

# Harmoniset funktiot graafeilla

Henri Raudaskoski

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kevät 2017



**Tiivistelmä:** Henri Raudaskoski, *Harmoniset funktiot graafeilla* (engl. *Harmonic Functions on Graphs*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 38 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2017.

Tässä tutkielmassa tutustutaan harmonisten funktioiden määrittelyihin ja ominaisuuksiin graafeilla. Hieman yksinkertaistaen voidaan todeta graafien koostuvan pisteistä sekä viivoista, ja usein graafit esitetäänkin visuaalisesti tason pisteinä, joiden välillä kulkee viivoja. Graafien hyödyt korostuvat monimutkaisia rakenteita ja ilmiöitä mallinnettaessa. Harmoniset funktiot toteuttavat määritelmänsä nojalla kuuluisan matemaatikon Pierre-Simon Laplacen nimeä kantavan Laplacen yhtälön. Yleensä harmonisia funktioita tutkitaan euklidisissa avaruuksissa ja kompleksitasossa, mutta tässä tutkielmassa paneudutaan näiden funktioiden graafiversioihin.

Tarkastelujen pohjaksi käydään läpi graafiteorian yleisiä määritelmiä ja käsitteitä. Tärkeät polkujen sekä painotettujen graafien käsitteet määritellään, ja lisäksi graafeille todistetaan muitakin tärkeitä ja yleisiä tuloksia. Graafeihin liittyvät määrittelyt otetaan käyttöön tutkielman seuraavassa vaiheessa, jossa lähdetään liikkeelle Laplacen ajan tarkasteluista ja edetään harmonisen funktion graafiversioon, joka esitellään myös painotetulle graafille. Euklidisissa avaruuksissa harmonisten funktioiden määrittelyissä hyödynnetään derivointia, mutta graafeilla derivointi ei onnistu, joten määrittely on tehtävä eri tavalla. Harmonisten funktioiden graafiversio määritelläänkin harmonisten funktioiden keskiarvoperiaatetta soveltamalla.

Tutkielman lopussa hyödynnetään alkuosan tietoja ja siirrytään merkittävän Dirichlet'n reunaehto-ongelman pariin. Ongelma muotoillaan graafeille sopivaksi versioksi ja sitä tutkitaan tilanteessa, jossa tietyt alkuehdot ovat voimassa. Tutkielman päätuloksena todistetaan Dirichlet'n reunaehto-ongelman graafiversioon ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys.



## Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Graafiteoriaa	3
1.1. Johdantoa graafiteoriaan	3
1.2. Yleisesti graafeista	4
Luku 2. Harmoniset funktiot	13
2.1. Johdantoa harmonisiin funktioihin	13
2.2. Laplacen yhtälö ja harmoniset funktiot	16
Luku 3. Dirichlet'n ongelma	25
3.1. Dirichlet'n ongelman historiaa	25
3.2. Dirichlet'n ongelman graafiversio	26
Lähdeluettelo	37



## Johdanto

Graafi määritellään formaalisti pisteiden joukon ja viivojen joukon muodostamana parina. Helpompaa ja monesti havainnollistavampaa on kuitenkin ajatella graafi pisteinä, joiden välillä kulkee mahdollisesti viivoja. Graafit ovat käteviä työkaluja ilmiöiden mallintamisessa, ja esimerkiksi biologian syy-seuraussuhteet voidaan monesti esittää graafien avulla. Arkielämänkin pulmia voidaan ratkoa graafien avulla: esimerkiksi optimaalisin reitti työpaikalta kotiin voidaan esittää kartalla graafina, jossa pisteet kuvaavat reitin risteyskohtia, joista täytyy kääntyä, ja viivat näyttävät kuljettavan reitin.

Graafiteorian kehittyminen 1700-luvulta tähän päivään on ollut vaihtelevaa. Alkuhuuman ja peruskäsitteiden määrittelyn jälkeen aiheen nopea kehitys laantui, kunnes 1900-luvun puolivälin jälkeen teknologian kehittymisen myötä tutkimuksen tahti on ollut kiihtyvää. Graafiteoria onkin eräs matematiikan nykytutkimuksen merkittävisistä alueista, etenkin tietokonepohjaisen tarkastelun saralla. Yliopistojen matematiikan opetuksessa graafiteoria jää kenties hieman taka-alalle, kun taas teknillisillä aloilla graafiteoriaa hyödynnetään enemmänkin. Graafiteorian hyödyt eivät kuitenkaan rajoitu ainoastaan matematiikan pariin, sillä graafien sovelluksia voidaan käyttää monissa soveltavissa tieteissä.

Nykyajan fysiikan tutkimushaarat ovat levittyneet laajalle alalle, mutta monissa haaroissa potentiaaliteoria on tärkeässä roolissa. Esimerkiksi virtausdynamiikan ongelmat mallinnetaan usein potentiaaliteorian yhtälöiden avulla. Näistä yhtälöistä luultavasti merkittävin on osittaisderivaattoihin liittyvä Laplacen yhtälö, joka on nimetty kuuluisan ranskalaisen tiedemiehen Pierre-Simon Laplacen mukaan. Laplacen yhtälön toteuttavia funktioita kutsutaan harmonisiksi funktioiksi. Harmonisia funktioita on tutkittu laajasti muun muassa kompleksitasossa ja niihin liittyviä vahvoja tuloksia on useita.

Harmonisten funktioiden tarkastelu graafeilla on harvinaisempaa, mutta ei ennenkuulumatonta. Tässä tutkielmassa tarkoituksena onkin tutkia harmonisia funktioita ja niiden ominaisuuksia graafeilla. Tutkielma on jaettu kolmeen lukuun. Ensimmäisessä luvussa tutustutaan graafiteorian yleisiin tuloksiin sekä määritelmiin ja luodaan

tarvittavat pohjatiedot seuraavien lukujen tarkasteluihin. Toisen luvun aiheena ovat harmoniset funktiot, joita lähdetään tutkimaan klassisten määritelmien kautta. Harmonisten funktioiden määritelmät annetaan myös graafiversioina. Euklidisissa avaruuksissa funktion harmonisuus määritellään derivoinnin avulla. Graafeilla ei kuitenkaan voida derivoida, joten harmonisten funktioiden graafiversio johdetaan keskiarvoperiaatteen kautta.

Kolmannessa luvussa tutkitaan tärkeää reunaehto-ongelmaa, eli Dirichlet'n ongelmaa. Dirichlet'n ongelma on tärkeässä roolissa useissa fysiikan ongelmissa ja niiden ratkaisemisessa. Luvun aikana määritellään Dirichlet'n ongelman graafiversio sekä siihen liittyvä merkittävä lause ongelman ratkaisusta ja ratkaisun yksikäsitteisyydestä tiettyjen alkuehtojen vallitessa. Kyseinen lause ja sen todistus onkin tämän tutkielman tärkein tulos. Jokaiseen lukuun on sisällytetty erilaisia esimerkkejä tulosten ymmärtämisen helpottamiseksi. Tutkielman lähteenä on käytetty teosta [4].



## LUKU 1

### Graafiteoriaa

Tässä luvussa esitellään graafiteorian yleiset määritelmät ja käsitteet, joita tullaan myöhemmin tarvitsemaan. Luvun aluksi tutustutaan hieman graafien eli verkkojen historiaan. Tämän jälkeen edetään graafien yleisiin määritelmiin ja ominaisuuksiin, kun taas luvun loppupuolella paneudutaan syvällisemmin jatkon kannalta tärkeisiin käsitteisiin, kuten painotettuihin graafeihin.

#### 1.1. Johdantoa graafiteoriaan

Graafiteoria eli verkkoteoria on matematiikan osa-alueena kenties hieman tuntemattomampi, etenkin yliopiston perus- ja aineopinnoissa. Teknillisissä korkeakouluisissa graafiteoriaan tutustutaan hieman tarkemmin, mutta tarkastelut ovat pitkälti tietokonesimulaatioiden pohjalta toteutettuja. Yleisestikin graafiteorian matemaattiset tarkastelut suoritetaan nykyään lähes aina tietokoneilla, sillä tarkasteltavan datan määrä lisääntyy jatkuvasti suurella vauhdilla. Graafiteoriaa voidaan monipuolisuuksiensa ansiosta hyödyntää myös matematiikan ulkopuolella, esimerkiksi biologian ja kauppatieteiden mallit voidaan useasti rakentaa graafien avulla.

Graafiteorian pohjana pidetään kuuluisan sveitsiläisen matemaatikon Leonhard Eulerin Königsbergin siltaongelman ratkaisua vuodelta 1736. Artikkelissaan *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* Euler tutki Königsbergin eli nykyisen Kaliningradin kaupungin läpi kulkevia reittejä. Kaupunki koostui neljästä maa-alueesta, joita yhdisti seitsemän siltaa. Euler tutki mahdollisuutta löytää kaupungin läpi reitti, joka kulkisi jokaisen maa-alueen kautta, mutta vain kerran kunkin sillan yli lähtöpaikkaan palaten. Euler todisti, ettei tällaista reittiä ollut olemassa. Lisäksi hän yleisti tuloksensa monimutkaisempiin tapauksiin ja antoi ehdot, joiden toteutuessa ongelmaan löytyy ratkaisu [7].

Euler ei käyttänyt teksteissään nykyisin tunnettua terminologiaa, vaan termistö kehittyi myöhempien matemaatikkojen myötä. Heistä mainittakoot Arthur Cayley, joka

toi uudenlaisia näkökantoja graafiteoriaan, ja James Joseph Sylvester, joka esitteli sanan graafi ensimmäistä kertaa nykyisessä merkityksessään [3]. Heidän tulostensa jälkeen graafiteoria kehittyi hiljalleen ja oikeastaan vasta 1950-luvun puolivälin jälkeen aiheesta julkaistiin uusia merkittäviä julkaisuja. Nykyään tietokoneet mahdollistavat graafien tehokkaan tutkimisen ja alan nykyiset tutkimuskohteet ovatkin vahvasti yhteydessä tietotekniikan maailmaan. Eräs nykyajan tunnetuista ongelmista on kauppatmatkustajan ongelma, jossa tavoitteena on optimoida kauppatmatkustajan reitti sekä matka-ajan että kustannusten suhteen.

## 1.2. Yleisesti graafeista

Graafit koostuvat pisteistä ja pisteiden välillä mahdollisesti olevista viivoista. Suomen kielessä graafeista puhuttaessa voidaan käyttää synonyyminä sanaa verkko [8], mutta tässä tutkielmassa käytetään pääsääntöisesti ilmauksena graafia. Graafeista puhuttaessa täytyy erottaa oikea asiayhteys: tässä tekstissä sana graafi ei viittaa funktion kuvaajaan, josta käytetään välillä myös nimitystä graafi. Seuraava määritelmä kertoo mitä graafilla tarkoitetaan tämän tutkielman puitteissa.

**MÄÄRITELMÄ 1.1.** Graafi  $G$  on järjestetty pari, joka koostuu pisteiden joukosta ja viivojen joukosta. Yleensä merkitään  $G = (V, E)$ , jossa  $V$  on pisteiden joukko ja  $E$  on viivojen joukko.

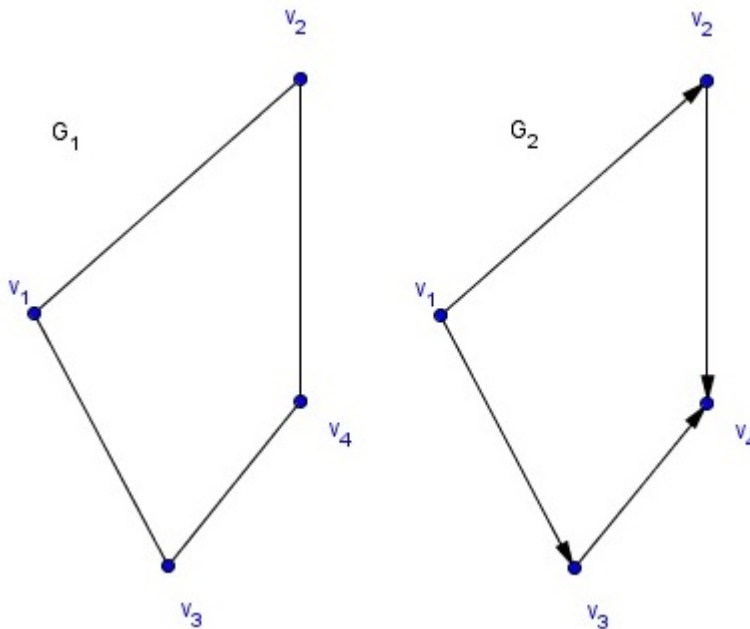
Pisteitä kutsutaan välillä myös solmuiksi ja viivoja kaariksi, mutta tässä tekstissä käytetään yllä olevan määritelmän mukaisia ilmauksia. Pisteiden joukko on pelkästään tavallinen pistejoukko  $V \neq \emptyset$ , jonka oletetaan tässä tekstissä olevan äärellinen. Viivojen joukko on kuitenkin syytä määritellä tarkemmin.

**MÄÄRITELMÄ 1.2.** Viivojen joukko  $E$  koostuu pistepareista  $(v_1, v_2)$ , missä  $v_1, v_2 \in V$ . Lisäksi, jos

- (1) parit  $(v_1, v_2)$  ovat järjestettyjä, eli  $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ , niin graafi  $G$  on suunnattu.

- (2) parit  $(v_1, v_2)$  ovat järjestämättömiä, eli  $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ , niin graafi  $G$  on suuntaamaton.

Tässä tutkielmassa tutkitaan pääasiassa suuntaamattomia graafeja, ellei muuta mainita. Joissain verkoissa saattaa esiintyä pisteitä, joista lähtee viiva itseensä. Tällaisia viivoja, joiden lähtö- ja päätepisteenä on sama piste, kutsutaan luupeiksi. Mikäli pisteiden joukko  $V$  on äärellinen eikä verkossa ole luuppeja, niin graafia  $G$  kutsutaan yksinkertaiseksi äärelliseksi graafiksi. Graafit esitetään yleensä visuaalisesti tasossa, jossa pisteet ovat tason pisteitä ja viivat ovat tason pisteiden välisiä janoja. Alla olevassa kuvassa on esitetty graafit  $G_1$  ja  $G_2$ , joista ensimmäinen on yksinkertainen suuntaamaton graafi, kun taas toinen on yksinkertainen suunnattu graafi.



KUVA 1.1. Graafit  $G_1$  ja  $G_2$ .

Kuvassa 1.1. esiintyvät graafit koostuvat samoista pisteistä  $v_1, v_2, v_3$  ja  $v_4$ , mutta graafit eivät ole samat. Graafi  $G_1$  on yksinkertainen ja suuntaamaton graafi, josta löytyy viivat  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_2, v_4)$  ja  $(v_3, v_4)$ . Tällöin kahden pisteen, joiden välillä on viiva, välillä voidaan kulkea molempiin suuntiin. Siis esimerkiksi pisteestä  $v_1$  voidaan kulkea pisteeseen  $v_3$  ja vastaavasti pisteestä  $v_3$  voidaan kulkea pisteeseen  $v_1$ . Täytyy kuitenkin huomata ero graafiin  $G_2$ , joka on yksinkertainen ja suunnattu graafi, josta löytyy suunnatut viivat  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_2, v_4)$  ja  $(v_3, v_4)$ . Graafissa  $G_2$  voidaan esimerkiksi siis kulkea pisteestä  $v_1$  pisteeseen  $v_3$ , mutta pisteestä  $v_3$  ei voida

kulkea pisteeseen  $v_1$ . Suunnatuissa graafeissa viivat esitetään yleensä nuolien avulla, jolloin on helpompi havaita mihin suuntaan viivoja voidaan kulkea.

Graafit voidaan määrittellä joukko-opin termeillä täsmällisemmin. Tämän tekstin tarkoituksiin aiemmat määritelmät ovat sopivia, mutta esitellään graafiteorian yleiset määritelmät silti myös toisella tavalla. Seuraava määritelmä voi auttaa myös havainnoimaan suunnattujen ja suuntaamattomien graafien välistä eroa.

**MÄÄRITELMÄ 1.3.** Olkoon  $V \neq \emptyset$  äärellinen joukko. Olkoon lisäksi  $E \subset \mathbb{P}(V)$  koelma joukon  $V$  kahden alkion kokoisia osajoukkoja ja olkoon  $D \subset V \times V$  relaatio joukolla  $V$ .

Tällöin pari  $(V, E)$  on verkko ja pari  $(V, D)$  on suunnattu verkko.

Kuten aiemmin mainittiin, tämä määritelmä antaa hieman erilaisen lähestymistavan graafeihin joukko-opin kautta. Joissain yhteyksissä tämä tapa voi olla käytännöllisempi kuin aiemmat määritelmät.

Lähdetään tutkimaan graafeja hieman enemmän ja aloitetaan tarkastelu pisteistä. Kahta pistettä, joiden välillä on viiva, kutsutaan naapureiksi. Olkoon  $x, y \in V$  siten, että  $x$  ja  $y$  ovat naapureita. Tällöin merkitään  $x \sim y$ . Seuraavaksi määritelläänkin uusi käsite liittyen pisteisiin.

**MÄÄRITELMÄ 1.4.** Olkoon  $(V, E)$  verkko. Tällöin pisteen  $v \in V$  aste on  $\deg(v) = \# \{w \in V : v \sim w\}$ .

Pisteen aste kertoo siis suuntaamattomien graafien tapauksessa pisteestä lähtevien viivojen lukumäärän. Esimerkiksi Kuvassa 1.1. graafin  $G_1$  kaikkien pisteiden aste on kaksi.

Piste on parillinen, jos pisteen aste on parillinen. Vastaavasti piste on pariton, jos sen aste on pariton. Mikäli jokaisen pisteen aste on äärellinen, kutsutaan verkkoa lokaalisti äärelliseksi. Yksinkertainen äärellinen graafi on siten aina myös lokaalisti äärellinen. Lisäksi graafi on  $n$ -asteinen, jos jokaisen pisteen aste on  $n$ . Graafi on täydellinen, jos se sisältää kaikki mahdolliset viivat, poislukien luupit. Seuraava lause

antaa yhteyden pisteiden asteiden ja viivojen lukumäärän välille.

LAUSE 1.5. *Olkoon  $(V, E)$  yksinkertainen äärellinen graafi. Tällöin pätee seuraava:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2\#E.$$

TODISTUS. Sivuuutetaan. Todistus on suoraviivainen ja sen voi suorittaa esimerkiksi induktion avulla. Lause pohjautuu faktaan, että viivan lisääminen graafin lisää viivan molempien päätepisteiden astelukua yhdellä. Eräät todistukset lauseelle löytyvät lähteistä [4] ja [8].  $\square$

Esitellään seuraavaksi muutamat uudet määritelmät, jotka liittyvät pisteiden välillä kulkemiseen. Jatkon kannalta olisi tärkeää pystyä mittaamaan ja tutkimaan tilanteita, joissa kuljetaan kahden mielivaltaisen graafin pisteen välillä. Tätä varten ensimmäiseksi määritellään polun käsite.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Graafin  $(V, E)$  pisteiden  $v_n \in V$  muodostamaa äärellistä jonoa

$$\{v_n\}_{n=0}^k$$

kutsutaan graafin poluksi, jos  $v_n \sim v_{n+1}$  kaikilla  $n \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Lisäksi polussa olevien viivojen lukumäärää  $k$  sanotaan polun pituudeksi.

Polun määritelmän avulla pystymme edelleen määrittelemään uudet käsitteet: yhtenäinen graafi ja graafietäisyys.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Graafia  $(V, E)$  kutsutaan yhtenäiseksi, mikäli graafin kahden pisteen  $v_a$  ja  $v_b$  välille löytyy Määritelmän 1.6. mukainen polku

$$\{v_n\}_{n=0}^k$$

siten, että  $v_0 = v_a$  ja  $v_k = v_b$ .

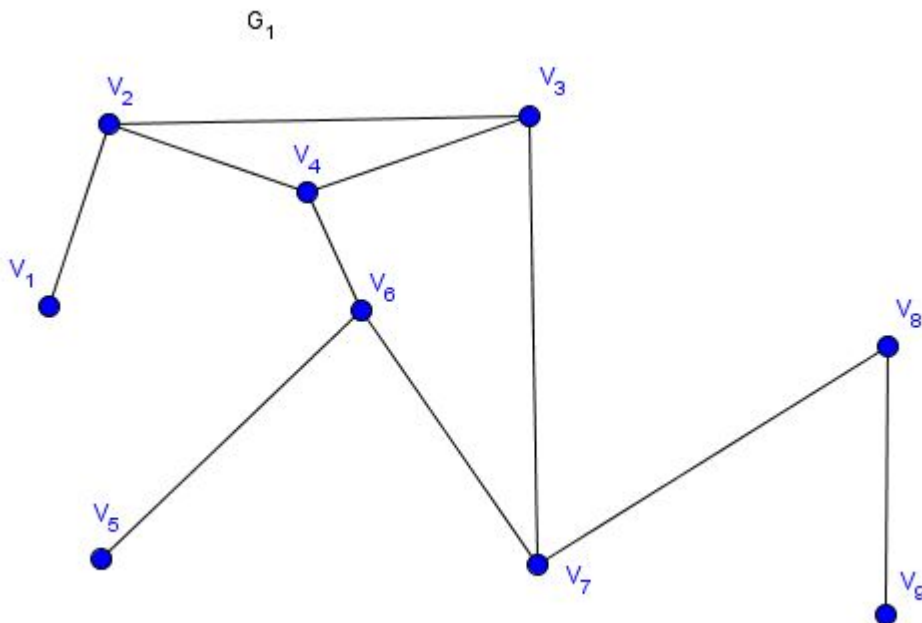
MÄÄRITELMÄ 1.8. Yhtenäiselle graafille  $(V, E)$  voidaan määritellä kahden graafin pisteen  $v_n$  ja  $v_m$  välinen graafietäisyys  $d(v_n, v_m)$  seuraavasti:

- (1) Jos  $v_n \neq v_m$ , niin  $d(v_n, v_m)$  on lyhyimmän mahdollisen pisteitä  $v_n$  ja  $v_m$  yhdistävän polun pituus.
- (2) Jos  $v_n = v_m$ , niin  $d(v_n, v_m) = 0$ .

Graafin yhtenäisyys varmistaa sen, että graafietäisyys on äärellinen eli  $d(v_n, v_m) < \infty$ . Aiempien määritelmien nojalla lyhyin polku on lisäksi aina määritettävissä. Lyhyin polku ei kuitenkaan ole aina yksikäsitteinen, vaan lyhyimpiä polkuja voi olla useampia.

Alla olevassa Kuvassa 1.2. esitellään yhtenäinen graafi  $G_1$ , joka koostuu yhdeksästä pisteestä. Graafi toteuttaa selvästi yhtenäisyyden määritelmän, sillä jokaisen kahden graafin pisteen välille löytyy polku, eikä graafissa ole niin sanottuja erillisiä pisteitä. Erilliset pisteet ovat siis sellaisia graafin pisteitä, joista ei lähde yhtään viivaa toiseen graafin pisteeseen.

Nyt esimerkiksi pisteiden  $v_1$  ja  $v_5$  välinen graafietäisyys on näiden pisteiden välisen mahdollisimman lyhyen polun pituus. Kyseinen polku kulkee pisteiden  $v_1, v_2, v_4, v_6$  ja  $v_5$  kautta ja siispä polun pituus on kuljettujen sivujen lukumäärä eli neljä. Vastaavasti myös esimerkiksi pisteiden  $v_1$  ja  $v_8$  välinen graafietäisyys on neljä.



KUVA 1.2. Yhtenäinen graafi  $G_1$ .

Graafietäisyys on graafien tarkastelussa kätevä työkalu, jonka hyödyt tulevat ilmi etenkin suuria graafeja tutkittaessa. Graafietäisyys on lisäksi määritelty hyvin ja se toteuttaa metriikan ehdot. Tällöin myös  $(V, d)$ , missä  $V$  on graafin pisteiden joukko ja  $d$  on graafietäisyys, on metrinen avaruus. Todetaan tämä seuraavassa lauseessa.

LAUSE 1.9. *Yhtenäisessä graafissa  $(V, E)$  graafietäisyys  $d$  on metriikka ja siis  $(V, d)$  on metrinen avaruus.*

TODISTUS. Lauseen todistamiseksi täytyy todistaa, että graafietäisyys  $d$  täyttää kaikilla joukon  $V$  alkioilla  $a, b$  ja  $c$  metriikan kolme ehtoa:

$$(1) \quad d(a, b) \geq 0 \text{ ja } d(a, b) = 0 \text{ jos ja vain jos } a = b$$

$$(2) \quad d(a, b) = d(b, a)$$

$$(3) \quad d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c).$$

Ensimmäisen kohdan todistaminen on helppoa, sillä ehto seuraa suoraan Määritelmän 1.8. tiedoista. Jos  $a \neq b$ , niin selvästi  $d(a, b) \geq 1$ , sillä tarvitaan ainakin yksi viiva, jotta pisteestä  $a$  päästään pisteeseen  $b$ . Jos taas  $a = b$ , niin  $d(a, b) = 0$  edelleen Määritelmän 1.8. nojalla. Kyseisten päätelmien avulla on helppo todeta ehdon (1) toteutuvan ja yhtenäisessä graafissa voidaan todeta, että  $0 \leq d(a, b) < \infty$ .

Toinenkin kohta seuraa helposti aiempien määritelmien pohjalta. Pisteiden  $a$  ja  $b$  välinen polku voidaan kulkea suuntaamattomassa graafissa kumpaan suuntaan tahansa polun pituuden muuttumatta. Siispä lyhyin polku pisteestä  $a$  pisteeseen  $b$  on sama polku kuin pisteiden  $b$  ja  $a$  välinen lyhyin polku kuljettuna käänteiseen suuntaan. Täten kohta (2) on myös tosi graafietäisyydelle  $d$ .

Kolmas kohta on hieman työläämpi, mutta silti suoraviivainen. Olkoon polku  $\{a_n\}_{n=0}^l$  lyhyin pisteet  $a$  ja  $b$  yhdistävä polku ja  $\{b_n\}_{n=0}^m$  lyhyin pisteet  $b$  ja  $c$  yhdistävä polku, jolloin  $d(a, b) = l$  ja  $d(b, c) = m$ .

Muodostetaan yllä määriteltyjen polkujen avulla uusi polku:  
 $a, a_1, \dots, a_{l-1}, b, b_1, \dots, b_{m-1}, c$ . Tämä on eräs pisteet  $a$  ja  $c$  yhdistävä polku, mutta

ei välttämättä lyhyin. Tämän uuden polun pituus on aiempien polkujen pituuksien summa eli  $l + m$ , jolloin saadaan muodostettua epäyhtälö

$$d(a, c) \leq l + m = d(a, b) + d(b, c), \text{ joka todistaa kohdan (3).}$$

Täten graafietäisyys  $d$  toteuttaa metriikan kolme ehtoa ja on siis metriikka. Siispä  $(V, d)$  on metrinen avaruus.  $\square$

Seuraavaksi esitellään jälleen uusi käsite graafeihin liittyen. Painotetut graafit tulevat olemaan merkittävässä osassa myöhemmässä vaiheessa tätä tutkielmaa ja onkin syytä määritellä käsite täsmällisesti.

**MÄÄRITELMÄ 1.10.** Painotettu graafi on pari  $(G, \mu)$ , missä  $G = (V, E)$  on graafi ja  $\mu: V \times V \rightarrow [0, \infty[$  on ei-negatiivinen funktio. Kaikilla  $(x, y) \in V \times V$  voidaan merkitä  $\mu(x, y) = \mu_{xy}$  ja funktio  $\mu$  toteuttaa seuraavat ehdot:

- (1)  $\mu_{xy} = \mu_{yx}$
- (2)  $\mu_{xy} > 0$  jos ja vain jos  $x \sim y$ .

Funktio  $\mu_{xy}$  antaa siis graafin kahden pisteen parille tietyn painon. Täten funktio  $\mu_{xy}$  voidaan ajatella myös funktioksi, joka liittyy jokaiseen graafin  $G$  viivaan  $e \in E$  jonkin positiivisen painon. Lisäksi funktio antaa painon nolla niille pistepareille  $(x, y)$ , joiden välillä ei ole viivaa. Lisäksi, koska jokaista viivaa  $e \in E$  vastaa tietty pistepari  $(x, y)$ , jolle  $x \sim y$ , voidaan merkitä  $\mu_{xy} = \mu_e$ . Tämä merkintätapa helpottaa summien indeksointia, kuten esimerkiksi Lauseen 1.11. todistuksessa nähdään.

Painoa  $\mu$  kutsutaan yksinkertaiseksi painoksi, jos  $\mu_{xy} = 1$  kaikilla pistepareilla  $(x, y)$ , joiden välillä on viiva eli  $x \sim y$ . Painojen avulla voidaan laskea jokaisen graafin pisteen paino, joka määräytyy pisteestä lähtevien viivojen painojen summasta. Siispä  $\sum_{y, y \sim x} \mu_{xy} = \mu(x)$  on pisteen  $x$  paino kaikilla  $x \in V$ . Jos paino  $\mu$  on yksinkertainen, niin selvästi pisteen  $x$  paino on pisteestä lähtevien viivojen lukumäärä. Tällöin pisteen paino on sama kuin pisteen aste eli pisteen  $x$  paino on  $\mu(x) = \deg(x)$ .

Painotettujen graafien avulla saadaan Lauseelle 1.5. myös yleisempi muoto:



LAUSE 1.11. *Kaikilla yksinkertaisilla, äärellisillä graafeilla  $(G, \mu)$  pätee:*

$$\sum_{x \in V} \mu(x) = 2 \sum_{e \in E} \mu_e.$$

TODISTUS. Piste  $x \in V$  paino on  $\mu(x) = \sum_{y, y \sim x} \mu_{xy}$ . Summaan voidaan lisätä myös kaikki pisteparit  $(x, y)$ , joiden välillä ei ole sivua, sillä näiden pisteparien paino on  $\mu_{xy} = 0$ . Summa saadaan siis laajennettua muotoon

$$\mu(x) = \sum_{y, y \sim x} \mu_{xy} = \sum_{y \in V} \mu_{xy}.$$

Tällöin saadaan

$$\sum_{x \in V} \mu(x) = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} \mu_{xy} = \sum_{x, y \in V} \mu_{xy} = \sum_{x, y: x \sim y} \mu_{xy} = 2 \sum_{e \in E} \mu_e.$$

Tämä todistaa halutun väitteen ja yleistää Lauseen 1.5. äärellisten graafien tilanteessa.  $\square$

Aiemmin määritetyn graafietäisyyden avulla saadaan todistettua eräs mielenkiintoinen tulos, joka liittyy pisteiden lukumäärään graafissa. Esitetään tulos lauseena.

LAUSE 1.12. *Olkoon  $G = (V, E)$  yhtenäinen ja lokaalisti äärellinen graafi. Tällöin pisteiden joukko  $V$  on joko äärellinen tai numeroituva.*

TODISTUS. Olkoon  $x \in V$  graafin  $G$  mielivaltainen piste. Otetaan käyttöön graafipallon käsite graafeissa hyödyntäen graafietäisyyttä. Olkoon  $B_{x,n} = \{y \in V : d(x, y) \leq n\}$   $x$ -keskinen ja ” $n$ -säteinen” pallo eli joukko, joka koostuu kaikista graafin pisteistä, joiden etäisyys pisteestä  $x$  on korkeintaan  $n$ . Käytetään induktiotodistusta ja näytetään, että graafipalloon kuuluvien pisteiden määrä on äärellinen eli  $\#B_{x,n} < \infty$ .

Perusaskel  $n = 0$  on kunnossa, sillä selvästi  $B_{x,0} = \{x\}$ . Osoitetaan sitten induktiooletuksen ” $B_{x,n}$  on äärellinen” avulla, että  $B_{x,n+1}$  on äärellinen. Tätä varten riittää osoittaa, että joukko  $(B_{x,n+1} \setminus B_{x,n})$  on äärellinen.

Graafietäisyyden ja graafipallon määritelmien nojalla tiedetään, että kaikille  $y \in (B_{x,n+1} \setminus B_{x,n})$  pätee  $d(x, y) = n + 1$ . Tällöin on siis olemassa polku  $\{x_k\}_{k=0}^{n+1}$ , joka kulkee pisteestä  $x$  pisteeseen  $y$  ja jonka pituus on  $n + 1$ . Tällöin kuitenkin polku  $\{x_k\}_{k=0}^{n+1}$  kulkee pisteen  $x_n$  kautta eli on olemassa polku  $\{x_k\}_{k=0}^n$ , jonka pituus on  $n$ . Täten  $d(x, x_n) \leq n$  eli  $x_n \in B_{x,n}$ . Kuitenkin polun  $\{x_k\}_{k=0}^{n+1}$  perusteella on olemassa viiva pisteiden  $x_n$  ja  $y$  välillä, toisin sanoen  $x_n \sim y$ . Täten siis jokaisesta pisteestä  $y \in (B_{x,n+1} \setminus B_{x,n})$  on viiva johonkin graafipallon  $B_{x,n}$  pisteeseen.

Kuitenkin induktio-oletuksen nojalla tiedetään, että graafipallossa  $B_{x,n}$  on äärellinen määrä pisteitä, joilla jokaisella on graafin lokaalisen äärellisyyden nojalla vain äärellinen määrä naapuripisteitä. Tällöin graafipallon  $B_{x,n}$  naapuripisteiden määrä on äärellinen eli  $\#(B_{x,n+1} \setminus B_{x,n}) < \infty$  ja myös  $\#B_{x,n+1} < \infty$ , kuten haluttiinkin osoittaa.

Lisäksi pisteiden joukko  $V$  voidaan esittää muodossa  $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{x,n}$ , sillä graafi  $G$  on yhdistetty, jolloin  $d(x, y) < \infty$  kaikilla  $y \in V$ . Siispä pisteiden joukko  $V$  on numeroituvana yhdisteenä äärellisistä joukoista joko äärellinen tai numeroituva ja täten lause on todistettu.  $\square$

Ensimmäisessä luvussa on esitelty graafeihin liittyviä peruskäsitteitä ja seuraavien lukujen kannalta tärkeitä asioita. Lisää mielenkiintoisia tuloksia graafeihin liittyen voi etsiä esimerkiksi lähteistä [8] ja [13]. Seuraavaksi siirrytään kuitenkin harmonisten funktioiden pariin, edelleen graafeja hyödyntäen.

## LUKU 2

### Harmoniset funktiot

Tässä luvussa tutustutaan harmonisiin funktioihin ja niiden ominaisuuksiin. Luvun alussa tutustutaan derivoinnin sekä osittaisderivoinnin määritelmiin ja Laplaceen approksimaatioihin. Luvun loppupuolella päästään käsiksi Laplacelta peräisin oleviin määritelmiin ja käsitteisiin, muun muassa Laplaceen operaattoriin ja Laplaceen yhtälöön.

#### 2.1. Johdantoa harmonisiin funktioihin

Pierre-Simon Laplace oli eräs 1700-luvun loppupuolen ja 1800-luvun alkupuolen tärkeimmistä tiedemiehistä. Laplace oli pääosin kiinnostunut tähtitieteestä ja hän tutkikin elämänsä aikana muun muassa planeettajärjestelmiä ja planeettojen kiertoratoja. Lisäksi hän tutki aurinkokunnan syntymistä sekä stabiilisuutta ja töidensä ohessa Laplace loikin uusia laskumenetelmiä tutkimuksiansa helpottamiseksi. Laplaceen matemaattisia luomuksia ovat esimerkiksi useat todennäköisyysteoriaan liittyvät tulokset ja pienimmän neliösumman periaate virheanalyysissä. Lisäksi Laplace esitteli nimeään kantavan muunnosmenetelmän, jonka avulla differentiaali- ja integraaliyhtälöitä voidaan muuttaa algebralliseksi yhtälöiksi. Matematiikan ja fysiikan kannalta vieläkin merkittävämpiä tuloksia olivat potentiaalifunktion, Laplaceen operaattorin ja Laplaceen yhtälön käsitteet [10]. Näihin tutustutaankin myöhemmin tässä luvussa. Lähdetään liikkeelle reaaliarvoisen yhden muuttujan funktion derivaatan määritelmästä.

**MÄÄRITELMÄ 2.1.** Olkoon  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $x \in ]a, b[$ . Tällöin funktio  $f$  on derivoituva pisteessä  $x$ , jos raja-arvo  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  on olemassa ja raja-arvo on äärellinen. Täten voidaan merkitä  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ , kun raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Yllä olevan derivaatan määritelmän avulla voidaan tutkia funktion numeerisia approksimaatioita pienellä  $h$ :n arvolla, kuten Laplacekin aikoinaan teki omien laskujensa yhteydessä. Tällöin siis arvot  $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  ja  $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$  ovat melkoisen lähellä derivaatan arvoa pisteessä  $x$  ja täten ne antavat monesti melkoisen hyvän arvion derivaatan arvolle pienellä  $h$ :n arvolla. Kutsutaan edellä mainittuja termejä jatkossa derivaatan erotusosamäärän operaattoreiksi.

ESIMERKKI 2.2. Olkoon funktio  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  ja  $x_0 = 2$ . Tiedetään, että  $f'(x) = 3x^2$  ja siispä  $f'(x_0) = 3 \cdot 2^2 = 12$ . Toisaalta valitsemalla  $h$ :n arvon pieneksi, esimerkiksi olkoon  $h = 0,001$ , ja hyödyntämällä derivaatan erotusosamäärän operaattoreita saadaan derivaatalle arviot:  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(2+0,001)-f(2)}{0,001} = \frac{(2,001)^3-(2)^3}{0,001} \approx 12,006$  ja  $\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \frac{f(2)-f(2-0,001)}{0,001} = \frac{(2)^3-(1,999)^3}{0,001} \approx 11,994$ .

Olkoon sitten funktio  $g : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \ln(x)$  ja  $x_1 = 1$ . Nyt  $g'(x) = \frac{1}{x}$  ja  $g'(x_1) = 1$ . Valitaan  $h$ :n arvo jälleen suhteellisen pieneksi eli olkoon edelleen  $h = 0,001$ . Nyt derivaatan erotusosamäärän operaattoreilla saadaan seuraavat arviot derivaatalle:  $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \frac{\ln(1,001)-\ln(1)}{0,001} \approx 0,9995$  ja  $\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} = \frac{\ln(1)-\ln(0,999)}{0,001} \approx 1,0005$ .

Yllä olevan esimerkin perusteella numeerinen approksimointi antaa hyviä arvioita derivaatan arvolle, kuten on tarkoituskin. Laplace käytti aikoinaan tähtitieteen laskujensa yhteydessä saman tyyllisiä arvioita ja sai näin helpotettua laskuja. On kuitenkin huomattava, että yllä oleva menettely ei anna nykyajan tietoihin oikeastaan mitään uutta, sillä menetelmä vastaa derivaatan määritelmän mukaista erotusosamäärän laskemista tietyllä kiinnitetyllä  $h$ :n arvolla. Laskut antaisivat tarkempia tuloksia, jos  $h$ :n arvoa pienennettäisiin, ja vastaisivat tarkasti derivointia, mikäli osamäärille suoritettaisiin raja-arvoprosessit. Laplacen puolustukseksi sanottakoon, että raja-arvon käsite oli hänen elinaikanaan vielä hieman epäselvä eikä määritelmä ollut yhtä tarkka kuin nykyisin. Laplacen menetelmä tepsii kuitenkin vain funktioihin, jotka ovat tarpeeksi ”siistejä” eli toisin sanoen derivoituvia nykyisessä merkityksessä.

Vastaavat approksimaatiot onnistuvat myös reaaliarvoisen yhden muuttujan funktion derivaatan derivaatalle, eli toiselle derivaatalle. Mikäli funktion  $f$  derivaatta  $f'$  toteuttaa derivaatan määritelmän ehdot, myös toinen derivaatta on olemassa ja

Laplacen numeerinen approksimaatio toiselle derivaatalle  $f''$  on mielekäs. Tällöin approksimaatioksi saadaan

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \approx \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h} = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} \\ &= \frac{2}{h^2} \left( \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} - f(x) \right). \end{aligned}$$

Arvion mukaan siis funktion toisen derivaatan arvo pisteessä  $x$  on lähellä keskiarvoa funktion arvoista pisteissä  $x+h$  sekä  $x-h$ , kun tästä keskiarvosta vähennetään funktion arvo pisteessä  $x$ . Lisäksi edellä mainittua arvoa ”skaalataan” tekijällä  $\frac{2}{h^2}$ .

Tähän asti ollaan tarkasteltu ainoastaan yhden muuttujan funktioita, mutta seuraavaksi siirrytään kahden muuttujan funktioihin. Useamman muuttujan tapauksessa derivointi on edelleen mahdollista ja usein kätevääkin, mutta aiempi määritelmä ei enää ole pätevä. Määritellään siis osittaisderivaattojen, joissa derivoidaan funktiota yhden muuttujan suhteen muiden muuttujien pysyessä vakioina, käsite reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa.

**MÄÄRITELMÄ 2.3.** Olkoon  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Funktion  $f$  osittaisderivaatta muuttujan  $x$  suhteen pisteessä  $(x, y)$  on  $f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$  ja muuttujan  $y$  suhteen  $f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$ , mikäli kyseiset raja-arvot ovat olemassa.

**HUOMAUTUS 2.4.** Funktion  $f$  osittaisderivaatalle on olemassa useita erilaisia merkintätapoja. Funktion  $f$  ensimmäinen osittaisderivaatta muuttujan  $x$  suhteen voidaan merkitä muun muassa seuraavasti:  $f'_x$ ,  $f_x$ ,  $D_x$  ja  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Tässä tekstissä käytetään edellisen määritelmän mukaista merkintätapaa  $f'_x$ .

Osittaisderivaattojen tutkiminen onnistuu funktiosta riippuen myös niin sanotuilla korkeammilla kertaluvuilla, toisin sanoen funktion osittaisderivaatoista voidaan laskea edelleen uusia osittaisderivaattoja. Merkinnät ovat vastaavia kuin yllä olevassa huomautuksessa ja esimerkiksi toisen kertaluokan osittaisderivaattaa, jossa aluksi otetaan muuttujan  $x$  ja sen jälkeen muuttujan  $y$  suhteen osittaisderivaatta funktiosta  $f$ , merkitään  $f''_{xy}$ . Havainnollistetaan tätä seuraavalla esimerkillä.

ESIMERKKI 2.5. Olkoon  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2y + 2xy$  ja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Nyt funktion  $f$  osittaisderivaatat ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat:

$$f'_x(x, y) = 2xy + 2y,$$

$$f'_y(x, y) = x^2 + 2x,$$

$$f''_{xx}(x, y) = f'_x(f'_x(x, y)) = f'_x(2xy + 2y) = 2y,$$

$$f''_{yy}(x, y) = f'_y(f'_y(x, y)) = f'_y(x^2 + 2x) = 0,$$

$$f''_{xy}(x, y) = f'_y(f'_x(x, y)) = f'_y(2xy + 2y) = 2x + 2 \text{ ja}$$

$$f''_{yx}(x, y) = f'_x(f'_y(x, y)) = f'_x(x^2 + 2x) = 2x + 2.$$

Huomataan, että osittaisderivointi molempien muuttujien suhteen johti samaan lopputulokseen riippumatta osittaisderivoinnin järjestyksestä. Näin tapahtuukin aina, kun käsiteltävä funktio on tarpeeksi siisti, toisin sanoen osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia tietyssä tarkasteltavan pisteen ympäristössä. Siispä, jos osittaisderivaatta  $f''_{xy}$  on olemassa ja jatkuva, niin tällöin myös osittaisderivaatta  $f''_{yx}$  on olemassa ja  $f''_{yx} = f''_{xy}$ .

## 2.2. Laplacen yhtälö ja harmoniset funktiot

Laplace loi osittaisderivoinnin avulla nimeään kantavan operaattorin, jolla on nykypäivänä monenlaisia käyttökohteita etenkin fysiikan saralla. Operaattori syntyi kolmeulotteisena versiona Laplacen tutkiessa Newtonin painovoimalain avulla planeettojen liikkeitä ja käyttäytymistä. Nykypäivänä operaattoria hyödynnetään  $n$ -ulotteisena esimerkiksi kvanttimekaniikan Schrödingerin yhtälössä ja elektromagnetismin merkittävissä Maxwellin yhtälöissä.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Olkoon funktio  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , jolla kaikki osittaisderivaatat  $f''_{x_1x_1}, f''_{x_2x_2}, \dots$  ovat olemassa jatkuvina kaikissa  $\mathbb{R}^N$ :n pisteissä. Tällöin Laplacen operaattori on  $\Delta f = \sum_{n=1}^N f''_{x_nx_n}$ .

**HUOMAUTUS 2.7.** Laplacen operaattorille on varattu oma merkki  $\Delta$ , jolla on sama merkitys kaikissa koordinaatistoissa. Erityisesti  $\mathbb{R}^2$ :n funktiolle  $f$  pätee  $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy}$ . Määritelmän mukaisesti toisen kertaluvun osittaisderivoinnit suoritetaan vain yhden muuttujan suhteen eikä usean muuttujan suhteen laskettuja osittaisderivaattoja esiinny summassa.

Laplacen operaattorin avulla päästään määrittelemään Laplacen yhtälö ja sen myötä myös harmoniset funktiot.

**MÄÄRITELMÄ 2.8.** Olkoon funktio  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , jolla kaikki osittaisderivaatat  $f''_{x_1x_1}, f''_{x_2x_2}, \dots$  ovat olemassa jatkuvina kaikissa  $\mathbb{R}^N$ :n pisteissä. Tällöin Laplacen yhtälö saadaan asettamalla Laplacen operaattori nolaksi eli asettamalla  $\Delta f = \sum_{n=1}^N f''_{x_nx_n} = 0$ .

**MÄÄRITELMÄ 2.9.** Olkoon edelleen funktio  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , jolla kaikki osittaisderivaatat  $f''_{x_1x_1}, f''_{x_2x_2}, \dots$  ovat olemassa jatkuvina kaikissa  $\mathbb{R}^N$ :n pisteissä. Funktiota  $f$  kutsutaan harmoniseksi, mikäli se toteuttaa Laplacen yhtälön ehdon. Siispä, funktio  $f$  on harmoninen, jos  $\Delta f = \sum_{n=1}^N f''_{x_nx_n} = 0$ .

Edellisten määritelmien nojalla nähdään selvästi, että Laplacen operaattori ja yhtälö sekä harmoniset funktiot ovat todella vahvasti yhteydessä toisiinsa. Seuraavat esimerkit voivat helpottaa harmonisten funktioiden hahmottamista. Jälkimmäisessä esimerkissä on hyödynnetty useita kompleksilaskennan tuloksia, näitä tuloksia todistuksineen löytyy esimerkiksi lähteistä [1] ja [9].

**ESIMERKKI 2.10.** Olkoon funktio  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + 8y$  ja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Lasketaan funktion osittaisderivaattoja:

$$f'_x(x, y) = 6x^2 - 6y^2,$$

$$f''_{xx}(x, y) = 12x,$$

$$f'_y(x, y) = -12xy + 8 \text{ ja}$$

$$f''_{yy}(x, y) = -12x.$$

Nyt  $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} = 12x + (-12x) = 0$ . Täten funktio  $f$  on harmoninen.

**ESIMERKKI 2.11.** Tutkitaan hieman analyyttisiä funktioita. Funktio  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ , missä  $A \subset \mathbb{C}$  on avoin joukko, on analyyttinen joukossa  $A$ , jos kompleksinen derivaatta  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$  on olemassa kaikilla  $z \in A$ . Kompleksista derivaattaa on hyvä verrata Määritelmän 2.1. reaaliseen versioon ja huomata, että reaaliosassa  $h \in \mathbb{R}$ , kun taas kompleksisessa versiossa  $h \in \mathbb{C}$ . Kompleksisen derivaatan yhteydessä voidaan käyttää samoja merkintöjä kuin reaaliosalle derivaatalle ja hyödyntää merkintää  $f'$ , kunhan muistetaan missä joukoissa tarkastelut tehdään.

Olkoon nyt siis  $A \subset \mathbb{C}$  avoin joukko,  $z \in \mathbb{C}$  ja funktio  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen. Tällöin funktio  $g$  voidaan esittää funktion reaaliosan  $u = \operatorname{Re}(g)$  ja imaginaariosan  $v = \operatorname{Im}(g)$  avulla muodossa  $g(z) = u(z) + iv(z)$ . Analyyttisen funktion reaaliosa ja imaginaariosa toteuttavat kaikilla  $z \in \mathbb{C}$  niin sanotut Cauchy-Riemannin yhtälöt:  $u'_x(z) = v'_y(z)$  ja  $u'_y(z) = -v'_x(z)$ .

Analyyttisen funktion  $g$  derivaattafunktio  $g'(z) = u'_x(z) + iv'_x(z) = v'_y(z) - iu'_y(z)$  on edelleen analyyttinen. Lisäksi funktioiden  $u$  ja  $v$  toisen kertaluvun jatkuvilla osittaisderivaatoilla ei molempien muuttujien suhteen derivoitaessa derivoinnin järjestyksellä ole väliä, toisin sanoen  $u''_{xy} = u''_{yx}$  ja  $v''_{xy} = v''_{yx}$ .

Näiden tietojen avulla saadaan laskettua:  $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{yx} - v''_{xy} = 0$  ja  $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = -u''_{yx} + u''_{xy} = 0$ . Täten siis analyyttisen funktion reaaliosat ja imaginaariosat ovat harmonisia funktioita. Tämän tuloksen avulla monet kompleksianalyysin laskut helpottuvat ja nopeutuvat huomattavasti.

Näiden esimerkkien myötä on hyvä pysähtyä hetkeksi pohtimaan edellisten määritelmien ja graafien yhteensopivuutta. Luvussa 1 tarkasteltiin graafeja, mutta tämän luvun määritelmät on esitetty klassisessa muodossa eivätkä ne siis suoraan ole siirrettävissä graafeille. Tarvitaan siis pientä muokkaamista, jotta Laplaceen operaattori ja yhtälö ovat järkevästi määriteltyjä myös graafeille.



Luvussa 1 todettiin, että graafin pisteet esitetään yleensä pisteinä tasossa, jossa viivat yhdistävät näitä pisteitä. Tällöin graafin pisteet voidaan ajatella siis pistepareiksi  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , joita yhdistävät viivat  $e \in E$ . Hyödynnetään tämän luvun alkupuolella esiteltyjä derivaatan erotusosamäärän operaattoreita ja arvioidaan Laplacen operaattoria tasossa  $\mathbb{R}^2$ .

Olkoon funktio  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , jolla kaikki osittaisderivaatat  $f''_{x_1x_1}, f''_{x_2x_2}, \dots$  ovat olemassa jatkuvina kaikissa  $\mathbb{R}^2$ :n pisteissä, ja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Nyt saadaan

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y) \approx \frac{f'(x+h, y) - f'(x, y)}{h} + \frac{f'(x, y+h) - f'(x, y)}{h} \\ &\approx \frac{\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} - \frac{f(x, y) - f(x-h, y)}{h}}{h} + \frac{\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} - \frac{f(x, y) - f(x, y-h)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2} + \frac{f(x, y+h) - 2f(x, y) + f(x, y-h)}{h^2} \\ &= \frac{4}{h^2} \left( \frac{f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h)}{4} - f(x, y) \right). \end{aligned}$$

Yllä olevan päättelyn mukaan siis Laplacen operaattoria voidaan tason pisteessä  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  arvioida keskiarvolla funktion arvoista ympäröivissä pisteissä  $(x+h, y)$ ,  $(x-h, y)$ ,  $(x, y+h)$  ja  $(x, y-h)$ , edelleen vähentäen keskiarvosta funktion arvon tutkittavassa pisteessä ja skaalaamalla erotusta tekijällä  $\frac{4}{h^2}$ . Tätä arviointia hyödyntäen voidaan määrittellä Laplacen operaattori graafeille.

**MÄÄRITELMÄ 2.12.** Olkoon  $(V, E)$  lokaalisti äärellinen graafi, jolla ei ole erillisiä pisteitä, ja  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  mielivaltainen funktio. Tällöin voidaan asettaa funktio  $\Delta f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} f(y) - f(x).$$

Funktiota  $\Delta f$  kutsutaan Laplacen operaattoriksi graafille  $(V, E)$ . Funktio  $f$  on siten harmoninen graafilla  $(V, E)$ , jos  $\Delta f(x) = 0$  kaikilla  $x \in V$ .

**HUOMAUTUS 2.13.** Graafeille määritelty Laplacen operaattori käyttää samaa merkintää kuin aiemmin määritelty operaattori  $\mathbb{R}^N$ :n funktioille. Graafille määritelty

Laplacen operaattori onkin vain graafeille sopivaksi muotoiltu versio aiemmasta määritelmästä. Kannattaa myös huomata operaattorin samankaltaisuus ennen määritelmää suoritettun erotusosamäärän operaattoreita hyödyntävän arvioinnin kanssa.

Määritelmässä olevat oletukset graafin lokaalista äärellisyydestä ja erillisten pisteiden puuttumisesta takaavat, että  $0 < \deg(x) < \infty$  kaikilla  $x \in V$ , jolloin määritelmä on järkevä. Määritelmässä oleva funktioiden arvojoukko  $\mathbb{R}$  voidaan korvata myös arvojoukolla  $\mathbb{C}$  ja määritelmä pysyy edelleen toimivana. Tulevat tarkastelut suoritetaan kuitenkin arvojoukolla  $\mathbb{R}$ .

Ensimmäisessä luvussa käsiteltiin myös painotettuja graafeja, joten on syytä määritellä myös painotetuille graafeille sopiva Laplacen operaattori.

**MÄÄRITELMÄ 2.14.** Olkoon  $(G, \mu)$  lokaalisti äärellinen painotettu graafi, jolla ei ole erillisiä pisteitä, ja  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  mielivaltainen funktio. Tällöin voidaan asettaa funktio  $\Delta_\mu f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,

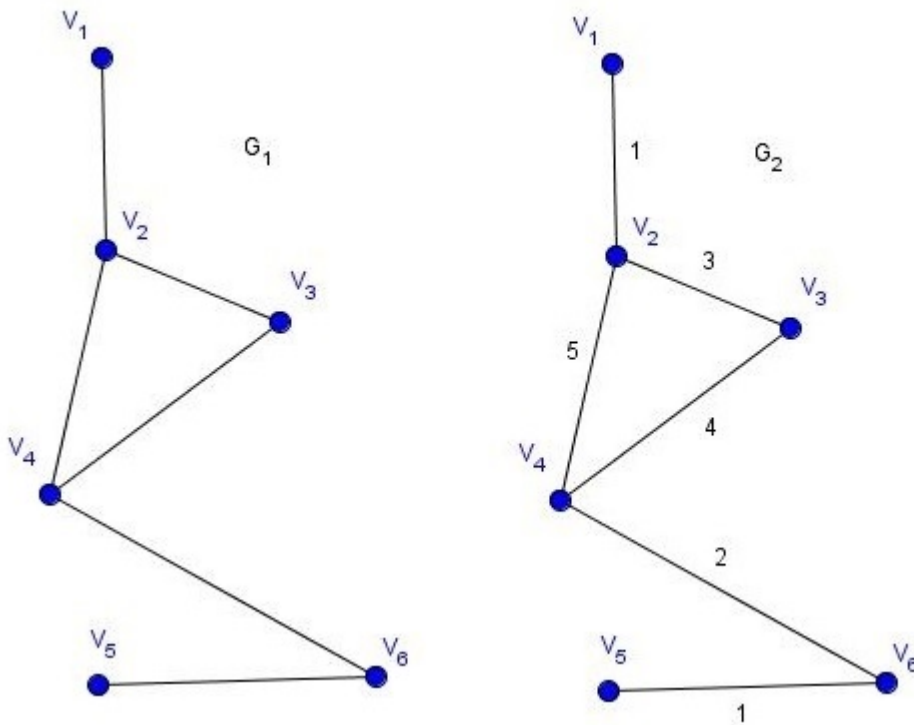
$$\Delta_\mu f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} f(y) \mu_{xy} - f(x).$$

Funktiota  $\Delta_\mu f$  kutsutaan painotetuksi Laplacen operaattoriksi graafille  $(G, \mu)$ . Funktio  $f$  on siten harmoninen painotetulla graafilla  $(G, \mu)$ , jos  $\Delta_\mu f(x) = 0$  kaikilla  $x \in V$ .

**HUOMAUTUS 2.15.** Mikäli paino  $\mu$  on yksinkertainen, antavat kaksi edellistä määritelmää samat tulokset. Täten aiempi määritelmä on erityistapaus painotetusta Laplacen operaattorista yksinkertaisella painolla.

Otetaan seuraavaksi konkreettinen esimerkki Laplacen operaattoreista graafeille.

**ESIMERKKI 2.16.** Alla olevassa Kuvassa 2.1. on esitetty graafit  $G_1$  ja  $G_2$ . Molemmat näistä graafeista ovat lokaalisti äärellisiä eikä kummallakaan ole erillisiä pisteitä. Graafi  $G_1$  on yksinkertainen suuntaamaton graafi, kuten myös graafi  $G_2$ , joka on lisäksi painotettu graafi. Graafin viivan paino on merkitty numerolla painoa vastaavan viivan viereen. Edellisten määritelmien ehdot ovat siis voimassa, joten voidaan laskea Laplacen operaattorin arvoja graafien  $G_1$  ja  $G_2$  pisteille.

KUVA 2.1. Graafit  $G_1$  ja  $G_2$ .

Olkoon  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(v_i) = i$  kaikilla  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Tutkitaan esimerkiksi graafin  $G_1$  pistettä  $v_4$ . Selvästi  $\deg(v_4) = 3$ , jolloin Määritelmän 2.12. mukaan

$$\Delta f(v_4) = \frac{f(v_2)+f(v_3)+f(v_6)}{3} - f(v_4) = \frac{11}{3} - 4 = -\frac{1}{3}.$$

Toisaalta, jos tutkitaan graafin  $G_2$  pistettä  $v_4$ , saadaan Määritelmän 2.14. mukaan

$$\Delta_\mu f(v_4) = \frac{f(v_2)\mu_{v_4v_2}+f(v_3)\mu_{v_4v_3}+f(v_6)\mu_{v_4v_6}}{\mu_{v_4v_2}+\mu_{v_4v_3}+\mu_{v_4v_6}} - f(v_4) = \frac{10+12+12}{11} - 4 = \frac{34}{11} - 4 = -\frac{10}{11}.$$

Vastaavat laskut voitaisiin suorittaa myös muiden pisteiden suhteen. Kuitenkin jo näillä laskuilla huomataan, että Laplacen operaattorit antavat erilaisia arvoja graafeille  $G_1$  ja  $G_2$ . Laskut eivät ole vaikeita, kunhan aluksi haluttu ilmiö tai tapahtuma saadaan mallinnettua graafin tai painotetun graafin muotoon. Tämä tapahtuu tavallisesti aineistojen pohjalta tietokonesimulaatioiden ja mallinnusten avulla.

Tässä luvussa esitetyt Laplacen operaattorit graafeille ja samalla harmoniset funktiot graafeilla voivat vaikuttaa hieman epäselviltä. Todistetaankin luvun lopuksi vielä eräs harmonisten funktioiden tärkeä ominaisuus. Kyseessä on harmonisten funktioiden keskiarvoperiaate, joka voi hieman selkiyttää graafeille esitettyjen harmonisten

funktioiden määrittelyjä.

**MÄÄRITELMÄ 2.17.** Olkoon  $X \subset \mathbb{R}^n$  ja  $u$  jatkuva funktio joukossa  $X$ . Funktio  $u$  toteuttaa keskiarvoperiaatteen, jos jokaiselle pallolle  $B_{x,r} \subset X$  pätee

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{x,r}} u(y) dS_y,$$

missä  $\omega_n$  on  $\mathbb{R}^n$ :n yksikköpallon pinta-ala,  $B_{x,r}$  on  $x$ -keskinen ja  $r$ -säteinen avoin pallo sekä  $\partial B_{x,r}$  on pallon  $B_{x,r}$  reuna.

Keskiarvoperiaatteen mukaan siis funktion arvo määrittelyalueeseen sisältyvän pallon keskipisteessä on sama kuin funktion keskiarvo pallon reunan yli. Tätä määritelmää kannattaa hetken aikaa pohtia, sillä siinä vaadittu ominaisuus on melkoisen vahva. Todistetaan seuraavaksi, että harmoniset funktiot toteuttavat keskiarvoperiaatteen. Todistusta varten hyödynnetään muuttujanvaihtoa, jolloin keskiarvoperiaate voidaan kirjoittaa muotoon

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_{0,1}} u(x + ry) dS_y,$$

kaikilla  $B_{x,r} \subset X$  [5]. Lisäksi otetaan käyttöön merkintä  $C^2(X)$ , joka tarkoittaa joukossa  $X$  kahdesti jatkuvasti derivoituvien funktioiden joukkoa.

**LAUSE 2.18.** *Olkoon  $X \subset \mathbb{R}^n$  ja  $u \in C^2(X)$  harmoninen funktio. Tällöin funktio  $u$  toteuttaa keskiarvoperiaatteen joukossa  $X$ .*

TODISTUS. Olkoon siis  $u \in C^2(X)$  harmoninen funktio ja  $B_{x,r} \subset X$  mielivaltainen pallo. Asetetaan apufunktio  $\phi$ ,

$$(2.1) \quad \phi(r) = \begin{cases} u(x) & \text{kun } r = 0, \\ \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{x,r}} u(y) dS_y & \text{kun } r > 0. \end{cases}$$

Hyödynnetään ennen lausetta esitettyä muuttujanvaihtoa, jolloin kaikilla  $r > 0$  pätee  $\phi(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_{0,1}} u(x + rz) dS_z$ . Gaussin divergenssilauseeseen [5] ja funktion  $u$  harmonisuuden avulla saadaan

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_{0,1}} \nabla u(x + rz) \cdot z dS_z = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{x,r}} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS_y \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{x,r}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_{x,r}} \Delta u(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Yllä on hyödynnetty myös reunan  $\partial B_{x,r}$  normaalivektoria  $\nu$  ja normaalivektorin suuntaista funktion  $u$  suunnattua derivaattaa  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ . Nyt siis funktio  $\phi$  on vakio ja raja-arvoa tutkimalla nähdään, että

$$\phi(r) = \lim_{s \rightarrow 0} \phi(s) = u(x),$$

eli funktio  $u$  toteuttaa keskiarvoperiaatteen ja lause on todistettu.  $\square$

HUOMAUTUS 2.19. Lauseella 2.18. on myös käänteinen versio: keskiarvoperiaatteen toteuttaa ainoastaan sileä ja harmoninen funktio. Todistus tälle tulokselle sekä muita, esimerkiksi keskiarvoperiaatteen ja harmonisiin funktioihin liittyviä, hyödyllisiä lauseita löytyy lähteestä [5].

Tässä luvussa esitetyt käsitteet Laplacen yhtälöön ja operaattoriin liittyen ovat tärkeitä monissa soveltavissa matematiikan ongelmissa. Syvempää matematiikkaa tai fysiikkaa tutkittaessa tulevat nämä käsitteet hyvin suurella todennäköisyydellä vastaan jossain vaiheessa. Harmonisia funktioita on myös tutkittu runsaasti, esimerkiksi kompleksialueissa. Tämän tekstin kannalta kompleksialuetutkimukset eivät ole tarpeellisia, aiheesta kiinnostuneille lisälukemista löytyy esimerkiksi lähteestä [1].

## LUKU 3

### Dirichlet'n ongelma

Aiemmissa luvuissa ollaan perehdytty graafien sekä harmonisten funktioiden ominaisuuksiin ja koottu talteen tarpeellisia tuloksia. Nyt päästään hyödyntämään tietoja klassisen soveltavan matematiikan ongelman parissa. Kyseessä on Dirichlet'n ongelma, jolla on monia hyödyllisiä sovelluksia usealla matematiikan ja fysiikan osa-alueella. Tämän luvun aikana tutustutaan Dirichlet'n ongelman klassiseen muotoiluun sekä ongelman graafeille sovellettuun versioon. Luvun tarkoituksena on todistaa, että tiettyjen alkuehtojen toteutuessa Dirichlet'n ongelman graafiversiolla on yksikäsitteinen ratkaisu.

#### 3.1. Dirichlet'n ongelman historiaa

Dirichlet'n ongelman pohjana voidaan pitää 1800-luvun matematiikan nopeaa kehittymistä. Monet nykypäivän matematiikan ja fysiikan tutkimusaloista pohjautuvat ongelmiin, joita tutkittiin tarkasti jo 1800-luvulla. Dirichlet'n ongelma on saanut nimensä saksalaisen matemaatikon Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet'n mukaan. Dirichlet oli eräs aikansa merkittävistä matemaatikoista, uransa aikana hän vaikutti muun muassa lukuteorian ja analyysin parissa. Dirichlet'n ansioksi katsotaan myös funktion käsitteen moderni määrittely.

Dirichlet'n ongelmassa halutaan löytää tietyn alueen reunalla määritetylle funktiolle laajennus alueen sisäosaan siten, että tämä laajennus toteuttaa Laplacen yhtälön. Tällaisen laajennuksen löytäminen on olennaista esimerkiksi fysiikan potentiaaliteoriaa tutkittaessa. Kuten monet muutkin matematiikan kuuluisat teoriat ja ongelmat, tämäkin ongelma kantaa myöhemmän tutkijan nimeä alkuperäisen tarkastelijan sijaan. Englantilainen George Green oli tutkinut Dirichlet'n ongelman erästä muotoa jo 1800-luvun alkupuolella ja julkaisi aiheeseen liittyen myös teoksen *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism*. Greenin tutkimuksissa oli tiettyjä epäkohtia, ja siten Dirichlet ryhtyi tarkastelemaan ongelmaa täsmällisemmin. Tarkasteluidensa yhteydessä Dirichlet esitti funktioteorian kehittämisen kannalta tärkeän Dirichlet'n periaatteen. Tämän periaatteen mukaan

Dirichlet'n ongelman ratkaiseva funktio minimoi integraalin

$$\int_G |\nabla f|^2 dV$$

kaikkien funktioiden  $f$ , jotka yhtyvät annettuun funktioon alueen  $G$  reunalla, joukossa. Integraalissa esiintyvä  $\nabla$  on erityisesti fysiikan differentiaalilaskuissa käytetty nabra-operaattori. Dirichlet'n periaate oli oivallinen työkalu potentiaalteorian kysymysten parissa, mutta ratkaisun olemassaoloa ei kyetty todistamaan, kunnes vuonna 1899 saksalainen David Hilbert selvitti ratkaisun olemassaolon täsmentämällä Dirichlet'n periaatetta [10].

### 3.2. Dirichlet'n ongelman graafiversio

Dirichlet'n ongelmaa voidaan ajatella eräänlaisena laajennusongelmana, jossa tietylle funktiolle halutaan löytää sopiva laajennus eräiden ehtojen vallitessa. Lähdetään liikkeelle Dirichlet'n ongelman klassisesta muotoilusta.

Olkoon  $\Delta$   $n$ -ulotteinen Laplacen operaattori sekä  $X \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja yhtenäinen joukko. Tällöin tarkoituksena on löytää funktio  $u$  joukon  $X$  sulkeumassa  $\bar{X}$  siten, että se toteuttaa seuraavat ehdot:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{kaikilla } x \in X, \\ u(x) = g(x) & \text{kaikilla } x \in \partial X, \end{cases}$$

missä  $f$  ja  $g$  ovat annettuja funktioita. Tietyillä ehdoilla ongelmaan löytyy ratkaisu, joka on lisäksi yksikäsitteinen. Klassinen Dirichlet'n ongelma on tärkeässä osassa monissa fysiikan tutkimuksissa, sillä esimerkiksi termodynamiikan ja sähkömagnetismin ongelmat palautuvat monesti Dirichlet'n ongelmaan. Klassisesta Dirichlet'n ongelmasta löytyy lisätietoja esimerkiksi lähteestä [6] ja fysiikkaan liittyviä Dirichlet'n ongelman sovelluksia esimerkiksi lähteestä [5].

**HUOMAUTUS 3.1.** Kannattaa huomata, että klassisen Dirichlet'n ongelman joukko  $X$  on monissa kirjallisuudesta löytyvissä ongelmissa esimerkiksi pallo tai kiekko. Käytännön tilanteessa tutkittava joukko ei yleensä ole näin ”yksinkertainen”, sillä



todelliset tutkittavat joukot ovat harvoin täysin symmetrisiä. Kuitenkin monissa ongelmissa tutkittavaa joukkoa rajataan tai approksimoidaan symmetriseksi joukoksi, esimerkiksi palloksi tai kiekoksi, laskujen helpottamiseksi.

Tässä tekstissä ei olla kiinnostuneita Dirichlet'n ongelman klassisesta muodosta. Tarkastelut kohdistuvat painotettuihin graafeihin, joten Dirichlet'n ongelma vaatii erilaisen muotoilun. Kirjoitetaan se määritelmäksi ja esitellään samalla myös määritelmään liittyvä tärkeä lause.

**MÄÄRITELMÄ 3.2.** Olkoon  $(V, \mu)$  yhtenäinen, lokaalisti äärellinen ja painotettu graafi sekä lisäksi  $X \subset V$ . Nyt Dirichlet'n ongelma on muotoa

$$(3.2) \quad \begin{cases} \Delta_\mu u(x) = f(x) & \text{kaikilla } x \in X, \\ u(x) = g(x) & \text{kaikilla } x \in X^c, \end{cases}$$

missä  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  on tuntematon funktio, kun taas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g : X^c \rightarrow \mathbb{R}$  ovat annettuja. Lisäksi joukko  $X^c$  on joukon  $X$  komplementtjoukko eli se sisältää kaikki ne pisteet, jotka eivät kuulu joukkoon  $X$ , toisin sanoen  $X^c = (V \setminus X)$ .

**LAUSE 3.3.** *Jos  $X$  on äärellinen ja  $X^c$  on epätyhjä, Dirichlet'n ongelmalla (3.2) on kaikilla funktioilla  $f$  ja  $g$  yksikäsitteinen ratkaisu.*

Yllä oleva määritelmä ja sitä seuraava lause kannattaa lukea tarkasti läpi ja niiden sisältöä kannattaa pysähtyä hetkeksi miettimään, sillä lause todistuksineen on tämän tutkielman tärkein kohta. Tehdäänkin välittömästi muutamia huomioita lauseesta.

**HUOMAUTUS 3.4.**

- (1) Dirichlet'n ongelman (3.2) alemman ehdon nojalla funktio  $u$  on jo valmiiksi määriteltä joukon  $X$  ulkopuolella, joten ongelmana onkin löytää  $u$ :lle laajennus joukossa  $X$  siten, että ongelman ylempi ehto täyttyy.

- (2) Mikäli joukko  $X^{\complement}$  on tyhjä, niin Lause 3.3. ei pidä paikkaansa. Esimerkiksi, jos  $f = 0$ , niin jokainen vakiofunktio  $u$  täyttää ehdon  $\Delta_{\mu}u = 0$ , joten ratkaisu ei ole yksikäsitteinen.
- (3) Graafeja tutkittaessa joukon  $X$  reuna voidaan määritellä seuraavasti:  $\partial X = \{y \in X^{\complement} : y \sim x \text{ jollakin } x \in X\}$ . Määritelmän 2.14. mukaan Laplaceen operaattorin tutkimiseen tarvitaan tutkittavan pisteen lisäksi naapuripisteiden arvoja. Täten Dirichlet'n ongelman (3.2) ylemmässä ehdossa  $\Delta_{\mu}u(x) = f(x)$  tutkitaan myös pisteen  $x$  naapuripisteitä  $y$ , jotka kuuluvat joko joukkoon  $X$  tai joukkoon  $X^{\complement}$ . Siispä ongelman ylempi ehto hyödyntää alemman ehdon antamia arvoja vain reunalla  $\partial X$ . Täten Dirichlet'n ongelman (3.2) alempi ehto voidaan muotoilla seuraavasti:  $u(x) = g(x)$  kaikilla  $x \in \partial X$ .

Tarkoituksena olisi siis todistaa Lause 3.3., toisin sanoen osoittaa, että annetuilla ehdoilla Dirichlet'n ongelmalle (3.2) löytyy ratkaisu, joka on yksikäsitteinen. Todistusta varten tarvitaan muutamia aputuloksia, jotka helpottavat varsinaista todistusta huomattavasti. Kootaan siis seuraavaksi tarvittavia aputuloksia. Aloitetaan ottamalla käyttöön uusi merkintä, joka helpottaa seuraavien aputulosten todistamista. Merkin­nän täsmällisemmät taustat ja perustelut löytyvät esimerkiksi lähteistä [2] ja [4].

Olkoon  $(G, \mu)$  yhtenäinen, lokaalisti äärellinen ja painotettu graafi. Jatkossa käytetään merkintää

$$P(x, y) = \frac{\mu_{xy}}{\mu(x)}.$$

Tällöin Määritelmä 2.14. voidaan kirjoittaa muotoon

$$\Delta_{\mu}f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} f(y)\mu_{xy} - f(x) = \sum_{y \sim x} P(x, y)f(y) - f(x).$$

Yllä olevia tietoja tullaan tarvitsemaan Dirichlet'n ongelman sekä pian esiteltävän lemmän todistamisen apuna. Lisäksi aiempien määritelmien nojalla nähdään helpos­ti, että  $\sum_{y \sim x} P(x, y) = 1$ , joka tulee myös olemaan myöhemmin tarpeellinen tieto. Siir­rytään siis seuraavan määritelmän kautta suoraan tarvittavan lemmän pariin.

**MÄÄRITELMÄ 3.5.** Olkoon  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  funktio. Funktiota  $u$  kutsutaan subharmoniseksi joukossa  $X$ , jos  $\Delta_\mu u(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in X$ . Jos taas  $\Delta_\mu u(x) \leq 0$  kaikilla  $x \in X$ , niin funktiota  $u$  kutsutaan superharmoniseksi joukossa  $X$ .

Mikäli funktio  $u$  on sekä subharmoninen että superharmoninen joukossa  $X$ , niin selvästi  $u$  toteuttaa Laplacen yhtälön  $\Delta_\mu u(x) = 0$  kaikilla  $x \in X$ , eli toisin sanoen funktio  $u$  on harmoninen funktio joukossa  $X$ .

**LEMMA 3.6.** *Olkoon  $(V, \mu)$  lokaalisti äärellinen ja yhtenäinen painotettu graafi ja  $X$  joukon  $V$  äärellinen ja epätyhjä osajoukko siten, että  $X^c$  on epätyhjä. Olkoon lisäksi  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  mielivaltainen funktio.*

- (1) *Mikäli funktio  $u$  on subharmoninen joukossa  $X$ , pätee:  $\max_X u \leq \sup_{X^c} u$ .*  
 (2) *Mikäli funktio  $u$  on superharmoninen joukossa  $X$ , pätee:  $\min_X u \geq \inf_{X^c} u$ .*

**TODISTUS.** Todistetaan ainoastaan lemmän ensimmäinen kohta, toisen kohdan todistaminen onnistuu täysin samanlaisella idealla. Voidaan olettaa, että  $\sup_{X^c} u < \infty$ , sillä muutoin väitteessä ei ole mitään todistettavaa. Lisäksi voidaan yhtäpitävästi lisätä funktioon  $u$  vakio siten, että  $\sup_{X^c} u = 0$ , tällöin seuraavat tarkastelut ovat huomattavasti mukavampia. Asetetaan vielä  $M = \max_X u$ .

Näillä merkinnöillä todistettavana on siis väite  $M \leq 0$ . Lähdetään liikkeelle anti-teesin kautta ja oletetaan, että  $M > 0$ . Määritellään myös joukko  $A = \{x \in V : u(x) = M\}$ . Selvästi joukko  $A$  on joukon  $X$  osajoukko ja  $A$  on epätyhjä joukko. Todistetaan seuraavaksi kaksi joukkoon  $A$  liittyvää kohtaa.

**Kohta 1:** Jos  $x \in A$ , niin myös kaikki pisteen  $x$  naapuripisteet kuuluvat joukkoon  $A$ .

Oletuksen mukaan funktio  $u$  on subharmoninen eli  $\Delta_\mu u(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in X$ . Hyödynnetään tähän tietoon ennen Määritelmää 3.5. tehtyjä merkintöjä, jolloin saadaan

$$\Delta_\mu u(x) = \sum_{y \sim x} P(x, y)u(y) - u(x) \geq 0.$$

Tätä epäyhtälöä järjestelemällä saadaan

$$u(x) \leq \sum_{y \sim x} P(x, y)u(y).$$

Toisaalta tehtyjen valintojen nojalla  $\sup_{X^c} u = 0 < M = \max_X u$ . Siispä  $u(y) \leq M$  kaikilla  $y \in V$ . Tällöin saadaan seuraava epäyhtälöketju:

$$u(x) \leq \sum_{y \sim x} P(x, y)u(y) \leq M \sum_{y \sim x} P(x, y) = M,$$

missä on hyödynnetty tietoa  $\sum_{y \sim x} P(x, y) = 1$ . Nyt oletuksen nojalla  $x \in A$ , jolloin  $u(x) = M$ . Täten yllä olevassa ketjussa epäyhtälöt täytyy korvata yhtäsuuruuksilla, jolloin siis  $u(y) = M$  kaikilla  $y \sim x$ . Siispä pisteen  $x$  naapuripisteet kuuluvat joukkoon  $A$ , kun  $x \in A$ . Kohta 1 on todistettu ja voidaan siirtyä Kohdan 2 pariin.

**Kohta 2:** Olkoon  $A$  epätyhjä pistejoukko yhtenäisessä graafissa  $(V, E)$  siten, että Kohta 1 on voimassa. Tällöin  $(X \cup \partial X) \subset A$ .

Olkoon  $x \in A$  ja  $y$  joukon  $(X \cup \partial X)$  mielivaltainen piste siten, että  $y \neq x$ . Tällöin yhtenäisessä graafissa löytyy polku  $\{x_k\}_{k=0}^n$  pisteiden  $x$  ja  $y$  välille siten, että

$$x = x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_n = y.$$

Nyt, koska  $x = x_0 \in A$  ja  $x_1 \sim x_0$ , niin Kohdan 1 nojalla  $x_1 \in A$ . Toisaalta myös  $x_2 \sim x_1$ , joten  $x_2 \in A$ . Näin jatkamalla nähdään, että  $x_k \in A$  kaikilla  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Täten myös  $y \in A$  ja Kohta 2 on todistettu.

Kohtien 1 ja 2 nojalla  $(X \cup \partial X) \subset A$ , joten  $u(x) = M > 0$  kaikilla  $x \in (X \cup \partial X)$ . Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä alkuoletuksien nojalla  $u(x) \leq 0$  kaikilla  $x \in \partial X \subset X^c$ . Täten antiteesi on kumottu ja täytyy olla  $M \leq 0$ . Lemman ensimmäinen kohta on siis todistettu.  $\square$

Näiden aputuloksien myötä tarvittavat tiedot Lauseen 3.3. todistamiseen alkavat olla kasassa. Jo kirjattujen tulosten lisäksi todistuksessa hyödynnetään myös muutamia lineaarialgebran tuloksia, joita ei kirjata erillisiksi aputuloksiksi. Tarvittavat

tiedot todistuksineen löytyvät esimerkiksi lähteistä [11] ja [12]. Siirrytään siis todistuksen pariin.

**LAUSEEN 3.3. TODISTUS.** Kirjoitetaan Lause 3.3. ja siihen liittyvä Määritelmä 3.2. näkyviin muistin virkistämiseksi.

Olkoon  $(V, \mu)$  yhtenäinen, lokaalisti äärellinen ja painotettu graafi sekä lisäksi  $X \subset V$ . Nyt Dirichlet'n ongelma on muotoa

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Delta_\mu u(x) = f(x) & \text{kaikilla } x \in X, \\ u(x) = g(x) & \text{kaikilla } x \in X^c, \end{cases}$$

missä  $u : V \rightarrow \mathbb{R}$  on tuntematon funktio, kun taas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g : X^c \rightarrow \mathbb{R}$  ovat annettuja. Jos  $X$  on äärellinen ja  $X^c$  on epätyhjä, Dirichlet'n ongelmalla (3.3) on kaikilla funktioilla  $f$  ja  $g$  yksikäsitteinen ratkaisu.

Lähdetään liikkeelle ratkaisun yksikäsitteisyydestä. Olkoot  $u_1$  ja  $u_2$  Dirichlet'n ongelman ratkaisuja. Merkitään  $u = u_1 - u_2$ . Tällöin  $u$  toteuttaa seuraavat ehdot:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \Delta_\mu u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in X, \\ u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in X^c. \end{cases}$$

(3.4):n ylemmän ehdon mukaan  $u$  on harmoninen, toisin sanoen sekä subharmoninen että superharmoninen, joukossa  $X$ . Täten Lemman 3.6. ja (3.4):n alemman ehdon nojalla

$$0 = \inf_{X^c} u \leq \min_X u \leq \max_X u \leq \sup_{X^c} u = 0.$$

Tällöin  $u = 0$ . Kuitenkin, jos  $u = 0$ , niin  $u$ :n määrittelyn nojalla  $u_1 = u_2$  eli Dirichlet'n ongelman ratkaisuja on korkeintaan yksi.

Todistetaan sitten vielä ratkaisun olemassaolo. Olkoot  $f$  ja  $g$  lauseen mukaiset funktiot ja  $x \in X$  mielivaltainen piste. Kirjoitetaan (3.3):n ylempi ehto  $\Delta_\mu u(x) = f(x)$  aiempien merkintöjen avulla muotoon

$$\sum_{y \sim x} P(x, y)u(y) - u(x) = f(x).$$

Yllä oleva summa voidaan jakaa osiin ja hyödyntää (3.3):n alemmaa ehtoa, jolloin päästään edelleen muotoon

$$\sum_{y \sim x, y \in X} P(x, y)u(y) - u(x) = f(x) - \sum_{y \sim x, y \in X^c} P(x, y)g(y). \quad \star$$

Nyt päästään hyödyntämään lineaarialgebran tietoja. Otetaan käyttöön joukon  $X$  reaaliarvoisten funktioiden  $u$  joukolle merkintä  $F_X$ . Tällöin  $F_X$  on lineaariavaruus ja siispä edellisen yhtälön vasen puoli voidaan ajatella operaattoriksi lineaariavaruudessa  $F_X$ . Merkitään tätä operaattoria kirjaimella  $L$ , jolloin siis kaikilla  $x \in X$  voidaan kirjoittaa

$$Lu(x) = \sum_{y \sim x, y \in X} P(x, y)u(y) - u(x).$$

Lisäksi yhtälön  $\star$  oikeaa puolta voidaan pitää joukossa  $X$  annettuna funktiona, jolle voidaan ottaa käyttöön merkintä  $h$ . Näillä merkinnöillä yhtälö  $\star$  sievenee siis muotoon  $Lu = h$ .

Lineaariavaruutta  $F_X$  tutkimalla nähdään, että indikaattorifunktioiden kokoelma  $\{\mathbb{1}_{\{x\}}\}_{x \in X}$  muodostaa kannan avaruudelle  $F_X$ , jolloin avaruuden dimensioksi saadaan  $\dim F_X = \#X < \infty$ . Täten operaattori  $L : F_X \rightarrow F_X$  on lineaarinen operaattori äärellisulotteisessa avaruudessa. Joukon  $x$  indikaattorifunktio  $\mathbb{1}_{\{x\}}(a) : x \rightarrow \{0, 1\}$  on siis funktio, joka antaa arvon 1, jos  $a \in x$ , ja arvon 0, jos  $a \notin x$ .

Mikäli yhtälössä  $\star$  asetetaan  $f = 0$  ja  $g = 0$ , niin  $Lu = 0$ . Toisaalta tällöin todistuksen alkuosan perusteella tiedetään, että  $u = 0$ . Siispä ehdosta  $Lu = 0$  seuraa, että  $u = 0$ , joten  $L$  on injektio. Siten myös  $\det L \neq 0$ , ja  $L$  on kääntyvä matriisi. Tällöin matriisille  $L$  löytyy kääntematriisi ja siispä  $L$  on bijektio.

Nyt kaikille  $h \in F_X$  on olemassa ratkaisu  $u = L^{-1}h \in F_X$ . Tämän päättelyn nojalla yhtälöllä  $\star$  on ratkaisu, mikä vastaa sitä, että Dirichlet'n ongelmalle (3.3) löytyy ratkaisu. Yhdistämällä tämä tieto todistuksen alkupään yksikäsitteisyyden todistukseen, on Lause 3.3. todistettu ja Dirichlet'n ongelmalle löytyy yksikäsitteinen ratkaisu.  $\square$

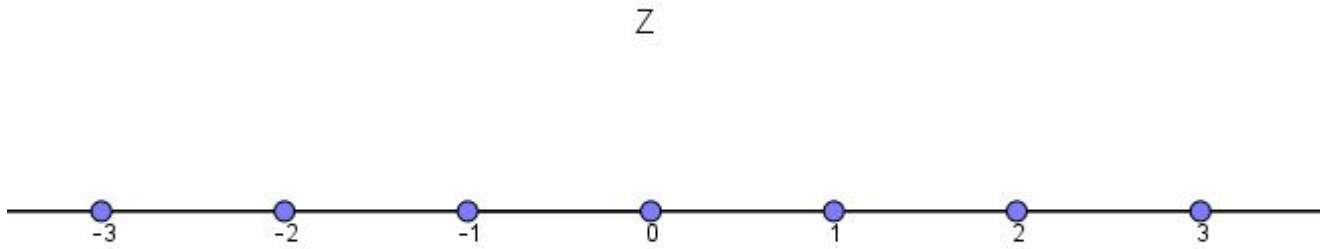
Lause on nyt todistettu, mutta on huomattava, että lause kertoo vain yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon Dirichlet'n ongelmalle tiettyjen ehtojen alla. Ratkaisun muodosta tai ominaisuuksista lause ei kerro mitään, joten ratkaisun löytämiseen joudutaan käyttämään muita keinoja. Usein ratkaisun etsiminen palautuukin integroimiseen tai ongelman matemaattiseen mallintamiseen. Usein myös kylmänviileä arvaus voi olla tehokas keino ratkaisun löytämiseen: lauseen perusteella ratkaisu on yksikäsitteinen, joten käytännössä ratkaisun löytäminen voi tapahtua yhtä hyvin integroimalla kuin arvaamallaakin. Monesti ratkaisun selvittäminen voi olla myös hyvin hankalaa, eikä ratkaisun tarkkaa muotoa saada selville. Monet ongelmat muotoillaankin aluksi muotoon, jossa integroiminen sujuu helposti, ja esimerkiksi fysiikan lämpöyhtälöiden ratkeaminen palautuukin monesti Dirichlet'n tai vastaavan reunaehto-ongelman ratkaisemiseen integroimalla.

Otetaan lopuksi vielä esimerkki yksinkertaisesta reunaehto-ongelman ratkaisemisesta.

**ESIMERKKI 3.7.** Tutkitaan kokonaislukugraafia  $(\mathbb{Z}, \mu)$ , missä graafin pisteet ovat kokonaislukuja  $\mathbb{Z}$  lukusuoralla. Pisteestä  $z \in \mathbb{Z}$  kulkee viivat viereisiin pisteisiin  $z - 1$  ja  $z + 1$  kaikilla  $z$ . Graafin paino on yksinkertainen eli jokaisen viivan paino on 1. Kokonaislukugraafia on havainnollistettu Kuvassa 3.1.

Olkoon joukko  $X = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ . Selvästi  $X$  on epätyhjä ja  $X \subset \mathbb{Z}$ . Lisäksi  $X$  on äärellinen ja  $X^c$  on epätyhjä. Olkoon  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$  kaikilla  $x \in X$  ja  $g : X^c \rightarrow \mathbb{R}$ , missä

$$(3.5) \quad g(y) = \begin{cases} 1 & \text{kun } y = 10, \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$$



KUVA 3.1. Kokonaislukugraafi  $(\mathbb{Z}, \mu)$ .

Tehtävänä on etsiä funktio  $u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , joka kaikilla  $x \in X$  toteuttaa reunaehto-ongelman

$$(3.6) \quad \begin{cases} \Delta_{\mu}u(x) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(10) = 1. \end{cases}$$

Määrittelyjä tutkimalla huomataan, että kyseessä on eräänlainen Dirichlet'n ongelma ja Lauseen 3.3. ehdot ovat voimassa. Täten tiedetään ongelman ratkeavan ja ratkaisun olevan yksikäsitteinen. Lähdetään etsimään ratkaisua.

Selvästikään  $u$  ei voi olla vakiofunktio, joten tutkitaan olisiko  $u$  ensimmäisen asteen polynomi. Arvot pisteissä 0 ja 10 on annettu, joten arvataan funktion olevan  $u = \frac{x}{10}$ . Tällöin  $u(0) = 0$  ja  $u(10) = 1$ . Lisäksi helposti nähdään, että  $\Delta_{\mu}u(x) = 0$  kaikilla  $x \in X$ . Täten  $u = \frac{x}{10}$  on reunaehto-ongelman (3.6) yksikäsitteinen ratkaisu.



Edellisen esimerkin reunaehto-ongelma on eräs erikoistapaus Dirichlet'n ongelmasta (3.2). Esimerkin tarkoituksena on havainnollistaa Dirichlet'n ongelman ratkeamista ja ratkaisun löytymistä yksinkertaisella tutkiskelulla. Syvällisempiä ja integroimista hyödyntäviä Dirichlet'n ongelman sovelluksia esimerkiksi lämpö- ja aaltoyhtälöiden saralta löytyy lähteistä [1], [5] ja [14].

Graafeilla ja niihin liittyvillä käsitteillä on runsaasti käyttökohteita niin matematiikan kuin muidenkin tieteiden parissa. Tässä tutkielmassa esitetyt harmoniset funktiot ja sitä kautta Laplace'n operaattorit sekä Dirichlet'n ongelmat ovat vain yksi osa-alue, vaikkakin melkoisen merkittävä. Muita mielenkiintoisia graafisovelluksia löytyy muun muassa Cayleyn graafien tai Greenin funktion graafiversion parista. Lisälukemista graafeista ja niiden sovelluksista voi etsiä esimerkiksi lähteistä [4] ja [13].



## Lähdeluettelo

- [1] JOSEPH BAK ja DONALD J. NEWMAN: *Complex Analysis*. Springer-Verlag New York, 1982.
- [2] HEINZ BAUER: *Probability Theory*. Walter de Gruyter, 1996.
- [3] NORMAN BIGGS, KEITH LLOYD ja ROBIN WILSON: *Graph theory 1736-1936*. Clarendon Press, 1994.
- [4] ALEXANDER GRIGORYAN: *Analysis on Graphs*. Elektroninen dokumentti osoitteessa <https://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/aglect.pdf>, viitattu 31.03.2017.
- [5] QING HAN: *A Basic Course in Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2011.
- [6] L. L. HELMS: *Introduction to potential theory*. Wiley, 1969.
- [7] BRIAN HOPKINS ja ROBIN WILSON: *The Truth about Königsberg*. The College Mathematics Journal, Vol. 35, sivut 198-207, 2004.
- [8] HEIKKI JUNNILA: *Johdatus diskreettiin matematiikkaan*. Elektroninen dokumentti osoitteessa <http://www.helsinki.fi/~hjkjunni/jdm.pdf>, viitattu 31.03.2017.
- [9] TERO KILPELÄINEN: *Kompleksianalyysi*. Elektroninen dokumentti osoitteessa <http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS120.pdf>, viitattu 31.03.2017.
- [10] MATTI LEHTINEN: *Matematiikan historian luentoja*. Elektroninen dokumentti osoitteessa <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/mathist/histluennot.pdf>, viitattu 31.03.2017.
- [11] MIKKO SAARIMÄKI: *Reaalisia vektoriavaruuksia ja ominaisarvoja*. Jyväskylän yliopistopaino, 2012.
- [12] MIKKO SAARIMÄKI: *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa*. Jyväskylän yliopistopaino, 2012.

- [13] W. T. TUTTE: *Graph Theory*. Cambridge University Press, 2001.
  
- [14] DENNIS G. ZILL: *A First Course in Differential Equations with Applications*. PWS Publishers, 1982.