \gamma(s) : k \in K_{\epsilon_1}, s \in [0,1]\}.$$

On selvää, että $A \subset \Omega$ ja Lemman 2.7 mukaan on olemassa $v \in C_c^1(\Omega)^N$ siten, että

$$\operatorname{div} v(x) = f_{\epsilon_1}(x - p_1) - f_{\epsilon_1}(x - p_2)$$

ja spt $(v) \cap \phi(\partial D) \subset \Omega \cap \phi(\partial D) = \emptyset$. Tällöin on olemassa $u \in C_c^1(D)^N$ [**1**, s. 27] siten, että

$$\operatorname{div} u(x) = \operatorname{div} v(\phi(x)) J_\phi(x) = [f_{\epsilon_1}(\phi(x) - p_1) - f_{\epsilon_1}(\phi(x) - p_2)] J_\phi(x),$$

ja Divergenssilauseen mukaan voidaan päätellä, että

$$\begin{aligned} d(\phi, D, p_1) - d(\phi, D, p_2) &= \int_D [f_{\epsilon_1}(\phi(x) - p_1) - f_{\epsilon_1}(\phi(x) - p_2)] J_\phi(x) dx \\ &= \int_D \operatorname{div} v(\phi(x)) J_\phi(x) dx \\ &= \int_D \operatorname{div} u(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Käsitellään nyt tilannetta, jossa $\phi \in C^1(\overline{D})^N$. Olkoon Ω ja $\gamma : [0,1] \to \Omega$ kuten ensimmäisessä tapauksessa. Proposition 2.5 mukaan on olemassa $\delta(p_i) > 0, i = 1, 2$

ja funktio $\psi \in C^1(\overline{D})^N$ siten, että $||\psi - \phi||_1 \leq \delta(p_i)$ ja funktiolle ψ pätee $p_i \notin \psi(\partial D) \cup \psi(Z_\psi)$ ja $d(\phi, D, p_i) = d(\psi, D, p_i)$. Olkoon

$$\delta := \frac{1}{2}\min\{\delta(p_1), \delta(p_2), \rho(\gamma, \phi(\partial D))\}.$$

Näytetään että p_1, p_2 ovat samassa joukon $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$ yhtenäisessä komponentissa kun $||\phi - \psi|| < \delta$.

Kun $x \in \partial D, s \in [0,1]$ niin

$$\begin{aligned}
|\gamma(s) - \psi(x)| &= |\gamma(s) - \phi(x) + \phi(x) - \psi(x)| \\
&\geq \rho(\gamma(s), \phi(\partial D)) - \frac{1}{2}\rho(\gamma, \phi(\partial D)) \\
&\geq \frac{1}{2}\rho(\gamma, \phi(\partial D)) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Täten $\gamma(s) \in \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$ kaikilla $s \in [0,1]$. Koska γ yhdistää pisteet p_1 ja p_2 niin päätellään, että p_1 ja p_2 kuuluvat samaan joukon $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$ yhtenäiseen komponenttiin. Lopulta kun otetaan $\psi \in C^2(\overline{D})^N$ siten, että $||\psi - \phi||_1 \leq \delta$ saadaan

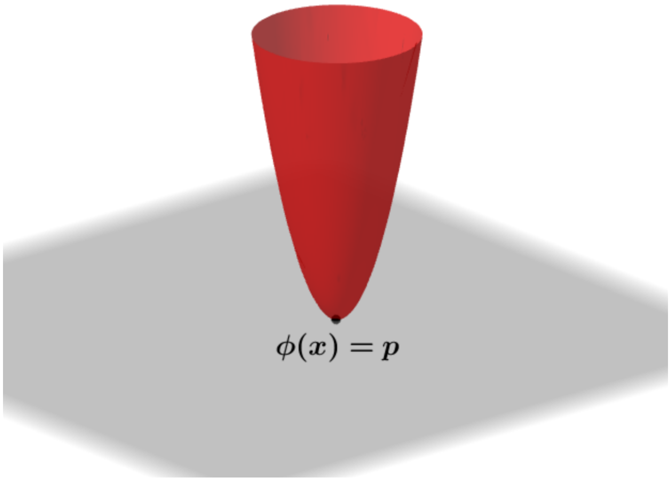
$$d(\phi, D, p_1) = d(\psi, D, p_1) = d(\psi, d, p_1) = d(\psi, D, p_2) = d(\phi, D, p_2)$$

□

Tästä lauseesta saadaan tulokseksi $d(\phi, D, p_1) = d(\phi, D, p_2) = d(\phi, D, \Delta_i)$ kun pisteet p_1, p_2 ovat samassa yhtenäisessä komponentissa Δ_i (Lause 2.13).

Tähän asti funktion ϕ astetta pisteessä $\phi(x) = p$ määrittelyjoukon D suhteen ei ole määritelty niissä pisteissä, joissa $J_\phi(x) = 0$. Kun kriittisille pisteille määritellään topologista astetta, halutaan tutkia niitä pisteitä kriittisen pisteen ympärillä, joissa Jacobin determinantti ei saa arvoa 0. Määritelläänkin seuraavassa aste myös näille pisteille, niin saadaan taas laajennettua topologisen asteen määritelmää yleisemmälle tasolle.

Määritelmä 2.10. Olkoon $\phi \in C^1(\overline{D})^N, p \notin \phi(\partial D)$ siten, että $p \in \phi(Z_\phi)$. Funktion ϕ aste pisteessä $p \in D$ on luku $d(\phi, D, q)$, jossa $q \notin (\phi(Z_\phi)) \cup \phi(\partial D)$ ja $|p - q| < \rho(p, \phi(\partial D))$.



Kuva 2.4. Piste on $(0,0)$ funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ kriittinen piste. Huomaa kuitenkin, että tässä tutkielmassa käsiteltävät funktiot ovat muotoa $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Tässä kuitenkin kahden muuttujan funktio saa reaalilukuarvoja.

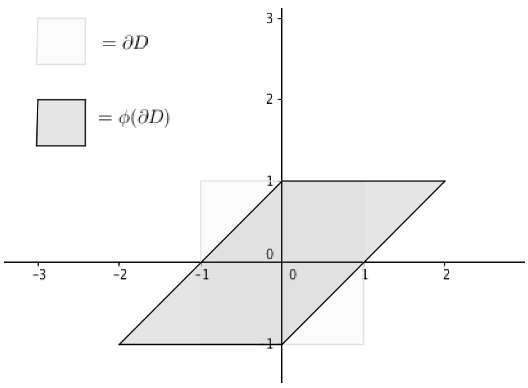
Miksi näin?

(1) Sardin Lemman mukaan $Q(p,r) \not\subset \phi(Z_\phi)$ kaikilla $r > 0$. Tällöin on siis olemassa $q_r \in Q(p,r)$ siten, että $q_r \notin \phi(Z_\phi)$. Erityisesti tarpeeksi pienellä $r, Q(p,r) \cap \phi(\partial D) = \emptyset$ koska $\phi(\partial D)$ on kompakti joukko ja $p \notin \phi(\partial D)$. Eli on siis olemassa $q \notin (\phi(Z_\phi) \cup \phi(\partial D))$ siten, että $|p - q| < \rho(p, \phi(\partial D))$

(2) Oletetaan, että $|q_i - p| < \rho(p, \phi(\partial D)), i = 1,2$ ja $q_i \notin \phi(\partial D) \cup \phi(Z_\phi), i = 1,2$. Tällöin $q_i \in B(p, \rho(p, \phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D), i = 1,2$. Koska $B(p, \rho(p, \phi(\partial D)))$ on yhtenäinen joukko, joka sisältyy joukkoon $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$, niin q_1 ja q_2 ovat samassa yhtenäisessä komponentissa ja Proposition 2.9 mukaan

$$d(\phi, D, q_1) = d(\phi, D, q_2).$$

Esimerkki 2.11. Olkoon $\phi : D \to \mathbb{R}^2, \phi(x,y) = (y - x^3, y)$, missä $D :=]-1,1[\times]-1,1[$. Määritellään funktion ϕ topologinen aste $d(\phi, D, p)$ pisteessä $p = (0,0)$ joukolla D.



Kuva 2.5. Joukot D ja $\phi(D)$.

$\phi(x,y) = (0,0)$ jos ja vain jos $(x,y) = (0,0)$. Eli $\phi(0,0) \notin \phi(\partial D)$, joten $d(\phi, D, p)$ on hyvin määritelty. Tämä on kuitenkin funktion ϕ kriittinen piste, sillä

$$J_\phi(x) = \begin{vmatrix} -3x^2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3x^2 = 0, \text{ pisteessä } (0,0).$$

Valitaan $q = (-\frac{1}{2}, 0)$, niin q ja $(0,0)$ kuuluvat samaan joukon $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ yhtenäiseen komponenttiin. Erityisesti $\phi(x,y) = q$ jos ja vain jos $(x,y) = (\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}}, 0)$. Koska $q \notin \partial D$ niin nähdään, että

$$d(\phi, D, q) = \sum_{x \in \phi^{-1}(p)} \operatorname{sgn}(J_\phi(x)) = \operatorname{sgn}(J_\phi(\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}}, 0)) = -1,$$

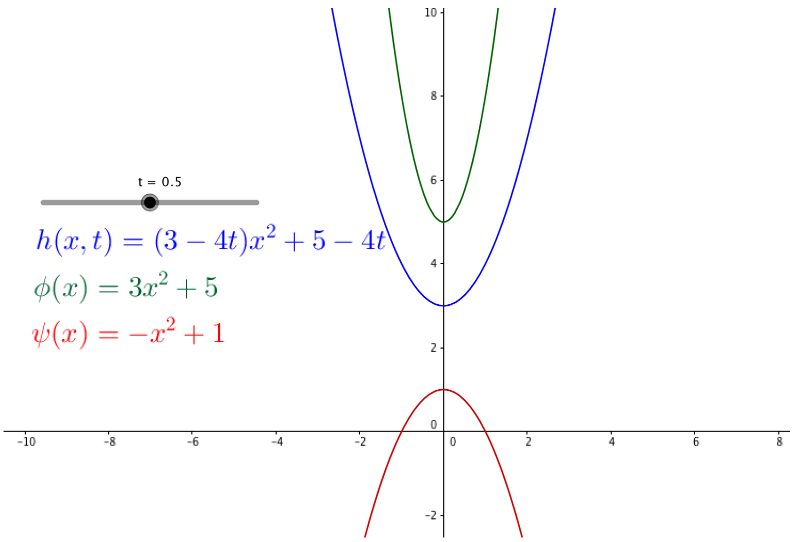
joten

$$d(\phi, D, p) = -1.$$

Määritellään seuraavaksi mitä homotopia on. Jos kaksi funktiota ovat homotopiset, ne voidaan muuntaa helposti toisikseen jatkuvalla kuvauksella.

Määritelmä 2.12. Olkoon $\phi, \psi \in C^1(\overline{D})^N$ ja $H : \overline{D} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$. Sanotaan että H on C^1 homotopia funktioiden ϕ ja ψ välillä, jos

(1) $H_t \in C^1(\overline{D})^N$ kaikilla $t \in [0,1]$
(2) $\lim_{t \to s} ||H_t - H_s||_1 = 0$ kaikkilla $s \in [0,1]$
(3) $H_0(x) = \phi(x), H_1(x) = \psi(x)$ kaikilla $x \in \overline{D}$, jossa $H_t(x) = H(x,t), x \in \overline{D}, t \in [0,1]$



Kuva 2.6. $H(x,t)$ on C^1 homotopia funktioiden ϕ ja ψ välillä, $H(x,0) = \phi(x)$ ja $H(x,1) = \psi(x)$

Huomaa, että esimerkiksi kuvaukset $x \mapsto x^2$ ja $x \mapsto x^3$ ovat C^1 homotopiset vain jos nämä määritellään positiivisille reaaliluvuille, sillä kuvauksen $x \mapsto x^{2+t}$ pitää olla jatkuvasti derivoituva kaikilla $t \in [0,1]$.

Osa seuraavan Lauseen ominaisuuksista jo tiedetään, mutta nyt voidaan ottaa tarkasteluun myös kriittiset pisteet.

LAUSE 2.13. *Olkoon* $\phi \in C^1(\overline{D})^N$.

(1) $d(\phi, D, .)$ *on vakio kaikilla joukon* $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ *yhtenäisillä komponenteilla.*
(2) *Jos* $p \notin \phi(\partial D)$ *niin on olemassa* $\epsilon > 0$ *siten, että funktiolle* $\psi \in C(\overline{D})^N$ *pätee* $||\psi - \phi||_1 \leq \epsilon$, $p \notin \psi(\partial D)$ *ja* $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$
(3) *Jos* H *on* C^1 *homotopia funktioiden* ψ *ja* ϕ *välillä ja* $p \notin (H_t(\partial D))$ *kaikilla* $t \in [0, 1]$, *niin* $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$
(4) *Jos* $p \notin \phi(\partial D)$ *niin* $d(\phi + a, D, p + a) = d(\phi, D, p)$ *kaikilla* $a \in \mathbb{R}^N$

TODISTUS.

(1) Olkoon Ω joukon $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ yhtenäinen komponentti ja $p_1, p_2 \in \Omega$. Jos $p_1 \notin \phi(Z_\phi)$ asetetaan $q_1 = p_1$. Mikäli tämä ei päde, niin Sardin Lemman (2.5) mukaan valitaan $q_1 \notin \phi(Z_\phi)$ siten, että $|p_1 - q_1| < \rho(p_1, \phi(\partial D))$. On selvää, että $q_1 \in \Omega$ sillä $q_1 \in B(p_1, \rho(p_1, \phi(\partial D))) \subset \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$. Samoin jos valitaan $q_2 \in \Omega$ siten, että $q_2 \in B(p_2, \rho(p_2, \phi(\partial D)))$. Proposition 2.9 mukaan $d(\phi, D, q_1) = d(\phi, D, q_2)$ ja näin tulos seuraa määritelmästä 2.10
(2) Sardin Lemman (2.5) mukaan on olemassa $q \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ siten, että $q \notin \phi(Z_\phi)$ ja $|q - p| < \frac{1}{2}\rho(p, \phi(\partial D))$. Täten p ja q kuuluvat samaan joukon $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ komponenttiin ja Proposition 2.5 mukaan on olemassa $0 < \epsilon_0 \equiv \epsilon_0(q, \phi) < \frac{1}{2}\rho(p, \phi(\partial D))$ siten, että
$$q \notin \psi(Z_\phi) \cup \psi(\partial D) \text{ ja } d(\psi, D, p) = d(\phi, D, q)$$
aina, kun $||\phi - \psi||_1 \leq \epsilon_0$. Kaikilla $x \in \partial D$ pätee
$$|\psi(x) - p| \geq |\phi(x) - p| - |\psi(x) - \phi(x)| > |p - q|,$$
joten
$$|p - q| < \frac{1}{2}\rho(p, \phi(\partial D)) \leq \rho(p, \psi(\partial D))$$
ja siten p, q kuuluvat samaan joukon $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial D)$ yhtenäiseen komponenttiin. Kohdan (1), Proposition 2.5 ja Määritelmän 2.10 perusteella
$$d(\psi, D, p) = d(\psi, D, q) = d(\phi, D, q) = d(\phi, D, p)$$
(3) Määritellään $u : [0, 1] \to \mathbb{Z}, u(t) = d(H_t, D, p)$. Näytetään, että u on jatkuva. Valitaan $t \in [0, 1]$. Koska $\lim_{t \to s} ||H_t - H_s||_1 = 0$, niin $||H_t - H_s|| \leq \epsilon$, siten kohdan (2) perusteella $d(H_t, D, p) = d(H_s, D, p)$. Näin siis u on jatkuva joukossa $[0, 1]$. Koska väli [0,1] on yhtenäinen joukko ja $u(t) \in \mathbb{Z}$ kaikilla $t \in [0, 1]$, voidaan todeta, että u on vakio välillä $[0, 1]$, eli
$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$$
(4) Väite seuraa suoraan Propositiosta 2.8

□

SEURAUS 2.14. *Olkoon* $\phi, \psi \in C^1(\overline{D})$ *ja jos* $x \in \partial D$ *niin* $\phi(x) = \psi(x)$. *Tällöin kaikilla* $p \in \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$,
$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$$

TODISTUS. Tarkastellaan konveksia homotopiaa

$$H(x,t) := t\phi(x) + (1-t)\psi(x).$$

Selvästi $p \notin H(\partial D, t)$ kaikilla $t \in [0,1]$ ja näin tulos seuraa Lauseesta 2.13 (3). □

HUOMAUTUS 2.15. Reaaliarvoisille funktioille $f : D \to \mathbb{R}$ jotka ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita, Lauseen 2.13 (1) perusteella funktion f topologinen aste on vakio, tarkemmin $d(f, D, p) \in \{-1, 0, 1\}$, kaikilla $p \in \mathbb{R} \backslash f(\partial D)$. Tämä osoittautuu todeksi myös jatkuville funktioille, ja seuraavaksi onkin tarkoitus laajentaa topologisen asteen määrittelyä.

2.2. Topologinen aste jatkuville funktioille

Tähän mennessä aste on määritelty jatkuvasti derivoituville funktioille. Tarkoituksena on laajentaa asteen määritelmää myös vain jatkuville funktioille. Tätä varten tarvitaan muutamia lauseita ja määritelmiä, jotta ymmärretään mitä ollaan tekemässä. Jatkuvaa, mutta ei jatkuvasti derivoituvaa funktiota, voidaan muokata esimerkiksi silottajallaja ja sitä kautta arvioida jatkuvasti derivoituvalla funktiolla joka on tarpeeksi lähellä alkuperäistä funktiota. Käytännössä kuitenkaan tätä ei yleensä tehdä, vaan arvioidaan vaan hyvällä funktiolla, jonka tiedetään olevan olemassa. Näin siis päästään käsiksi myös ei-jatkuvasti derivoituvien funktioiden asteeseen.

LAUSE 2.16 (Tiezen jatkolause). *Olkoon X metrinen avaruus, joukko $A \subset X$ suljettu ja $f : A \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja jatkuva funktio. Tällöin on olemassa jatkuva funktio $g : X \to \mathbb{R}$, jolle pätee*

$$\sup_{x\in X} g(x) = \sup_{x\in A} f(x) \quad \text{ja} \quad \inf_{x\in X} g(x) = \inf_{x\in A} f(x).$$

Tämän Lauseen todistus ohitetaan. Tarkoituksena on vain luoda perustaa jolla voidaan arvoida jatkuvia funktioita derivoituvilla funktioilla. Metrinen avaruus tarkoittaa joukkoa, jossa etäisyydet pisteitten välillä on määritelty.

MÄÄRITELMÄ 2.17. Funktion $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on posiitiivinen symmetrinen silottaja jos

(1) $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,
(2) $\mathrm{spt}(\theta) \subset \{x \in \mathbb{R}^N : |x|_2 \leq 1\}$
(3) $\int_{\mathbb{R}^N} \theta(x)\, dx = 1$,
(4) $\theta(x) = \mu(|x|_2)$ jollekin $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
(5) $\theta(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^N$.

Silottajan heuristisena tulkintana on kulmikkaiden funktioiden silottaminen. Esimerkiksi funktio $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$$\theta(x) := \begin{cases} C\exp(\frac{1}{|x|_2^2 - 1}) & |x|_2 < 1 \\ 0 & |x|_2 \geq 1 \end{cases}$$

on silottaja, kunhan valitaan $C \in \mathbb{R}$ siten, että $\int_{\mathbb{R}^N} \theta(x)\, dx = 1$.

LEMMA 2.18. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^N$ avoin ja rajoitettu joukko, ja $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ siten, että*

$$|\tilde{f}(x) - f(x)|_2 \leq \epsilon$$

kaikilla $x \in \overline{D}$

TODISTUS. Olkoon $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ jatkuva funktion f jatke Lauseen 2.16 mukaan. Määritellään $\theta_r : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, \theta_r(x) := \frac{1}{r^N}\theta(\frac{x}{r})$. Olkoon (Määritelmä 1.9)

$$f_r = \theta_r * g.$$

Nyt $f_r \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ kaikilla $r > 0$. Koska funktio g on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $K = \{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x, \overline{D}) \leq 1\}$, on olemassa $0 < r < 1$ siten, että

$$|g(y) - g(z)| \leq \epsilon$$

kun $|y - z| < r$. Kaikilla $x \in \overline{D}$ pätee

$$\begin{aligned}
|f_r(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x-y)g(y) - g(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x-y)g(y) - g(x) \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x-y)dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x-y))(g(y) - g(x)) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \theta_r(x-y)|g(y) - g(x)|dy \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

joten valitaan siis $\tilde{f} := f_r$. □

Näiden työkalujen avulla päästään määrittelemään aste jatkuville, $C(\overline{D})^N$, funktioille.

MÄÄRITELMÄ 2.19. Olkoon $\phi \in C(\overline{D})^N$ ja $p \notin \mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$. Funktion ϕ topologinen aste, $d(\phi, D, p)$, on luku $d(\psi, D, p)$ millä tahansa $\psi \in C^1(\overline{D})^N$, jolle $|\psi(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial D))$ kaikilla $x \in \overline{D}$.

Miksi näin?

Arvioidaan funktion ϕ jokaista komponenttia ϕ_i Lemman 2.18 mukaan jatkuvasti derivoituvalla funktiolla ψ niin saadaan $|\psi(x) - \phi(x)| < \rho(p, \phi(\partial D))$ kaikilla $x \in \overline{D}$. Nyt voidaan siis olettaa että $p \notin \psi(\partial D)$ koska $p \notin \phi(\partial D)$.

Ei ole siis väliä miten funktio ψ valitaan, sillä kun määritellään homotopia

$$H(x,t) := t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x), \quad t \in [0,1]$$

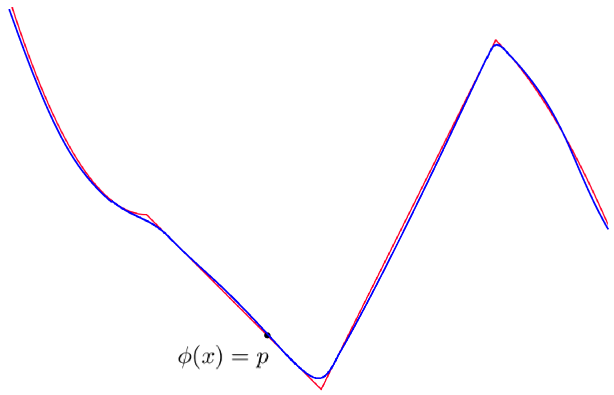
ja $p \notin H(\partial D, t)$ kaikilla $t \in [0,1]$ niin

$$\begin{aligned}
|H(x,t) - \phi(x)| &= |t(\psi_1(x) - \phi(x)) + (1-t)(\psi_2(x) - \phi(x))| \\
&\leq t|\psi_1(x) - \phi(x)| + (1-t)|\psi_2(x) - \phi(x)| \\
&< t\rho(p, \phi(\partial D)) + (1-t)\rho(p, \phi(\partial D)) \\
&= \rho(p, \phi(\partial D)).
\end{aligned}$$

Lauseen 2.13 (3) perusteella siis $d(\psi_1, D, p) = d(\psi_2, D, p)$.

PROPOSITIO 2.20. *Määritelmässä 2.19 funktio* ψ *voidaan valita siten, että* $p \notin \psi(Z_\psi)$.

Tämän Proposition todistus ohitetaan, [**1**, s. 18-19].



KUVA 2.7. Sopivalla silottajalla ei-jatkuvasti differentioituvasta funktiosta saadaan differentioituva siten, että funktion kulku ei muutu oleellisesti, eikä myöskään funktion aste pisteessä p. Kuvassa sininen käyrä on silottajalla operoitu graafi.

LAUSE 2.21. *Olkoon $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ C^1 diffeomorfismi ja $E \subset \mathbb{R}^N$ avoin ja rajoitettu joukko siten, että $f(\overline{E}) = \overline{D}$. Olkoon $q = f^{-1}(p), p \notin \phi(\partial D)$ ja $\psi = f^{-1} \circ \phi \circ f$, missä $\phi \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$. Tällöin $d(\phi, D, p) = d(\psi, E, q)$*

TODISTUS. Kun funktio f on diffeomorfismi niin $f(\partial E) = \partial D$ ja jos

$$q \in \psi(\partial E) \Leftrightarrow f^{-1}(p) \in f^{-1} \circ \phi \circ f(\partial E) \Leftrightarrow p \in \phi(\partial D),$$

joten $q \notin \psi(\partial E)$ ja $d(\psi, E, q)$ on hyvin määritelty.

Jaetaan todistus kolmeen lyhyeen osaan.

Osa 1: Oletetaan, että $\phi \in C^1(D)^N$ ja $p \notin \phi(Z_\phi)$. Voidaan olettaa, että $q \notin \psi(Z_\psi)$. Näytetään, että tässä tapauksessa $d(\psi, E, q) = d(\phi, D, p)$.

$$\begin{aligned}
d(\psi, E, q) &= \sum_{\psi(y)=q} \operatorname{sgn}(J_\psi(y)) \\
&= \sum_{(f^{-1}\circ\phi\circ f)(y)=f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}\left[\det(\nabla\phi(f(y)))\left(\frac{\det \nabla f(y)}{\det \nabla f(f^{-1}(\phi(f(y))))}\right)\right] \\
&= \sum_{(\phi\circ f)(y)=p} \operatorname{sgn}(\det(\nabla\phi(f(y)))) \\
&= \sum_{\phi(x)=p} \operatorname{sgn}(\det(\nabla\phi(x))) \\
&= (\phi, D, p).
\end{aligned}$$

Osa 2. Jos $p \in \phi(Z_\phi)$, Lemman 2.5 perusteella pistettä p voidaan approksimoida: $\{p_n\} \subset \phi(Z_\phi)^c$. Saadaan $\{q_n\} = \{f^{-1}(p_n)\} \subset \psi(Z_\psi)^c$, eli Lauseen 2.13 (1) ja osan 1 perusteella $d(\psi, E, q) = d(\phi, D, p)$.

Osa 3. Olkoon nyt taas $\phi \in C(\overline{D})^N$. Arvioidaan funktiota ϕ funktiojonolla $\phi_n \in C^1(\overline{D})^N$ joka suppenee tasaisesti kohti funktiota ϕ. Määritellään $\psi_n := f^{-1} \circ \phi_n \circ f$. Tällöin $\psi_n \in C^1(\overline{E})^N$ ja funktiojono ψ_n suppenee tasaisesti kohti funktiota ψ ja osan 2 ja Lauseen 2.13 perusteella $d(\psi, E, q) = d(\phi, D, p)$. □

LUKU 3

Topologisen asteen ominaisuuksia

Topologinen aste riippuu voimakkaasti funktiosta ϕ, funktion määrittelyjoukosta D, sen reunasta ∂D ja tietysti myös pisteestä p. Tässä luvussa on tarkoitus käydä läpi mitkä kaikki asiat vaikuttavat funktion topologiseen asteeseen.

3.1. Asteen riippuvuus funktiosta ϕ ja pisteestä p

Tässä kappaleessa on tarkoitus tutkia miten funktion aste käyttäytyy kun tarkastellaan jatkuvia funktioita. Osoittautuu, että pienillä lisäoletuksilla ja enemmällä esitiedolla pystytään yleistämään luvun 2 tuloksia myös jatkuville funktioille. Katsotaan myös millaisille funktioille asteen määrittäminen on helppoa ja missä tilanteissa aste pysyy vakiona.

LAUSE 3.1. *Olkoon* $\phi \in C(\overline{D})^N, p \notin \phi(\partial D)$ *ja* $d(\phi, D, p) \neq 0$. *Tällöin on olemassa* $x \in D$ *siten, että* $\phi(x) = p$

TODISTUS. Oletetaan, että $p \notin \phi(D)$. Koska $p \notin \phi(\partial D)$, niin $p \notin \phi(\overline{D})$. Koska $\phi(\overline{D})$ on kompakti joukko, niin $\rho(p, \phi(\partial D)) > 0$. Proposition 2.20 mukaan voidaan valita $\psi \in C^1(\overline{D})^N$ siten, että $||\psi - \phi|| < \rho(p, \phi(\partial D))$ ja $p \notin \psi(Z_\psi) \cup \psi(\partial D)$. Nyt on siis $p \notin \psi(\overline{D})$ ja siten Määritelmän 2.19 mukaan

$$0 = d(\psi, D, p) = d(\phi, D, p),$$

mikä on ristiriita. $\square$

Määritellään nyt homotopia myös jatkuville funktioille, ero edelliseen määritelmään liittyy siis funktioiden derivoituvuuteen.

MÄÄRITELMÄ 3.2. $H : \overline{D} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ on C^0 homotopia funktioiden $\phi, \psi \in C(\overline{D})^N$ välillä jos H on jatkuva joukossa $\overline{D} \times [0, 1], H(x, 0) = \phi(x)$ ja $H(x, 1) = \psi(x)$ kaikilla $x \in \overline{D}$.

LAUSE 3.3. *Olkoon* $\phi \in C(\overline{D})^N$ *ja* $p \notin \phi(\partial D)$. *Tällöin*

(1) *kaikilla* $\psi \in C(\overline{D})^N$, *joille* $||\psi - \phi|| < \rho(p, \phi(\partial D))$, *pätee*

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p);$$

(2) *jos* $H(x, t) =: h_t(x)$ *on* C^0*-homotopia funktioiden* h_0, h_1 *välillä ja* $p \notin h_t(\partial D)$ *kaikilla* $t \in [0, 1]$, *niin* $d(h_{t_1}, D, p) = d(h_{t_2}, D, p)$ *kaikilla* $t_1, t_2 \in [0, 1]$

(3) *jos* p_1, p_2 *kuuluvat samaan joukon* $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ *yhtenäiseen komponenttiin, niin*

$$d(\phi, D, p_1) = d(\phi, D, p_2)$$

Ohitetaan tämän Lauseen todistus, sillä se on hyvin samantapainen kuin edellä olleet, [**1**, s. 30-31].

Lause 3.4. *Olkoon* $\phi, \psi \in C(\overline{D})^N$ *sellaisia, että* $\phi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D}$*. Tällöin* $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$ *kaikilla* $p \notin \phi(\partial D)$*.*

Tämä on siis täysin vastaava Lauseelle 2.14, mutta pätee myös jatkuville funktioille. Tämä on kuitenkin hyvin mielenkiintoinen tulos, sillä tästä Lauseesta seuraa, että jatkuvankin funktion topologinen aste riippuu voimakkaasti sen määrittelyjoukon reunan kuvajoukosta.

Todistus. Kun $\phi(\partial D) = \psi(\partial D)$, asteet $d(\phi, D, p)$ ja $d(\psi, D, p)$ ovat olemassa kaikilla $p \notin \phi(\partial D)$. Olkoon

$$H(x,t) := t\phi(x) + (1-t)\psi(x), \;\; x \in \overline{D}, \;\; t \in [0,1].$$

H on C^0-homotopia funktioiden ϕ ja ψ välillä ja $H(\partial D, t) = \phi(\partial D)$. Lauseen 3.3 (2) mukaan, $d(H(\cdot, t), D, p)$ ei riipu parametristä $t \in [0,1]$ ja siten

$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p).$$

□

Esimerkki 3.5. Olkooon $D =]-1, 1[\times]-1, 1[$ ja

$$\phi(x, y) = (\max\{|x|, |y|\}, 0), \text{ kaikilla } x \in \overline{D}.$$

Määritellään $d(\phi, D, p)$ kun $p = (0, 0)$.

Nyt siis ϕ on jatkuva, $(0, 0) \notin \phi(\partial D)$ ja siten $d(\phi, D, p)$ on hyvin määritelty. Funktio ϕ kuvaakin joukon D reunan yhdeksi pisteeksi, $\phi(\partial D) = (1, 0)$. Määritellään

$$\psi(x, y) := (1, 0) \text{ kaikilla } x \in \overline{D}.$$

Tällöin $\psi|_{\partial D} = \phi|_{\partial D}$ ja $p \notin \psi(\overline{D})$. Tällöin Lauseen 3.1 mukaan $d(\psi, D, p) = 0$ ja Lauseen 3.4 mukaan myös $d(\phi, D, p) = 0$. Huomaa kuitenkin, että vaikka $d(\phi, D, p) = 0$ niin silti yhtälöllä $\phi(x) = p$ on ratkaisu. Lauseen 3.1 käänteinen versio ei siis pidä paikkaansa.

Propositio 3.6. *Olkoon* $\phi \in C(\overline{D})^N, p \notin \phi(\partial D)$ *ja* $q \in \mathbb{R}^N$*. Tällöin*

$$d(\phi - q, D, p - q) = d(\phi, d, p)$$

Tämän Lauseen todistus seuraa suoraan asteen määritelmästä.

3.2. Asteen riippuvuus joukosta D

Funktion aste $d(\phi, D, p)$ riippuu myös voimakkaasti joukosta D. Käydään läpi muutamia ominaisuuksia, miten aste käyttäytyy erilaisilla joukoilla D.

Lause 3.7. *Olkoon* $\phi \in C(\overline{D})^N$ *ja* $p \notin \phi(\partial D)$*.*

(1) *Jos* $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D_i$ *ja kaikilla* i *joukot* D_i *ovat avoimia ja keskenään pistevieraita, niin*

$$d(\phi, D, p) = \sum_{i \in \mathbb{N}} d(\phi, D_i, p)$$

(2) *Jos* $K \subset \overline{D}$ *on kompakti joukko ja* $p \notin \phi(K)$*, niin*

$$d(\phi, D, p) = d(\phi, D \setminus K, p)$$

TODISTUS. (1) Koska $\partial D_j \subset \partial D$, niin $d(\phi, D_i, p)$ on hyvin määritelty. Olkoon $\psi \in C^1(\overline{D})^N$ sellainen, että $||\phi - \psi|| < \rho(p, \phi(\partial D_i))$ ja $p \notin \psi(Z_\psi)$. Tällöin

$$||\phi - \psi||_{D_i} < \rho(p, \phi(\partial D)) \leq \rho(p, \phi(\partial D_i))$$

ja myös

$$d(\phi, D_i, p) = d(\psi, D_i, p).$$

Koska $p \notin \psi(Z_\psi)$ ja joukot D_i ovat keskenään pistevieraita, Lauseen 3.1 mukaan vain äärellisen monessa joukossa D_i aste $d(\psi, D_i, p) \neq 0$. Voidaan olettaa, että $d(\psi, D_i, p) \neq 0$ kun $i = 1, ..., l$ ja $d(\psi, D_i, p) = 0$ kaikille $i > l$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(\phi, D, p) &= \sum_{x \in \psi^{-1}(p)} \operatorname{sgn}(J_\psi(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{x \in \psi^{-1}(p) \cap D_i} \operatorname{sgn}(J_\psi(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{l} d(\psi, D_i, p) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} d(\psi, D_i, p) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} d(\phi, D_i, p). \end{aligned}$$

(2) Olkoon $\psi \in C^1(\overline{D})^N$ siten, että $||\phi - \psi|| < \rho(p, \phi(K \cup \partial D))$ ja $p \notin \psi(Z_\psi)$. Triviaalisti $p \notin \psi(K)$ ja siten

$$d(\psi, D, p) = d(\psi, D \setminus K, p).$$

Koska $||\phi - \psi||_{D \setminus K} < \rho(p, \phi(\partial D \cup K)) \leq \rho(p, \phi(\partial D))$, niin saadaan

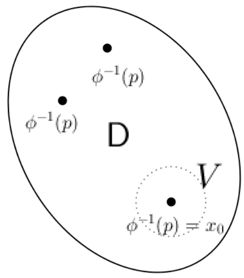
$$d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p).$$

Huomataan, että $\partial(D \setminus K) \subset \partial D \cup K$. Siten pätee myös $||\phi - \psi||_{D \setminus K} \leq ||\phi - \psi||_D < \rho(p, \phi(\partial D \cup K)) \leq \rho(p, \phi(\partial(D \setminus K)))$ ja siten

$$d(\phi, D \setminus K, p) = d(\psi, D \setminus K, p) = d(\psi, D, p) = d(\phi, D, p)$$

□

Erakko-p-piste tarkoittaa, että on olemassa avoin pallo $B(x_0, r)$, $r > 0$ siten, että $B(x_0, r) \cap \phi^{-1}(p) = x_0$.



KUVA 3.1. Piste x_0 on funktion ϕ erakko-p-piste.

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon $\phi \in C(\overline{D})^N, p \notin \phi(\partial D)$ ja piste $x_0 \in D$ erakko-p-piste funktiolla ϕ. Olkoon V mikä tahansa pisteen x_0 ympäristö siten, että $\overline{V}$ ei sisällä muita funktion ϕ p-pisteitä. Määritellään funktion ϕ *indeksi* pisteen (x_0, p) suhteen kaavalla

$$i(\phi, x_0, p) := d(\phi, V, p)$$

kaikilla V, joille $\overline{V} \cap \phi^{-1}(p) = x_0$.

Tämä on hyvin määritelty, sillä kaikilla V pätee $p \notin \phi(\partial V)$. Ja vieläpä voidaan todeta, että $d(\phi, V_i, p) = d(\phi, V_j, p)$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$.

LAUSE 3.9. *Olkoon $\phi \in C(\overline{D})^N$ ja $p \notin \phi(\partial D)$.*

(1) *Jos $\phi^{-1}(p)$ on äärellinen, niin $d(\phi, D, p) = \sum_{x \in \phi^{-1}(p)} i(\phi, x, p)$*
(2) *Jos $\phi \in C^1(\overline{D})^N, a \in \phi^{-1}(p)$ ja $J_\phi(a) \neq 0$, niin a on erakko-p-piste ja $i(\phi, a, p) = (-1)^v$, missä v on $\nabla\phi(a)$:n reaaliarvoisten negatiivisten ominaisarvojen lukumäärä (mukaanlaskettuna ominaisarvot $\lambda_i = \lambda_j$ kun $j \neq i$).*

TODISTUS. (1) Koska $\phi^{-1}(p)$ on äärellinen, kaikki pisteet $a \in \phi^{-1}(p)$ ovat erakko-p-pisteitä ja siten $i(\phi, a, p)$ on hyvin määritelty. Merkitään

$$\phi^{-1}(p) = \{a_1, ..., a_k\}.$$

Olkoon $V_1, ..., V_k \in D$ avoimia joukkoja siten, että $a_i \in V_i$ kaikilla $i \in 1, ..., k$. Määritelmästä 3.8 saadaan $i(\phi, a_i, p) = d(\phi, V_i, p)$. Tällöin Lauseen 3.7 (2) mukaan

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \phi^{-1}(p)} i(\phi, x, p) &= \sum_{i=1}^{k} i(\phi, a_i, p) \\
&= \sum_{i=1}^{k} d(\phi, V_i, p) \\
&= d(\phi, \cup_{i=1}^{k} V_i, p) \\
&= d(\phi, D \setminus K, p) \\
&= d(\phi, D, p),
\end{aligned}$$

missä $K = \overline{D} \setminus \cup_{i=1}^{k} V_i$.

(2) Olkoon $V \subset D$ avoin joukko siten, että $a \in V, \phi(a) = p$ ja $\phi(x) \neq p$ kaikilla $x \in \overline{V}, x \neq a$. Määritelmän 3.8 mukaan pätee

$$i(\phi, a_i, p) = d(\phi, V, p) = \operatorname{sgn}(J_\phi(a)).$$

Olkoon $\lambda_1, ..., \lambda_n$ derivaattamatriisin $\nabla\phi(a)$ ominaisarvot. Tällöin

$$J_\phi(a) = \lambda_1 ... \lambda_n,$$

jossa kompleksiset ominaisarvot ja niiden konjugaatit ovat pareina siten, että $\alpha\overline{\alpha} > 0$ ja siten

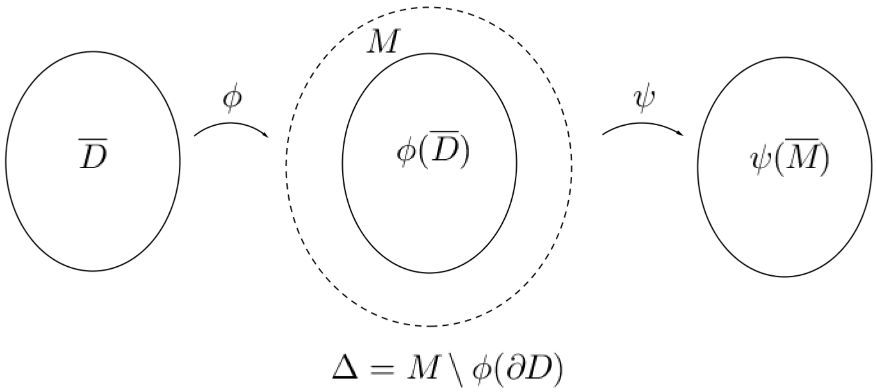
$$\operatorname{sgn}(J_\phi(a)) = (-1)^v$$

□

3.3. Kertolaskulause

LAUSE 3.10 (Kertolaskulause). *Olkoon $\phi \in C(\overline{D})^N$ ja $M \subset \mathbb{R}^N$ avoin joukko ja $\phi(\overline{D}) \subset M$. Olkoon myös $\Delta = M \setminus \phi(\partial D)$ ja $\psi \in C(\overline{M})^N$. Olkoon $(\Delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ joukon Δ yhtenäisiä komponentteja ja $p \notin \psi \circ \phi(\partial D) \cup \psi(\partial M)$. Tällöin pätee*

(1) *$p \notin \psi(\partial\Delta_i)$kaikilla $i \in \mathbb{N}$*
(2) *$d(\psi \circ \phi, D, p) = \sum_{i \in \mathbb{N}} d(\psi, \Delta_i, p) d(\phi, D, \Delta_i)$*



KUVA 3.2. Kertolasku Lauseen joukot

TODISTUS.

(1) Huomataan, että $\partial\Delta_i \subset \partial M \cup \phi(\partial D)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Sillä jos $q \in \partial\Delta_i$ jollakin $i \in \mathbb{N}$, niin tällöin $q \in \partial\Delta_i \subset \overline{\Delta_i} \subset \overline{M}$. Oletetaan, että $q \notin \partial M$. Tällöin voidaan todeta, että $q \in M = \cup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j$, joten sopivalle $j \in \mathbb{N}$ saadaan $q \in \Delta_j$ ja $i \neq j$. Näin siis $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$, mikä on ristiriita. Näin siis saadaan

$$\partial\Delta_i \subset \partial M \cup \phi(\partial D),$$

eli $d(\psi, \Delta_i, p)$ on hyvin määritelty. Myös $p \notin \psi \circ \phi(\partial D)$ ja siten $d(\psi \circ \phi, D, p)$ on hyvin määritelty. Koska Δ_i on joukon $M \setminus \phi(\partial D)$ yhtenäinen komponentti, voidaan todeta, että Δ_i on joukon $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ yhtenäinen osajoukko ja siten Δ_i on osajoukko joukon $\mathbb{R}^N \setminus \phi(\partial D)$ yhtenäisestä komponentista D_i. Aste $d(\phi, D, q)$ on vakio kun $q \in D_i$. Merkitään tätä vakiota $d(\phi, D, \Delta_i)$.

Osoitetaan, että on vain äärellinen määrä indeksejä i siten, että $d(\psi, \Delta_i, p) \neq 0$. Valitaan $f \in C^1(\overline{M})^N$ siten, että

$$||f - \psi|| < \rho(p, \psi(\partial M))$$

ja $p \notin f(Z_f)$. Koska on vain äärellinen määrä pisteitä x joilla $f(x) = p$ ja koska joukot Δ_i ovat keskenään pistevieraita, on äärellisen monta indeksiä i siten, että yhtälöllä $f(x) = p$ on ratkaisu joukossa Δ_i. Olkoon nämä joukot $\Delta_1, ..., \Delta_k$. Tällöin pätee $d(f, \Delta_i, p) = 0$ kaikilla $i > k$. Koska

$$||f - \psi||_{\Delta_i} \leq ||f - \psi|| < \rho(p, \psi(\partial M)) \leq \rho(p, \psi(\partial \Delta_i)),$$

saadaan $d(f, \Delta_i, p) = d(\psi, \Delta_i, p)$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja siten myös

$$d(\psi, \Delta_i, p) = 0$$

kaikilla $i > k$

(2) Tämän kohdan tarkka todistus ohitetaan, sillä se on tarpeettoman pitkä, [**1**, s. 36-39]. Käydään kuitenkin läpi todistuksen ajatus. Oletetaan, että $\psi \in C^1(\overline{M})^N, \phi \in C^1(\overline{D})^N$ ja $p \notin \psi \circ \phi(Z_{\psi \circ \phi})$. Tällöin $p \notin \psi(Z_\psi)$ ja $y \notin \phi(Z_\phi)$ kaikilla $y \in \psi^{-1}(p)$. Siten

$$\begin{aligned}
d(\psi \circ \phi, D, p) &= \sum_{\psi \circ \phi(x) = p} \operatorname{sgn}(J_{\psi \circ \phi}(x)) \\
&= \sum_{\psi \circ \phi(x) = p} \operatorname{sgn}(J_\psi(\phi(x))) \operatorname{sgn}(J_\phi(x)) \\
&= \sum_{\psi(y) = p} \sum_{\phi(x) = y} \operatorname{sgn}(J_\psi(y)) \operatorname{sgn}(J_\phi(x)) \\
&= \sum_{\psi(y) = p} \operatorname{sgn}(J_\psi(y)) d(\phi, D, y) \\
&= \sum_{\Delta_i} \sum_{\psi(y') = p} \operatorname{sgn}(J_\psi(y)) d(\phi, D, \Delta_i) \\
&= \sum_i d(\psi, \Delta_i, p) d(\phi, D, \Delta_i),
\end{aligned}$$

missä $x \in D, y \in \Delta$ ja $y' \in \Delta_i$. Todistuksen loppu täydennetään tarkastelemalla vielä tilanteita joissa piste p on kriittinen piste ja tilanteita joissa funktiot ψ ja ϕ eivät ole jatkuvasti derivoituvia.

$\square$

LUKU 4

Asteteorian sovelluksia

Topologinen aste liittyy vahvasti muuhun matematiikkaan, eikä se itsessään olekaan välttämättä niin mielenkiintoinen. Tässä luvussa on tarkoitus käydä läpi tuloksia, joidenka todistamiseen asteteoriaa voi käyttää hyödyksi. Käsitellään kiintopistelauseita, parittomia kuvauksia ja topologiaa.

4.1. Kiintopistelauseita

Asteteorian avulla voidaan todistaa muutamia kiintopistelauseita. Tässä kappaleessa käydään *Brouwerin kiintopistelause* ja seuraavassa kappaleessa katsotaan myös *Borsukin kiintopistelausetta.*

PROPOSITIO 4.1. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^N$ kompakti ja konveksi joukko, $0 \in \operatorname{int} E$. Tällöin on olemassa homeomorfismi $\alpha : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ siten, että*

$$\alpha(E) = \overline{B},$$

missä B on Euklidisen avaruuden yksikköpallo joukossa $\mathbb{R}^N$.

Ohitetaan tämän Proposition todistus, [**1**, s. 50].

LAUSE 4.2 (Ensimmäinen versio Brouwerin kiintopistelauseesta). *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^N$ avoin ja rajoitettu joukko siten, että $\overline{D}$ on homeomorfinen suljetun yksikköpallon $\overline{B}$ kanssa. Olkoon $\phi \in C(\overline{D})^N$ funktio niin, että $\phi(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Tällöin funktiolla ϕ on olemassa kiintopiste joukossa $\overline{D}$.*

TODISTUS. Olkoon funktio $\alpha : \overline{D} \to \overline{B}$ homeomorfismi (Propositio 4.1). Määritellään $\psi := \alpha \circ \phi \circ \alpha^{-1}$ ja näytetään, että funktiolla $\psi : \overline{B} \to \overline{B}$ on kiintopiste. Selvästikin funktio ψ on jatkuva ja joko on olemassa $x \in \partial B$ siten, että $\psi(x) = x$ (eli funktiolla ψ on kiintopiste) tai $\psi(x) \neq x$ kaikilla $x \in \partial\overline{B}$. Olkoon

$$H(x,t) := x - t\psi(x) \text{ kun } x \in \overline{B}, t \in [0,1].$$

Tällöin $0 \notin H(\partial B, t)$ millään $t \in [0,1]$ ja siten Lauseen 3.3 (2) mukaan $d(H(.,t), B, 0)$ ei riipu parametristä t, joten

$$\begin{aligned} d(I-\psi, B, 0) &= d(H(.,1), B, 0) \\ &= d(H(.,0), B, 0) \\ &= d(I, B, 0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

missä I on identtinen kuvaus $x \mapsto x$. Lauseen 3.1 perusteella yhtälöllä $(I - \psi)(x) = 0$ on ratkaisu joukossa B ts. funktiolla ψ on kiintopiste $\overline{x} \in \overline{B}$. Asettamalla $y \in \overline{D}$ siten, että $y = \alpha^{-1}(x)$ saadaan

$$\phi(y) = y.$$

□

SEURAUS 4.3 (Toinen versio Brouwerin kiintopistelauseesta). *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakti ja konveksi joukko ja int $K \neq \emptyset$. Olkoon funktio $\phi \in C(K)^N$ sellainen, että $\phi(K) \subset K$. Tällöin funktiolla ϕ on kiintopiste.*

TODISTUS. Olkoon $x_0 \in \text{int } K$ ja määritellään $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, T(x) = x - x_0$. Tällöin $T(K)$ on kompakti ja konveksi joukko ja $0 \in \text{int } T(K)$ Proposition 4.1 mukaan on olemassa homeomorfismi $\alpha : T(K) \to \overline{B}$. Määritellään

$$\psi := T \circ \phi \circ T^{-1}.$$

Tällöin $\psi : T(K) \to T(K)$ on jatkuva ja Lauseen 4.2 mukaan funktiolla ψ on kiintopiste $y \in T(K)$. Olkoon $x \in K$ siten, että $y = T(x)$, eli kun

$$\psi(T(\phi(T^{-1}(y)))) = y$$

joten

$$\phi(T^{-1}(y)) = x.$$

Tällöin pätee myös

$$T^{-1}(y) = x,$$

eli lopulta

$$\phi(x) = x.$$

□

Käydään läpi yksi esimerkki Brouwerin kiintopistelauseesta.

ESIMERKKI 4.4. Olkoon $A = (a_{ij})$ $N \times N$ matriisi, jossa $a_{ij} \geq 0$ kaikilla i, j. Näytetään, että on olemassa $\lambda \geq 0, x \neq 0$ siten että $x_i \geq 0$ kaikilla i ja $Ax = \lambda x$.

Olkoon $D := \{x \in \mathbb{R}^N : x \geq 0, i, \ldots, N, \sum_{i=1}^N x_i = 1\}$. Tapaus $Ax = 0$ on triviaali, joten oletetaan, että $Ax \neq 0$ kaikilla $x \in D$. Tällöin $\sum_{i=1}^N (Ax)_i \geq \alpha$ kaikilla $x \in D$, jollakin $\alpha > 0$. Määritellään funktio $f : D \to \mathbb{R}^N$

$$f(x) := \frac{Ax}{\sum_{i=1}^N (Ax)_i},$$

joka on jatkuva joukossa D. Nyt siis pätee

$$\sum_{i=1} f_i(x) = 1$$

ja $f_i(x) \geq 0$ kaikilla $x \in D$. Siten

$$f(D) \subset D$$

ja Lauseen 4.2 perusteella on olemassa $x_0 \in D$ siten, että $f(x_0) = x_0$. Merkitään

$$\lambda := \sum_{i=1}^N (Ax_0)_i,$$

jolloin

$$Ax_0 = \lambda x_0.$$

Propositio 4.5. *Oletetaan, että N on pariton, $0 \in D$ ja funktiolle $\phi \in C(\overline{D})^N$ pätee $0 \notin \phi(\partial D)$. Tällöin on olemassa $y \in \partial D, \lambda \neq 0$ siten, että $\phi(y) = \lambda y$.*

Ohitetaan tämän Proposition todistus, sillä se on samantapainen kuin aiemmat, [**1**, s. 51-52].

Esimerkki 4.6. Olkoon $f : S^N \to S^N$ jatkuva funktio siten, että $f(x) \neq -x$ kaikilla $x \in S^N$. Näytetään, että jos N on parillinen, niin funktiolla f on kiintopiste joukossa S^N.

Lauseen 2.16 mukaan on olemassa jatkuva funktio $F : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ siten, että

$$F(x) = f(x) \neq -x \text{ kaikilla } x \in S^N.$$

Proposition 4.5 mukaan kun $N+1$ on pariton ja $F(S^N) \subset S^N$, niin on olemassa $\lambda > 0$ ja $x_0 \in S^N$ siten, että

$$F(x_0) = \lambda x_0 = f(x_0).$$

Joten $|x_0| = 1 = |f(x_0)|$ ja kun $f(x_0) \neq -x_0$ niin

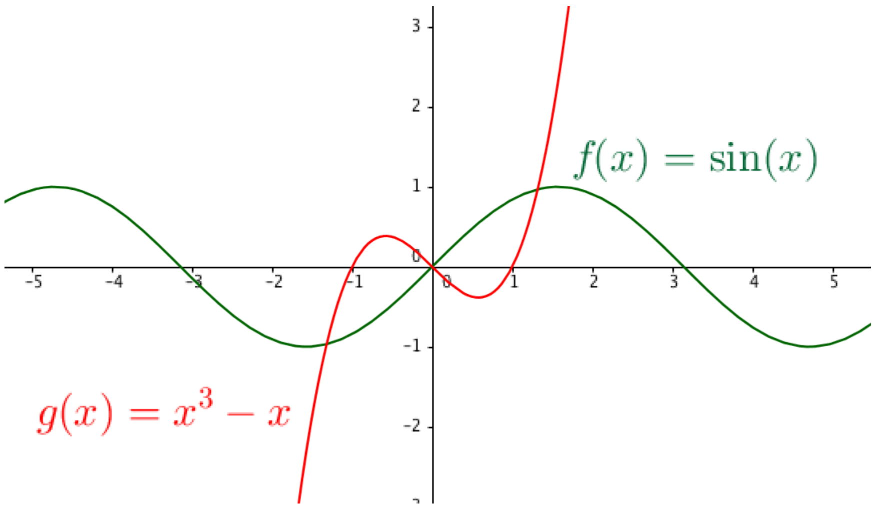
$$f(x_0) = x_0.$$

4.2. Parittomat kuvaukset

Topologinen aste riippuu voimakkaasti kuvaajan kuvajoukon käyttäytymisestä, mistä parittomat kuvaukset ovat yksi hyvä esimerkki.

Määritelmä 4.7. Joukkoa $D \subset \mathbb{R}^N$ sanotaan symmetriseksi jos kaikilla $x \in D$ pätee myös $-x \in D$. Kuvausta $\phi : D \to \mathbb{R}^M$ sanotaan parittomaksi kuvaukseksi jos $\phi(x) = -\phi(-x)$ kaikilla $x \in D$

Esimerkki 4.8. Funktio $f(x) = \sin(x)$ on pariton, sillä $\sin(x) = -\sin(-x)$



Kuva 4.1. Funktiot $f(x) = \sin(x)$ ja $g(x) = x^3 - x$ ovat parittomia.

Lemma 4.9. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^N$ rajoitettu, avoin ja symmetrinen joukko ja $0 \notin \overline{D}$. Olkoon $\phi : \partial D \to \mathbb{R}^N$ jatkuva, pariton ja nollasta eroava kuvaus. Tällöin funktiolla ϕ on jatke $\psi : \overline{D} \to \mathbb{R}^N$, joka on myös jatkuva ja pariton, jolle pätee $\psi(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \overline{D} \cap \mathbb{R}^{N-1}$*

Tämän Lemman todistus ohitetaan, sillä sama ajatus tulee esille seuraavan lauseen todistuksessa, [**1**, s. 59].

LAUSE 4.10 (Parittoman kuvauksen lause). *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^N$ rajoitettu, avoin ja symmetrinen joukko ja $0 \in D$. Olkoon $\phi \in C(\overline{D})^N$ funktio jolle $0 \notin \phi(\partial D)$. Oletetaan vielä, että*

$$\frac{\phi(x)}{|\phi(x)|} \neq \frac{\phi(-x)}{|\phi(-x)|}$$

kaikilla $x \in \partial D$. Tällöin $d(\phi, D, 0)$ on pariton luku.

TODISTUS. Jaetaan Lauseen todistus neljään eri osaan.

Ensiksi näytetään, että voidaan olettaa, funktion ϕ olevan pariton kuvaus. Olkoon $\psi : \overline{D} \to \mathbb{R}^N, \psi(x) := \phi(x) - \phi(-x)$. Tällöin ψ on jatkuva kuvaus ja $0 \notin \psi(\partial D)$. Erityisesti kun $x \in \partial D$ niin

$$\frac{\psi(x)}{|\psi(x)|} = \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{|\phi(x) - \phi(-x)|} \neq \frac{\phi(-x) - \phi(x)}{|\phi(x) - \phi(-x)|} = \frac{\psi(-x)}{|\psi(-x)|}$$

Määritellään funktio

$$H(x,t) := \phi(x) - t\phi(-x)$$

kaikilla $t \in [0,1]$ kaikilla $x \in \overline{D}$. Selvästikin H on C^0 homotopia funktioiden ϕ ja ψ välillä. Jos $H(x,t) = 0$ jollakin $x \in \partial D$, eräällä $t \in [0,1]$, niin pätee $\phi(x) = t\phi(-x)$ ja $t > 0$. Tämän perusteella

$$\frac{\phi(x)}{|\phi(-x)|} = \frac{\phi(-x)}{|\phi(-x)|},$$

mikä on ristiriita. Siispä $H(x,t) \neq 0$ kaikilla $x \in \partial D$ ja kaikilla $t \in [0,1]$. Näin voidaan siis päätellä, että

$$d(\phi, D, 0) = d(\psi, D, 0),$$

eli voidaan siis olettaa, että ϕ on pariton kuvaus, ja tämä oletus pidetään voimassa todistuksen loppuun asti. *Seuraavaksi* osoitetaan, että voidaan olettaa, että $\phi(x) \equiv x$ origon ympäristössä. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $U := \overline{B}(0,\epsilon) \subset D$ ja $D_1 := D \setminus U$. Määritellään $\phi_1 : U \cup \partial D \to \mathbb{R}^N$

$$\phi_1(x) := \begin{cases} x, & x \in U \\ \phi(x), & x \in \partial D. \end{cases}$$

Tällöin ϕ_1 on jatkuva funktio,

$$\partial D_1 = \partial D \cup \partial U = \partial D \cup \partial B(0,\epsilon)$$

ja ϕ_1 on myös pariton kuvaus. Olkoon

$$\phi_2 := \phi_1|_{\partial D_1}.$$

Koska ϕ_2 ei ole missään nolla, Lemman 4.9 mukaan on olemassa funktion ϕ_2 jatkuva jatke, $\phi_3 : \overline{D}_1 \to \mathbb{R}^N$ ja ϕ_3 on pariton eikä saa arvoa nolla joukossa $\overline{D} \cap \mathbb{R}^{N-1}$.

Määritellään myös

$$\phi_4(x) := \begin{cases} \phi_3(x) & x \in \overline{D}_1 \\ x & x \in U. \end{cases}$$

Myös funktio ϕ_4 on hyvin määritelty, sillä jos $x \in U \cap \overline{D}_1 = U \cap \overline{D}$, niin $x \in \partial U$ ja

$$\phi_3(x) = \phi_2(x) = x.$$

On helppoa näyttää, että myös ϕ_4 on pariton, jatkuva kuvaus. Kaikilla $x \in \partial D$, pätee $x \in \partial D_1$ ja

$$\phi_4(x) = \phi_3(x) = \phi_2(x) = \phi_1(x) = \phi(x).$$

Siten, $d(\phi_4, D, 0) = d(\phi, D, 0), 0 \notin \phi_4(\partial D)$ ja

$$\frac{\phi_4(x)}{|\phi_4(x)|} \neq \frac{\phi_4(x)}{|\phi_4(-x)|},$$

kaikilla $x \in \partial D$.

Kolmanneksi näytetään, että $d(\phi_3, D_1, 0)$ on parillinen luku. Olkoon $K := \overline{D}_1 \cap \mathbb{R}^{N-1}$. Tällöin $0 \notin \phi_3(K)$ ja on helppo nähdä että K on joukon D_1 kompakti osajoukko. Lauseen 3.7 (2) mukaan

$$d(\phi_3, D_1, 0) = d(\phi_3, D_1 \setminus K, 0) = d(\phi_3, D_1^+ \cup D_1^-, 0),$$

missä $D_1^+ := D \cap \mathbb{R}^N_+$ ja $D_1^- \cap \mathbb{R}^N_-$. Lauseesta 3.7 (1) päätellään, että

$$d(\phi_3, D_1, 0) = d(\phi_3, D_1^+, 0) + d(\phi_3, D_1^-, 0).$$

Nyt Lauseen 2.21 mukaan aste ei muutu jatkuvasti derivoituvien funktioiden muuttujanvaihdoksessa, joten

$$d(\phi_3, D_1^-, 0) = d((-I) \circ \phi_3 \circ (-I), -I(D_1^-), -I(0)) = d(\phi_3, D_1^+, 0).$$

Näin siis $d(\phi_3, D_1, 0) = 2d(\phi_3, D_1^+, 0)$.

Viimeiseksi todetaan, että $d(\phi_4, D, 0)$ on pariton luku. Koska $\phi|_{\partial D} = \phi_4|_{\partial D}, \phi_4|_{\text{int } U} = I, \phi_4|_{D_1} = \phi_3|_{D_1}$ ja $D \setminus U = D_1$ niin Lauseen 3.7 ja Seurauksen 2.14 perusteella saadaan

$$\begin{aligned} d(\phi, D, 0) &= d(\phi_4, D, 0) \\ &= d(\phi_4, D \setminus \partial B(0, \epsilon), 0) \\ &= d(\phi_4, \text{int } U \cup (D \setminus U), 0) \\ &= d(\phi_4, \text{int } U, 0) + d(\phi_4, D \setminus U, 0) \\ &= 1 + d(\phi_4, D \setminus U, 0) \\ &= 1 + d(\phi_3, D_1, 0) \\ &= 1 + 2d(\phi_3, D_1^+, 0), \end{aligned}$$

joten $d(\phi, D, 0)$ todella on pariton numero. □

HUOMAUTUS 4.11. Jos funktio $\phi \in C(\overline{D})^N$ on pariton ja $0 \notin \phi(\partial D)$, tällöin

$$\frac{\phi(x)}{|\phi(x)|} \neq \frac{\phi(-x)}{|\phi(-x)|}$$

kaikilla $x \in \partial D$ ja Lause 4.10 pätee.

Todistetaan vielä *Borsukin kiintopistelause* käyttämällä hyödyksi aiemmin saatuja tuloksia.

LAUSE 4.12 (Borsukin kiintopistelause). *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^N$ avoin, rajoitettu ja symmetrinen joukko, joka sisältää nollan. Olkoon myös $\phi : \partial D \to \mathbb{R}^M$ jatkuva funktio, $M < N$. Tälloin on olemassa $x \in \partial D$, jolle pätee $\phi(x) = \phi(-x)$*

TODISTUS. Tulkitaan avaruus $\mathbb{R}^M$ avaruuden $\mathbb{R}^N$ osajoukoksi $\{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_{M+1}, \dots x_N = 0\}$. Olkoon $\psi(x) := \phi(x) - \phi(-x)$ kaikilla $x \in \partial D$. Riittää osoittaa, että on olemassa $x \in \partial D$, jolla $\psi(x) = 0$.

Oletetaan nyt antiteesin mukaisesti että $\psi(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \partial D$. Koska kuvaus $\psi : \partial D \to \mathbb{R}^M$ on jatkuva, pariton, eikä saa missään nollaa ja

$$\frac{\psi(x)}{|\psi(x)|} \neq \frac{\psi(-x)}{|\psi(x)|} \text{ kaikilla } x \in \partial D,$$

niin Lauseen 4.10 mukaan $d(\psi, D, 0)$ on pariton. Toisaalta Lauseen 3.3 mukaan on olemassa $\epsilon_0 > 0$ siten, että kaikilla $0 < \epsilon < \epsilon_0$, pätee

$$d(\psi, D, p_\epsilon) = d(\psi, D, 0),$$

missä $p_\epsilon = (0, \dots, 0, \epsilon)$. Näin siis $d(\psi, D, p_\epsilon) \neq 0$ ja Lauseen 3.1 perusteella $p_\epsilon \in \psi(D) \subset \mathbb{R}^M$ kaikilla $0 < \epsilon < \epsilon_0$ joka on ristiriita sillä $p_\epsilon \notin \mathbb{R}^M$. □

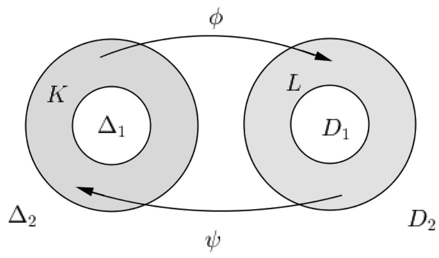
4.3. Jordanin erotuslause ja topologinen aste injektiolle

Kuten jo aiemmin on todettu, niin topologista astetta pystyy hyödyntämään erilaisten lauseiden todistamiseen. Tarkastellaan tässä kappaleessa Jordanin erotuslausetta, jonka avulla päästään käsiksi vielä injektioiden topologiseen asteeseen.

LAUSE 4.13 (Jordanin erotuslause). *Olkoon $K, L \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$, kompakteja keskenään homeomorfisia joukkoja. Tällöin joko joukoilla K^c ja L^c on sama äärellinen määrä yhtenäisiä komponentteja tai molemmilla on numeroituvasti ääretön määrä yhtenäisiä komponentteja.*

Tämän tuloksen todistus on pitkä, mutta siitä huolimatta käydään se läpi, sillä siinä sidotaan hyvin topologia ja topologinen aste toisiinsa.

TODISTUS. Olkoon $\{\Delta_i : i \in I\}$ perhe joukon K^c yhtenäisiä komponentteja. Joukot Δ_i ovat keskenään pistevieraita, ja koska joukko K on suljettu, niin joukot Δ_i ovat avoimia (Lause 1.4). Joukkoja Δ_i on enintään numeroituva määrä (1.5). Voidaan siis olettaa, että $I \subset \mathbb{N}$ ja jos $i \in I, i \geq 2$ niin myös $i - 1 \in I$. Koska K on rajoitettu joukko, täsmälleen yksi joukon K^c yhtenäisistä komponenteista on rajoittamaton, olkoon se Δ_0.



KUVA 4.2. Joukot K, L, Δ_i ja D_r ja funktiot ϕ ja ψ.

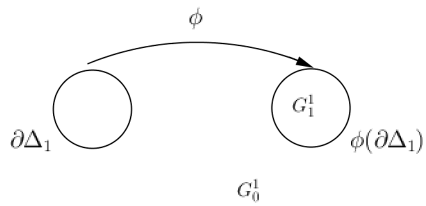
Samoin olkoon $\{D_r : r \in R\}$ joukon L^c yhtenäisiä komponentteja, $R \subset \mathbb{N}$. Jos $r \in R$ ja $r \geq 2$, niin $r-1 \in R$. Olkoon myös D_0 ainut rajoittamaton yhtenäinen komponentti. Olkoon $h : K \to L$ homeomorfismi. Lauseen 2.16 perusteella on olemassa jatkuva funktion h jatke $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ja jatkuva funktion h^{-1} jatke $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Näytetään, että kaikilla $i, j \geq 1$, pätee

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{|R|} d(\phi, \Delta_i, D_k) d(\psi, D_k, \Delta_j),$$
$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{|I|} d(\phi, \Delta_k, D_i) d(\psi, D_j, \Delta_k).$$

Tässä δ_{ij} viitaa *Kroneckerin deltaan*, eli $\delta_{ij} = 1$ jos $i = j$, muutoin 0. Tämän jälkeen näytetään lineaarialgebraa hyödyntäen, että $\#R = \#I$.

Kiinnitetään $j \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\{G_l^j : l \in A\}$ joukon $\phi(\partial\Delta_j)^c$ yhtenäisiä komponentteja ja $A \subset \mathbb{N}$ ja jos $l \geq 2 \in A$ niin $l - 1 \in A$. Koska $\partial\Delta_j \subset K$ on rajoitettu, $\phi(\partial\Delta_j)$ on kompakti joukko ja siten täsmälleen yksi joukko perheestä G_l^j on rajoittamaton, olkoon se G_0^j. Nyt siis pätee

$$K^c = \cup_{i \in I} \Delta_j, L^c = \cup_{r \in R} D_r, (\phi(\partial\Delta_j))^c = \cup_{l \in A} G_l^j.$$



KUVA 4.3. Kuvaa 4.2 mukaillen: $j = 1$, joukko $\phi(\partial\Delta_1)$. Tämän komplementin yhtenäisiä komponentteja ovat joukot G_1^1 ja G_0^1.

Väite 1: Kaikilla $r \in \mathbb{N}$ *on olemassa* $l \in \mathbb{N}$ *siten, että* $D_r \subset G_l^j$.

Kun kiinnitetään $r \in \mathbb{N}$, huomataan, että $\partial\Delta_j \subset K$ ja siten $\phi(\partial\Delta_j) \subset \phi(K) \subset L$ ja siten $L^c \subset \phi(\partial\Delta_j)^c$. Nyt siis $D_r \subset L^c \subset \phi(\partial\Delta_j)^c$ ja koska D_r on yhtenäinen, tällöin on olemassa $l \in \mathbb{N}$ siten, että $D_r \subset G_l^j$.

Numeroidaan joukot $\{D_r\}$ uudelleen siten, että

$$U_0^j = D_0 \cup D_{0,1}^j \cup D_{0,2}^j \cup \cdots \subset G_0^j$$
$$U_l^j = D_{l,1}^j \cup D_{l,2}^j \cup \cdots \subset G_l^j,$$

missä j viittaa joukon Δ_j indeksiin ja l joukon G_l^j indeksiin. Huomaa, että kuvien 4.2 ja 4.3 tapauksessa $U_1^1 = D_{1,1}^1 \subset G_1^1 \subset (\phi(\partial\Delta_1))^c$. Indeksi 0 viittaa edelleen siihen joukkoon, joka on ei ole rajoitettu.

Väite 2: $d(\psi, G_l^j, p) = \sum_{k=1}^{\infty} d(\psi, D_{l,k}^j, p)$ *kun* $p \in \Delta_i$ *ja* $l \geq 1$

Näytetään ensin että $d(\psi, G_l^j, p)$ on hyvin määritelty. Riittää näyttää, että $\partial G_l^j \subset L$. Olkoon $x \in \partial G_l^j$ ja oletetaan että $x \notin L$ (antiteesi). Jollakin r pätee $x \in D_r$. Koska $D_r \subset G_{l(r)}^j$, niin pätee myös $x \in G_{l(r)}^j$. Näin ollen $G_l^j \cap G_{l(r)} \neq \emptyset$, ja koska joukot G_l^j ovat yhtenäisiä komponentteja, niin $l = l(r)$ ja siten $x \in \partial G_l^j \cap G_l^j$, mikä on ristiriita, sillä G_l^j on avoin. Siten $\partial G_l^j \subset L$ ja

$$\psi(\partial G_l^j) \subset \psi(L) = K.$$

Koska $p \in \Delta_i$, niin $p \notin K$, josta taas saadaan $p \notin \psi(\partial G_l^j)$ joten $d(\psi, G_l^j, p)$ on hyvin määritelty.

Sopivalla $r, \partial D_{l,k}^j = \partial D_r$ ja $L^c = \cup_{r \in R} D_r$. Näin siis $\partial D_{l,k}^j \subset L$ ja kuten edellä todettiin, niin myös $d(\psi, D_{l,k}^j, p)$ on hyvin määritelty.

Määritellään kompakti joukko $M := \overline{G}_l^j \setminus U_l^j$ ja kiinnitetään $x \in M$. Tällöin joko $x \in \partial G_l^j$ tai $x \in G_l^j \setminus U_l^j$. Siten pätee $x \notin D_r$ kaikilla r. Näin ollen $x \in L$ ja $\psi(x) \in \psi(L) = K$. Lisäksi jos $p \in \Delta_i$, niin $p \notin \psi(M)$ ja Lauseen 3.7 mukaan saadaan, että

$$d(\psi, G_l^j, p) = d(\psi, G_l^j \setminus M, p) = d(\psi, U_l^j, p) = \sum_{k=1}^{\infty} d(\psi, D_{l,k}^j, p).$$

Väite 3: $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} d(\psi, D_r, \Delta_i) d(\phi, \Delta_j, D_r)$ *kun* $i, j \geq 1$.

Kiinnittämällä $p \in \Delta_i$ ja käyttämällä Kertolaskulausetta (3.10), saadaan

$$d(\psi \circ \phi, \Delta_j, p) = \sum_{l=1}^{\infty} d(\psi, G_l^j, p) d(\phi, \Delta_j, G_l^j),$$

missä Kertolaskulauseen oletukset ovat voimassa, sillä $p \notin \psi \circ \phi(\partial\Delta_j) \subset K$, ja $p \notin \psi(\partial G_l^j) \subset K$. Summa on myös äärellinen. Koska $D_{l,k}^j \subset G_l^j$, niin päätellään että $d(\phi, \Delta_j, G_l^j) = d(\phi, \Delta_j, D_{l,k}^j)$ kaikilla k. Tällöin väitteen 2 kanssa saadaan

$$\begin{aligned} d(\psi \circ \phi, \Delta_j, p) &= \sum_{l=1}^{\infty} d(\psi, G_l^j, p) d(\phi, \Delta_j, D_{l,k}^j) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d(\psi, D_{l,k}^j, p) d(\phi, \Delta_j, D_{l,k}^j). \end{aligned}$$

Muistetaan myös, että $d(\psi, \Delta_j, D^j_{0,k}) = d(\phi, \Delta_j, G^j_0) = 0$ sillä G^j_0 ei ole rajoitettu ja siten

$$\begin{aligned} d(\psi \circ \phi, \Delta_j, p) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d(\psi, D^j_{l,k}, p) d(\phi, \Delta_j, D^j_{l,k}) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} d(\psi, D_r, p) d(\phi, \Delta_j, D_r), \end{aligned}$$

kun $\{D_r : r \geq 1\} = \{D^j_{l,k} : l \geq 0, k \geq 1\}$. Koska joukot Δ_i ovat yhtenäisiä komponentteja ja $p \in \Delta_i$, niin viimeisin yhtäsuuruus voidaan kirjoittaa muotoon

$$d(\psi \circ \phi, \Delta_j, \Delta_i) = \sum_{r=1}^{\infty} d(\psi, D_r, \Delta_i) d(\phi, \Delta_j, D_r).$$

Käyttämällä tietoa $\partial \Delta_j \subset K$, eli $\Delta_i \notin \phi(\partial \Delta_j)$ ja $\psi \circ \phi(x) = x$ kaikilla $x \in K$, saadaan

$$d(\psi \circ \phi, \Delta_j, \Delta_i) = d(I, \Delta_j, \Delta_i) = \delta_{ij},$$

eli

$$\delta_{ij} = \sum_{r=1}^{\infty} d(\psi, D_r, \Delta_i) d(\phi, \Delta_j, D_r). \tag{4.1}$$

Samaan tapaan perustellen saadaan

$$\delta_{ij} = \sum_{r=1}^{\infty} d(\psi, D_i, \Delta_r) d(\phi, \Delta_r, D_j). \tag{4.2}$$

Väite 4: $\{D_r : r \geq 1, r \in R\}$ *ja* $\{\Delta_j : j \geq 1, j \in I\}$ *ovat bijektiivisiä* $(\#R = \#I)$
Puretaan väite 4 kolmeen eri osaan.
Osa 1:$R < \infty$ *ja* $I < \infty$.
Määritellään matriisi $A \in \mathbb{R}^{R \times I}$

$$a_{rs} := d(\phi, \Delta_r, D_s)$$

ja $B \in \mathbb{R}^{I \times R}$

$$b_{rs} := d(\psi, D_r, \Delta_s).$$

Nyt siis $AB \in \mathbb{R}^{R \times R}$, eli

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1I}b_{I1} & \dots & a_{11}b_{1R} + \cdots + a_{1I}b_{IR} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{R1}b_{11} + \cdots + a_{RI}b_{I1} & \dots & a_{R1}b_{1R} + \cdots + a_{RI}b_{IR} \end{bmatrix}.$$

Matriisin diagonaalille jää siis

$$\sum_{k=1}^{I} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{I} d(\phi, \Delta_i, D_k) d(\psi, D_k, \Delta_j) = I,$$

missä jokaisessa alkiossa $i = j$. (Huom. I on luku.) Näin ollen matriisi AB on avaruuden $\mathbb{R}^{R \times R}$ identtinen matriisi ja sen ranki on R. Huomataan, että

$$R = \operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} A \leq \min\{R, I\} \leq I.$$

Samoin matriisi $BA \in \mathbb{R}^{I \times I}$ on identtinen matriisi ja

$$I = \text{rank}(BA) \leq \text{rank } B \leq \min\{R, I\} \leq R,$$

eli $I = R$.

Osa 2: $R = \infty$ *ja* $I = \infty$.

Tässä tapauksessa on selvää, että $\{D_r : r \in R\}$ ja $\{\Delta_i : i \in I\}$ ovat bijektiiviset.

Osa 3: $R = \infty$ *ja* $I < \infty$.

Olkoon

$$X := \mathbb{R}[x]$$

joukko reaalisia polynomeja kantana $1, x, x^2, x^3, \ldots$. Olkoon myös

$$Y := \text{span}\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^I\}$$

ja määritellään kaksi lineaarikuvausta $f : Y \to X$ ja $g : X \to Y$ siten, että

$$f(x^j) := \sum_{r=1}^{\infty} a_{rj} x^r, \; j = 1, \ldots, I$$

$$g(x^j) := \sum_{r=1}^{\infty} b_{rj} x^r, \; j = 1, \ldots, \infty.$$

Koska $a_{rj} \neq 0$ äärellisen monella $r \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, I\}$, funktiot f ja g ovat hyvin määritelty. Nyt yhtälön 4.1 mukaan kiinnitetyllä j

$$\begin{aligned}
f \circ g &= f(\sum_{r=1}^{\infty} b_{r_j} x^r) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} b_{rj} f(x^s) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} b_{rj} \sum_{s=1}^{\infty} a_{sj} x^s \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} b_{rj} a_{sj} x^s \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} d(\psi, D_r, \Delta_j) d(\phi, \Delta_s, D_j) x^s \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \delta_{js} x^s \\
&= x^j
\end{aligned}$$

Samaan tapaan saadaan

$$g \circ f = x^j.$$

Nyt kun käydään kaikki indeksit j läpi, saadaan $f \circ g = I_X$ ja $g \circ f = I_Y$ missä I_X on joukon X identtinen kuvaus ja I_Y on joukon Y identtinen kuvaus. Siten

$$\infty = \text{rank}(f \circ g) \leq \text{rank} f \leq I$$

mikä on ristiriita.

Osa 4 : $R < \infty$ *ja* $I = \infty$.
Tämä osa menee täysin samaan tapaan kuin edellinen. □

LAUSE 4.14. *Olkoon* $D \subset \mathbb{R}^N$ *avoin joukko ja funktio* $\phi : D \to \mathbb{R}^N$ *jatkuva injektio. Tällöin* $\phi(D)$ *on avoin joukko.*

Tämän Lauseen todistus jätetään näyttämättä, [**1**, s. 68-69].

LAUSE 4.15. *Olkoon* $D \subset \mathbb{R}^N$ *avoin rajoitettu joukko, ja funktio* $\phi \in C(\overline{D})^N$ *injektio. Tällöin kaikilla* $p \in \phi(D)$

$$d(\phi, D, p) = \pm 1.$$

TODISTUS. Lauseen 4.14 mukaan $\phi(D)$ on avoin joukko, ja $\phi^{-1} : \phi(D) \to D$ on homeomorfismi. Olkoon $p \in \phi(D)$. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $B := B(p, r) \subset\subset \phi(D)$. Olkoon

$$\Delta := D \setminus \phi^{-1}(\partial B).$$

Sovelletaan Lausetta 3.10 funktioon $\phi \circ \phi^{-1} : \overline{B} \to \phi(D)$ ja $\phi^{-1} : \overline{B} \to D$. Olkoon $\{\Delta_i : i \in I\}$ numeroituva perhe joukon Δ yhtenäisiä komponentteja. Nyt siis pätee

$$p \notin \phi \circ \phi^{-1}(\partial B) = \partial B$$

ja

$$p \notin \phi(\partial D),$$

jolloin Kertolaskulauseen (3.10) perusteella

$$1 = d(I, B, p) = d(\phi \circ \phi^{-1}, B, p) = \sum_{i=1}^{\infty} d(\phi, \Delta_i, p) d(\phi^{-1}, B, \Delta_i). \tag{4.3}$$

Nyt Jordanin erotuslauseen (4.13) mukaan joukolla $\phi^{-1}(\partial B)^c$ on kaksi avointa yhtenäistä komponenttia D_1 ja D_2 siten, että D_1 on rajoitettu ja D_2 on rajoittamaton. Todistetaan vielä, että on olemassa $i_0 \in I$ siten, että $D_1 = \Delta_{i_0}$.

Eli, $\Delta = D \setminus \phi^{-1}(\partial B) \subset \phi^{-1}(\partial B)^c$ ja voidaan päätellä, että

$$D_1 = \phi^{-1}(B) \subset D \setminus \phi^{-1}(\partial B) = \Delta = \cup_{j \in J} \Delta_j.$$

Täten $D_1 \subset \Delta_{i_0}$ jollakin $i_0 \in J$. Koska

$$\Delta_{i_0} \subset \Delta \subset \phi^{-1}(\partial B)^c \subset D_1 \cup D_2,$$

ja joukot Δ_{i_0} ja D_1 ovat yhtenäiset, niin $\Delta_{i_0} \subset D_1$. Siten

$$\Delta_{i_0} = D_1.$$

Näin siis $\Delta_i \subset D_2$ kaikilla $i \neq i_0$ ja siten

$$d(\phi^{-1}, B, \Delta_i) = d(\phi^{-1}, B, D_2) = 0 \text{ kaikilla } i \neq i_0.$$

Edellisen ja yhtälön 4.3 perusteella

$$1 = d(\phi, \Delta_{i_0}, p) d(\phi^{-1}, B, \Delta_{i_0}),$$

joten

$$d(\phi, \Delta_{i_0}, p) = \pm 1. \tag{4.4}$$

Riittää siis näyttää, että $d(\phi, \Delta_{i_0}, p) = d(\phi, D, p)$. Olkoon
$$K := \overline{D} \setminus \Delta_{i_0}.$$
Koska $d(\phi, \Delta_{i_0}, p) \neq 0$, Lauseen 3.1 perusteella päätellään, että $p \in \phi(\Delta_{i_0})$ ja koska ϕ on injektio,
$$p \notin \phi(\overline{D} \setminus \Delta_{i_0}).$$
Nyt puolestaan Lauseen 3.7 (2) mukaan
$$d(\phi, \Delta_{i_0}, p) = d(\phi, D \setminus K, p) = d(\phi, D, p)$$
josta yhtälön 4.4 kanssa saadaan
$$d(\phi, D, p) = \pm 1$$
□

Esimerkki 4.16. Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tällöin $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ja kaikilla $4b^2 - 12ac < 0$ funktio f on injektio ja
$$d(f, \mathbb{R}, p) = \begin{cases} -1 & a < 0 \\ 1 & a > 0 \end{cases}$$
Toisaalta funktio $g :]-2, 2[\times]-2, 2[\to \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x^2, y^2)$ ei ole injektio. $J_g(x) = 4xy$ ja pisteelle $p = (1, 1)$
$$d(g,]-2, 2[\times]-2, 2[, (1, 1)) = 0.$$

Kirjallisuutta

[1] Irene Fonseca ja Wilfrid Gangbo: *Degree Theory in Analysis and Applications*, 1995

[2] Tero Kilpeläinen - Kompleksianalyysi:
http://users.jyu.fi/ terok/opetus/kompleksi/kompleksianalyysi.pdf, luettu 22.7.2017

[3] Wikipedia - Contractio mapping: *https://en.wikipedia.org/wiki/Contraction_mapping*, luettu 24.7.2017

[4] Mathworld - Banach Fixed Point Theorem:
http://mathworld.wolfram.com/BanachFixedPointTheorem.html, luettu 24.7.2017

[5] Mathworld - Homotopy: *http://mathworld.wolfram.com/Homotopy.html*, luettu 21.7.2017