

# Inversiosta stereografiseen projektioon

Laura Heikkilä

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kevät 2017



## TIIVISTELMÄ

Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Heikkilä Laura, *Inversioista stereografiseen projektioon*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 48 sivua, huhtikuu 2017.

Ympyräperhe on joukko ympyröitä, jotka esiintyvät tasossa tietyllä tavalla toisiinsa nähden. Ne voivat esimerkiksi kulkea jonkun tietyn yhteisen pisteen kautta tai kahden yhteisen pisteen kautta, mutta olla eri keskipisteisiä ja eri säteisiä. Apolloniuksen ympyräperhe on yksi esimerkki ympyräperheestä. Siinä ympyrät eivät kulje minkään yhteisen pisteen kautta, mutta ympyröiden pisteille pätee, että ne ovat tietyn matkan päästä kahdesta erillisestä pisteestä.

Jakob Steiner oli sveitsiläinen matemaatikko, joka kehitti Steinerin porismiksi kutsutun lauseen. Siinä kahden sisäkkäisen, mutta leikkaamattoman ympyrän väliin piirretään ympyräketju niin, että kaikki ympyrät sivuavat vierekkäisiä ympyröitä. Tällöin viimeinen ympyräketjun ympyrä sivuaa ensimmäistä ympyräketjun ympyrää tai sitten se leikkaa sitä. Jos ympyräketjun kaikki ympyrät sivuavat toisiaan niin Steinerin porismi sanoo, että ympyröiden väliin voidaan piirtää ympyräketju ja ympyrät sivuavat toisiaan aina. Jos taas ympyräketjun viimeinen ympyrä leikkaa ensimmäistä ympyrää Steinerin porismi sanoo, että näiden ympyröiden väliin ei voida ikinä piirtää ympyräketjua niin, että kaikki ympyrät sivuaisivat vierekkäisiä ympyröitä.

Sekä Steinerin porismi että ympyräperheet pystytään todistamaan inversion avulla, jonka keksi myös Jakob Steiner. Inversio on peilaus ympyrän suhteen ja sille pätee erilaisia ominaisuuksia, esimerkiksi kulmien säilyvyys. Inversio toimii hyvänä työvälineenä kun halutaan todistaa geometrisiä lauseita. Sen avulla on voitu luoda myös ihan uusi geometria: inversiivinen geometria. Inversiivisessä geometriassa mitkä tahansa kolme pistettä pystytään kuvamaan miksi tahansa kolmeksi muuksi pisteeksi.

Stereografinen projektio on erikoistapaus inversiosta kolmiulotteisessa ympäristössä. Siinä pallon pinnalla olevia pisteitä kuvataan tasolle. Stereografinen projektio on vanha kesintö, jota käytettiin muun muassa karttojen luomisessa. Stereografisen projektion avulla pystytään esimerkiksi kuvaamaan maapallo tasolle. Stereografista projektiota hyödyntämällä voidaan todistaa, että tietyn pallon pinnalle piirretyn kolmion kulmien summa on aina yli  $180^\circ$ .

## SISÄLTÖ

Tiivistelmä	i
1. Johdanto	1
2. Inversio	2
2.1. Peilaus ja inversio geometrisesti	2
2.2. Peilaus ja inversio algebrallisesti	3
2.3. Inversio laajennetussa tasossa	8
3. Inversiivinen geometria	14
4. Apollonius ja ympyräperheet	18
5. Jakob Steiner	24
6. Erilaisia kolmioita	32
7. Stereografinen projektio	35
7.1. Stereografisen projektion ja sen käänteiskuvauksen lausekkeet	35
7.2. Stereografisen projektion ominaisuuksia	39
7.3. Stereografinen projektio kolmiulotteisena inversiona	44
8. Pallogeometria	46
9. Lopuksi	47
Lähdeluettelo	48

## 1. JOHDANTO

Tässä tutkielmassa käydään läpi inversio peilauksen avulla. Peilaus on kuvaus, jossa esimerkiksi piste kuvataan jonkun suoran suhteen, jolloin piste siirtyy suoran toiselle puolelle. Inversio taas on kuvaus, jossa tehdään peilaus ympyrän suhteen. Se voidaan selittää peilauksella suoran suhteen ja se voidaan esittää niin geometrisestikin kuin algebrallisesti. Inversiolla voidaan todistaa erilaisia ominaisuuksia esimerkiksi pisteen kuvautuminen, suoran kuvautuminen ja ympyrän kuvautuminen. Kulmien säilyminen on myös yksi tärkeä inversioon liittyvä lause.

Tutkielmassa määritellään myös laajennettu taso ja laajennettu suora. Ne tarkoittavat tasoa ja suoraa, jotka on laajennettu äärettömyyspisteellä. Sen avulla pystytään inversiota käsittelemään vielä laajemmin ja välttämään ongelmalta, joka tulee esiin kun kuvataan ympyrän keskipiste inversiolla tuon ympyrän suhteen. Tällöin inversio kuvaa ympyrän keskipisteen äärettömyyteen, jolloin sen esittäminen matemaattisesti voidaan ratkaista tuolla äärettömyyspisteellä.

Inversion avulla voidaan luoda inversiivinen geometria. Tässä työssä ei sen suuremmin perehdytä tuohon geometriaan, vaan ainoastaan yhteen esimerkkiin ja inversiivisen geometrian päälauseeseen. Kun inversiivinen geometrian päälause on voimassa niin inversio on hyvä väline todistaa erilaisia ympyröihin liittyviä lauseita.

Kun inversiivinen geometria on voimassa, niin inversiolla voidaan todistaa mielenkiintoisia geometrisiä havaintoja, esimerkiksi Apolloniuksen ympyräperhe ja muita ympyräperheitä. Ne ovat joukkoja ympyröistä, joille pätee jokin sama ehto. Joko kaikki ympyrät kulkevat kahden saman pisteen kautta, yhden saman pisteen kautta tai eivät minkään pisteen kautta. Apolloniuksen ympyräperhe on esimerkki siitä, jolloin ympyrät eivät kulje minkään yhteisen pisteen kautta. Tässä työssä käydään läpi Apolloniuksen ympyräperhe sekä muutama muu ympyräperhe, joille pätee jokin edellä olevista ehdoista.

Inversiolla voidaan myös todistaa Steinerin porismi. Siinä kaksi ympyrää sijoitetaan sisäkkäin niin, että ne eivät leikkaa toisiaan. Tällöin näiden kahden ympyrän väliin on joko mahdollista sijoittaa ympyröiden ketju siten, että ympyrät sivuavat aina kahta alkuperäistä ympyrää sekä vieressään olevia pienempiä ympyröitä tai sitten sijoittaminen on mahdotonta, jolloin ensimmäiseksi ja viimeiseksi sijoitettu ympyrä leikkaavat toisiaan. Tutkielmassa käydään läpi porismi sekä sen käyttö.

Viimeisenä tässä tutkielmassa siirrytään kolmiulotteiseen ympäristöön stereografisen projektion avulla. Sen voidaan ajatella olevan kolmiulotteinen inversio pallon pinnalla. Tälle projektiolle voidaan määrittää sekä sen kuvauksen että käänteiskuvauksen lausekkeet. Stereografiselle projektiolle voidaan esittää pallopinnalla olevan ympyrän kuvautuminen. Tällöin mikä kuvio ympyrästä syntyy, riippuu siitä, meneekö ympyrä projektion lähtöpisteen kautta. Myös stereografiselle projektiolle pätee kulmien säilyminen kuten inversiollekin. Stereografisen projektion avulla voidaan todistaa, että pallopinnalle piirrettävien isoympyröiden muodostaman kolmion kulmien summa on yli  $180^\circ$ .

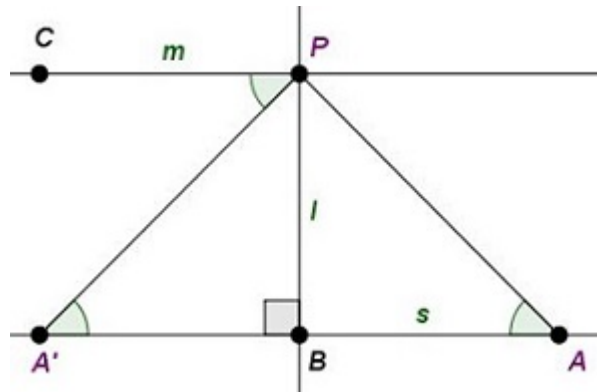
Käytän työssäni lähteenä David Brannanin Geometry-kirjaa [2], josta olen ottanut suurimman osan lauseista ja todistuksista, sekä muokannut niitä.

## 2. INVERSIO

**2.1. Peilaus ja inversio geometrisesti.** Pisteiden peilaus suoran suhteen tarkoittaa geometrisesti sitä, että piste siirtyy halutun suoran toiselle puolelle yhtä pitkän matkan päähän suorasta kuin alkuperäinen piste on. Tällöin suora, jonka suhteen peilaus tehdään sekä alkuperäisen ja kuvattun pisteen kautta kulkeva suora muodostavat suoran kulman.

Yleisesti tässä työssä merkintä  $\angle ABC$  tarkoittaa kulmaa, jossa piste  $B$  on kulman kärjessä, ja piste  $A$  on jokin piste kulman oikealta kyljeltä ja vastaavasti piste  $C$  vasemmalta kyljeltä. Merkintä  $AB$  tarkoittaa janaa tai sen pituutta ja merkintä  $\overrightarrow{AB}$  tarkoittaa suoraa. Merkintä  $\vec{AB}$  tarkoittaa vektoria, jolla on tietty pituus ja suunta. Kolmiota merkitään  $\triangle ABC$ , jossa pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat kolmion kärkipisteet tässä järjestyksessä.

Käydään läpi peilaus ja johdetaan sen avulla inversio ympyrän suhteen [2, s. 262]: Olkoot  $l$  ja  $m$  suoria, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja olkoon  $P$  niiden leikkauspiste. Olkoon piste  $A'$  pisteen  $A$  peilaus suoran  $l$  suhteen (kuva 1). Olkoon suora  $s$  pisteiden  $A$  ja  $A'$  kautta kulkeva suora ja piste  $B$  suoran  $s$  ja  $l$  leikkauspiste. Nyt kulmat  $\angle PAA'$  ja  $\angle AA'P$  ovat yhtä suuret, sillä piste  $A$  on yhtä kaukana suorasta  $l$  kuin on piste  $A'$ . Koska suorat  $s$  ja  $m$  ovat yhdensuuntaisia, niin myös kulmat  $\angle AA'P$  ja  $\angle CPA'$  ovat yhtenevät, missä  $C$  on piste suoralla  $m$ . Siten kulmat  $\angle PAA'$  ja  $\angle CPA'$  ovat yhtenevät. Piste  $A'$  ei riipu pisteen  $P$  valinnasta.

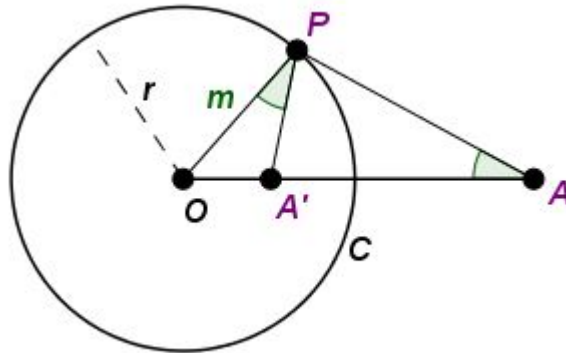


KUVA 1. Peilaus suoran  $l$  suhteen

Tämän avulla saadaan näytettyä peilaus ympyrän suhteen eli inversio kun ajatellaan, että suora  $l$  on ympyrä  $C$ , jolla on jokin tietty äärellinen säde  $r$ . Nyt suoraa  $m$  vastaa jana, joka kulkee ympyrän keskipisteen  $O$  kautta ja leikkaa ympyrää  $C$  pisteessä  $P$  (kuva 2). Olkoon piste  $A$  jokin piste ympyrän ulkopuolelta ja piste  $A'$  ympyrän sisäpuolelta niin, että  $A'$  kuuluu janalle  $OA$  ja lisäksi, että kulmat  $\angle OPA'$  ja  $\angle PAO$  ovat yhtenevät. Näin saadaan pisteen  $A$  inversiopiste vastaavasti kuten tapauksessa, jossa olikin suora  $l$ . Tarkistetaan vielä, että  $A'$  ei riipu pisteen  $P$  valinnasta tässäkään tapauksessa. Huomataan, että kolmiot  $\triangle POA'$  ja  $\triangle AOP$  ovat yhteneviä, sillä niillä on yhteinen kulma  $O$  ja kulmat  $\angle OPA'$  ja  $\angle PAO$  ovat yhtenevät.

Siten

$$\frac{OA'}{OP} = \frac{OP}{OA}$$



KUVA 2. Inversio ympyrän  $C$  suhteen

ja tästä seuraa, että

$$OA' \cdot OA = OP^2 = r^2. \quad (1)$$

Näin ollen pisteelle  $A$  löytyy siis tasan yksi piste  $A'$ , jolle pätee yhtälö (1), ja se ei riipu pisteestä  $P$ . Lisäksi pisteet  $A$  ja  $A'$  sijaitsevat samalla suoralla.

Yhtälöstä huomataan, että kumpikaan pisteistä  $A$  tai  $A'$  ei voi olla ympyrän keskipiste, sillä inversio kuvaisi pisteen tällöin äärettömyyteen. Tämä voidaan kuitenkin välttää kun otetaan käyttöön laajennettu taso, josta kerrotaan lisää kappaleessa 2.3.

Saatiin siis geometrisesti näytettyä, että ympyrän inversio on hieman muutettu versio peilauksesta suoran suhteen. Peilaus voi olla myös toisin päin, jolloin piste  $A'$  kuvautuu pisteeksi  $A$ . Tämä toimii myös inversiolle ja se tehtäisiin vastaavasti kuten edellä. Tällöin ympyrän sisäpuolinen piste kuvautuu ulkopuolelle. Tämä nähdään myös seuraavassa esimerkissä.

**Esimerkki 1.** Olkoon  $C$  origokeskinen ympyrä, jonka säde on 2. Olkoon lisäksi piste  $A = (1, 0)$ , joka on siis ympyrän  $C$  sisäpuolella. Tällöin yhtälön (1) mukaan saadaan, että

$$OA' \cdot 1 = 2^2 \iff OA' = 4.$$

Koska  $A'$  on samalla suoralla pisteen  $A$  kanssa, niin piste  $A' = (4, 0)$ , jolloin se on ympyrän ulkopuolella.

Koska sisäpuolella piste kuvautuu ulkopuolelle ja toisin päin, niin on selvää, että ympyrän kehällä oleva piste kuvautuu itselleen. Tämä nähdään myös seuraavasta esimerkistä.

**Esimerkki 2.** Olkoon  $C$  origokeskinen ympyrä, jonka säde on 5. Olkoon lisäksi  $A$ , joka on mikä tahansa piste ympyrän kehällä, eli tällöin  $OA = 5$ . Siten saadaan, että

$$OA' \cdot 5 = 5^2 \iff OA' = 5.$$

Koska  $A$  ja  $A'$  ovat samalla suoralla ja pisteen  $A'$  etäisyys origosta on myös 5 niin  $A = A'$ .

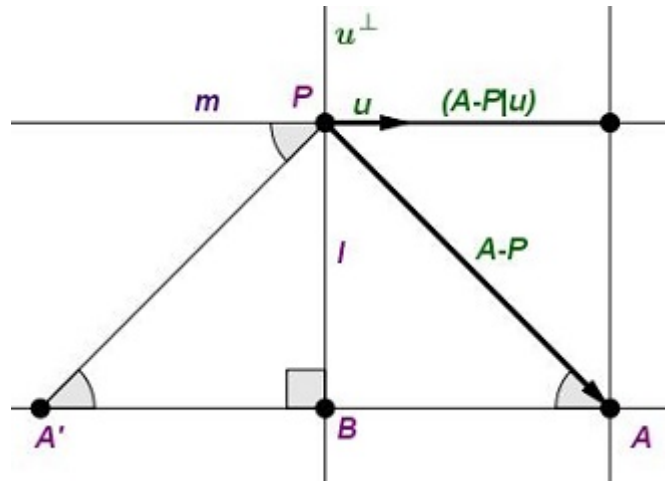
**2.2. Peilaus ja inversio algebrallisesti.** Peilaus suoran suhteen voidaan esittää myös algebrallisesti. Seuraava määritelmä on Geometrian jatkokurssin luentomonisteesta [12]. Määritelmässä merkintä  $u^\perp$  tarkoittaa vektorin  $u$  kanssa ortogonaalisia eli kohtisuoria vektoreita.

**Määritelmä 3.** Olkoon suora  $l = P + u^\perp$  kuten edellä kuvassa 1, missä  $\|u\| = 1$ . Peilaus on kuvaus  $r_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$r_l(A) = A - 2(A - P|u)u.$$

Kuvaus antaa saman kuin aiemminkin pääteltiin geometrisesti: olkoon  $u$  pisteestä  $P$  oikealle lähtevä suoran  $m$  suuntainen yksikkövektori (merkitty vihreällä värillä, kuva 3). Tällöin suora  $l$  on joukko pisteitä, missä pisteeseen  $P$  lisätään vektoreita, jotka ovat vektorin  $u$  kanssa ortogonaalisia eli  $l = P + u^\perp$ .

Nyt kuvaus sanoo, että kun piste  $A$  peilataan suoran  $l$  suhteen niin pisteestä  $A$  vähennetään tällöin kaksi kertaa vektori  $(A - P|u)u$ . Sisätulo on kuvassa 3 näkyvän janan pituus kerrottuna vielä vektorilla  $u$ . Tulos antaa pisteestä  $P$  lähtevän vektorin, joka on yhtä pitkä kuin pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen etäisyys. Näin ollen kuvauksella päädytään pisteeseen  $A'$  ihan niinkuin haluttiinkin.



KUVA 3. Peilauksen hahmottaminen algebrallisesti

*Huomautus 4.* Määritelmässä 3 peilaus  $r_l$  on lineaarikuvaus kun  $P = 0$ .

Vastaavasti ympyrän inversio voidaan esittää seuraavalla määritelmällä, joka on myös Geometrian jatkokurssin luentomonisteesta [12].

**Määritelmä 5.** Olkoon  $C$  ympyrä kuten kuvassa 2. Nyt inversio ympyrän  $C$  suhteen on kuvaus

$$i_{c,\alpha}(x) = \alpha \frac{x - c}{\|x - c\|^2} + c, x \neq c,$$

missä lukua  $\alpha$  kutsutaan inversion  $i_{c,\alpha}$  potenssiksi,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  ja ympyrän keskipiste on  $c$ .

Geometrisesti saatiin aiemmin, että inversio ympyrän suhteen saadaan lausekkeella

$$OA' \cdot OA = OP^2 = r^2,$$

missä  $r$  on ympyrän säde ja  $A$  on alkuperäinen piste, jonka inversio ympyrän suhteen on piste  $A'$ . Tarkistetaan, että määritelmä 5 antaa saman tuloksen.



Tarkastellaan pisteitä  $c \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  ja kuvausta  $i_{c,\alpha}(x) \in \mathbb{R}^2$  siten, että  $x$  ja  $i_{c,\alpha}(x)$  ovat samalla puolisuoralla, joka lähtee pisteestä  $c$ . Nyt  $x=A$ ,  $i_{c,\alpha}(x) = A'$  ja  $c$  on ympyrän  $C$  keskipiste. Tällöin  $OA' = \|i_{c,\alpha}(x) - c\|$  ja  $OA = \|x - c\|$ . Määritelmästä saadaan, että  $i_{c,\alpha}(x) - c = \alpha \frac{x-c}{\|x-c\|^2}$  ja  $\|i_{c,\alpha}(x) - c\| = \alpha \frac{\|x-c\|}{\|x-c\|^2} = \frac{\alpha}{\|x-c\|}$ , sillä  $\|x - c\|$  on luku, joka voidaan supistaa. Tällöin

$$OA' \cdot OA = \|i_{c,\alpha}(x) - c\| \cdot \|x - c\| = \frac{\alpha}{\|x - c\|} \cdot \|x - c\| = \alpha = r^2.$$

Inversion potenssi on säteen neliö eli  $\alpha = r^2$ , joten tulos on näin ollen sama kuin pääteltiin geometrisestikin.

*Huomautus 6.* Muutamia asioita inversion liittyen:

- (1) Määritelmän avulla voidaan tarkastaa esimerkiksi 2 todettu havainto, että piste ympyrän kehällä kuvautuu sille itselleen. Siten  $\|x - c\| = r$ , joten

$$i_{c,\alpha}(x) = r^2 \frac{x - c}{\|x - c\|^2} + c = r^2 \frac{x - c}{r^2} + c = x - c + c = x.$$

- (2) Inversio rajoitettiin aiemmin niin, että kuvautuva piste ei voi olla keskipiste. Miksi piste  $x$  ei voi olla  $c$ ? Tällöin  $\|x - c\| = 0$ , jolloin myös  $\|x - c\|^2 = 0$ . Tällöin saadaan, että  $l(x) = \frac{0}{0}$ , mitä ei ole määritelty, joten määritelmä pätee siten ainoastaan pisteille  $x \neq c$ .
- (3) Inversiolle pätee myös, että jos piste  $A'$  on pisteen  $A$  inversio ympyrän suhteen, niin tällöin myös piste  $A$  on pisteen  $A'$  inversio saman ympyrän suhteen [7, s. 125]. Tämä voidaan nähdä myös määritelmän 5 avulla:

$$\begin{aligned} i_{c,\alpha} \circ i_{c,\alpha}(x) &= i_{c,\alpha} \left( \alpha \frac{x - c}{\|x - c\|^2} + c \right) \\ &= \alpha \frac{(\alpha \frac{x-c}{\|x-c\|^2} + c) - c}{\|(\alpha \frac{x-c}{\|x-c\|^2} + c) - c\|^2} + c \\ &= \frac{\alpha^2 \frac{x-c}{\|x-c\|^2}}{\alpha^2 \frac{\|x-c\|^2}{\|x-c\|^4}} + c = x. \end{aligned}$$

Erityisesti inversio ympyrän suhteen on bijektio ja  $i_{c,\alpha}$  on itsensä käänteiskuvaus eli  $i_{c,\alpha} = i_{c,\alpha}^{-1}$ .

Käydään seuraavaksi läpi muutama esimerkki siitä, mitä tapahtuu toiselle ympyrälle, kun se kuvataan inversiolla toisen ympyrän suhteen. Mallina käytin Geometry-kirjan esimerkkiä [2, s. 269].

**Esimerkki 7.** Olkoon  $C$  origokeskinen 2-säteinen ympyrä (kuva 4). Olkoon lisäksi ympyrä  $A$ , jonka keskipiste on  $(5, 0)$  ja säde on 1. Tällöin ympyrän  $A$  yhtälö on

$$(x - 5)^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0.$$

Määritelmän 5 nojalla inversio ympyrän  $C$  suhteen on

$$i_{0,4}(x, y) = 2^2 \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|^2} = \left( \frac{4x}{x^2 + y^2}, \frac{4y}{x^2 + y^2} \right).$$

Kuvataan ympyrä  $A$  ympyrän  $C$  suhteen. Koska inversio on itsensä käänteiskuvaus, niin se kuvaa myös etsityn kuvajoukon pisteet ympyrälle  $A$ . Tällöin pisteille  $(x, y)$  pätee yhtälö

$$\left(\frac{4x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{4y}{x^2 + y^2}\right)^2 - 10\left(\frac{4x}{x^2 + y^2}\right) + 24 = 0.$$

Yhdistämällä yhtälön ensimmäiset kaksi termiä saadaan yhtälö muotoon

$$\left(\frac{16}{x^2 + y^2}\right) - \left(\frac{40x}{x^2 + y^2}\right) + 24 = 0.$$

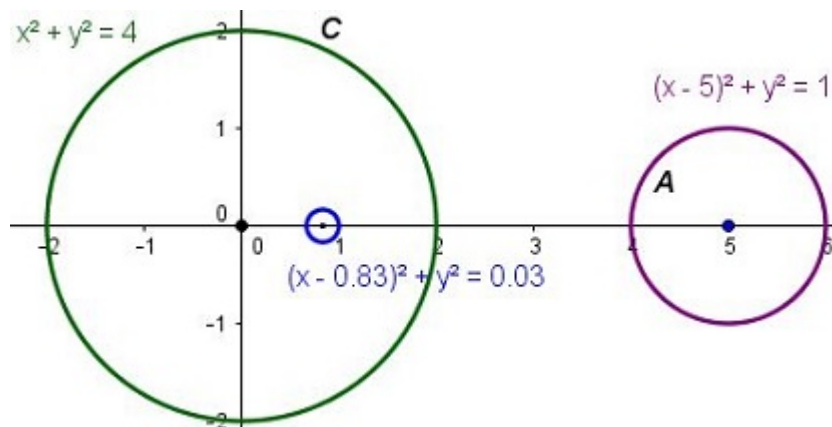
Jaetaan yhtälö luvulla 24 ja kerrotaan sen jälkeen termillä  $(x^2 + y^2)$

$$\left(\frac{\frac{2}{3}}{x^2 + y^2}\right) - \left(\frac{\frac{5}{3}x}{x^2 + y^2}\right) + 1 = 0 \iff \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x + x^2 + y^2 = 0.$$

Neliöidään lauseke, jolloin

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + y^2 = -\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} = \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Tämä on ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on  $(\frac{5}{6}, 0)$  ja sen säde on  $\frac{1}{6}$ .



KUVA 4. Ympyrän  $A$  inversio ympyrän  $C$  suhteen

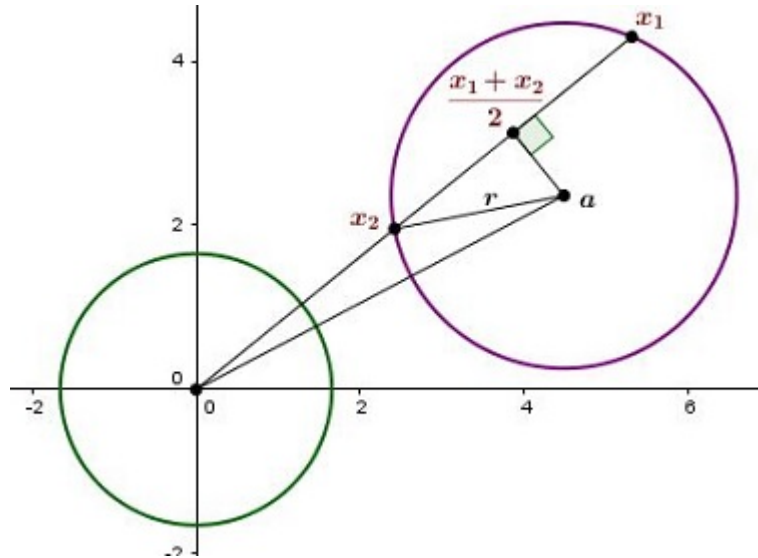
Edellä nähtiin, että ympyrä  $A$ , joka on ympyrän  $C$  ulkopuolella kuvautuu ympyrän  $C$  sisäpuolelle. Koska inversio on itsensä käänteiskuvaus, niin vastaavasti ympyrän  $C$  sisäpuolella oleva ympyrä kuvautuu ympyrän  $C$  ulkopuolelle. Esimerkki kertoo kuitenkin vain yhden tapauksen. Todistetaan sama nyt yleisesti [4, s. 159]:

**Lause 8.** *Olkoon inversio  $i_{c,\alpha}$  ja olkoon ympyrä  $S$ , joka ei kulje pisteen  $c$  kautta. Tällöin inversio kuvaa ympyrän  $S$  toiseksi ympyräksi  $S'$ .*

*Todistus.* Voidaan olettaa, että  $c = 0$ . Olkoon ympyrän  $S$  säde  $r$  ja keskipiste  $a$ . Olkoot pisteet  $x_1$  ja  $x_2$  pisteitä ympyrältä  $S$  siten, että niiden kautta kulkeva suora  $L$  kulkee myös pisteen  $c$  (eli origon) kautta. Tällöin pisteen  $a$  projektio suoralle  $L$  on pisteiden  $x_1$  ja  $x_2$  keskipiste  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ . Pythagoraan lauseella saadaan kaksi lausetta (kuva 5):

$$1) \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} - a \right\|^2 = \|a\|^2 \iff \|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 + x_2 - 2a\|^2 = 4\|a\|^2$$

$$2) \left\| \frac{x_1+x_2}{2} - x_2 \right\|^2 + \left\| \frac{x_1+x_2}{2} - a \right\|^2 = r^2 \iff \|x_1 - x_2\|^2 + \|x_1 + x_2 - 2a\|^2 = 4r^2.$$



KUVA 5. Lauseen 8 todistukseen liittyvä kuva, jossa pisteet  $x_1$  ja  $x_2$  on valittu ympyrältä, jonka keskipiste on  $a$

Yhdistämällä edellä olevat yhtälöt saadaan

$$\begin{aligned} 4\|a\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2 &= 4r^2 - \|x_1 - x_2\|^2 \\ \iff \|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2 &= 4\|a\|^2 - 4r^2 \\ \iff \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2(x_1|x_2) - \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 + 2(x_1|x_2) &= 4(\|a\|^2 - r^2) \\ \iff (x_1|x_2) &= \|a\|^2 - r^2. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että kun otetaan inversio, jonka keskipiste on  $c = 0$  ja  $\alpha = \|a\|^2 - r^2$  ja kuvataan pistettä  $x_1$  niin saadaan

$$i_{0, \|a\|^2 - r^2}(x_1) = (\|a\|^2 - r^2) \frac{x_1}{\|x_1\|^2} = (x_1|x_2) \frac{x_1}{(x_1|x_1)} = x_2.$$

Koska pisteet  $x_1$  ja  $x_2$  olivat mielivaltaisesti valittuja pisteitä ympyrältä  $S$ , niin yleisesti pätee, että

$$i_{0, \|a\|^2 - r^2}(S) = S. \quad (2)$$

Kahden samakeskisen, mutta eri säteisen inversion yhdistetty kuvaus on

$$i_{c, \alpha} \circ i_{c, \beta} = \alpha \frac{\beta \frac{x-c}{\|x-c\|^2} + c - c}{\left\| \beta \frac{x-c}{\|x-c\|^2} + c - c \right\|^2} + c = \alpha \frac{\beta \frac{x-c}{\|x-c\|^2}}{\beta^2 \frac{\|x-c\|^2}{\|x-c\|^4}} + c = \frac{\alpha}{\beta} (x - c) + c.$$

Tätä hyödyntämällä saadaan, että

$$i_{0, \alpha} = \frac{\alpha}{\|a\|^2 - r^2} i_{0, \|a\|^2 - r^2}.$$

Nyt yhtälön (2) nojalla saadaan, että

$$i_{0, \alpha}(S) = \frac{\alpha}{\|a\|^2 - r^2} S.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että ympyrä kuvautuu toiseksi ympyräksi, kun alkuperäinen ympyrä kerrotaan kertoimella  $\frac{\alpha}{\|a\|^2 - r^2}$ .  $\square$

*Huomautus 9.* Esimerkissä 7 havaittiin, että ympyrästä  $A$ , jonka keskipiste on  $(5, 0)$  ja säde on 1, syntyi ympyrä, jonka keskipiste on  $(\frac{5}{6}, 0)$  ja säde on  $\frac{1}{6}$  kun käytettiin inversiona ympyrää, jonka keskipiste on origo ja säde on 2. Nyt lauseen 8 todistuksessa havaitulla yhtälöllä voidaan laskea sama havainto. Nyt  $\alpha = 2^2 = 4$  ja  $\|a\|^2 - r^2 = 25 - 1 = 24$ , jolloin

$$i_{0,\alpha}(S) = \frac{4}{24}S = \frac{1}{6}S.$$

Nyt voidaan siis laskea, että keskipiste on  $(5, 0) \cdot \frac{1}{6} = (\frac{5}{6}, 0)$  ja säde on  $1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ .

Seuraavassa kappaleessa havainnollistetaan mitä tapahtuu ympyröille, jotka kulkevatkin keskipisteen  $c$  kautta.

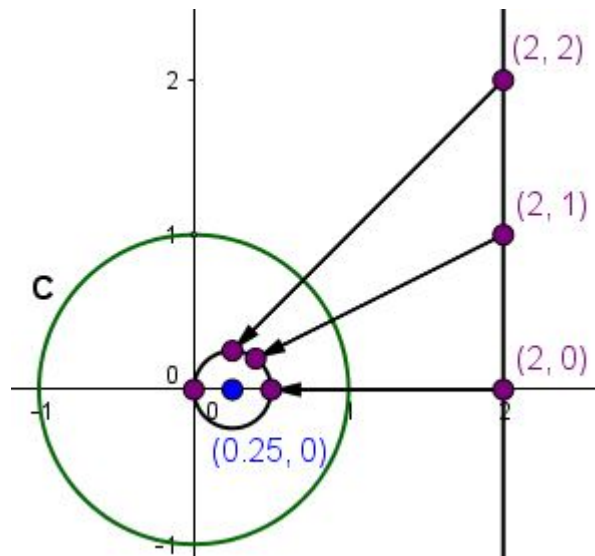
**2.3. Inversio laajennetussa tasossa.** Kuten aiemmin huomatuksessa 6 todettiin, inversio ympyrän suhteen ei ole määritelty ympyrän keskipisteessä. Tutkitaan yksikköympyrää ja inversiota tämän ympyrän suhteen.

**Esimerkki 10.** Olkoon yksikköympyrä  $C$ , tällöin määritelmän 5 avulla kuten esimerkissä 7 saadaan inversion lausekkeeksi

$$i_{0,1}(x, y) = 1^2 \frac{(x, y)}{\|(x, y)\|^2} + (0, 0) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad (3)$$

koska nyt  $c = (0, 0)$ .

Otetaan mukaan suora  $x = 2$  ja merkitään, että  $x'$  ja  $y'$  ovat inversion kuvapisteitä (kuva 6).



KUVA 6. Suoran  $x = 2$  peilaaminen ympyrän  $C$  suhteen

Tällöin edellä saadun lausekkeen mukaisesti saadaan vastaavasti kuten esimerkissä 7, että

$$\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} = 2.$$

Nyt siis etsitään yhtälö, joka pätee inversion kuvapisteille  $x'$  ja  $y'$ . Kertomalla molemmat puolet termillä  $(x')^2 + (y')^2$  saadaan

$$x' = 2(x')^2 + 2(y')^2.$$

Jakamalla kahdella ja neliöimällä saadaan, että

$$(x')^2 - \frac{1}{2}x' + (y')^2 = 0 \rightarrow (x')^2 - \frac{1}{2}x' + \frac{1}{16} + (y')^2 = \frac{1}{16} \rightarrow (x' - \frac{1}{4})^2 + (y' - 0)^2 = (\frac{1}{4})^2.$$

Nähdään, että syntyy ympyrä, jonka keskipiste on  $(\frac{1}{4}, 0)$  ja säde  $\frac{1}{4}$ . Tämä ympyrä kulkee origon kautta eli ympyrän  $C$  keskipisteen kautta. Koska inversio on itsensä käänteiskuvaus, keskipisteen kautta kulkeva ympyrä, josta on poistettu tuo keskipiste, kuvautuu siten suoraksi.

Lausekkeen (3) avulla piste  $(2, 0)$  kuvautuu siis pisteeksi  $(\frac{1}{2}, 0)$ , piste  $(2, 1)$  kuvautuu pisteeksi  $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ , piste  $(2, 2)$  pisteeksi  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  jne. Kuvassa 6 näkyy pisteiden liikkuminen ympyrällä. Yleisesti jokin suoran  $x = 2$  piste kuvautuu pisteeksi  $(\frac{2}{4+y^2}, \frac{2}{4+y^2})$ . Kun koordinaatti  $y$  kasvaa, niin piste ympyrällä lähestyy origoa vastapäivään. Vastaavasti myös, jos koordinaatti  $y$  pienenee (negatiiviselle puolelle), niin piste ympyrällä lähestyy origoa myötäpäivään. Koska ei ole pistettä, joka olisi suoraan inversiokuvauksena origo, niin täytetään aukko niin sanotulla äärettömyyspisteellä.

Seuraavaksi laajennetun tason määritelmä [2, s. 285], jossa tuo äärettömyyspiste otetaan mukaan.

**Määritelmä 11.** *Laajennettu taso*, merkitään  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ , on Eukleideen tason ja äärettömyyspisteen  $\infty$  yhdiste. Vastaavasti laajennettu kompleksinen taso, merkitään  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , on kompleksitason ja äärettömyyspisteen yhdiste. Laajennettu suora on suoran ja äärettömyyspisteen yhdiste,  $l \cup \{\infty\}$ . Laajennetun tason inversio  $C$ :n suhteen on kuvaus  $i_{c,\alpha} : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . Tällöin jos

a)  $C$  on ympyrä, säde on  $r$  ja keskipiste on  $O$ , niin

$$i_{c,\alpha}(x) = \begin{cases} x:n \text{ inversio } C:n \text{ suhteen} & \text{jos } x \in \mathbb{C} - \{O\} \\ \infty, & \text{jos } x = O \\ O, & \text{jos } x = \infty \end{cases}$$

b)  $C$  on laajennettu suora  $l \cup \{\infty\}$ , niin

$$i_{c,\alpha}(x) = \begin{cases} x:n \text{ peilaus } C:n \text{ suhteen} & \text{jos } x \in \mathbb{C} \\ \infty, & \text{jos } x = \infty. \end{cases}$$

Esimerkissä 10 todettiin, että ainakin laajennettu suora  $x = 2$  kuvautuu ympyräksi. Todistetaan, että näin on kaikille laajennetuille suorille ja ympyröille, jotka kulkevat inversion ympyrän keskipisteen kautta [4, s. 159].

**Lause 12.** *Olkoon inversio  $i_{c,\alpha}$ . Tällöin kaikki ympyrät, jotka kulkevat pisteen  $c$  kautta kuvautuvat laajennetuiksi suoriksi, jotka eivät mene pisteen  $c$  kautta ja toisinpäin.*

*Todistus.* Todistetaan ensin, että keskipisteen  $c$  kautta kulkevat ympyrät kuvautuvat laajennetuiksi suoriksi, jotka eivät kulje keskipisteen  $c$  kautta.

Voidaan olettaa, että  $c = 0$ . Tällöin määritelmän 5 nojalla inversio voidaan esittää muodossa

$$i_{0,\alpha}(x) = \alpha \frac{x}{\|x\|^2} = \alpha \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Missä merkitään nyt, että  $x = (x, y)$ . Olkoon ympyrä, jonka keskipiste on  $(x_0, y_0)$  ja joka kulkee pisteen  $(0, 0)$  kautta. Tällöin ympyrän yhtälö on

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= x_0^2 + y_0^2 \\ \iff x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 &= x_0^2 + y_0^2 \\ \iff x^2 + y^2 &= 2(xx_0 + yy_0) = 2((x, y)|(x_0, y_0)) \end{aligned}$$

Nyt kun tämä sijoitetaan yhtälöön (4) saadaan

$$i_{0,\alpha}(x, y) = \alpha \frac{(x, y)}{2((x, y)|(x_0, y_0))}.$$

Tällöin kuvapisteille pätee, että

$$((i_{0,\alpha}(x, y)|(x_0, y_0)) = \left( \alpha \frac{(x, y)}{2((x, y)|(x_0, y_0))} \middle| (x_0, y_0) \right) = \frac{\alpha((x, y)|(x_0, y_0))}{2((x, y)|(x_0, y_0))} = \frac{\alpha}{2}.$$

Nyt jos merkitään, että  $i_{0,\alpha}(x, y) = (x', y')$ , niin saadaan, että

$$((x', y')|(x_0, y_0)) = x'x_0 + y'y_0 = \frac{\alpha}{2}. \quad (5)$$

Yhtälö (5) on (laajennetun) suoran yhtälö.

Todistetaan sitten, että laajennetut suorat, jotka eivät kulje keskipisteen kautta kuvautuvat ympyröiksi, jotka kulkevat keskipisteen  $c$  kautta.

Olkoon laajennettu suora  $L$ , joka ei kulje pisteen  $c$  kautta. Olkoon piste  $(x, y) \in L$ , jolle pätee, että  $((x, y)|(x_0, y_0)) = \frac{\alpha}{2}$ . Tällöin todistetaan, että pisteelle  $i_{c,\alpha}(y)$  pätee, että

$$\|i_{c,\alpha}(x, y)\|^2 = 2(i_{c,\alpha}(x, y)|(x_0, y_0)), \quad (6)$$

mikä oli aiemmin saadun keskipisteen kautta kulkevan ympyrän yhtälö.

Yhtälön (6) oikeasta puolesta saadaan

$$\|i_{c,\alpha}(x, y)\|^2 = \left\| \alpha \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \right\|^2 = \frac{|\alpha|^2}{x^2 + y^2},$$

ja vasemmasta puolesta vastaavasti

$$2(i_{c,\alpha}(x, y)|(x_0, y_0)) = 2\left( \alpha \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \middle| (x_0, y_0) \right) = \frac{2\alpha}{x^2 + y^2} \cdot ((x, y)|(x_0, y_0)) = \frac{|\alpha|^2}{x^2 + y^2}.$$

Koska yhtälön oikeasta puolesta ja vasemmasta saatiin samat, niin inversio kuvaa laajennetut suorat ympyröiksi.  $\square$

Esimerkissä 10 laskettiin laajennettua suoraa  $x = 2$  vastaava ympyrä. Nyt jos sijoitetaan lauseen 12 todistuksesta saatuun suoran yhtälöön lasketut ympyrän tiedot eli  $\alpha = 1$  ja keskipiste  $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, 0)$  saadaan, että

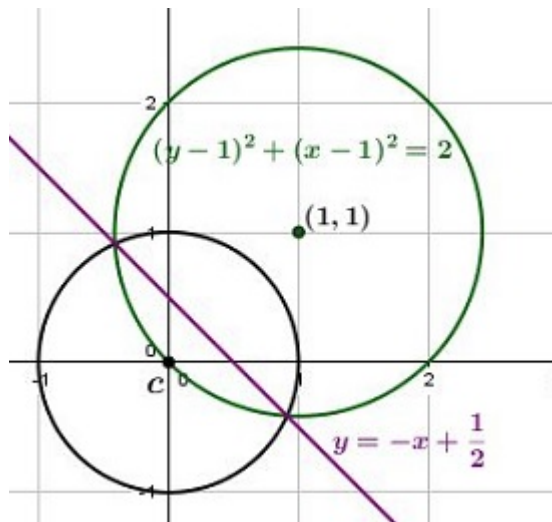
$$y_0y' = -x_0x' + \frac{\alpha}{2} \iff 0 = -\frac{1}{4}x' + \frac{1}{2} \iff x' = 2.$$

Mikä on haluttu suoran yhtälö.

**Esimerkki 13.** Jos otetaan esimerkiksi ympyräksi sellainen, jonka keskipiste on  $(1, 1)$  ja pidetään ympyrän, jonka suhteen inversio tehdään, keskipisteenä  $(0, 0)$  ja säde samana eli  $\alpha = 1$ , niin tällöin suoran yhtälöksi saadaan

$$y_0 y' = -x_0 x' + \frac{\alpha}{2} \iff y' = -x' + \frac{1}{2}.$$

Saatu tulos on piirrettynä kuvassa 7.



KUVA 7. Yksikköympyrän suhteen tehty inversio, missä ympyrä kuvautuu suoraksi ja toisin päin

Edellä todettiin, että ympyrät, jotka eivät kulje ympyrän  $C$  keskipisteen  $O$  kautta kuvautuvat ympyröiksi. Ympyrän sisäpuolella olevat pisteet kuvautuvat ulkopuolisiksi pisteiksi ja laajennetut suorat kuvautuvat ympyröiksi, jotka menevät keskipisteen  $O$  kautta. Erikoistapaus on kuitenkin laajennettu suora, joka kulkee jo keskipisteen  $O$  kautta.

*Huomautus 14.* Olkoon ympyrä  $C$ , jonka keskipiste on  $O$ . Tällöin laajennettu suora  $l$ , joka kulkee pisteen  $O$  kautta kuvautuu inversiolla ympyrän  $C$  suhteen samaksi laajennetuksi suoraksi  $l$ . Tällöin ulkopisteet kuvautuvat suoralla sen sisäpisteiksi ja toisin päin. Ympyrän kehän pisteet kuvautuvat itselleen ja keskipiste kuvautuu äärettömään sekä äärettömyyspiste keskipisteeksi. Koska inversiopisteet ja alkuperäiset pisteet ovat kaikki samalla suoralla, syntyy sama alkuperäinen laajennettu suora  $l$ .

*Huomautus 15.* Ei-laajennetuille suorille on voimassa Paralleeliaksioma [6], joka sanoo, että suoralla on tasan yksi jonkun sen ulkopuolisen pisteen  $P$  kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen alkuperäisen suoran kanssa [7]. Laajennetuille suorille Paralleeliaksioma on siten voimassa, että yhdensuuntaisilla laajennetuilla suorilla on vain tasan yksi yhteinen piste, joka on äärettömyyspiste. Tämä on selvää laajennetun suoran määritelmästä.

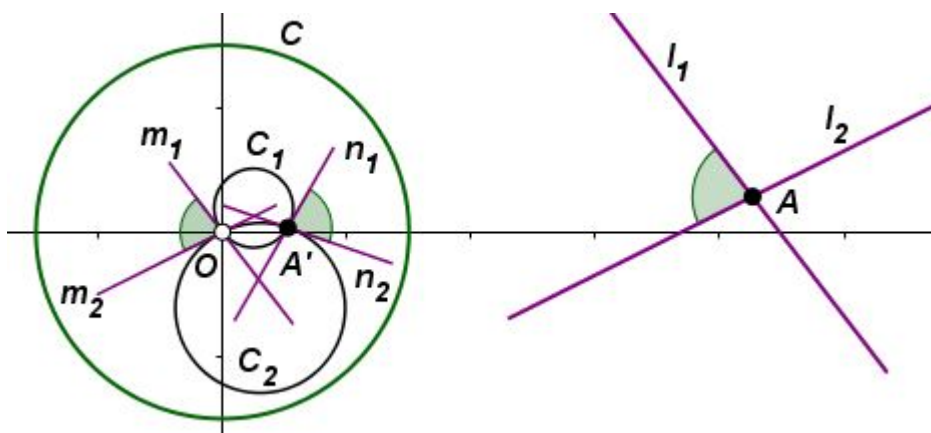
Inversiolle pätee seuraava tärkeä lause [2, s. 273]:

**Lause 16.** *Inversio ympyrän suhteen säilyttää kulmat.*

*Todistus.* Olkoot  $c_1$  ja  $c_2$  sileitä käyriä tasossa niin, että ne leikkaavat pisteessä  $A$ . Olkoot lisäksi laajennetut suorat  $l_1$  ja  $l_2$  käyrien tangentteja pisteessä  $A$ .

- (1) Olkoon ensin, että piste  $O$  ei kuulu kummallekaan tangentille. Tällöin inversio ympyrän  $C$  suhteen, jonka keskipiste on  $O$ , kuvaa laajennetut suorat  $l_1$  ja  $l_2$  ympyröiksi  $C_1$  ja  $C_2$ , jotka kulkevat pisteen  $O$  kautta lauseen 12 nojalla (kuva 8). Olkoon piste  $A'$  pisteen  $A$  kuvapiste. Tällöin koska suorat  $l_1$  ja  $l_2$  leikkaavat pisteessä  $A$ , niin ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  leikkaavat pisteessä  $A'$ .

Olkoon  $m_1$  pisteen  $O$  kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran  $l_1$  kanssa. Tällainen suora on olemassa ja se on ainut yhdensuuntainen suora huomatuksen 15 nojalla. Vastaavasti olkoon  $m_2$  pisteen  $O$  kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran  $l_2$  kanssa. Inversio ympyrän  $C$



KUVA 8. Suorat  $l_1$  ja  $l_2$  kuvautuvat inversiolla ympyrän  $C$  suhteen ympyröiksi  $C_1$  ja  $C_2$ , ja tällöin suorien välinen kulma on yhtä suuri kuin ympyröidenkin

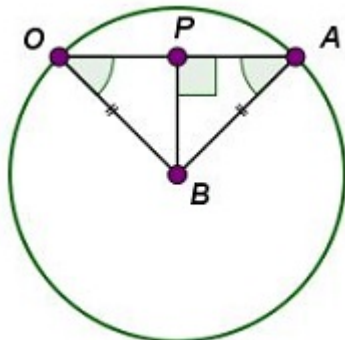
suhteen kuvaa suoran  $l_1$  ympyräksi  $C_1$  ja suoran  $m_1$  se kuvaa suoraksi  $m_1$  huomatuksen 14 nojalla, sillä suora kulkee ympyrän  $C$  keskipisteen  $O$  kautta. Alunperin suoralla  $l_1$  ja suoralla  $m_1$  on yksi yhteinen piste: äärettömyyspiste. Äärettömyyspiste kuvautuu inversiolla ympyrän  $C$  suhteen keskipisteeksi  $O$ , joten suoran  $m_1$  kuvajoukolla eli suoralla  $m_1$  ja suoran  $l_1$  kuvajoukolla eli ympyrällä  $C_1$  on ainoastaan tämä yhteisenä pisteenä. Tällöin siis suora  $m_1$  on ympyrän  $C_1$  tangentti. Vastaavasti suora  $m_2$  on ympyrän  $C_2$  tangentti.

Käyrien  $c_1$  ja  $c_2$  välinen kulma pisteessä  $A$  on tangenttien  $l_1$  ja  $l_2$  välinen kulma. Koska  $l_1$  on yhdensuuntainen tangentin  $m_1$  kanssa ja  $l_2$  tangentin  $m_2$  kanssa, niin tangenttien  $l_1$  ja  $l_2$  välinen kulma on yhtä suuri kuin tangenttien  $m_1$  ja  $m_2$  pisteessä  $O$ .

Nyt siis vielä täytyy osoittaa, että tangenttien  $l_1$  ja  $l_2$  välinen kulma on yhtäsuuri kuin ympyröiden välinen kulma pisteessä  $A'$ . Tähän tarvitaan seuraava havainto: Olkoon piste  $B$  ympyrän keskipiste ja valitaan piste  $P$  janalta  $OA$  siten, että janat  $OA$  ja  $PB$  ovat kohtisuoria (kuva 9). Kolmiot  $\triangle BOP$  ja  $\triangle PAB$  ovat suorakulmaisia ja janat  $AB$  sekä  $OB$  yhtä pitkiä (ympyrän säteitä). Lisäksi kulmat  $\angle BOP$  ja  $\angle PAB$  ovat yhtä suuria, sillä kolmio  $\triangle ABO$  on



tasakylkinen kolmio. SKK-säännön nojalla [7, s. 41] janat  $AP$  ja  $OP$  ovat yhtä pitkät eli piste  $P$  on janan keskipiste ja sen kautta piirretty normaali on keskinormaali janalle  $OA$ . Nyt siis olkoon  $n_1$  tangentti ympyrälle  $C_1$  pisteessä  $A'$  ja



KUVA 9. Janan  $OA$  eli ympyrän janteen keskinormaali kulkee ympyrän keskipisteen kautta

$n_2$  tangentti ympyrälle  $C_2$  myös pisteessä  $A'$ . Tällöin edellisen havainnon perusteella pisteiden  $O$  ja  $A'$  välisen janan keskinormaali kulkee ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  keskipisteiden kautta. Jos tämän keskinormaalien suhteen tehdään peilaus, niin tangentti  $m_1$  kuvautuu tangentiksi  $n_1$  ja vastaavasti  $m_2$  tangentiksi  $n_2$ . Siten tangenttien  $m_1$  ja  $m_2$  välinen kulma on yhtä suuri kuin tangenttien  $n_1$  ja  $n_2$  välinen kulma. Siten ollaan saatu, että käyrien  $c_1$  ja  $c_2$  välinen kulma pisteessä  $A$  on yhtä suuri kuin ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma pisteessä  $A'$ .

- (2) Oletetaan sitten, että piste  $O$  kuuluukin jommalle kummalle tangentille  $l_1$  tai  $l_2$ . Oletetaan, että se kuuluu tangentille  $l_1$ , mutta ei tangentille  $l_2$ . Oletetaan edelleen, että tangentit leikkaavat pisteessä  $A$ . Tällöin inversio ympyrän  $C$  suhteen, jonka keskipiste on  $O$  kuvaa tangentin  $l_1$  itselleen ja tangentin  $l_2$  ympyräksi  $C_2$ . Ympyrälle  $C_2$  voidaan luoda kuten aiemminkin tangentit  $m_2$  sekä  $n_2$  niin, että  $m_2$  on tangentti pisteessä  $O$  ja yhdensuuntainen tangentin  $l_2$  kanssa. Tangentti  $n_2$  taas on pisteen  $A'$  kautta kulkeva ympyrän  $C_2$  tangentti, joka peilattiin janan  $OA$  keskinormaalien kautta. Nyt tangenttien  $l_1$  ja  $l_2$  välinen kulma on sama kuin suoran  $l_1$  ja tangentin  $m_2$  ja siten sama kulma kuin suoran  $l_1$  ja tangentin  $n_2$ .
- (3) Oletetaan vielä viimeiseksi, että molemmat suorat  $l_1$  ja  $l_2$  kulkevat pisteen  $O$  kautta. Tällöin piste  $A = O$ , jolloin kun tehdään inversio ympyrän  $C$  suhteen, jonka keskipiste on  $O$ , tangentit kuvautuvat itselleen ja niiden välinen kulma pysyy samana.

□

## 3. INVERSIIVINEN GEOMETRIA

Geometria, jossa tutkitaan sellaisten kuvausten ominaisuuksia, jotka voidaan esittää inversioiden yhdistettynä kuvauksena laajennetussa kompleksisessa tasossa, kutsutaan inversiiviseksi geometriaksi.

Käydään seuraavaksi läpi yksi inversiivisen geometrian esimerkeistä, jonka olen tehnyt itse.

**Esimerkki 17.** Olkoon yksikkövektori  $u$ ,  $\|u\| = 1$ , tasossa  $\mathbb{R}^2$ . Olkoon ensin peilaus origon kautta kulkevan suoran  $l$  suhteen, jolloin voidaan määritelmän 3 mukaan merkitä, että  $l = u^\perp$ . Olkoon suoran  $l$  ja  $x$ -akselin välinen kulma  $\varphi$ . Valitaan toinen mahdollisista suunnista, mikä yksikkövektori  $u$  voi olla ja merkitään trigonometristen funktioiden palautuskaavojen avulla [16, s. 37], että

$$u = \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\varphi)\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\varphi)\right) \right) = (-\sin \varphi, \cos \varphi). \quad (7)$$

Määritelmän 3 mukaan nyt  $P = 0$ , jolloin peilauksen kuvaus on

$$r_l(x) = x - 2(x|u)u.$$

Huomatuksen 4 nojalla peilaus on nyt lineaarikuvaus. Tällöin peilauksen kuvaus standardisessa kannassa on ensimmäiselle kantavektorille

$$r_l(1, 0) = (1, 0) + 2 \sin \varphi (-\sin \varphi, \cos \varphi) = (1 - 2 \sin^2 \varphi, 2 \sin \varphi \cos \varphi),$$

ja toiselle kantavektorille

$$r_l(0, 1) = (0, 1) - 2 \cos \varphi (-\sin \varphi, \cos \varphi) = (2 \cos \varphi \sin \varphi, 1 - 2 \cos^2 \varphi).$$

Käytetään trigonometristen funktioiden laskukaavoja [16, s. 37] ja näin ollen saadaan matriisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \sin^2 \varphi & 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ 2 \cos \varphi \sin \varphi & 1 - 2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}.$$

Otetaan seuraavaksi peilaus  $x$ -akselin suhteen. Tällöin vektori  $u = (0, 1)$ , joten peilauksesta saadaan  $r_l(1, 0) = (1, 0)$  ja  $r_l(0, 1) = (0, 1) - 2(0, 1) = (0, -1)$ . Matriisiksi saadaan siten

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

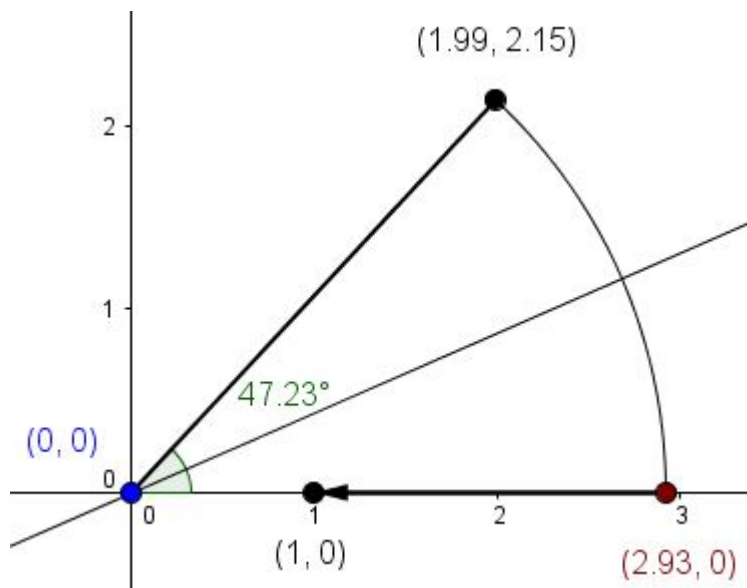
Yhdistetään nämä kaksi peilauksen matriisiä ja saadaan

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix}.$$

Tämä vastaa kiertoa vastapäivään kulman  $2\varphi$  verran. Kierto jonkun kulman suhteen on siten kahden eri peilauksen yhdistetty kuvaus, mikä on yksi esimerkki inversiivisestä geometriasta.

Kuvassa 10 on esitetty erään pisteen peilaus suoran  $l$  suhteen. Kulma  $2\varphi = 47,23^\circ$ , joten matriisi  $\mathbf{A}$  on tällöin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,679 & 0,734 \\ 0,734 & -0,679 \end{pmatrix}.$$



KUVA 10. Erään pisteen peilaus suoran suhteen, jonka kulma  $x$ -akselin kanssa on puolet pisteen ja origon kautta kulkevan janan ja  $x$ -akselin välisestä kulmasta

Piste  $(1,99; 2,15)$  voidaan merkitä vektorilla  $(r \cdot 0,679; r \cdot 0,734) = (1,989; 2,150)$ , missä  $r = \sqrt{1,99^2 + 2,15^2} = 2,929$ . Nyt vektorin ja matriisin  $\mathbf{A}$  kertolaskusta saadaan

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0,679 & 0,734 \\ 0,734 & -0,679 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,989 \\ 2,150 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,93 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Saatiin siis tulokseksi sama kuin mitä kuva 10 esittää.

Seuraava lause on tärkeä inversiivisessä geometriassa, sillä sen avulla mitkä tahansa kolme pistettä voidaan kuvata jollain inversioiden yhdistetyllä kuvauksella kolmeksi muuksi pisteeksi. Tällöin esimerkiksi ympyrää voidaan siirtää tai muuttaa suoraksi.

**Lause 18.** *Olko kompleksisen laajennetun tason pisteet  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  sekä  $w_1, w_2$  ja  $w_3$  siten, että  $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$  ja  $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq w_1$ . Tällöin on olemassa inversioiden yhdistetty kuvaus  $\varphi$  siten, että  $\varphi(z_k) = w_k$ , kaikille  $k = 1, 2, 3$ .*

*Todistus.* Koska  $\varphi$  on inversioiden yhdistetty kuvaus, voidaan käyttää tietä, jossa ensimmäisellä kuvauksella mennään mistä tahansa pisteistä  $z_k$  ”helppoihin pisteisiin” ja vastaavan kuvauksen käänteiskuvauksella näistä ”helppoista pisteistä” pisteisiin  $w_k$ . Käytetään pisteitä  $0, 1$  ja  $\infty$ .

Olko kuvaus  $\varphi_w$  siten, että  $\varphi_w(w_1) = \infty$ ,  $\varphi_w(w_2) = 0$  ja  $\varphi_w(w_3) = 1$ . Tällöin  $\varphi_w^{-1}(\infty) = w_1$ ,  $\varphi_w^{-1}(0) = w_2$  ja  $\varphi_w^{-1}(1) = w_3$ . Olko lisäksi olemassa kuvaus  $\varphi_z$  siten, että  $\varphi_z(z_1) = \infty$ ,  $\varphi_z(z_2) = 0$  ja  $\varphi_z(z_3) = 1$ . Tällöin saadaan, että

$$\varphi_w^{-1} \circ \varphi_z(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3,$$

mikä on haluttu tulos. Osoitetaan, että on olemassa tällaiset kuvaukset. Koska kuvaus  $\varphi_z$  kuvaa mitkä tahansa kolme pistettä pisteiksi  $\infty, 0$  ja  $1$ , niin riittää osoittaa, että tällainen kuvaus on olemassa. Samoin voidaan osoittaa kuvauksen  $\varphi_w$  olemassaolo,

jolloin sen kuvauksen käänteiskuvaus kuvaa tällöin nuo kolme pistettä miksi tahansa kolmeksi pisteeksi.

Olkoon  $z_k \neq \infty$  kaikilla  $k=1,2,3$ . Tällöin pisteet  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Olkoon kuvaus  $\varphi_1(x) = i_{z_1, r^2}$ , missä  $C$  on  $z_1$ -keskinen ja  $r$  säteinen ympyrä,  $r > 0$ . Tällöin  $\varphi_1(z_1) = \infty$  määritelmän 11 a) kohdan nojalla. Seuraavaksi halutaan kuvaus, joka säilyttää äärettömän äärettömässä, mutta piste  $\varphi_1(z_2)$  kuvautuisi pisteeksi 0. Tämä saadaan kun otetaan peilaus pisteen  $\varphi_1(z_2)$  ja origon välisen janan keskinormaalini  $l$  kautta. Tällöin  $\varphi_2(z_k) = r_l(z_k)$  ja  $\varphi_2 \circ \varphi_1(z_2) = 0$ , määritelmän 3 nojalla.

Nyt ollaan saatu pisteet  $\infty$  ja 0, vielä pitäisi piste  $\varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)$  saada pisteeksi 1. Tämä tehdään kahdessa vaiheessa: siirretään ensin piste  $x$ -akselille ja sen jälkeen vasta pisteeseen 1. Valitaan suora, joka kulkee origon kautta niin, että sen ja  $x$ -akselin välinen kulma on puolet janan  $O\varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)$  ja  $x$ -akselin välisestä kulmasta (kuva 10). Peilataan piste  $\varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)$  tämän suoran suhteen, jolloin siitä tulee piste  $x$ -akselilla. Tämä voidaan perustella esimerkin 17 avulla. Suora  $l = u^\perp$  ja vektori  $u = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ . Suoran  $l$  ja  $x$ -akselin välinen kulma on  $\varphi$ . Peilataan piste  $\varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)$  tämä suoran  $l$  suhteen. Esimerkissä 17 saatiin matriisiksi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix},$$

joka vastasi peilausta suoran  $l$  suhteen. Pistettä  $\varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)$  voidaan myös merkitä vektorilla  $(r \cos 2\varphi, r \sin 2\varphi)$ , sillä vektorin ja  $x$ -akseli välinen kulma on kaksinkertainen suoran  $l$  ja  $x$ -akselin välisestä kulmasta. Merkitään vektoria  $(r \cos 2\varphi, r \sin 2\varphi)$  matriisilla  $\mathbf{C}$  ja kerrotaan se matriisilla  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos 2\varphi \\ r \sin 2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Saadaan siten lopputulokseksi vektori  $(r, 0)$ , mikä on  $x$ -akselin suuntainen vektori pituudella  $r$ .

Viimeiseen vaiheeseen tarvitaan aputulos:

**Lemma 19.** *Kuvaus, jossa kompleksiset pisteet  $z$  kuvataan pisteiksi  $kz$ ,  $k > 0$ , on kahden origokeskisen inversion yhdistetty kuvaus.*

*Todistus.* Inversio algebrallisesti määritelmän 5 nojalla on

$$i_{c, \alpha}(x) = \alpha \frac{x - c}{\|x - c\|^2} + c.$$

Nyt  $c = 0$ , joten kahden origokeskisen inversion  $i_{\alpha_1}$  ja  $i_{\alpha_2}$  yhdistetty kuvaus pisteestä  $z$  on

$$i_{\alpha_1} \circ i_{\alpha_2}(z) = i_{\alpha_1}\left(\alpha_2 \frac{z}{\|z\|^2}\right) = \alpha_1 \frac{\alpha_2 \frac{z}{\|z\|^2}}{\left\|\alpha_2 \frac{z}{\|z\|^2}\right\|^2} = \alpha_1 \frac{\alpha_2 \frac{z}{\|z\|^2}}{\alpha_2^2 \frac{\|z\|^2}{\|z\|^4}} = \alpha_1 \frac{\frac{z}{\|z\|^2}}{\alpha_2 \frac{1}{\|z\|^2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} z.$$

Voidaan valita  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  siten, että  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = k$ , esimerkiksi  $\alpha_1 = k$  ja  $\alpha_2 = 1$ .  $\square$

Tämän aputuloksen avulla voidaan viimeisenä kuvauksena käyttää kahden origokeskisen inversion yhdistettyä kuvausta. Toisen inversion keskipiste on 1 ja toisen piste  $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)$ . Yhdistetty kuvaus on siten  $i_1 \circ i_{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)}(z_k)$ .

Tällöin pisteet kuvautuvat juuri niihin mihin haluttiinkin, sillä pisteelle  $z_1$  pätee

$$i_1 \circ i_{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)} \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_1) = i_1 \circ i_{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)}(\infty) = \infty,$$

pisteelle  $z_2$  taas

$$i_1 \circ i_{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)} \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_2) = i_1 \circ i_{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)}(0) = 0,$$

ja vielä pisteelle  $z_3$

$$i_1 \circ i_{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)} \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3) = \frac{1}{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)}(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)) = 1.$$

Näin ollen saatiin määriteltyä kuvaus  $i_1 \circ i_{\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_3)} \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z_k)$ , joka kuvaa jotkin pisteet  $z_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , pisteiksi  $\infty$ ,  $0$  ja  $1$ .

Vielä pitää käsitellä tapaukset, joissa jokin pisteistä  $z_k$  on ääretön.

- 1) Olkoon  $z_1 = \infty$ . Tällöin voidaan suoraan aloittaa kuvauksesta  $\varphi_2$ , sillä kuvausta  $\varphi_1$  ei tarvita kun piste  $z_1$  on jo ääretön.
- 2) Olkoon  $z_2 = \infty$ . Tällöin tehdään kuvaus  $\varphi_1$  normaalisti, jolloin piste  $z_2$  kuvautuu pisteeksi  $z_1 \in \mathbb{C}$ . Piste  $z_1$  kuvautuu normaalisti kuten aiemminkin äärettömään.
- 3) Olkoon  $z_3 = \infty$ . Tällöin kuvaus  $\varphi_1$  kuvaa pisteen  $z_3$  pisteeksi  $z_1 \in \mathbb{C}$  kuten edellä ja pisteet  $z_1$  ja  $z_2$  kuvautuvat normaalisti.

□

*Huomautus 20.* Edellä todistettiin inversiivisen geometrian yksi päälauseista siten, että löytyy inversioiden yhdistetyt kuvaukset, jotka kuvaavat kolme pistettä miksi tahansa kolmeksi muuksi pisteeksi. Toinen tapa todistaa lause on käyttää ns. Möbius-kuvauksia, jotka ovat muotoa  $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ . Möbius-kuvaukset ovat inversioiden yhdistettyjä kuvauksia [2, s. 299], ja lause 18 todistettaisiin vastaavasti Möbius-kuvausta käyttämällä [2, s. 312].

Inversiivisen geometrian päälause takaa sen, että inversiota voidaan käyttää esimerkiksi eri lauseiden todistuksissa, joita esitellään seuraavissa kappaleissa.

## 4. APOLLONIUS JA YMPYRÄPERHEET

Apollonius (n. 262–190 eaa.) oli yksi antiikin kreikan matemaatikoista. Häneltä on ainoastaan säilynyt kirjoja kartioleikkauksista [11] ja niistäkin seitsemän kahdeksasta [19]. Apolloniuksen nimellä tunnetaan kuitenkin ainakin kaksi geometristä tulosta. Apolloniuksen ongelmana tunnetaan tulos, jossa annettulle kolmelle ympyrälle pitää piirtää ympyrä, joka sivuaa kaikkia näitä annettua kolmea ympyrää. Apolloniuksen ympyränä tunnetaan niiden pisteiden joukko, joiden välisten etäisyyksien suhde kahdesta tietystä pisteestä on vakio [8, s. 35].

Seuraava Apolloniuksen lause [2, s. 317] antaa vaihtoehdon ympyrän määritelmälle ja sen todistukseen tarvitaan inversiota.

**Lause 21.** *Olko  $A$  ja  $B$  kaksi eri pistettä tasolla ja olkoon  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 1$ . Tällöin pisteiden  $P$  joukko, joille pätee, että*

$$\frac{PA}{PB} = k,$$

*muodostavat ympyrän, jonka keskipiste sijaitsee pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta kulkevalla suoralla.*

*Todistus.* Olkoon  $C$  pisteiden  $P$  joukko, joille pätee  $PA = k \cdot PB$ . Olkoon inversio  $i$  ympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $A$  ja säde 1. Näytetään, että  $C' = i(C)$  on ympyrä, jolloin  $C$  on yleistetty ympyrä (eli ympyrä tai laajennettu suora). Olkoon tason pisteet  $P$  ja  $B$  siten, että kumpikaan ei ole ääretön ja merkitään, että  $i(B) = B'$  ja  $i(P) = P'$ . Tällöin kumpikaan piste  $P'$  eikä  $B'$  ole piste  $A$ . Inversioon määritelmän 1 mukaan

$$AB \cdot AB' = 1$$

ja

$$AP \cdot AP' = 1. \tag{8}$$

Yhdistämällä yhtälöt saadaan

$$\frac{AB}{AP'} = \frac{AP}{AB'}.$$

Sivut ovat siis verrannollisia keskenään. Lisäksi, koska inversiolle pätee, että piste  $P'$  on samalla suoralla pisteen  $P$  kanssa ja samoin piste  $B'$  pisteen  $B$  kanssa, niin kulmat  $\angle PAB$  ja  $\angle P'AB'$  ovat yhtä suuria. Tästä seuraa, että kolmiot  $\triangle APB$  ja  $\triangle AP'B'$  ovat yhdenmuotoisia SKS-säännön nojalla. Tällöin erityisesti pätee, että

$$\frac{B'P'}{PB} = \frac{AP'}{AB}.$$

Yhtälön (8) mukaan  $AP' = 1/AP$ , joten saadaan, että

$$B'P' = \frac{PB}{AB \cdot AP}. \tag{9}$$

Jos oletetaan, että piste  $P$  kuuluu joukkoon  $C$ , niin tällöin  $AP = k \cdot PB$ , jolloin

$$B'P' = \frac{1}{k \cdot AB},$$

mikä tarkoittaa sitä, että piste  $P'$  on etäisyydellä  $1/(k \cdot AB)$  pisteestä  $B'$ . Piste  $P'$  kuuluu siten ympyrälle  $C'$ , jonka keskipiste on  $B'$  ja säde on  $\frac{1}{k \cdot AB}$ . Koska

$$AB' = \frac{1}{AB} \neq \frac{1}{k \cdot AB} = B'P',$$

niin piste  $A$  ei voi olla piste  $P'$ , jolloin piste  $A$  ei kuulu ympyrälle  $C'$ . Kun tämä ympyrä  $C'$  kuvataan inversiolla  $i$  ympyrän  $C$  suhteen keskipisteenään  $A$ , niin syntyy ympyrä eli piste  $P$  kuuluu siis ympyrälle.

Vastaavasti jos oletetaan, että piste  $P'$  sijaitsee joukossa  $C'$  eli kuten edellä pääteltiin, niin tällöin piste  $P$  kuuluu ympyrälle. Tällöin  $B'P' = \frac{1}{k \cdot AB}$ , joten yhtälöstä (9) saadaan

$$\frac{1}{k \cdot AB} = \frac{PB}{AB \cdot AP}.$$

Mistä saadaan, että  $AP = k \cdot PB$ , joten piste  $P$  kuuluu joukkoon  $C$ . Saadaan, että joukko  $C$  on ympyrä.

Joukon  $C$  keskipiste sijaitsee suoralla  $\overline{AB}$ , koska peilaus  $r$  suoran  $AB$  suhteen ei muuta suoraa  $AB$  ja tällöin jos  $P \in C$ , niin myös  $r(P) \in C$ . Tämä tarkoittaa sitä, että piste  $P$  ja  $r(P)$  ovat samalla ympyrällä ja ne ovat yhtä kaukana suorasta  $\overline{AB}$ . Tällöin ainoa mahdollisuus on, että keskipiste sijaitsee suoralla  $\overline{AB}$ .  $\square$

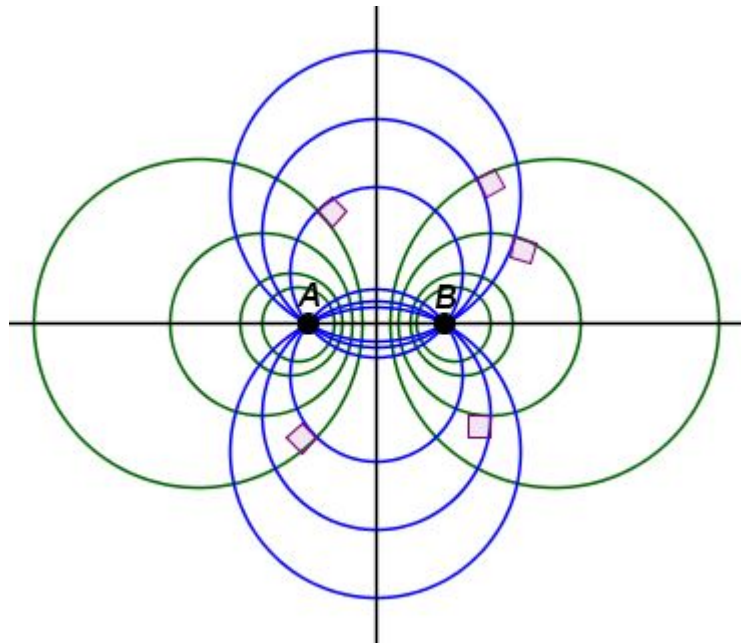
*Huomautus 22.* Todistuksessa käytetty inversiokuvaus  $i$  muuttaa itse asiassa ympyrät samankeskisiksi ympyröiksi, sillä jana  $AB$  ja  $k$  ovat joitakin vakioita, ja siten pistejoukko  $P'$  sijaitsee aina jonkin tietyn etäisyyden päässä pisteestä  $B'$ . Keskipisteeksi tulee tällöin  $i(B) = B'$  ja säteeksi  $1/(k \cdot AB)$ .

Apolloniuksen lauseen ympyröitä kutsutaan Apolloniuksen ympyröiksi. Niiden koko ja sijainti riippuu luvusta  $k$ . Kun  $k = 1$ , niin  $AP = PB$ , mikä tarkoittaa kaikkia niitä pisteitä  $P$ , jotka ovat yhtä kaukana pisteestä  $A$  ja  $B$ . Syntyy suora, joka on pisteiden  $A$  ja  $B$  välinen keskinormaali. Apolloniuksen ympyrät muodostavat ympyräperheen, joka on esitetty kuvassa 11 vihreällä värillä.

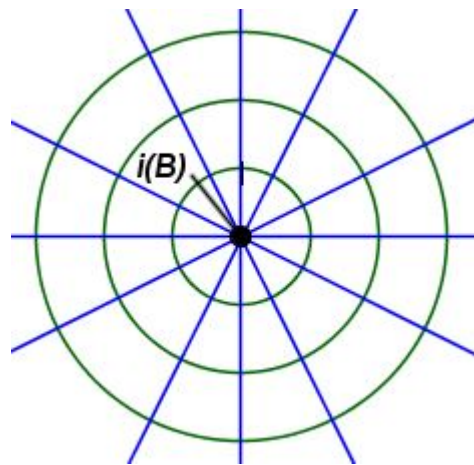
Jos tämän Apolloniuksen ympyräperheen kanssa otetaan mukaan toinen ympyräperhe, jolle kaikki ympyrät kulkevat pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta, syntyy ympyröitä, jotka ovat ortogonaalisia keskenään, kuva 11. Todistetaan tämä [1, s. 315].

**Lause 23.** *Olko  $A$  ja  $B$  kaksi erillistä pistettä tasossa, ja olkoon  $F$  Apolloniuksen ympyräperhe pisteiden  $A$  ja  $B$  suhteen. Olkoon  $G$  toinen ympyräperhe, jossa jokainen ympyrä kulkee sekä pisteen  $A$  että  $B$  kautta. Tällöin jokainen ympyrä joukosta  $F$  on ortogonaalinen jokaisen joukon  $G$  ympyrän kanssa.*

*Todistus.* Olkoon  $i$  inversio yksikköympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $A$ . Aiemmin todettiin huomautuksessa 22, että Apolloniuksen ympyrät, joukko  $F$ , kuvautuu tällöin samankeskisiksi ympyröiksi, keskipisteenään  $i(B)$ . Joukosta  $G$  syntyy tällöin joukko suoria, jotka kulkevat pisteen  $i(B)$  kautta, sillä piste  $A$  kuvautuu äärettömään. Koska joukon  $G$  ympyrät eivät leikkaaneet muissa pisteissä kuin  $A$  ja  $B$ , niin tällöin suorat leikkaavat toisiaan vain pisteessä  $i(B)$  (ja  $i(A) = \infty$ ). Syntyy siis kuvan 12 näköinen kuvio, josta nähdään, että suorat leikkaavat jokaista ympyrää suorassa kulmassa. Koska inversio säilyttää kulmat lauseen 16 nojalla, niin kulmat ovat ennen inversiotakin siten suoria.  $\square$



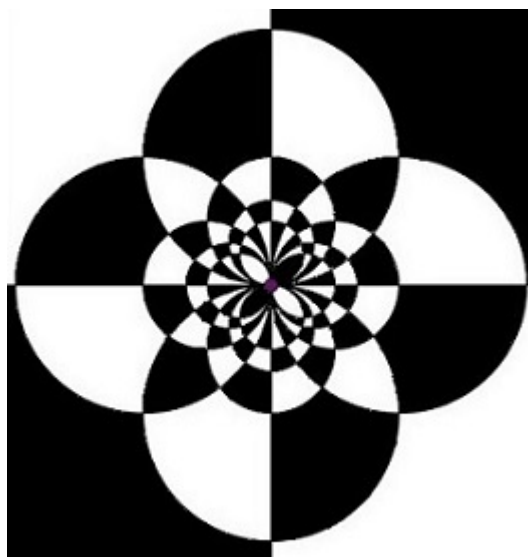
KUVA 11. Kaikki vihreät Apolloniuksen ympyräperheen ympyrät ovat ortogonaalisia sinisille ympyröille, jotka kaikki kulkevat pisteiden  $A$  ja  $B$  kautta



KUVA 12. Inversio  $i$  muuttaa Apolloniuksen perheen ympyrät samankeskisiksi ja sen kanssa ortogonaalisen ympyräperheen suoriksi

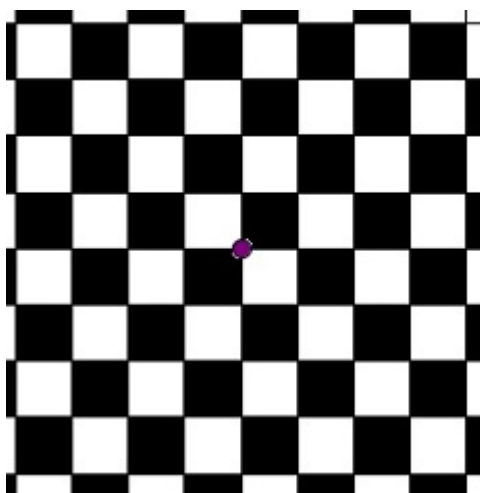
Ympyräperheitä voidaan muodostaa kolmella eri tavalla. Lauseessa 23 ympyräjoukko  $G$  kulkee kahden pisteen kautta ja taas Apolloniuksen ympyräperheen ympyrät eivät kulje minkään yhteisen pisteen kautta. Voidaan myös tehdä ympyräperhe, joka kulkee yhden pisteen kautta, esimerkiksi origon kautta. Tällöin ympyröillä kaikilla on sama tangentti, joka kulkee origon kautta (myös tangentti itse kuuluu ympyräperheeseen). Esimerkiksi jos tangentti on  $y$ -akseli, niin ympyröiden keskipisteet sijaitsevat kaikki  $x$ -akselilla. Jos lisäksi kuvioon lisätään samanlainen ympyräperhe, jotka kaikki kulkevat origon kautta, mutta keskipisteet ovatkin  $y$ -akselilla ja sivuava tangentti on  $x$ -akseli, niin tällöin saadaan kuvan 13 näköinen kuvio.





KUVA 13. Kaksi ympyräperhettä origo leikkauspisteenään niin, että toisen perheen keskipisteet ovat  $x$ -akselilla ja toisen  $y$ -akselilla

Kuvan mustavalkoisuuden syy nähdään kun tehdään inversio yksikköympyrän suhteen, jonka keskipiste on origo (kuvassa violetilla värillä). Tällöin saadaan tuttu kuvio [21]: shakkilauta (kuva 14). Kuten lauseen 23 todistuksessa, tästäkin nähdään, että suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja näin ollen alkuperäiset ympyrät ovat ortogonaalisia keskenään.

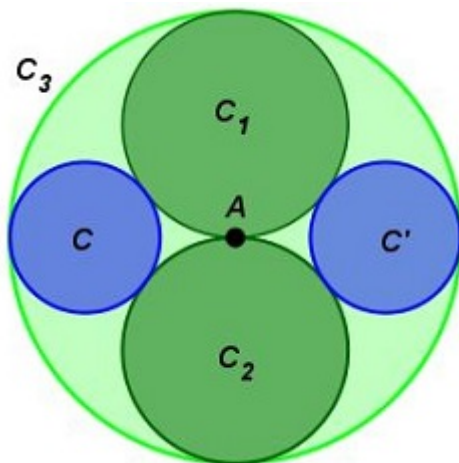


KUVA 14. Kahdesta ortogonaalisesta ympyräperheestä, jotka kulkevat kaikki saman pisteen kautta, syntyy inversiolla shakki-lauta

Apolloniukselta tunnetaan myös lause, jonka avulla voidaan konstruoida erilaisia ympyräpakkauksia [15].

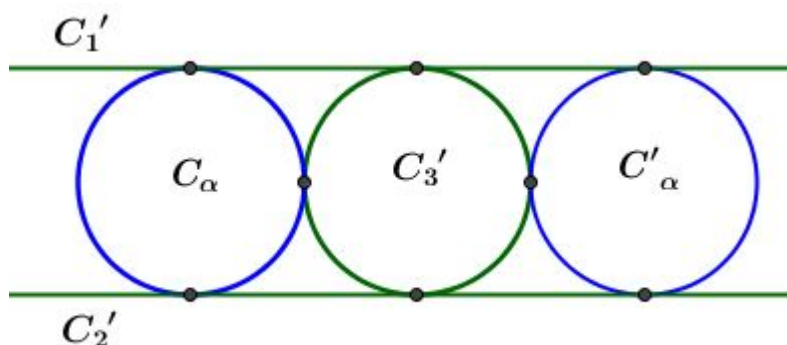
**Lause 24** (Apolloniuksen lause). *Olkoont mielivaltaiset kolme ympyrää  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $C_3$ , jotka sivuavat toisiaan. Tällöin löytyy tasan kaksi ympyrää  $C$  ja  $C'$ , jotka sivuavat näitä kaikkia kolmea ympyrää.*

Kuvassa 15 on vihreällä alkuperäiset kolme ympyrää, ja sinisellä ympyrät, jotka voidaan piirtää niin, että ne sivuavat kaikkia kolmea vihreätä ympyrää. Tämä on Apolloniuksen ympyräpakkauksen ensimmäinen vaihe.



KUVA 15. Apolloniuksen ympyräpakkauksen ensimmäinen vaihe

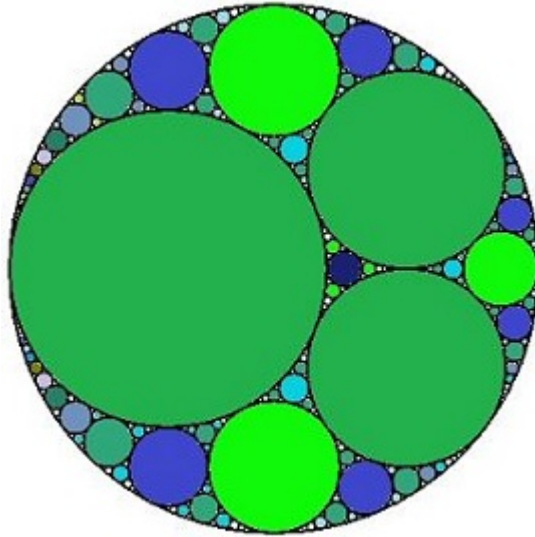
*Todistus.* Olkoon piste  $A$  ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  leikkauspiste. Tehdään inversio ympyrän  $\alpha$  suhteen, jonka keskipiste on  $A$  (säde mielivaltainen). Tällöin ympyröistä  $C_1$  ja  $C_2$  tulee suoria  $C'_1$  ja  $C'_2$ , sillä piste  $A$  kuvautuu äärettömään. Suorat  $C'_1$  ja  $C'_2$  ovat yhdensuuntaisia, sillä alkuperäisillä ympyröillä ei ollut muita yhteisiä pisteitä kuin piste  $A$ , joka kuvautuu äärettömään. Ympyrästä  $C_3$  tulee ympyrä  $C'_3$ , joka sivuaa edelleen suoria  $C'_1$  ja  $C'_2$ , eli se on siis ympyrä näiden suorien välissä. Nyt on selvää, että voidaan konstruoida vain kaksi ympyrää  $C_\alpha$  ja  $C'_\alpha$ , jotka sivuavat näitä kaikkia kolmea: ympyrän  $C'_3$  molemmille puolille kuvan 16 mukaisesti. Tehdään inversio uudelleen takaisin päin, jolloin väite seuraa.  $\square$



KUVA 16. Apolloniuksen lauseen todistuksen välivaihe, jossa ympyrät  $C_\alpha$  ja  $C'_\alpha$  sivuavat ympyrää  $C'_3$  ja suoria  $C'_1$  ja  $C'_2$

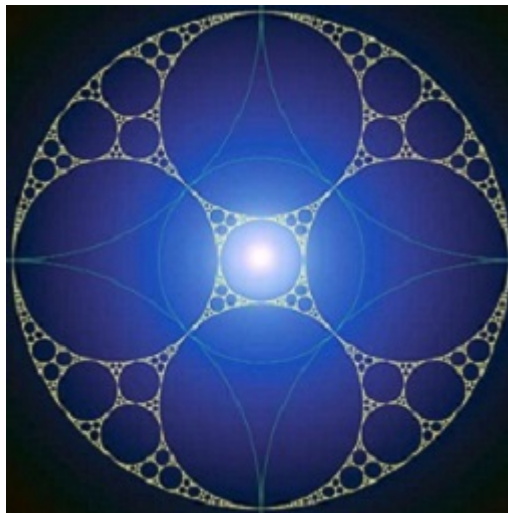
Koska Apolloniuksen lause pätee, voidaan Apolloniuksen ympyräpakkausta jatkaa loputtomiin. Alku voi myös olla eri näköinen. Esimerkiksi kuvassa 17 on lähdetty

liikkeelle kolmesta isosta vihreästä ympyrästä, ja joiden ympärille on piirretty iso ympyrä ja keskelle pieni tummansininen ympyrä. Tätä jatketaan kunnes koko alue saadaan täytettyä.



KUVA 17. Apolloniuksen ympyräpakkaus, jossa eri väreillä on kuvattu aina seuraava vaihe [20]

Ympyräpakkaus voidaan myös täyttää hieman eri tavalla. Esimerkiksi kuvassa 18 sen sijaan, että täytettäisiin aukko aina yhdellä ympyrällä, joka sivuaa edellisiä ympyröitä, sijoitetaan kolme ympyrää, jotka sivuavat toisiaan. Alku voi tällöin koostua esimerkiksi isoimmasta ympyrästä ja kahdesta tummansinisestä isosta ympyrästä. Aukko on tällöin täytetty kahdella tummansinisellä suurella ympyrällä sekä valaistulla keskiympyrällä [10].



KUVA 18. Apolloniuksen ympyräpakkaus, jossa yhden ympyrän sijaan aukkoihin lisätty kolme toisiaan sivuavaa ympyrää [10]

## 5. JAKOB STEINER

Jakob Steiner (1796–1863) syntyi pienessä sveitsiläisessä kylässä lapsista nuorimpana [18]. Vastoin vanhempiensa tahtoa hän ilmottautui 18-vuotiaana kouluun ja 22-vuotiaana alkoi antamaan ensimmäisiä matematiikan tunteja. Hänellä ei ollut virallista pätevyyttä toimia opettajana, minkä takia hän osallistui opettajan pätevyyden velvoittamiin kokeisiin. Hän pääsi läpi vain rajallisesti, sillä hänellä oli ongelmia historian ja kirjallisuuden kanssa. Hän kuitenkin sai tällä rajallisella luvalla opettaa Berliinin Werderin lukiossa.

Vuonna 1825 Steiner pääsi opettamaan Berliiniin teknilliseen kouluun, mutta molemmissa kouluissa hänellä oli ongelma noudattaa koulun johtajan antamia määräyksiä. Ongelmista huolimatta hän onnistui ylenemään teknillisessä koulussa ja vuonna 1826 hän julkaisi ensimmäinen pidemmän työnsä, *Einige geometrische Betrachtungen*. Siinä käsitellään muun muassa pisteen potenssia ympyrän suhteen ja inversioita. Hän julkaisi lisää ja hänelle myönnettiin kunniaohtorinarvo Königsbergin yliopistossa vuonna 1833.

Steiner ei mennyt ikinä naimisiin ja hän jätti perintönsä omaistensa lisäksi Berliinin akatemialle Steinerin palkinnoksi ja omalle kylälleen, jotta köyhät lapset saisivat paremman mahdollisuuden koulutustautua.

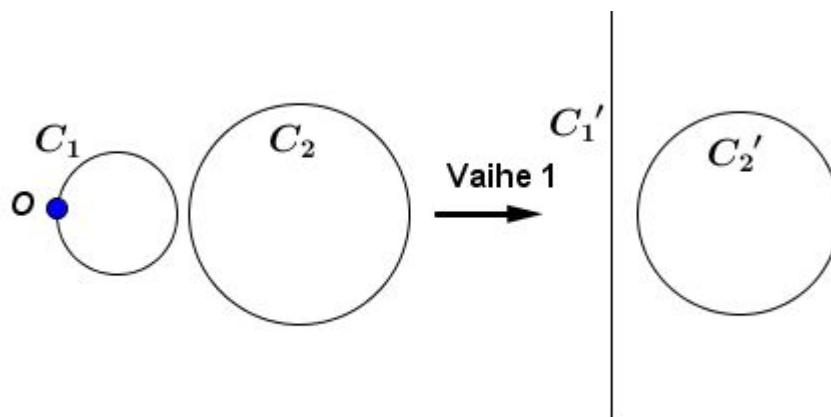
Steinerin mukaan on nimetty lause nimeltään Steinerin porismi. Porismi tarkoittaa matemaattista geometristä konstruktiota, jolla on yllätyksellinen ratkaisu: joko sitä ei voida tehdä tai sillä on äärettömästi ratkaisuja [11].

Ennen Steinerin porismia käydään läpi lause, jota tarvitaan porismin todistamiseen [2, s. 326].

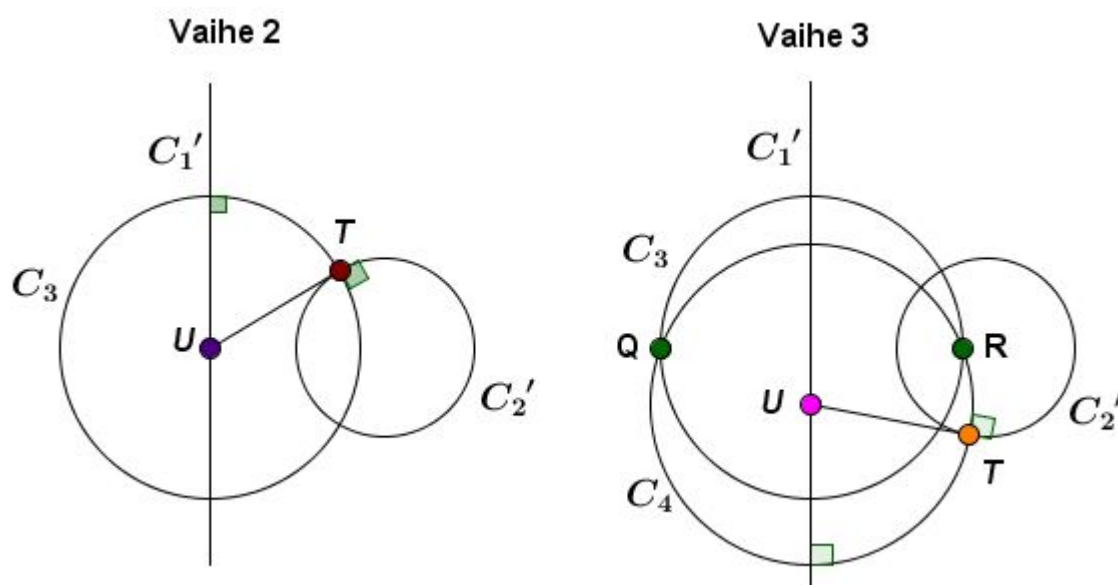
**Lause 25.** *Olkoot ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  erillisiä ympyröitä tasossa. Tällöin löytyy inversioiden yhdistetty kuvaus, joka kuvaa ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  samankeskisiksi ympyröiksi.*

*Todistus.* Oletetaan, että ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  eivät ole samankeskisiä (jos ne olisivat niin ei olisi todistettavaa). Käydään todistus läpi vaiheissa:

- Vaihe 1)* Olkoon piste  $O$  jokin piste ympyrältä  $C_1$ . Kuvataan molemmat ympyrät inversiolla yksikköympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $O$ . Tällöin piste  $O$  kuvautuu äärettömään ja ympyrästä  $C_1$  tulee suora  $C'_1$ . Ympyrä  $C_2$  kuvautuu ympyräksi  $C'_2$  (kuva 19).
- Vaihe 2)* Olkoon piste  $T$  ympyrältä  $C'_2$  niin, että se ei ole suoralla, joka on kohtisuorassa suoraa  $C'_1$  vasten kulkien ympyrän  $C'_2$  keskipisteen kautta. Piirretään tangentti ympyrälle  $C'_2$  pisteen  $T$  kautta, jolloin se leikkaa suoraa  $C'_1$  pisteessä  $U$ . Piirretään apuympyrä  $C_3$ , jonka keskipiste on  $U$  ja säde  $UT$ . Tämä ympyrä  $C_3$  on ortogonaalinen ympyrälle  $C'_2$  pisteessä  $T$ , koska jana  $UT$  on tangentti ympyrälle  $C'_2$  ja se kulkee ympyrän  $C_3$  keskipisteen kautta [7, s. 138]. Ympyrä  $C_3$  on myös kohtisuorassa janaa  $C'_1$  vasten, sillä ympyrän keskipiste sijaitsee suoralla  $C'_1$ .
- Vaihe 3)* Tehdään sama kuten vaiheessa 2), mutta nyt eri pisteelle  $T$ . Syntyy toinen ympyrä  $C_4$ , joka on ortogonaalinen ympyrän  $C'_2$  kanssa ja kohtisuorassa janaa  $C'_1$  vasten. Olkoot ympyröiden  $C_3$  ja  $C_4$  leikkauspisteet  $Q$  ja  $R$  (kuva 20).

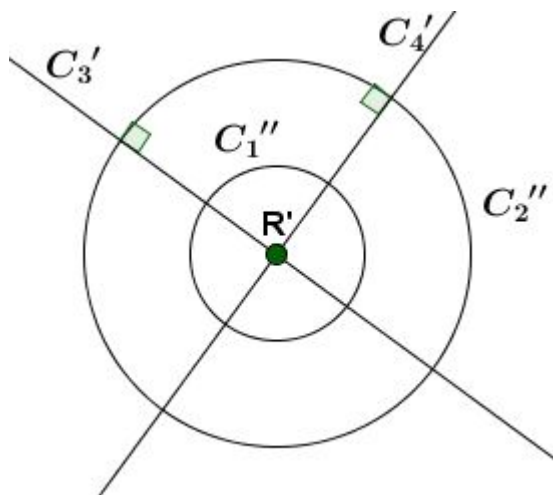


KUVA 19. Lauseen 25 todistuksen vaihe 1, jossa on ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  kuvautuminen suoraksi  $C_1'$  ja ympyräksi  $C_2'$



KUVA 20. Lauseen 25 todistuksen vaiheet 2 ja 3, jossa ympyrät  $C_3$  ja  $C_4$  ovat ortogonaalisia ympyrälle  $C_2'$  ja kohtisuoria suoralle  $C_1'$

*Vaihe 4)* Tehdään nyt inversio yksikköympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $Q$ . Tällöin suora  $C_1$  kuvautuu ympyräksi  $C_1''$ , ympyrästä  $C_2'$  tulee ympyrä  $C_2''$ . Ympyröistä  $C_3$  ja  $C_4$  tulee suoria  $C_3'$  ja  $C_4'$ , sillä ne kumpikin kulkevat pisteen  $Q$  kautta. Koska ympyrät  $C_3$  ja  $C_4$  olivat kohtisuorassa toisiaan vasten, niin tällöin myös suorat  $C_3'$  ja  $C_4'$  ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Koska molemmat ympyrät  $C_3$  ja  $C_4$  olivat kohtisuorassa ympyrää  $C_2'$  ja suoraa  $C_1'$  vasten, niin myös suorat  $C_3'$  ja  $C_4'$  ovat kohtisuorassa ympyröitä  $C_1''$  ja  $C_2''$  vasten. Tällöin suorat  $C_3'$  ja  $C_4'$  ovat ympyröiden halkaisijoita ja ne kohtaavat suorassa kulmassa pisteessä  $R'$ , joka on pisteen  $R$  inversio. Tällöin ympyröiden  $C_1''$  ja  $C_2''$  täytyy olla samankeskisiä, keskipisteenään  $R'$  (kuva 21).



KUVA 21. Lauseen 25 todistuksen vaihe 4, jossa ympyrät  $C_1''$  ja ympyrä  $C_2''$  ovat samankeskisiä, koska halkaisijat  $C_3'$  ja  $C_4'$  ovat kohtisuorassa niitä vastaan ja leikkaavat siten pisteessä  $R'$

Lopputuloksena huomataan, että ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  on saatu kahden eri inversion yhdisteenä samankeskisiksi ympyröiksi.  $\square$

Steinerin porismi voidaan esittää seuraavalla tavalla [2, s. 328]:

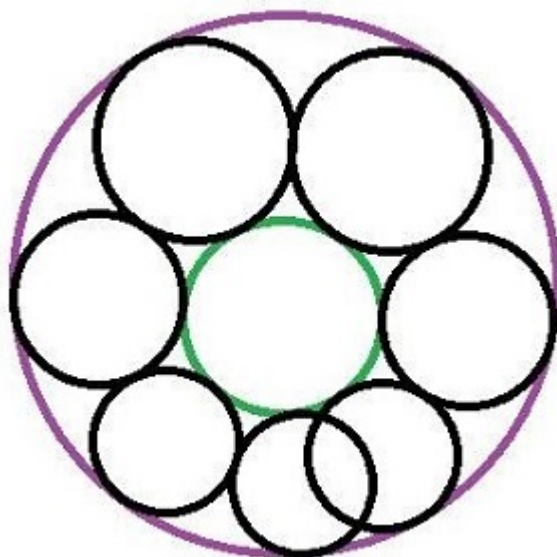
**Lause 26 (Steinerin porismi).** *Olkoont ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  erillisiä ympyröitä niin, että ympyrä  $C_1$  on ympyrän  $C_2$  sisällä. Tällöin pätee joko a) tai b):*

- Ei ole mahdollista saada ympyröiden ketjua ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  väliin niin, että ympyrät sivuaisivat vain ympyröitä  $C_1$  ja  $C_2$  sekä kahta muuta ympyrää.*
- On mahdollista konstruoida ympyröiden ketju ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  väliin ja tällöin ensimmäinen ympyrä voidaan sijoittaa mihin kohtaan tahansa.*

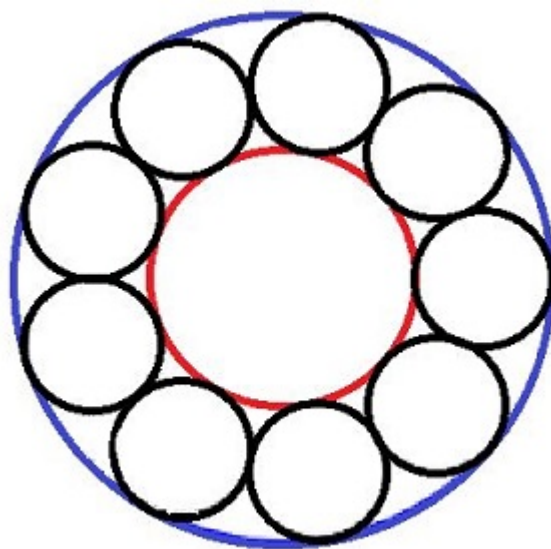
*Kuvissa 22 ja 23 on esitetty nämä kaksi vaihtoehtoa.*

*Todistus.* Olkoon  $C_1$  ja  $C_2$  erillisiä ympyröitä niin, että ympyrä  $C_1$  on ympyrän  $C_2$  sisällä. Olkoon näiden väliin piirrettävien ympyröiden ketju  $F_k$ . Piirretään ensin ympyrä  $F_1$  ympyröiden väliin siten, että se sivuaa ympyröitä  $C_1$  ja  $C_2$ . Piirretään tämän jälkeen ympyrä  $F_2$  niin, että se sivuaa ympyröitä  $C_1$  ja  $C_2$  sekä ensimmäistä ympyrää  $F_1$ . Jatketaan ympyröiden piirtämistä ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  väliin, kunnes tulee viimeisen ympyrän vuoro. Tällöin vaihtoehtoja on kaksi, joko viimeinen ympyrä  $F_n$  leikkaa ympyrää  $F_1$  eli kyseessä on lauseen a) kohta tai se sivuaa ympyrää  $F_1$ , jolloin kyseessä on lauseen b) kohta.

Koska ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  eivät välttämättä ole samankeskiset, niin lauseen 25 mukaan voidaan ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  kuvata samankeskisiksi ympyröiksi  $C_1'$  ja  $C_2'$  inversioiden yhdistetyllä kuvauksella  $t$ . Tällöin ympyröiden ketju  $F_k$  kuvautuu ympyröiden ketjuksi  $F_k'$  ympyröiden  $C_1'$  ja  $C_2'$  väliin ja ympyrä  $F_1$  kuvautuu ympyräksi  $F_1'$ . Ympyröiden ketjua  $F_k'$  voidaan liikuttaa ympyröiden  $C_1'$  ja  $C_2'$  välissä (kuten vanhoissa puhelimissa pyöritettiin kiekkoa numeroiden valitsemiseksi). Tällöin ensimmäinen ympyrä  $F_1$  vaihtaa paikkaa. Kun inversioiden yhdistetyn kuvauksen  $t$  käänteiskuvauksella  $t^{-1}$



KUVA 22. Steinerin avoin ympyröiden ketju, jossa ensimmäinen ja viimeinen ympyrä leikkaavat toisiaan.



KUVA 23. Steinerin suljettu ympyröiden ketju, jossa kahden ympyrän väliin voidaan konstruoida ympyröitä, jotka sivuavat toisiaan

kuvataan ympyrät takaisin, saadaan samannäköinen tilanne kuten alussa. Vain ympyräketjun  $F_k$  ympyröiden paikat ovat muuttuneet ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  välissä. Tällöin siis jos kyse on a) kohdasta, missä ensimmäinen ja viimeinen ympyrä leikkasivat toisiaan, niin ympyrät leikkaavat silti edelleen toisiaan, vaikka niiden paikat olisivatkin muuttuneet. Vastaavasti b) kohdassa ensimmäisen ympyrän paikka voi muuttua, mutta muuten ympyräketju  $F_k$  säilyy muuttumattomana.  $\square$

Seuraavaksi nähdään milloin ketjusta tulee suljettu ja milloin avoin. Määritellään ensin mikä on samalla suoralla olevien pisteiden kaksoissuhde [13, s. 212].

**Määritelmä 27.** Olkoon  $A, B, C$  ja  $D$  samalla suoralla olevia pisteitä. Tällöin janojen määrittämä kaksoissuhde on luku ja se määritellään yhtälöllä

$$\{AB, CD\} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} : \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}.$$

Tämän avulla saadaan lause [13, s. 86], jota tarvitaan ennen kuin tulos voidaan käsitellä.

**Lause 28.** *Olkoot  $A, B, C$  ja  $D$  samalla suoralla olevia pisteitä. Tällöin jos tehdään inversio jonkun pisteen kautta, joka on samalla suoralla, niin tällöin  $\{AB, CD\} = \{A'B', C'D'\}$ , missä  $A', B', C'$  ja  $D'$  ovat inversion kuvapisteitä.*

*Todistus.* Määritelmän 27 mukaan

$$\{AB, CD\} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}}.$$

Koska  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$  ja  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ , niin tällöin saadaan, että

$$\{AB, CD\} = \frac{(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})}{(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})}. \quad (10)$$

Inversion yhtälön (1) mukaan

$$\overrightarrow{OA} = \frac{r^2}{\overrightarrow{OA'}}, \overrightarrow{OB} = \frac{r^2}{\overrightarrow{OB'}}, \overrightarrow{OC} = \frac{r^2}{\overrightarrow{OC'}} \text{ ja } \overrightarrow{OD} = \frac{r^2}{\overrightarrow{OD'}}. \quad (11)$$

Siten yhdistämällä yhtälöt (10) ja (11) saadaan

$$\begin{aligned} \{AB, CD\} &= \frac{(\frac{r^2}{\overrightarrow{OC'}} - \frac{r^2}{\overrightarrow{OA'}})(\frac{r^2}{\overrightarrow{OD'}} - \frac{r^2}{\overrightarrow{OB'}})}{(\frac{r^2}{\overrightarrow{OD'}} - \frac{r^2}{\overrightarrow{OA'}})(\frac{r^2}{\overrightarrow{OC'}} - \frac{r^2}{\overrightarrow{OB'}})} = \frac{(\frac{1}{\overrightarrow{OC'}} - \frac{1}{\overrightarrow{OA'}})(\frac{1}{\overrightarrow{OD'}} - \frac{1}{\overrightarrow{OB'}})}{(\frac{1}{\overrightarrow{OD'}} - \frac{1}{\overrightarrow{OA'}})(\frac{1}{\overrightarrow{OC'}} - \frac{1}{\overrightarrow{OB'}})} \\ &= \left( \frac{\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OC'}\overrightarrow{OA'}} \right) \left( \frac{\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OD'}}{\overrightarrow{OD'}\overrightarrow{OB'}} \right) \cdot \left( \frac{\overrightarrow{OD'}\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OD'}} \right) \left( \frac{\overrightarrow{OC'}\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'}} \right) \\ &= \frac{(\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA'})(\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OB'})}{(\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OA'})(\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OB'})}. \end{aligned}$$

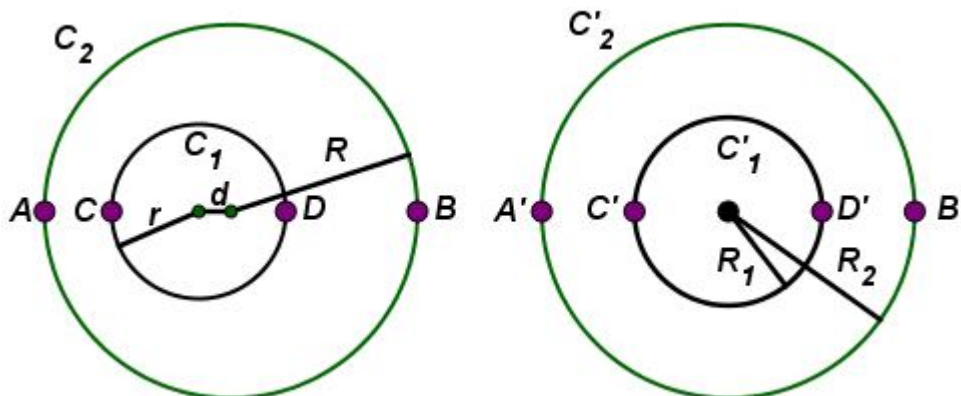
Joten lopputuloksena saadaan, että  $\{AB, CD\} = \{A'B', C'D'\}$ .  $\square$

Tämän lauseen avulla saadaan tulos [13, s. 99], jonka mukaan nähdään miten ympyröiden säteet ja niiden keskipisteet tulee valita, jotta ketjusta tulee suljettu.

Olkoot Steinerin porismin todistuksessa mainittujen alkuperäisten ympyröiden säteet  $R$  ja  $r$  niin, että  $R$  vastaa isomman ympyrän  $C_2$  sädettä ja  $r$  pienemmän  $C_1$ . Olkoon lisäksi  $d$  ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys. Olkoot  $A, B, C$  ja  $D$  samalla ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla olevia pisteitä niin, että pisteet  $A$  ja  $B$  kuuluvat isommalle ympyrälle ja pisteet  $C$  ja  $D$  pienemmälle ympyrälle (kuva 24). Olkoot pisteet  $A', B', C'$  ja  $D'$  vastaavat pisteet inversion jälkeen



ympyröillä  $C_1$  ja  $C_2$ . Tällöin myös nämä kuvapisteeet ovat samalla suoralla ja ne kulkevat ympyröiden  $C'_1$  ja  $C'_2$  keskipisteen kautta. Olkoon inversion jälkeen ympyröiden säteet  $R_1$  (ympyrälle  $C'_1$ ) ja  $R_2$  (ympyrälle  $C'_2$ ).



KUVA 24. Steinerin porismin ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  sekä inversion jälkeen samankeskisinä  $C'_1$  ja  $C'_2$

Tällöin lauseen 28 nojalla  $\{AB, CD\} = \{A'B', C'D'\}$ , joten

$$\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'}}{\overrightarrow{A'D'} \cdot \overrightarrow{B'C'}}. \quad (12)$$

Nyt kuvasta 24 voidaan nähdä, mitä yhtälön (12) vasen puoli on kirjainten  $R$ ,  $r$  ja  $d$  avulla ilmaistuna:

$$\frac{(R - r - d)(R - (r - d))}{(R + r - d)(R + r + d)} = \frac{(R - r)^2 - d^2}{(R + r)^2 - d^2}.$$

Vastaavasti yhtälön (12) oikeasta puolesta saadaan kirjainten  $R_1$  ja  $R_2$  avulla

$$\frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Näissä molemmissa on hyödynnetty yhtälöä  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ . Näin ollen, koska vasen puoli on yhtä suuri kuin oikea puoli niin saadaan

$$\frac{(R - r)^2 - d^2}{(R + r)^2 - d^2} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Yhtälössä olevat termit ovat  $(R + r)^2 - d^2 = (R - r)^2 - d^2 + 4Rr$  ja  $(R_1 + R_2)^2 = (R_1 - R_2)^2 + 4R_1R_2$ . Tällöin yhtälö saadaan muotoon

$$\frac{(R - r)^2 - d^2}{(R - r)^2 - d^2 + 4Rr} = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 - R_2)^2 + 4R_1R_2}.$$

Kerrotaan ristiin ja jaetaan termeillä  $(R - r)^2 - d^2$  sekä  $(R_1 - R_2)^2$  ja saadaan

$$1 + \frac{4R_1R_2}{(R_1 - R_2)^2} = 1 + \frac{4Rr}{(R - r)^2 - d^2}.$$

Muutetaan yhtälö vielä muotoon, jossa termi  $(R - r)^2 - d^2$  on vasemmalla ja muut on oikealla puolella niin saadaan, että

$$(R - r)^2 - d^2 = \frac{Rr(R_1 - R_2)^2}{R_1R_2}.$$

Avaamalla sulkeet ja muokkaamalla saadaan yhtälö lopulta muotoon

$$(R - r)^2 - d^2 = Rr \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} - 2 \right). \quad (13)$$

Jos ympyräketjussa on  $n$  kappaletta ympyröitä, niin tällöin yhden ympyrän halkaisija on  $R_2 - R_1$ , jolloin yhden ympyrän säde on puolet tästä. Lisäksi pituus samankeskisten ympyröiden  $C'_1$  ja  $C'_2$  keskipisteestä ympyräketjun ympyrän keskipisteeseen on  $R_1 + \frac{1}{2}(R_2 - R_1) = \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_2$ . Koska ympyröitä on  $n$  määrä, niin kulma, joka muodostuu kahden ketjun ympyrän keskipisteiden välille on  $\frac{2\pi}{n}$  ja puolet siitä on  $\frac{\pi}{n}$ . Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\frac{1}{2}(R_2 - R_1)}{\frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_2} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}.$$

Yhtälöä voidaan muokata tekemällä aluksi osoittajaan nollan lisäys:  $+R_1 - R_1$ . Tällöin saadaan

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{R_2 - R_1 + R_1 - R_1}{R_2 + R_1} = 1 + \frac{-R_1 - R_1}{R_2 + R_1}.$$

Siirretään luku yksi toiselle puolelle ja tehdään molemmista puolista käänteislukuja

$$\frac{1}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\frac{2R_1}{R_2 + R_1}} = \frac{R_2 + R_1}{2R_1}.$$

Kerrotaan luvulla kaksi ja muokataan oikealle puolelle luku yksi näkyviin ja siirretään se vasemmalle puolelle:

$$\frac{2}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} - 1 = \frac{R_2}{R_1}.$$

Lavennetaan samannimisiksi ja saadaan yhtälö

$$\frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Yhdistetään tämä yhtälöön (13), jolloin saadaan

$$(R - r)^2 - d^2 = Rr \left( \frac{1 - \sin \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}} + \frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} - 2 \right).$$

Muokataan yhtälön oikeata puolta laventamalla termit samannimisiksi

$$Rr \left( \frac{(1 - \sin \frac{\pi}{n})^2 + (1 + \sin \frac{\pi}{n})^2 - 2(1 - \sin \frac{\pi}{n})(1 + \sin \frac{\pi}{n})}{(1 - \sin \frac{\pi}{n})(1 + \sin \frac{\pi}{n})} \right).$$

Käytetään taas yhtälöä  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  sekä binomin neliötä ja saadaan

$$Rr \left( \frac{2 + \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} - 2 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{n}}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}} \right) = 4Rr \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}} = 4Rr \tan^2 \frac{\pi}{n}.$$

Edellä käytettiin tietoa, että  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$  ja  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  [16]. Loppujen lopuksi saadaan siis yhtälö

$$(R - r)^2 - d^2 = 4Rr \tan^2 \frac{\pi}{n}. \quad (14)$$

Yhtälöä voidaan käyttää esimerkiksi niin, että selvitetään kuinka monta ympyrää mahtuu kun tiedetään  $R$ ,  $r$ , ja  $d$ , tai mikä täytyy olla toisen ympyrän koko, jos tiedetään  $r$  tai  $R$ ,  $d$  ja  $n$ . Yhtälöstä pitää kuitenkin huomata ja ottaa huomioon, että tangentti saa arvoja vain jos kulma ei ole  $\pi/2$  monikerta, eli  $\pi/n \neq \pi/2 + t\pi$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Tämä tarkoittaa sitä, että  $n$  ei voi olla 1 eikä 2, mikä on selvää geometrisestikin.

**Esimerkki 29.** Olkoon Steinerin porismin ympyröiden säteet  $R = 5$  ja  $r = 2$ . Olkoon näiden ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys  $d = \frac{1}{2}$ . Selvitetään kuinka monta ympyrää mahtuu näiden kahden ympyrän väliin, ja sulkeutuuko ympyröiden ketju. Yhtälön (14) mukaan

$$(5 - 2)^2 - \frac{1^2}{2} = 40 \tan^2 \frac{\pi}{n} \iff \frac{7}{32} = \tan^2 \frac{\pi}{n} \iff n = 7, 18109.$$

Koska luku ei mennyt tasan, niin ympyröiden ketjusta ei tule suljettu. Tarkalleen sanottuna vielä kahdeksas ympyrä on se, joka leikkaa ensimmäistä ympyrää.

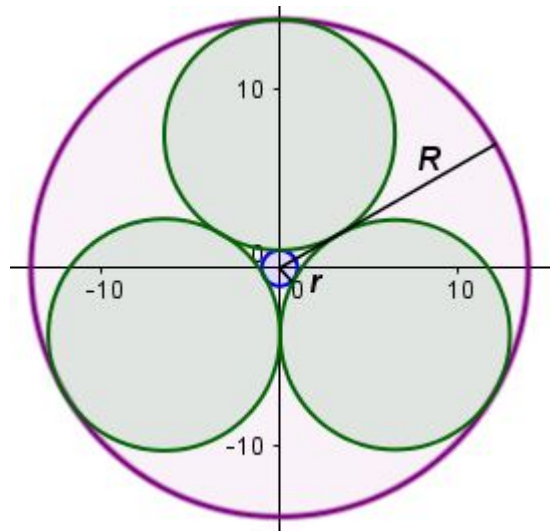
**Esimerkki 30.** Olkoon Steinerin porismin ympyräketjussa  $d = 0$  ja  $r = 1$ . Tällöin saadaan yhtälö (14) muotoon

$$(R - 1)^2 = 4R \tan^2 \frac{\pi}{n}.$$

Voidaan tutkia minkälaisia arvoja säde  $R$  saa eri määrillä ympyröitä.

- (1)  $n = 3 \implies (R - 1)^2 = 4R \tan^2 \frac{\pi}{3} \iff R^2 - 2R + 1 = 12R \iff R = 13, 9282$   
(tai  $R = 0, 0718$ )
- (2)  $n = 4 \implies (R - 1)^2 = 4R \tan^2 \frac{\pi}{4} \iff R^2 - 2R + 1 = 4R \iff R = 5, 8284$   
(tai  $R = 0, 1715$ ).

Kuvassa 25 on tilanne, jossa  $n = 3$  ja  $R = 13, 9282$ .



KUVA 25. Steinerin porismi kolmelle samankeskeiselle ympyrälle, jolle  $R = 13,9282$  ja  $r = 1$

## 6. ERILAISIA KOLMIOITA

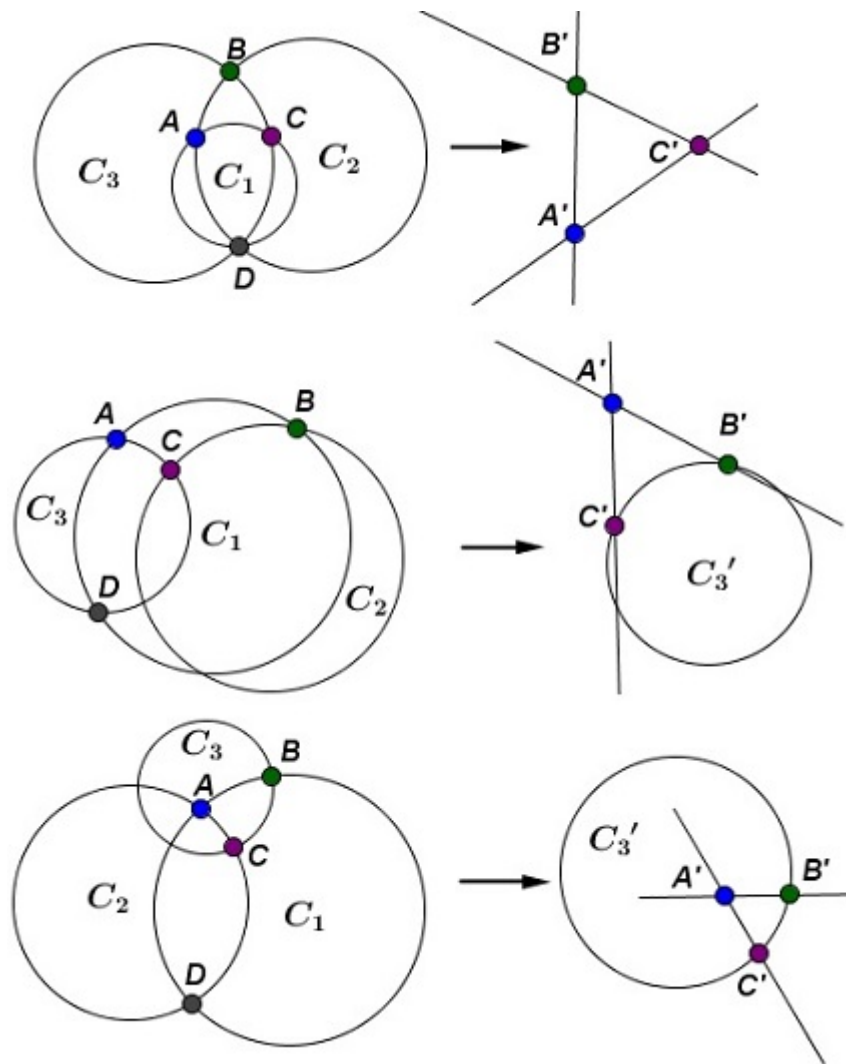
Inversion avulla voidaan myös tutkia kolmion kulmien summaa. Jos kyseessä on tasossa oleva suorista viivoista muodostettu kolmio, on kolmion kulmien summa  $180^\circ$ . Kolmioita voi kuitenkin olla erilaisia riippuen käytetystä geometriasta. Esimerkiksi jos pallon pinnalle piirretään kolmio, ei kulmien summa välttämättä ole  $180^\circ$ . Jos kolmion sivut ovat isoympyröiden osia, on tällöin kulmien summa aina  $> 180^\circ$ . Tällöin kyse on käyräviivaisesta kolmiosta. Tutkitaan asiaa kuitenkin ensin tasossa ympyröiden avulla [3]:

**Lause 31.** *Olkoon ympyrät  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $C_3$  siten, että ne leikkaavat pareittain toisiaan kahdessa pisteessä. Tällöin ympyrät rajaavat käyräviivaisen kolmion, jolle pätee yksi kolmesta seuraavasta vaihtoehdosta:*

- 1) *Jos jokainen kahden ympyrän leikkaus sisältää pisteen kolmannelta ympyrältä, niin kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ .*
- 2) *Jos jokaisen kahden ympyrän leikkaus on kokonaan kolmannen ympyrän ulkopuolella tai sisäpuolella, niin kolmion kulmien summa on alle  $180^\circ$ .*
- 3) *Jos jokaisen kahden ympyrän leikkaus sisältää toisen pisteen kolmannen ympyrän sisäpuolelta ja toisen pisteen kolmannen ympyrän ulkopuolelta, niin kolmion kulmien summa on yli  $180^\circ$ .*

*Todistus.* Olkoon pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  käyräviivaisen kolmion kärkipisteet, joka muodostuu ympyröiden  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $C_3$  avulla. Olkoon lisäksi  $\{A, D\} = C_1 \cap C_2$ . Pisteiden valinnalla ei ole merkitystä kolmion kulmien summan kannalta, joten tarkastellaan nyt pisteen  $D$  sijoittumista lauseen eri vaihtoehdoissa:

- 1) Tällöin jos piste  $D$  kuuluu ympyrälle  $C_3$ , niin tehdään inversio ympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $D$  (säteellä ei ole merkitystä). Tällöin inversio kuvaa ympyrät  $C_1$ ,  $C_2$  ja  $C_3$  suoriksi ja leikkauspisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  kuvautuvat pisteiksi  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$ , missä kaikissa aina kaksi suoraa leikkaa toisiaan. Syntyy suoraviivainen kolmio, jonka kulmien summa on tunnetusti  $180^\circ$ . Lauseessa 16 todistettiin, että inversio



KUVA 26. Kolmelle ympyrälle kolme eri tapausta, jossa otetaan inversio ympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $D$

säilyttää kulmat, joten alkuperäisenkin ympyröiden muodostaman kolmion kulmien summa on tasan  $180^\circ$ .

- 2) Tällöin jos pisteet  $D$  ja  $A$  sijaitsevat esimerkiksi ympyrän  $C_3$  ulkopuolella, niin inversio ympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $D$ , muuttaa ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  suoriksi, mutta ympyrästä  $C_3$  tulee ympyrä  $C'_3$ . Pisteiden  $A$  kuvapiste  $A'$  sijaitsee tämän ympyrän ulkopuolella, koska ääretön on myös ympyrän ulkopuolella. Tällöin kolmio, kärkipisteinään  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$ , on lähes suoraviivainen kolmio lukuunottamatta käyrää  $B'C'$ , joka on ympyrän  $C'_3$  kaari. Koska suoraviivaisen kolmion, jonka kärkipisteet olisivat  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$ , kulmien summa olisi  $180^\circ$  ja koska ympyrän kaari  $B'C'$  pienentää kolmion kulmia pisteissä  $B'$  ja  $C'$  niin tästä seuraa, että käyräviivaisen kolmion kulmien summa on vähemmän kuin  $180^\circ$ . Inversio säilyttää kulmat, joten alkuperäisenkin kolmion kulmien summa on alle  $180^\circ$ .
- 3) Jos piste  $D$  sijaitsee ympyrän  $C_3$  sisäpuolella ja piste  $A$  ympyrän  $C_3$  sisäpuolella, niin inversio ympyrän suhteen, jonka keskipiste on  $D$ , muuttaa vastaavasti kuten

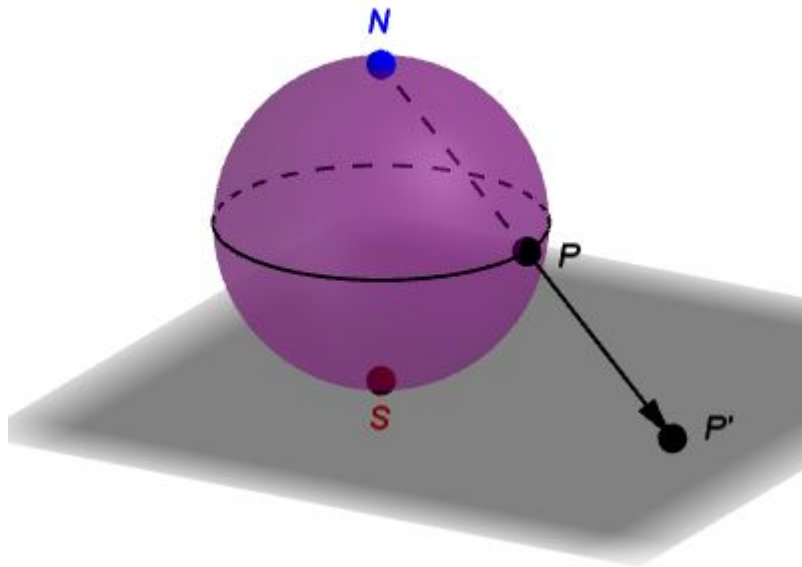
2) kohdassa, ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  suoriksi, mutta ympyrän  $C_3$  ympyräksi  $C'_3$ . Nyt kuitenkin, koska  $D$  kuvautuu äärettömään, joka on ympyrän ulkopuolella, niin pisteen  $A'$  on pakko olla ympyrän  $C'_3$  sisäpuolella. Kolmio, jonka kärkipisteet ovat  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$ , on nyt myös käyräviivainen kaaren  $B'C'$  takia, mutta nyt kulmat pisteissä  $B'$  ja  $C'$  ovat suuremmat kuin vastaavan euklidisen geometrian suoraviivaisen kolmion kulmat pisteissä  $B'$  ja  $C'$ . Siten käyräviivaisen kolmion kulmien summa on enemmän kuin  $180^\circ$  ja koska inversio säilyttää kulmat, niin alkuperäisenkin kolmion kulmien summa on yli  $180^\circ$ .

Kaikkien kohtien inversiot on esitetty kuvassa 26. □

Saatiin siten todistettua, että tietyllä sijoittamisella kolmen ympyrän avulla voidaan konstruoida kolmio, jonka kulmien summa on tasan  $180^\circ$ , alle  $180^\circ$  tai yli  $180^\circ$ . Ensimmäinen tapaus, jossa syntyy kolmio, jonka kulmien summa on tasan  $180^\circ$  on euklidisen geometrian kolmio. Toinen tapaus on taas esimerkki hyperbolisesta kolmiosta, jossa yksi sivu on hyperbolisen geometrian suora. Suora voidaan mallintaa esimerkiksi Poincarén mallin avulla [6],[7]. Kolmas tapaus on mielenkiintoinen, koska se voidaan näyttää ns. stereografisen projektion avulla, joka esitetään seuraavassa kappaleessa.

## 7. STEREOGRAFINEN PROJEKTIO

Stereografisessa projektiossa jokainen pallokuoren piste paitsi yksi piste (yleensä pohjoisnapa) kuvataan tästä pisteestä lähtevällä suoralla tasolle, joka on joko pallopintaa sivuava taso (yleensä sivuaa etelänavan kohdalta) tai sitten tämän tason kanssa samansuuntainen taso. Kuvassa 27 on esimerkki tilanteesta, jossa taso sivuaa etelänapaa  $E$  ja pohjoisnavalta  $N$  lähtee suora, joka kuvaa pallopinnan pisteen  $P$  pisteeksi  $P'$ .



KUVA 27. Stereografinen projektio

Stereografisen projektion tunsivat luultavasti jo muinaiset egyptiläiset, mutta vanhin säilynyt lähde on kreikkalais-egyptiläisen matemaatikon Ptolemaioksen *Planisphaerium* noin vuodelta 100. Vuodesta 1613 lähtien sitä on kutsuttu stereografiseksi projektioksi, jolle nimen antoi belgialainen matemaatikko François d'Aguilon. Stereografista projektiota käytettiin muun muassa maapallon karttojen tekemisessä [17]. Mielenkiintoista stereografisessa projektiossa on se, että se on erikoistapaus inversiosta. Tämä asia käydään läpi kappaleessa 7.3 kun ollaan ensin määriteltä stereografisen projektion lausekkeet sekä ominaisuudet.

**7.1. Stereografisen projektion ja sen käänteiskuvauksen lausekkeet.** Seuraava lause antaa suoraan yhtälön stereografiselle projektiolle. Lause on Geometrian jatkokurssin luentomonisteesta [12] ja sen todistuksen olen muokannut yleiseen muotoon apuna käyttäen Geometry-kirjan [2, s. 290] todistusta, jossa todistetaan tapaus kun  $t = 0$ .

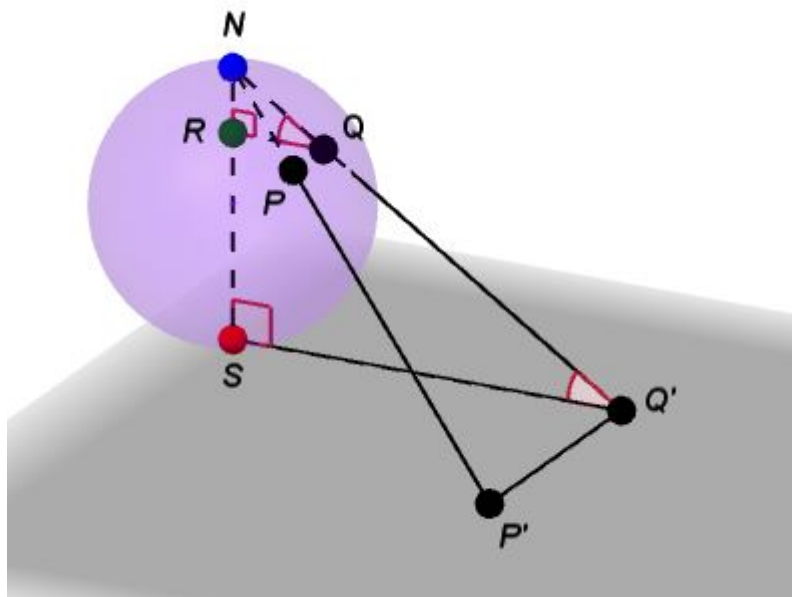
**Lause 32.** *Stereografinen projektio tasolle, joka on yhdensuuntainen tason  $(x, y)$  kanssa ja on korkeudella  $t$ , voidaan määrittää kuvauksena*

$$S_t(X, Y, Z) = (1 - t) \left( \frac{X}{1 - Z}, \frac{Y}{1 - Z} \right), t \neq 1.$$

*Jos  $t = 0$  niin pallo leikkaa keskipisteensä kohdalla projektiotasoa. Jos taas  $t = -1$ , niin pallon etelänapa sivuaa projektiotasoa.*

*Huomautus 33.* Isoilla kirjaimilla  $X, Y, Z$  tarkoitetaan tässä  $\mathbb{R}^3$  koordinaatteja eli yksikköpallolta otetun pisteen koordinaatteja. Pienillä kirjaimilla  $x, y$  esitetään projektiotason  $\mathbb{R}^2$  koordinaatteja.

*Todistus.* Olkoon piste  $N$  yksikköpallon  $\mathbb{S}$  pohjoisnapa eli  $N = (0, 0, 1)$ . Olkoon piste  $P$  mikä tahansa muu pallokuoren  $\mathbb{S}$  piste koordinaateilla  $(X, Y, Z)$  ja piste  $P'$  sen stereografinen projektio tasolle, joka on yhdensuuntainen  $(x, y)$ -tason kanssa. Tällöin pisteen  $P'$  koordinaatit ovat  $(x, y, t)$ , missä  $t$  kertoo tason korkeuden  $(x, y)$ -tasoon nähden ja merkitään pistettä  $(0, 0, t)$  kirjaimella  $S$  (Huom. Jos taso on  $(x, y)$ -taso niin piste  $S$  on origo). Kuvassa 28 on tapaus, jossa  $t = -1$  eli taso sivuaa pallon etelänapaa  $S$ .



KUVA 28. Stereografisen projektion todistus

Projisoidaan jana  $NPP'$  kohtisuorasti sekä  $(Y, Z)$ -tasolle että  $(X, Z)$ -tasolle. Koska tilanteet ovat samanlaisia käydään läpi projisointi  $(Y, Z)$ -tasolle. Tällöin piste  $P$  projisoiutuu pisteeksi  $Q$ , jonka koordinaatit ovat  $(0, Y, Z)$  ja vastaavasti  $P'$  projisoiutuu pisteeksi  $Q'$ , jonka koordinaatit ovat  $(0, y, t)$ . Piirretään  $Z$ -akselille normaali, joka menee pisteen  $Q$  kautta ja leikkaa  $Z$ -akselia pisteessä  $R = (0, 0, Z)$ .

Kolmiot  $\triangle NQR$  ja  $\triangle NQ'S$  yhdenmuotoisia, koska janat  $RQ$  ja  $SQ'$  ovat yhdensuuntaisia, niin kulmat  $\angle NQ'S$  ja  $\angle NQR$  ovat yhtä suuria ja lisäksi kulmat  $\angle QRN$  ja  $\angle QSN$  ovat suorina kulmina yhtä suuria sekä kulma  $\angle SNQ' = \angle RNQ$  on yhteinen. Yhdenmuotoisille kolmioille pätee, että vastinsivujen suhde on sama, eli nyt  $NR : NS = RQ : SQ'$ . Kun otetaan huomioon pisteiden koordinaatit niin saadaan

$$\frac{1 - Z}{1 - t} = \frac{Y}{y} \iff y = \frac{Y(1 - t)}{1 - Z}. \quad (15)$$

Vastaavasti saadaan projisoitaessa  $(x, z)$ -tasolle, että

$$x = \frac{X(1 - t)}{1 - Z}. \quad (16)$$

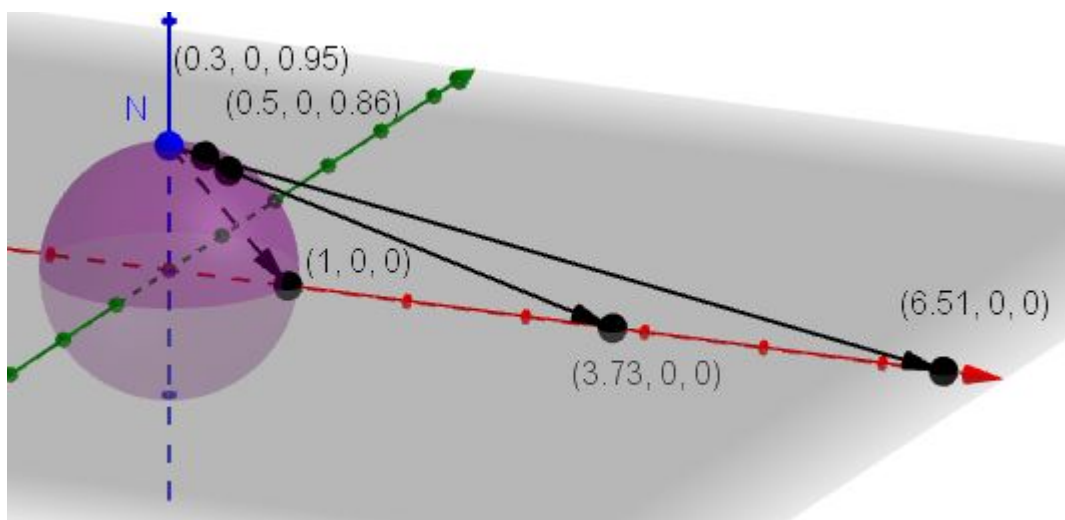


Näin ollen saadaan siis pisteelle  $P'$  koordinaatit

$$\left( \frac{X(1-t)}{1-Z}, \frac{Y(1-t)}{1-Z} \right) = (1-t) \left( \frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right),$$

mitkä ovat ne mitkä haluttiinkin.  $\square$

Vastaavasti kuten ympyrän inversiossakin voidaan äärettömyyspiste ottaa mukaan kuvaukseen. Olkoon  $t = 0$  eli taso on  $XY$ -taso. Jos pidetään koordinaatti  $Y$  nollana ja liikutetaan pistettä (jota stereografisella projektiolla kuvataan) kohti pohjoisnapaa, jolloin koordinaatti  $X$  lähestyy nollaa ja koordinaatti  $Z$  lähestyy lukua 1. Tällöin  $S_t(1; 0; 0) = (1; 0)$ ,  $S_t(0, 5; 0; \sqrt{0, 75}) = (3, 73; 0)$  ja  $S_t(0, 3; 0; \sqrt{0, 91}) = (6, 51; 0)$ . Kuvassa 29 on hahmoteltu pisteiden kuvautuminen.



KUVA 29. Stereografisessa projektiossa pohjoisnapaa lähestyvä piste kuvautuu kauemmaksi origosta

Yleisesti, jos pidetään koordinaatti  $Y$  nollana, niin koordinaatti  $\frac{X}{1-Z}$  on  $\frac{\sqrt{1-Z^2}}{1-Z}$ , sillä pisteelle  $(X; Y; Z)$  pätee pallon pinnalla, että  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ . Jos koordinaatti  $Z$  lähestyy lukua 1, niin tällöin

$$\lim_{Z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-Z^2}}{1-Z} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(1-Z)(1+Z)}}{1-Z} = \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+Z}}{\sqrt{1-Z}} = \frac{\sqrt{2}}{0} = \infty.$$

Vaikka koordinaatti  $Y$  rajoitettiin nollaksi, voitaisiin sama tehdä niin, että koordinaatti  $X$  olisi nolla, ja lopputulos olisi silti sama. Rajoitus ei siis muuta tilannetta, sillä voimme lähestyä pohjoisnapaa pallon pinnalla mistä tahansa suunnasta niin stereografisen projektio kuvaa pisteen äärettömyyteen. Voidaan määritellä stereografisen projektion kuvaus laajennetulle tasolle asettamalla, että

$$S_t(X, Y, Z) = \begin{cases} (1-t) \left( \frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z} \right) & \text{jos } (X, Y, Z) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{jos } (X, Y, Z) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Seuraava lause antaa yhtälön stereografisen projektion käänteiskuvaukselle, jonka olen itse laskenut käyttämällä apua Geometry-kirjan [2, s. 291] todistusta, jossa todistetaan tapaus  $t = 0$ .

**Lause 34.** *Stereografisen projektion käänteiskuvaus on*

$$S_t^{-1}(x, y) = \left( \frac{2x(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}, \frac{2y(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}, \frac{x^2 + y^2 - (1-t)^2}{x^2 + y^2 + (1-t)^2} \right), \quad (17)$$

missä tason piste  $(x, y)$  kuvataan yksikköpallon kuorelle pisteeksi  $(X, Y, Z)$ .

*Todistus.* Käänteiskuvaukseen käytetään apuna tietoa, että  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ . Yhdistettynä yhtälöt (15) ja (16) tähän tietoon saadaan

$$\left( \frac{x(1-Z)}{1-t} \right)^2 + \left( \frac{y(1-Z)}{1-t} \right)^2 + Z^2 = 1.$$

Pyritään saamaan yhtälön toiselle puolelle termi  $\frac{1-Z}{1-t}$ , jolloin voidaan käyttää yhtälöitä (15) ja (16), jotta saadaan selville mitä ovat koordinaatit  $X$  ja  $Y$  ovat. Siirretään  $Z^2$  yhtälön oikealle puolelle ja jaetaan yhtälön molemmat puolet termillä  $(1-Z)^2$  niin saadaan

$$\frac{x^2 + y^2}{(1-t)^2} = \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2}.$$

Koska  $1^2 - Z^2 = (1-Z)(1+Z)$  niin yhtälöstä saadaan

$$\frac{x^2 + y^2}{(1-t)^2} = \frac{1+Z}{1-Z}.$$

Lisätään molemmille puolille 1, jotta saadaan lauseke  $\frac{1+Z}{1-Z}$  helpompaan muotoon

$$\frac{x^2 + y^2}{(1-t)^2} + 1 = \frac{2}{1-Z}.$$

Muutetaan yhtälöä niin, että vasemmalle puolelle jää  $\frac{1-Z}{1-t}$

$$\frac{1-Z}{1-t} = \frac{2}{\frac{x^2 + y^2 + (1-t)^2}{1-t}}$$

ja lopulta yhtälöksi saadaan

$$\frac{1-Z}{1-t} = \frac{2(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}. \quad (18)$$

Nyt saadaan koordinaatille  $X$  arvo

$$X = x \left( \frac{1-Z}{1-t} \right) = \frac{2x(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}$$

ja vastaavasti  $Y$  koordinaatille arvo

$$Y = y \left( \frac{1-Z}{1-t} \right) = \frac{2y(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}.$$

Koordinaatin  $Z$  arvo saadaan yhtälöstä (18)

$$Z = 1 - \frac{2(1-t)^2}{x^2 + y^2 + (1-t)^2} = \frac{x^2 + y^2 - (1-t)^2}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}. \quad (19)$$

Stereografisen projektion käänteiskuvaukselle saadaan siten koordinaatit

$$S_t^{-1}(x, y, t) = \left( \frac{2x(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}, \frac{2y(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}, \frac{x^2 + y^2 - (1-t)^2}{x^2 + y^2 + (1-t)^2} \right). \quad \square$$

Vastaavasti myös käänteiskuvaukselle voidaan äärettömyyspiste ottaa huomioon. Olkoon taas  $t = 0$  ja pidetään toinen koordinaatti nollana, esimerkiksi  $y = 0$ , jolloin  $x$  lähestyy ääretöntä, niin tällöin yhtälön (19) avulla saadaan, että

$$Z = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 0^2 + 1^2}\right) = 1 - \frac{2}{\infty} = 1.$$

Vastaavasti ensimmäiselle koordinaatille saadaan arvoksi

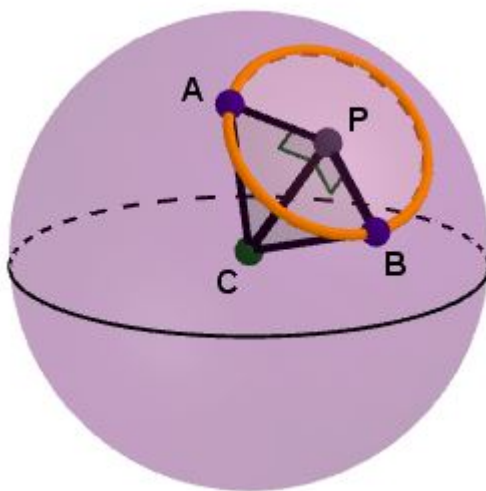
$$X = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 0^2 + 1^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} = 0.$$

Sama voidaan myös tehdä niin päin, että  $x$  on nolla ja  $y$  lähestyy ääretöntä, ja päädyttäisiin samaan tulokseen. Ääretöntä voidaan siten lähestyä mistä suunnasta tahansa, niin käänteiskuvauksella piste lähestyy pohjoisnapaa  $N(0, 0, 1)$ .

**7.2. Stereografisen projektion ominaisuuksia.** Seuraavaksi todistetaan, että stereografinen projektio kuvaa ympyrät joko laajennetuiksi suoriksi tai ympyröiksi. Todistus on muokattu yleiseen muotoon Geometry-kirjan [2, s. 292] todistuksesta. Sitä ennen aputuloksena todistetaan, että tason ja pallon leikkaus on aina ympyrä. Todistus on *Dimensions* nimisestä sarjasta, jaksosta yhdeksän [9].

**Lemma 35.** *Pallon pinnan ja jonkin tason leikkausjoukko on ympyrä, piste tai tyhjä joukko.*

*Todistus.* Olkoon  $C$  pallon keskipiste. Jos taso ei leikkaa palloa tai jos se sivuaa sitä, niin on selvää, että leikkausjoukko on tällöin tyhjä joukko tai yksi piste. Oletetaan siis, että taso leikkaa pallon pintaa. Piirretään jana keskipisteen  $C$  kautta niin, että se on kohtisuorassa tätä tasoa vasten. Merkitään pisteellä  $P$  janan ja tason leikkauspistettä. Todistetaan, että piste  $P$  on leikkauskuvion eli ympyrän keskipiste. Olkoot pisteet  $A$  ja  $B$  mitkä tahansa kaksi eri pistettä pallon ja tason leikkauksesta (kuva 30).



KUVA 30. Pallon ja tason leikkausjoukko on ympyrä

Tarkastellaan kolmioita  $\triangle CPA$  ja  $\triangle CPB$ : niillä on sama sivu  $CP$  ja molemmat kolmiot ovat suorakulmaisia. Lisäksi  $AC = CB$ , sillä molemmat janat ovat pallon

säteitä. Suorakulmaisille kolmioille pätee SSK-sääntö [7, s. 41], joten kolmiot  $\triangle CPA$  ja  $\triangle CPB$  ovat yhteneviä, erityisesti  $AP = PB$ . Tällöin mitkä tahansa kaksi pistettä leikkausjoukosta ovat yhtä kaukana pisteestä  $P$ , joten leikkausjoukko sisältyy ympyrään.

Todistetaan vielä, että kaikki kyseiseen ympyrään kuuluvat pisteet ovat varmasti leikkausjoukon pisteitä. Olkoon piste  $A$  leikkausjoukossa ja piste  $P$  ympyrän keskipiste. Olkoon piste  $B$  ympyrällä, ja osoitetaan, että se kuuluu myös leikkausjoukkoon. Nyt samoin kuin edellä, kolmoilla  $\triangle CPA$  ja  $\triangle CPB$  on sama sivu  $CP$ , ne ovat suorakulmaisista ja nyt tiedetään, että  $AP = PB$ , sillä molemmat pisteet  $A$  ja  $B$  ovat ympyrällä. SSK-säännön nojalla  $CA = CB$  ja siten piste  $B$  on leikkausjoukossa.  $\square$

**Lause 36.** *Stereografinen projektio kuvaa pohjoisnavan kautta kulkevat ympyrät laajennetuiksi suoriksi ja ne ympyrät, jotka eivät kulje pohjoisnavan kautta se kuvaa ympyröiksi.*

*Todistus.* Koska pallopinnan ja tason leikkaus on lemmän 35 nojalla ympyrä, niin pallon pinnalla olevalle ympyrälle pätee yleisen tason  $aX + bY + cZ + d = 0$  yhtälö. Määritelmän 17 avulla saatiin todistettua, että pisteille, jotka ovat pallon pinnalla pätee, että

$$(X, Y, Z) = \left( \frac{2x(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}, \frac{2y(1-t)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2}, \frac{x^2 + y^2 - (1-t)^2}{x^2 + y^2 + (1-t)^2} \right).$$

Oletetaan, että  $a, b$  ja  $c$  eivät kaikki ole nollija, jolloin yhdistämällä käänteiskuvauksen pisteet tason yhtälöön saadaan

$$\frac{2ax(1-t) + 2by(1-t) + c(x^2 + y^2 - (1-t)^2)}{x^2 + y^2 + (1-t)^2} + d = 0.$$

Kertomalla termillä  $x^2 + y^2 + (1-t)^2$  ja yhdistelemällä samanmuotoisia termejä saadaan

$$(c+d)x^2 + (c+d)y^2 + 2ax(1-t) + 2by(1-t) + (d-c)(1-t)^2 = 0. \quad (20)$$

Yhtälöstä (20) nähdään, että jos  $c+d \neq 0$ , niin tällöin kyseessä on ympyrän yhtälö. Tason pisteille  $(x, y)$  pätee ympyrän yhtälö, jolloin stereografinen projektio kuvaa ympyrät ympyröiksi. Kuvassa 31 on näytetty erään ympyrän kuvautuminen tasolle, jossa  $t = -1$ . Kuvassa piste  $B$  kuvautuu pisteeksi  $E$ , piste  $C$  pisteeksi  $F$  ja piste  $D$  pisteeksi  $G$ .

Mutta jos alkuperäinen taso  $aX + bY + cZ + d = 0$  kulkee pohjoisnavan  $N(0, 0, 1)$  kautta eli  $X = Y = 0$  ja  $Z = 1$ , niin tällöin tason yhtälö on muotoa

$$0a + 0b + 1c + d = 0 \implies c + d = 0 \iff c = -d,$$

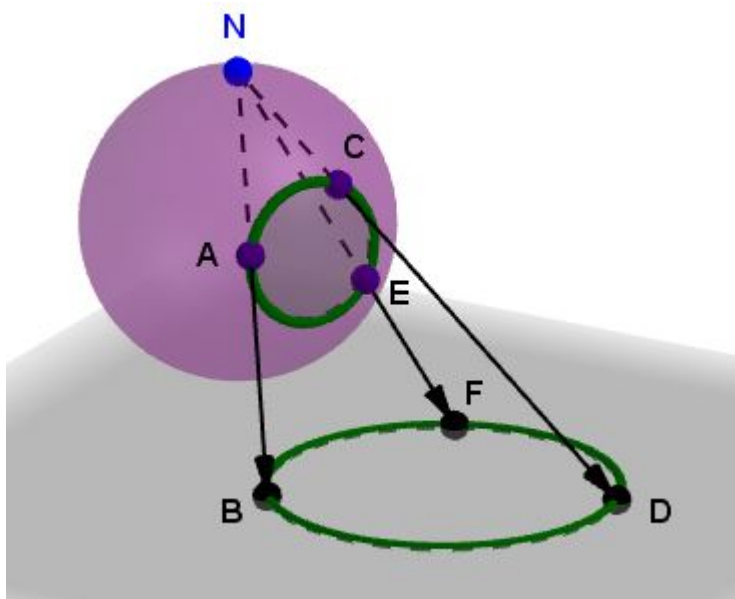
ja silloin yhtälö (20) saa muodon

$$2ax(1-t) + 2by(1-t) + 2d(1-t)^2 = 0,$$

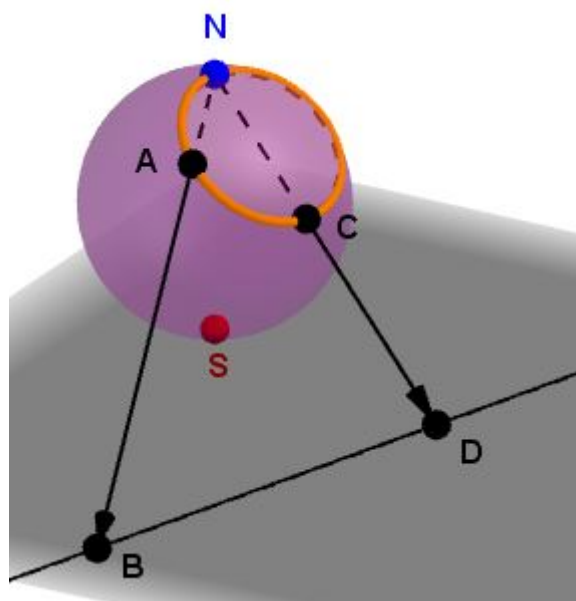
mikä on laajennetun suoran yhtälö.  $\square$

Kuvassa 32 on esitetty pohjoisnavan kautta kulkevan ympyrän kuvautuminen laajennetuksi suoraksi tasolle  $z = -1$ . Piste  $A$  kuvautuu pisteeksi  $B$  ja piste  $C$  pisteeksi  $D$ . Pohjoisnapa  $N$  kuvautuu äärettömään.

Vastaavasti kuten inversiollekin, sama toimii toisin päin. Tämäkin todistus on muutettu yleiseen muotoon Geometry-kirjan todistusta apuna käyttäen [2, s. 293].



KUVA 31. Stereografinen projektio kuvaa kaikki ympyrät, jotka eivät kulje pohjoisnavan kautta ympyröiksi



KUVA 32. Stereografinen projektio kuvaa pohjoisnavan kautta kulkevat ympyrät laajennetuiksi suoriksi

**Lause 37.** *Stereografisen projektion käänteiskuvaus kuvaa laajennetut suorat ympyröiksi, jotka kulkevat pohjoisnavan kautta.*

*Todistus.* Olkoon  $l$  suora, jonka yhtälö on  $\alpha x + \beta y = \gamma$ . Olkoot  $a, b, c, d$  siten, että  $\alpha = 2a(1-t)$ ,  $\beta = 2b(1-t)$ ,  $c = -d$  ja  $\gamma = -2d(1-t)^2$ . Tällöin suoran yhtälöksi saadaan

$$2ax(1-t) + 2by(1-t) + 2d(1-t)^2 = 0.$$

Koska  $c = -d$  eli  $c+d = 0$ , niin lauseen (36) todistuksesta nähdään, että yhtälö esittää laajennettua suoraa, joka on saatu ympyrän yhtälöstä, jossa  $x^2$ :n ja  $y^2$ :n kertoimina on  $c + d$ . Näin ollen jokaisen suoran yhtälö voidaan muuttaa muotoon, joka on saatu pohjoisnavan kautta kulkevasta ympyrän yhtälöstä.  $\square$

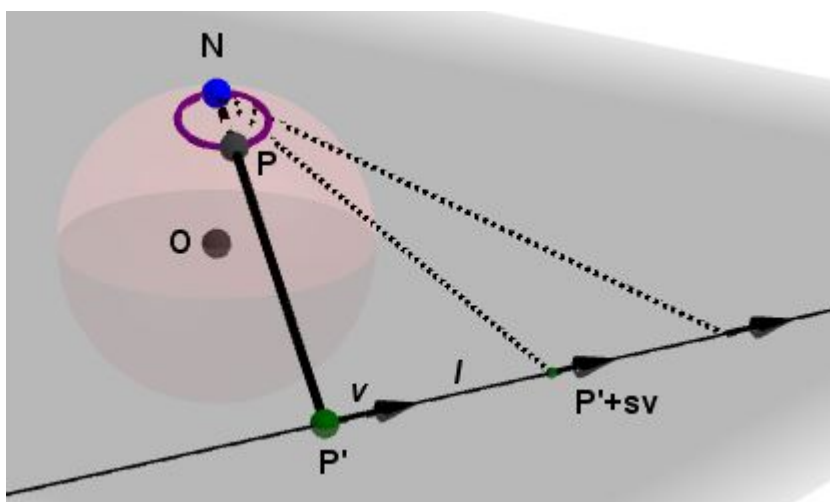
Seuraavaksi todistetaan, että stereografinen projektio ei muuta kulmien suuruuksia. Todistuksen runko on Geometry-kirjasta [2, s. 294]. Sen idea on samantyyppinen kuin lauseen 16 todistus jossa todistettiin, että inversio säilyttää kulmien suuruudet, mutta stereografiselle projektiolle todistus on hieman hankalampi.

**Lause 38.** *Stereografinen projektio säilyttää kulmien suuruudet.*

*Todistus.* Olkoon piste  $P$  yksikköpallon pinnalta ja olkoon piste  $P'$  sen stereografinen projektio jollekin tasolle. Olkoon suora  $l$  tasolta niin, että se kulkee pisteen  $P'$  kautta. Lauseen 37 mukaan suoraa  $l$  vastaa pallolla jokin ympyrä, joka kulkee pohjoisnavan  $N$  kautta.

Ennen varsinaista todistusta tehdään seuraava havainto:

Merkitään suoraa  $l = \{P' + sv : s \in \mathbb{R}\}$  ja  $v$  on yksikkövektori,  $\|v\| = 1$  (kuva 33). Tällöin suoran  $l$  ja pohjoisnavan  $N$  välinen suora on  $\{P' - N + sv : s \in \mathbb{R}\}$ .



KUVA 33. Suora  $NP$  on yhdensuuntainen suoran  $l$  kanssa kun piste  $P'$  lähestyy ääretöntä

Tutkitaan nyt suoran  $\{P' - N + sv : s \in \mathbb{R}\}$  ja  $v$  välistä kulmaa sisätulon avulla. Kahden vektorin, esimerkiksi  $a$  ja  $b$ , välinen kulma on [14]

$$\theta = \arccos \left( \frac{(a|b)}{\|a\| \|b\|} \right).$$

Muistetaan, että  $(v|v) = \|v\|^2$ , niin tällöin

$$\frac{(P' - N + sv|v)}{\|P' - N + sv\| \|v\|} = \frac{s\|v\|^2}{\|P' - N + sv\| \|v\|} + \frac{(P' - N|v)}{\|P' - N + sv\| \|v\|}. \quad (21)$$

Viedään lukua  $s$  lähemmäksi ääretöntä, jolloin piste  $P$  lähestyy pohjoisnapaa. Tällöin vektorista  $\{P' - N + sv\}$  tulee äärettömän pitkä. Sisätulo  $(P' - N|v)$  on vain

jokin reaaliluku, joten yhtälön (21) jälkimmäinen termi lähestyy lukua 0. Yhtälön ensimmäinen termi taas lähestyy lukua 1, sillä käänteisen kolmioepäyhtälön ja kolmioepäyhtälön avulla voidaan nimittäjästä erottaa termit  $\|P' - N\|$  ja  $\|sv\|$  seuraavasti:

$$\left| \|P' - N\| - |s| \|v\| \right| \leq \|P' - N - sv\| \leq \|P' - N\| + |s| \|v\|.$$

Tällöin yhdistämällä saadaan, että

$$\left| \frac{\|P' - N\| \pm |s| \|v\|}{|s| \|v\|} \right| = \left| \frac{1}{|s|} \frac{\|P' - N\|}{\|v\|} \pm 1 \right| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1.$$

Jäljelle jää ainoastaan luku 1, koska  $\|P' - N\|$  on reaaliluku ja  $\|v\| = 1$ . Koska saatiin, että

$$\left| \frac{\|P' - N\| \pm |s| \|v\|}{|s| \|v\|} \right| = 1,$$

niin tällöin myös luvun käänteisluku on 1, eli saadaan, että

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(P' - N + sv|v)}{\|v\| \|P' - N + sv\|} = 1 \leftrightarrow \theta = \arccos 1 \leftrightarrow \theta = 0^\circ.$$

Nyt siis saatiin, että suora  $\{P' - N + sv : s \in \mathbb{R}\}$  on yhdensuuntainen vektorin  $v$  kanssa, joka oli suoran  $l$  yksikkövektori. Tämä tarkoittaa, että kun reaaliluku  $s$  lähestyy ääretöntä, niin jana  $NP$  lähestyy suoraa, joka on yhdensuuntainen alkuperäisen suoran  $l$  kanssa.

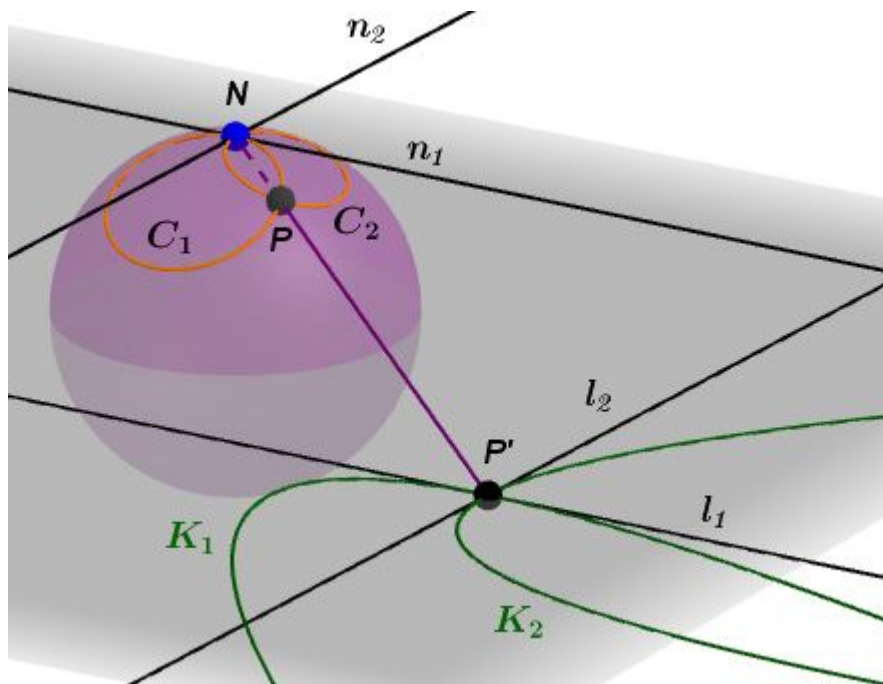
Havainnosta päästään lauseen todistukseen: Olkoot  $K_1$  ja  $K_2$  käyriä tasolla, jotka leikkaavat pisteessä  $P'$ , ja olkoot  $l_1$  ja  $l_2$  näiden käyrien sivuavia suoria pisteessä  $P'$ . Suoria  $l_1$  ja  $l_2$  vastaa pallolla ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$ , jotka kulkevat pohjoisnavan  $N$  kautta lauseen 37 nojalla (kuva 34).

Nämä ympyrät leikkaavat siten kahdessa eri pisteessä pallonpinnalla: pohjoisnavalla  $N$  sekä pisteessä  $P$ . Todistuksen alussa havaitun huomion nojalla tiedämme, että suoria  $l_1$  ja  $l_2$  vastaa pallon pohjoisnavan kautta kulkevat ja ympyröitä  $C_1$  ja  $C_2$  sivuavat suorat  $n_1$  ja  $n_2$ , joista  $n_1$  on yhdensuuntainen suoran  $l_1$  kanssa ja  $n_2$  suoran  $l_2$  kanssa. Tällöin siis suorien  $l_1$  ja  $l_2$  välinen kulma on yhtä suuri kuin suorien  $n_1$  ja  $n_2$  välinen kulma. Tämä voidaan osoittaa esimerkiksi vuorokulmalauseella käyttäen sitä kahdesti. Vielä pitää osoittaa, että suorien  $n_1$  ja  $n_2$  välinen kulma eli ympyröiden  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma pisteessä  $N$  on sama kuin ympyröiden välinen kulma pisteessä  $P$ .

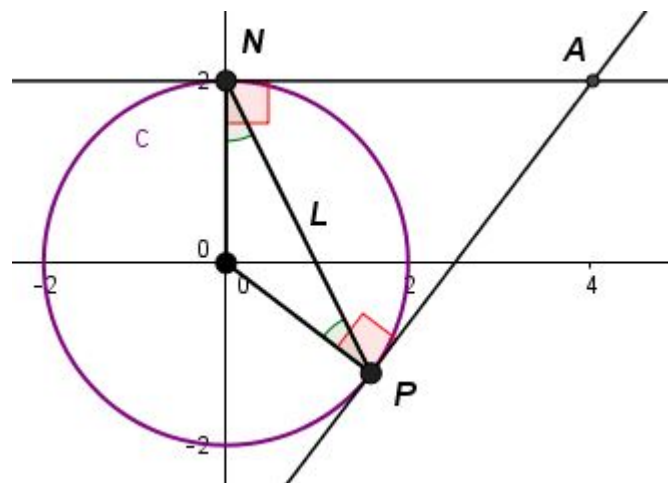
Lemman 35 nojalla molemmat ympyrät  $C_1$  ja  $C_2$  sisältyvät tasoihin  $T_1$  ja  $T_2$ . Olkoon  $L$  tasoja leikkaava suora, eli  $T_1 \cup T_2 = L$ . Tällöin pisteet  $P$  ja  $N$  kuuluvat tälle suoralle  $L$ .

Kuvan 35 avulla nähdään, että suora  $L$  leikkaa ympyrää  $C_1$  samassa kulmassa molemmissa pisteissä  $N$  sekä  $P$ , sillä kulmat  $\angle NPO$  ja  $\angle ONP$  ovat yhtä suuret, koska kolmio  $\triangle ONP$  on tasakylkinen kolmio, sillä janat  $OP$  ja  $ON$  ovat säteinä yhtä pitkiä. Koska kulmat  $\angle APO$  ja  $\angle ONA$  ovat suoraa kulmia, niin tällöin kulmat  $\angle APN$  ja  $\angle PNA$  ovat yhtä suuria. Vastaavasti sama pätee myös ympyrälle  $C_2$ .

Olkoon  $n$  pisteiden  $P$  ja  $N$  välisen janan keskinormaali, ja peilataan ympyrät tämän keskinormaalin suhteen. Tällöin ympyrät kuvautuvat itselleen ja tällöin molempien ympyröiden välinen kulma on molemmissa pisteissä sama.



KUVA 34. Stereografisessa projektiossa kahden käyrän välinen kulma tietyssä pisteessä on yhtä suuri kuin vastaavien ympyröiden välinen kulma pallopinnalla



KUVA 35. Ympyrän jänne leikkaa ympyrää samassa kulmassa molemmissa leikkauspisteissä

Näin ollen ollaan todistettu, että kahden käyrän välinen kulma tietyssä pisteessä on yhtä suuri kuin vastaavassa pisteessä pallopinnalla olevien ympyröiden välinen kulma. Stereografinen projektio siis säilyttää kulmat.  $\square$

**7.3. Stereografinen projektio kolmiulotteisena inversiona.** Aiemmin esitetty inversio liittyy vahvasti stereografiseen projektioon kun mietitään miten määritelmässä 5 esitetyn inversion lausekkeen voisikin esittää kolmiulotteisesti. Nyt "siirretään" inversiossa esitetty laajennettu taso pallon pinnalle ja kaikki laajennetut suorat ovat



pallon pinnan ympyröitä. Todistus on laajennettu Geometrian jatkokurssin luentomonisteesta [12].

**Lause 39.** *Kun tehdään inversio  $i_{(0,0,1),2}$  ja kuvataan yksikköpallon pintaa, niin syntyy stereografinen projektio.*

*Todistus.* Olkoon yksikköpallo  $\mathbb{R}^3$ :ssa. Määritelmässä 5 tehtiin inversio tasossa, mutta nyt määritellään inversio pallopinnassa  $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - c\|^2 = \alpha\}$ . Inversio on tällöin

$$i_{c,\alpha}(x) : \mathbb{R}^3 - \{c\} \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{c\}, i_{c,\alpha}(x) = \alpha \frac{x - c}{\|x - c\|^2} + c.$$

Tehdään inversio niin, että keskipiste  $c = (0, 0, 1)$  ja säteen neliö  $\alpha = 2$ . Tällöin inversion lausekkeeksi saadaan

$$i_{(0,0,1),2}(x) = 2 \frac{x - (0, 0, 1)}{\|x - (0, 0, 1)\|^2} + (0, 0, 1). \quad (22)$$

Merkitään nyt, että  $x = (x, y, z)$ , jolloin yhtälö (22) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} i_{(0,0,1),2}(x, y, z) &= 2 \frac{(x, y, z) - (0, 0, 1)}{\|(x, y, z) - (0, 0, 1)\|^2} + (0, 0, 1) \\ &= 2 \frac{(x, y, z - 1)}{\|(x, y, z - 1)\|^2} + (0, 0, 1) \\ &= 2 \frac{(x, y, z - 1)}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2} + (0, 0, 1) \\ &= 2 \frac{(x, y, z - 1)}{x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1} + (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Koska nyt halutaan kuvata pisteitä, jotka sijaitsevat pallon pinnalla (ihan niin kuin stereografisessa projektiossakin), joten niille pisteille pätee, että  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , joten yhtälöstä (23) saadaan

$$\begin{aligned} 2 \frac{(x, y, z - 1)}{1 - 2z + 1} + (0, 0, 1) &= 2 \frac{(x, y, z - 1)}{2(1 - z)} + (0, 0, 1) \\ &= \frac{(x, y, z - 1)}{1 - z} + \frac{(0, 0, 1 - z)}{1 - z} \\ &= \frac{(x, y, z - 1 + 1 - z)}{1 - z} \\ &= \frac{(x, y)}{1 - z}. \end{aligned}$$

Edellä viimeisen koordinaatin voi jättää huomiotta, sillä siitä tulee joka tapauksessa aina nolla. Nyt kun verrataan saatua tulosta lauseen 32 stereografiseen kuvaukseen

$$S_t(X, Y, Z) = (1 - t) \left( \frac{X}{1 - Z}, \frac{Y}{1 - Z} \right), t \neq 1,$$

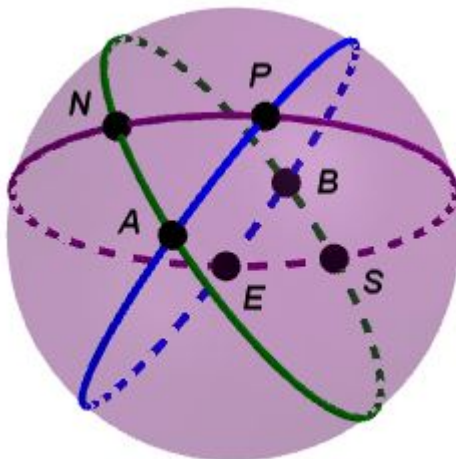
huomataan, että kun  $t = 0$ , niin saadaan sama tulos. Voidaan siten todeta, että stereografinen projektio on erikoistapaus inversiosta. Se on inversio tietylle ympyrälle, jonka määrittelyjoukko on tason pisteiden sijaan pallon pinnan pisteet.  $\square$

## 8. PALLOGEOMETRIA

Kappaleessa 6 käytiin läpi erilaisia kolmioita ja kolmion kulmien summia. Todistetaan nyt stereografisen projektion avulla, että pallon pinnalla olevien kulmien summa on enemmän kuin  $180^\circ$ .

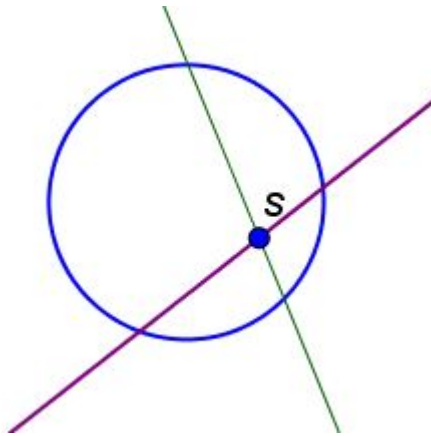
Pallogeometrian eli elliptisen geometrian ilmiselvä malli on pallo. Pallogeometria koostuu ”suorista”, jotka ovat pallon isoympyröitä. Isoympyrä on nimensä mukaisesti pallon pinnalle piirrettävä mahdollisimman suuri ympyrä eli se on origon kautta kulkevan tason ja pallopinnan leikkaus. Maapallolla tällaisia ovat esimerkiksi päiväntasaaja ja pituuspiirit [6],[5]. Pallogeometriassa kolmion kulmien summa on aina yli  $180^\circ$ . Käydään seuraavaksi läpi stereografista projektiota hyödyntämällä syy tähän.

Piirretään pallolle kolme ympyrää vastaavasti kuten lauseen 31 kolmannessa tapauksessa. Sen mukaan kahden ympyrän leikkaus tulee sisältää toisen pisteen kolmannen ympyrän sisäpuolelta ja toisen pisteen kolmannen ympyrän ulkopuolelta. Koska pallopinnalla ei voida puhua kolmion ulkopuolisista tai sisäpuolisista pisteistä tarkastellaan tällöin, että nämä leikkauspisteet ovat eri puolilla kolmatta ympyrää. Kuvan 36 mukaan tehdään stereografisen projektio pisteeltä  $N$  tasolle niin, että piste  $N$  toimii pohjoisnapana.



KUVA 36. Pallopinnalla olevat kolme isoympyrää, jotka muodostavat kolmion  $\triangle BES$ , jonka kulmien summa on yli  $180^\circ$

Tällöin piste  $S$  kuvautuu tasolle, violetti sekä vihreä ympyrä kuvautuvat laajennetuiksi suoriksi, mutta sininen ympyrä taas kuvautuu ympyräksi. Tilanne kuvaa lauseen 31 kolmatta tapausta, sillä nyt esimerkiksi violetin ja vihreän ympyrän leikkauspisteet ovat  $N$  ja  $S$  ja ne molemmat sijaitsevat eri puolilla sinistä ympyrää. Vastaavasti taas sinisen ja violetin ympyrän leikkauspisteet ovat  $P$  ja  $E$  ja ne taas sijaitsevat vihreän ympyrän eri puolilla. Myös pisteet  $A$  ja  $B$  sijaitsevat violetin ympyrän eri puolilla. Tällöin stereografisen projektio kuvaa kolme ympyrää kuvan 37 mukaisesti, jossa piste  $S$  jää ympyrän sisälle. Näin ollen pallopinnalla olevan kolmion  $\triangle BES$  kulmien summa on yli  $180^\circ$ .



KUVA 37. Kolmen isoympyrän kuva stereografisella projektiolla

## 9. LOPUKSI

Jo aiemmin mainittu Jakob Steiner keksi inversion käsitteen [8]. Inversion avulla pystytään todistamaan monia eri lauseita, joista tässä työssä esiteltiin vain muutama. Osa lauseista on keksitty jo antiikin aikana, vaikka itse inversio keksittiinkin paljon myöhemmin. Geometrian historiassa tämä on tyypillistä, sillä antiikin ajan jälkeen geometria ei juuri kehittynyt. Kenties suurimmat löydökset geometrian saralla kehitettiin vasta 1700-luvun jälkeen, kun alettiin yhdistämään muita matematiikan osa-alueita geometriaan, esimerkiksi algebraa.

Aiemmin mainittu hyperbolinen geometria on oma maailmansa, jossa inversiolla on myös osansa. Sen löydökset mullistivat geometrian maailman, minkä ansiosta geometria voidaan esittää sellaisena kuten se on esitetty tässäkin tutkielmassa. Geometria ei ole enää pelkästään suoria, janoja, ympyröitä ja pisteitä. Siihen liitetään myös vahvasti lineaarinen algebra sekä vektorit kuten on tässäkin työssä tehty.

## LÄHDELUETTELO

- [1] BERGER, MARCEL, *Geometry I ja II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987
- [2] BRANNAN, DAVID A.; ESPLEN, MATTHEW F.; GRAY, JEREMY J., *Geometry*, 2nd edition, Cambridge University press, 2012.
- [3] DELMAN, CHARLES I.; GALPERIN, GREGORY *A Tale of three circles*, Mathematics Magazine, Charleston, 76(2003), 15-32
- [4] DIEUDONNE, JEAN, *Linear algebra and geometry*, Kershaw Publishing Compny ltd, 1969
- [5] GREENBERG, MARVIN JAY *Euclidean and Non-Euclidean Geometries* Third edition, 2001.
- [6] HEIKKILÄ, LAURA *Paralleeliaksioma*, Kandidaatintutkielma, Jyväskylän yliopisto, 2015
- [7] KURITTU, LASSI; HOKKANEN, VELI-MATTI JA KAHANPÄÄ, LAURI, *Geometria*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteenlaitos, luentomoniste 57, Jyväskylä 2008
- [8] LEHTINEN, MATTI *Matematiikan historian luentoja*, <http://www.elisanet.fi/matti.t.Lehtinen/histluennot.pdf> viitattu 18.4.2017
- [9] LEYS, JOS; GHYS, ÉTIENNE; ALVAREZ, AURÉLIEN *Dimensions-sarja* [http://www.dimensions-math.org/Dim\\_E.htm](http://www.dimensions-math.org/Dim_E.htm) viitattu 18.4.2017
- [10] MACKENZIE, DANA *A Tisket, a Tasket, an Apollonian Gasket* American Scientist, 98(2010), 10-14, <http://www.americanscientist.org/issues/pub/a-tisket-a-tasket-an-apolloian-gasket/99999> viitattu 18.4.2017
- [11] OSTERMANN, ALEXANDER; WANNER, GERHARD, *Geometry by its history*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012, <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-29163-0> viitattu 18.4.2017
- [12] PARKKONEN, JOUNI *Geometrian jatkokurssi*, 2014, <http://users.jyu.fi/~parkkone/GJ2014/GJ.pdf> viitattu 18.4.2017
- [13] PEDOE, DAN, *Geometry, A comprehensive course*, Dover Publications, 1988
- [14] SAARIMÄKI, MIKKO *Reaalisia vektoriarvuuksia ja ominaisarvoja*, luentomoniste 66, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2012
- [15] SARNAK, PETER *Integral Apollonian Packings*, The American Mathematical Monthly, 118(2011), 291-306 [http://www.jstor.org/stable/pdf/10.4169/amer.math.monthly.118.04.291.pdf?\\_=1471595209582](http://www.jstor.org/stable/pdf/10.4169/amer.math.monthly.118.04.291.pdf?_=1471595209582) viitattu 18.4.2017
- [16] SEPPÄNEN, RAIMO; KERVINEN, MARTTI; PARKKILA, IRMA; KARKELA, LEA; MERILÄINEN, PEKKA, *Maol-taulukot*, 2.-8. painos Otavan kirjapaino Oy, Keuruu 2010
- [17] SNYDER, JOHN P. *Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections*, 1997, University of Chicago Press
- [18] *MacTutor History of Mathematics archive* University of St Andrews, Scotland, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Steiner.html> viitattu 18.4.2017
- [19] *MacTutor History of Mathematics archive* University of St Andrews, Scotland, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Apollonius.html> viitattu 18.4.2017
- [20] *Wikimedia*, [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/ApollonianGasket-3\\_5\\_8\\_8.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/ApollonianGasket-3_5_8_8.svg) viitattu 18.4.2017
- [21] *Wolfram Mathworld*, <http://mathworld.wolfram.com/Inversion.html> viitattu 18.4.2017