

Gromov-hyperboliset ryhmät

Meeri Martimo

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016

Tiivistelmä: Meeri Martimo, *Gromov-hyperboliset ryhmät* (engl. *Gromov-hyperbolic groups*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 51 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2016.

Tässä tutkielmassa käsitellään Gromov-hyperbolisia ryhmiä, jotka ovat geometrisen ryhmäteorian tutkimuskohde. Geometrinen ryhmäteoria on melko uusi matematiikan suuntaus, ja 1980-luvulla Gromov-hyperboliset ryhmät kehittänyt ranskalaisvenäläinen matemaatikko Mikhail Gromov yksi sen uranuurtajista.

Gromov-hyperbolisuus määritellään ensin metrisille avaruuksille tietyllä tavalla ohuiden kolmioiden avulla. Kolmiot ovat vaaditulla tavalla ohuita esimerkiksi hyperbolisissa avaruuksissa \mathbb{H}^n , mutta eivät reaaliakselia korkeampiulotteisissa euklidisisissa avaruuksissa \mathbb{R}^n . Gromov-hyperbolisen metrisen avaruuden reuna voidaan määritellä kiinnitetystä pisteestä alkavien puolisuorien ekvivalenssiluokkien joukkona. Näin määriteltiin reunaan ja sillä täydennettiin alkuperäiseen metriseen avaruuteen voidaan edelleen määritellä topologiat. Tällöin osoittautuu, että reunalla täydennetty metrisen avaruus on alkuperäisen avaruuden kompaktisointi.

Gromov-hyperbolisuuden ja reunan käsitteet yleistetään metrisiltä avaruuksilta ryhmille samaistamalla ryhmä ja sen Cayleyn graafi kvasi-isometrian avulla. Tällöin voidaan määritellä, että ryhmä on Gromov-hyperbolinen, jos sen Cayleyn graafi on metrisenä avaruutena Gromov-hyperbolinen, ja että ryhmän reuna on sen Cayleyn graafin reuna. Nämä määritelmät ovat mielekkäitä, sillä ryhmän ja sen Cayleyn graafin kvasi-isometrisuus takaa, että monet niiden suuren mittakaavan ominaisuuksista ovat samanlaisia.

Gromov-hyperbolisten ryhmien erilaisten reunojen kirjo on mielenkiintoinen: esimerkiksi tyhjä joukko, kaksi pistettä, ympyrä tai sen osa, Cantorin joukko ja Sierpinskiin matto ovat tässä tutkielmassa esiteltäviä hyperbolisten ryhmien reunoja. Toinen hyperbolisten ryhmien mielenkiintoinen ominaisuus on ryhmäteorian klassisten päätösongelmien ratkeavuus. Tutkielman päätuloksena osoitetaan, että Gromov-hyperbolisen ryhmän sanaongelmalla on ratkaisu. Toisin sanoen jokaiselle Gromov-hyperboliselle ryhmälle on olemassa ratkaisualgoritmi, joka kertoo äärellisen monen vaiheen jälkeen, onko mielivaltainen ryhmän virittäjäjoukon alkioiden avulla kirjoitettu sana ryhmän yksikköalkion esitys vai ei. Tämä tulos ei ole triviaali, sillä on olemassa äärellisesti esitettyjä ryhmiä, joiden sanaongelmalla ei ole ratkaisua.

SISÄLTÖ

Johdanto	1
Peruskäsitteitä	3
1. Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus	6
1.1. Gromov-hyperbolisuuden määritelmiä	6
1.2. Määritelmien ekvivalenttius	8
1.3. Divergenssifunktio	12
2. Gromovin reuna äärettömydessä	15
2.1. Reunan konstruktio	15
2.2. Reunan topologia	18
3. Gromov-hyperbolinen ryhmä ja sen reuna	22
3.1. Cayleyn graafi	22
3.2. Kvasi-isometria	23
3.3. Kvasi-isometria säilyttää Gromov-hyperbolisuuden	26
3.4. Gromov-hyperbolinen ryhmä	30
3.5. Gromov-hyperbolisen ryhmän reuna	31
4. Esimerkkejä Gromov-hyperbolisista ryhmistä ja niiden reunoista	35
4.1. Vapaa ryhmä	35
4.2. Kleinin ja Fuchsin ryhmät	39
5. Sanaongelma	45
Liitteet	49
Ideaalisen kolmion pinta-ala	49
Hyperbolisen kolmion ja sisään piirretyn suurimman ympyrän leikkauspisteet	49
Viitteet	51

JOHDANTO

Tämä on matematiikan pro gradu -tutkielma Gromov-hyperbolisista ryhmistä. Gromov-hyperboliset ryhmät ovat saaneet nimensä kehittäjältään, ranskalais-venäläiseltä matemaatikolta Mikhail Gromovilta, joka määritteli niin sanotut δ -hyperboliset ryhmät 1980-luvulla ottamalla niiden perusominaisuuksiksi negatiivisesti kaarevien monistojen perusryhmien ominaisuudet.

Jo aiemmin oli osattu tutkia geometrisia objekteja ja ryhmiä toistensa avulla yhdistämällä geometrisia ja algebrallisia menetelmiä: osattiin esimerkiksi johtaa topologisen avaruuden ominaisuuksista sen perusryhmän ominaisuuksista, tai ryhmän ominaisuuksista sellaisen avaruuden ominaisuuksista, jonka perusryhmä kyseinen ryhmä on. Gromovin työ edusti kuitenkin geometrisen ryhmäteorian uudempaa suuntausta, jossa käsiteltiin ryhmiä suoraan geometrisina objekteina.

Tällaisessa ryhmien käsittelyssä olennaisessa osassa on ryhmän ja sen Cayleyn graafin samaistaminen. Ryhmän Cayleyn graafi on metrinen graafi, joka sisältää informaation ryhmän alkioista ja niiden välisistä suhteista. Erityisesti Cayleyn graafi on yhtenäinen geometrinen objekti. Ryhmän ja sen Cayleyn graafin samaistaminen on mielekästä, sillä ryhmän ja sen Cayleyn graafin kvasi-isometrisuus takaa, että monet niiden suuren mittakaavan ominaisuuksista ovat samanlaisia. Toinen tapa tutkia ryhmiä geometrisesti on tarkastella ryhmien isometrasta toimintaa metrisissä avaruuksissa.

Gromov-hyperbolisilla ryhmillä on mielenkiintoisia ominaisuuksia. Esimerkiksi Max Dehnin vuonna 1911 esittelemillä klassisilla ryhmäteorian päätösongelmilla, sana-, konjugaatti- ja isomorfismiongelmissa, ei välttämättä ole ratkaisua yleisessä äärellisesti esitetyssä ryhmässä. Gromov-hyperbolisten ryhmien sana- ja konjugaattiongelmissa on kuitenkin aina ratkaisu. Saatava ratkaisualgoritmi on vieläpä varsin tehokas: kyseessä on ratkaisu lineaarisessa ajassa. Myös yleisesti ottaen sana- ja konjugaattiongelmiä vaikeammalla isomorfismiongelmallalla on ratkaisu osassa Gromov-hyperbolisista ryhmistä, kun tehdään pieni lisäoletus ryhmän rakenteesta. Toinen mielenkiintoinen tutkimuskohde on Gromov-hyperbolisen ryhmän reuna. Osa reunoista on itsessään mielenkiintoisia joukkoja, kuten Cantorin joukko, Sierpinskiin matto ja Mengerin sieni, mutta reunojen topologisia ominaisuuksia tutkimalla saadaan tietoa myös itse ryhmistä.

Tässä työssä lähestytään ryhmien hyperbolisuutta metristen avaruuksien kautta. Gromov-hyperbolisuus määritellään ensin metrisissä avaruuksissa tietyllä tavalla ohuiden kolmioiden avulla. Myöhempää käyttöä varten esitellään neljä muuta Gromov-hyperbolisen metrisen avaruuden määritelmää, jotka osoitetaan ekvivalenteiksi ensimmäisen määritelmän kanssa. Seuraavaksi konstruoidaan Gromov-hyperbolisen avaruuden reuna joko avaruuden puolisuorien tai äärettömyyteen hajaantuvien jonojen ekvivalenssiluokkien avulla. Tähän reunaan sekä sen ja alkuperäisen avaruuden yhdisteeseen määritellään topologiat. Reunaan voidaan määritellä myös metriikka, mutta se ei ole tarpeen tässä työssä. Osoittautuu, että Gromov-hyperbolisen avaruuden reuna ja sillä täydennetty avaruus ovat kompakteja, jolloin reunan avulla saadaan alkuperäisen avaruuden kompaktisointi.

Tämän jälkeen siirrytään käsittelemään ryhmiä. Gromov-hyperbolisuuden ja reunan käsitteet yleistetään metrisiltä avaruuksilta ryhmille samaistamalla ryhmä ja sen Cayleyn graafi kvasi-isometrian avulla. Tällöin voidaan määritellä, että ryhmä on

Gromov-hyperbolinen, jos sen Cayleyn graafi on Gromov-hyperbolinen, ja että ryhmän reuna on sen Cayleyn graafin reuna. Luvussa kolme esitellään kaksi yksinkertaista esimerkkiä Gromov-hyperbolisista ryhmistä ja niiden reunoista. Luvussa neljä käsitellään monimutkaisempia esimerkkejä: vapaata ryhmää sekä Kleinin ja Fuchsin ryhmiä. Luvun neljä esimerkit ja viittaukset pyrkivät tuomaan esille hyperbolisten ryhmien reunojen mielenkiintoista kirjoa, johon kuuluvat ympyrät, Cantorin joukko, Sierpinskiin matto ja Mengerin sieni. Lopuksi viidennessä luvussa esitellään jo aiemmin mainitut Max Dehnin sana-, konjugaatti- ja isomorfismiongelmien ja todistetaan tutkielman päätulos: Gromov-hyperbolisen ryhmän sanaongelmalla on ratkaisu.

PERUSKÄSITTEITÄ

Tässä luvussa esitellään tutkielman aiheen kannalta olennaisia peruskäsitteitä sekä myöhemmin tutkielmassa tarvittavia topologisia perustuloksia. Ensin mainittuja ovat *geodeettisiin avaruuksiin* liittyvät käsitteet, kuten geodeettinen jana, puolisuora ja suora. Lukijalta oletetaan perustiedot metrisistä ja topologisista avaruuksista, mutta tämän luvun lopussa esitellään tutkielman kannalta olennaisimpia metristen ja topologisten avaruuksien ominaisuuksia ja tuloksia: jonojen ja jatkuvuuden käsittely yleisessä topologisessa avaruudessa sekä Ascoli-Arzelan lause. Topologisten perustulosten osalta tämän luvun lähteenä on käytetty teosta [17] ja muuten teosta [3].

Esitellään ensin geodeettinen jana, puolisuora ja suora sekä geodeettisen avaruuden määritelmä.

Määritelmä 0.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $I \subset \mathbb{R}$ väli. Isometrinen upotus $c : I \rightarrow X$, jolle $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ kaikilla $t, t' \in I$, on

- *geodeettinen jana*, jos $I = [0, \ell]$ on kompakti väli.
- *geodeettinen puolisuora*, jos $I = [0, \infty)$.
- *geodeettinen suora*, jos $I = \mathbb{R}$.

Tilanteesta riippuen geodeettiseksi janaksi, puolisuoraksi tai suoraksi voidaan kutsua kuvauksen c lisäksi myös sen kuvajoukkoa $c(I) \subset X$. Jollei sekaannuksen vaaraa ole, voidaan myös kuvajoukkoa merkitä $c := c(I)$. Pisteiden $x, y \in X$ välistä geodeettista janaa voidaan merkitä myös $[x, y]$.

Määritelmä 0.2. Metrinen avaruus (X, d) on *geodeettinen avaruus*, jos sen jokainen pistepari voidaan yhdistää toisiinsa geodeettisella janalla.

Avaruus X on *yksikäsitteisesti geodeettinen*, jos jokaisen pisteparin välillä on täsmälleen yksi geodeettinen jana.

Esitellään vielä hieman yleisempiä geodeettisen avaruuden käyriä. Geodeettisen avaruuden X polku, yhdistetty polku ja käänteispolku sekä polun pituus määritellään kuten avaruudessa \mathbb{R}^n :

Määritelmä 0.3. Olkoon (X, d) geodeettinen metrinen avaruus.

Avaruuden X *polku* on jatkuva kuvaus $p : [a, b] \rightarrow X$, missä $[a, b] \subset \mathbb{R}$ on kompakti väli. Poluksi voidaan kutsua myös kuvauksen p kuvajoukkoa $p([a, b]) \subset X$ ja jollei sekaannuksen vaaraa ole, voidaan merkitä $p := p([a, b])$.

Polun p *käänteispolku* p^{-1} on kuvaus

$$p^{-1} : [a, b] \rightarrow X, \quad p^{-1}(x) = p(a + b - x).$$

Jos poluilla $p_1 : [a, b] \rightarrow X$ ja $p_2 : [c, d] \rightarrow X$ on $p_1(b) = p_2(c)$, niin niiden *yhdistetty polku* $p_2 \circ p_1$ on kuvaus

$$p_2 \circ p_1 : [a, b + d - c], \quad p_2 \circ p_1(x) = \begin{cases} p_1(x), & \text{jos } x \in [a, b] \\ p_2(x - b + c), & \text{jos } x \in (b, b + d - c]. \end{cases}$$

Polun p *pituuks* on luku

$$\ell(p) = \sup_{\{t_0, \dots, t_n\}} \sum_{i=0}^{n-1} d(p(t_i), p(t_{i+1})),$$

missä $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$, $n \in \mathbb{N}$ on välin $[a, b]$ ositus.

Huomautus 0.4. Geodeettisen janan ja polun määritelmistä nähdään, että

$$\ell(p) \geq d(p(a), p(b)) = |b - a|.$$

Siis minkä tahansa kahden pisteen välisen polun pituus on vähintään yhtä suuri kuin näiden pisteiden välisen geodeettisen janan pituus, joka vastaa näiden pisteiden välistä etäisyyttä avaruudessa X .

Siirrytään seuraavaksi käsittelemään tässä tutkielmassa tarvittavia metrisiä ja topologisia ominaisuuksia.

Määritelmä 0.5. Olkoot (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topologisia avaruuksia. Olkoon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avaruuden X jono. Jono (x_n) *suppenee* kohti pistettä $a \in X$, jos jokaisella pisteen a ympäristöllä U on olemassa indeksi $N_U \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n \in U$ kaikilla $n \geq N_U$.

Kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on *jatkuva pisteessä* $a \in X$, jos jokaisella pisteen $f(a) \in Y$ ympäristöllä V on olemassa pisteen a ympäristö U siten, että $f(U) \subset V$. Kuvaus f on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa avaruuden X pisteessä.

Jos avaruus X toteuttaa ensimmäisen numeroituvuusaksiooman (eli jokaisella avaruuden X pisteellä on numeroituva ympäristökanta), niin yhtäpitävästi voidaan sanoa, että kuvaus f on jatkuva pisteessä a , jos jokaisen pisteeseen a suppenevan jonon (x_n) kuvapisteen muodostama jono $(f(x_n))$ suppenee pisteeseen $f(a)$. (katso [17], s. 90)

Määritellään seuraavaksi Ascoli-Arzelan lauseessa tarvittavat käsitteet *yhtäjatkuva* ja *tasaisesti rajoitettu*, minkä jälkeen esitetään itse lause.

Määritelmä 0.6. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja (Y, d) metrinen avaruus. Joukko W kuvauksia $f : X \rightarrow Y$ on *yhtäjatkuva pisteessä* $a \in X$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa pisteen a ympäristö U siten, että

$$d(f(x), f(a)) < \epsilon \text{ kaikilla } f \in W \text{ ja } x \in U.$$

Joukko W on *yhtäjatkuva*, jos se on yhtäjatkuva jokaisessa avaruuden X pisteessä.

Määritelmä 0.7. Olkoon (X, τ) topologinen avaruus ja (Y, d) metrinen avaruus. Joukko W kuvauksia $f : X \rightarrow Y$ on *tasaisesti rajoitettu*, jos on olemassa luku $R > 0$ siten, että $|f(x)| \leq R$ kaikilla $f \in W$ ja kaikilla $x \in X$.

Lause 0.8. (*Ascoli-Arzelan lause*)

Olkoon (X, τ) separoituva avaruus ja (Y, d) metrinen avaruus. Olkoon W yhtäjatkuva ja tasaisesti rajoitettu joukko kuvauksia $f : X \rightarrow Y$. Tällöin jokaisella joukon W jonolla on osajono, joka suppenee tasaisesti jokaisessa avaruuden X kompaktissa osajoukossa.

Todistus. Ascoli-Arzelan lauseen todistus on esitetty esimerkiksi teoksessa [17] sivulla 118. \square

Huomautus 0.9. Tässä tutkielmassa Ascoli-Arzelan lausetta tullaan käyttämään tapauksessa, jossa $(X, \tau) = \mathbb{R}$ on separoituva topologinen avaruus ja (Y, d) on geodeettisena avaruutena erityisesti metrinen avaruus.

Työssä käytetään n -ulotteisen hyperbolisen avaruuden \mathbb{H}^n mallina tilanteesta riippuen joko Poincarén pallomallia (\mathbb{B}_n, d_B) , missä

$$\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \text{ ja } d_B(x, y) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}\right),$$

tai ylempää puoliavaruusmallia (\mathbb{U}_n, d_U) , missä

$$\mathbb{U}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} \text{ ja } d_U(x, y) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n}\right).$$

Mallit \mathbb{B}_n ja \mathbb{U}_n ovat keskenään isometriset, joten hyperbolisen avaruuden mallina voidaan perustellusti käyttää tilanteeseen paremmin sopivaa mallia. Erityisesti hyperbolisen tason tapauksessa nämä mallit voidaan samaistaa avaruuden \mathbb{R}^2 sijaan kompleksitason \mathbb{C} osajoukoiksi ja kuvata toisikseen Möbius-kuvauksella

$$f : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{U}_2, \quad f(z) = \frac{-iz - i}{z - 1}$$

ja sen käänteiskuvauksella

$$g : \mathbb{U}_2 \rightarrow \mathbb{B}_2, \quad g(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

sillä

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{-iz - i}{z - 1}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{|z - 1|^2} \cdot (-i)(\bar{z} - 1)(z + 1)\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{|z - 1|^2} \cdot (-i)(|z|^2 + \bar{z} - z - 1)\right) \\ &= -\frac{1}{|z - 1|^2}(|z|^2 - 1) \\ &= \frac{1}{|z - 1|^2}(1 - |z|^2) > 0 \text{ kaikilla } z \in \mathbb{B}_2 \end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &= g(z)\overline{g(z)} \\ &= \left(\frac{z - i}{z + i}\right) \cdot \left(\frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}\right) \\ &= \frac{|z - i|^2}{|z + i|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z) - 1)^2}{\operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z) + 1)^2} \\ &= \frac{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 - \operatorname{Im}(z) + 1}{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 + \operatorname{Im}(z) + 1} < 1 \text{ kaikilla } z \in \mathbb{U}_2. \end{aligned}$$

1. GROMOV-HYPERBOLINEN METRINEN AVARUUS

Metrisen avaruuden Gromov-hyperbolisuus voidaan määritellä usealla eri tavalla, jotka tulevat osoittautumaan keskenään ekvivalenteiksi. Määritellään aluksi Gromov-hyperbolisuus tarkastelemalla kyseisen avaruuden kolmioita. Gromov-hyperbolisen avaruuden kolmiot ovat aina tietyllä tapaa ohuita.

Tämän luvun tiedot on yhdistelty pääasiassa lähteistä [3], [13], [1] ja [2]. Esimerkissä 1.9 seurataan täydentäen lähteen [6] todistusta ja esimerkeissä 1.10 ja 1.13 hyödynnetään jo aiemmin mainittujen lähteiden lisäksi lähteen [5] ideoita.

1.1. Gromov-hyperbolisuuden määritelmiä.

Määritelmä 1.1. (ohuet kolmiot)

Olkoon $\delta \geq 0$. Geodeettisen metrisen avaruuden X kolmio on δ -ohut, jos sen jokainen sivu sisältyy kahden muun sivun yhdisteen δ -ympäristöön.

Geodeettinen metrinen avaruus X on δ -hyperbolinen, jos sen jokainen kolmio on δ -ohut.

Esimerkiksi euklidinen avaruus \mathbb{R}^n ei ole Gromov-hyperbolinen millään $n \geq 2$. Sen sijaan hyperbolisen avaruuden \mathbb{H}^n kolmiot ovat vaaditulla tavalla ohuita kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä osoitetaan esimerkeissä 1.9 ja 1.10. Seuraavaksi määriteltävä Gromovin tulo on toinen tapa tarkastella avaruuden Gromov-hyperbolisuutta.

Määritelmä 1.2. (Gromovin tulo)

Olkoon X metrinen avaruus ja $x \in X$ kiinnitetty. Pisteiden $y, z \in X$ Gromovin tulo pisteen x suhteen on luku

$$(y \cdot z)_x = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)).$$

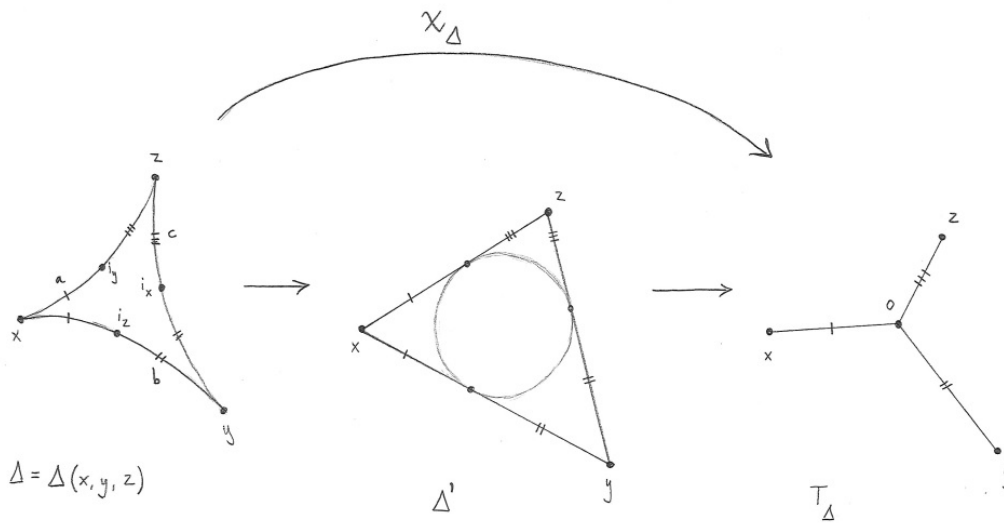
Olkoon $\delta \geq 0$. Metrinen avaruus X on (δ) -hyperbolinen, jos

$$(x \cdot y)_w \geq \min\{(x \cdot z)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta \text{ kaikilla } x, y, z, w \in X.$$

Gromovin tulo kertoo, kuinka kauan samasta pisteestä lähtevät puolisuorat ovat "lähellä" toisiaan: Mitä suurempi kahden pisteen välinen Gromovin tulo on, sitä "lähempänä" valitusta lähtöpisteestä alkavat kyseisten pisteiden kautta kulkevat puolisuorat ovat toisiaan. Gromovin tulo $(y \cdot z)_x$ on nolla vain, jos puolisuorat \overrightarrow{xy} ja \overrightarrow{xz} erkanevat toisistaan välittömästi, eli toisin sanoen jos pisteiden y ja z välinen geodeettinen jana kulkee pisteen x kautta.

Esitellään vielä kaksi geometrista Gromov-hyperbolisuuden määritelmää. Niissä käytettävät käsitteet pohjautuvat seuraavaksi esiteltävään yhteyteen kolmioiden ja nelikärkisten puiden välillä.

Jos $x, y, z \in X$ ovat kolme geodeettisen metrisen avaruuden X pistettä, niin merkitään niiden muodostamaa geodeettista kolmiota $\Delta := \Delta(x, y, z)$. Kolmioepäyhtälön nojalla on olemassa yksikäsitteiset epänegatiiviset luvut a, b ja c siten, että $d(x, y) = a + b$, $d(x, z) = a + c$ ja $d(y, z) = b + c$. Olkoot $i_x \in [y, z]$, $i_y \in [x, z]$ ja $i_z \in [x, y]$ ne pisteet, jotka jakavat kolmion Δ sivut lukujen a , b ja c pituisiin osiin tällä tavalla. Tarkastellaan kolmiota Δ vastaavaa euklidisen avaruuden kolmiota Δ' , jolla on samat sivujen pituudet kuin alkuperäisellä kolmiolla. Pisteitä i_x, i_y



KUVA 1. Hyperbolisen kolmion Δ ja puun T_Δ vastaavuus

ja i_z vastaavat pisteet kolmiossa Δ' ovat kolmion sisään piirretyn suurimman ympyrän ja kolmion leikkauspisteet. Samaistamalla nämä kolme pistettä keskenään sekä kahden vierekkäisen sivun yhtä pitkät osat keskenään saadaan euklidinen kolmio Δ' edelleen "litistettyä" nelikärkiseksi puuksi T_Δ , jonka kärjet ovat x, y, z ja keskimäinen kärki o . Tällöin puun T_Δ sivujen pituudet ovat $d_{T_\Delta}(x, o) = a$, $d_{T_\Delta}(y, o) = b$ ja $d_{T_\Delta}(z, o) = c$, joten saadaan isometria pistejoukolta $\{x, y, z\} \subset X$ puun T_Δ kärkien osajoukolle $\{x, y, z\}$.

Määritellään kuvaus $\chi_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$ siten, että χ_Δ on identtinen kuvaus kolmion Δ kärjillä x, y ja z , $\chi_\Delta(i_x) = \chi_\Delta(i_y) = \chi_\Delta(i_z) = o \in T_\Delta$ ja kaikilla pisteillä $p \in [w, i_w]$, missä $w \in \{x, y, z\}$, on $d_{T_\Delta}(\chi_\Delta(p), w) = d_X(p, w)$. Tällöin kuvauksen χ_Δ rajoittuma kuhunkin kolmion Δ sivuun on isometria.

Tarkastellaan alkukuvia $\chi_\Delta^{-1}(t)$, $t \in T_\Delta$. Jokaisella t alkukuvassa on 1, 2 tai 3 pistettä. Alkukuva $\chi_\Delta^{-1}(t)$ on yksi piste täsmälleen silloin, kun t on jokin puun T_Δ kärjistä $\{x, y, z\}$, ja kolme pistettä täsmälleen silloin, kun $t = o$. Muulloin $\chi_\Delta^{-1}(t)$ koostuu kolmion Δ kahdesta pisteestä, jotka sijaitsevat kolmion Δ vierekkäisillä sivuilla samalla etäisyydellä jostakin kolmion Δ kärjestä. Näiden alkukuvien $\chi_\Delta^{-1}(t)$ halkaisija on kolmas tapa mitata kolmion Δ ohuutta.

Huomautus 1.3. Edellä olevassa konstruktiossa voidaan Gromovin tulon avulla merkitä

$$a = \frac{1}{2}((a+b) + (a+c) - (b+c)) = \frac{1}{2}(d(x,y) + d(x,z) - d(y,z)) = (y \cdot z)_x,$$

ja vastaavasti $b = (x \cdot z)_y$ ja $c = (x \cdot y)_z$. Siis erityisesti $d(x, i_y) = d(x, i_z) = (y \cdot z)_x$, $d(y, i_x) = d(y, i_z) = (x \cdot z)_y$ ja $d(z, i_x) = d(z, i_y) = (x \cdot y)_z$.

Määritelmä 1.4. (kapeat kolmiot)

Olkoon Δ geodeettinen kolmio metrisessä avaruudessa X ja kuvaus $\chi_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$ kuten edellä. Kolmio Δ on δ -kapea, jos kaikilla $t \in T_\Delta$ ehdosta $p, q \in \chi_\Delta^{-1}(t)$ seuraa $d(p, q) \leq \delta$.

Olkoon $\delta \geq 0$. Metrinen avaruus X on $[\delta]$ -hyperbolinen, jos sen jokainen kolmio on δ -kapea.

Kuvauksen χ_Δ^{-1} alkukuvien halkaisijoihin liittyvä Gromov-hyperbolisuuden ehto voidaan muotoilla Määritelmän 1.4 sijaan seuraavasti.

Määritelmä 1.5. (kolmion sisäleveys)

Olkoon $\delta \geq 0$ ja metrisen avaruuden X jokaiselle geodeettiselle kolmiolle Δ kuvaus $\chi_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$ kuten edellä. Metrinen avaruus X on $\{\delta\}$ -hyperbolinen, jos sen jokaiselle geodeettiselle kolmiolle on $\text{diam}(\chi_\Delta^{-1}(o)) \leq \delta$.

Huomautus 1.6. Edellä esiteltyjä kolmion Δ pisteitä i_x, i_y ja i_z kutsutaan kolmion Δ *internaalipisteiksi* ja niiden halkaisijaa $\text{diam}(\chi_\Delta^{-1}(o)) = \text{diam}(\{i_x, i_y, i_z\})$ kolmion Δ *sisäleveydeksi*.

1.2. Määritelmien ekvivalenttius. Osoitetaan seuraavaksi, että edellä esitellyt Gromov-hyperbolisuuden määritelmät 1.1, 1.2, 1.4 ja 1.5 ovat ekvivalentteja keskenään. Näiden neljän määritelmän lisäksi on olemassa muitakin Gromov-hyperbolisuuden määritelmiä, jotka ovat myös ekvivalentteja tässä työssä esiteltyjen määritelmien kanssa. Tässä työssä tullaan esittelemään vielä kaksi hyperbolisuuden karakterisointia: puolisuorien erkanemisen avulla Määritelmässä 1.11 ja Lauseessa 1.12 sekä lineaarisen isoperimetrin epäyhtälön avulla Huomautuksessa 5.3.

Lause 1.7. *Olkoon X geodeettinen metrinen avaruus. Tällöin seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:*

- (1) *On olemassa luku $\delta_1 \geq 0$ siten, että jokainen avaruuden X kolmio on δ_1 -ohut.*
- (2) *On olemassa luku $\delta_2 \geq 0$ siten, että $(x \cdot y)_w \geq \min\{(x \cdot z)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta_2$ kaikilla pistenelikoilla $x, y, z, w \in X$.*
- (3) *On olemassa luku $\delta_3 \geq 0$ siten, että jokainen avaruuden X kolmio on δ_3 -kapea.*
- (4) *On olemassa luku $\delta_4 \geq 0$ siten, että jokaiselle avaruuden X kolmiolle Δ on $\text{diam}(\chi_\Delta^{-1}(o)) \leq \delta_4$.*

Todistus. (1) \Rightarrow (4):

Oletetaan, että jokainen avaruuden X kolmio on δ_1 -ohut. Olkoon $\Delta = \Delta(x, y, z) \subset X$ kolmio ja $\chi_\Delta^{-1}(o) = \{i_x, i_y, i_z\}$ kolmion Δ internaalipisteet. Koska X on δ_1 -ohut, on olemassa piste $w \in [x, y] \cup [x, z]$ siten, että $d(i_x, w) \leq \delta_1$. Voidaan olettaa, että $w \in [x, y]$. Käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla $|d(y, w) - d(y, i_x)| \leq d(i_x, w) = \delta_1$. Internaalipisteiden määritelmän nojalla $d(y, i_x) = d(y, i_z)$ ja pisteet w, i_z ja y sijaitsevat tässä järjestyksessä samalla suoralla, joten käänteisestä kolmioepäyhtälöstä saadaan $d(i_z, w) = |d(i_z, y) - d(y, w)| = |d(i_x, y) - d(y, w)| \leq \delta_1$. Siis

$$d(i_x, i_z) \leq d(i_x, w) + d(w, i_z) \leq 2\delta_1.$$

Vastaavasti saadaan $d(i_y, \{i_x, i_z\}) \leq 2\delta_1$ ja $d(i_z, \{i_x, i_y\}) \leq 2\delta_1$, ja siten

$$\text{diam}(\{i_x, i_y, i_z\}) = \text{diam}(\chi_\Delta^{-1}(o)) \leq 4\delta_1.$$

(4) \Rightarrow (3):

Oletetaan, että avaruuden X jokaisen kolmion sisäleveys on korkeintaan δ_4 . Olkoon $\Delta = \Delta(x, y, z) \subset X$ avaruuden X kolmio ja i_x, i_y ja i_z sen internaalipisteet. Olkoon piste $p \in \Delta$. Voidaan olettaa, että $p \in [y, z]$ ja $0 < d(y, p) < d(y, i_x)$. Nimittäin jos $p = y$, niin $\text{diam}(\chi^{-1}(t_p)) = 0$, ja jos $p = i_x$, niin $\text{diam}(\chi^{-1}(t_p)) \leq \delta_4$. Tällöin on olemassa piste $q \in [x, y]$ siten, että $\chi^{-1}(t) = \{p, q\}$ jollakin $t \in T_\Delta$ ja $d(y, p) = d(y, q)$. Etsitään luvulle $d(p, q)$ yläraja konstruoimalla geodeettinen kolmio, jonka internaalipisteitä p ja q ovat. Olkoon $c : [0, d(y, z)] \rightarrow X$ pisteiden y ja z välinen jana ja $\Delta_t = \Delta(x, y, c(t))$ geodeettinen kolmio kaikilla $t \in [0, d(y, z)]$. Kolmion Δ_t sivulla $[y, c(t)]$ sijaitseva internaalipiste i_{x_t} siirtyy parametrin t jatkuvana funktiona. Kun $t = 0$, niin $i_{x_t} = y$, ja kun $t = d(y, z)$, niin $i_{x_t} = i_x$. Siis jollakin $t_0 \in [0, d(y, z)]$ täytyy olla $i_{x_{t_0}} = p$. Koska $d(y, q) = d(y, p)$, myös pisteen q täytyy olla kolmion Δ_{t_0} internaalipiste. Tällöin $d(p, q) \leq \delta_4$.

(3) \Rightarrow (1):

Oletetaan, että jokainen avaruuden X kolmio on δ_3 -kapea. Olkoon $\Delta = \Delta(x, y, z) \subset X$ kolmio, T_Δ vastaava puu, $\chi_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$ näiden välinen kuvaus ja $w \in \Delta$. Voidaan olettaa, että $w \in]x, y[$, sillä jos $w \in \{x, y, z\}$, se kelpaa itse vaadituksi pisteeksi. Tällöin on olemassa piste $t \in T_\Delta$ ja piste $w' \in [x, z] \cup [y, z]$ siten, että $\{w, w'\} \subset \chi_\Delta^{-1}(t)$. Tällöin kolmion Δ δ_3 -kapeuden nojalla on $d(w, w') \leq \delta_3$.

Nyt kohtien (1), (3) ja (4) ehdot ovat keskenään ekvivalentteja.

(3) \Rightarrow (2):

Oletetaan, että avaruuden X jokainen kolmio on δ_3 -kapea. Olkoot x, y, z ja w neljä avaruuden X pistettä. Huomataan, että

- (a) $d(w, i_x) = (x \cdot y)_w$, missä i_x on kolmion $\Delta(x, y, w)$ internaalipiste.
- (b) $d(w, i_w) \leq d(w, i_x) + d(i_x, i_w) \leq (x \cdot y)_w + \delta_3$, missä i_x ja i_w ovat kolmion $\Delta(x, y, w)$ internaalipisteitä.
- (c) $(x \cdot y)_w \leq d(w, [x, y])$.

Huomioiden kohta (c) seuraa siitä, että jos $p \in [x, y]$ siten, että $d(w, p) = d(w, [x, y])$, niin

$$\begin{aligned}
 (x \cdot y)_w &= \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)) \\
 &= \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, p) - d(p, y)) \\
 &= \frac{1}{2}((d(x, w) - d(x, p)) + (d(y, w) - d(p, y))) \\
 &\leq \frac{1}{2}(d(w, p) + d(w, p)) \\
 &= d(w, [x, y])
 \end{aligned}$$

kolmioepäyhtälön nojalla.

Nyt yllä esitetyistä kolmesta huomiosta saadaan

$$\begin{aligned} (x \cdot y)_w + 2\delta_3 &\geq d(w, i_w) + \delta_3 \\ &\geq \min\{d(w, [x, z]), d(w, [y, z])\} \\ &\geq \min\{(x \cdot z)_w, (y \cdot z)_w\}, \end{aligned}$$

mikä toteuttaa väitteen kohdan (2). Ensimmäinen arvio seuraa huomiosta (b) ja kolmas huomiosta (c). Toinen arvio seuraa siitä, että kolmion $\Delta(x, y, z)$ kapeuden nojalla on olemassa piste $q \in [x, z] \cup [y, z]$, jolle $d(i_w, q) \leq \delta_3$. Tällöin suoralla laskulla

$$\begin{aligned} d(w, i_w) + \delta_3 &\geq d(w, i_w) + d(i_w, q) \\ &\geq d(w, q) \\ &\geq d(w, [x, z] \cup [y, z]) \\ &= \min\{d(w, [x, z]), d(w, [y, z])\} \end{aligned}$$

saadaan edellä olevan päättelyn toinen arvio.

(2) \Rightarrow (1):

Oletetaan, että Gromovin tuloon liittyvä hyperbolisuusehto (2) on voimassa kaikille avaruuden X pistenelikoille. Olkoon $\Delta = \Delta(x, y, z)$ avaruuden X kolmio ja $w \in \Delta$. Voidaan olettaa, että $w \in [x, y]$. Nyt on voimassa

$$0 = (x \cdot y)_w \geq \min\{(x \cdot z)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta_2.$$

Voidaan olettaa, että $(x \cdot z)_w \leq (y \cdot z)_w$, jolloin ylläolevasta epäyhtälöstä saadaan arvio

$$\delta_2 \geq (x \cdot z)_w \geq d(w, [x, z]) - 2\delta_2,$$

jonka jälkimmäinen epäyhtälö todistetaan kohta. Tällöin $d(w, [x, z]) \leq 3\delta_2$, ja siten kolmio Δ on $3\delta_2$ -ohut.

Todistetaan vielä edellä käytetty aputulos.

Oletetaan nyt, että pisteet $x, z, w \in X$ ovat mitä tahansa ja Gromovin tuloon liittyvä hyperbolisuusehto (2) on voimassa kaikille avaruuden X pistenelikoille. Väitetään, että

$$(x \cdot z)_w \leq d(w, [x, z]) \leq (x \cdot z)_w + 2\delta_2.$$

Väitteen ensimmäinen epäyhtälö osoitettiin todistuksen kohdassa ((3) \Rightarrow (2)) pelkän kolmioepäyhtälön avulla. Olkoot nyt i_x, i_z ja i_w kolmion $\Delta(x, z, w)$ internaalipisteet, j_x, j_w ja j_z kolmion $\Delta(x, w, i_w)$ internaalipisteet (missä $j_z \in [x, w]$) ja k_x, k_z ja k_w kolmion $\Delta(w, z, i_w)$ internaalipisteet (missä $k_x \in [w, z]$).

Koska $j_w \in [x, i_w]$, niin $d(x, j_z) = d(x, j_w) \leq d(x, i_w) = d(x, i_z)$. Tästä seuraa, että

$$(x \cdot i_w)_w = d(j_z, w) \geq d(i_z, w) = (x \cdot z)_w$$

ja vastaavasti

$$(i_w \cdot z)_w = d(k_x, w) \geq d(i_x, w) = (x \cdot z)_w.$$

Voidaan olettaa, että $(z \cdot i_w)_w \leq (x \cdot i_w)_w$. Tällöin väitteen ehdon (2) voimassaolosta seuraa

$$\delta_2 \geq (z \cdot i_w)_w - (x \cdot z)_w = d(i_x, k_x) = d(i_w, k_w).$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus saadaan laskemalla lauseke auki, ja toinen seuraa siitä, että $d(z, i_w) = d(z, i_x)$ ja $d(z, k_w) = d(z, k_x)$. Käyttämällä tätä saadaan edelleen

$$\begin{aligned} d(w, i_w) &= d(w, k_z) + d(k_z, i_w) = d(w, k_x) + d(k_w, i_w) \\ &= d(w, i_x) + d(i_x, k_x) + d(i_x, k_x) \\ &\leq (x \cdot z)_w + 2\delta_2. \end{aligned}$$

Tästä seuraa $d(w, [x, z]) \leq d(w, i_w) \leq (x \cdot z)_w + 2\delta_2$. \square

Määritelmä 1.8. Olkoon X geodeettinen metrinen avaruus. Jos X toteuttaa jonkin Lauseen 1.7 ehdoista, sanotaan, että X on *Gromov-hyperbolinen*.

Esimerkki 1.9. Osoitetaan, että hyperbolinen avaruus \mathbb{H}^n on Gromov-hyperbolinen. Käytetään n -ulotteisen hyperbolisen avaruuden \mathbb{H}^n mallina Poincarén pallomallia \mathbb{B}_n . Jokainen pistekolmikko x, y, z , joka määrittää kolmion $\Delta(x, y, z) \subset \mathbb{B}_n$, määrittelee myös yksikäsitteisen 2-ulotteisen pallopinnan S , joka leikkaa kohtisuorasti pallomallin \mathbb{B}_n reunaa. Kolmio $\Delta(x, y, z)$ sijaitsee pallopinnan S ja Poincarén pallomallin \mathbb{B}_n leikkauksessa, joka vastaa (affiinia) hyperbolista tasoa eli Poincarén kiekkomallia \mathbb{B}_2 . Siten riittää tarkastella kolmioita hyperbolisessa tasossa \mathbb{B}_2 .

Olkoon $\Delta(x, y, z)$ geodeettinen kolmio hyperbolisessa tasossa ja c sen sisään piirretyn suurimman ympyrän keskipiste. Määritellään jokaiselle $t \in \mathbb{R}_+$ piste x_t puolisuoralla \overrightarrow{cx} (ja vast. $y_t \in \overrightarrow{cy}$ ja $z_t \in \overrightarrow{cz}$) siten, että $d(c, x_t) = t \cdot d(c, x)$ (vast. $d(c, y_t) = t \cdot d(c, y)$ ja $d(c, z_t) = t \cdot d(c, z)$). Nyt kolmion $\Delta_t = \Delta(x_t, y_t, z_t)$ sisään piirretyn suurimman ympyrän säde r_t on parametrin t kasvava funktio. Kuitenkin $r_t \not\rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \infty$. Parametrin t kasvaessa luvun r_t ylärajan määrää ideaalinen kolmio Δ_∞ , jonka kaikki kärjet sijaitsevat kiekkomallin \mathbb{B}_2 reunalla S^1 . Ideaalisen kolmion pinta-ala on π (katso *Liitteet*), joten myös sen sisään piirretyn suurimman ympyrän pinta-ala on korkeintaan π . Jos oletetaan tunnetuksi hyperbolisen avaruuden ympyrän pinta-alan kaava $A = 4\pi \sinh^2(\frac{r}{2})$ ja rajoitutaan arvoihin $r \geq 0$, saadaan ratkaistua ideaalisen kolmion sisään piirretyn suurimman ympyrän säteelle r_∞

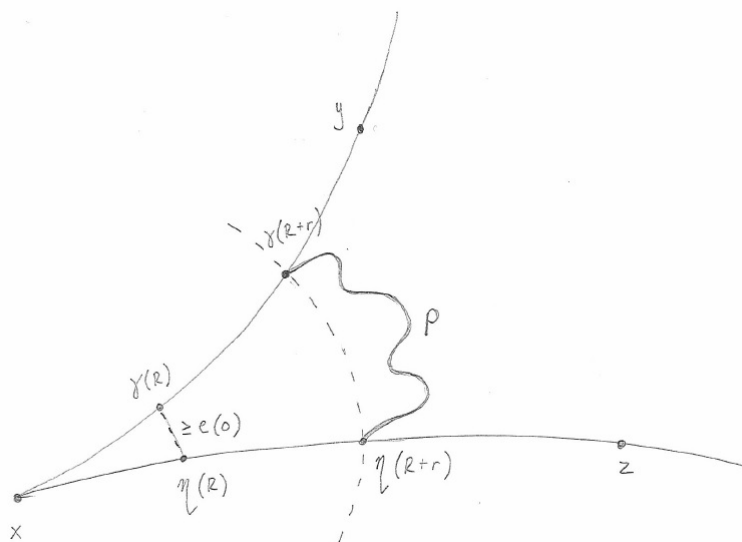
$$\begin{aligned} 4\pi \sinh^2\left(\frac{r_\infty}{2}\right) &\leq \pi, \text{ eli} \\ \sinh\left(\frac{r_\infty}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} < \sinh\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Koska \sinh on kasvava funktio, on $r_\infty/2 \leq \frac{1}{2}$ eli $r_\infty \leq 1$. Siis myös $r_t \leq r_\infty \leq 1$ kaikilla t . Koska kolmion $\Delta(x, y, z)$ internaalipisteet i_x, i_y ja i_z ovat kolmion Δ ja sen sisään piirretyn suurimman ympyrän leikkauspisteet (katso *Liitteet*), niiden pareittainen etäisyys on kolmioepäyhtälön nojalla korkeintaan kaksi. Siis $\text{diam}(\{i_x, i_y, i_z\}) \leq 2$ ja siten Määritelmän 1.5 mukaan \mathbb{H}^n on Gromov-hyperbolinen.

Esimerkki 1.10. Euklidinen avaruus \mathbb{R}^n ei ole Gromov-hyperbolinen.

Riittää tarkastella avaruutta \mathbb{R}^2 , sillä kukin avaruuden \mathbb{R}^n kolmion määrittävä pistekolmikko määrittää yksikäsitteisesti 2-ulotteisen tason, jolla kyseinen kolmio sijaitsee. Merkitään $x := (0, 0)$, $y_n := (n, 0)$ ja $z_n := (0, n)$. Tällöin kolmiossa $\Delta_n = \Delta(x, y_n, z_n)$ sivun $[y_n, z_n]$ puolivälissä on piste $p_n := z + \frac{1}{2}(y - z) = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$. Tälle pisteelle on $d(p, [x, y_n] \cup [x, z_n]) = \frac{n}{2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska n voi olla mielivaltaisen suuri, koko avaruudelle \mathbb{R}^2 yhteistä hyperbolisuusvakiota δ ei voi olla olemassa.

1.3. **Divergenssifunktio.** Esitellään luvun lopuksi vielä yksi Gromov-hyperbolisen avaruuden karakterisaatio. Siinä esiteltävän divergenssifunktion määritelmä on melko tekninen mutta havainnollistuu paremmin kuvan avulla. Divergenssifunktio tulee myöhemmin joissain tilanteissa osoittautumaan varsin hyödylliseksi apuvälineeksi Gromov-hyperbolisten avaruuksien käsittelyssä.



KUVA 2. Divergenssifunktion määritelmän ehdot

Määritelmä 1.11. (divergenssifunktio)

Olkoon X geodeettinen metrinen avaruus. Funktio $e : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ on *divergenssifunktio* avaruudessa X , jos kaikille pisteille $x \in X$ ja puolisuorille $\gamma := \overrightarrow{xy}$ ja $\eta := \overrightarrow{xz}$ sekä kaikille vakioille $R \in [0, \infty)$, joilla $d(\gamma(R), \eta(R)) \geq e(0)$, on totta seuraava ehto:

Kaikilla vakioilla $r > 0$, joilla $R + r \leq \min\{d(x, y), d(x, z)\}$, ja kaikilla pisteiden $\gamma(R + r)$ ja $\eta(R + r)$ välisillä poluilla $p \subset X \setminus B(x, R + r)$ on

$$\ell(p) > e(r).$$

Jos avaruudessa X on divergenssifunktio e siten, että $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$, sanotaan, että puolisuorat *erkanevat* avaruudessa X . Lisäksi sanotaan, että puolisuorat *erkanevat nopeammin kuin lineaarisesti*, jos $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)}{t} = \infty$.

Lause 1.12. *Olkoon X geodeettinen metrinen avaruus. Tällöin X on Gromov-hyperbolinen, jos ja vain jos puolisuorat erkanevat nopeammin kuin lineaarisesti avaruudessa X .*

Todistus. Oletetaan ensin, että avaruus X on Gromov-hyperbolinen. Tällöin kaikki avaruuden X kolmiot ovat δ -kapeita. Konstruoidaan avaruudelle X divergenssifunktio. Valitaan $e(0) = \delta$. Olkoon $x \in X$ ja $\gamma := [x, y]$ ja $\eta := [x, z]$ sen ja joidenkin

avaruuden X pisteiden y ja z väliset geodeettiset janat. Olkoon luku $R \geq 0$ siten, että $d(\gamma(R), \eta(R)) > \delta + 1$. Tällöin $d(\gamma(R - \frac{1}{2}), \eta(R - \frac{1}{2})) > \delta$. Olkoon lisäksi p joukon $X \setminus B(x, R + r)$ polku pisteiden $\gamma(R + r)$ ja $\eta(R + r)$ välillä, missä $r \geq 0$ ja $R + r \leq \min\{d(x, y), d(x, z)\}$. Koska $d([\gamma(R - \frac{1}{2}), \gamma(R)], [\eta(R - \frac{1}{2}), \eta(R)]) > \delta$ ja kolmio $\Delta(x, \gamma(R + r), \eta(R + r))$ on δ -kapea, kuvajoukot $\chi_\Delta([\gamma(R - \frac{1}{2}), \gamma(R)])$ ja $\chi_\Delta([\eta(R - \frac{1}{2}), \eta(R)])$ eivät leikkaa toisiaan puussa T_Δ . Siis kyseiset janat kuvautuvat puulle T_Δ samaan paikkaan joidenkin janan $[\gamma(R + r), \eta(R + r)]$ kahden keskenään pistevieraan osajanan kanssa. Tällöin erityisesti $1 \leq \ell([\gamma(R + r), \eta(R + r)]) \leq \ell(p)$.

Osoitetaan, että $d(\gamma(R), p) \leq \delta(\log_2(\ell(p)) + 2)$. Perustelu on seuraava: Olkoon piste $p_1 \in p$ polun p keskipiste, $p_{01} \in p$ polun ensimmäisen puolikkaan keskipiste, $p_{11} \in p$ polun toisen puolikkaan keskipiste ja niin edelleen. Yhdistetään kussakin vaiheessa vierekkäiset pisteet toisiinsa geodeettisella janalla. Kun polku p on jaettu osiin n kertaa, kunkin polun osan pituus ja vastaavien päätepisteiden välisen geodeettisen janan pituus on korkeintaan $\ell(p)/2^n$. Valitaan n siten, että $\frac{1}{2} \leq \ell(p)/2^n \leq 1$. Tällainen n on olemassa, koska $\ell(p) \geq 1$.

Nyt pisteet $\gamma(R + r)$, $\eta(R + r)$ ja p_1 muodostavat kolmion, kuten myös pistekolmikot $\{\gamma(R + r), p_1, p_{01}\}$, $\{\eta(R + r), p_1, p_{11}\}$, $\{\gamma(R + r), p_{001}, p_{01}\}$, $\{p, p_{01}, p_{101}\}$ ja niin edelleen. Jos ajatellaan janan $[\gamma(R + r), \eta(R + r)]$ olevan ensimmäisen kolmion kanta, niin jokaisen edellisessä jakovaiheessa syntyneen kolmion kummastakin kyljestä syntyy seuraavassa jakovaiheessa uuden kolmion kanta. Kolmion $\Delta(x, \gamma(R + r), \eta(R + r))$ kapeuden nojalla on olemassa $v_0 \in [\gamma(R + r), \eta(R + r)]$ siten, että $d(\gamma(R), v_0) \leq \delta$. Vastaavasti on olemassa $v_1 \in [\gamma(R + r), p_1] \cup [p_1, \eta(R + r)]$ siten, että $d(v_0, v_1) \leq \delta$. Jatkamalla samoin kaikissa n peräkkäisessä kolmiossa saadaan pisteet v_0, v_1, \dots, v_n , joista jokaisen peräkkäisen pisteparin välinen etäisyys on korkeintaan δ . Lisäksi on olemassa piste $v \in p$, jolla $d(v_n, v) \leq 1$. Pisteeksi v kelpaa esimerkiksi se polun p jakopiste, joka on lähimpänä pistettä v_n . Tällöin $d(v_n, v) \leq \frac{1}{2}(\ell(p)/2^n) \leq \frac{1}{2}$. Nyt $d(x, v) \leq R + (n + 1)\delta + 1$, ja koska $\frac{1}{2} \leq \ell(p)/2^n$, niin $n - 1 \leq \log_2 \ell(p)$. Toisaalta, koska polku p on pallon $B(x, R + r)$ ulkopuolella, $d(x, v) \geq R + r$. Nämä kolme epäyhtälöä yhdistämällä saadaan ratkaistua $r \leq (\log_2 \ell(p) + 2)\delta + 1$, mistä saadaan edelleen

$$\ell(p) \geq 2^{((r-1)/\delta)-2} =: g(r).$$

Riittävän suurella r_0 on $g(r_0) \geq \delta + 2$. Tällöin aiemmin saadun pituuden $\ell(p)$ arvion nojalla, jos $d(\gamma(R + r_0), \eta(R + r_0)) \geq g(r_0)$, niin luku $g(r + r_0)$ rajoittaa minkä tahansa pisteitä $\gamma(R + r)$ ja $\eta(R + r)$ yhdistävän polun pituutta. Voidaan siis valita kuvaus $e : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $e(r) = g(r + r_0)$ avaruuden X eksponentiaalisesti divergenssifunktioksi.

Oletetaan sitten kääntäen, että avaruuden X puolisuorat erkanevat nopeammin kuin lineaarisesti. Olkoon e avaruuden X divergenssifunktio ja $\Delta(x, y, z) \subset X$ geodeettinen kolmio. Merkitään $\alpha_1^x := [x, y]$ ja $\alpha_2^x := [x, z]$, missä $\alpha_1^x : [0, a_1^x] \rightarrow X$ ja $\alpha_2^x : [0, a_2^x] \rightarrow X$ ovat isometrisiä upotuksia. Olkoon

$$T_x := \max\{\hat{t} \in [0, \min\{a_1^x, a_2^x\}] \mid d(\alpha_1^x(t), \alpha_2^x(t)) \leq e(0) \text{ kaikilla } t \leq \hat{t}\}.$$

Merkitään $x_1 := \alpha_1^x(T_x)$ ja $x_2 := \alpha_2^x(T_x)$ sekä valitaan pisteet $z_1 \in [z, x]$, $z_2, y_1 \in [z, y]$ ja $y_2 \in [y, x]$ vastaavasti. Jaetaan tarkastelu kahteen tapaukseen.

Jos $[x, x_1] \cap [y, y_2] \neq \emptyset$, on olemassa pisteet $x_3 \in [x, x_2]$ ja $y_3 \in [y, y_1]$, joille $d(x_3, y_3) \leq 2e(0)$. Käyttämällä divergenssifunktion määritelmää puolisuoriin $\overrightarrow{x_3}$ ja

$\overrightarrow{zy_3}$ nähdään, että $2e(0) \geq d(x_3, y_3) \geq e(d(x_3, z_1)) = e(d(z_2, y_3))$ ja siten janojen $[x_3, z_1]$ ja $[z_2, y_3]$ (ja erityisesti $[z_1, x_2]$ ja $[z_2, y_1]$) pituuksilla on yläraja M . Tällöin $\Delta(x, y, z)$ on $M/2 + e(0)$ -kapea.

Oletetaan sitten, että on olemassa luvut $L_1, L_2, L_3 > 0$, joilla on $d(x_1, y_2) = L_1$, $d(x_2, z_1) = L_2$ ja $d(z_2, y_1) = L_3$. Voidaan olettaa, että $L_1 \geq L_3 \geq L_2$. Merkitään $a := d(x, x_1)$ ja $b := d(y, y_1)$. Tällöin on olemassa $t \in \overline{B}(x, a + L_1/2) \cap \overline{B}(y, b + L_1/2)$. Merkitään $\overline{B}(x, a + L_1/2) \cap \overline{B}(y, b + L_1/2) =: \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2$. Väitetään, että $[x_2, z] \cap B_2 = \emptyset$ ja todistetaan tämä epäsuoralla päättelyllä. Oletetaan päinvastoin, että on olemassa piste $s \in [x_2, z] \cap B_2$. Tällöin $s \notin B_1$, sillä $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Koska oletuksen nojalla $L_3 \geq L_2$, on olemassa piste $u \in [y, z]$ siten, että $d(u, z) = d(s, z)$. Tästä seuraa

$$\begin{aligned} L_1/2 &\leq d(s, x_2) = d(x_2, z) - d(z, s) \\ &= d(x_2, z_1) + d(z_1, z) - d(z, s) \\ &\leq d(z_2, y_1) + d(z_1, z) - d(z, u) \\ &= d(z, y_1) - d(z, u) \\ &= d(u, y_1), \end{aligned}$$

eli piste u ei sisälly avoimeen palloon B_2 . Mutta

$$d(z, y) = d(z, u) + d(u, y) \leq d(z, s) + d(s, y),$$

joten $b + L_1/2 \leq d(u, y) \leq d(s, y) \leq b + L_1/2$, mikä on ristiriita. Siis täytyy olla $[x_2, z] \cap B_2 = \emptyset$.

Olkoon vielä piste $v \in [y, z]$ siten, että $d(y, v) = b + L_1/2$. Tällöin suljetun pallon \overline{B}_2 ulkopuolella pisteiden t ja v välillä on polku, jonka pituus on korkeintaan

$$d(t, x_1) + e(0) + L_2 + e(0) + d(z_2, v) \leq L_1/2 + L_1 + L_1/2 + 2e(0).$$

Siis divergenssifunktion määritelmää käyttämällä saadaan

$$e(L_1/2) \leq L_1/2 + L_1 + L_1/2 + 2e(0) = 2L_1 + 2e(0).$$

Koska funktio e on korkeampaa astetta kuin lineaarinen, täytyy luvun L_1 olla ylhäältä rajoitettu. Tällöin kolmio Δ on kapea. \square

Esimerkki 1.13. Euklidisen avaruuden \mathbb{R}^n suorat eivät erkane.

Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$, γ_1 ja γ_2 pisteen x kautta kulkevat suorat ja θ niiden välinen kulma. Koska \mathbb{R}^n ei ole Gromov-hyperbolinen, divergenssifunktio e on korkeintaan lineaarinen: $e(r) \leq kr + c$. Koska pisteiden $\gamma_1(R + r)$ ja $\gamma_2(R + r)$ kautta kulkevan ympyräkaaren pituus on $(R + r)\theta$, niin divergenssifunktion määritelmän mukaan $e(r) = kr + c \leq (R + r)\theta$ kaikilla suorilla γ_1 ja γ_2 , ja siis erityisesti kaikilla $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Siis täytyy olla $e(t) = 0$ kaikilla $t > 0$. Tällöin $e(t) \not\rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \infty$, joten avaruuden \mathbb{R}^n suorat eivät erkane.

2. GROMOVIN REUNA ÄÄRETTÖMYYDESSÄ

Tässä luvussa siirrytään tarkastelemaan Gromov-hyperbolisten metristen avaruuksien reunoja äärettömyydessä. Metriset avaruudet ovat sellaisenaan topologiaisia objekteja, joten niiden reuna on luontevasti määriteltävissä. Esimerkiksi hyperbolisen tason \mathbb{H}^2 reuna äärettömyydessä on intuitiivisesti Poincarén kiekkomallin \mathbb{B}_2 topologinen reuna \mathbb{S}^1 . Samaa reunaan voidaan päätyä myös puolisuorien ekvivalenssiluokkien avulla.

Reunan konstruktion idea on seuraava:

Olkoon X Gromov-hyperbolinen avaruus. Kiinnitetään piste $x_0 \in X$. Osoittautuu, ettei ole väliä, mikä piste valitaan reunan tarkastelun lähtökohdaksi. Esimerkiksi Poincarén kiekkomallissa voidaan olettaa, että $x_0 = 0$. Tarkastellaan pisteestä x_0 alkavia geodeettisia puolisuoria eli isometristen upotusten $[0, \infty) \rightarrow X$, $0 \mapsto x_0$ kuvajoukkoja. Geodeesit γ ja γ' ovat ekvivalentit, jos joukko $\{d(\gamma(t), \gamma'(t)) \mid t \in [0, \infty)\}$ on ylhäältä rajoitettu. Nyt voidaan määrittellä avaruuden X reuna ∂X näiden geodeettisten puolisuorien ekvivalenssiluokkien joukkona.

Reuna voidaan konstruoida puolisuorien sijaan äärettömyyteen suppenevien jonojen avulla. Osoittautuu, että pallokompaktissa avaruudessa molemmat konstruktiot antavat saman reunan.

Tämän luvun lähteinä on käytetty teoksia [7] ja [13]. Lauseen 2.7 kohdassa (1) kuvauksen i_x surjektiivisuuden osoittamisessa käytetään ekvivalenssin $\gamma \sim \eta$ aikaan saamiseksi lähteen [3] ideaa.

2.1. Reunan konstruktio.

Määritelmä 2.1. Olkoon X Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus. Geodeettiset puolisuorat $\gamma_1 : [0, \infty) \rightarrow X$ ja $\gamma_2 : [0, \infty) \rightarrow X$ ovat *ekvivalentit*, merkitään $\gamma_1 \sim \gamma_2$, jos on olemassa luku $K > 0$ siten, että $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq K$ kaikilla $t \geq 0$.

Hyperbolisen metrisen avaruuden X geodeettisten puolisuorien joukon relaatio \sim on ekvivalenssirelaatio.

Määritelmä 2.2. (geodeettinen reuna)

Olkoon (X, d) Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus ja piste $x \in X$ kiinnitetty. Avaruuden X *geodeettinen reuna pisteen x suhteen* on joukko

$$\partial_x^g X := \{ [\gamma] \mid \gamma : [0, \infty) \rightarrow X \text{ on geodeettinen puolisuora, } \gamma(0) = x \}.$$

Edelleen, avaruuden X *geodeettinen reuna* on joukko

$$\partial^g X := \{ [\gamma] \mid \gamma : [0, \infty) \rightarrow X \text{ on geodeettinen puolisuora} \}.$$

Huomataan, että $\partial^g X = \bigcup_{x \in X} (\partial_x^g X)$.

Määritellään seuraavaksi hyperbolisen metrisen avaruuden reuna äärettömyyteen suppenevien jonojen avulla. Reunan konstruktio on tällöin hyvin samanlainen kuin geodeettisten puolisuorien avulla tehty.

Määritelmä 2.3. Olkoon (X, d) hyperbolinen metrinen avaruus ja $x \in X$ kiinnitetty. Jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *suppenee äärettömyyteen*, jos $\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot x_j)_x = \infty$. Äärettömyyteen suppenevat jonot $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ovat *ekvivalentit*, merkitään $(x_n) \sim (y_n)$, jos $\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_x = \infty$.

Huomataan, että jono (x_n) suppenee äärettömään, jos ja vain jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \infty.$$

Huomataan myös, että äärettömyyteen suppeneminen tai kahden jonon ekvivalenttius ei riipu pisteen x valinnasta ja että jokainen äärettömyyteen suppeneva jono on ekvivalentti omien osajonojensa kanssa.

Määritelmä 2.4. (jonoreuna)

Olkoon (X, d) Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus. Avaruuden X reuna on joukko

$$\partial X := \{ [(x_n)] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \text{ suppenee äärettömyyteen} \}.$$

Nyt kohdissa 2.2 ja 2.4 määriteltyjen reunojen välille voidaan määritellä kanoniset kuvaukset. Koska $\partial_x^g X \subset \partial^g X$ kaikilla pisteillä $x \in X$, kuvaus

$$i_x : \partial_x^g X \rightarrow \partial^g X, \quad i_x([\gamma]) = [\gamma]$$

on hyvin määritelty. Edelleen, jos $\gamma \subset X$ on geodeettinen puolisuora, niin jono $(\gamma(n))_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee äärettömyyteen. Tällöin myös kuvaus

$$i : \partial^g X \rightarrow \partial X, \quad i([\gamma]) = [(\gamma(n))_{n \in \mathbb{N}}]$$

on hyvin määritelty. Samaistamalla $[\gamma] = i([\gamma]) = [(\gamma(n))]$ voidaan tulkita, että $\partial^g X \subset \partial X$. Itse asiassa, jos avaruus X on pallokompakti hyperbolinen avaruus (toisin sanoen kaikki avaruuden X suljetut pallot ovat kompakteja), niin ylläolevat inkluusiot $\partial_x^g X \subset \partial^g X$ ja $\partial_x^g X \subset \partial X$ pätevät (samaistuksen kautta) myös toiseen suuntaan ja kaikki kohtien 2.2 ja 2.4 määritelmät antavat samat reunan pisteet. Tämän osoittamista varten tarvitaan kaksi lemmaa.

Lemma 2.5. *Olkoon X hyperbolinen metrinen avaruus ja (x_i) ja (y_i) avaruuden X jonoja siten, että (x_i) suppenee äärettömyyteen ja $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_i)_x = \infty$. Tällöin (y_i) suppenee äärettömyyteen ja $(x_i) \sim (y_i)$.*

Todistus. Avaruuden X hyperbolisuuden nojalla

$$(x_i \cdot y_j)_x \geq \min\{(x_i \cdot x_j)_x, (x_j \cdot y_j)_x\} - \delta.$$

Koska oletuksen nojalla $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i \cdot x_j)_x = \infty = \lim_{j \rightarrow \infty} (x_j \cdot y_j)_x$, täytyy olla

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_x = \infty.$$

Vastaavasti $(y_i \cdot y_j)_x \geq \min\{(x_i \cdot y_i)_x, (x_i \cdot y_j)_x\} - \delta$, joten $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (y_i \cdot y_j)_x = \infty$. Siis jono (y_i) suppenee äärettömyyteen ja $(x_i) \sim (y_i)$. \square

Lemma 2.6. *Olkoon X hyperbolinen metrinen avaruus, $R \geq 0$ ja (x_i) ja (y_i) avaruuden X jonoja siten, että (x_i) suppenee äärettömyyteen ja $d(x_i, y_i) \leq R$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Tällöin (y_i) suppenee äärettömyyteen ja $(x_i) \sim (y_i)$.*

Todistus. Oletuksen nojalla

$$(x_i \cdot y_i)_x = \frac{1}{2}(d(x_i, x) + d(y_i, x) - d(x_i, y_i)) \geq \frac{1}{2}(d(x_i, x) + d(y_i, x) - R).$$

Koska (x_i) suppenee äärettömyyteen, $\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_i, x) = \infty$. Siten yllä olevan epäyhtälön nojalla myös $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_i)_x = \infty$. Nyt Lemman 2.5 mukaan jono (y_i) suppenee äärettömyyteen ja $(x_i) \sim (y_i)$. \square

Lause 2.7. *Olkoon (X, d) pallokompakti Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus. Tällöin*

- (1) *kuvaus $i_x : \partial_x^g X \rightarrow \partial^g X$ on bijektio kaikilla $x \in X$.*
- (2) *kuvaus $i \circ i_x : \partial_x^g X \rightarrow \partial X$ on bijektio kaikilla $x \in X$.*
- (3) *kuvaus $i : \partial^g X \rightarrow \partial X$ on bijektio.*

Todistus. Osoitetaan ensin kohta (2).

- (2) Olkoon $x \in X$ mikä tahansa. Osoitetaan ensin surjektivisuus. Olkoon (y_n) avaruuden X jono siten, että $[(y_n)] =: y \in \partial X$. Halutaan löytää pisteestä x alkava puolisuora γ siten, että $(\gamma(n)) \sim (y_n)$. Tällöin $[\gamma(n)] = [(y_n)] \in \partial X$. Yhdistetään pisteet x ja y_i janalla $c_i : [0, d(x, y_i)] \rightarrow X$, $i \in \mathbb{N}$. Nämä janat ovat kokoelma tasaisesti rajoitettuja, kompakteilla väleillä $[a, b] \subset [0, \infty)$ yhtä-jatkuvia kuvauksia. Siis Ascoli-Arzelan lauseen mukaan jonolla (c_i) on osajono (c_{i_k}) , joka suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa rajakuvausta $\gamma : [0, \infty) \rightarrow X$. Koska $c_i(0) = x$ kaikilla i , niin $\gamma(0) = x$. Lisäksi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma(i) = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{i_k}(d(x, y_{i_k})) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{i_k} = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y.$$

Tasaisen suppenemisen johdosta kaikilla $t \in [0, \infty)$ tarpeeksi suurella kokonaisluvulla i_t on $d(\gamma(t), c_{i_t}(t)) \leq 1$. Siis Lemman 2.6 nojalla $(\gamma(t)) \sim (c_{i_t}(t))$. Koska

$$(c_{i_t}(t) \cdot y_{i_t})_x = \frac{1}{2}(d(c_{i_t}(t), x) + d(y_{i_t}, x) - d(c_{i_t}(t), y_{i_t})) = t,$$

niin $\lim_{t \rightarrow \infty} (c_{i_t}(t), y_{i_t})_x = \infty$ ja siten Lemman 2.5 nojalla $(c_{i_t}(t)) \sim (y_{i_t})$. Koska \sim on ekvivalenssirelaatio ja kukin jono on ekvivalentti omien osajonojensa kanssa, saadaan $(\gamma(t)) \sim (y_{i_t}) \sim (y_t)$.

Osoitetaan sitten injektivisyys. Olkoot $[i \circ i_x([\gamma])] = [i \circ i_x([\eta])] := y \in \partial X$ siten, että γ ja η ovat pisteestä x alkavia puolisuoria. Surjektivisuuden nojalla on olemassa ainakin yksi tällainen puolisuora. Siis jonoille $(\gamma(s))$ ja $(\eta(s))$ on $\lim_{s \rightarrow \infty} (\gamma(s) \cdot \eta(s))_x = \infty$. Olkoon $t \geq 0$ mikä tahansa ja $x_1 \in \gamma$ ja $x_2 \in \eta$ siten, että $(x_1 \cdot x_2)_x \geq t$. Tämä ehto on totta, kun valitaan x_1 ja x_2 riittävän kaukaa pisteestä x , sillä avaruuden X hyperbolisuuden nojalla

$$(x_1 \cdot x_2)_x \geq \min\{(x_1 \cdot \gamma(s))_x, (\gamma(s) \cdot \eta(s))_x, (\eta(s) \cdot x_2)_x\} - 2\delta'.$$

Tarkastellaan kolmiota $\Delta(x, x_1, x_2)$, missä $[x, x_1] \subset \gamma$ ja $[x, x_2] \subset \eta$. Tällöin janojen $[x, x_1]$ ja $[x, x_2]$ pisteestä x alkavat osat, joiden pituus on $(x_1 \cdot x_2)_x$, samaistuvat puulla T_Δ . Siis avaruuden X hyperbolisuuden nojalla erityisesti $d(\gamma(t), \eta(t)) \leq \delta$. Koska t voitiin valita mielivaltaisen suureksi ja pisteet x_1 ja x_2 niin, että ylläoleva ehto pätee, tämä on totta kaikilla $t \geq 0$. Siis $\gamma \sim \eta$ eli $[\gamma] = [\eta] \in \partial_x^g X$ ja siten $i \circ i_x$ on injektio.

- (1) Olkoon $x \in X$ mikä tahansa. Koska kohdan (2) nojalla kuvaus $i \circ i_x$ on bijektio, kuvauksen i_x täytyy olla injekttiivinen.

Osoitetaan kuvauksen $i_x : \partial_x^g X \rightarrow \partial^g X$ surjektivisuus. Olkoon η avaruuden X puolisuora siten, että $[\eta] =: z \in \partial^g X$ ja $\eta(0) =: y$. Halutaan löytää pisteestä x alkava puolisuora γ siten, että $\gamma \sim \eta$. Tämä puolisuoraehdokas γ löydetään täsmälleen samoin kuin tapauksessa (2): puolisuoran γ konstruktiossa käytettäväksi jonoksi voidaan valita $(y_n) = (\eta(n))$. Pisteet x ja $\eta(n)$

yhdistetään janoilla $c_n : [0, d(x, \eta(n))] \rightarrow X$, ja Ascoli-Arzelan lauseen nojalla jonon (c_n) osajono (c_{n_k}) suppenee kompakteilla väleillä tasaisesti kohti jatkuvaa rajakuvausta γ , joka on pisteestä x alkava puolisuora.

Merkitään kolmion $\Delta(x, y, \eta(i_k))$ sivulla $[x, \eta(i_k)]$ sijaitsevaa internaalipistettä i_{y, i_k} . Nyt jokaisella $t \in [0, \infty)$ riittävän suurella kokonaisluvulla i'_t on $t \in [0, d(\eta(i_k), i_{y, i_k})]$ kaikilla $i_k \geq i'_t$, jolloin kolmion $\Delta(x, y, \eta(i_k))$ kapeuden nojalla

$$d(c_{i_k}((y \cdot \eta(i_k))_x + t), \eta((x \cdot \eta(i_k))_y + t)) \leq \delta.$$

Toisaalta jonon (c_{n_k}) tasaisen suppenemisen nojalla riittävän suurella kokonaisluvulla i''_t on kaikilla $i_j \geq i''_t$

$$d(\gamma((y \cdot \eta(i_k))_x + t), c_{i_j}((y \cdot \eta(i_k))_x + t)) \leq 1.$$

Siis valitsemalla $i_t = \max\{i'_t, i''_t\}$ saadaan

$$\begin{aligned} & d(\gamma((y \cdot \eta(i_t))_x + t), \eta((x \cdot \eta(i_t))_y + t)) \\ & \leq d(\gamma((y \cdot \eta(i_t))_x + t), c_{i_t}((y \cdot \eta(i_t))_x + t)) + \\ & \quad d(c_{i_t}((y \cdot \eta(i_t))_x + t), \eta((x \cdot \eta(i_t))_y + t)) \\ & \leq \delta + 1. \end{aligned}$$

Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla edelleen saadaan

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \eta(t)) & \leq d(\gamma(t), \gamma((y \cdot \eta(i_t))_x + t)) + d(\eta((x \cdot \eta(i_t))_y + t), \eta(t)) \\ & \leq (y \cdot \eta(i_t))_x + \delta + 1 + (x \cdot \eta(i_t))_y \\ & = d(x, y) + \delta + 1. \end{aligned}$$

Koska tämä arvio on voimassa kaikilla $t \geq 0$, on $\gamma \sim \eta$.

- (3) Kohtien (2) ja (1) nojalla kuvaus $(i \circ i_x) \circ i_x^{-1} = i \circ (i_x \circ i_x^{-1}) = i$ on kahden bijektion yhdistettynä kuvauksena myös bijektio.

□

Kuvauksen i_x bijektiivisyydestä seuraa $i_x(\partial_x^g X) = \partial^g X$ ja $i_x^{-1}(\partial^g X) = \partial_x^g X$ kaikilla $x \in X$, ja vastaavasti kuvauksen $i \circ i_x$ bijektiivisyydestä seuraa $i(\partial^g X) = \partial X$ ja $i^{-1}(\partial X) = \partial_x^g X$, joten $\partial X = \partial_x^g X = \partial^g X$ kaikilla $x \in X$ siinä mielessä, että samat reunan pisteet saadaan määritettyä jonojen tai mistä tahansa avaruuden X pisteestä alkavien puolisuorien avulla. Kun määritellään avaruuden X reunoihin topologiat, tullaan lisäksi osoittamaan, että pallokompaktissa hyperbolisessa avaruudessa kaikki kolme reunaa ovat keskenään homeomorfishet.

2.2. Reunan topologia. Edellä määritellyyn Gromovin reunaan ∂X ja avaruuteen $X \cup \partial X$ voidaan määritellä topologiat. Esitellään ensin sekä geodeettisten puolisuorien että jonojen avulla konstruoidun reunan topologia ja osoitetaan, että aidolle hyperboliselle avaruudelle nämä topologiat ovat samat. Sen jälkeen laajennetaan topologia koko avaruuteen $X \cup \partial X$. Tällöin osoittautuu, että joukot ∂X ja $X \cup \partial X$ ovat kompakteja, joten avaruus $X \cup \partial X$ on avaruuden X kompaktisointi, jota voidaan merkitä $\bar{X} := X \cup \partial X$. Lisäksi joukko X on tiheä avaruudessa \bar{X} , joten \bar{X} on avaruuden X melko minimalistinen kompaktisointi.

Määritelmä 2.8. (geodeettisen reunan topologia)

Olkoon (X, d) Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus ja $x \in X$ kiinnitetty. Määritellään kaikilla geodeettisen reunan pisteillä $p = [\gamma_1] \in \partial_x^g X$ ja kaikilla luvuilla $r \geq 0$ pistejoukko

$$V(p, r) := \{q \in \partial_x^g X \mid \liminf_{t \rightarrow \infty} (\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t))_x \geq r \text{ jollakin pisteestä } x \text{ alkavalla puolisuoralla } \gamma_2, \text{ jolle } q = [\gamma_2]\},$$

ja edelleen määritellään pisteen $p \in \partial_x^g X$ ympäristökannaksi joukossa $\partial_x^g X$ kokoelma $\{V(p, r) \mid r \geq 0\}$.

Vastaavalla tavalla voidaan määritellä topologia jonojen avulla konstruoituun reunaan.

Määritelmä 2.9. (jonoreunan topologia)

Olkoon (X, d) Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus ja $x \in X$ kiinnitetty. Määritellään kaikilla jonoreunan pisteillä $p = [(x_n)] \in \partial X$ ja kaikilla luvuilla $r \geq 0$ pistejoukko

$$U(p, r) := \{q \in \partial X \mid \liminf_{i, j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_x \geq r \text{ jollakin avaruuden } X \text{ jonolla } (y_n), \text{ jolle } q = [(y_n)]\}.$$

Joukkoon ∂X saadaan topologia asettamalla pisteen $p \in \partial X$ ympäristökannaksi kokoelma $\{U(p, r) \mid r \geq 0\}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että pallokompaktille hyperboliselle avaruudelle kaikki edellä esitellyt topologiat ovat yhteneviä, ∂X on kompakti ja $X \cup \partial X$ on avaruuden X kompaktisointi.

Lause 2.10. *Olkoon (X, d) pallokompakti Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus. Tällöin*

- (1) *kuvaus $i : \partial_x^g X \rightarrow \partial^g X$ on homeomorfismi kaikilla $x \in X$.*
- (2) *kuvaus $i \circ i_x : \partial_x^g X \rightarrow \partial X$ on homeomorfismi kaikilla $x \in X$.*

Todistus. Koska kokoelma $\{V(p, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on pisteen $p \in \partial_x^g X$ ja $p \in \partial^g X$ numeroituva ympäristökanta ja kokoelma $\{U(q, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ on pisteen $q \in \partial X$ numeroituva ympäristökanta, reunat $\partial_x^g X$, $\partial^g X$ ja ∂X toteuttavat ensimmäisen numeroituvuusaksiooman ja siten kuvausten i ja i_x jatkuvuus voidaan karakterisoida jonojatkuvuuden avulla.

- (1) Aiemmin osoitettiin, että kuvaus i_x on bijektio. Osoitetaan nyt, että i_x ja i_x^{-1} ovat jatkuvia.

Olkoon (γ_i) jono pisteestä x alkavia puolisuoria, jotka suppenevat kuvaukseen γ . Siis jono $([\gamma_i])$ suppenee pisteeseen $[\gamma]$. Olkoot (η_i) jono mitä tahansa avaruuden X puolisuoria siten, että $[\eta_i] = [\gamma_i]$ ja η puolisuora, jolla $[\eta] = [\gamma]$. Nyt

$$\begin{aligned} d(\eta_i(t), \eta(t)) &\leq d(\eta_i(t), \gamma_i(t)) + d(\gamma_i(t), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \eta(t)) \\ &\leq K + K' + \epsilon, \end{aligned}$$

kaikilla $t \geq 0$, kun i on riittävän suuri, sillä $\eta_i \sim \gamma_i$, (γ_i) suppenee kuvaukseen γ tasaisesti kompakteilla väleillä ja $\gamma \sim \eta$. Siis $([\eta_i])$ suppenee pisteeseen $[\eta]$ ja siten kuvaus i_x on jatkuva. Kuvauksen i_x^{-1} jatkuvuus saadaan samanlaisella päättelyllä.

- (2) Aiemmin osoitettiin, että kuvaus $i \circ i_x$ on bijektio kaikilla $x \in X$. Osoitetaan nyt, että $i \circ i_x$ ja $(i \circ i_x)^{-1}$ ovat jatkuvia.

Olkoon $x \in X$ ja (γ_i) jono pisteestä x alkavia puolisuoria, jotka suppenevat kuvaukseen γ tasaisesti rajoitetuilla väleillä. Puolisuorat γ_i määräävät reunan pisteistä koostuvan jonon $([\gamma_i])$, joka suppenee pisteeseen $[\gamma]$. Kaikille $t \geq 0$ ja $\epsilon > 0$ saadaan tasaisen suppenemisen nojalla $d(\gamma_i(t), \gamma(t)) \leq \epsilon$ kaikilla indekseillä $i \geq i_0$ valitsemalla riittävän suuri (vain luvusta ϵ riippuva) i_0 . Olkoot jonot (x_n) ja (y_n) siten, että $x_n = \gamma_i(n)$ ja $y_n = \gamma(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kun $n \geq t$, on voimassa $d(x_n, y_n) \leq (d(x_n, x) - t) + (d(y_n, x) - t) + \epsilon$, mistä seuraa

$$\begin{aligned} (x_n \cdot y_n)_x &= \frac{1}{2}(d(x_n, x) + d(y_n, x) - d(x_n, y_n)) \\ &\geq \frac{1}{2}(d(x_n, x) + d(y_n, x) - d(x_n, x) + t - d(y_n, x) + t - \epsilon) \\ &= t - \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $(x'_{i,n})$ ja (y'_n) mielivaltaiset jonot siten, että $(x'_{i,n})$ suppenee pisteeseen $[\gamma_i]$ ja (y'_n) suppenee pisteeseen $[\gamma]$. Tällöin jonojen ekvivalenttiuden määritelmän nojalla

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot x'_{i,n})_x = \infty \text{ ja } \liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n \cdot y'_n)_x = \infty.$$

Koska avaruus X on hyperbolinen,

$$(x'_{i,n} \cdot y'_n)_x \geq \min\{(x'_{i,n} \cdot x_n)_x, (x_n \cdot y_n)_x, (y_n \cdot y'_n)_x\} - 2\delta$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja siten

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x'_{i,n} \cdot y'_n)_x \geq t - \frac{\epsilon}{2} - 2\delta.$$

Koska voidaan valita mielivaltaisen suuri t , jono $([x'_{i,n}])_{i \in \mathbb{N}}$ suppenee pisteeseen $[(y'_n)]$ ja siten $i \circ i_x$ on jatkuva.

Olkoon sitten jono (y_i) reunan ∂X pisteitä siten, että (y_i) suppenee pisteeseen $y \in \partial X$. Olkoon γ_i pisteiden x ja y_i välinen puolisuora ja γ pisteiden x ja y välinen puolisuora. Tällöin Ascoli-Arzelan lauseen nojalla jonolla (γ_i) on osajono (γ_{i_k}) , joka suppenee puolisuoraan γ' tasaisesti kompakteilla väleillä. Koska kuvaus $i \circ i_x$ on injektio, kaikki pisteestä x alkavat ja pisteeseen $y \in \partial X$ päättyvät puolisuorat ovat keskenään ekvivalentteja. Siis $\gamma' \sim \gamma$ ja siten jono $([\gamma_i])$ suppenee pisteeseen $[\gamma]$. Siis $(i \circ i_x)^{-1}$ on jatkuva. □

Edellisen todistuksen nojalla joukot $\partial_x^g X$ ja $\partial^g X$ sekä $\partial_x^g X$ ja ∂X ovat keskenään homeomorfinia kaikilla $x \in X$. Siten kaikki kolme reunaa ovat keskenään homeomorfinia ja siis topologisessa mielessä samoja joukkoja.

Reunan ∂X topologian lisäksi voidaan edelleen määritellä topologia koko avaruuteen $X \cup \partial X$:

Valitaan pisteelle $x \in X$ avaruuden $X \cup \partial X$ ympäristökannaksi sama ympäristökanta

kuin avaruudessa X , eli esimerkiksi avoimet x -keskiset r -säteiset pallot

$$\{B(x, r) \mid r > 0\}.$$

Pisteelle $p \in \partial X$ valitaan avaruuden $X \cup \partial X$ ympäristökannaksi kokoelma

$$\{U'(p, r) \mid r > 0\},$$

missä $U'(p, r)$ määritellään yhdisteenä

$$U(p, r) \cup \{x \in X \mid \liminf_{i \rightarrow \infty} (x \cdot x_i)_y > r \text{ jollakin jonolla } (x_n), \text{ jolle } p = [(x_n)]\}.$$

Joukkoja $U'(p, r)$ voi ajatella eräänlaisina p -keskeisinä avoimina palloina. Tällä tavalla konstruoitu topologia ei riipu Gromovin tulossa käytetyn tarkastelupisteen y valinnasta.

Lause 2.11. *Jos X on pallokompakti Gromov-hyperbolinen avaruus, niin joukot ∂X ja $X \cup \partial X$ ovat kompakteja.*

Todistus. Avaruus ∂X on metriskyvä, sillä sille voidaan konstruoida metriikka, joka indusoi saman topologian kuin edellä on esitelty (katso [3], s. 432). Koska metriskyvyys on topologinen ominaisuus ja pallokompaktille avaruudelle X eri konstruktioiden reunat ovat keskenään homeomorfisia, myös reunat $\partial_x^g X$ ja $\partial^g X$ ovat metriskyviä. Tällöin kompaktius ja jonokompaktius ovat ekvivalentteja ominaisuuksia kaikissa reunoissa. Siis riittää osoittaa, että ∂X ja $X \cup \partial X$ ovat jonokompakteja.

Olkoon $x \in X$ ja $(x_n) \subset \partial_x^g X$ jono. Olkoon (c_n) jono puolisuoria pisteestä x pisteisiin x_n . Jono (c_n) on yhtäjatkuva ja tasaisesti rajoitettu, joten Ascoli-Arzelan lauseen nojalla jonolla (c_n) ja siten myös jonolla (x_n) on suppeneva osajono. Siis $\partial_x^g X$ on jonokompakti, ja koska kuvaukset i_x ja $i \circ i_x$ ovat jatkuvia, myös $\partial^g X$ ja ∂X ovat jonokompakteja.

Olkoon $x \in X$ ja $(y_n) \subset X \cup \partial X$ jono. Olkoon (c_n) , $c_n : [0, d(x, y_n)]$ jono kuvauksia (janoja tai puolisuoria) pisteiden x ja y_n välillä. Jono (c_n) on yhtäjatkuva ja tasaisesti rajoitettu. Tällöin Ascoli-Arzelan lauseen nojalla jonolla (c_n) ja siten myös jonolla (y_n) on suppeneva osajono. Siis $X \cup \partial X$ on jonokompakti. \square

Koska avaruus $X \cup \partial X$ on kompakti ja sisältää avaruuden X , se on avaruuden X kompaktisointi. Siis voidaan mielekkäästi merkitä $\bar{X} := X \cup \partial X$. Todetaan vielä, että kyseinen kompaktisointi on saatu aikaan lisäämällä avaruuteen X melko vähän pisteitä.

Lause 2.12. *Jos X on pallokompakti Gromov-hyperbolinen avaruus, niin X on tiheä avaruudessa $X \cup \partial X$.*

Todistus. Avaruuden $X \cup \partial X$ topologian määritelmästä johtuen $X \cap U \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla joukoilla U . Siis X on tiheä avaruudessa $X \cup \partial X$. \square

3. GROMOV-HYPERBOLINEN RYHMÄ JA SEN REUNA

Tässä luvussa laajennetaan Gromov-hyperbolisuuden ja Gromovin reunan käsitteet koskemaan myös ryhmiä samaistamalla äärellisesti viritetyt ryhmät metrisiin avaruuksiin Cayleyn graafien ja kvasi-isometrioiden avulla. Koska edellisissä kappaleissa käsitellyt puolisuorat, janat ja kolmiot eivät välttämättä ole mielekkäitä käsitteitä ryhmässä, tutkitaan ryhmän sijaan sen Cayleyn graafia, jossa kyseiset käsitteet ovat luontevia. Ryhmän ja sen Cayleyn graafin välinen kvasi-isometria takaa, että monet Cayleyn graafin ominaisuudet ovat voimassa myös sen taustalla olevassa ryhmässä. Tämä mahdollistaa algebrallisten objektien, ryhmien, tutkimisen geometrisin menetelmin.

Tämän luvun sisältö on koottu lukuisista eri lähteistä. Luvun 3.1 tiedot Cayleyn graafeista pohjautuvat pääosin teokseen [13]. Kvasi-isometrioista kertovan luvun 3.2 pääasialliset lähteet ovat [3], [15] ja [2]. Luvussa 3.3 esitellyt tulokset todistuksineen seuraavat lähteiden [3], [1] ja [15] vastaavia tuloksia. Gromov-hyperbolinen ryhmä ja sen reuna on määritelty luvuissa 3.4 ja 3.5 kuten valtaosassa tämän työn lähteistä, esimerkiksi [7] ja [4]. Lukujen 3.4 ja 3.5 esimerkkien todistukset on kirjoitettu itse, mutta ideat juuri näihin esimerkkeihin ovat lähteestä [6]. Toisaalta samat ryhmät tuntuvat olevan klassisia esimerkkejä, jotka mainitaan lähes kaikissa aiheita käsittelevissä lähteissä mutta joiden tarkat perustelut johdonmukaisesti sivuutetaan.

3.1. Cayleyn graafi.

Määritelmä 3.1. Ryhmän G osajoukko $S \subset G$ on ryhmän G *virittäjäjoukko*, jos jokainen ryhmän G alkio voidaan ilmaista joukon S alkioden tulona. Jos virittäjäjoukko S on äärellinen, sanotaan, että ryhmä G on *äärellisesti viritetty*.

Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan jatkossa, että jos $s \in S$, niin $s^{-1} \in S$, eli toisin sanoen $S = S^{-1}$.

Määritelmä 3.2. (Cayleyn graafi)

Äärellisesti viritetyn ryhmän G *Cayleyn graafi* virittäjäjoukon S suhteen (merkitään $\Gamma(G, S)$) on graafi, jonka kärjet ovat ryhmän G alkioita ja sivut määritelty seuraavasti: Kärkiä g ja g' yhdistää sivu, jos $g' = sg$ jollakin virittäjäjoukon alkiolla $s \in S$.

Edellä tehdyn oletuksen $S = S^{-1}$ nojalla sivun yhdistämien kärkien asema on symmetrinen ja siten Cayleyn graafin sivut on määritelty hyvin: jos $g' = sg$ jollakin virittäjäjoukon alkiolla $s \in S$, niin myös $s^{-1} \in S$ ja $g = s^{-1}g'$.

Määritellään seuraavaksi Cayleyn graafiin metriikka. Olkoon $\Gamma(G, S)$ äärellisesti viritetyn ryhmän G Cayleyn graafi virittäjäjoukon S suhteen. Asetetaan kunkin Cayleyn graafin sivun pituudeksi 1, jolloin niistä jokainen on välin $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ kopio. Asetetaan graafin kärkien g ja g' väliseksi etäisyydeksi lyhimmän niitä yhdistävän graafin sivuista koostuvan polun pituus.

Jos ajatellaan kunkin sivun $[g, sg]$ muodostuneen välistä $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ isometrisellä upotuksella $\varphi_{g,s} : [0, 1] \rightarrow [g, sg]$ siten, että $\varphi_{g,s}(0) = g$, $\varphi_{g,s}(1) = sg$ ja kaikilla $t \in [0, 1]$ on $d(g, \varphi_{g,s}(t)) = t$, niin jokaisella sivun pisteellä $x \in]g, sg[$ on luonnollisesti määräytyneet yksikäsitteiset etäisyydet $d(g, x)$ ja $d(x, sg)$ siten, että

$d(g, x) + d(x, sg) = 1$. Näin ollen voidaan määritellä pisteen $x \in]g, sg[$ etäisyys mielivaltaisesta Cayleyn graafin kärjestä g' asettamalla

$$d(x, g') = \min\{ d(x, g) + d(g, g'), d(x, sg) + d(sg, g') \}.$$

Tällöin $d(x, g')$ on graafin sivuista ja yhdestä osasivusta koostuvan pisteiden x ja g' välisen lyhimmän polun pituus.

Edelleen, jos x' on jonkin toisen välin $]g', s'g'[$ piste, niin pisteiden x ja x' välinen etäisyys on

$$d(x, x') = \min\{ d(x, g) + d(g, g') + d(g', x'), d(x, g) + d(g, s'g') + d(s'g', x'), \\ d(x, sg) + d(sg, g') + d(g', x'), d(x, sg) + d(sg, s'g') + d(s'g', x') \}$$

eli graafin sivuista ja kahdesta osasivusta koostuvan pisteiden x ja x' välisen lyhimmän polun pituus.

Kaikissa ylläolevissa tapauksissa kahden pisteen väliseksi etäisyydeksi saadaan pisteitä yhdistävän lyhimmän polun pituus. Muotoillaan tämä päättely määritelmäksi.

Määritelmä 3.3. (Cayleyn graafin metriikka)

Olkoon $\Gamma(G, S)$ äärellisesti viritetyn ryhmän G Cayleyn graafi viritäjäjoukon S suhteen. Asetetaan kunkin Cayleyn graafin sivun pituudeksi 1. Graafin kahden pisteen välinen etäisyys on minimi niitä yhdistävien graafin sivuista ja sivujen osista koostuvien polkujen pituuksista:

$$d(x, x') = \min\{ \ell(\gamma) \mid \gamma \subset \Gamma(G, S) \text{ on polku pisteiden } x \text{ ja } x' \text{ välillä } \}$$

kaikille $x, x' \in \Gamma(G, S)$.

Huomautus 3.4. Kahden kärjen etäisyys toisistaan Cayleyn graafin metriikalla vastaa äärellisesti viritetyn ryhmän G sanametriikkaa d_S : Jos g ja g' ovat ryhmän G alkioita ja $g = s_{i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_n}$ sekä $g' = s'_{j_1} \cdot \dots \cdot s'_{j_m}$ niiden (jotkin) esitykset viritäjäjoukon S alkioden avulla eli joukon S alkioden muodostamina sanoina, niin

$$(s'_{j_1} \cdot \dots \cdot s'_{j_m})(s_{i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_n})^{-1} = g'g^{-1}$$

on sana, joka kuvaa alkion g alkioiksi g' . Määritellään kahden alkion etäisyys tällaisten sanojen minimipituutena:

$$d_S(g, g') = \min\{ |\gamma| \mid \gamma \text{ on joukon } S \text{ alkioden sana siten, että } g' = \gamma g \},$$

missä sanan pituus $|\gamma|$ on sanan γ sisältämien joukon S alkioden lukumäärä (sama alkio voi esiintyä ja siten tulla lasketuksi useita kertoja). Koska operaatiota $s(g)$ vastaa Cayleyn graafin sivu $[g, sg]$ kaikilla alkioilla $s \in S$ ja $g \in G$, niin jokaista sanaa γ , joka kuvaa alkion g alkioiksi g' , vastaa Cayleyn graafin sivuista koostuva polku, joka yhdistää kärjen g kärkeen g' . Tämän polun sisältämien sivujen lukumäärä on sama kuin sanan γ alkioden lukumäärä, mistä seuraa metriikoiden yhtenevyys. Samasta syystä on luontevaa käyttää merkintää γ sekä yllä kuvatusta sanasta että Cayleyn graafin $\Gamma(G, S)$ vastaavasta polusta.

3.2. Kvasi-isometria. Seuraavaksi esitellään kvasi-isometria, joka on tärkeä työväline ryhmien ja niiden Cayleyn graafien samaistamisessa.

Määritelmä 3.5. (Kvasi-isometria)

Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on (K, ϵ) -kvasi-isometrinen upotus, jos on olemassa vakiot $K \geq 1$ ja $\epsilon \geq 0$ siten, että

$$\frac{1}{K}d_X(x_1, x_2) - \epsilon \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd_X(x_1, x_2) + \epsilon$$

kaikilla $x_1, x_2 \in X$.

Jos lisäksi on olemassa vakio $C \geq 0$ siten, että $d_Y(y, f(X)) \leq C$ kaikilla $y \in Y$, niin kuvaus f on (K, ϵ) -kvasi-isometria. Tällöin sanotaan, että avaruudet (X, d_X) ja (Y, d_Y) ovat *kvasi-isometriset*.

Huomautus 3.6. Ylläoleva määritelmä on teosten [3] ja [15] mukainen. Kaikissa lähteissä kvasi-isometrian määritelmässä ei vaadita vakion C olemassaoloa. Esimerkiksi teoksessa [13] ylläolevan määritelmän kvasi-isometrasta upotusta f kutsutaan kvasi-isometriaksi. Tässä tutkielmassa käytetyn määritelmän etu on, että kvasi-isometrisuus on ekvivalenssirelaatio metristen avaruuksien joukossa. Erityisesti kvasi-isometrisuuden symmetrisyys ja transitiivisuus ovat jatkossa hyödyllisiä ominaisuuksia.

Huomautus 3.7. $(K, 0)$ -kvasi-isometrinen upotus on Lipschitz-kuvauksena jatkuva. Vakio ϵ sallii kvasi-isometrisen upotuksen olevan myös rajoitetusti epäjatkuva. Huomataan myös, että $(1, 0)$ -kvasi-isometrinen upotus on isometrinen upotus.

Lause 3.8. *Kvasi-isometrisuus on ekvivalenssirelaatio metristen avaruuksien joukossa.*

Todistus. Olkoot (X, d_X) , (Y, d_Y) ja (Z, d_Z) metrisiä avaruuksia siten, että avaruudet X ja Y ovat (K_1, ϵ_1) -kvasi-isometriset sekä Y ja Z (K_2, ϵ_2) -kvasi-isometriset.

Identtinen kuvaus $id : X \rightarrow X$ on $(1, 0)$ -kvasi-isometrinen upotus ja voidaan valita $C = 0$. Tällöin avaruus X on kvasi-isometrinen itsensä kanssa ja siten kvasi-isometrisuus on refleksiivinen ominaisuus.

Koska f on kvasi-isometrinen upotus ja jokainen piste $y \in Y$ sisältyy kuvajoukon $f(X)$ C_1 -ympäristöön, jokaiselle pisteelle $y \in Y$ voidaan valita piste $x_y \in X$ siten, että $d_Y(y, f(x_y)) \leq C_1$. Määritellään kuvaus $\hat{f} : Y \rightarrow X$, $\hat{f}(y) = x_y$. Nyt kaikille pistepareille $y_1, y_2 \in Y$ on

$$\begin{aligned} d_X(\hat{f}(y_1), \hat{f}(y_2)) &\geq \frac{1}{K_1}d_Y(f(\hat{f}(y_1)), f(\hat{f}(y_2))) - \frac{\epsilon_1}{K_1} \\ &= \frac{1}{K_1}d_Y(f(x_{y_1}), f(x_{y_2})) - \frac{\epsilon_1}{K_1} \\ &\geq \frac{1}{K_1}(d_Y(y_1, y_2) - 2C_1) - \frac{\epsilon_1}{K_1} \\ &= \frac{1}{K_1}d_Y(y_1, y_2) - \frac{2}{K_1}C_1 - \frac{\epsilon_1}{K_1} \\ &\geq \frac{1}{K_1}d_Y(y_1, y_2) - 2K_1C_1 - K_1\epsilon_1 \end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned}
d_X(\widehat{f}(y_1), \widehat{f}(y_2)) &\leq K_1 d_Y(f(\widehat{f}(y_1)), f(\widehat{f}(y_2))) + K_1 \epsilon_1 \\
&= K_1 d_Y(f(x_{y_1}), f(x_{y_2})) + K_1 \epsilon_1 \\
&\leq K_1 (d_Y(f(x_{y_1}), y_1) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, f(x_{y_2}))) + K_1 \epsilon_1 \\
&\leq K_1 d_Y(y_1, y_2) + 2K_1 C_1 + K_1 \epsilon_1.
\end{aligned}$$

Siis \widehat{f} on $(K_1, 2K_1 C_1 + K_1 \epsilon_1)$ -kvasi-isometrinen upotus.

Lisäksi kaikilla $y \in Y$ on $C_1 \geq d_Y(y, f(x_y)) = d_Y(y, f(\widehat{f}(y)))$. Tällöin käyttämällä kuvauksen f kvasi-isometrisuutta saadaan kaikille pisteille $x \in X$ arvio

$$d_X(x, \widehat{f}(Y)) \leq d_X(x, \widehat{f}(f(x))) \leq K_1 d_Y(f(x), f(\widehat{f}(f(x)))) + K_1 \epsilon_1 \leq K_1 C_1 + K_1 \epsilon_1.$$

Siis \widehat{f} on kvasi-isometria ja siten kvasi-isometrisuus on symmetrinen ominaisuus.

Jos $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$ ovat oletusten mukaiset kvasi-isometriset upotukset, niin kuvauksessa $g \circ f : X \rightarrow Z$ kaikille pistepareille $x_1, x_2 \in X$ on

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{K_2} \left(\frac{1}{K_1} d_X(x_1, x_2) - \epsilon_1 \right) - \epsilon_2 \\
&\leq \frac{1}{K_2} d_Y(f(x_1), f(x_2)) - \epsilon_2 \\
&\leq d_Z(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)) \\
&\leq K_2 d_Y(f(x_1), f(x_2)) + \epsilon_2 \\
&\leq K_2 (K_1 d_X(x_1, x_2) + \epsilon_1) + \epsilon_2
\end{aligned}$$

ja siten $g \circ f$ on $(K_1 K_2, K_2 \epsilon_1 + \epsilon_2)$ -kvasi-isometrinen upotus. Koska lisäksi jokainen avaruuden Z piste sijaitsee kuvajoukon $g(Y)$ C_2 -ympäristössä, kuvaus g on (K_2, ϵ_2) -kvasi-isometrinen upotus ja jokainen avaruuden Y piste sijaitsee kuvajoukon $f(X)$ C_1 -ympäristössä, niin jokainen avaruuden Z piste sijaitsee kuvajoukon $(g \circ f)(X)$ $(C_2 + K_2 C_1 + \epsilon_2)$ -ympäristössä:

$$\begin{aligned}
d_Z(z, g(f(X))) &\leq d_Z(z, g(Y)) + \sup\{d_Z(g(y), g(f(X))) \mid y \in Y\} \\
&\leq C_1 + K_2 \sup\{d_Y(y, f(X)) \mid y \in Y\} + \epsilon_2 \\
&\leq C_1 + K_2 C_1 + \epsilon_2.
\end{aligned}$$

Siis avaruudet X ja Z ovat kvasi-isometriset ja siten kvasi-isometrisuus on transitii- vinen ominaisuus.

Siis kvasi-isometrisuus on ekvivalenssirelaatio metrinen avaruuksien joukossa. \square

Lause 3.9. *Olkoon G äärellisesti viritetty ryhmä ja S sen virittäjäjoukko. Tällöin ryhmä G sanametriikalla d_S varustettuna on kvasi-isometrinen Cayleyn graafin $\Gamma(G, S)$ kanssa.*

Todistus. Koska Cayleyn graafin $\Gamma(G, S)$ metriikka vastaa yksi yhteen ryhmän G sanametriikkaa d_S (katso Huomautus 3.4) ja Cayleyn graafin kärjet ovat ryhmän G alkioita, niin kuvaus $id : (G, d_S) \rightarrow \Gamma(G, S)$, $id(g) = g$ on $(1, 0)$ -kvasi-isometrinen upotus. Lisäksi jokainen piste $z \in \Gamma(G, S)$ sisältyy jonkin kärjen $1/2$ -ympäristöön ja siten myös kuvajoukon $id(G)$ $1/2$ -ympäristöön. Siis id on kvasi-isometria ja ryhmä G on kvasi-isometrinen Cayleyn graafin $\Gamma(G, S)$ kanssa. \square

Lause 3.10. *Olkoon G äärellisesti viritetty ryhmä ja A ja B sen kaksi viritäjäjoukkoa. Tällöin Cayleyn graafit $\Gamma(G, A)$ ja $\Gamma(G, B)$ ovat kvasi-isometriset.*

Todistus. Koska Lauseen 3.8 mukaan kvasi-isometrisuus on ekvivalenssirelaatio ja Lauseen 3.9 perusteella (G, d_A) on kvasi-isometrinen Cayleyn graafin $\Gamma(G, A)$ kanssa ja (G, d_B) on kvasi-isometrinen Cayleyn graafin $\Gamma(G, B)$ kanssa, riittää osoittaa, että avaruus (G, d_A) on kvasi-isometrinen avaruuden (G, d_B) kanssa.

Jokainen viritäjäjoukon A alkio a_i voidaan ilmaista viritäjäjoukon B sanana, ja jokainen viritäjäjoukon B alkio b_j voidaan ilmaista viritäjäjoukon A sanana. Merkitään tällaisten sanojen maksimipituutta

$$M := \max\{|a_i|_B, |b_j|_A \mid a_i \in A \text{ ja } b_j \in B\}.$$

Luku M on olemassa ja äärellinen, sillä joukot A ja B ovat äärellisiä viritäjäjoukkoja. Olkoot nyt alkiot $x, y \in G$ mitä tahansa. Jos $d_A(x, y) = k$, niin

$$\begin{aligned} y^{-1}x &= a_1' \cdot \dots \cdot a_k', \quad a_j' \in A \text{ kaikilla } j \\ &= \underbrace{(b_{11}' \cdot \dots \cdot b_{1M_1}') \cdot \dots \cdot (b_{k1}' \cdot \dots \cdot b_{kM_k}')}_{k \text{ kpl tuloja, } M_j \leq M \text{ kaikilla } j}, \quad b_{ji}' \in B \text{ kaikilla } j, l. \end{aligned}$$

Siten $d_B(x, y) \leq Mk = Md_A(x, y)$. Vastaavasti saadaan $d_A(x, y) \leq Mk = Md_B(x, y)$, jolloin $\frac{1}{M}d_A(x, y) \leq d_B(x, y) \leq Md_A(x, y)$. Siis kuvaus $id : (G, d_A) \rightarrow (G, d_B)$ on $(M, 0)$ -kvasi-isometrinen upotus. Koska kyseessä on myös surjektio, kvasi-isometrian määritelmän luvuksi C voidaan valita 0. Siis avaruudet (G, d_A) ja (G, d_B) ovat kvasi-isometriset. \square

3.3. Kvasi-isometria säilyttää Gromov-hyperbolisuuden. Seuraavaksi halutaan osoittaa, että Gromov-hyperbolisuus on kvasi-isometriainvariantti ominaisuus, toisin sanoen kaksi keskenään kvasi-isometristä avaruutta ovat joko molemmat Gromov-hyperbolisia tai kumpikaan ei ole. Tätä varten todistetaan ensin kaksi aputulosta, joiden mukaan kvasi-isometrisesti kuvattujen janojen kuvajoukot, jotka eivät yleisesti ottaen ole geodeettisia janoja, pysyvät lähellä vastaavia janoja.

Geodeettiset janat, puolisuorat ja suorat määriteltiin avaruuksien \mathbb{R} ja (X, d) välisen isometrisen upotuksen avulla. Jos määritelmässä käytetään isometrisen upotuksen sijaan kvasi-isometristä upotusta, saadaan paljon laajempi joukko avaruuden X polkuja ja käyriä.

Määritelmä 3.11. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $K \geq 1$, $\epsilon \geq 0$ ja $I \subset \mathbb{R}$ väli. (K, ϵ) -kvasi-isometrinen upotus $c : I \rightarrow X$, jolle

$$\frac{1}{K}|t - t'| - \epsilon \leq d(c(t), c(t')) \leq K|t - t'| + \epsilon$$

kaikilla $t, t' \in I$, on

- *kvasigeodeettinen jana* eli *kvasi-jana*, jos $I = [0, \ell]$ on kompakti väli.
- *kvasigeodeettinen puolisuora* eli *kvasi-puolisuora*, jos $I = [0, \infty)$.
- *kvasigeodeettinen suora* eli *kvasi-suora*, jos $I = \mathbb{R}$.

Tilanteesta riippuen kvasigeodeettiseksi janaksi, puolisuoraksi tai suoraksi voidaan kutsua kuvauksen c lisäksi myös sen kuvajoukkoa $c(I) \subset X$. Jollei sekaannuksen vaaraa ole, voidaan myös kuvajoukkoa merkitä $c := c(I)$.

Tässä tutkielmassa käytetään lähinnä kvasigeodeettisia janoja ja puolisuoria. Osoitetaan seuraavaksi joitakin niiden käsittelyä helpottavia ominaisuuksia.

Lemma 3.12. *Olkkoon X geodeettinen avaruus. Kaikille (K, ϵ) -kvasigeodeettisille janoille $c : [a, b] \rightarrow X$ on olemassa jatkuva (K, ϵ') -kvasigeodeettinen jana $c' : [a, b] \rightarrow X$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

- (1) $c'(a) = c(a)$ ja $c'(b) = c(b)$
- (2) $\epsilon' = 2(K + \epsilon)$
- (3) $\ell(c'_{|[t, t']}) \leq k_1 d(c'(t), c'(t')) + k_2$ kaikilla $t, t' \in [a, b]$,
missä $k_1 = K(K + \epsilon)$ ja $k_2 = (K\epsilon' + 1)(K + \epsilon)$
- (4) Kuvat $c([a, b])$ ja $c'([a, b])$ sisältyvät toistensa suljettuihin $2(K + \epsilon)$ -ympäristöihin.

Todistus. Määritellään $c'(x) = c(x)$ kaikilla $x \in \{a, b\} \cup (\mathbb{Z} \cap]a, b]) =: A$. Tällöin ehto (1) on voimassa. Valitaan sitten näitä pisteitä yhdistävät geodeettiset janat ja parametrisoidaan $c'(x)$ kulkemaan näiden janojen muodostamaa polkua pitkin. Koska c on (K, ϵ) -kvasigeodeettinen jana ja joukon A pisteet valittu edellä kuvatulla tavalla, kunkin äsken valitun geodeettisen janan pituus on korkeintaan $(K + \epsilon)$. Kukin joukon $c([a, b]) \cup c'([a, b])$ piste sijaitsee kuvajoukon $c(A)$ $(K + \epsilon)$ -ympäristössä: joukon $c'([a, b])$ tapauksessa äsken pituusarvion nojalla, ja joukon $c([a, b])$ tapauksessa, koska välin $[a, b]$ pisteelle z , sitä lähimmälle joukon A pisteelle a_z ja seuraavaksi lähimmälle joukon A pisteelle a_z^* on

$$\begin{aligned} d(c(z), c(a_z)) &\leq \frac{1}{2} [d(c(z), c(a_z)) + d(c(z), c(a_z^*))] \\ &\leq \frac{1}{2} (K|z - a_z| + \epsilon + K|z - a_z^*| + \epsilon) \\ &\leq K + \epsilon. \end{aligned}$$

Tällöin $c([a, b])$ ja $c'([a, b])$ sijaitsevat toistensa $2(K + \epsilon)$ -ympäristöissä ja ehto (4) on voimassa.

Olkkoon edelleen a_z pistettä $z \in [a, b]$ lähin joukon A piste. Koska $c(a_z) = c'(a_z)$ kaikilla $z \in [a, b]$ ja c on (K, ϵ) -kvasi-isometria, on

$$\begin{aligned} d(c'(t), c'(t')) &\leq d(c'(a_t), c'(a_{t'})) + K + \epsilon \\ &\leq K|a_t - a_{t'}| + \epsilon + K + \epsilon \\ &\leq K(|t - t'| + 1) + K + 2\epsilon \\ &= K|t - t'| + 2(K + \epsilon) \end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned} \frac{1}{K}|t - t'| - 2(K + \epsilon) &\leq \frac{1}{K}(|t - t'| - 1) - (K + 2\epsilon) \\ &\leq \frac{1}{K}|a_t - a_{t'}| - (K + 2\epsilon) \\ &\leq d(c'(a_t), c'(a_{t'})) - (K + \epsilon) \\ &\leq d(c'(t), c'(t')) \end{aligned}$$

ja siten c' on (K, ϵ') -kvasigeodeettinen jana kohdan (2) mukaisesti.

Kaikille kokonaisluvuille $n, m \in [a, b] \cap \mathbb{Z}$ on

$$\ell(c'_{[n,m]}) = \sum_{i=n}^{m-1} d(c(i), c(i+1)) \leq (K + \epsilon)|m - n|$$

ja vastaavasti $\ell(c'_{[a,n]}) \leq (K + \epsilon)(n - a + 1)$ ja $\ell(c'_{[m,b]}) \leq (K + \epsilon)(b - m + 1)$. Käyttämällä tietoa, että kaikilla $t, t' \in [a, b]$ on

$$\ell(c'_{[t,t']}) \leq (K + \epsilon)(|a_t - a_{t'}| + 2)$$

ja

$$\frac{1}{K}(|a_t - a_{t'}| - 1) - \epsilon' \leq \frac{1}{K}|t - t'| - \epsilon' \leq d(c'(t), c'(t'))$$

ja suoralla laskulla saadaan voimaan ehto (3). \square

Kvasi-isometrisesti geodeettisesta avaruudesta toiseen kuvatut janat ovat kvasigeodeettisia janoja. Edellä olevan Lemman 3.12 mukaan kvasigeodeettiset janat voidaan korvata niitä tietyssä mielessä lähellä olevilla jatkuvilla kvasigeodeettisilla janoilla. Näin ollen edellä olevaa Lemmaa 3.12 voidaan hyödyntää seuraavan varsinaisen aputuloksen todistuksessa.

Lemma 3.13. *Olkoon X Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus, $x, y \in X$, α (K, ϵ) -kvasigeodeettinen jana pisteiden x ja y välillä ja γ geodeettinen jana pisteiden x ja y välillä. Tällöin on olemassa (globaalit) vakiot $L_{K,\epsilon}$ ja $M_{K,\epsilon}$ siten, että γ sisältyy kvasijanalle α $L_{K,\epsilon}$ -ympäristöön $U_L(\alpha)$, ja α sisältyy janan γ $M_{K,\epsilon}$ -ympäristöön $U_M(\gamma)$.*

Todistus. Korvataan α jatkuvalla (K, ϵ') -kvasijanalla α' kuten Lemmassa 3.12. Olkoon $D = \sup\{d(p, \alpha') \mid p \in \gamma\}$ ja $p_0 \in \gamma$ se piste, jossa tuo etäisyys saavutetaan. Nyt $B(p_0, D) \cap \alpha' = \emptyset$. Olkoon $x' \in [x, p_0]$ siten, että $d(x', p_0) = 2D$, tai jos $d(x, p_0) < 2D$, niin valitaan $x' = x$. Valitaan piste $y' \in [y, p_0]$ vastaavasti. Tällöin luvun D määritelmän nojalla on olemassa pisteet $a_{x'} \in \alpha'$ ja $a_{y'} \in \alpha'$, joille $d(a_{x'}, x') \leq D$ ja $d(a_{y'}, y') \leq D$. Lisäksi $([x', a_{x'}] \cup [y', a_{y'}]) \cap B(p_0, D) = \emptyset$. Olkoon vielä pisteet $x'' \in [x, p_0]$ ja $y'' \in [p_0, y]$, joille $d(p_0, x'') = D = d(p_0, y'')$.

Tarkastellaan pisteiden x'' ja y'' välistä polkua

$$p = [x'', x'] \cup [x', a_{x'}] \cup (\alpha'_{[a_{x'}, a_{y'}]}) \cup [a_{y'}, y'] \cup [y', y''].$$

Koska $d(a_{x'}, a_{y'}) \leq d(a_{x'}, x') + d(x', p_0) + d(p_0, y') + d(y', a_{y'}) \leq 6D$, niin kvasijanalle α' on $\ell(\alpha'_{[a_{x'}, a_{y'}]}) \leq 6KD + \epsilon'$. Tällöin $\ell(p) \leq 4D + 6KD + \epsilon'$ ja $p \cap B(p_0, D) = \emptyset$. Soveltamalla divergenssifunktion e määritelmää polkuun p , vakioon $D = R + r$ ja janan γ kahteen puolikkaaseen saadaan

$$\ell(p) > e(r) = e(D - R) = e(D - \frac{1}{2}d(\gamma_{[p_0, x]}(R), \gamma_{[p_0, y]}(R))) = e(D - \frac{e(0)}{2}).$$

Siis erityisesti on voimassa

$$e(D - \frac{e(0)}{2}) < \ell(p) < (4 + 6K)D + \epsilon'.$$

Mutta koska X on hyperbolinen, Lauseen 1.12 todistuksen nojalla e on eksponentiaalinen ja siten sitä ei voida rajoittaa ylhäältä lineaarisella funktiolla. Siis D täytyy olla ylhäältä rajoitettu, kuten myös $L_{K,\epsilon'}$. Nyt siis $\alpha' \subset U_L(\gamma)$.

Etsitään seuraavaksi sopiva $M_{K,\epsilon'}$. Jos $\gamma \subset U_L(\alpha')$, voidaan valita $M_{K,\epsilon'} = L_{K,\epsilon'}$. Oletetaan $\gamma \not\subset U_L(\alpha')$. Olkoon piste $a \in \alpha'$ siten, että $d(a, \gamma) > L_{K,\epsilon'}$. Kuvauksen α' jatkuvuuden nojalla on olemassa piste $q \in \gamma$ ja pisteet $a_1, a_2 \in \alpha'$, joille $d(q, a_1) \leq L_{K,\epsilon'}$ ja $d(q, a_2) \leq L_{K,\epsilon'}$ ja joiden välissä piste a sijaitsee. Nyt $d(a_1, a_2) \leq 2L_{K,\epsilon'}$ ja siten $\ell(\alpha'_{[a_1, a_2]}) \leq 2KL_{K,\epsilon'} + \epsilon'$. Siis

$$d(a, \gamma) \leq \frac{1}{2}(2KL_{K,\epsilon'} + \epsilon') + L_{K,\epsilon'} = (K+1)L_{K,\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{2},$$

ja voidaan valita $M_{K,\epsilon'} = (K+1)L_{K,\epsilon'} + \frac{\epsilon'}{2}$ siten, että $\gamma \subset U_M(\alpha')$.

Koska Lemman 3.12 nojalla alkuperäinen kvasijana α ja todistuksessa käytetty vastaava jatkuva kvasijana α' sisältyvät toistensa $2(K+\epsilon)$ -ympäristöihin, niin nyt α sisältyy janan γ ($M_{K,\epsilon'} + 2(K+\epsilon)$)-ympäristöön ja vastaavasti γ sisältyy kvasijan α ($L_{K,\epsilon'} + 2(K+\epsilon)$)-ympäristöön. Siis voidaan valita $M_{K,\epsilon} = M_{K,\epsilon'} + 2(K+\epsilon)$ ja $L_{K,\epsilon} = L_{K,\epsilon'} + 2(K+\epsilon)$. \square

Huomautus 3.14. Lemman 3.13 tulosta tullaan jatkossa käyttämään niin, että on olemassa globaali vakio $D := \max\{L_{K,\epsilon}, M_{K,\epsilon}\}$ siten, että samojen päätepisteiden väliset jana γ ja kvasijana α sisältyvät kumpikin toistensa suljettuun D -ympäristöön.

Lemmoista 3.12 ja 3.13 seuraa, että kiinnitetyillä $K \geq 1$ ja $\epsilon \geq 0$ kaikki (K, ϵ) -kvasijanat ovat globaalisti rajoitetun etäisyyden päässä vastaavista janoista.

Lause 3.15. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) geodeettisia metrisiä avaruuksia, jotka ovat keskenään kvasi-isometriset. Tällöin X on Gromov-hyperbolinen, jos ja vain jos Y on Gromov-hyperbolinen.*

Todistus. Oletetaan, että avaruus Y on Gromov-hyperbolinen. Olkoon $\Delta(x, y, z)$ geodeettinen kolmio avaruudessa X ja olkoon $w \in \Delta(x, y, z)$ piste. Voidaan olettaa, että $w \in [x, y]$. Merkitään avaruuksien (X, d_X) ja (Y, d_Y) välisiä kvasi-isometrioita $f: X \rightarrow Y$ ja $\hat{f}: Y \rightarrow X$. Tällöin $\Delta(f(x), f(y), f(z))$ on geodeettinen kolmio avaruudessa Y . Koska jana $[x, y]$ on lähellä vastaavia kvasijanoja, on olemassa $s \in [f(x), f(y)]$ siten, että $d_Y(f(w), s) \leq D$ jollakin (globaalilla) vakiolla $D \geq 0$. Lisäksi, koska Y on Gromov-hyperbolinen, on olemassa piste $v \in [f(x), f(z)] \cup [f(y), f(z)]$, jolle $d_Y(s, v) \leq \delta$. Voidaan olettaa, että $v \in [f(x), f(z)]$. Edelleen, kvasijanojen ollessa lähellä vastaavia janoja on olemassa piste $u \in [x, z]$, jolle $d(f(u), v) \leq D$. Nyt

$$\begin{aligned} d_X(w, u) &\leq K(d_Y(f(w), f(u)) + \epsilon) \\ &\leq K(d_Y(f(w), s) + d_Y(s, v) + d_Y(v, f(u)) + \epsilon) \\ &\leq K(2D + \delta + \epsilon). \end{aligned}$$

Siis $\Delta(x, y, z)$ on $K(2D + \delta + \epsilon)$ -ohut ja Määritelmän 1.1 mukaan avaruus X on Gromov-hyperbolinen. Koska kvasi-isometrisuus on symmetrinen ominaisuus, avaruuksien X ja Y roolit väitteessä ovat symmetriset. Vaihtamalla nämä roolit saadaan väitteen toinen suunta. \square

Lauseista 3.9, 3.10 ja 3.15 seuraa, että hyperbolisuustarkastelujen kannalta ryhmän virittäjäjoukon valinnalla ei ole merkitystä. Samojen lauseiden perusteella seuraava ryhmän hyperbolisuuden määritelmä on mielekäs.

3.4. Gromov-hyperbolinen ryhmä.

Määritelmä 3.16. Äärellisesti viritetty ryhmä G on Gromov-hyperbolinen, jos sen Cayleyn graafi $\Gamma(G, S)$ on Gromov-hyperbolinen jollakin virittäjäjoukolla S .

Osoitetaan seuraavissa esimerkeissä, että äärelliset ja sykliset ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia mutta $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ei ole Gromov-hyperbolinen. Monimutkaisempia esimerkkejä Gromov-hyperbolisista ryhmistä esitellään seuraavassa luvussa.

Esimerkki 3.17. Äärelliset ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia.

Olkoon G äärellinen ryhmä. Tällöin se on äärellisesti viritetty ryhmä, sillä virittäjäjoukoksi voidaan valita koko G . Jos $\Delta \subset \Gamma(G, G)$ on mikä tahansa kolmio ryhmän G Cayleyn graafissa, niin merkitään

$$M := \max\{d(x, y) \mid x, y \in G\}.$$

Tällöin jokainen kolmion Δ sivu sisältyy toisten kahden sivun yhdisteen suljettuun M -ympäristöön ja siten $\Gamma(G, S)$ on Gromov-hyperbolinen Määritelmän 1.1 nojalla. Tällöin myös ryhmä G on Gromov-hyperbolinen.

Esimerkki 3.18. Sykliset ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia.

Esimerkin 3.17 nojalla äärelliset sykliset ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia. Olkoon nyt G ääretön syklinen ryhmä. Koska G on syklinen, on olemassa alkio $a \in G$ siten, että kaikki alkio $g \in G$ voidaan kirjoittaa muodossa $g = a^k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Koska G on lisäksi ääretön, $a^p \neq a^q$ kaikilla $p, q \in \mathbb{Z}$, joilla $p \neq q$. Tällöin ryhmän G Cayleyn graafin $\Gamma(G, \{a, a^{-1}\})$ piirretyn kolmion $\Delta = \Delta(x, y, z)$ jokainen sivu sisältyy toisten kahden sivun yhdisteeseen:

Jos näin ei olisi, voidaan olettaa, että $[x, y] \not\subset ([x, z] \cup [z, y])$. Siis on olemassa piste $p \in [x, y]$ siten, että $p \notin [x, z]$ ja $p \notin [y, z]$. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan sen mukaan, onko piste p Cayleyn graafin kärki vai jokin kärkien välisen sivun piste.

- (1) Jos p on kärki, niin antiteesin nojalla $p \neq x$ ja $p \neq y$. Merkitään $p = a^{k_p}$ jollakin

$$k_x < k_p < k_y.$$

Koska $p \notin [x, z]$, vasemmanpuoleisesta epäyhtälöstä saadaan $k_z \leq k_x < k_p$ tai $k_x \leq k_z < k_p$. Koska $p \notin [y, z]$, oikeanpuoleisesta epäyhtälöstä saadaan $k_p < k_z \leq k_y$ tai $k_p < k_y \leq k_z$. Erityisesti saadaan $k_z < k_p$ ja $k_p < k_z$, mikä on ristiriita.

- (2) Jos p ei ole kärki, niin merkitään pistettä p lähimpänä olevia kärkiä a^k ja a^{k+1} jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Nyt molemmat kärjet a^k ja a^{k+1} kuuluvat polkuun $[x, y]$, sillä polussa $[x, y]$ on vähintään kaksi kärkeä, $p \in [x, y]$ ja a^k ja a^{k+1} ovat pisteen p lähimmät kärjet. Kuitenkin ainakin toinen kärjistä a^k ja a^{k+1} ei kuulu joukkoon $[x, z] \cup [y, z]$, sillä muutoin myös niiden välinen 1-jana kuuluisi. Tämä on todistuksen kohdan (1) mukaan ristiriita.

Kohtien (1) ja (2) nojalla väitetynlaista pistettä p ei voi olla olemassa. Siis kukin kolmion Δ sivu sisältyy toisten kahden sivun yhdisteeseen. Näin ollen $\Gamma(G, \{a, a^{-1}\})$ on Gromov-hyperbolinen Määritelmän 1.1 nojalla ja siten ryhmä G on Gromov-hyperbolinen.

Esimerkki 3.19. Ryhmä $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ei ole Gromov-hyperbolinen.

Identtinen kuvaus $id : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on $(1,0)$ -kvasi-isometrinen upotus ja jokainen avaruuden \mathbb{R}^2 piste on korkeintaan puolikkaan etäisyydellä jostakin kuvaajoukon $id(\mathbb{Z}^2)$ pisteestä. Siis \mathbb{Z}^2 ja \mathbb{R}^2 ovat kvasi-isometriset. Koska Esimerkin 1.10 perusteella \mathbb{R}^2 ei ole Gromov-hyperbolinen, niin Lauseen 3.15 nojalla myöskään \mathbb{Z}^2 ei ole Gromov-hyperbolinen.

3.5. Gromov-hyperbolisen ryhmän reuna. Kuten edellä, käytetään Gromov-hyperbolisen ryhmän reunan määrittelyssä hyväksi ryhmän ja sen Cayleyn graafin kvasi-isometrisuutta.

Määritelmä 3.20. Äärellisesti viritetyn Gromov-hyperbolisen ryhmän G reuna ∂G on sen Cayleyn graafin reuna $\partial\Gamma(G, S)$.

Ryhmän reuna on hyvin määritelty seuraavan tuloksen ansiosta:

Lause 3.21. *Jos (X, d) ja (Y, d') ovat kvasi-isometrisiä metrisiä avaruuksia, niin ∂X ja ∂Y ovat homeomorfisia.*

Tämän tuloksen todistamiseksi tarvitaan kaksi aputulosta ja aiemmin määritellyn puolisuorien ekvivalenttiuden yleistys kvasipuolisuorien ekvivalenttiudeksi.

Lemma 3.22. *Olkoon X Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus ja $\gamma_1 : [0, \infty) \rightarrow X$ ja $\gamma_2 : [0, \infty) \rightarrow X$ sen geodeettisia puolisuoria. Tällöin $\gamma_1 \sim \gamma_2$, jos ja vain jos puolisuorat γ_1 ja γ_2 sisältyvät toistensa D -ympäristöihin jollakin $0 < D < \infty$.*

Todistus. Oletetaan, että puolisuorat γ_1 ja γ_2 sisältyvät toistensa D -ympäristöihin jollakin $0 < D < \infty$. Olkoon $t \geq 0$. Tällöin on olemassa $C \in [-t, \infty)$ siten, että $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t+C)) \leq D$.

Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} t + C &= d(\gamma_2(0), \gamma_2(t+C)) \\ &\leq d(\gamma_2(0), \gamma_1(0)) + d(\gamma_1(0), \gamma_1(t)) + d(\gamma_1(t), \gamma_2(t+C)) \\ &\leq t + D + d(\gamma_2(0), \gamma_1(0)), \end{aligned}$$

eli $C \leq D + d(\gamma_2(0), \gamma_1(0))$.

Tällöin kolmioepäyhtälöstä saadaan edelleen

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) &\leq d(\gamma_1(t), \gamma_2(t+C)) + d(\gamma_2(t+C), \gamma_2(t)) \\ &\leq D + C \\ &\leq 2D + d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)), \end{aligned}$$

ja siten $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Väitteen toinen suunta on selvä relaation \sim määritelmän nojalla. \square

Määritelmä 3.23. Olkoon X Gromov-hyperbolinen metrinen avaruus. Kvasigeodeettiset puolisuorat $c_1 : [0, \infty) \rightarrow X$ ja $c_2 : [0, \infty) \rightarrow X$ ovat ekvivalentit, merkitään $c_1 \sim c_2$, jos ne sisältyvät toistensa D -ympäristöihin jollakin $0 < D < \infty$.

Lemma 3.24. *Olkoon X δ -hyperbolinen geodeettinen avaruus ja $\gamma_1, \gamma_2 : [0, T] \rightarrow X$ janoja, joilla $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Jos $d(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \leq C$ joillakin $C > 0$ ja $t_0 \in [0, T]$, niin $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \leq 2\delta$ kaikilla $t \leq t_0 - C - \delta$.*

Todistus. Olkoon c jana, joka yhdistää pisteen $\gamma_1(t_0)$ sitä lähimpänä olevaan janan γ_2 pisteeseen $\gamma_2(t_1)$. Käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$|t_0 - t_1| = |d(\gamma_1(t_0), \gamma_1(0)) - d(\gamma_1(0), \gamma_2(t_1))| \leq d(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_1)) \leq C.$$

Olkoon nyt $t < t_0 - C - \delta$. Tällöin piste $\gamma_1(t)$ ei sisälly janan c δ -ympäristöön. Kolmion $\Delta(\gamma_1(0), \gamma_1(t_0), \gamma_2(t_1))$ δ -ohuuden nojalla täytyy olla

$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) \leq \delta \text{ jollakin } t'.$$

Nyt joko

$$t + |t - t'| = d(\gamma_2(t + |t - t'|), \gamma_2(0)) \leq d(\gamma_2(t'), \gamma_1(t)) + d(\gamma_1(t), \gamma_2(0)) \leq t + \delta,$$

jos $t' \geq t$, tai jos $t' < t$, niin

$$t = d(\gamma_1(t), \gamma_1(0)) \leq d(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) + d(\gamma_2(t'), \gamma_2(0)) \leq \delta + t'.$$

Kummassakin tapauksessa saadaan

$$|t - t'| \leq \delta.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) &\leq d(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) + d(\gamma_2(t'), \gamma_2(t)) \\ &= d(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) + |t - t'| \\ &\leq 2\delta. \end{aligned}$$

□

Lauseen 3.21 todistuksessa käytetään jatkuvuuden osoittamiseen aiemmin määriteltyjen topologioiden sijaan seuraavaa topologiaa (katso [3], s.429).

Määritelmä 3.25. Olkoon (X, d) geodeettinen δ -hyperbolinen avaruus ja $x \in X$. Kiinnitetään $k > 2\delta$. Olkoon $p \in \partial X$ ja $\gamma_0 \subset X$ puolisuora, jolle $\gamma_0(0) = x$ ja $p = [\gamma_0]$. Määritellään joukko

$$V_n(p) = \{[\gamma] \mid \gamma(0) = x \text{ ja } d(\gamma(n), \gamma_0(n)) < k\}.$$

Tällöin kokoelma $\{V_n(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$ on pisteen p numeroituva ympäristökanta.

Nyt voidaan todistaa itse Lause 3.21.

Todistus. Olkoon $f : X \rightarrow Y$ (K, ϵ) -kvasi-isometria. Määritellään kuvaus

$$\widehat{f} : \partial X \rightarrow \partial Y, \widehat{f}([\gamma]) = [f \circ \gamma]$$

kaikilla $[\gamma] \in \partial X$. Kuvaus \widehat{f} on hyvin määritelty, sillä $\widehat{f}([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ on avaruuden Y jonkin puolisuoran ekvivalenssiluokka ja siten reunan ∂Y piste:

Jos $c_i = [f \circ \gamma(0), f \circ \gamma(i)]$, $i \in \mathbb{N}$, ovat geodeettisia janoja, niin jono (c_i) on yhtäjatkuva ja tasaisesti rajoitettu. Tällöin Ascoli-Arzelan lauseen nojalla jonolla (c_i) on osajono (c_{i_k}) , joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa. Siis rajakuvaus c on jatkuva ja selvästi avaruuden Y puolisuora.

Lisäksi $(f \circ \gamma) \sim c$, sillä Lemman 3.13 nojalla $f \circ \gamma|_{[0, i]}$ ja c_i sisältyvät toistensa D -ympäristöihin kaikilla $i \in \mathbb{N}$, ja siten myös $f \circ \gamma$ ja c sisältyvät toistensa D -ympäristöihin.

Kuvaus \widehat{f} on injektio, sillä jos $\widehat{f}([\gamma]) = \widehat{f}([\eta])$ joillakin avaruuden X puolisuorilla γ ja η , niin $f \circ \gamma \sim f \circ \eta$. Siis kaikilla $t > 0$ on $t' > 0$ ja $t'' > 0$ siten, että

$$D \geq d(f \circ \gamma(t), f \circ \eta(t')) \geq \frac{1}{K}d(\gamma(t), \eta(t')) - \epsilon$$

ja

$$D \geq d(f \circ \gamma(t''), f \circ \eta(t)) \geq \frac{1}{K}d(\gamma(t''), \eta(t)) - \epsilon.$$

Tällöin

$$d(\gamma(t), \eta(t')) \leq K(D + \epsilon)$$

ja

$$d(\gamma(t''), \eta(t)) \leq K(D + \epsilon)$$

kaikilla $t > 0$. Koska γ ja η sisältyvät toistensa $K(D + \epsilon)$ -ympäristöihin, Lemman 3.22 mukaan $\gamma \sim \eta$ ja siten $[\gamma] = [\eta]$.

Lauseen 3.8 todistuksessa todettiin, että jos $f : X \rightarrow Y$ on (K, ϵ) -kvasi-isometrinen upotus ja on olemassa luku $C \geq 0$ siten, että kaikilla $y \in Y$ on $d_Y(y, f(X)) \leq C$, niin on olemassa kuvaus $g : Y \rightarrow X$, joka on $(K, 2KC + K\epsilon)$ -kvasi-isometrinen upotus siten, että kaikilla $x \in X$ on $d_X(x, g(Y)) \leq KC + K\epsilon$. Tällöin on voimassa arviot $d_X(x, g \circ f(x)) \leq KC + K\epsilon$ kaikilla $x \in X$ ja $d_Y(y, f \circ g(y)) \leq C$ kaikilla $y \in Y$. Siis kaikilla puolisuorilla $\gamma \subset X$ (kvasi)puolisuorat γ ja $g \circ f(\gamma)$ sisältyvät toistensa $(KC + K\epsilon)$ -ympäristöihin. Vastaavasti kaikilla puolisuorilla $\eta \subset Y$ (kvasi)puolisuorat η ja $f \circ g(\eta)$ sisältyvät toistensa C -ympäristöihin. Tällöin $\gamma \sim g \circ f(\gamma)$ eli $[\gamma] = [g \circ f(\gamma)]$ ja $\eta \sim f \circ g(\eta)$ eli $[\eta] = [f \circ g(\eta)]$. Tällöin kuvaus $\widehat{g} : \partial Y \rightarrow \partial X$ on kuvauksen \widehat{f} käänteiskuvaus, ja siten kuvaus \widehat{f} on surjektio.

Olkoon $[\gamma_0] \in \partial X$, $k > 2\delta$ ja $n' \in \mathbb{N}$. Jos $[\gamma_1] \in V_n([\gamma_0])$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, niin $d(\gamma_0(n), \gamma_1(n)) < k$. Olkoot $\eta_0, \eta_1 \subset Y$ puolisuorat, joille $[f \circ \gamma_0] = [\eta_0]$ ja $[f \circ \gamma_1] = [\eta_1]$. Valitaan $t_0 \geq n' + 2D + Kk + \epsilon + \delta$. Voidaan valita riittävän suuri n siten, että $d(\eta_1(t_0), \eta_0) \leq 2D + Kk + \epsilon$. Tällöin Lemman 3.24 mukaan $d(\eta_1(t), \eta_0(t)) \leq 2\delta$ kaikilla $t \leq t_0 - 2D - Kk - \epsilon - \delta$. Luvun t_0 valinnan takia erityisesti $n' \leq t_0 - 2D - Kk - \epsilon - \delta$, ja siten $d(\eta_1(n'), \eta_0(n')) \leq 2\delta < k$. Siis $[f \circ \gamma_1] = [\eta_1] \in V_{n'}([\eta_0]) = V_{n'}([f \circ \gamma_0])$ ja siten kuvaus \widehat{f} on jatkuva. Kuvauksen $(\widehat{f})^{-1} = \widehat{g}$ jatkuvuus osoitetaan samoin.

Siis reunat ∂X ja ∂Y ovat keskenään homeomorfiset. \square

Huomautus 3.26. Sen lisäksi, että Gromov-hyperbolisen ryhmän reuna on hyvin määritelty, edellä olevasta tuloksesta seuraa, että keskenään kvasi-isometrisillä ryhmillä on topologisessa mielessä sama reuna. Koska myös tuloksen käänteinen suunta on totta, Gromov-hyperboliset ryhmät voidaan lajitella reunojensa perusteella kvasi-isometrialuokkiin.

Osoitetaan seuraavissa esimerkeissä, että äärellisen ryhmän reuna on tyhjä joukko ja äärettömän syklisen ryhmän reuna on kaksi pistettä. Monimutkaisempia esimerkejä Gromov-hyperbolisten ryhmien reunoista esitellään seuraavassa luvussa.

Esimerkki 3.27. Jos G on äärellinen ryhmä, niin $\partial G = \emptyset$.

Esimerkissä 3.17 osoitettiin, että äärelliset ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia. Määritetään nyt ryhmän G reuna. Jos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ on mikä tahansa ryhmän G jono ja

$M := \max\{d(x, y) \mid x, y \in G\}$, niin pisteiden x_i, x_j ja 1 Gromovin tulolle on

$$\begin{aligned} \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot x_j)_1 &= \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} (d(x_i, 1) + d(x_j, 1) - d(x_i, x_j)) \right) \\ &\leq \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} (2M - 0) \right) = M < \infty \end{aligned}$$

kaikilla $x_i, x_j \in G$. Siis ryhmässä G ei ole äärettömyyteen konvergoivaa jonoa, ja siten

$$\partial G = \{ [(x_n)] \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset G \text{ konvergoi kohti ääretöntä} \} = \emptyset.$$

Esimerkki 3.28. Jos G on ääretön syklinen ryhmä, niin $\partial G = \{-\infty, \infty\}$.

Esimerkissä 3.18 osoitettiin, että syklistet ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia. Määritetään nyt ryhmän G reuna. Olkoon ryhmä G alkion a virittämä ääretön syklinen ryhmä ja

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n = a^n$$

ja

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad y_n = a^{-n}$$

sen jonoja. Tällöin (x_n) ja (y_n) suppenevat äärettömyyteen, sillä

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot x_j)_1 = \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (d(a^i, 1) + d(a^j, 1) - d(a^i, a^j)) = \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (i + j + |i - j|) = \infty$$

ja vastaavasti

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (y_i \cdot y_j)_1 = \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (d(a^{-i}, 1) + d(a^{-j}, 1) - d(a^{-i}, a^{-j})) = \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (i + j - |i - j|) = \infty.$$

Jonot (x_n) ja (y_n) eivät ole ekvivalentit, sillä

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_1 = \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (i + j - |i - j|) = 0,$$

joten ne määrittävät kaksi eri pistettä reunalla ∂G . Osoitetaan, ettei muita reunan pisteitä ole. Jos olisi, olisi myös äärettömyyteen suppeneva jono $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n = a^{k_n}$. Tällöin

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (z_i \cdot z_j)_1 = \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} (|k_i| + |k_j| - |k_i - k_j|) \right) = \infty.$$

Jos $k_j < 0 \leq k_i$ tai $k_i < 0 \leq k_j$, niin $|k_i| + |k_j| - |k_i - k_j| = 0$ kaikilla i ja j , joten jostakin indeksistä $N \in \mathbb{N}$ alkaen täytyy olla $k_n > 0$ kaikilla $n \geq N$ tai $k_n < 0$ kaikilla $n \geq N$. Mutta tällöin $(z_n) \sim (x_n)$ tai $(z_n) \sim (y_n)$. Siis $\partial G = \{-\infty, \infty\}$.

4. ESIMERKKEJÄ GROMOV-HYPERBOLISISTA RYHMISTÄ JA NIIDEN REUNOISTA

Tässä luvussa käsitellään esimerkinomaisesti joitakin monimutkaisempia Gromov-hyperbolisia ryhmiä ja niiden erilaisia reunoja. Esille tulevat epäkommutatiivinen vapaa ryhmä, jonka reuna on homeomorfinen Cantorin joukon kanssa, Fuchsin ryhmät, joiden reuna on ympyrä tai sen osa sekä Kleinin ryhmät, joiden reunoina voi esiintyä mielenkiintoisia fraktaalimaisia kuvioita.

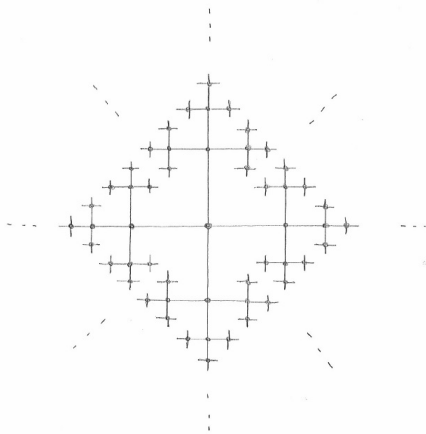
Vapaan ryhmän reunan ja Cantorin joukon homeomorfisuus konstruoidaan tarkasti. Kleinin ja Fuchsin ryhmiä käsitellään vapaamuotoisemmin. Ne määritellään tarkasti ja osoitetaan tietyllä lisäehdolla hyperbolisiksi, mutta niiden reunoja käsitellään pikemminkin ominaisuuksia esitellen ja tarkat todistukset sivuutetaan.

Vapaa ryhmä on jälleen yksi klassinen esimerkki, joka mainitaan lähes kaikissa hyperbolisia ryhmiä ja niiden reunoja käsittelevissä lähteissä mutta jonka tarkka käsittely sivuutetaan. Kleinin ja Fuchsin ryhmistä kertovan luvun 4.2 tiedot perustuvat pääasiassa lähteisiin [11] ja [8]. Lisäksi on hyödynnetty teosten [9], [7], [15], [4] ja [12] tuloksia.

4.1. Vapaa ryhmä. Tässä alaluvussa käsitellään epäkommutatiivista vapaata ryhmää $F_2 = \langle a, b | - \rangle$. Tämä tarkoittaa, että F_2 on kahden alkion ja niiden käänteisalkioiden virittämä ryhmä, jonka alkioiden välillä ei ole muita relaatioita kuin alkion ja sen käänteisalkion väliset relaatiot. Toisin sanoen $g_1 g_2 = 1$ joillakin $g_1, g_2 \in F_2$, jos ja vain jos $g_2 = g_1^{-1}$. Tällöin jokaisella alkiolla $x \in F_2$ on virittäjäalkioiden a , a^{-1} , b ja b^{-1} avulla kirjoitettava yksikäsitteinen esitys, joka ei sisällä triviaaleja osia (aa^{-1}), ($a^{-1}a$), (bb^{-1}) ja ($b^{-1}b$).

Osoitetaan ensin, että F_2 on Gromov-hyperbolinen ryhmä.

Esimerkki 4.1. Epäkommutatiiviset vapaat ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia.



KUVA 3. Vapaan ryhmän F_2 Cayleyn graafi $\Gamma(F_2, \{a, b\})$

Olkoon $F_2 = \langle a, b | - \rangle$ epäkommutatiivinen vapaa ryhmä ja $v, w \in \Gamma(F, \{a, b\})$ kaksi sen Cayleyn graafin kärkeä. Niiden välillä on polku vw^{-1} , sillä $v = (vw^{-1})w$. Jos samojen kärkien välillä olisi toinen polku u , olisi $v = uw$. Mutta koska alkion v

esitys on yksikäsitteinen, täytyy olla $u = vw^{-1}$, kun poistetaan mahdolliset triviaalit osat (aa^{-1}) , $(a^{-1}a)$, (bb^{-1}) ja $(b^{-1}b)$ kummastakin. Tällöin ryhmän F Cayleyn graafi $\Gamma(F, \{a, b\})$ on puu.

Olkoon $\Delta(x, y, z) \subset \Gamma(F, \{a, b\})$ kolmio ja $q_y \in \Gamma(F, \{a, b\})$ se kärki, jossa sivut $[y, z]$ ja $[y, x]$ erkanevat toisistaan (jos tällaista kärkeä ei ole, valitaan $q_y = z$ tai $q_y = x$). Tällöin $[z, q_y] \cup [q_y, x]$ on polku pisteiden x ja z välillä. Koska $\Gamma(F, \{a, b\})$ on puu, $[z, x] = ([z, q_y] \cup [q_y, x]) \subset ([z, y] \cup [y, x])$, eli sivu $[z, x]$ sisältyy kolmion $\Delta(x, y, z)$ toisten kahden sivun yhdisteeseen. Toistamalla vastaava päättely sivuille $[x, y]$ ja $[y, z]$ nähdään, että kolmio $\Delta(x, y, z)$ on 0-ohut. Siis avaruus $\Gamma(F, \{a, b\})$ ja ryhmä F ovat Gromov-hyperbolisia Määritelmän 1.1 mukaisesti.

Seuraavaksi halutaan osoittaa, että vapaan ryhmän reuna ∂F_2 on homeomorfinen Cantorin joukon kanssa. Konstruoidaan ensin reunan ∂F_2 ja Cantorin joukon välille bijektio. Tämä tarkoittaa vain, että reuna ∂F_2 on ylinumeroituva.

Esimerkki 4.2. Jos F_2 on epäkommutatiivinen vapaa ryhmä, niin reuna ∂F_2 ja Cantorin joukko ovat bijektiivisiä.

Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukko on tunnetuin Cantorin joukko mutta vastaavalla menetelmällä voidaan konstruoida mitä erilaisimpia Cantorin joukkoja vaihtelemalla konstruktiossa poistettavien avointen välien kokoa, lukumäärää ja sijaintia. Samaistetaan vapaan ryhmän reuna Cantorin ” $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ ”-joukkoon, mikä tarkoittaa, että konstruktion ensimmäisessä vaiheessa väli $[0, 1]$ jaetaan seitsemään yhtä pitkään osaan, joista poistetaan kolme avointa väliä: välit $[\frac{1}{7}, \frac{2}{7}[$, $[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}[$ ja $[\frac{5}{7}, \frac{6}{7}[$. Tämän jälkeen konstruktion jokaisessa vaiheessa kukin jäljellä oleva osaväli jaetaan viiteen yhtä pitkään osaan, joista poistetaan kaksi avointa väliä siten, että pienin, keskimmäinen ja suurin suljettu osaväli jäävät jäljelle. Käytetään tästä Cantorin joukosta merkintää C .

Esimerkissä 4.1 osoitettiin, että epäkommutatiiviset vapaat ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia ja $\Gamma(F, \{a, b\})$ on puu. Määritetään nyt ryhmän F reuna. Olkoon I indeksijoukko ja $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ryhmän F alkioista eli graafin $\Gamma(F, \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\})$ kärjistä koostuvia jonoja siten, että kaikilla $\alpha \in I$ on

$$w_0^\alpha = 1 \text{ ja } w_{n+1}^\alpha \in \{aw_n^\alpha, bw_n^\alpha, a^{-1}w_n^\alpha, b^{-1}w_n^\alpha\}$$

kaikilla $n \geq 0$ siten, että mihinkään alkioon w_{n+1}^α ei muodostu triviaaleja osia aa^{-1} , $a^{-1}a$, bb^{-1} ja $b^{-1}b$. Tällöin $|w_n^\alpha| = n$ kaikilla $\alpha \in I$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Koska

$$\begin{aligned} \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (w_j \cdot w_i)_1 &= \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (d(w_i, 1) + d(w_j, 1) - d(w_j, w_i)) \\ &= \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (i + j + |i - j|) \\ &= \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (2 \min\{i, j\}) = \infty, \end{aligned}$$

jokainen jono $(w_n)^\alpha$ suppenee äärettömyyteen. Siis jokainen jono $(w_n)^\alpha$ määrittelee pisteen $[(w_n)^\alpha] \in \partial F$. Toisaalta jokainen ryhmän F_2 äärettömyyteen suppeneva jono voidaan esittää tällaisessa muodossa, joten jonoilla $\{(w_n)^\alpha\}$ saadaan esitettyä jokainen reunan ∂F_2 piste.

Olkoot (w_n) ja (v_n) kaksi tällaista äärettömyyteen suppenevaa jonoa. Jos $w_n = v_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $(w_n) = (v_n)$ ja siten $(w_n) \sim (v_n)$. Jos taas $w_N \neq v_N$ jollakin $N \in \mathbb{N}$, niin alkion yksikäsitteisestä esityksestä ja jonojen konstruktiovasta johtuen $w_n \neq v_n$ kaikilla $n \geq N$. Voidaan olettaa, että N on pienin indeksi, jolla jonojen (w_n) ja (v_n) alkioit eroavat toisistaan. Tällöin kaikilla $i, j \geq N$ on

$$\begin{aligned} (w_i \cdot v_j)_1 &= \frac{1}{2}(d(w_i, 1) + d(v_j, 1) - d(w_i, v_j)) \\ &= \frac{1}{2}(d(w_i, w_{N-1}) + d(w_{N-1}, 1) + d(v_j, v_{N-1}) + d(v_{N-1}, 1) - d(w_i, v_j)) \\ &= \frac{1}{2}(2(N-1)) < \infty, \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $w_{N-1} = v_{N-1}$ ja tällöin kaikilla $i, j \geq N$ on $d(w_i, v_j) = d(w_i, w_{N-1}) + d(w_{N-1}, v_j)$. Siis $(w_n) \not\sim (v_n)$ ja siten

$$(w_n) \sim (v_n), \text{ jos ja vain jos } w_n = v_n \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Näin ollen jokainen jono $(w_n)^\alpha$ määrittelee eri reunapisteen $[(w_n)^\alpha] \in \partial F$.

Tarkastellaan seuraavaksi Cantorin " $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ "-joukon C konstruktioita. Jokaiselle Cantorin joukon pisteelle $c \in C$ on voimassa

$$c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{j=1}^{4 \cdot 3^{n-1}} I_j^n \right),$$

missä I_j^n on konstruktion n :nnen vaiheen j :s jäljellä oleva väli ja $j \in \{1, \dots, 4 \cdot 3^{n-1}\}$. Siis $c \in I_{j_{c,n}}^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jollakin alkiosta c ja konstruktion vaiheesta n riippuvalla luvulla $j_{c,n} \in \{1, \dots, 4 \cdot 3^{n-1}\}$. Määritellään pisteelle c jono $(\widehat{c}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, missä $\widehat{c}_0 = 1$ kaikilla c ,

$$\widehat{c}_1 = \begin{cases} b^{-1}, & \text{jos } c \in [0, 1/7] \\ a^{-1}, & \text{jos } c \in [2/7, 3/7] \\ b, & \text{jos } c \in [4/7, 5/7] \\ a, & \text{jos } c \in [6/7, 1] \end{cases}$$

ja edelleen kaikilla $n \geq 1$ on $\widehat{c}_{n+1} = \widehat{c}_n$, jos c kuuluu konstruktion seuraavassa vaiheessa syntyneistä osaväleistä keskimmäiseen. Muussa tapauksessa \widehat{c}_{n+1} riippuu monimutkaisemmin alkiosta \widehat{c}_n :

Jos $\widehat{c}_n = b^{-1}$, niin

$$\widehat{c}_{n+1} = \begin{cases} a, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä vasemmanpuoleiseen.} \\ a^{-1}, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä oikeanpuoleiseen.} \end{cases}$$

Jos $\widehat{c}_n = a^{-1}$, niin

$$\widehat{c}_{n+1} = \begin{cases} b^{-1}, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä vasemmanpuoleiseen.} \\ b, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä oikeanpuoleiseen.} \end{cases}$$

Jos $\widehat{c}_n = b$, niin

$$\widehat{c}_{n+1} = \begin{cases} a^{-1}, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä vasemmanpuoleiseen.} \\ a, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä oikeanpuoleiseen.} \end{cases}$$

Jos $\widehat{c}_n = a$, niin

$$\widehat{c}_{n+1} = \begin{cases} b, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä vasemmanpuoleiseen.} \\ b^{-1}, & \text{jos } c \text{ kuuluu syntyneistä osaväleistä oikeanpuoleiseen.} \end{cases}$$

Määritellään pisteelle c edelleen jono $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, missä $c_n = \prod_{i=1}^n \widehat{c}_i$. Nyt jokaisella Cantorin joukon alkiolla c on jono (\widehat{c}_n) , joka vastaa Cantorin joukon konstruktiossa kuljettua reittiä välistä $[0, 1]$ alkioon c , ja jono (c_n) , joka vastaa alkion c sisältävän osavälin $I_{j,c,n}^n$, $n \in \mathbb{N}$, sijaintia kussakin konstruktion vaiheessa. Jonot (\widehat{c}_n) ja (c_n) siis määrittävät pisteen $c \in C$. Jos (c_n) ja (c'_n) ovat kaksi jälkimmäisen tyyppistä jonoa siten, että $c_N \neq c'_N$ jollakin $N \in \mathbb{N}$ (ja siten kaikilla $n \geq N$), niin näiden jonojen määrittämät pisteet $c, c' \in C$ kuuluvat eri osaväleihin konstruktion N :nessä vaiheessa. Siis $d(c, c') \geq \frac{1}{7} \cdot (\frac{1}{5})^{N-1}$ ja siten $c \neq c'$. Vastaavasti nähdään, että kahta eri Cantorin joukon pistettä määrittävät jonot (c_n) ja (c'_n) eroavat toisistaan jostakin indeksistä N' alkaen.

Huomataan, että jokainen jono $(w_n)^\alpha \in \{(w_n)_{n \in \mathbb{N}}^\alpha\}_{\alpha \in I}$ toteuttaa jonolle (c_n) asetetut ehdot ja siten esittää jonkin pisteen $c_{(w_n)} \in C$ sijaintia Cantorin joukon konstruktion kuluessa. Vastaavasti kukin jono $(c_n) \in \{(w_n)^\alpha\}_{\alpha \in I}$. Siis kuvaus

$$i : \partial F_2 \rightarrow C, i([(w_n)]) = c_{(w_n)}$$

on hyvin määritelty. Kuvaus i on surjektio, sillä jokaisella Cantorin joukon alkiolla $c := c_{(c_n)} \in C$ on $[(c_n)] \in \partial F_2$ ja $i([(c_n)]) = c$. Kuvaus i on myös injektio, sillä jos $[(w_n)] \neq [(v_n)]$, jonot (w_n) ja (v_n) eroavat toisistaan jostakin indeksistä N alkaen. Tällöin niiden määrittämät Cantorin joukon pisteet $c_{(w_n)}$ ja $c_{(v_n)}$ kuuluvat eri osaväleihin Cantorin joukon konstruktion N :nnestä vaiheesta alkaen ja

$$i([(w_n)]) = c_{(w_n)} \neq c_{(v_n)} = i([(v_n)]).$$

Siis Cantorin joukko ja ryhmän F_2 reuna ovat bijektiiviset. Koska jonot $\{(w_n)^\alpha\}$ ja $\{(c_n)\}$ ovat samoja jonoja, samaistamalla reunan ∂F_2 piste $[(w_n)]$ jonon (w_n) kanssa ja Cantorin joukon piste $c_{(c_n)}$ jonon (c_n) kanssa, voidaan sanoa $\partial F_2 = C$.

Osoitetaan vielä, että edellä määritelty vapaan ryhmän reunan ∂F_2 ja Cantorin joukon välinen bijektio on itse asiassa homeomorfismi. Tällöin ∂F_2 ja Cantorin joukko ovat topologisessa mielessä sama joukko.

Esimerkki 4.3. Epäkommutatiivisen vapaan ryhmän reuna on homeomorfinen Cantorin joukon kanssa.

Edellä esimerkissä 4.2 todettiin, että kuvaus

$$i : \partial F_2 \rightarrow C, i([(w_n)]) = c_{(w_n)},$$

joka vie vapaan ryhmän reunan ∂F_2 pisteen $[(w_n)]$ jonon (w_n) konstruoimaksi Cantorin ” $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ ”-joukon pisteeksi $c_{(w_n)}$, on bijektio. Osoitetaan nyt, että kuvaukset i ja i^{-1} ovat jatkuvia. Käytetään avaruudessa ∂F_2 jonoreunan topologiaa ja avaruudessa $C \subset \mathbb{R}$ euklidisen metriikan määrittämää avointen välien topologiaa. Huomataan

ensin, että jos puun $\Gamma(F_2)$ kärjistä koostuvilla neutraaliakiosta alkavilla äärettömyyteen suppenevilla jonoilla (x_n) ja (y_n) on $\liminf(x_i \cdot y_j)_1 = N$, niin jonojen (x_n) ja (y_n) ensimmäiset N alkia ovat samat ja $x_n \neq y_n$ kaikilla $n > N$. Huomataan lisäksi, että Cantorin " $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ "-joukon konstruktion n :nnessä vaiheessa kunkin jäljellä olevan suljetun osavälin pituus on $\frac{1}{7} \cdot (\frac{1}{5})^{n-1}$.

Olkoon $w_1 := [(w_{1,n})] \in \partial F_2$ mikä tahansa. Olkoon $B(i(w_1), r)$, $r > 0$, pisteen $i(w_1) \in C$ mikä tahansa ympäristö ja $N \in \mathbb{N}$ siten, että on voimassa $\frac{1}{7} \cdot (\frac{1}{5})^N \leq r$ ja $B(i(w_1), \frac{1}{7} \cdot (\frac{1}{5})^N) \subset B(i(w_1), r)$. Jos nyt $w_2 = [(w_{2,n})] \in U(w_1, N + 2)$, niin

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} (w_{2,i} \cdot w_{1,j})_1 \geq N + 2.$$

Siis $w_{2,n} = w_{1,n}$ kaikilla $n \leq N + 2$. Tällöin jonon $(w_{2,n})$ määräämä Cantorin joukon piste $i(w_2)$ sijaitsee Cantorin joukon konstruktion $(N + 2)$:nnessä vaiheessa samassa osavälissä kuin piste $i(w_1)$ ja siten

$$d(i(w_1), i(w_2)) \leq (\frac{1}{5})^{N+1} \cdot \frac{1}{7} < (\frac{1}{5})^N \cdot \frac{1}{7}$$

eli $i(w_2) \in B(i(w_1), (\frac{1}{5})^N \cdot \frac{1}{7}) \subset B(i(w_1), r)$. Siis kuvaus i on jatkuva.

Olkoon nyt $c_1 \in C$ mikä tahansa ja $U(i^{-1}(c_1), r)$, $r > 0$, pisteen $i^{-1}(c_1) \in \partial F_2$ mikä tahansa ympäristö. Olkoon vielä $N \in \mathbb{N}$ siten, että on voimassa $N \geq r$ ja $U(i^{-1}(c_1), N) \subset U(i^{-1}(c_1), r)$. Jos nyt $c_2 \in C$ siten, että $c_2 \in B(c_1, \frac{1}{7} \cdot (\frac{1}{5})^{N-1})$, niin c_2 ja c_1 kuuluvat samaan osaväliin Cantorin joukon konstruktion N :nnessä vaiheessa. Tällöin niitä karakterisoivissa jonoissa $(c_{1,n})$ ja $(c_{2,n})$ ainakin ensimmäiset N alkia ovat samoja. Siis $\liminf_{i,j} (c_{1,i} \cdot c_{2,j})_1 \geq N$, mistä seuraa

$$[(c_{2,n})] = i^{-1}(c_2) \in U(i^{-1}(c_1), N) \subset U(i^{-1}(c_1), r).$$

Siis kuvaus i^{-1} on jatkuva.

Koska nyt kuvaus i on homeomorfismi, ∂F_2 on homeomorfinen Cantorin joukon kanssa ja siten topologisessa mielessä ∂F_2 on Cantorin joukko.

Cantorin joukko ei ole ainoa erikoinen Gromov-hyperbolisen ryhmän reuna. Esimerkiksi, jos kolmeulotteisella hyperbolisella monistolla on täysin geodeettinen reuna, sen perusryhmän reuna on Sierpinskiin matto. Edelleen Kapovich-Kleinerin tuloksen mukaan jos G on hyperbolinen ryhmä, jota ei voi esittää oman virtuaalisesti syklistä aliryhmänsä ja jonkin muun aliryhmänsä suorana tulona, ja jos ∂G on yhtenäinen ja reunan ∂G topologinen dimensio on 1, niin ∂G on homeomorfinen joko Sierpinskiin maton tai Mengerin käyrän kanssa. [7]

Myös seuraavassa alaluvussa tullaan näkemään esimerkki Sierpinskiin mattoa muistuttavasta Gromov-hyperbolisen ryhmän reunasta.

4.2. Kleinin ja Fuchsien ryhmät. Projektiivisen lineaariryhmän $PSL_2(\mathbb{C})$ alkioit ovat 2×2 -kompleksilukumatriiseja, joiden determinantti on 1. Toisin sanoen ne vastaavat Möbius-kuvauksia

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1$$

laajennetulta kompleksitasolta itselleen. Aliryhmä $PSL_2(\mathbb{R})$ koostuu kaikista reaali-kertoimisista Möbius-kuvauksista.

Muistutetaan mieleen joitakin Möbius-kuvausten ominaisuuksia, jotka on todistettu esimerkiksi lähteessä [9]:

- Möbius-kuvaukset ovat homeomorfismeja.
- Mille tahansa kolmelle pisteelle on olemassa Möbius-kuvaus, joka kuvaa ne halutuiksi kolmeksi pisteeksi.
- Möbius-kuvaus on yksikäsitteisesti määritelty minkä tahansa kolmen pisteen kuvautumisen kautta.
- Möbius-kuvaus voidaan kirjoittaa siirtojen, dilaatioiden, kiertojen ja inversioiden yhdistettynä kuvauksena.
- Möbius-kuvauksella on 1, 2 tai ∞ kiintopistettä. Jos kiintopisteitä on ∞ kappaletta, kyseessä on identtinen kuvaus.
- Möbius-kuvaus kuvaa yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.
- Möbius-kuvaus kuvaa yleistetyn ympyrän samalla puolella olevat pisteet kuvaympyrän samalle puolelle (ja toisen puolen toiselle).

Epäidenttiset Möbius-kuvaukset voidaan jakaa perusominaisuuksiensa perusteella kolmeen eri tyyppiin.

Määritelmä 4.4. Olkoon $g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ Möbius-kuvaus. Jos kuvauksella g on yksi kiintopiste, se on *parabolinen*. Jos taas kuvauksella g on kaksi kiintopistettä, se on *elliptinen* tai *loxodrominen*.

- (1) *Paraboliset* Möbius-kuvaukset ovat siirtoja $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{C}$. Parabolista Möbius-kuvausta vastaavan matriisin jäljen itseisarvo on $|Tr(g)| = 2$.
- (2) *Elliptiset* Möbius-kuvaukset ovat kiertoja jonkin pisteen $w \in \mathbb{C}$ ympäri, ja niille $|Tr(g)| < 2$. Elliptisen Möbius-kuvauksen prototyyppi on kierto origon ympäri: $z \mapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 1$.
- (3) *Loxodromiset* Möbius-kuvaukset ovat yhdistelmiä jonkin pisteen $w \in \mathbb{C}$ ympäri kierrosta ja dilaatiosta saman pisteen suhteen. Loxodromisen Möbius-kuvauksen prototyyppi yhdistää origon ympäri kierron ja dilaation:
 $z \mapsto \lambda e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

Erikoistapaus loxodromisesta muunnoksesta on *hyperbolinen* muunnos. Hyperboliset Möbius-kuvaukset ovat pelkkiä dilaatiota jonkin pisteen $w \in \mathbb{C}$ suhteen, prototyyppinä kuvaus $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

Loxodromisille muunnoksille $|Tr(g)| > 2$. Jos g on hyperbolinen, $Tr(g) \in \mathbb{R}_+$. Yleisesti loxodromisella muunnoksella $Tr(g) \in \mathbb{C}$.

Huomautus 4.5. Yllä käytetyissä kuvausten prototyypeissä kiintopisteet ovat 0 ja ∞ . Esimerkiksi elliptinen Möbius-kuvaus $z \mapsto e^{i\theta}z$ on kierto x_3 -akselin eli pisteiden 0 ja ∞ kautta kulkevan suoran ympäri. Vastaavat kuvaukset voidaan kuitenkin tehdä mitä tahansa kiintopisteitä käyttäen. Tällöin esimerkiksi hyperbolinen muunnos skaalaa laajennetun kompleksitason $\widehat{\mathbb{C}}$ pisteitä kohti toista kiintopistettä a_1 ja pois päin toisesta kiintopisteestä a_2 . Loxodromisen muunnoksen toinen kiintopiste on aina *hylkivä* ja toinen *vetävä*.

Määritelmä 4.6. *Kleinin ryhmät* ovat ryhmän $PSL_2(\mathbb{C})$ diskreettejä aliryhmiä. *Fuchsian ryhmät* ovat ryhmän $PSL_2(\mathbb{R})$ diskreettejä aliryhmiä.

Määritelmästä seuraa, että Fuchsin ryhmät ovat Kleinin ryhmiä. Mikä sitten on diskreetti aliryhmä? Metrisessä avaruudessa (X, d) diskreetin joukon $A \subset X$ jokaisella pisteellä on ympäristö, joka ei sisällä muita joukon A pisteitä. Varsinaisesti ryhmien $PSL_2(\mathbb{C})$ ja $PSL_2(\mathbb{R})$ diskreetit aliryhmät määritellään samalla tavalla: metristen avaruuksien $PSL_2(\mathbb{C})$ ja $PSL_2(\mathbb{R})$ diskreetteinä osajoukkoina. Tähän tarvitaan kuitenkin ryhmien $PSL_2(\mathbb{C})$ ja $PSL_2(\mathbb{R})$ metriikat, jotka kertovat, kuinka lähellä eri Möbius-kuvaukset ovat toisiaan. Jotta säästyään näiden metriikoiden tarkemmalta käsittelyltä, käytetään tässä työssä diskreetin aliryhmän määritelmänä tulosta, joka on ekvivalentti yllä kuvatulla tavalla määritellyn aliryhmän diskreettiyden kanssa. Näiden määritelmien ekvivalenttiuden yksityiskohdat löytyvät teoksista [8], [11] ja [3].

Määritelmä 4.7. Ryhmä G toimii *aidosti epäjatkovasti* metrisessä avaruudessa X , jos jokaisella kompaktilla joukolla $K \subset X$ joukko $\{g \in G \mid K \cap gK \neq \emptyset\}$ on äärellinen.

Määritelmä 4.8. Olkoon \mathbb{G} metrisessä avaruudessa X toimiva ryhmä ja $G \subset \mathbb{G}$ sen aliryhmä. Tällöin G on ryhmän \mathbb{G} *diskreetti aliryhmä*, jos G toimii aidosti epäjatkovasti avaruudessa X .

Koska Fuchsin ryhmän kuvausten

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

kuvapisteen imaginaariosille on

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{(\overline{cz + d})(az + b)}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}((\overline{cz + d})(az + b)) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}(ca|z|^2 + cb\bar{z} + daz + db) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} (ad - bc) \operatorname{Im}(z) \\ &= \frac{1}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}(z) \\ &> 0, \quad \text{kun } \operatorname{Im}(z) > 0, \end{aligned}$$

niin Fuchsin ryhmän kuvaukset kuvaavat 2-ulotteisen kompleksitason ylemmän puolitason itselleen. Ne voidaan siis tulkita 2-ulotteisen hyperbolisen avaruuden ylemmän puolitasomallin \mathbb{U}_2 kuvauksiksi. Koska lisäksi mikä tahansa Möbius-kuvaus voidaan lausua siirtojen, kiertojen, dilaatioiden ja inversioiden yhdistettynä kuvauksena ja nämä ovat hyperbolisen avaruuden isometrioita, niin Fuchsin ryhmät koostuvat kaksiulotteisen hyperbolisen avaruuden isometrioista. Vastaavasti Kleinin ryhmät koostuvat kolmeulotteisen hyperbolisen avaruuden isometrioista. Osoitetaan seuraavaksi, että osa Kleinin ja Fuchsin ryhmistä on hyperbolisia ryhmiä.

Määritelmä 4.9. Ryhmä G toimii *kokompaktisti* metrisessä avaruudessa X , jos on olemassa kompakti joukko $K \subset X$ siten, että $X = GK$.

Lause 4.10. Olkoon (X, d) pallokompakti geodeettinen avaruus ja G ryhmä, joka toimii isometrioilla kokompaktisti ja aidosti epäjatkovasti avaruudessa X . Tällöin G on äärellisesti viritetty ja millä tahansa sanametriikalla d_S varustettuna kvasi-isometrinen avaruuden X kanssa.

Todistus. Koska ryhmä G toimii kokompaktisti avaruudessa X , on olemassa kompakti joukko $K \subset X$ siten, että $GK = X$. Kiinnitetään piste $x_0 \in K$. Koska X on pallokompakti, voidaan olettaa $K = \overline{B}(x_0, r)$ jollakin $r < \infty$. Nyt jokainen piste $x \in X$ sisältyy johonkin joukkoon gK , ja siten kaikilla $x \in X$ on $d(x, gx_0) \leq R$ jollakin $g \in G$.

Olkoon $g \in G$ mikä tahansa ja γ jana pisteiden x_0 ja gx_0 välillä. Valitaan pisteet $p_0 = \gamma(0) = x_0, p_1 = \gamma(1), p_{n-1} = \gamma(n-1)$ kaikilla $n-1 < \ell(\gamma)$ ja $p_n = \gamma(\ell(\gamma)) = gx_0$. Nyt pisteiden p_i valintatavan takia $\ell(\gamma) - 1 < n < \ell(\gamma) + 1$. Valitaan jokaiselle p_i piste $g_i x_0, g_i \in G$, jolla $d(p_i, g_i x_0) \geq r$ ja vaaditaan, että $g_0 = 1$ ja $g_n = g$. Tällaiset pisteet ovat olemassa, koska G toimii kokompaktisti.

Määritellään joukko $S := \{g \in G \mid d(x_0, gx_0) \leq 2r + 1\}$. Nyt

$$\begin{aligned} d(x_0, g_i^{-1} g_{i+1} x_0) &= d(g_i x_0, g_{i+1} x_0) \\ &\leq d(g_i x_0, p_i) + d(p_i, p_{i+1}), d(p_{i+1}, g_{i+1} x_0) \\ &\leq 2r + 1, \end{aligned}$$

joten $g_i^{-1} g_{i+1} \in S$ kaikilla $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ja siten $g_{i+1} = g_i (g_i^{-1} g_{i+1}) =: g_i s_i$ jollakin $s_i \in S$. Nyt saadaan

$$g = g_n = g_{n-1} s_{n-1} = g_{n-2} s_{n-2} s_{n-1} = (1 \cdot s_0) s_1 \cdot \dots \cdot s_{n-1} = s_0 s_1 \cdot \dots \cdot s_{n-1},$$

joten S on ryhmän G virittäjäjoukko. Koska G toimii aidosti epäjatkovasti, S on äärellinen. Siis ryhmä G on äärellisesti viritetty.

Koska

$$\begin{aligned} d(x_0, gx_0) &\leq d(x_0, g_1 x_0) + d(g_1 x_0, g_2 x_0) + \dots + d(g_{n-1} x_0, gx_0) \\ &\leq n(2r + 1) \\ &= |g|_S (2r + 1) \\ &\leq (2r + 1) |g|_S + 1 \end{aligned}$$

ja toisaalta $|g|_S = n < \ell(\gamma) + 1 = d(x_0, gx_0) + 1$, eli

$$\begin{aligned} d(x_0, gx_0) &\geq n - 1 \\ &= |g|_S - 1 \\ &\geq \frac{1}{2r + 1} |g|_S - 1 \end{aligned}$$

kaikilla $r \geq 0$, ja lisäksi kaikilla $x \in X$ on $d(x, g'x_0) \leq r$ jollakin $g' \in G$, niin avaruudet (G, d_S) ja (X, d) ovat kvasi-isometriset. \square

Määritelmiensä nojalla Kleinin ja Fuchsin ryhmät toimivat avaruuksissa \mathbb{H}^3 ja \mathbb{H}^2 aidosti epäjatkovasti ja aiemman päättelyn nojalla isometrioilla. Siis Lauseen 4.10 nojalla kokompaktisti toimivat Kleinin ryhmät ovat kvasi-isometrisia avaruuden

\mathbb{H}^3 kanssa ja kokompaktisti toimivat Fuchsin ryhmät avaruuden \mathbb{H}^2 kanssa. Koska Gromov-hyperbolisuus on kvasi-isometriainvariantti ominaisuus, kokompaktit Kleinin ja Fuchsin ryhmät ovat Gromov-hyperbolisia.

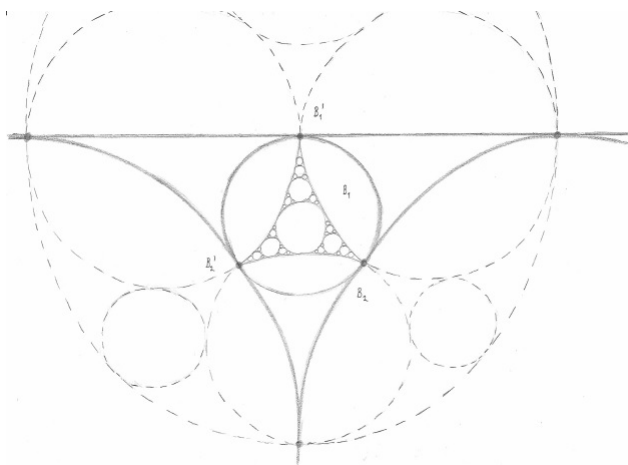
Jos Kleinin ryhmä G pitää jonkin 2-ulotteisen tason U vakaana, voidaan olettaa $U = \mathbb{H}^2$ ja siten G on Fuchsin ryhmä. Tällöin ryhmän G reuna ∂G sisältyy ympyräkiekon U reunaan ∂U . Fuchsin ryhmiä on kahta tyyppiä. Jos jokainen ympyräkiekon reunan ∂U piste on ryhmän G reunapiste, sanotaan, että ryhmä G on ensimmäistä tyyppiä. Muussa tapauksessa ryhmä G on toista tyyppiä, ja tällöin reuna ∂G on harva joukossa ∂U . Toista tyyppiä olevan Fuchsin ryhmän reuna voi olla tyhjä joukko, yksi tai kaksi pistettä tai muu ympyräkiekon reunaan sisältyvä harva joukko. [11]

Itse asiassa ryhmän G reuna on homeomorfinen ympyrän kanssa, jos ja vain jos G on *virtuaalisesti Fuchsin ryhmä* eli sisältää äärellisen indeksin aliryhmän, joka on Fuchsin ryhmä. Tämä tulos ei ole triviaali. [7]

Fuchsin ryhmiä ovat esimerkiksi kaikki hyperboliset ja paraboliset sykliset ryhmän $PSL_2(\mathbb{R})$ aliryhmät. Elliptiset sykliset ryhmän $PSL_2(\mathbb{R})$ aliryhmät ovat Fuchsin ryhmiä, jos ne ovat äärellisiä ryhmiä. [8]

Yleisesti ottaen voidaan osoittaa, että jos Kleinin ryhmän G reunassa on vähintään kaksi pistettä, G sisältää loxodromisen alkion. Tällöin ryhmän G reuna on sen loxodromisten alkioiden kiintopisteiden muodostaman joukon sulkeuma. [11]

Jos B_i ja B'_i , missä $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ovat pareittaisia erillisiä ympyröitä ja $f_i : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ on Möbius-kuvaus, joka kuvaa ympyrän B'_i ulkopuolen ympyrän B_i sisäpuoleksi (ja päinvastoin), niin kuvausten f_i virittämä vapaa ryhmä on täysin loxodrominen Kleinin ryhmä. Tällä tavalla konstruoituja ryhmiä kutsutaan *Schottkyn ryhmiksi* ja niiden reuna on alkuperäisten ympyröiden sisällä sijaitseva Cantorin joukon tapainen fraktaalijoukko. Jos ympyröiden B_i ja B'_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, sallitaan sivuta toisiaan ja kuvaukset f_i valitaan lisäksi siten, että ne säilyttävät sopivalla tavalla ympyröiden väliset tangenttipisteet, niin kuvausten f_i virittämän ryhmän reuna on yhtenäinen käyrä. [8], [12]



KUVA 4. Apollonin verkko

Esimerkiksi jos B_1 , B'_1 , B_2 ja B'_2 ovat kaikki toistensa tangenttiympyröitä ylemmässä puolitasossa ja kuvaukset f_1 ja f_2 ovat kuten yllä, niin kaikkien näistä kahdesta kuvauksesta yhdistettyjen kuvausten kiintopisteiden joukko muodostaa kunkin alkuperäisen ympyrän sisään yhä pienenevillä ympyröillä täytetyn geodeettisen kolmion. Tätä kuvausten f_1 ja f_2 virittämän vapaan ryhmän reunaa kutsutaan *Apollonin verkoksi* ja se muistuttaa rakenteeltaan Sierpinskiin mattoa. Tästä reunasta voi lukea tarkemmin teoksen [12] luvusta 7.

5. SANAONGELMA

Sanaongelma on alunperin Max Dehnin vuonna 1911 esittämä ryhmäteorian ongelma, jonka muotoilu on seuraava: onko olemassa algoritmia, joka kertoo äärellisen monen vaiheen jälkeen, onko annettu sana ryhmän G yksikköalkion esitys vai ei?

Jos kuvatonlainen algoritmi on olemassa, sitä kutsutaan ryhmän G sanaongelman *ratkaisuksi*. Vaikka on olemassa äärellisesti viritettyjä ryhmiä, joiden sanaongelmalla ei ole ratkaisua, osoittautuu, että hyperbolisen ryhmän sanaongelmalla on aina ratkaisu. Lisäksi tämän ratkaisun vaiheiden määrä on ylhäältä rajoitettu sanan w pituudella eli kyseessä on *ratkaisu lineaarisessa ajassa*, tietotekniikan mielessä varsin tehokas lineaarinen ratkaisualgoritmi.

Sanaongelman lisäksi Dehn muotoili ryhmien konjugaattiongelman ja isomorfismiongelman. Konjugaattiongelmassa halutaan löytää algoritmi, joka kertoo äärellisen monen vaiheen jälkeen, ovatko kaksi sanaa konjugaattimerkityksessä samat eli voidaanko ne kuvata toisikseen jotakin ryhmän G alkiota ja sen käänteisalkiota käyttämällä. Isomorfismiongelman ratkaisualgoritmin tulisi selvittää, ovatko kaksi äärellisesti esitettyä ryhmää keskenään isomorfiset. Sanaongelman lisäksi myös konjugaattiongelmalle on ratkaisu hyperbolisissa ryhmissä. Jos lisäksi hyperbolisella ryhmällä ei ole torsiota, eli $g^m \neq 1$ kaikilla $g \in G \setminus \{1\}$ ja kaikilla $m \in \mathbb{Z}_+$, myös isomorfismiongelmalle on ratkaisu. [3]

Äärellisesti esitettyjä ryhmiä, joiden sanaongelmalle ei ole ratkaisua, ovat esitelleet toisistaan riippumatta Novikov vuonna 1955 ja Boone vuosina 1954-1957. Lisäksi Boone esitteli vuonna 1959 löytämänsä kolmannen ryhmän, joka oli yksinkertaisempi kuin kumpikaan aiemmin löydetyistä ratkeamattoman sanaongelman ryhmistä. Esimerkiksi J. Rotmanin teoksen *The Theory of Groups: An Introduction* ([14]) luvussa 12 on osoitettu tällaisten ratkeamattoman sanaongelman ryhmien olemassaolo Novikovin ja Boonen ajatuksia seuraten. [2]

Hyperbolisen ryhmän sanaongelman ratkaisusta saadaan myös konjugaattiongelman ratkaisu. Nimittäin, sanat u ja v ovat toistensa konjugaatit, jos $u = w^{-1}vw$ eli $u^{-1}w^{-1}vw = 1$ jollakin ryhmän G alkiolla w . Koska hyperbolisessa ryhmässä on voimassa *lineaarinen isoperimetrinen epäyhtälö*, mahdollisten alkioiden w lukumäärä on rajoitettu. Siis riittää soveltaa sanaongelman ratkaisua äärellisen moneen sanaan $u^{-1}w^{-1}vw$. Myös käänteinen suunta on totta. Jos oletetaan, että ryhmän G konjugaattiongelmalle on ratkaisu, toiseksi verrattavista sanoista voidaan valita $1 \in G$, jolloin samasta algoritmista saadaan myös sanaongelman ratkaisu. Nämä kaksi ongelmaa ovat siis keskenään ekvivalentit. Itse asiassa sekä Novikov että Boone löysivät ensin ryhmät, joiden konjugaattiongelmalle ei ole ratkaisua, ja johtivat niistä sanaongelman ratkaisemattomuuden.

Tämän luvun lähteenä on käytetty teosta [2]. Äärellisesti viritettyjä ryhmiä, joiden sanaongelmalla ei ole ratkaisua, on käsitelty tarkemmin teoksessa [14].

Määritelmä 5.1. $\langle S|R \rangle$ on ryhmän G äärellinen esitys, jos joukko S on ryhmän G äärellinen virittäjäjoukko ja joukko R on äärellinen joukko ryhmän G alkioiden välisiä relaatioita. Niitä joukon R alkioita $r := r_1 \dots r_n \in F(S)$, joille $r = 1$, kutsutaan *relaattoreiksi*. Äärellistä esitystä $\langle S|R \rangle$ kutsutaan *Dehnin esitykseksi*, jos jokaiselle sanalle $w \in F(S)$, jolle $w = 1$, on olemassa osasana $r \in w = arb$ siten, että $rr' \in R$ on relaattori jollakin r' ja $|r| > |r'|$.

Intuitiivisesti ilmaistuna Dehnin esityksen määritelmä tarkoittaa, että jokainen ryhmän G yksikköalkiota esittävä sana w sisältää osasanana vähintään puolikkaan jostakin ryhmän G relaattorista.

Lause 5.2. *Hyperbolisella ryhmällä on Dehnin esitys.*

Todistus. Olkoon G äärellisesti viritetty hyperbolinen ryhmä ja S sen äärellinen viritäjäjoukko. Olkoon $\delta > 0$ siten, että ryhmän G kolmiot ovat δ -kapeita. Koska δ -hyperbolinen avaruus on δ' -hyperbolinen kaikilla $\delta' \geq \delta$, voidaan olettaa, että $\delta \in \mathbb{Z}$. Osoitetaan, että $\langle S|R \rangle$ on ryhmän G Dehnin esitys, kun

$$R = \{w \in F(S) \mid |w| \leq 10\delta, w = 1\}.$$

Toisin sanoen ryhmän G relaattoreita r ovat ne aakkoston S sanat, jotka muodostavat suljetun käyrän ryhmän G Cayleyn graafissa ja joiden pituus on korkeintaan 10δ . Täytyy osoittaa, että jos $w := s_1 s_2 \dots s_n \in F(S)$ on sana, jolle $w = 1$, niin w sisältää osasanana r_1 siten, että on olemassa relaattori $r_1 r_2 \in R$, jolle $|r_1| > |r_2|$.

Jos $|w| \leq 10\delta$, niin $w \in R$ ja väite pätee. Oletetaan siis, että $|w| > 10\delta$. Tällöin on kaksi mahdollista tapausta.

- (1) Kaikilla kärjillä $w_i = s_1 \dots s_i \in w$ on $d(w_i, 1) < 5\delta$, kun $i \in \{1, \dots, |w|\}$.

Olkoon p lyhin polku, joka yhdistää pisteet 1 ja $w_{5\delta} = s_1 \dots s_{5\delta}$. Erityisesti $|p| < 5\delta = |s_1 \dots s_{5\delta}|$. Nyt $s_1 \dots s_{5\delta} p^{-1}$ on suljettu käyrä ja

$$|s_1 \dots s_{5\delta} p^{-1}| \leq |w_{5\delta}| + |p^{-1}| < 5\delta + 5\delta = 10\delta.$$

Siis $s_1 \dots s_{5\delta} p^{-1} \in R$ ja $|s_1 \dots s_{5\delta}| = 5\delta > |p^{-1}|$, joten w sisältää puolikkaan relaattorin.

- (2) On olemassa kärki $w_i = s_1 \dots s_i \subset w$, jolla $d(w_i, 1) \geq 5\delta$.

Olkoon $w_t = s_1 \dots s_t \in w$ käyrän w piste, joka sijaitsee kauimpana ryhmän G neutraalialkiosta 1. Tällöin ainakin $d(w_t, 1) \geq 5\delta$. Jaetaan todistus taas kahteen osaan.

- (a) Jos $d(w_t, w_{t+5\delta}) < 5\delta$ tai $d(w_t, w_{t-5\delta}) < 5\delta$,

niin voidaan olettaa, että $d(w_t, w_{t+5\delta}) < 5\delta$. Olkoon γ kärkien w_t ja $w_{t+5\delta}$ välinen geodeettinen jana. Erityisesti $|\gamma| < 5\delta$. Tällöin $s_t \dots s_{t+5\delta} \gamma^{-1}$ on suljettu käyrä ja

$$|s_t \dots s_{t+5\delta} \gamma^{-1}| \leq |s_t \dots s_{t+5\delta}| + |\gamma^{-1}| < 5\delta + 5\delta = 10\delta,$$

joten $s_t \dots s_{t+5\delta} \gamma^{-1} \in R$. Koska $|s_t \dots s_{t+5\delta}| = 5\delta > |\gamma^{-1}|$, sana w sisältää puolikkaan relaattorin.

- (b) Jos taas $d(w_t, w_{t+5\delta}) \geq 5\delta$ ja $d(w_t, w_{t-5\delta}) \geq 5\delta$,

niin kolmioepäyhtälön nojalla kaikki käyrän w kärjet $w_{t-5\delta}, \dots, w_t$ sijaitsevat kärkien $w_{t-5\delta}$ ja w_t välisellä geodeettisella janalla ja vastaavasti kaikki kärjet $w_t, \dots, w_{t+5\delta}$ sijaitsevat kärkien w_t ja $w_{t+5\delta}$ välisellä geodeettisella janalla. Kolmioiden $\Delta(1, w_t, w_{t-5\delta})$ ja $\Delta(1, w_t, w_{t+5\delta})$ kapeuden nojalla on olemassa piste $x \in [1, w_t]$ siten, että

$$d(x, w_t) = d(w_t, w_{t-2\delta}) = d(w_t, w_{t+2\delta}) = 2\delta$$

ja $d(w_{t-2\delta}, x) \leq \delta$ ja $d(w_{t+2\delta}, x) \leq \delta$. Erityisesti $d(w_{t-2\delta}, w_{t+2\delta}) \leq 2\delta$. Olkoon $\gamma = [w_{t-2\delta}, w_{t+2\delta}]$ näiden kärkien välinen geodeettinen jana, jolloin

$|\gamma| \leq 2\delta$. Nyt $s_{t-2\delta} \dots s_{t+2\delta} \gamma^{-1}$ on suljettu käyrä ja

$$|s_{t-2\delta} \dots s_{t+2\delta} \gamma^{-1}| \leq |s_{t-2\delta} \dots s_{t+2\delta}| + |\gamma^{-1}| \leq 4\delta + 2\delta = 6\delta.$$

Siis $s_{t-2\delta} \dots s_{t+2\delta} \gamma^{-1} \in R$ ja $|s_{t-2\delta} \dots s_{t+2\delta}| = 4\delta > 2\delta \geq |\gamma^{-1}|$, joten w sisältää puolikkaan relaattorin.

Näin ollen $\langle S|R \rangle$ on ryhmän G Dehnin esitys. \square

Huomautus 5.3. Vastaavasti voidaan osoittaa, että hyperbolisella ryhmällä on voimassa *lineaarinen isoperimetrinen epäyhtälö*, joka on yksi Gromov-hyperbolisuuden karakterisaatioista. Suljettu käyrä voidaan aina esittää ryhmän G relaattorien ja relaattorien käänteisalkioiden konjugaattien tulona: $w = (u_1^{-1} r_1^{\pm 1} u_1) \cdot \dots \cdot (u_n^{-1} r_n^{\pm 1} u_n)$, missä $u_i \in G$ ja $r_i \in R$ kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Yleisesti ottaen suljetulla käyrällä on äärettömän monta tällaista esitystä. Pienin mahdollinen tarvittavien relaattorien lukumäärä n on käyrän w rajaaman alueen pinta-ala. Geometrisesti tämä vastaa Cayleyn graafissa polun w rajaaman alueen sisälle jäävien relaattoreita vastaavien suljettujen lenkkien lukumäärää. Jos Lauseen 5.2 todistuksen kolmessa eri tapauksessa käsitellään suljettujen käyrien pituuksien ja niiden rajaamien alueiden pinta-alojen suhdetta, voidaan induktiolla käyrän pituuden suhteen osoittaa, että minkä tahansa suljetun käyrän w rajaaman alueen pinta-ala on ylhäältä rajoitettu käyrän pituuden $|w|$ lineaarisella funktiolla. Kyseinen todistuksessa saatava lineaarinen isoperimetrinen epäyhtälö on

$$A(w) \leq K|w|, \text{ missä } K = \max\{A(w) \mid |w| \leq 10\delta\}.$$

Yksityiskohtaisempi todistus on annettu esimerkiksi lähteessä [2]. Myös käänteinen tulos pätee: lineaarisen isoperimetrinen epäyhtälön olemassaolosta seuraa Gromov-hyperbolisuus. Siis Gromov-hyperbolisuuden karakterisointi lineaarisen isoperimetrinen epäyhtälön avulla on ekvivalenttia aiemmin tässä tutkielmassa esiteltyjen karakterisaatioiden kanssa.

Lause 5.4. *Jos ryhmällä G on Dehnin esitys, ryhmän G sanaongelmalla on ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $\langle S|R \rangle$ ryhmän G Dehnin esitys ja $w \in F(S)$ mielivaltainen sana. Merkitään $|w| =: n$. Jos w ei sisällä puolikasta relaattoria, on $w \neq 1$. Jos w sisältää puolikkaan relaattorin, on $w = ar_1b$, missä $r_1r_2 \in R$ ja $|r_1| > |r_2|$. Tällöin w voidaan kirjoittaa myös muodossa $w = a(r_2)^{-1}b$. Koska

$$|a(r_2)^{-1}b| \leq |a| + |r_2^{-1}| + |b| = |a| + |r_2| + |b| < |a| + |r_1| + |b| = |ar_1b|,$$

niin saatu sanan w esitys on aidosti lyhyempi kuin alkuperäinen esitys. Jatketaan prosessia äsken saadulla esityksellä $w = ar_2^{-1}b$. Korkeintaan n askeleen jälkeen joko saavutetaan esitys $w = 1$ tai huomataan, ettei w sisällä enää puolikasta relaattoria ja siten $w \neq 1$.

Tämä on äärellinen algoritmi ja siten ryhmän G sanaongelman ratkaisu. \square

Yhdistämällä Lauseet 5.2 ja 5.4 nähdään, että hyperbolisen ryhmän sanaongelmalla on aina ratkaisu.

Seuraus 5.5. *Hyperbolisen ryhmän sanaongelmalla on ratkaisu.*

Huomautus 5.6. Lauseen 5.4 todistuksessa huomattiin, että käsiteltäessä hyperbolisen ryhmän G mielivaltaista sanaa w voidaan korkeintaan $|w|$ vaiheen jälkeen päättää,

onko $w = 1$ vai $w \neq 1$. Näin ollen hyperbolisen ryhmän sanaongelmalla on peräti *ratkaisu lineaarisessa ajassa*. Tietotekniikan termein kuvailtuna ratkaisu on siis varsin tehokas $O(n)$ -algoritmi.

LIITTEET

Ideaalisen kolmion pinta-ala. Olkoon Δ ideaalinen kolmio Poincarén kiekkomallissa \mathbb{B}_2 . Se voidaan kuvata isometrisesti ylemmän puolitason \mathbb{U}_2 ideaaliseksi kolmioksi Möbius-kuvauksella

$$f : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{U}_2, \quad f(z) = \frac{-iz - i}{z - 1}.$$

Nyt voidaan olettaa, että kolmion $f(\Delta)$ kärjet ovat pisteissä $(-1, 0)$, $(1, 0)$ ja ∞ . Nimittäin, jos näin ei ole, kolmion $f(\Delta)$ kärjet voidaan kuvata kyseisiin pisteisiin isometrisesti Möbius-kuvauksella. Tällöin (x, y) -koordinaateissa ilmaistuna kolmio $f(\Delta)$ rajaa alueen

$$\{ (x, y) \in \mathbb{U}_2 \mid -1 \leq x \leq 1, y \geq \sqrt{1 - x^2} \}.$$

Määritelmän mukaan osajoukon $A \subset \mathbb{U}_2$ hyperbolinen pinta-ala on $\int_A \frac{1}{y^2} dx dy$, joten kolmion $f(\Delta)$ pinta-ala saadaan integroimalla

$$\int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta = \pi.$$

Siten myös ideaalisen kolmion Δ pinta-ala on π . [16]

Hyperbolisen kolmion ja sisään piirretyn suurimman ympyrän leikkauspisteet. Osoitetaan, että hyperbolisen kolmion $\Delta(x, y, z)$ internaalipisteet $i_x \in [y, z]$, $i_y \in [x, z]$ ja $i_z \in [x, y]$ ovat kolmion $\Delta(x, y, z)$ ja sen sisään piirretyn suurimman ympyrän leikkauspisteet.

Poincarén kiekkomalli \mathbb{B}_2 toteuttaa Hilbertin aksioomat 1-13 (katso esim. Kurittu, Hokkanen, Kahana : *Geometria*, [10]), joten kaikki neutraalin geometrian tulokset ja erityisesti kolmioiden yhtenevyyden sivu-kulma-kulma-sääntö (SKK) ja suorakulmaisten kolmioiden yhtenevyyden sivu-sivu-kulma-sääntö (SSK) ovat voimassa. Neutraalin geometrian tulosten todistuksissa ei käytetä paralleeliaksiomaa tai hyperbolista aksiomaa, joten ne ovat voimassa sekä euklidisessä että hyperbolisessa geometriassa.

Osoitetaan ensin, että euklidisen avaruuden tapausta vastaavasti hyperbolisen avaruuden kolmion kaikki kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kyseisen kolmion sisään piirretyn suurimman ympyrän keskipiste. Itse asiassa teoksen [10] euklidisen tapauksen todistus pohjautuu kahta kohtaa lukuunottamatta neutraalin geometrian tuloksiin, jotka ovat voimassa myös hyperbolisessa geometriassa. Poikkeuksista toinen koskee euklidisen avaruuden kolmion kulmien summaa ja toinen euklidisen avaruuden yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhdetta. Kyseiset todistuksen kohdat voidaan kuitenkin korvata käyttämällä teoksen [10] perustelujen sijaan kolmioiden yhtenevyyden SKK-sääntöä. Seuraavaksi esitettävä todistus seuraa tällä tavoin hyperboliseen avaruuteen mukautettuna teoksessa [10] annettua euklidisen tapauksen todistusta. Selkeyden vuoksi sivuutetaan joitakin todistuksen yksityiskohtia, kuten kolmion kulman puolittavan puolisuoran ja kolmion vastakkaisen sivun leikkaamisen tarkat perustelut.

Olkoon $\Delta(x, y, z)$ hyperbolisen avaruuden kolmio. Olkoon $x' \in [z, y]$ siten, että jana $[x, x']$ puolittaa kulman $\angle x$, ja vastaavasti $p \in [x, x']$ siten, että jana $[y, p]$ puolittaa kulman $\angle y$. Olkoon $s \in [x, y]$, $t \in [x, z]$ ja $u \in [y, z]$ siten, että näiden pisteiden ja pisteen p väliset janat ovat kohtisuorassa kutakin kolmion $\Delta(x, y, z)$ sivua vastaan. Täytyy olla $x \neq s \neq y$, $x \neq t \neq z$ ja $y \neq u \neq z$, sillä muutoin kaikissa tapauksissa päädytään ristiriitaan kulman suuruuden ylärajan 180 nojalla. Esimerkiksi tapauksessa $s = x$ saatava ristiriita olisi

$$90 = \angle psy = \angle pxy = \frac{1}{2}\angle x < \frac{1}{2} \cdot 180 = 90.$$

Nyt kolmioiden SKK-säännön nojalla kolmiot $\Delta(p, y, u)$ ja $\Delta(p, y, s)$ ovat yhtenevät, kuten myös kolmiot $\Delta(p, x, t)$ ja $\Delta(p, x, s)$. Erityisesti $|up| = |sp| = |tp|$. Tällöin suorakulmaisille kolmioille voimassa olevan SSK-säännön nojalla kolmiot $\Delta(z, p, u)$ ja $\Delta(z, p, t)$ ovat yhtenevät, joten jana $[z, p]$ puolittaa kulman $\angle z$.

Siis kaikki kolme kolmion kulmanpuolittajaa leikkaavat toisensa kolmion sisällä olevassa pisteessä p , josta piirretyt kuhunkin kolmion sivuun nähden kohtisuorat janat ovat keskenään yhtä pitkät. Koska nämä janat ovat ympyrän säiteitä, joita vastaan kohtisuorassa kolmion sivut ovat, kukin kolmion sivu on nyt tangentti ympyrälle, jonka keskipiste on p ja säde $|p - s|$. Tämä ympyrä on määritelmän mukaan kolmion sisään piirretty suurin ympyrä.

Koska edellä olevien kolmioiden yhtenevyyksien nojalla $|yu| = |ys|$, $|xt| = |xs|$ ja $|zu| = |zt|$, kolmion sisään piirretyn suurimman ympyrän ja kolmion sivujen leikkauspisteet s , t , ja u jakavat kolmion sivut vastaavassa suhteessa kuin kolmion internaalipisteet i_x , i_y ja i_z . Osoitetaan vielä, että tällaiset pisteet ovat yksikäsitteiset.

Jos $\{s, t, u\}$ ja $\{i_z, i_y, i_x\}$ ovat eri pistekolmikot, voidaan olettaa, että $i_z \neq s$ ja $d(x, i_z) < d(x, s)$. Tällöin myös $d(x, i_y) = d(x, i_z) < d(x, s) = d(x, t)$ ja toisaalta

$$d(y, u) = d(y, s) = d(x, y) - d(x, s) < d(x, y) - d(x, i_z) = d(y, i_z) = d(y, i_x).$$

Koska nyt $d(x, i_y) < d(x, t)$, on

$$d(z, t) = d(x, z) - d(x, t) < d(x, y) - d(x, i_y) = d(z, i_y).$$

Koska toisaalta $d(y, u) < d(y, i_x)$, on myös

$$d(z, u) = d(y, z) - d(y, u) > d(y, z) - d(y, i_x) = d(z, i_x).$$

Mutta tämä on ristiriita, koska oletusten nojalla $d(z, t) = d(z, u)$ ja $d(z, i_y) = d(z, i_x)$. Siis täytyy olla $s = i_z$, $t = i_y$ ja $u = i_x$.

VIITTEET

- [1] J. M. ALONSO, T. BRADY, D. COOPER, V. FERLINI, M. LUSTIG, M. MIHALIK, M. SHAPIRO, H. SHORT, *Notes on Word Hyperbolic Groups*, Group theory from a geometrical viewpoint, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
Luettavissa osoitteessa www.i2m.univ-amu.fr/~short/Papers/MSRInotes2004.pdf.
- [2] MICHAEL BATTY, AFTER PANAGIOTIS PAPASOGLU, *Notes on Hyperbolic and Automatic Groups*, matthieu.gendulphe.com/Papasoglu.pdf, 2003 (luettu 15.6.2016).
Luettavissa myös osoitteessa www.math.ucdavis.edu/~kapovich/280-2009/hyplectures_papasoglu.pdf.
- [3] M. R. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1999.
- [4] DANNY CALEGARI, *The Ergodic Theory of Hyperbolic Groups*, Geometry and topology down under, Contemp. Math., 597, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.
Luettavissa osoitteessa arxiv.org/pdf/1111.0029v2.pdf.
- [5] S. M. GERSTEN, *Introduction to Hyperbolic and Automatic Groups*, Summer School in Group Theory in Banff, 1996, CRM Proc. Lecture Notes, 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
Luettavissa osoitteessa www.math.utah.edu/~sg/Papers/banff.pdf.
- [6] JAMES HOWIE, *Hyperbolic Groups Lecture Notes*, www.macs.hw.ac.uk/~jim/samos.pdf, 1999 (luettu 15.6.2016).
- [7] ILYA KAPOVICH, NADIA BENAKLI, *Boundaries of Hyperbolic Groups*, Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001), Contemp. Math., 296, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
Luettavissa osoitteessa www.math.uiuc.edu/~kapovich/PAPERS/bry1.pdf.
- [8] SVETLANA KATOK, *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, 1992.
- [9] TERO KILPELÄINEN, *Kompleksianalyysi*, luentomuistiinpanoja keväälle 2005, users.jyu.fi/~terok/opetus/kompleksi/kompleksianalyysi.pdf, 2006 (luettu 18.7.2016).
- [10] KURITTU, HOKKANEN, KAHANPÄÄ, *Geometria*, Jyväskylän yliopiston luentomoniste 57, 2008.
- [11] BERNARD MASKIT, *Kleinian Groups*, volume 287 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1988.
- [12] DAVID MUMFORD, CAROLINE SERIES, DAVID WRIGHT, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002.
- [13] KENŌICHI OHSHIKA, *Discrete Groups*, volume 207 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 2002.
- [14] JOSEPH J. ROTMAN, *The Theory of Groups: An Introduction*, Boston, Mass., 1968.
- [15] ALESSANDRO SISTO *Lecture Notes on Geometric Group Theory*, people.math.ethz.ch/~alsisto/LectureNotesGGT.pdf, 2014 (luettu 15.6.2016).
- [16] WILLIAM THURSTON, SILVIO LEVY, *Three-dimensional Geometry and Topology: Vol. 1*, volume 35 of Princeton mathematical series. Princeton (N.J.), Princeton U.P 1997.
- [17] JUSSI VÄISÄLÄ, *Topologia II*, Limes ry., 1999.