

# Inflaatio ja rakenteiden synty

*Pro gradu -tutkielma, 17.11.2016*

*Tekijä:*

KEIJO MÖNKKÖNEN

*Ohjaaja:*

SAMI NURMI



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
FYSIIKAN LAITOS

## TIIVISTELMÄ

Mönkkönen, Keijo

Inflaatio ja rakenteiden synty

Pro gradu -tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2016, 72 sivua.

Kosmologian standardimallina tunnettu  $\Lambda$ CDM-malli on vakiinnuttanut asemansa parhaana mahdollisena selityksenä viimeaikaisille kosmologisille havainnoille. Ilman ns. inflaatiiovaihetta malli törmää kuitenkin varhaista maailmankaikkeutta koskeviin vakaviin ongelmiin. Se ei kykene antamaan selitystä avaruuden laakeudelle, taustasäteilyn tasaisuudelle, raskaiden reliikkihiukkasten puuttumiselle ja taustasäteilyn anisotropioille. Edellä mainittujen ongelmien ratkaisuksi on esitetty kosmologista inflaatiota, jonka mukaan hyvin varhainen maailmankaikkeus on käynyt läpi kehitysvaiheen, jossa sen koko kasvoi lähes eksponentiaalisesti. Tässä pro gradu -tutkielmassa perehdytään lähdeaineiston avulla inflaation fysikaaliseen perustaan ja siihen, kuinka se ratkaisee standardikosmologiassa esiintyvät ongelmat. Erityisesti pyritään ymmärtämään taustasäteilyn anisotropioiden syntyä, sillä ne heijastelevat varhaisia tiheysperturbaatioita, joista on ajan myötä kehittynyt universumin suuren mittakaavan rakenne. Tutkielmassa nähdään, että pelkkä eksponentiaalisesti kiihtyvä laajeneminen ratkaisee kolme ensimmäistä ongelmaa. Lisäksi anisotropiat voidaan selittää inflaation aikana tapahtuvilla kvanttifluktuaatioilla, jotka indusoivat häiriöitä gravitaatiopotentiaaliin ja sitä kautta taustasäteilyn lämpötilaan. Perturbaatioiden tarkkaan käsittelyyn tarvitaan kosmologista häiriöteoriaa, jolle on tutkielmassa omistettu oma kappaleensa. Erilaisia inflaatiomalleja on hyvin paljon. Tutkielman tavoite ei ole esitellä ja eritellä malleja, joten tarkastelussa rajoitutaan yksinkertaisimpaan yhden kentän slow-roll -inflaatioon. Inflaatioprosessin vaikutus kosmologisiin havaintoihin, kuten taustasäteilyyn ja galaksien jakaumaan, käydään läpi ja ennusteita verrataan Planck-satelliitin viimeisimpään data-analyysiin vuodelta 2015. Lopuksi pohditaan inflaatioparadigman avoimia kysymyksiä ja annetaan esimerkki vaihtoehtoisesta selitysmallista.

Avainsanat: Kosmologia, inflaatio, rakenteiden synty, kosmologinen häiriöteoria.

## ABSTRACT

Mönkkönen, Keijo

Inflation and the origin of structure

Master's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2016, 72 pages.

$\Lambda$ CDM-model, which is known as the standard model of cosmology, has established its position as the best possible explanation for recent cosmological observations. However, without a so-called inflationary phase, the model faces serious problems concerning the early universe. It is unable to explain the observed flatness of the universe, homogeneity of cosmic microwave background, absence of heavy relic particles and anisotropies of the cosmic microwave background. Cosmological inflation has been proposed as the solution for these problems. According to it, the very early universe has undergone a phase where its size increased almost exponentially. In this master's thesis, with the help of literature, we take a look at the physical foundations of inflation and investigate how it solves the early universe problems. Especially, we try to understand the origin of anisotropies of the cosmic microwave background because they reflect the primordial density perturbations which over time have evolved to form the large-scale structure of the universe. We will see that the exponential expansion alone can solve the first three problems. Moreover, the anisotropies are explained by quantum fluctuations generated during inflation. These fluctuations induce perturbations in gravitational potential and therefore in the temperature of the CMB. Cosmological perturbation theory is needed for accurate treatment of the perturbations so one chapter is devoted to it. Because of the large number of inflationary models, we restrict our attention to simplest single field slow-roll inflation. The effect of inflationary process on cosmological observations, such as CMB and galaxy distribution, is examined and predictions are compared to the latest data release of Planck satellite from 2015. In the end we consider open problems of the inflationary paradigm and give an example of an alternative theory.

Keywords: Cosmology, inflation, origin of structure, cosmological perturbation theory.

# SISÄLTÖ

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b><math>\Lambda</math>CDM-malli</b>	<b>9</b>
2.1	Metriikka . . . . .	9
2.2	Friedmannin yhtälöt . . . . .	11
2.3	Punasiirtymä . . . . .	12
2.4	Varhainen maailmankaikkeus . . . . .	13
2.5	Ongelmia alkuräjähdyksessä . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Inflaation perusteet</b>	<b>17</b>
3.1	Ekvivalentit määritelmät . . . . .	17
3.2	Ratkaisu ongelmiin . . . . .	18
3.3	Inflatonkenttä ja aktio . . . . .	20
3.4	Slow-roll -approksimaatio ja Hamilton-Jacobi -formalismi . . . . .	22
3.5	Inflaatiomalleja . . . . .	24
3.6	Reheating ja preheating . . . . .	27
3.7	Inflaatio ja skaalat . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Kosmologinen häiriöteoria</b>	<b>30</b>
4.1	Perturbaatiot ja mittaongelma . . . . .	30
4.2	Metriikka . . . . .	32
4.3	Energia-liikemäärä -tensori . . . . .	33
4.4	Einsteinin yhtälö . . . . .	36
4.5	Mitan kiinnitys . . . . .	37
4.6	Skalaariperturbaatiot . . . . .	37
4.7	Vektori- ja tensoriperturbaatiot . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Inflaatio ja kvanttifluktuaatiot</b>	<b>41</b>
5.1	Statistiikka . . . . .	41
5.2	Fluktuaatiot inflaation aikana . . . . .	43
5.2.1	Massaton kenttä de Sitter -rajalla . . . . .	43
5.2.2	Massiivinen kenttä de Sitter -rajalla . . . . .	44
5.2.3	Slow-roll -inflaatio . . . . .	45
5.3	Metriikan ja energia-liikemäärä -tensorin perturbaatiot . . . . .	46
5.4	Perturbaatioiden kvantitus . . . . .	48
5.5	Fluktuaatiot slow-roll -inflaatioissa . . . . .	50
5.6	Perturbaatioiden luonne . . . . .	52
5.7	Esimerkkimallit . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Teoria ja havainnot</b>	<b>56</b>
6.1	Kosminen taustasäteily . . . . .	56
6.1.1	Statistiikka . . . . .	56
6.1.2	Skalaarimoodit . . . . .	57

6.1.3	Tensorimoodit . . . . .	59
6.2	Suuren mittakaavan rakenne . . . . .	61
6.3	Todisteita inflaatiosta? . . . . .	64
6.4	Avoimia kysymyksiä . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Johtopäätökset</b>	<b>68</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>70</b>

## 1 JOHDANTO

Kosmologia on viime vuosisadan aikana edistynyt huomattavasti sekä teoreettisen ymmärryksen että havaintojen osalta. Spekulaatiiviset ideat ovat muuttuneet testattavissa oleviksi hypoteeseiksi, joista alkuräjähdysteoria on mainio esimerkki. Alkuaikaneiden suhteelliset runsaudet, galaksien punasiirtymät ja kosminen taustasäteily kertovat, että maailmankaikkeus on menneisyydessä ollut kooltaan huomattavasti pienempi ja siten kuumempi kuin nykyään. Myös vakaalla pohjalla oleva yleinen suhteellisuusteoria puhuu dynaamisen universumin puolesta, kun sitä sovelletaan maailmankaikkeuteen kokonaisuutena. Nykyään alkuräjähdysteoria onkin jo tieteellisen teorian asemassa eikä sille ole vartenotettavia kilpailevia selityksiä.

Perinteistä Big Bang -mallia on jouduttu sittemmin muokkaamaan yhä tarkempien kosmologisten havaintojen myötä. Galaksien rotaatiokäyrät ja itse galaksien liike galaksijoukoissa ehdottivat näkymättömän materiakomponentin olemassaoloa [1]. Tämä ns. pimeä aine vuorovaikuttaa tavallisen näkyvän aineen kanssa vain gravitaation välityksellä ja muodostaa tällä hetkellä valtaosan maailmankaikkeuden ei-relativistisesta materiasta [2]. Kaukaisten supernovien kirkkauksia mittaamalla nähtiin, että maailmankaikkeuden laajenemisnopeus ei olekaan hidastumassa, vaan päinvastoin kiihtymässä [1]. Vastuussa tästä on ns. pimeä energia, joka todennäköisesti on avaruuteen itseensä liittyvää energiaa. Tätä tyhjän avaruuden sisältämää energiaa kutsutaan usein kosmologiseksi vakioksi.

Molempien pimeiden komponenttien olemassaololle saatiin lopullinen vahvistus kosmista taustasäteilyä tutkimalla. Niiden fysikaalinen olemus on toistaiseksi tuntematon. Varmaksi tiedetään vain se, että yhdessä ne kattavat 95 % maailmankaikkeuden nykyisestä energiasisällöstä [2]. Tällä hetkellä kosmologian standardimalli tunnetaan  $\Lambda$ CDM-mallina, joka perustuu homogeeniseen ja isotrooppiseen Friedmann-Robertson-Walker -kosmologiaan. Nimessä  $\Lambda$  viittaa kosmologiseen vakioon ja CDM kylmään pimeään aineeseen.

Vaikka  $\Lambda$ CDM-malli on toistaiseksi parhaiten havaintoihin sopiva teoria, törmää se varhaisen maailmankaikkeuden alkuehtoja koskeviin ongelmiin. Ensimmäiseksi universumin energiasisältöä ja geometriaa karakterisoiva kokonaistiheysparametri  $\Omega$  täytyy hienosäätää varhaisessa maailmankaikkeudessa hyvin tarkasti lähelle lukua 1, jotta nykyinen arvo  $\Omega \approx 1$  voitaisiin selittää. Toiseksi kosminen taustasäteily on lähes tasainen ympäri taivasta, vaikka universumi koostui taustasäteilyn syntymisen aikaan tuhansista toisistaan kausaalisesti irtikytketyistä alueista. Kolmanneksi taustasäteilyn anisotropioiden, jotka karakterisoivat poikkeamaa keskilämpötilasta, alkuperää ei tiedetä, sillä tavallisessa kuumassa alkuräjähdyksessä ei ole mekanismeja epähomogeenioiden syntymiselle. Neljänneksi suurten yhtenäisteorioiden mukaan universumin pitäisi sisältää huomattava määrä magneettisia monopoleja, vaikka toistaiseksi yhtäkään ei ole vielä havaittu.

Inflaatio on hypoteesi, jonka mukaan varhainen maailmankaikkeus on käynyt läpi lyhyen vaiheen, jossa sen koko kasvoi lähes eksponentiaalisesti. Inflaation suurimpia motivaatioita oli selittää reliikkien ja etenkin monopolien puuttuminen [3], mutta nopeasti huomattiin, että samalla se ratkaisee myös muut standardikosmologiassa esiintyvät ongelmat. Inflaatio on säilynyt kosmologian paradigmana yli 30

vuotta, vaikka tänäkin päivänä löytyy sen vastustajia. Yksinkertaisimmat mallit ovat sopusoinnussa havaintojen kanssa, mutta inflaatiota ei ole vielä lopullisesti todistettu.

Tässä tutkielmassa keskitytään inflaation fysikaaliseen perustaan ja siihen, kuinka se tarjoaa ratkaisun standardikosmologiassa esiintyviin ongelmiin. Erilaisia inflaatiomalleja on paljon. Tutkielmassa rajoitutaan lähinnä tarkastelemaan yleisellä tasolla yksinkertaisinta yhden kentän slow-roll -inflaatiota. Pääpainona ja -tavoitteena on ymmärtää suuren mittakaavan rakenteiden alkuperää ja erityisesti varhaisten tiheysperturbaatioiden syntyä. Fysikaalisesti tärkeät tulokset pyritään johtamaan mahdollisimman yksityiskohtaisesti. Käsittelyn kannalta epäoleelliset lausekkeiden johdot jätetään viittauksien varaan. Joka tapauksessa kaikki epätriviaalit väittämät löytyvät kontekstissa viitatuista lähteistä.

Gradun rakenne on seuraavanlainen. Aivan ensimmäiseksi käydään läpi  $\Lambda$ CDM-mallin matemaattinen ja fysikaalinen tausta. Kappaleessa esitellään perinteinen FRW-metriikka ja Einsteinin yhtälöistä seuraavat Friedmannin yhtälöt. Lopussa käsitellään hieman varhaisen maailmankaikkeuden fysiikkaa ja mallissa esiintyviä ongelmia. Näistä laakeus- ja horisonttiongelmia tarkastellaan kvantitatiivisesti kappaleessa aikaisemmin esitetyn teorian pohjalta.

Kolmannessa kappaleessa esitetään inflaatioteorian perusteet. Aluksi annetaan ekvivalentit matemaattiset määritelmät inflaatiolle sekä tutkitaan inflaation tarjoamaa ratkaisua laakeus-, horisontti-, ja monopoliongelmiaan. Tämän jälkeen paneudutaan kenttäteoreettiseen lähestymistapaan ja määritellään inflaatiossa usein käytetty slow-roll -approksimaatio. Erilaisia inflaatiomalleja käydään läpi yleisellä tasolla ja annetaan kaksi konkreettista esimerkkiä. Lopussa tarkastellaan inflaation jälkeistä hiukastuottoa reheating- ja preheating-prosesseissa sekä kosmologisten skaalojen käyttäytymistä inflaation aikana.

Neljäs kappale käsittelee kosmologista häiriöteoriaa, joka on tärkeä työkalu sekä inflaatiossa että kosmologiassa yleensä. Häiriöteoria esitetään matemaattisella tasolla mahdollisimman täsmällisesti lähtien liikkeelle mittaongelmasta, jonka mukaan yleisessä suhteellisuusteoriassa perturbaatiot eivät ole yksikäsitteisiä. Tämä mielessä pitäen lasketaan häiriöt metriselle tensorille, energia-liikemäärä -tensorille ja Einsteinin tensorille sekä muodostetaan perturbaatioista mittainvariantteja kombinaatioita. Lopussa mainitaan yleisesti käytettyjä mittoja ja tarkastellaan eri perturbaatioiden kehitystä häirityn Einsteinin yhtälön avulla.

Viidennessä kappaleessa paneudutaan kosmologisen häiriöteorian avulla tarkemmin siihen, kuinka inflaatio selittää rakenteiden synnyn. Alussa käydään läpi tarvittavia tilastollisia käsitteitä, jotta teoreettiset ennusteet voidaan kytkeä havaintoihin. Yleisen kvanttikentän kehitystä käsitellään inflatoituvassa universumissa ja tuloksia hyödynnetään myöhemmin inflatonikentän tapauksessa. Inflatonikentän energia-liikemäärä -tensorin häiriöt lasketaan ja tarvittavat mittainvariantit perturbaatiot kvantitetaan. Tämän jälkeen perturbaatioiden kehitystä tarkastellaan slow-roll -inflaation aikana. Skalaari- ja tensoriperturbaatioiden tehospektrit lasketaan sekä tutkitaan inflaation indusoimien perturbaatioiden luonnetta. Lopuksi havainnollisuuden vuoksi käsitellään aikaisempia kahta konkreettista esimerkkimallia.

Kuudennessa kappaleessa tarkastellaan, kuinka kosmologisista havainnoista voidaan saada tietoa mahdollisen inflaatioprosessin olemassaolosta ja sen yksityiskohdista. Lisäksi pohditaan inflaation asemaa tieteellisenä teoriana. Kosmisen taustasäteilyn ja galaksikartoitusten roolia inflaatiomallien testaamisessa käsitellään yleisellä tasolla. Planck-satelliitin viimeisin havaintodata käydään läpi ja sitä verrataan yksin-

kertaisimpien inflaatiomallien antamiin ennusteisiin. Lopuksi käsitellään inflaatiossa esiintyviä avoimia kysymyksiä ja ongelmia sekä tuodaan esille vaihtoehtoisia teorioita.

Johtopäätöksissä tiivistetään tutkielman keskeiset tulokset ja inflaatioparadigman nykyinen status. Lisäksi mainitaan inflaation kannalta tärkeitä nykyisiä ja tulevia havaintoprojekteja, jotka saattavat tuoda lisää ymmärrystä jo lähitulevaisuudessa.



## 2 $\Lambda$ CDM-MALLI

Tässä kappaleessa käydään läpi viimeisimpiin havaintoihin parhaiten sopivan  $\Lambda$ CDM-mallin perusteet.  $\Lambda$ CDM-mallilla tarkoitetaan kuumaa alkuräjähdyksellistä varustettuna pimeällä aineella ja pimeällä energialla. Kosmisesta taustasäteilystä ja galaksikaritoituksista on saatu vahvistus sille, että maailmankaikkeus on suuressa mittakaavassa eli galaksijoukkojen tasolla ( $\geq 100$  Mpc) homogeeninen ja isotrooppinen [4, 5]. Homogeenisuus tarkoittaa havaitsijan riippumattomuutta paikasta ja isotrooppisuus riippumattomuutta tarkasteltavasta suunnasta taivaalla. Maailmankaikkeuden kokonaisuudessaan oletetaan noudattavan yleistä suhteellisuusteoriaa. Lisäksi varhaista maailmankaikkeutta voidaan mallintaa statistisen fysiikan ja hiukkasfysiikan keinoin niin pitkälle kuin ollaan varmoja näiden fysiikan osa-alueiden pätemisestä kyseessä olevilla energiaskaaloilla.

### 2.1 Metriikka

Avaruusaika oletetaan neliulotteiseksi semi-Riemannilaiseksi monistoksi  $\mathcal{M}$ , jonka metriikka tai viivaelementti voidaan symmetrioiden eli homogenian ja isotropian vuoksi kirjoittaa muodossa [6] ( $c \equiv 1$ )

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right). \quad (1)$$

Kyseistä viivaelementtiä kutsutaan usein Friedmann-Robertson-Walker -metriikaksi tai lyhyemmin FRW-metriikaksi. Koordinaatti  $t$  on ns. kosminen aika ja koordinaatit  $(r, \theta, \phi)$  ovat tavalliset kolmiulotteiset pallokoordinaatit.

Kaarevuusparametri  $k \in \{0, \pm 1\}$ ,  $[k] = m^{-2}$ , vastaa avaruusosan geometriasta ja kertoo kyseessä olevan kolmiulotteisen alimoniston  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ . Tapaus  $k = 0$  tarkoittaa kolmiulotteista euklidista avaruutta  $\mathbb{E}^3$ ,  $k = 1$  kolmiulotteista palloa  $\mathbb{S}^3$  ja  $k = -1$  kolmiulotteista hyperbolista avaruutta  $\mathbb{H}^3$ . Skaalatekijä  $a(t)$  määrää moniston  $\mathcal{N}$  suhteellisen koon eri ajanhetkillä. Aina pätee  $a(t) \geq 0$  ja laajenevan maailmankaikkeuden tapauksessa  $\dot{a}(t) > 0$ .

Havaitsijoita, joiden koordinaatit  $(r, \theta, \phi)$  eivät muutu ajan kuluessa, kutsutaan mukanaaliikkuviksi tai comoving-havaitsijoiksi. Niiden voi ajatella "liikkuvan" vain laajenemisen seurauksena. Usein on hyödyllistä käyttää metriikassa (1) comoving-koordinaattia  $\chi$ , joka saadaan koordinaatistomuunnoksella

$$r = S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi), & \text{kun } k = 1 \\ \chi, & \text{kun } k = 0 \\ \sinh(\chi), & \text{kun } k = -1, \end{cases}$$

jolloin [6]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)). \quad (2)$$

Havaitsijoiden välistä koordinaattietäisyyttä monistolla  $\mathcal{N}$  sanotaan comoving-etäisyydeksi  $\Delta\chi$  ja symmetrioiden perusteella se on yksinkertaisesti

$$\Delta\chi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi = \chi_2 - \chi_1. \quad (3)$$

Comoving-etäisyys on siis määritelmän mukaan ajan suhteen vakio, jos kappaleet eivät liiku suhteessa taustakoordinaatistoon. Havaintojen kannalta taustakoordinaatistoksi määritellään se koordinaatisto, jossa havaitsija näkee mikroaaltotaustan isotrooppisena [4]. Fysikaalinen etäisyys ottaa avaruusosan  $\mathcal{N}$  laajenemisen huomioon ja se saadaan skaalaamalla  $d(t) = a(t)\Delta\chi$  [4]. Yleensä skaalatekijän nykyiseksi arvoksi valitaan  $a(t_0) = 1$ , jolloin nykyisen universumin koko toimii vertailukohtana.

Toinen hyödyllinen käsite on konformaalinen aika  $\tau$ , joka määritellään relaatiolla  $\tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$  [4]. Tällöin siis  $t = t(\tau)$  ja alkuperäinen metriikka on [7]

$$ds^2 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)). \quad (4)$$

Laakeassa tapauksessa  $k = 0$  metriikka (4) on konformaalinen Minkowskin avaruuden metriikan  $ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$  kanssa. Konformaalisia metriikoita erottaa siis positiivinen kerroinfunktio  $a^2(\tau)$ . Konformiaika on siitä hyödyllinen, että valokartiot ovat yksinkertaisia. Valo kulkee pitkin nollageodeesia  $ds^2 = 0$  [6], joten valitsemalla symmetrioiden vuoksi radiaalinen suunta saadaan

$$0 = a^2(\tau)(-d\tau^2 + d\chi^2) \Leftrightarrow \chi(\tau) = \pm\tau + \text{vakio}.$$

Valo kulkee siis konformaalisissa koordinaateissa pitkin suoria, jotka muodostavat  $\pm 45$  asteen kulman  $\chi\tau$ -tasossa.

Nollageodeesista saadaan myös havaitsijoiden horisontit eli alueet, joiden kanssa voi olla kausaalisessa yhteydessä. Hiukkashorisontti tai tavallisemmin pelkkä horisontti on se alue, josta havaitsija on voinut saada informaatiota maailmankaikkeuden synnyn jälkeen. Comoving-horisontti on yksinkertaisesti konformiaikojen erotus [7]

$$\chi_{ph}(t) = \tau(t) - \tau_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (5)$$

missä maailmankaikkeuden syntyhetki  $t_i$  määräytyy ehdosta  $a(t_i) = 0$ . Tavallisesti oletetaan  $t_i = 0$  [6]. Tapahtumahorisontti on suurin mahdollinen etäisyys, jonka hetkellä  $t$  lähetetty signaali voi koskaan saavuttaa. Comoving-tapahtumahorisontti on [7]

$$\chi_{eh}(t) = \tau_f - \tau(t) = \int_t^{t_f} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (6)$$

missä  $t_f$  tarkoittaa suurinta mahdollista tulevaa ajanhetkeä, joka voi olla äärellinen tai ääretön.

## 2.2 Friedmannin yhtälöt

Kosmologian ehkä tärkein yhtälö on Einsteinin yhtälö [6]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} , \quad (7)$$

missä  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  on Einsteinin tensori,  $G_N$  Newtonin gravitaatiovakio ja  $T_{\mu\nu}$  energia-liikemäärä -tensori. Riccin tensori  $R_{\mu\nu}$  muodostetaan Christoffelin symboleista  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  relaatiolla  $R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda$  ja Riccin skalaari  $R$  kontraktiolla  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . Christoffelin symbolit puolestaan saadaan suoraan metriikasta  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\alpha g_{\beta\rho} + \partial_\beta g_{\alpha\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta})$ .

Energia-liikemäärä -tensori sisältää universumin kokonaisenergiatiheyden  $\rho$  ja kokonaispaineen  $p$ . Kosmologiassa usein oletetaan komponenttien muodostuvan ideaalifluideista, jolloin  $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$  [6], missä  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  on fluidin nelinopeus. Tilannetta yksinkertaistetaan valitsemalla fluidin mukana liikkuvat koordinaatit  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Indeksia nostamalla voidaan energia-liikemäärä -tensori saada diagonaaliseen muotoon  $T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$ .

Syöttämällä Einsteinin yhtälöön (7) metriikka (1) ja ideaalifluidin energia-liikemäärä -tensori  $T_{\mu\nu}$  saadaan evoluutioyhtälöt skaalatekijälle  $a(t)$  [6]

$$H^2(t) = \frac{8\pi G_N}{3}\rho(t) - \frac{k}{a^2} \quad (8)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho(t) + 3p(t)) , \quad (9)$$

missä on määritelty Hubblen parametri  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ . Yhtälöt (8) ja (9) tunnetaan paremmin Friedmannin yhtälöinä ja ne kertovat maailmankaikkeuden globaalin mittakaavan kehityksen.

Kolmas tärkeä yhtälö saadaan energia-liikemäärä -tensorin kovariantista divergenssistä  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0$ , joka on yleisen suhteellisuusteorian vastine energian säilymiselle. Laskemalla indeksia nollas komponentti  $\nabla_\mu T^\mu_0 = 0$  antaa [6]

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t)(\rho(t) + p(t)) = 0 , \quad (10)$$

minkä voi myös esittää muodossa

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3) .$$

Tämä vastaa termodynamiikan ensimmäistä lakia  $dU = -pdV$  laajenevassa maailmankaikkeudessa.

Jatkuvuusyhtälö antaa eri fluidien energiatiheyksien skaalautumislait. Tähän tarvitaan tilanyhtälöparametria, joka määritellään relaatiolla  $w_i = p_i/\rho_i$ . Tavallisimmat tilanyhtälöparametrit ovat  $w_m = 0$  ei-relativistiselle materiaalille,  $w_r = 1/3$  säteilylle,  $w_k = -1/3$  kaarevuudelle ja  $w_\Lambda = -1$  kosmologiselle vakiolle [4]. Skaalautumislaki saadaan sijoittamalla  $p = w_i\rho$  yhtälöön (10) [7]

$$\rho_i \propto a^{-3(1+w_i)} . \quad (11)$$

Kaarevuuden ja siten universumin geometrian kannalta oleellisessa roolissa ovat tiheysparametrit  $\Omega_i(t)$ . Ne kertovat substanssin  $i$  osuuden ns. kriittisestä tiheydestä

$\rho_c(t) = 3H(t)^2/8\pi G_N$  yhtälön  $\Omega_i(t) = \rho_i(t)/\rho_c(t)$  kautta. Nyt Friedmannin ensimmäinen yhtälö (8) on [6]

$$\Omega(t) - 1 = \frac{k}{(a(t)H(t))^2} . \quad (12)$$

Siten kokonaistiheysparametri  $\Omega(t) = \rho_{tot}(t)/\rho_c(t)$  määrää aika-avaruuden spatiaalisen osan kaarevuuden  $k$ .

Määrittelemällä tiheysparametri kaarevuudelle  $\Omega_k(t) \equiv 1 - \Omega(t) = 1 - \Omega_m(t) - \Omega_r(t) - \Omega_\Lambda(t)$  ja käyttämällä nykyisiä arvoja  $\Omega_{i,0} = \Omega_i(t_0)$  sekä  $H_0 = H(t_0)$  voidaan yhtälö (8) skaalautumislakia (11) apuna käyttäen kirjoittaa muodossa [7]

$$H^2(t) = H_0^2 \sum_i \Omega_{i,0} \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^{3(1+w_i)} , \quad (13)$$

kun maailmankaikkeuden energiatiheyden oletetaan koostuvan materiaasta, säteilystä ja kosmologisesta vakioista eli  $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$ . Kaarevuuden  $\Omega_{k,0}$  osuutta yhtälössä (13) tulisi ajatella lähinnä efektiivisenä energiatiheytenä eikä todellisena fysikaalisena suureena. Planck-satelliitin mittausten perusteella  $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0.69$ ,  $\Omega_{m,0} \approx 0.31$ ,  $\Omega_{r,0} \approx 10^{-4}$ ,  $\Omega_{k,0} \approx 0$  ja  $H_0 \approx 68 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$  [2]. Baryonisen aineen osuus materiaasta on  $\Omega_{b,0} \approx 0.05$  ja pimeän aineen osuus  $\Omega_{cdm,0} \approx 0.26$ .

Kun oletetaan, että yksi fluidi dominoi energiatiheyttä, voidaan skaalatekijän aikariippuvuus ratkaista yhtälöstä (13) [7]

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+w_i)}} , & w_i \neq -1 \\ e^{Ht} , & w_i = -1 , H = \text{vakio} . \end{cases} \quad (14)$$

Edellisen perusteella voidaan arvioida, kuinka fysikaalinen horisontti kasvaa eri dominanssien aikana. Saadaan

$$d_{ph}(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \propto \begin{cases} t^p \int_0^t \frac{dt'}{t'^p} \propto t \propto \frac{1}{H(t)} , & w_i \neq -1 \\ e^{Ht} \int_0^t \frac{dt'}{e^{Ht'}} \propto e^{Ht} , & w_i = -1 . \end{cases} \quad (15)$$

Lukuun ottamatta  $\Lambda$ -dominanssia  $w_i = -1$  Hubblen säde  $1/H(t)$  kertoo fysikaalisen horisontin aikakehityksen. Tämän vuoksi termejä horisontti ja Hubblen säde käytetään monesti toistensa synonyymeinä. Verrannollisuuden  $1/H(t) \propto t$  vuoksi Hubblen säde määrittää myös universumin aikaskaalat.

### 2.3 Punasiirtymä

Kosmologian yksi keskeisimmistä käsitteistä on punasiirtymä  $z$ , sillä maapallolta käsin voidaan ainoastaan tutkia saapuvaa sähkömagneettista säteilyä sekä sen ominaisuuksia. Punasiirtymä määritellään yhtälöllä  $z \equiv (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e$ , missä  $\lambda_e$  on säteilyn aallonpituus emission hetkellä ja  $\lambda_0$  on havaittu aallonpituus. Metriikan (1) avulla saadaan punasiirtymän lausekkeeksi [6]

$$1 + z = \frac{a_0}{a_e} . \quad (16)$$

Muistetaan, että suhteellisuusteoriassa ja siten kosmologiassa valon äärellisen nopeuden vuoksi havaintoja tehdään aina menneestä maailmankaikkeudesta. Jos universumi laajenee,  $a < a_0 \Rightarrow z > 0 \Rightarrow \lambda_0 > \lambda_e$  ja siten sähkömagneettisen säteilyn spektrissä havaitaan punasiirtymä. Jos universumi luhistuisi kasaan,  $a > a_0 \Rightarrow \lambda_0 < \lambda_e$ ,

jolloin spektrissä näkyisi sinisiirtymä. Muun muassa kaukaisten galaksien valon punasiirtymistä on päätelty, että maailmankaikkeuden täytyy laajentua [4].

Yhtälön (16) avulla voidaan lausekkeissa esiintyvä skaalatekijä  $a(t)$  korvata konkreettisesti mitattavissa olevalla punasiirtymällä  $z$ . Esimerkiksi fysikaalisen horisontin lausekkeeksi tulee [4]

$$d_{ph}(z) = \frac{1}{H_0} \frac{1}{1+z} \int_0^{\frac{1}{1+z}} \frac{dx}{\sqrt{\sum_i \Omega_{i,0} x^{1-3w_i}}} .$$

Monet kosmologiassa esiintyvät fysikaaliset suureet, kuten etäisyydet, riippuvatkin tarkasteltavan mallin parametreista  $H_0$  ja  $\Omega_{i,0}$ . Tämä antaa mahdollisuuden määrittää havaintoihin parhaiten sopivat parametrien arvot esimerkiksi käyttämällä hyväksi standardikynttilöitä tai standardimittatikkuja, joiden luminositeetti tai koko tunnetaan teorian pohjalta [6].

## 2.4 Varhainen maailmankaikkeus

Koska säteilyn energiatiheys skaalautuu nopeiten  $\rho_r \propto a^{-4}$ , on sen osuus kokonaisenergiatiheydestä ollut suurimmillaan universumin alkuhetkillä, kun skaalatekijä  $a(t)$  on ollut nykyistä merkittävästi pienempi. Universumin sanotaan olleen radiaatiodominanssissa ja sen kehitystä hallitsivat relativistiset hiukkaset. Tiheydet ovat olleet suuria ja hiukkasten väliset nopeat vuorovaikutukset ovat pitäneet maailmankaikkeuden termisessä tasapainossa [4].

Koska kokonaisenergiatiheyttä dominoivat termisessä tasapainossa olevat relativistiset hiukkaset, voidaan se kirjoittaa muodossa [4]

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4 ,$$

missä

$$g_*(T) = \sum_{X=\text{bosoni}} g_X + \frac{7}{8} \sum_{X=\text{fermioni}} g_X .$$

$g_*(T)$  kertoo efektiivisten vapausasteiden lukumäärän lämpötilassa  $T$ .  $g_X$  on relativistisen hiukkaslajin  $X$  sisäisten vapausasteiden lukumäärä.

Radiaatiodominanssissa skaalatekijä on yhtälön (14) mukaisesti  $a(t) \propto t^{1/2}$  ja siten Hubblen parametri on  $H = 1/2t$ . Friedmannin yhtälö (8) antaa relaation ajalle ja lämpötilalle ( $k \approx 0$ ) [4]

$$\frac{t}{1 \text{ s}} \approx \frac{2.42}{\sqrt{g_*(T)}} \left( \frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 . \quad (17)$$

Monesti puhutaankin ajan sijaan lämpötilasta, kun käsitellään varhaisen maailmankaikkeuden fysiikkaa.

Termodynamiikassa entropia  $S$  määritellään differentiaalina  $dS = dQ/T$  [4]. Adiabaattisessa laajenemisessa  $dQ = 0$  entropian säilymlaki antaa [4]

$$sV = \text{vakio} \Leftrightarrow a \propto \frac{1}{g_*^{1/3}(T)T} , \quad (18)$$

missä on määritelty entropiatiheys

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_*(T) T^3.$$

Jos siis efektiivisten vapausasteiden lukumäärä  $g_*(T)$  pysyy vakiona, skaalatekijä ja lämpötila ovat kääntäen verrannollisia toisiinsa. Maailmankaikkeus muuttuu kylmemmäksi sen koon kasvaessa, mikä vaikuttaa myös intuitiivisesti uskottavalta.

Nykyisen universumin entropiatiheys saadaan mikroaaltotaustan lämpötilasta, joka on  $T_0 \approx 2.725$  K [4]. Tällä hetkellä ainoat relativistiset hiukkaset ovat fotonit ja neutriinot. Koska  $T_\nu = (4/11)^{1/3} T_\gamma$  [4], niin  $g_* \approx 3.9$ . Tällöin  $s \approx 2800$  cm<sup>-3</sup> ja  $n_\gamma \approx 400$  cm<sup>-3</sup>. Koska horisontin koko on tavallisesti verrannollinen Hubblen säteeseen, voidaan approksimoida nykyisen havaittavan maailmankaikkeuden kokonaisentropiaa [8]

$$S = sV \propto s \frac{4\pi}{3} \left( \frac{1}{H_0} \right)^3 \approx 10^{88}. \quad (19)$$

Nykyinen kokonaisentropia on valtava ja suurin osa siitä piilee fotonitaustassa [8].

## 2.5 Ongelmia alkuräjähdyksessä

Yhtälö (12) antaa kokonaistiheysparametrin  $\Omega$  käyttäytymisen. Jos maailmankaikkeus on laakea  $k = 0$ , niin  $\Omega \equiv 1$ . Fysiikassa parametrien arvot tunnetaan kuitenkin aina tietyllä tarkkuudella, joten on syytä tutkia, mitä tapahtuu tapauksessa  $\Omega \neq 1$ . Tällöin pätee

$$|\Omega(t) - 1| = \frac{1}{a^2(t)H^2(t)} = \frac{1}{\dot{a}^2(t)} = \frac{1}{\mathcal{H}^2}.$$

Poikkeavuutta karakterisoi comoving-Hubblen säde  $1/\mathcal{H} = 1/a(t)H(t)$ , missä  $\mathcal{H} = a'/a = \dot{a}$  ja  $f' = df/d\tau$ . Radiaatiodominanssissa  $1/\mathcal{H}^2 \propto a^2$  ja materiadominanssissa  $1/\mathcal{H}^2 \propto a$ . Nähdään, että poikkeavuus  $|\Omega(t) - 1|$  kasvaa ajan myötä, jos unohdetaan hiljattainen  $\Lambda$ -dominanssi. Koska nykyään  $|\Omega_0 - 1| = \mathcal{O}(1)$  [2], varhaisessa maailmankaikkeudessa eroavaisuus on ollut hyvin pieni.

Tarkastelu voidaan tehdä myös kvantitatiivisesti. Nykyisen ja nukleosynteesin aikaisen tiheysparametrin suhde on

$$\frac{|\Omega_n - 1|}{|\Omega_0 - 1|} = \frac{(a_0 H_0)^2}{(a_n H_n)^2} \Leftrightarrow |\Omega_n - 1| = \left( \frac{a_0 H_0}{a_n H_n} \right)^2 |\Omega_0 - 1|.$$

Friedmannin yhtälö (8) radiaatiodominanssissa antaa

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2,$$

joten [8]

$$|\Omega_n - 1| = \left( \frac{a_n}{a_0} \right)^2 \frac{|\Omega_0 - 1|}{\Omega_{r,0}} \propto \left( \frac{T_0}{T_n} \right)^2 \frac{|\Omega_0 - 1|}{\Omega_{r,0}} \approx \mathcal{O}(10^{-16}), \quad (20)$$

missä on approksimoitu skaalatekijän käytöstä yhtälöllä (18). Nykyisen tiheysparametrin arvo pakottaa FRW-kosmologiassa avaruuden hyvin laakeaksi nukleosynteesin aikaan. Mikä voisi selittää äärimmäisen hienosäädön  $\mathcal{O}(10^{-16})$  varhaisessa maailmankaikkeudessa? Tämä tunnetaan standardikosmologian laakeusongelmana.

Jos ekstrapoloidaan vielä kauemmas menneisyyteen ja oletetaan yleisen suhteellisuusteorian pätevän Planckin energiaskaalassa, ongelma muuttuu vielä räikeämmäksi, sillä [8] ( $T_{pl} \approx 1.2 \cdot 10^{19}$  GeV)

$$|\Omega_{pl} - 1| \propto \left(\frac{T_0}{T_{pl}}\right)^2 \frac{|\Omega_0 - 1|}{\Omega_{r,0}} \approx \mathcal{O}(10^{-60}).$$

Laakeusongelmaa voi tarkastella myös kokonaisentropian kannalta. Määritellään Planckin massa  $m_{pl} = 1/\sqrt{G_N}$ . Friedmannin yhtälö antaa

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho_r \propto \frac{T^4}{m_{pl}^2}.$$

Havaittavan maailmankaikkeuden kokonaisentropia on

$$S = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{H^3} s \propto \frac{T^3}{H^3}$$

ja radiaatiodominanssissa  $H \propto 1/a^2$ . Tiheysparametrin arvo Planckin energialla on siten [8]

$$|\Omega_{pl} - 1| = \frac{1}{a_{pl}^2 H_{pl}^2} \propto \frac{m_{pl}^2}{a_{pl}^4 T_{pl}^2 \cdot T_{pl}^2} = \frac{1}{\frac{T_{pl}^2}{H_{pl}^2}} = \frac{1}{S^{2/3}} \approx 10^{-59},$$

missä on oletettu laajenemisen olevan adiabaattista ja käytetty arviota (19) nykyiselle maailmankaikkeudelle. Varhaisen universumin laakeus johtuu siis sen valtavasta entropiasisällöstä. Laakeuden sijaan voikin kysyä, mistä valtava määrä entropiaa on syntynyt ja onko laajeneminen ollut aina adiabaattista?

Horisonttiongelma liittyy mikroaaltotaustan havaittuun tasaisuuteen ympäri taivasta. Kosminen taustasäteily on lähes täysin isotrooppinen tarkkuudella  $10^{-5}$  [9]. Ongelman muodostaa se, ettei kuumassa alkuräjähdyksessä mikään kausaalinen prosessi ole voinut saada tätä aikaan. Tämän näkee vertaamalla nykyisen havaittavan maailmankaikkeuden comoving-kokoa  $\chi_{ph}(t_0)$  horisontin comoving-kokoon  $\chi_{ph}(t_{cmb})$  taustasäteilyn syntymisen aikaan  $z_{cmb} \approx 1100$  [2]. Nykyisen universumin comoving-koko on  $\chi_{ph}(t_0) = d_{ph}(t_0) \propto 1/H_0 \propto t_0$  ja  $\chi_{ph}(t_{cmb}) = d_{ph}(t_{cmb})/a(t_{cmb}) \propto (1 + z_{cmb})t_{cmb}$ . Suhteeksi saadaan ( $t_0 \approx 14$  Gyr ja  $t_{cmb} \approx 400\,000$  yr [2])

$$\frac{\chi_{ph}(t_0)}{\chi_{ph}(t_{cmb})} \propto \frac{1}{1 + z_{cmb}} \frac{t_0}{t_{cmb}} \approx 32. \quad (21)$$

Universumi siis sisälsi  $32^3 \approx 30\,000$  toisistaan kausaalisesti irtikytkettyä aluetta. Horisontin koko taustasäteilyn syntymisen aikaan vastaa n. 1.16 asteen kulmaa taivaalla. Tällöin niiden alueiden välillä, joiden kulmaetäisyys on  $\theta > 2.3^\circ$ , ei odotettaisi minikäänlaisia korrelaatioita [10]. Taustasäteilyn tasaisuus on siten huomattava tilastollinen ongelma kuumalle alkuräjähdykselle.

Kolmas ongelma liittyy varhaisen maailmankaikkeuden fysiikkaan on ns. topologisten defektien ongelma. Monet suuret yhtenäisteoriat ennustavat faasitransitioissa syntyvän reliikkejä eli jäänteitä, joilla olisi havaittavia vaikutuksia nykyiseen universumiin [11]. Erityisen ongelman muodostavat magneettiset monopolit. Alun perin yksi

suurimmista motivaatiosta inflaatiolle olikin päästä eroon monopoleista, sillä niiden ennustettu tiheys oli liian suuri, mitä havainnot osoittivat [3].

Neljäs ja merkittävin ongelma liittyy varhaisten tiheysperturbaatioiden syntyyn. Kosminen taustasäteily ei ole täysin tasainen, vaan siinä esiintyy pieniä lämpötilafluktuaatioita. Tavallinen alkuräjähdyksmalli ei pysty näiden alkuperää selittämään. Taustasäteilyn fluktuaatiot ovat erittäin tärkeitä, sillä ne kertovat paikallisista gravitaatiotaskuista, jotka alkoivat kerätä ainetta ympäristöstään. Nämä hyvin pienet fluktuaatiot ovat ajan myötä kasvaneet maailmankaikkeuden suurimmiksi havaittaviksi rakenteiksi.



### 3 INFLAATION PERUSTEET

Edellisessä kappaleessa nähtiin, että laakeusongelma johtui comoving-Hubblen säteen  $1/\mathcal{H} = 1/aH$  kasvamisesta ajan kuluessa. Jos kokonaistiheysparametri  $\Omega$  ei ole alussa täsmälleen yksi, alkaa se poiketa siitä sekä radiaatio- että materiadominanssissa. Näissä dominansseissa comoving-horisontti kasvaa, sillä  $\chi_{ph}(t) = d_{ph}(t)/a(t) \propto 1/a(t)H(t) = 1/\mathcal{H}$ . Siispä ne comoving-skaalat, jotka tulevat vasta nyt horisontin sisälle, ovat olleet poissa kausaalista yhteydestä varhaisessa maailmankaikkeudessa. Kuitenkin mikroaaltotaustan havaitaan olevan hyvin tasainen ympäri taivasta.

Ongelmat ratkeaisivat, jos maailmankaikkeuden historiassa esiintyisi ajanjakso, jolloin  $1/\mathcal{H}$  vähenisi. Tällöin kokonaistiheysparametri ajautuisi lähelle arvoa 1, mikä selittäisi hienosäätöongelman dynaamisesti. Comoving-horisontti kutistuisi, mikä tarkoittaisi sitä, että se olisi ajanjakson alussa voinut olla suurempi kuin nykyinen havaittava maailmankaikkeus. Kausaalinen fysiikka voisi tällöin selittää kosmisen taustasäteilyn tasaisuuden.

#### 3.1 Ekvivalentit määritelmät

Edellisen motivoimina määritellään inflaatio ajanjaksoksi, jolloin comoving-Hubblen säde kutistuu [3,7,10,11]

$$\text{Inflaatio} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{\mathcal{H}} < 0. \quad (22)$$

Inflaation täytyy tapahtua ennen aikaa  $t \approx 1$  s, jotta se ei häiritsisi jo hyvin tunnettua nukleosynteesiä ja sen antamia ennusteita [8]. Pitää muistaa, että inflaatio ei korvaa tavallista alkuräjähdyksellistä, vaan inflaatio lisätään siihen kuvaamaan hyvin varhaisen maailmankaikkeuden kehitystä.

Monesti inflaatiota käytetään synonyyminä kiihtyvälle laajenemiselle. Näin on tässäkin tapauksessa, sillä

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\mathcal{H}} = -\frac{\ddot{a}}{(aH)^2} < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0.$$

Kolmas ekvivalentti määritelmä saadaan Friedmannin yhtälöstä (9)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p) > 0 \Leftrightarrow w < -\frac{1}{3},$$

kun  $p = w\rho$ . Nähdään, että tavallinen energiatiheys, kuten materia ja säteily, ei pysty ylläpitämään inflaatiota. Vaaditaan jotain eksoottisempaa fluidia, jolla on negatiivinen paine  $p < 0$ , sillä energiatiheys oletetaan aina positiiviseksi  $\rho > 0$  [7].

Inflaatio voidaan määritellä myös parametrin  $\epsilon = -\dot{H}/H^2$  avulla seuraavasti [7]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = H^2 \left( 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = H^2(1 - \epsilon) > 0 \Leftrightarrow \epsilon < 1.$$

Yleensä oletetaan, että energiatihedät eivät kasva ajan kuluessa  $\dot{H} \leq 0$  [11], joten  $\epsilon \geq 0$ . Jos  $\epsilon \ll 1$ , niin avaruus käyttäytyy lähes de Sitter -universumin  $w = -1$  tavoin

eli  $a(t) \propto e^{Ht}$ , missä  $H \approx$  vakio. Tämän vuoksi usein sanotaan, että inflaation aikana avaruus laajenee lähes eksponentiaalisesti. Parametri  $\epsilon$  voidaan lausua myös ns.  $e$ -foldin  $N$  avulla muodossa  $\epsilon = -d \ln H / dN$ , missä  $dN = d \ln a = H dt$  [7].  $N$  mittaa karkeasti ottaen sitä, kuinka monta kertaa avaruus on laajentunut  $e$ -kertaiseksi.

Lopulta inflaatiolle saadaan siis neljä ekvivalenttia määritelmää

$$\text{Inflaatio} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{1}{\mathcal{H}} < 0 \Leftrightarrow \ddot{a} > 0 \Leftrightarrow w < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \epsilon < 1. \quad (23)$$

### 3.2 Ratkaisu ongelmiin

Kuinka inflaatio ratkaisee laakeus-, horisontti- ja monopoli-ongelman? Vastaus piilee  $e$ -foldeissa  $N$ . Jos avaruuden koko on  $e$ -kertaistunut riittävän monta kertaa varhaisessa maailmankaikkeudessa, kaikki kolme ongelmaa poistuvat.

Oletetaan, että inflaation päätyttyä universumi siirtyy välittömästi radiaatiodominanssiin. Planck-satelliitin mittauksista saatu yläraja  $r < 0.11$  tensorimoodien voimakkuudelle kertoo, että energiaskaala on siirtymän aikaan ollut korkeintaan  $\approx 10^{16}$  GeV [12]. Kun tehdään sama päättely kuin edellisen kappaleen lopussa, saadaan  $|\Omega - 1|_{t_f} \approx \mathcal{O}(10^{-54})$ . Sallitaan universumin geometrian olevan alussa mikä tahansa kolmesta vaihtoehdosta  $k \in \{0, \pm 1\}$ , jolloin  $|\Omega - 1|_{t_i} \approx \mathcal{O}(1)$ . Koska Hubblen parametri voidaan approksimoida vakioksi inflaation aikana, käyttämällä  $e$ -foldin määritelmää pätee [8]

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} \approx \frac{a_{t_i}^2}{a_{t_f}^2} \Leftrightarrow |\Omega - 1|_{t_f} \approx e^{-2\Delta N} \approx \mathcal{O}(10^{-54}) \Leftrightarrow \Delta N \approx 62. \quad (24)$$

Jos siis varhaisen maailmankaikkeuden koko on  $e$ -kertaistunut vähintään 62 kertaa, on alun mielivaltainen geometria tasoittunut käytännössä laakeaksi laajenemisen vuoksi. Inflaatio ei kuitenkaan muuta taustalla olevaa globaalia geometriaa, vaan ainoastaan havaittava maailmankaikkeus vaikuttaa laakealta.

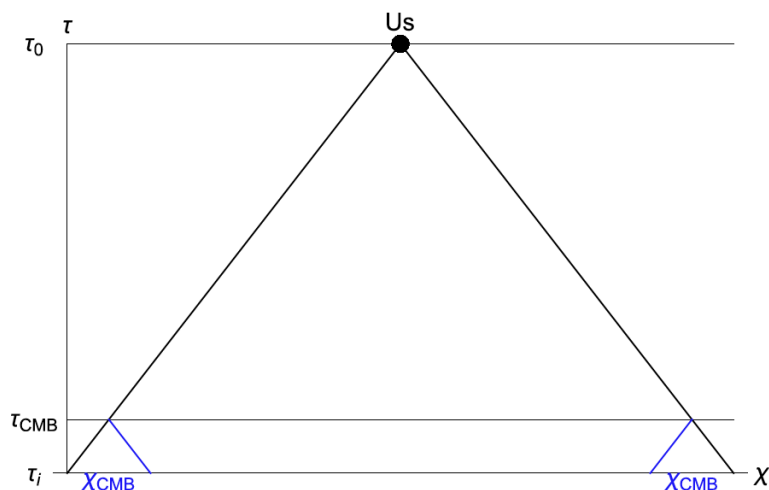
Horisonttiongelman voi hahmottaa konformiajan  $\tau$  avulla. Comoving-horisontti on yksinkertaisesti konformiaikojen erotus  $\chi_{ph} = \tau - \tau_i$ . Materian tai säteilyn dominanssissa pätee yhtälön (14) nojalla [10]

$$\begin{aligned} \tau - \tau_i &= \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} \propto \int_{a_i}^a da' a'^{\frac{1}{2}(-1+3w)} = \frac{a^{\frac{1}{2}(1+3w)} - a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)}}{\frac{1}{2}(1+3w)} \\ &\Rightarrow \tau_i = \frac{a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)}}{\frac{1}{2}(1+3w)} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0, w > -1/3} 0. \end{aligned}$$

Alkuräjähdyssingulariteetti tapahtuu äärellisellä konformiajan arvolla  $\tau_i = 0$  ja comoving-horisontti  $\chi_{ph}$  saa suurimman kontribuutionsa myöhäisemmiltä ajoilta  $\tau$ . Horisonttiongelman voi hahmottaa kuvan 1 avulla. Koska  $\tau_0 \gg \tau_{cmb}$ , vastakkaisilla puolilla taivasta olevat alueet taustasäteilyssä eivät ole voineet olla yhteydessä toisiinsa, sillä niiden valokartiot eivät leikkaa äärellisessä menneisyydessä.

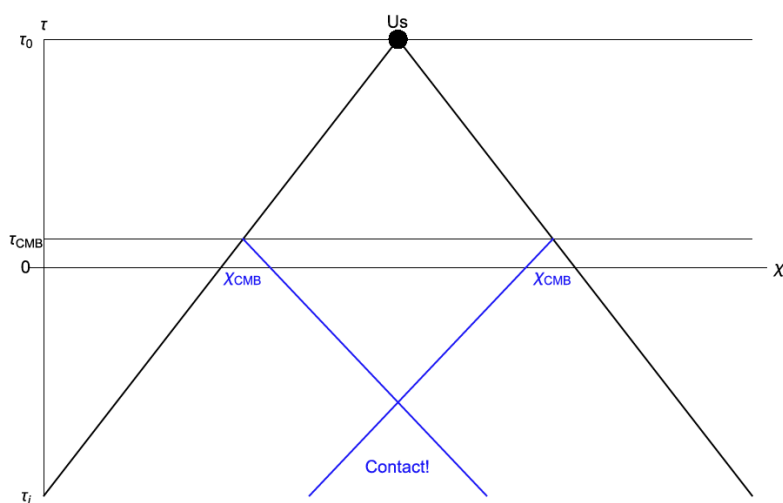
Inflaation aikana määritelmästä (23) seuraa  $w < -1/3$ , joten [10]

$$\tau_i = \frac{a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)}}{\frac{1}{2}(1+3w)} \xrightarrow{a_i \rightarrow 0, w < -1/3} -\infty.$$



Kuvio 1: Horisonttiongelman tarkastelu konformisessa ajassa. Eri puolilla taivasta sijaitsevat alueet eivät ole voineet vuorovaikuttaa keskenään, sillä niiden valokartiot eivät leikkaa menneisyydessä. Kuva lähteestä [13].

Inflaatio työntää alkuräjähdyksen kauas negatiiviseen konformaaliseen menneisyyteen ja comoving-horisontin kokoa dominoi alaraja  $\tau_i$ . Tällöin  $\chi_{ph}(t_{cmb}) \rightarrow \infty$  ja kuvasta 2 näkee, että nyt valokartiot leikkaavat toisiaan ja kausaalinen kontakti saadaan.



Kuvio 2: Inflaation tarjoama ratkaisu horisonttiongelman. Alkuräjähdys siirtyy kauas negatiiviseen konformaaliseen menneisyyteen, jolloin eri alueet ovat voineet olla aiemmin kausaalisessa yhteydessä. Kuva lähteestä [13].

Tarkastelun voi tehdä myös kvantitatiivisesti  $e$ -foldien avulla. Vaaditaan, että nykyisen havaittavan maailmankaikkeuden comoving-koko  $\chi_{ph}(t_0) = d_{ph}(t_0) \propto 1/H_0$  on inflaation alussa hetkellä  $t_i$  ollut pienempi kuin tuolloinen comoving-Hubble'n säde  $1/H_0 < 1/a_{t_i} H_{t_i}$  (ks. kuva 4). Kausaaliset prosessit ennen inflaatiota pystyisivät täten tasoittamaan mahdolliset epähomogeeniat ja selittäisivät taustasäteilyn tasaisuuden [7]. Olkoon  $t_e$  inflaation loppuhetki ja radiaatiodominanssin oletetaan alkavan

tästä välittömästi. Radiaatiodominanssissa pätee  $H \propto H_0 a^{-2}$ , joten

$$\frac{H_0}{a_{t_e} H_{t_e}} \propto \frac{H_0}{H_0 a_{t_e}^{-1}} = \frac{a_{t_e}}{a_0} \propto \frac{T_0}{T_e} \approx 10^{-29} ,$$

kun oletetaan, että radiaatiodominanssi alkaa energiaskaalassa  $T_e \approx 10^{16}$  GeV. Siispä

$$\frac{1}{a_{t_i} H_{t_i}} > \frac{1}{H_0} \approx 10^{29} \frac{1}{a_{t_e} H_{t_e}} ,$$

joten comoving-Hubblen säteen tulee kutistua inflaation aikana kertoimella  $10^{29}$ , jotta horisonttiongelmalta vältytään. Approksimoidaan Hubblen parametri vakioksi  $H_{t_i} \approx H_{t_e}$ , jolloin

$$\frac{a_{t_e}}{a_{t_i}} > 10^{29} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a_{t_e}}{a_{t_i}}\right) = \Delta N > 67 . \quad (25)$$

Suuruusluokka-arvio on sopusoinnussa laakeusongelmasta saadun arvion (24) kanssa.

Sama mekanismi tarjoaa ratkaisun myös monopoli-ongelmaan. Lukumäärätiheys skaalautuu  $n \propto V^{-1} \propto a^{-3}$ , joten

$$\frac{n_{t_e}}{n_{t_i}} \propto \left(\frac{a_{t_i}}{a_{t_e}}\right)^3 = e^{-3\Delta N} \approx 10^{-79} , \quad (26)$$

kun  $\Delta N \approx 60$ . Mikä tahansa lukumäärätiheys dilutoituu siten mitättömäksi inflaation aikana.

Jos inflaation aikana esiintyy materiaa tai säteilyä, niiden kontribuutio kokonaisenergiatiheyteen muuttuu mitättömäksi ajan kuluessa eksponentiaalisen laajenemisen takia. Vastaavasti universumin mahdollinen kaarevuus tasoittuu kokonaistiheysparametrin ajautuessa yhä lähemmäs arvoa 1. Kun inflaatio on päässyt käyntiin, avaruus on käytännössä laakea ja tyhjä lukuun ottamatta inflaatiosta vastuussa olevaa subtanssia.

### 3.3 Inflatonkenttä ja aktio

Tästä eteenpäin oletetaan inflaatiota jo tapahtuneen tarpeeksi kauan, jotta eksponentiaalinen kasvu on tehnyt mielivaltaisesta alkumaaailmankaikkeudesta lokaalisti homogeenisen ja isotrooppisen avaruuden, jonka geometria on laakea. Metriikan oletetaan siis olevan muotoa  $ds^2 = \text{diag}(-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t))$  karteesisissa koordinaateissa  $(t, x, y, z)$ .

Yksinkertaisin ja ehkä tavanomaisin tapa käsitellä inflaatiota on tarkastella yhtä klassista skalaarikenttää  $\varphi$ . Yleisen suhteellisuusteorian kenttäteoreettisen lähestymistavan mukaan kentän  $\varphi$  vaikutus ympäröivään aika-avaruuteen saadaan aktiosta [11]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G_N} + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\varphi = S_{EH} + S_\varphi , \quad (27)$$

missä

$$\mathcal{L}_\varphi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \quad (28)$$

on skalaarikentän  $\varphi$  Lagrangen tiheys ja  $S_{EH}$  on Einsteinin-Hilbertin aktio. Ensimmäinen termi Lagrangen tiheydessä vastaa kentän kineettistä energiaa ja jälkimmäinen potentiaalienergiaa. Kentän efektiiviseksi massaksi määritellään  $V''(\varphi) \equiv m_\varphi^2$ . Kentän  $\varphi$  sanotaan olevan minimaalisesti kytketty gravitaatioon, sillä aktiossa ei ole termiä, joka suoraan kytkisi kentän  $\varphi$  metriikkaan  $g_{\mu\nu}$  muun kuin integroimismitan  $d^4x\sqrt{-g}$  kautta.

Varioimalla aktiota (27) metriikan suhteen saadaan Einsteinin yhtälö [11]

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \Rightarrow G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} ,$$

missä ainoa kontribuutio energia-liikemäärä -tensoriin tulee kentän  $\varphi$  Lagrangen tiheydestä [11]

$$T_{\mu\nu} = -2\frac{\partial\mathcal{L}_\varphi}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\varphi = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\sigma\varphi\partial_\sigma\varphi + V(\varphi)\right) . \quad (29)$$

Kentän  $\varphi$  liikeyhtälö saadaan tavanomaisesti varioimalla aktiota (27) kentän  $\varphi$  suhteen. Tuloksena on Euler-Lagrange -yhtälö kaarevassa aika-avaruudessa [6]

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\varphi}{\partial\varphi} - \nabla_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\varphi}{\partial(\nabla_\alpha\varphi)}\right) = 0 .$$

Laakean metriikan  $ds^2 = \text{diag}(-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t))$  tapauksessa liikeyhtälö on [11]

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\varphi}{a^2} + V' = 0 , \quad (30)$$

missä  $\nabla^2\varphi = \delta^{ij}\partial_i\partial_j\varphi$ .

Inflatonikentän epähomogeeniat eivät vaikuta kentän evoluutioon, sillä ne dilutoituvat pois yhtälössä (30) eksponentiaalisen laajenemisen vuoksi. Jos gradienttitermi  $\nabla\varphi$  olisi dominoiva, niin pätsisi  $p_\varphi = -\rho_\varphi/3$  [8], mikä ei riittäisi inflaation ylläpitämiseen määritelmän (23) nojalla. On siis perusteltua olettaa näin aluksi, että kenttä  $\varphi$  on täysin homogeeninen  $\varphi = \varphi(t)$ .

Kentän  $\varphi$  homogeniaoletuksen seurauksena energia-liikemäärä -tensori saa saman muodon kuin ideaalifluidin tapauksessa  $T^\mu_\nu = \text{diag}(-\rho_\varphi, p_\varphi, p_\varphi, p_\varphi)$ , missä [11]

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V \quad (31)$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V . \quad (32)$$

Tällöin tilanyhtälöparametri on

$$w_\varphi = \frac{p_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V} . \quad (33)$$

Jos potentiaalienergia dominoi kineettistä energiaa  $V \gg \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ , niin  $w_\varphi \approx -1 < -\frac{1}{3}$  ja inflaatioehto (23) on voimassa.

Friedmannin yhtälöt (8) ja (9) yhdessä liikeyhtälön (30) ja kentän homogeniaoletuksen kanssa antavat inflaation aikaista universumia karakterisoivat lausekkeet [14]

$$H^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) \quad (34)$$

$$\dot{H} = -4\pi G_N \dot{\phi}^2 \quad (35)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0. \quad (36)$$

Nähdään, että avaruuden laajeneminen aiheuttaa efektiivisesti kitkaa  $\phi$ :n evoluutioon termin  $3H\dot{\phi}$  kautta. Yhtälöistä (34)-(36) vain kaksi ovat toisistaan riippumattomia, sillä liikeyhtälön saa yhtälöistä (34) ja (35) derivoimalla. Itse asiassa (36) on täysin ekvivalentti jatkuvuusyhtälön (10) kanssa.

### 3.4 Slow-roll -approksimaatio ja Hamilton-Jacobi -formalismi

Eräs vaatimus inflaation tapahtumiselle on  $\epsilon < 1$ . Kentälle  $\phi$  ehto on  $\epsilon = -\dot{H}/H^2 = 3\dot{\phi}^2/(\dot{\phi}^2 + 2V) < 1 \Leftrightarrow \dot{\phi}^2 < V$ . Riittää siis, että kineettinen energia on pienempää kuin potentiaalienergia. Inflaation täytyy kuitenkin kestää tarpeeksi pitkään, jotta laakeus- ja horisonttiongelmien poistuvat. Kentän  $\phi$  kiihtyvyys  $\ddot{\phi}$  pitää olla riittävän pientä, jotta kineettinen energia ei kasva merkittäväksi suhteessa potentiaalienergiin. Tätä karakterisoi parametri  $\delta = -\ddot{\phi}/H\dot{\phi} = \epsilon - \frac{1}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{dN}$ , joka kuvaa parametrin  $\epsilon$  suhteellista muutosta yhden  $e$ -foldin aikana. Tämän motivoimina tehdään seuraava ns. slow-roll -approksimaatio (SRA) [10]

$$\text{SRA} \Leftrightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{V} \ll 1 \text{ ja } |\delta| = \left| \frac{-\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right| \ll 1. \quad (37)$$

Ensimmäisestä ehdosta seuraa välittömästi  $\epsilon \ll 1$  ja  $w_\phi \approx -1$ . Parametrin  $\epsilon$  pienenus pitää inflaatiota yllä ja ehto  $|\delta| \ll 1$  varmistaa sen, että  $\epsilon$  pysyy pienenä tarpeeksi monen  $e$ -foldin ajan. Ensimmäisessä kertaluvussa parametrit ovat ajan suhteen vakioita, sillä  $\dot{\epsilon} = \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon\delta)$  ja  $\dot{\delta} = \mathcal{O}(\dot{\epsilon}, \dot{\delta})$ . SRA:n ansiosta yhtälöt (34) ja (36) saadaan muotoon [10]

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_{pl}^2} \quad (38)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V', \quad (39)$$

missä on määritelty redusoitu Planckin massa  $M_{pl} = 1/\sqrt{8\pi G_N}$ . SRA yksinkertaistaa alkuperäisiä yhtälöitä huomattavasti, sillä se pudottaa differentiaaliyhtälön (36) kertaluvun yhteen.

Usein on hyödyllistä käyttää tarkasteluissa potentiaalin muodosta kertovia slow-roll -parametreja  $\epsilon_V$  ja  $\eta_V$ . Ne saadaan parametrien  $\epsilon$  ja  $\delta$  slow-roll -approksimaationa [10]

$$\epsilon_V \equiv \epsilon_{\text{SRA}} = -\frac{\dot{H}}{H^2} \stackrel{\text{SRA}}{=} \frac{M_{pl}^2}{2} \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \quad (40)$$

$$\eta_V \equiv \delta_{\text{SRA}} + \epsilon_{\text{SRA}} = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} \stackrel{\text{SRA}}{=} M_{pl}^2 \frac{V''}{V}. \quad (41)$$

SRA:sta seuraa nyt, että  $\epsilon_V \ll 1$  ja  $|\eta_V| \ll 1$ . Nämä ovat välttämättömät, mutta eivät riittävät ehdot approksimaation (37) toteutumiseksi, sillä  $\epsilon_V$  ja  $\eta_V$  rajoittavat vain potentiaalin muotoa alueessa, jossa SRA saattaa olla mahdollista. Tässä ns. slow-roll -sektiossa kentän  $\varphi$  nopeus voi olla hyvinkin suuri, sillä liikeyhtälö (36) on toista kertalukua ja sallii mitä tahansa alkuarvoja  $\dot{\varphi}$ :lle.

Slow-roll -yhtälöillä (38) ja (39) on kuitenkin eräs tärkeä ominaisuus. Niiden ratkaisu osoittautuu alkuperäisten yhtälöiden (34) ja (36) ratkaisujen attraktoriksi eli ratkaisut konvergoivat kohti slow-roll -ratkaisua, kun aikaa on kulunut tarpeeksi [14]. Näin täytyy ollakin, sillä SRA muuttaa toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön, jolla on kaksi riippumatonta ratkaisua, ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi, jolla on vain yksi ratkaisu. Muussa tapauksessa yksi fysikaalisesti relevantti ratkaisu menetettäisiin. Kun attraktori on saavutettu, kentän nopeus  $\dot{\varphi}$  ei enää ole vapaa parametri, vaan sen määrää kenttä itse yhtälön (39) kautta. Attraktoriluonteen vuoksi inflaatio pyyhkiä pois kaiken tiedon universumin alkutilasta, kunhan alkuehdot vain sallivat inflaation käynnistymisen ja inflaatio kestää tarpeeksi kauan.

Attraktoriteoreema todistetaan usein Hamilton-Jacobi -formalismien avulla. Jos kenttä  $\varphi$  on monotoninen ajan funktio, voidaan kenttää itseään käyttää aikamuuttujana  $t = t(\varphi)$ . Tämän ansiosta yhtälöt (34)-(36) redusoituvat muotoon [14]

$$H_{,\varphi}(\varphi) \equiv \frac{dH(\varphi)}{d\varphi} = -4\pi G_N \dot{\varphi} \quad (42)$$

$$H_{,\varphi}^2(\varphi) - \frac{3}{2M_{pl}^2} H^2(\varphi) = -\frac{1}{2M_{pl}^4} V(\varphi) . \quad (43)$$

Formalismien on erittäin hyödyllinen silloin, kun halutaan rakentaa eksakteja inflaatiomalleja. Normaalisti annetaan potentiaali  $V(\varphi)$ , joka määrää inflaation aikaisen dynamiikan. Nyt voidaan päinvastoin lähteä halutusta ratkaisusta ja valita funktio  $H(\varphi)$ . Tällöin ratkaisuun vaadittu potentiaalin lauseke saadaan yhtälöstä (43).

Vastaavasti voidaan määrittellä Hamilton-Jacobi -formalismien slow-roll -parametrit [11]

$$\epsilon_H \equiv 2M_{pl}^2 \left( \frac{H_{,\varphi}}{H} \right)^2 = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \epsilon$$

$$\eta_H \equiv 2M_{pl}^2 \frac{H_{,\varphi\varphi}}{H} = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} = \delta .$$

Nähdään, että SRA (37) on täysin ekvivalentti vaatimusten  $\epsilon_H \ll 1$  ja  $|\eta_H| \ll 1$  kanssa. Monet approksimatiiviset tulokset muuttuvatkin Hamilton-Jacobi -formalismien eksakteiksi. Eri parametrien välillä on slow-roll -approksimaation aikana relaatiot  $\epsilon_H \approx \epsilon_V$ ,  $\eta_H \approx \eta_V - \epsilon_V$ . Jatkossa pitäydytään kuitenkin parametrien  $\epsilon_V$  ja  $\eta_V$  käytössä.

Jäljellä olevien  $e$ -foldien määrä ennen inflaation loppua voidaan nyt lausua kentän  $\varphi$  arvojen avulla. Määritelmästä  $dN = \ln a$  saadaan [3]

$$N(\varphi) = \int_{t(\varphi)}^{t_{end}} \ln a = \int_{\varphi}^{\varphi_{end}} \frac{H}{\dot{\varphi}} d\varphi \stackrel{\text{SRA}}{=} \frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\varphi_{end}}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi . \quad (44)$$

Inflatonkentän arvo inflaation lopussa  $\varphi_{end}$  määräytyy ehdosta  $\epsilon_V \approx 1$  tai  $|\eta_V| \approx 1$ .

SRA selvästikin takaa inflaation tapahtumisen. Se ei kuitenkaan ole välttämätön ehto tai ainoa keino inflaation synnyttämiseksi. On mahdollista ylläpitää inflaatiota ilman, että (37) on voimassa. Tällaisia tapauksia ovat esimerkiksi fast-roll -inflaatio ja locked-inflaatio [11]. Kuitenkin ne tuottavat tyypillisesti vain vähäisen määrän inflaatiota  $e$ -foldeissa mitattuna.

### 3.5 Inflaatiomalleja

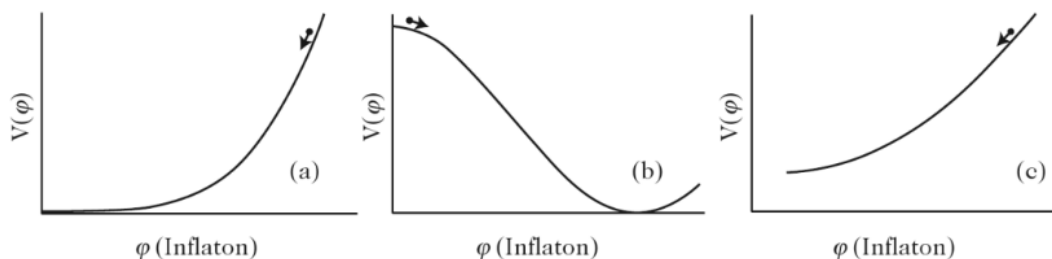
Inflaatiomallit voidaan karkeasti ottaen jakaa kolmeen pääluokkaan. Näitä ovat

- (a) Suuren kentän mallit
- (b) Pienen kentän mallit
- (c) Hybridimallit.

Yleistä yhden kentän potentiaalia  $V(\varphi) = \Lambda^4 f(\frac{\varphi}{\mu})$  karakterisoi kaksi parametria.  $\Lambda^4$  vastaa tyhjiön energiatiheydestä eli potentiaalın korkeudesta ja  $\mu$  kentän arvon muutoksesta  $\Delta\varphi$  inflaation aikana eli potentiaalın leveydestä. Funktion  $f$  muoto riippuu tarkasteltavasta mallista. Eri mallit eroavat toisistaan seuraavanlaisesti: [14]

- (a) Suuren kentän mallit liittyvät usein kaotaiseen inflaatioon, jossa kentän  $\varphi$  arvo liikkuu Planckin massan suuruusluokassa. Kentän arvon muutos inflaation aikana on täten suurta  $\Delta\varphi > M_{pl}$ . Tällaisille malleille yleensä  $V'' > 0$  ja  $-\epsilon_V < \delta \leq \epsilon_V$ . Esimerkkejä potentiaalityypeistä ovat polynomiaalipotentialit  $V(\varphi) = \Lambda^4(\frac{\varphi}{\mu})^p$ . Näille slow-roll -parametrit (40) ja (41) saadaan pieniksi suurilla kentän arvoilla  $\varphi \gg M_{pl}$ . Yksinkertaisin potentiaali on vapaan kentän kvadraattinen potentiaali  $V(\varphi) = m^2\frac{\varphi^2}{2}$  [3, 11, 14] (ks. kuva 3), jota käsitellään esimerkeissä myöhemmin. Tyypillistä kaotaisen inflaation malleille on se, että inflaatio ei koskaan pääty globaalisti, vaan pienet alueet, saippuakuplat, erkaantuvat inflatoituvasta vaahdosta ja kehittyvät itsenäisinä maailmankaikkeuksina. Meidän havaittava maailmankaikkeus olisi täten pieni osa valtavaa multiversumia.
- (b) Pienen kentän inflaatiomallit voivat liittyä esimerkiksi spontaaniin symmetriarikkoon [7, 8, 14]. Kenttä on alussa epävakaassa tasapainotilassa ja alkaa vieriä kohti vakaata potentiaalın minimiä. Malleja karakterisoi yleensä  $V'' < 0$  ja  $\delta < -\epsilon_V$ . Slow-roll -parametrit (40) ja (41) saadaan pieniksi tekemällä potentiaalista hyvin laakea siten, että derivaatat  $V'$  ja  $V''$  ovat pieniä (ks. kuva 3). Esimerkki potentiaalityypistä on  $V(\varphi) = \Lambda^4(1 - (\frac{\varphi}{\mu})^p)$ . Kentän arvon muutos on pienempää kuin Planckin massa  $\Delta\varphi < M_{pl}$ .
- (c) Hybridimalleissa kenttiä voi olla useita. Mallit voivat liittyä esimerkiksi supersymmetriaan ja supergravitaatioon [8, 14]. Eräs tällainen tapaus on, missä inflaatiosta vastaa oma kenttensä  $\varphi$ , joka vierii vaelekuumia kohti (ks. kuva 3). Inflaatio päättyy, kun jokin toinen kenttä  $\chi$ , joka on jollain tavalla kytkeytynyt inflatonkenttään, muuttuu epävakaaksi. Malleja karakterisoi  $V'' > 0$  ja  $0 < \delta < \epsilon_V$ . Esimerkki kytketyn potentiaalın muodosta on  $V(\varphi, \chi) = V(\varphi) - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 + \frac{1}{4}\lambda\chi^4 + \frac{1}{2}\lambda'\chi^2\varphi^2$ , missä  $V(\varphi) = V_0 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2$  [3, 11].





Kuvio 3: Tyypillinen potentiaali suuren kentän mallille (a), pienen kentän mallille (b) ja hybridimallille (c). Kuva lähteestä [14].

Tärkein erottava tekijä havaintojen kannalta on se, että inflaation aikana tuotettujen gravitaatioaaltojen amplitudi on suoraan verrannollinen inflaation energiaskaalaan [7]. Suuren kentän inflaation tuottamat gravitaatioaallot saattaisivat siten olla havaittavissa lähitulevaisuudessa tai yhä tiukempi yläraja gravitaatioaaltojen amplitudille voi sulkea suuren kentän mallit kokonaan pois.

Yksinkertaisimmille inflaatiomalleille on myös olemassa suuri joukko modifikaatioita, joista seuraavassa on muutama esimerkki [7]:

1. Aktiossa (27) esiintyvä Lagrangen tiheys  $\mathcal{L}_\varphi$  voi sisältää ei-minimaalisesti gravitaatioon kytkettyjä termejä, kuten esimerkiksi termin  $f(\varphi)R$ , missä  $f(\varphi)$  on jokin kentän funktio ja  $R$  on Riccin skalaari.
2. Inflaation aikaiset energiaskaalat ovat suuria, joten gravitaatioteoria saattaa poiketa yleisestä suhteellisuusteoriasta jollain tuntemattomalla tavalla. Aktiossa (27) esiintyvän Einsteinin-Hilbertin osan  $S_{EH}$  voi tällöin korvata modifioidulla gravitaatiolla. Esimerkiksi Riccin skalaarin  $R$  sijaan aktiossa voi esiintyä jokin sen funktio  $f(R)$ .
3. Kenttä  $\varphi$  voi omata ei-kanonisen kineettisen termin. Yleensä kanoninen valinta on  $K = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ . Yleisessä tilanteessa Lagrangen tiheys on muotoa  $\mathcal{L}_\varphi = F(\varphi, K) - V(\varphi)$ , missä  $F$  on jokin funktio inflatonkentästä ja sen derivaatoista. Tällöin kineettinen termi  $F$  voisi ylläpitää inflaatiota, mikä sallisi inflaation tapahtuvan myös jyrkässä potentiaalissa [7].

Tässä tutkielmassa käsitellään pääasiassa yksinkertaisinta yhden kentän slow-roll-inflaatiota. Lagrangen tiheyden oletetaan siis olevan standardimuotoa (28). Tarkastelu pidetään aina yleisellä tasolla, jolloin tulokset pätevät mallista riippumatta. Käydään seuraavaksi kuitenkin havainnollisuuden vuoksi läpi pari esimerkkiä mahdollisista inflatonkentän potentiaaleista. Ensimmäisessä käytetään hyväksi SRA:ta, mutta jälkimmäisessä löytyy analyyttiset ratkaisut alkuperäisiin yhtälöihin (34) ja (36).

**Esimerkki 1.** Ehkä yksinkertaisin potentiaalilauseke on  $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ . Slow-roll-parametrit on helppo laskea

$$\epsilon_V = \frac{2M_{pl}^2}{\varphi^2} = \eta_V .$$

SRA vaatii, että  $\epsilon_V \ll 1$  ja  $|\eta_V| \ll 1$ , mistä seuraa  $\varphi^2 \gg 2M_{pl}^2$ . Kyseessä on selvästi suuren kentän malli. Inflaatio päättyy, kun  $\epsilon_V \approx 1$ , joten kentän loppuarvo on  $\varphi_{end} =$

$\sqrt{2}M_{pl} \approx 10^{18}$  GeV.  $e$ -foldien määrä inflaation aikana on

$$N_{tot} = N(\varphi_{in}) = \frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\varphi_{end}}^{\varphi_{in}} \frac{V}{V'} d\varphi = \frac{\varphi_{in}^2}{4M_{pl}^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\epsilon_{V,in}} - \frac{1}{2}.$$

Horisontti- ja laakeusongelman ratkaisu vaatii  $N_{tot} \gtrsim 60$ , joten  $\epsilon_{V,in} \lesssim \frac{1}{120}$ .  
Slow-roll -yhtälöt (38) ja (39) ovat

$$H \approx \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{m}{M_{pl}} \varphi$$

$$3H\dot{\varphi} \approx -m^2 \varphi,$$

joista saadaan ratkaisu kentälle ja skaalatekijälle [14]

$$\varphi(t) = \varphi_{in} - \sqrt{\frac{2}{3}} m M_{pl} t$$

$$a(t) = a_{in} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{m}{M_{pl}} \left(\varphi_{in} t - \frac{1}{\sqrt{6}} m M_{pl} t^2\right)\right),$$

missä  $\varphi_{in}$  ja  $a_{in}$  tarkoittavat arvoja inflaation alussa hetkellä  $t \approx 0$ . Kyseessä ei ole täydellinen de Sitter -ekspansio, sillä  $\varphi$ :n aikariippuvuus tekee Hubblen parametrilla  $t$ :n funktion  $H = H(t) \neq$  vakio.

**Esimerkki 2.** Toinen suuren kentän mallien esimerkkipotentiali on muotoa  $V(\varphi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\varphi}{M_{pl}}\right)$ , missä  $V_0$  ja  $p > 1$  ovat vakioita. Tämä on tärkeä esimerkki siinä mielessä, että SRA:ta ei tarvita yhtälöiden ratkaisemiseksi. Alkuperäiset yhtälöt (34) ja (36) ovat

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \sqrt{\frac{2}{p}} \frac{V_0}{M_{pl}^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\varphi}{M_{pl}}\right) = 0$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\varphi}{M_{pl}}\right)\right).$$

Yhtälöparille on olemassa analyttinen ratkaisu [3]

$$\varphi(t) = \sqrt{2p} M_{pl} \ln\left(\sqrt{\frac{V_0}{p(3p-1)} \frac{t}{M_{pl}}}\right)$$

$$a(t) = a_0 t^p.$$

Skaalatekijän aikariippuvuuden takia kyseistä mallia sanotaan usein potenssilaki-inflaatioksi (power-law inflation).

Slow-roll -parametrit ovat

$$\epsilon_V = \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \eta_V.$$

SRA vaatii, että  $p \gg 2$ . Kun slow-roll -ratkaisu on saavutettu attraktoriteoreeman nojalla, inflaatio jatkuu ikuisesti, sillä  $p$  on vakio. Tarvitaan jokin ulkopuolinen tekijä, kuten toinen skalaarikenttä, jotta inflaatio päättyisi joskus.

### 3.6 Reheating ja preheating

Inflaatio päättyy, kun kineettinen termi kasvaa potentiaalienergiaa suuremmaksi  $\dot{\phi}^2 \geq V$ . SRA:ssa tämä tarkoittaa sitä, että  $\epsilon_V \rightarrow 1$ . Kenttä alkaa tällöin vieriä kohti potentiaalminimiä. Kun kentän amplitudi on pientä, potentiaalia voi approksimoida minimin ympäristössä lausekkeella  $V(\varphi) \approx \frac{1}{2}m_\varphi^2\varphi^2$ . Liikeyhtälö (36) on siten

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_\varphi^2\phi = 0. \quad (45)$$

Kun  $m_\varphi \gg H$ , kyseessä on harmoninen värähtelijä, jonka taajuus on  $m_\varphi$  ja jonka amplitudi vaimenee kitkatermin  $3H\dot{\phi}$  vaikutuksesta. Koska inflatonkenttä on homogeeninen, värähtely tapahtuu samassa vaiheessa kaikkialla eli värähtely on koherenttia.

Viriaaliteoreeman nojalla kineettisen energian ja potentiaalienergian keskiarvoille pätee  $\langle \dot{\phi}^2/2 \rangle = n/2 \langle V(\varphi) \rangle$ , kun värähtely tapahtuu potentiaalissa  $V \propto \varphi^n$  [14]. Paineen keskiarvo yhden värähtelyn aikana on

$$\bar{p}_\varphi \equiv \langle p_\varphi \rangle = \left\langle \frac{\dot{\phi}^2}{2} \right\rangle + \langle V(\varphi) \rangle = \frac{n-2}{2} \langle V(\varphi) \rangle = \frac{n-2}{n+2} \langle \rho_\varphi \rangle \equiv \frac{n-2}{n+2} \bar{\rho}_\varphi. \quad (46)$$

Nähdään, että tapauksessa  $n = 2$  oskilloiva inflatonkenttä käyttäytyy materian tavoin ja tapauksessa  $n = 4$  säteilyn tavoin. Energiatiheyden lasku ilmenee värähtelyamplitudin pienenemisenä.

Jotta universumi ei jäisi täysin tyhjäksi inflaation jäljiltä, täytyy kentän  $\varphi$  kytkeytyä hiukkasfysiikan standardimallin vapausasteisiin. Tarkastellaan tilannetta, jossa inflatonkenttä  $\varphi$  hajoaa suoraan relativistisiksi hiukkasiksi  $\chi$ , jotka vuorovaikutusten kautta termalisoituvat. Tätä hajoamista ja termalisaatiota sanotaan reheating-prosessiksi ja se tuottaa aikaisemmin lasketun valtavan määrän entropiaa (19) [8].

Olkoon  $\Gamma_\varphi$  inflatonkentän kokonaishajoamisleveys. Reheating tapahtuu arviolta ajanhetkellä  $\Gamma_\varphi \approx H$  [14]. Hubblen parametrin lauseke on

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{pl}^2} \bar{\rho}_\varphi = \frac{4\pi^3}{45M_{pl}^2} g_*(T_{reh}) T_{reh}^4,$$

kun oletetaan, että oskillaatioiden keskimääräinen energiatiheys siirtyy suoraan säteilyn energiatiheydeksi (välitön termalisaatio)  $\bar{\rho}_\varphi = \rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_*(T_{reh}) T_{reh}^4$ . Tällöin saadaan arvio reheating-lämpötilalle [8]

$$T_{reh} = \left( \frac{90}{8\pi^3 g_*(T_{reh})} \right)^{1/4} \sqrt{\Gamma_\varphi M_{pl}} \approx 0.2 \sqrt{\Gamma_\varphi M_{pl}}, \quad (47)$$

missä on otettu huomioon kaikki standardimallin vapausasteet  $g_*(T_{reh}) \approx 100$ . Lämpötilan alaraja  $T_{reh} \geq 1$  MeV saadaan nukleosynteesistä ja malliriippumaton yläaraja  $T_{reh} \lesssim 10^{16}$  GeV primordiaalisista gravitaatioaaltoista.

Reheating on perturbatiivinen prosessi ja sen tehokkuus riippuu siitä, kuinka voimakkaasti inflatonkenttä on kytkeytynyt muihin kenttiin. Hiukkastuotto voi tapahtua myös ei-perturbatiivisesti ns. parametrin resonanssin avulla [10, 14, 15]. Tämä prosessi tunnetaan nimellä preheating eli parametrinen reheating. Eräs esimerkki preheatingista on tilanne, jossa kenttä  $\varphi$  hajoaa pääosin bosoneiksi [15]. Tässä tilanteessa

parametrinen resonanssi johtuu bosonien Bose-Einstein -kondensaatiosta. Resonanssi voi olla niin tehokasta, että kenttä  $\varphi$  käytännössä räjähtää bosoneiksi ja energiatilojen miehitysluku kasvaa eksponentiaalisesti. Syntyneet bosonit eivät tällöin ole termisessä tasapainossa, vaan hiukkaset termalisoituvat myöhemmin hajoamisten ja vuoro-vaikutusten myötä. Kun preheating on ohitse, voi kehitystä kuvata tavallisella reheatingilla, jossa tarkastellaan inflatonikentän sijaan hajoavien bosonien energiansiirtoa standardimallin hiukkasille [15].

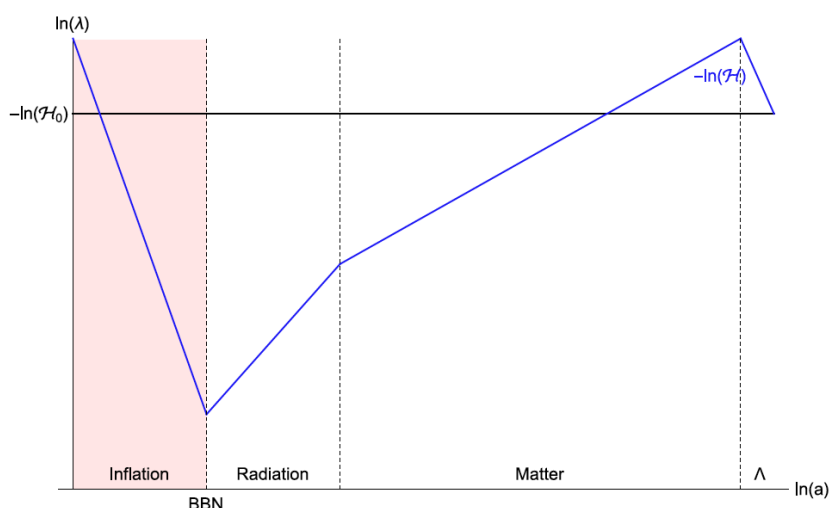
Reheating ja preheating ovat hyvin malliriippuvaisia prosesseja. Monimutkaisuuden vuoksi niiden tutkiminen on itsessään jo oma aihepiirinsä. Tarkempi analyysi näistä prosesseista löytyy lähteistä [9], [10], [11], [14] ja [15].

### 3.7 Inflaatio ja skaalat

Tarkastellaan lopuksi inflaatiota skaalojen kehityksen kautta, mikä on tärkeää rakenteiden synnyn kannalta. Comoving-skaala  $\lambda$  voidaan identifioida comoving-aaltoluvun  $k$  kanssa  $k = 2\pi/\lambda \approx 1/\lambda$ . Comoving-skaalan  $\lambda$  sanotaan tällöin olevan ( $\mathcal{H} = aH$ )

- superhorisontissa eli horisontin ulkopuolella, kun  $k < \mathcal{H}$  ( $\lambda > \frac{1}{\mathcal{H}}$ )
- ylittämässä horisonttia, kun  $k = \mathcal{H}$  ( $\lambda = \frac{1}{\mathcal{H}}$ )
- subhorisontissa eli horisontin sisällä kun  $k > \mathcal{H}$  ( $\lambda < \frac{1}{\mathcal{H}}$ ) .

Suuret skaalat vastaavat siis pientä aaltolukua ja pienet skaalat suurta aaltolukua. Koska inflaation aikana comoving-Hubblerin säde  $\mathcal{H}^{-1}$  pienenee, alun perin horisontin sisällä olevat skaalat poistuvat superhorisonttiin. Inflaation jälkeen  $\mathcal{H}^{-1}$  alkaa kasvaa ja pienimmät skaalat palaavat ensimmäisenä takaisin horisontin sisälle. Vasta äskettäin subhorisonttiin palanneet skaalat poistuvat uudelleen horisontista pimeän energian takia. Kuva 4 tiivistää eri aikakausien kehityksen.



Kuvio 4: Nykyisen comoving-horisontin  $\frac{1}{H_0}$  (musta) ja comoving-Hubblerin säteen  $\frac{1}{H}$  (sininen) kehitys eri aikakausina logaritmisella asteikolla. Kuva lähteestä [13].

Arvioidaan seuraavaksi, milloin tyypillinen skaala poistuu horisontista inflaation aikana. Olkoon comoving-skaalan koko  $k$ , jolloin horisontin ylityksessä  $k = a_k H_k$ .

Verrataan tätä nykyiseen comoving-horisonttiin

$$\frac{k}{a_0 H_0} = \frac{a_k H_k}{a_0 H_0} = \frac{a_k}{a_{end}} \frac{a_{end}}{a_{reh}} \frac{a_{reh}}{a_{eq}} \frac{a_{eq}}{a_0} \frac{H_k}{H_0},$$

missä kehitys on jaettu eri aikakausiin ja siirtymät oletetaan välittömiksi. Slow-roll -inflaatiossa energiatiheyttä dominoi potentiaalienergia ja approksimoidaan tämän pätevän myös inflaation loppuvaiheessa. Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{k}{a_0 H_0} &= e^{-N(k)} \left( \frac{\rho_{end}}{\rho_{reh}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{\rho_{reh}}{\rho_{eq}} \right)^{-\frac{1}{4}} \left( \frac{\rho_{eq}}{\rho_{m,0}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{V_k}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-N(k)} \frac{\rho_{m,0}^{\frac{1}{3}}}{\rho_{eq}^{\frac{1}{12}} \rho_0^{\frac{1}{2}}} 10^{16} \text{ GeV} \frac{V_k^{\frac{1}{4}}}{10^{16} \text{ GeV}} \left( \frac{V_k}{V_{end}} \right)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{\rho_{reh}}{V_{end}} \right)^{\frac{1}{12}}, \end{aligned}$$

missä on eksplisiittisesti kirjoitettu referenssienergia  $10^{16}$  GeV. Siispä  $e$ -foldien määrä skaalan  $k$  horisontin ylityksestä inflaation loppuun on [3]

$$N(k) \approx 61 - \ln\left(\frac{k}{a_0 H_0}\right) - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{V_{end}^{1/4}}{\rho_{reh}^{1/4}}\right) + \ln\left(\frac{V_k^{1/4}}{V_{end}^{1/4}}\right) - \ln\left(\frac{10^{16} \text{ GeV}}{V_k^{1/4}}\right). \quad (48)$$

Jos reheating-prosessi on täydellinen ja potentiaali luovuttaa kaiken energiansa relativistisille hiukkasille, on kolmas termi nolla. Neljännen termin kontribuutio on vähäistä, sillä potentiaali ei muutu merkittävästi slow-roll -inflaation aikana. Viimeinen termi voi kuitenkin olla tärkeä, jos energiaskaala horisontin ylityksen aikaan  $V_k^{1/4}$  on merkittävästi pienempi kuin  $10^{16}$  GeV. Tyypillisille inflaatiomalleille kolme viimeistä termiä ovat mitättömiä ja suurin vaikutus tulee skaalan  $k$  koosta suhteessa nykyiseen comoving-horisonttiin [3]. Suurimmat nykyisin havaittavat skaalat  $k_0 \approx a_0 H_0$  poistuivat siis horisontista n. 60  $e$ -foldia ennen inflaation päättymistä.

## 4 KOSMOLOGINEN HÄIRIÖTEORIA

Tähän mennessä maailmankaikkeutta on tarkasteltu täysin homogeenisena ja isotrooppisena. Kuitenkin havainnoista nähdään, että universumissa on eri mittakaavan rakenteita, kuten galakseja ja galaksijoukkoja sekä kosminen taustasäteily. Mikä on näiden rakenteiden alkuperä ja kuinka ne kehittyivät nykyiseen muotoonsa?

Inflaatio tarjoaa näihin kysymyksiin vastauksen yhdessä kosmologisen häiriöteorian kanssa. Myöhemmin tullaan näkemään, että rakenteiden alkuperä piilee inflatonkentän kvanttifluktuaatioissa. Fluktuaatioiden kehityksen määrää puolestaan kosmologinen häiriöteoria. Pitkään inflaation kilpailijana rakenteiden synnyn selittämisessä olivat topologiset defektit ja erityisesti kosmiset säikeet [14]. Havainnot kosmisesta taustasäteilystä sulki kuitenkin pois tämän mahdollisuuden [2, 14].

Tässä kappaleessa rajoitutaan tarkastelemaan lineaarista häiriöteoriaa, joka pätee silloin, kun perturbaatiot ovat pieniä verrattuna taustaan. Lineaarinen häiriöteoria on kuitenkin riittävän tarkka varhaisen maailmankaikkeuden perturbaatioiden käsittelyssä, sillä kosmisen taustasäteilyn syntymisen aikaan epähomogeniat taustan suhteen olivat luokkaa  $\delta\rho/\bar{\rho} \approx 10^{-5}$  [9].

### 4.1 Perturbaatiot ja mittaongelma

Yleisessä suhteellisuusteoriassa häiriöiden määrittely lausekkeella  $\delta T = T - \bar{T}$  ei ole triviaalia, sillä suureen fysikaalinen arvo  $T$  ja tausta-arvo  $\bar{T}$  on määritelty eri monistoilla [16]. Tämä tarkoittaa siis sitä, että tensoria  $T$  ei voi triviaalisti jakaa homogeeniseen tausta-arvoon  $\bar{T}$  ja perturbaatioon  $\delta T$ . Kosmologisen häiriöteorian tekeekin monimutkaiseksi se, että perturbaatiot eivät ole yksikäsitteisiä.

Määritellään tulomonisto  $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ , joka koostuu monistoperheestä  $(M_\epsilon)_{\epsilon \in \mathbb{R}}$ , jonka alkiot ovat keskenään diffeomorfisia. Jokainen  $M_\epsilon$  edustaa fysikaalista häirittyä avaruusaikaa siten, että parametrin arvolla  $\epsilon = 0$  saadaan homogeeninen taustauniversumi  $\mathcal{M}_0$ . Minkä tahansa diffeomorfismin  $\phi_\epsilon : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\epsilon$  avulla voidaan identifoida pisteet monistojen  $\mathcal{M}_0$  ja  $\mathcal{M}_\epsilon$  välillä. Mitan valinnalla tarkoitetaan kuvauksen  $\phi_\epsilon$  valintaa. Kuvauksen  $\phi_\epsilon$  avulla voidaan monistolla  $\mathcal{M}_\epsilon$  määritelty fysikaalinen tensori  $T_\epsilon$  siirtää taustamonistolle  $\mathcal{M}_0$  käyttämällä pull-backia  $\phi_\epsilon^* T_\epsilon$ . Tällöin kokonaisperturbaatioksi määritellään  $\Delta T_\phi = \phi_\epsilon^* T_\epsilon - T_0$ , missä  $T_0$  on tensorisuureen arvo taustassa [16]. Kääntäen voidaan  $\phi_\epsilon$ :n avulla tuotu fysikaalinen tensori lausua monistolla  $\mathcal{M}_0$  muodossa  $T_\epsilon^\phi \equiv \phi_\epsilon^* T_\epsilon = T_0 + \Delta T_\phi$ . Tekemällä Taylorin kehitelmä pull-backille  $\phi_\epsilon^* T_\epsilon$  saadaan [17]

$$\Delta T_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n T_\phi, \quad \delta^n T_\phi = \frac{\epsilon^n}{n!} (\mathcal{L}_X^n T_\epsilon)|_{\epsilon=0},$$

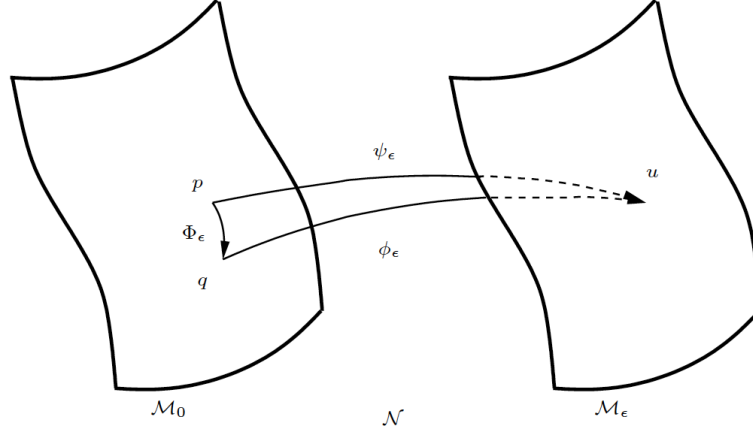
missä on määritelty kertaluvun  $n$  häiriö  $\delta^n T_\phi$  ja Lien derivaatta  $\mathcal{L}_X$  suoritetaan diffeomorfismin  $\phi_\epsilon$  generoivan vektorikentän  $X$  suuntaan.

Olkoon  $p, q \in \mathcal{M}_0$  ja  $u \in \mathcal{M}_\epsilon$  sekä  $\phi_\epsilon, \psi_\epsilon : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\epsilon$  diffeomorfismeja siten, että  $\psi_\epsilon(p) = u = \phi_\epsilon(q)$ . Nyt voidaan määritellä monistolla  $\mathcal{M}_0$  diffeomorfismi  $\Phi_\epsilon : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ ,  $\Phi_\epsilon = \phi_{-\epsilon} \circ \psi_\epsilon$ , jolle  $\Phi_\epsilon(p) = q$  (ks. kuva 5). Kuvausta  $\Phi_\epsilon$  sanotaan

mittamuunnokseksi. Se antaa relaation kahdessa eri mitassa määritellyille fysikaalisille tensoreille  $T_\epsilon^\psi = \Phi_\epsilon^* T_\epsilon^\phi$ . Käyttämällä Baker-Campbell-Hausdorff -kaavaa saadaan toisessa kertaluvussa [17]

$$\Phi_\epsilon^* T_\epsilon^\phi = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_n}\right) T_\epsilon^\phi \approx T_\epsilon^\phi + \epsilon \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1} T_\epsilon^\phi + \frac{\epsilon^2}{2} (\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_2} + \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1}^2) T_\epsilon^\phi ,$$

missä  $\tilde{\zeta}_1 = Y - X$  ja  $\tilde{\zeta}_2 = [X, Y]$  sekä vektorikenttä  $Y$  generoi diffeomorfismin  $\psi_\epsilon$ . Kun



Kuvio 5: Mittamuunnoksen  $\Phi_\epsilon$  periaate. Kuva lähteestä [17].

lausutaan tensorit muodossa  $T_\epsilon^\phi = T_0 + \Delta T_\phi$  ja  $T_\epsilon^\psi = T_0 + \Delta T_\psi$ , niin edellinen yhtälö antaa lausekkeen kokonaisperturbaatioille

$$\Delta T_\psi = \Delta T_\phi + \epsilon \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1} T_0 + \epsilon \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1} \Delta T_\phi + \frac{\epsilon^2}{2} (\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_2} + \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1}^2) T_0 ,$$

joten ensimmäisen ja toisen kertaluvun häiriöillä on yhteys [16]

$$\begin{aligned} \delta T_\psi &= \delta T_\phi + \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1} T_0 \\ \delta^2 T_\psi &= \delta^2 T_\phi + (\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_2} + \mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1}^2) T_0 + 2\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}_1} \delta T_\phi . \end{aligned}$$

Nähdään, että perturbaatiot riippuvat valitusta mitasta, joten erottelu taustaan ja häiriöosaan  $T = T_0 + \Delta T$  ei ole kovariantti. Tärkeän poikkeuksen muodostavat mittainvariantit suureet, joiden perturbaatiot ovat samat kaikissa mitoissa. Linearisessa häiriöteoriassa tämä tarkoittaa sitä, että  $\mathcal{L}_{\tilde{\zeta}} T_0 = 0 \forall \tilde{\zeta}$ . Tulos tunnetaan Stewart-Walker-lemmana [14]. Jos esimerkiksi fysikaalisen suuren arvo taustassa häviää  $T_0 = 0$ , niin perturbaatiot ovat mittainvariantteja.

Kuvaus  $\Phi_\epsilon$  antaa pisteiden  $p$  ja  $q$  koordinaattien välille lausekkeen, joka ensimmäisessä kertaluvussa on [17]

$$x^\mu(q) = x^\mu(p) + \epsilon \tilde{\zeta}_1^\mu(p) , \quad \epsilon \ll 1 .$$

Koska  $\Phi_\epsilon$  on myös diffeomorfismi, voidaan sen avulla siirtää pisteen  $p$  koordinaatisto  $x^\mu(p)$  pisteeseen  $q$  määrittelemällä uudeksi koordinaatiksi  $\tilde{x}^\mu = x^\mu \circ \Phi_\epsilon^{-1}$ . Piste  $q$  uuden koordinaatin arvot ovat siis samat kuin pisteen  $p$  koordinaatin arvot  $\tilde{x}^\mu(q) = x^\mu(p)$ . Taylorin kehitelmä vektorikentälle  $\tilde{\zeta}_1^\mu$  pisteen  $q$  ympäristössä on

$\zeta_1^\mu(p) = \zeta_1^\mu(q) - \epsilon \partial_\nu \zeta_1^\mu(q) \zeta_1^\nu(q)$  [17]. Tällöin ensimmäisessä kertaluvussa pisteen  $q$  vanhan ja uuden koordinaatin ero on [17]

$$\tilde{x}^\mu(q) = x^\mu(q) - \epsilon \zeta_1^\mu(q) .$$

Mittamuunnosta voi siten ekvivalentisti ajatella infinitesimaalisena koordinaatistomuunnoksena  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \zeta^\mu$ ,  $|\zeta^\mu| \ll 1$ . Tässä mitan valinta vastaa pisteen  $q$  koordinaatiston valintaa. Mittariippuvuus aiheuttaa sen, että häiriöt näyttäivät erilaisilta eri koordinaatistoissa.

Tulkintaa, jossa mittamuunnosta ajatellaan koordinaatistomuunnoksena pisteessä  $q$ , sanotaan passiiviseksi lähestymistavaksi [17]. Aktiivisessa lähestymistavassa mittamuunnos  $\Phi_\epsilon$  on pikemminkin monistolla  $\mathcal{M}_0$  määritelty kuvaus, jonka toimesta perтурбаatiot muuttuvat siirryttäessä mitasta toiseen. Lähestymistavat ovat ekvivalentteja ja jatkossa käytetään passiivista lähestymistapaa, sillä se on laskuteknisesti paljon konkreettisempi.

## 4.2 Metriikka

Jaetaan metrinen tensori homogeeniseen ja epähomogeeniseen osaan  $g_{\mu\nu}(t, \bar{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \bar{x})$ ,  $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}|$ . Koska inflaatio tekee avaruudesta käytännössä spatiaalisesti laakean, voidaan tarkastella häiriöitä homogeenisessa taustauniversumissa, jonka metriikka on  $ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\tau)(-d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j)$ . Yleisin muoto ensimmäistä kertalukua olevalle häiritylle metriikalle on [14]

$$ds^2 = a^2(\tau) \left( - (1 + 2A) d\tau^2 + 2B_i dx^i d\tau + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right) , \quad (49)$$

missä  $A = A(\tau, \bar{x})$  on skalaari,  $B_i = B_i(\tau, \bar{x})$  3-vektori ja  $h_{ij} = h_{ij}(\tau, \bar{x})$  symmetrinen 3-tensori. Häiriöt  $A$ ,  $B_i$  ja  $h_{ij}$  oletetaan pieniksi ja kaikki tulot, joissa esiintyy ensimmäistä kertalukua korkeampia termejä, kuten esimerkiksi  $AB_i$ , jätetään huomioimatta.

Linearisessa häiriöteoriassa erittäin hyödyllinen apuväline on skalaari-vektori-tensori -hajotelma eli SVT-hajotelma. Metriikassa (49) voidaan termit  $B_i$  ja  $h_{ij}$  jakaa osiin seuraavasti [14]

$$B_i = \underbrace{\partial_i B}_{\text{skalaari}} + \underbrace{\hat{B}_i}_{\text{vektori}} \quad (50)$$

$$h_{ij} = \underbrace{2C\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E}_{\text{skalaari}} + \underbrace{\partial_i \hat{E}_j + \partial_j \hat{E}_i}_{\text{vektori}} + \underbrace{2\hat{E}_{ij}}_{\text{tensori}} , \quad (51)$$

missä  $\partial^i \hat{B}_i = \partial^i \hat{E}_i = \partial^i \hat{E}_{ij} = \hat{E}_i^i = 0$ . Nimet skalaari, vektori ja tensori viittaavat siihen, kuinka komponentit muuttuvat rotaatioissa taustauniversumin spatiaaliosan suhteen [18]. Häiriösuureiden indeksien nosto tapahtuu taustametriikan  $\bar{g}^{ij} = a^2(\tau) \delta^{ij}$  avulla eli esimerkiksi  $\hat{B}^i = \bar{g}^{ij} \hat{B}_j$ .

SVT-hajotelma jakaa siis symmetrisen metrisen tensorin  $g_{\mu\nu}$  10 vapausastetta neljään skalaariin  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $E$  (4 vapausastetta), kahteen vektoriin  $\hat{B}_i$  ja  $\hat{E}_i$  (4 vapausastetta) sekä yhteen tensoriin  $\hat{E}_{ij}$  (2 vapausastetta). Hajotelman tärkein ominaisuus on se, että Einsteinin yhtälöt skalaareille, vektoreille ja tensoreille eivät sekoitu keskenään lineaarisessa kertaluvussa [14]. Siispä skalaari-, vektori- ja tensorimoodien kehitystä voidaan tarkastella itsenäisesti toisistaan riippumatta.



Tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun koordinaatistomuunnosta

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \zeta^\mu(\tau, \bar{x}), \quad \zeta^0 = T, \quad \zeta^i = \partial^i L + \hat{L}^i, \quad \partial^i \hat{L}_i = 0. \quad (52)$$

Viivaelementin invarianssista seuraa [6]

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}.$$

Tätä hyödyntämällä voidaan laskea metriikan häiriöiden muunnoslait [14]

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A - T' - \mathcal{H}T, & B &\rightarrow B + T - L', & C &\rightarrow C - \mathcal{H}T, & E &\rightarrow E - L, \\ \hat{B}_i &\rightarrow \hat{B}_i - \hat{L}'_i, & \hat{E}_i &\rightarrow \hat{E}_i - \hat{L}_i, \\ \hat{E}_{ij} &\rightarrow \hat{E}_{ij}. \end{aligned}$$

Näiden avulla määritellään mittainvariantit suuret [14]

$$\Phi = A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')' \quad (53)$$

$$\Psi = -C - \mathcal{H}(B - E') \quad (54)$$

$$\hat{\Phi}^i = \hat{E}^{i'} - \hat{B}^i \quad (55)$$

$$\hat{E}^{ij}, \quad (56)$$

jotka eivät muutu koordinaatistomuunnoksessa (52). Suuret (53)-(56) voi siten identifioida metriikan  $g_{\mu\nu}$  todellisten häiriöiden kanssa, sillä ne näyttävät samoilta kaikissa koordinaatistoissa. Skalaareja  $\Phi$  ja  $\Psi$  kutsutaan usein Bardeenin potentiaaleiksi.

### 4.3 Energia-liikemäärä -tensori

Ensimmäisessä kappaleessa nähtiin, että homogeenisen ja isotrooppisen taustan energia-liikemäärä -tensori on  $\bar{T}_{\mu\nu} = (\bar{\rho} + \bar{p})\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu + \bar{p}\bar{g}_{\mu\nu}$ , missä normalisoinnin nojalla voidaan valita  $\bar{u}^\mu = a^{-1}(1, \bar{0})$  ja  $\bar{u}_\mu = -a(1, \bar{0})$ . Tämän perturbaatio on [14]

$$\delta T_{\mu\nu} = (\delta\rho + \delta p)\bar{u}_\mu\bar{u}_\nu + (\bar{\rho} + \bar{p})(\delta u_\mu\bar{u}_\nu + \bar{u}_\mu\delta u_\nu) + \delta p\bar{g}_{\mu\nu} + \bar{p}\delta g_{\mu\nu} + a^2\bar{p}\Pi_{\mu\nu}. \quad (57)$$

Anisotrooppinen stressi  $\Pi_{\mu\nu}$  karakterisoi fluidin poikkeavuutta ideaalifluidista. Comoving-koordinaateissa pätee  $\Pi^i_i = \Pi_{00} = \Pi_{0i} = 0$  [3].

Hyödyntämällä nelinopeuden normitusta  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 = \bar{g}_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu$  saadaan ensimmäisessä kertaluvussa  $\delta g_{\mu\nu}\bar{u}^\mu\bar{u}^\nu + 2\bar{u}_\mu\delta u^\mu = 0 \Leftrightarrow \delta u^0 = -a^{-1}A$ . Määritellään spatiaaliosaksi  $\delta u^i \equiv a^{-1}v^i$ , missä  $v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$  on koordinaattinopeus. Nelinopeuden häiriöt ovat siten [14]

$$\delta u^\mu = a^{-1}(-A, v^i), \quad \delta u_\mu = a(-A, v_i + B_i).$$

Näiden avulla saadaan energia-liikemäärä -tensorin häiriöt yhtälöstä (57). Indeksia nostamalla ne ovat muotoa [14]

$$\delta T^0_0 = -\delta\rho \quad (58)$$

$$\delta T^0_i = (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i + B_i) \quad (59)$$

$$\delta T^i_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p})v^i \equiv -q^i \quad (60)$$

$$\delta T^i_j = \delta p\delta^i_j + \bar{p}\Pi^i_j, \quad (61)$$

missä on määritelty liikemäärätiheys  $q^i$ . Usein häiriöille  $q_i$ ,  $v_i$  ja  $\Pi_{ij}$  on hyödyllistä tehdä SVT-hajotelma  $q_i = \partial_i q + \hat{q}_i$ ,  $v_i = \partial_i v + \hat{v}_i$  ja  $\Pi_{ij} = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) \Pi + \frac{1}{2} (\partial_i \hat{\Pi}_j + \partial_j \hat{\Pi}_i) + \hat{\Pi}_{ij}$ .

Tarkastellaan koordinaatistomuunnosta (52). Tällöin tensori  $T_{\mu\nu}$  muuttuu seuraavasti [6]

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{T}_{\alpha\beta}.$$

Tätä hyödyntämällä muunnoslait eri perturbaatioille ovat [14]

$$\begin{aligned} \delta\rho &\rightarrow \delta\rho - T\bar{\rho}' \\ \delta p &\rightarrow \delta p - T\bar{p}' \\ v &\rightarrow v + L' \\ \hat{v}_i &\rightarrow \hat{v}_i + \hat{L}'_i \end{aligned}$$

Yhdistämällä näitä häiriöitä metriikan häiriöihin saadaan mittainvariantit suureet [14]

$$\delta^N = \delta + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} (B - E') \quad (62)$$

$$\delta^F = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} \frac{C}{\mathcal{H}} \quad (63)$$

$$\delta^C = \delta + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} (v + B) \quad (64)$$

$$V = v + E' \quad (65)$$

$$\hat{V}_i = \hat{v}_i + \hat{B}_i \quad (66)$$

$$\hat{W}_i = \hat{v}_i + \hat{E}'_i, \quad (67)$$

missä on määritelty tiheyskontrasti  $\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}$ . SVT-komponentit  $\Pi$ ,  $\hat{\Pi}_i$  ja  $\hat{\Pi}_{ij}$  ovat myös invariantteja, sillä anisotrooppista stressiä ei esiinny homogeenisessa taustassa.

Energia-liikemäärä -tensorin perturbaatiot voivat olla joko adiabaattisia tai ei-adiabaattisia. Adiabaattisessa tapauksessa paineperturbaatiot ovat verrannollisia energiatihedyyden perturbaatioihin [14]

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho, \quad c_s^2 = \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{\rho}} \right)_S,$$

missä  $c_s$  on fluidin äänennopeus ja osittaisderivaatta suoritetaan vakioentropiassa  $S$ . Jos kyseessä ei ole adiabaattinen perturbaatio, niin jaetaan paineperturbaatio adiabaattiseen ja ei-adiabaattiseen osaan [14]

$$\delta p = \delta p_{ad} + \delta p_{nad} = c_s^2 \delta\rho + \bar{p}\Gamma,$$

missä suuretta  $\Gamma$  sanotaan entropiaperturbaatioksi. Käyttämällä tilanyhtälöä  $\bar{p} = w\bar{\rho}$  sen lauseke on

$$\Gamma = \frac{1}{w\bar{\rho}} (\delta p - c_s^2 \delta\rho).$$

On helppo nähdä, että  $\Gamma$  on invariantti koordinaatistomuunnoksessa (52).

Adiabaattisille perturbaatioille pätee siis

$$\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'} = \frac{\delta p}{\bar{p}'},$$

sillä taustauniversumin adiabaattisesta laajenemisesta seuraa, että äänennopeus voidaan lausua muodossa

$$\frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\rho}} = \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\rho}}\right)_s = c_s^2.$$

Perturboimalla mitä tahansa paineen ja energiatiheyden funktiota  $f(p(\tau, \bar{x}), \rho(\tau, \bar{x}))$  saadaan ( $\bar{f} \equiv f(\bar{p}(\tau), \bar{\rho}(\tau))$ )

$$\frac{\delta f}{\bar{f}'} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p} \delta p + \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \delta \rho}{\frac{\partial f}{\partial p} \bar{p}' + \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \bar{\rho}'} = \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}'} = \frac{\delta p}{\bar{p}'}.$$

Adiabaattiset perturbaatiot aiheuttavat siten saman suhteellisen muutoksen kaikkiin niihin fysikaalisiin suureisiin, joiden arvot määräytyvät suoraan paineesta ja energiatiheydestä.

Adiabaattisia perturbaatioita voi myös ajatella häiriöinä aikakoordinaatissa  $\tau$  [8]. Oletetaan, että energiatiheyden lauseke voidaan kirjoittaa muodossa  $\rho(\tau, \bar{x}) = \bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(\tau, \bar{x}) \equiv \bar{\rho}(\tau) + \bar{\rho}'(\tau)\delta\tau(\tau, \bar{x}) \approx \bar{\rho}(\tau + \delta\tau(\tau, \bar{x}))$ . Vastaavasti paineelle oletetaan  $p(\tau, \bar{x}) = \bar{p}(\tau) + \delta p(\tau, \bar{x}) \equiv \bar{p}(\tau) + \bar{p}'(\tau)\delta\tau(\tau, \bar{x}) \approx \bar{p}(\tau + \delta\tau(\tau, \bar{x}))$ . Etukäteen voisi luulla, että vaaditut aikakoordinaatin häiriöt eivät ole samat  $\delta\tau \neq \delta\widetilde{\tau}$ . Adiabaattisuusehdosta  $\delta p = c_s^2 \delta\rho = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} \delta\rho$  seuraa kuitenkin, että

$$\frac{\delta\widetilde{\tau}}{\delta\tau} = \frac{\delta p}{\bar{p}'} \frac{\bar{\rho}'}{\delta\rho} = \frac{c_s^2}{c_s^2} = 1 \Rightarrow \delta\widetilde{\tau} = \delta\tau.$$

Vastaavasti mikä tahansa paineen ja energiatiheyden funktio voidaan nyt lausua muodossa  $f(p(\tau, \bar{x}), \rho(\tau, \bar{x})) \approx f(\bar{p}(\tau + \delta\tau), \bar{\rho}(\tau + \delta\tau))$ . Nähdään, että lokaalisti fysikaalinen universumi on sama kuin taustauniversumi, mutta eri ajanhetkellä. Tiedyt osat maailmankaikkeutta ovat hieman kehitystä jäljessä ja toiset hieman edellä. Toisin sanoen adiabaattisessa systeemissä kaikki perturbaatiot ovat ilmaistavissa yhden perturbaatiosuureen  $\delta\tau$  avulla.

Tarkastellaan  $N$ :n fluidin systeemiä. Tällöin komponenteille  $I$  ja  $J$  pätee adiabaattisuuden nojalla  $\delta\tau = \frac{\delta\rho_I}{\bar{\rho}_I} = \frac{\delta\rho_J}{\bar{\rho}_J}$ . Jos oletetaan, että energiaa ei siirry fluidien välillä, voidaan käyttää jatkuvuusyhtälöä (10) erikseen komponenteille  $\bar{\rho}_I$  ja  $\bar{\rho}_J$ , jolloin

$$\frac{\delta_I}{1 + w_I} = \frac{\delta_J}{1 + w_J}. \quad (68)$$

Jos perturbaatiot ovat adiabaattisia, niin kaikilla ei-relativistisilla komponenteilla  $w_m = 0$  sama tiheyskontrasti sekä säteilyn ja materian tiheyskontrasteilla on yksinkertainen relaatio  $\delta_r = \frac{4}{3}\delta_m$ . Lisäksi kokonaistihesperturbaatiota  $\delta\rho_{tot} = \sum_I \bar{\rho}_I \delta_I$  dominoi se fluidi  $I$ , joka dominoi energiatiheydellään  $\bar{\rho}_I$  taustauniversumia, sillä tiheyskontrastit ovat samaa suuruusluokkaa yhtälön (68) nojalla.

Adiabaattisissa perturbaatioissa aikaperturbaatio  $\delta\tau$  aiheuttaa siis saman suhteellisen muutoksen  $\frac{\delta X}{\bar{X}}$  kaikille skalaareille  $X$ . Jos  $\frac{\delta X}{\bar{X}} \neq \frac{\delta Y}{\bar{Y}}$  jollekin  $X$  ja  $Y$ , niin kyseisiä

perturbaatioita sanotaan isokurvatuuriperturbaatioiksi. Niitä karakterisoidaan usein mittainvariantilla lausekkeella [8]

$$S_{IJ} \equiv -3\mathcal{H} \left( \frac{\delta\rho_I}{\bar{\rho}'_I} - \frac{\delta\rho_J}{\bar{\rho}'_J} \right) = \frac{\delta_I}{1+w_I} - \frac{\delta_J}{1+w_J} . \quad (69)$$

Perturbaatioiden nimi viittaa siihen, että häiriöt tapahtuvat nyt eri komponenttien välillä siten, että kokonaisenergiatiheys ja geometria eivät muutu.

#### 4.4 Einsteinin yhtälö

Kuten kosmologiassa yleensä, perturbaatioteorian keskeinen yhtälö on Einsteinin yhtälö

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G_N \delta T_{\mu\nu} , \quad (70)$$

joka kuvaa häiriöiden kehitystä homogeenisessa taustassa. Einsteinin tensorin häiriöiden  $\delta G_{\mu\nu}$  laskeminen on suoraviivaista, mutta hyvin työlästä. Käydään seuraavaksi läpi prosessin perusidea.

Lähdetään liikkeelle Christoffelin symboleista. Niiden perturbaatiot ovat [8]

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\rho}(\partial_{\alpha}\bar{g}_{\beta\rho} + \partial_{\beta}\bar{g}_{\alpha\rho} - \partial_{\rho}\bar{g}_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\rho}(\partial_{\alpha}\delta g_{\beta\rho} + \partial_{\beta}\delta g_{\alpha\rho} - \partial_{\rho}\delta g_{\alpha\beta}) .$$

Näiden avulla saadaan Riccin tensorin ja Riccin skalaarin häiriöt

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} + \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\bar{\Gamma}_{\nu\rho}^{\lambda} - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \\ \delta R &= \delta g^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} + \bar{g}^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Einsteinin tensorin perturbaatioiden lauseke on siten [8]

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}\bar{R} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\delta R .$$

Loppupelissä kaikki häiriöt määräytyvät siis metriikan häiriöistä, jotka on määritelty lausekkeella (49).

Voidaan osoittaa, että häiriöt lopulta ovat muotoa [14]

$$\begin{aligned} a^2\delta G^0_0 &= 2(3\mathcal{H}^2 A - 3\mathcal{H}C' + \nabla^2(C + \mathcal{H}B - \mathcal{H}E')) \\ a^2\delta G^0_i &= -2\partial_i(\mathcal{H}A - C') - \frac{1}{2}\nabla^2(\hat{E}'_i - \hat{B}_i) \\ a^2\delta G^i_j &= \partial^i\partial_j((E' - B)' + 2\mathcal{H}(E' - B) - (C + A)) \\ &\quad + \delta^i_j(-\nabla^2(E' - B)' - 2\mathcal{H}\nabla^2(E' - B) - 2C'' - 4\mathcal{H}C' + \nabla^2 C \\ &\quad + 2\mathcal{H}A' + \nabla^2 A + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)A) + \delta^{ik}\partial_{(k}((\hat{E}'_j - \hat{B}_j))' + 2\mathcal{H}(\hat{E}'_j - \hat{B}_j)) \\ &\quad + \hat{E}''_j + 2\mathcal{H}\hat{E}'_j - \nabla^2\hat{E}^i_j , \end{aligned}$$

missä  $\partial_{(i}f_j) = \frac{1}{2}(\partial_i f_j + \partial_j f_i)$ . Einsteinin yhtälön eri komponentit saadaan yhdistämällä nämä häiriöt energia-liikemäärä -tensorin häiriöihin (58)-(61).

## 4.5 Mitan kiinnitys

Mitan kiinnityksessä ideana on eliminoida epäfysikaaliset mittavapausasteet valitsemalla jotkin perturbaatioista nolliksi. Täsmällisesti tämä tapahtuu suorittamalla mittamuunnos, joka passiivisessa lähestymistavassa vastaa koordinaatistomuunnosta. Monesti mitan kiinnitys yksinkertaistaa laskuja huomattavasti. Laskuissa on kuitenkin syytä olla tarkkana, jotta tulokset saadaan kytkettyä havaittaviin fysikaalisiin suureisiin.

On olemassa monia eri mittoja ja niiden hyödyllisyys riippuu tarkasteltavasta fysikaalisesta tilanteesta. Seuraavassa listataan joitain yleisesti käytettyjä mittoja: [7]

- Newtonilaisessa mitassa metrisen tensorin  $g_{\mu\nu}$  skalaariosa on diagonaalinen. Tämä saadaan valitsemalla  $B = E = 0$ . Skalaariosan metriikka on siten  $ds^2 = a^2(\tau)(-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + (1 - 2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j)$ . Nimitys tulee siitä, että anisotrooppisen stressin puuttuessa potentiaalit ovat samat  $\Phi = \Psi$ , jolloin metriikka on sama kuin Schwarzschildin metriikan heikon kentän raja ja potentiaalia  $\Phi$  voi ajatella gravitaatiopotentiaalina. Newtonilainen mitta on hyödyllinen skalaariperturbaatioiden yhtälöiden ratkaisemisessa.
- Spatiaalisesti laakeassa mitassa hyperpintojen  $\tau =$  vakio skalaarikaarevuusperturbaatio on nolla. Mitta saadaan asettamalla  $C = E = 0$ . Tätä käytetään yleensä inflatonkentän fluktuaatioiden  $\delta\varphi$  tarkastelussa.
- Vakioenergiatiheyden mitta saadaan yksinkertaisesti valitsemalla  $\delta\rho = 0$ . Usein asetetaan myös  $E = 0$ . Tämä mitta on hyödyllinen kuvatessa perturbaatioiden kehitystä superhorisonttiskaaloissa.
- Comoving-mitassa fluidin nopeus asetetaan nolliksi. Tämä saadaan vaatimalla  $v = B = E = 0$ . Mittaa käytetään kaarevuusperturbaation  $\mathcal{R}$  käsittelyssä.
- Synkronoitu mitta saadaan, kun valitaan  $A = B_i = 0$ . Nyt häiriöitä on vain spatiaalisessa osassa aika-avaruutta ja kaikki comoving-havaintsijat mittaavat samaa ominaisaikaa  $\tau$ , joka tässä mitassa on sama kuin kosminen aika  $t$ . Synkronoitua mittaa käytetään yleensä, kun ratkaistaan perturbaatioyhtälöitä numeerisesti.

## 4.6 Skalaariperturbaatiot

Einsteinin yhtälön (70) nojalla häiriöt energiatiheydessä tuottavat häiriöitä metriikassa. Metriikan häiriöt voidaan puolestaan SVT-hajotelman nojalla jakaa skalaari-, vektori- ja tensoriperturbaatioihin. Aikaisemmin määriteltiin mittainvariantit skalaaripotentialit  $\Psi$  ja  $\Phi$  sekä tiheyskontrastit  $\delta^N, \delta^F$  ja  $\delta^C$ . Inflaation kannalta tärkeä skalaariperturbaatio on häiriö kolmiulotteisessa kaarevuudessa  $R^{(3)}$ .

Metriikan (49) määräämä skalaarikaarevuus hyperpinnoille  $\tau =$  vakio on  $\delta R^{(3)} = -\frac{4}{a^2}\nabla^2 C$  taustan ollessa laakea  $\bar{R}^{(3)} = 0$  [14]. Häiriötä  $C$  sanotaankin yleensä kaarevuusperturbaatioksi.  $C$  ei ole invariantti, sillä koordinaatistomuunnoksessa (52)  $C \rightarrow C - \mathcal{H}T$ . Sen avulla voidaan kuitenkin määritellä mittainvariantti suure [14]

$$\zeta = -C + \mathcal{H}\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}, \quad (71)$$

jota kutsutaan vakioenergiatiheyden mitan kaarevuusperturbaatioksi. Vaihtoehtoisesti  $C$ :n avulla voidaan muodostaa toinen mittainvariantti suure [7]

$$\mathcal{R} = C + \mathcal{H}(B + v) . \quad (72)$$

Tätä sanotaan comoving-mitan kaarevuusperturbaatioksi.

Perturbaatioiden välinen poikkeavuus on verrannollinen comoving-tiheyskontrastiin

$$\zeta + \mathcal{R} = \mathcal{H} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}'} \left( \delta + \frac{\bar{\rho}'(v + B)}{\bar{\rho}} \right) = -\frac{1}{3(1+w)} \delta^C .$$

Einsteinin yhtälön (70) komponentit  $\delta G_0^0$  ja  $\delta G_i^0$  antavat evoluutioyhtälön Bardeenin potentiaalille [14]

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G_N a^2 \bar{\rho} \delta^C = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \delta^C . \quad (73)$$

Sijoittamalla tämä kaarevuusperturbaatioiden väliseen relaatioon ja siirtymällä Fourier-moodeihin saadaan

$$\zeta_k + \mathcal{R}_k = \frac{1}{3(1+w)} \frac{2}{3} \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \Psi_k .$$

Hyvin suurille skaaloille  $k \ll \mathcal{H}$  pätee siis  $\mathcal{R} \approx -\zeta$ .

Valitaan seuraavaa tarkastelua varten Newtonilainen mitta  $B = E = 0$ . Einsteinin yhtälön (70) komponentti  $\delta G_j^i, i \neq j$ , antaa [14]

$$\Psi - \Phi = 8\pi G_N a^2 \bar{p} \Pi .$$

Yleensä oletetaan, että kyseessä on ideaalifluidi. Tällöin anisotrooppista stressiä ei esiinny ja potentiaalit ovat samat  $\Psi = \Phi$ . Tällöin diagonaaliset komponentit  $\delta G_0^0$  ja  $\delta G_i^i$  antavat evoluutioyhtälön potentiaalille  $\Phi$  [14]

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\Phi' + (2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2)\Phi - c_s^2 \nabla^2 \Phi = 4\pi G_N a^2 \bar{p} \Gamma . \quad (74)$$

Kaarevuusperturbaatio  $\mathcal{R} = C + \mathcal{H}(B + v)$  voidaan Newtonilaisessa mitassa lausua nyt potentiaalın  $\Phi$  avulla muodossa

$$\mathcal{R} = -\Phi + \mathcal{H}v = -\Phi - \frac{2}{3\mathcal{H}} \frac{\Phi' + \mathcal{H}\Phi}{1+w} . \quad (75)$$

Derivoimalla tätä konformiajan suhteen ja käyttämällä evoluutioyhtälöä (74) Fourier-komponenteille  $\Phi_k$  saadaan [14]

$$\mathcal{R}'_k = -\frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}}{1+w} \left( \frac{4\pi G_N a^2}{\mathcal{H}^2} \bar{p} \Gamma - c_s^2 \left( \frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \Phi_k \right) . \quad (76)$$

Jos perturbaatiot ovat adiabaattisia  $\Gamma = 0$ , niin superhorisonttiskaaloissa  $k \ll \mathcal{H}$  kaarevuusperturbaatiot eivät muutu  $\mathcal{R}' \approx -\zeta' \approx 0$ .

Edellinen tarkastelu tehtiin Newtonilaisessa mitassa.  $\mathcal{R}$  ja  $\zeta$  ovat kuitenkin mittainvariantteja, joten ratkaisut pätevät missä tahansa mitassa. Saadaan siis erittäin tärkeä tulos

$$\mathcal{R} \approx -\zeta \approx \text{vakio} , \text{ kun } k \ll \mathcal{H} \text{ ja } \Gamma = 0 . \quad (77)$$

## 4.7 Vektori- ja tensoriperturbaatiot

Vektoriperturbaatioille saadaan kaksi yhtälöä komponenteista  $\delta G_i^0$  ja  $\delta G_j^i$ . Ne ovat [14]

$$\begin{aligned}\nabla^2 \hat{\Phi}_i &= -16\pi G_N a^2 (1+w) \bar{\rho} \hat{V}_i \\ \hat{\Phi}'_i + 2\mathcal{H} \hat{\Phi}_i &= 8\pi G_N a^2 \bar{\rho} \hat{\Pi}_i.\end{aligned}$$

Kolmas yhtälö tulee energia-liikemäärä -tensorin kovariantin divergenssin perturbaatiosta  $\delta(\nabla_\mu T^\mu_\nu) = \partial_\mu \delta T^\mu_\nu + \delta \Gamma^\mu_{\mu\alpha} \bar{T}^\alpha_\nu + \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\alpha} \delta T^\alpha_\nu - \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \bar{T}^\mu_\alpha - \bar{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \delta T^\mu_\alpha = 0$ . Tästä seuraa [14]

$$\hat{V}'_i + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2) \hat{V}_i = -\frac{1}{2} \frac{w}{1+w} \nabla^2 \hat{\Pi}_i.$$

Kun oletetaan, että anisotrooppista stressiä ei esiinny, vektoriperturbaatioiden skaalautumislait ovat

$$\hat{\Phi}_i \propto a^{-2}, \quad \hat{V}^i \propto a^{-(1-3c_s^2)}. \quad (78)$$

Metriikan vektoriperturbaatiot  $\hat{\Phi}_i$  häviävät siten pois maailmankaikkeuden laajetessa. Sama pätee häiriölle  $\hat{V}^i$ , jos kyseessä on ei-relativistinen fluidi  $c_s^2 = w < \frac{1}{3}$ .

Tensorimoodille on vain yksi evoluutioyhtälö, joka saadaan komponentista  $\delta G^i_j$  [14]

$$\hat{E}''_{ij} + 2\mathcal{H} \hat{E}'_{ij} - \nabla^2 \hat{E}_{ij} = 8\pi G_N a^2 \bar{p} \hat{\Pi}_{ij}. \quad (79)$$

Tensorimoodit tunnetaan paremmin gravitaatioaaltoina, jotka voivat edetä myös tyhjässä aika-avaruudessa. Anisotrooppisen stressin puuttuessa edellinen yhtälö on analoginen Minkowskin avaruuden gravitaatioaaltoyhtälön  $\square \hat{E}_{ij} = (\nabla^2 - \partial_t^2) \hat{E}_{ij} = 0$  kanssa [14]. Ainoan lisän tuo avaruuden laajenemisesta johtuva vaimenemistermi  $2\mathcal{H} \hat{E}'_{ij}$ . Koska SVT-hajotelman nojalla  $\partial^i \hat{E}_{ij} = \hat{E}^i_i = 0$ , niin tensorilla  $\hat{E}_{ij}$  on ainoastaan kaksi riippumatonta komponenttia. Näitä vapausasteita sanotaan usein tensorin  $\hat{E}_{ij}$  polarisaatioiksi.  $\hat{E}_{ij}$  voidaan siten lausua polarisaatiotensoreiden  $\epsilon_{ij}^\lambda$  avulla muodossa  $\hat{E}_{ij} = \sum_\lambda \hat{E}_\lambda \epsilon_{ij}^\lambda$ , missä  $\lambda = +, \times$  (ks. kuva 6). Sama pätee myös tensorille  $\hat{\Pi}_{ij}$ . Sijoituksella  $u_T = a \hat{E}_\lambda$  saadaan differentiaaliyhtälö moodeille  $\lambda$  [14]

$$u_T'' - \left( \nabla^2 + \frac{a''}{a} \right) u_T = 8\pi G_N a^3 \bar{p} \hat{\Pi}_\lambda. \quad (80)$$

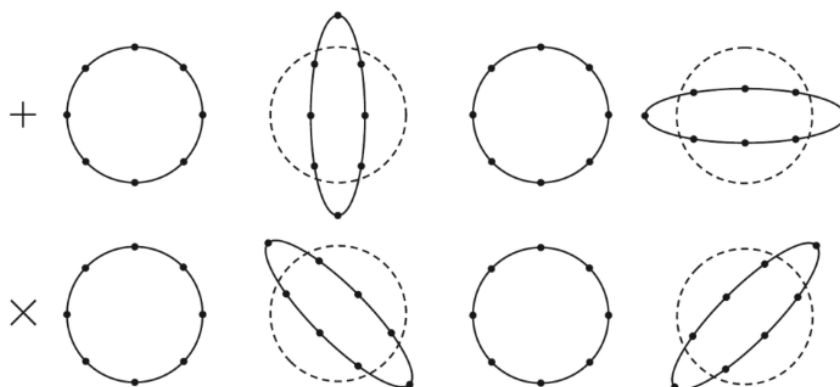
Jos anisotrooppista stressiä ei esiinny ja skaalatekijä noudattaa potenssilakia  $a \propto \tau^p$ , niin tensorimoodien evoluutioyhtälö Fourier-komponenteille  $\hat{E}_{ij}^k$  on [14]

$$\frac{d^2 \hat{E}_{ij}^k}{dx^2} + \frac{2p}{x} \frac{d \hat{E}_{ij}^k}{dx} + \hat{E}_{ij}^k = 0,$$

missä  $x = k\tau$ . Yhtälön ratkaisut voidaan ilmaista Besselin funktioiden avulla. Pitämällä vain ne ratkaisut, jotka eivät divergoi, kun  $x \rightarrow 0$ , saadaan [14]

$$\hat{E}_{ij}^k(x) = x^{1-p} j_{p-1}(x) A_{ij},$$

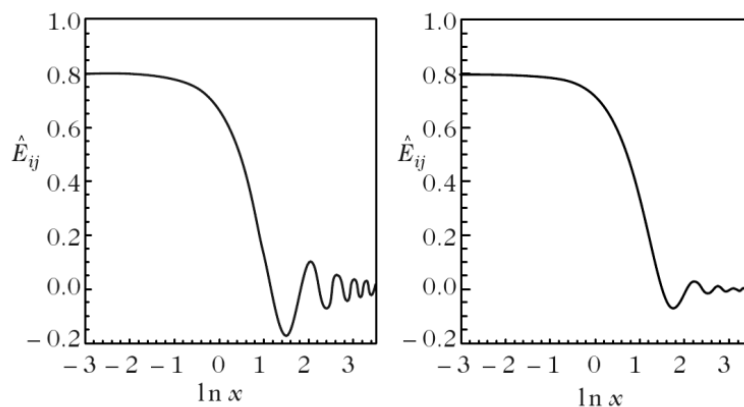
missä  $A_{ij}$  on vakiotensori, jolle  $\partial^i A_{ij} = A^i_i = 0$ . Materia- ja säteilysdominansseissa  $\hat{E}_{ij}^k$  on vakio, jos  $x \ll 1 \Leftrightarrow k \ll \mathcal{H}$  eli moodi on superhorisontissa. Kun moodi tulee



Kuvio 6: Gravitaatioaallon eri polarisaatiomoodien vaikutus testihiukkasiin. Kuvassa aalto tulee kohtisuoraan ympyröihin nähden. Kuva lähteestä [14].

subhorisonttiin, alkaa se käyttäytyä vaimennetun harmonisen värähtelijän tavoin (ks. kuva 7).

Ratkaisuista ja kuvasta 7 nähdään, että tensorimoodien  $\hat{E}_{ij}$  amplitudi pienenee ajan kuluessa ja avaruuden laajetessa. Primordiaalisten gravitaatioaaltojen suora havaitseminen on siten käytännössä mahdotonta. On kuitenkin mahdollista, että amplitudi on ollut riittävän suuri varhaisessa maailmankaikkeudessa. Tällöin primordiaaliset gravitaatioaaltoet voisivat esimerkiksi jättää taustasäteilyn polarisaatioon jäljen, joka pystyttäisiin nykyisin havaitsemaan [7].



Kuvio 7: Gravitaatioaaltojen kehitys säteilydominanssissa  $p = 1$  (vasen) ja materiado-



## 5 INFLAATIO JA KVANTTIFLUKTUAATIOT

Kappaleessa 2 tarkasteltiin pääasiassa homogeenista inflatonkenttää  $\varphi(t)$ . Jotta inflaatio voisi selittää suuren mittakaavan rakenteiden alkuperän, tarvitaan epähomogeenioita, jotka toimivat rakenteiden synnyn siemeninä. Nämä siemenet voidaan nähdä kosmisessa mikroaaltotaustassa. Ehkä yllättävintä on se, että maailmankaikkeuden suurimmat rakenteet on saattanut synnyttää hyvin pienen mittakaavan kvanttifluktuaatiot.

Ensimmäiseksi käydään läpi fluktuaatioiden käsittelyssä tarvittavia tilastollisia suureita, joiden avulla teorian ennustamat ilmiöt voidaan kytkeä havaintoihin.

### 5.1 Statistiikkaa

Kosmologiassa esiintyviä tärkeitä tilastollisia käsitteitä ovat korrelaatiofunktio ja tehospektri. Oletetaan, että kyseessä on homogeeninen ja isotrooppinen stokastinen skalaarikenttä  $f(\bar{x})$ . Tämä tarkoittaa sitä, että kentän  $f$  todennäköisyysfunktio  $\mathbb{P}(f)$  on invariantti translaatioissa ja rotaatioissa. Korrelaatiofunktio määritellään lausekkeella [14]

$$\xi_f(\bar{x}, \bar{x}') = \xi_f(r) = \langle f(\bar{x})f(\bar{x}') \rangle ,$$

missä homogeenisuus ja isotrooppisuus takaa sen, että korrelaatiofunktio riippuu vain suhteellisesta etäisyydestä  $r = |\bar{x} - \bar{x}'|$ . Tässä  $\langle \dots \rangle$  tarkoittaa odotusarvoa todennäköisyysfunktion  $\mathbb{P}(f)$  suhteen.

Tekemällä kentälle  $f$  Fourier-ekspansio voidaan määritellä tehospektri  $P_f(k)$  lausekkeella [14]

$$\langle f(\bar{k})f^*(\bar{k}') \rangle = \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}')P_f(k) .$$

Usein käytetään tehospektrille myös toista versiota

$$\mathcal{P}_f(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}P_f(k) .$$

Nähdään, että korrelaatiofunktio on vain tehospektrin Fourier-muunnos

$$\xi_f(r) = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_f(k) \frac{\sin(kr)}{kr} .$$

Jos odotusarvo häviää  $\langle f(\bar{x}) \rangle = 0$ , niin edellisistä määritelmistä saadaan kentän  $f$  varianssiksi pisteessä  $\bar{x}$

$$\sigma_f^2 = \langle f^2(\bar{x}) \rangle - \langle f(\bar{x}) \rangle^2 = \langle f^2(\bar{x}) \rangle = \xi_f(r \rightarrow 0) = \int_0^\infty \mathcal{P}_f(k) d\ln k .$$

Tehospektrin skaalariippuvuutta karakterisoi spektraali-indeksi [14]

$$n_f(k) - 1 = \frac{d\ln \mathcal{P}_f}{d\ln k} . \quad (81)$$

Jos  $n_f(k) \equiv 1$ , niin spektri  $\mathcal{P}_f$  on täysin skaalainvariantti. Jos taasen  $n_f(k)$  ei riipu skaalasta  $k$ , spektri saadaan potenssilaista

$$\mathcal{P}_f(k) = A_f \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_f-1}, \quad (82)$$

missä  $k_*$  on referenssiskaala ja  $A_f = \mathcal{P}_f(k_*)$  amplitudi referenssiskaalassa. Yleisemmin määritellään parametri

$$\alpha_f = \frac{dn_f(k)}{d \ln k}, \quad (83)$$

joka kertoo spektraali-indeksin skaalariippuvuuden.

Historiallisista syistä tensorimodeille käytetään määritelmää [14]

$$n_T(k) = \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k}, \quad (84)$$

jolloin skaalariippumattoman indeksin tapauksessa spektri on

$$\mathcal{P}_T(k) = A_T \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_T} \quad (85)$$

ja parametri  $\alpha_T$  määritellään kuten lausekkeessa (83).

Tärkeän erikoistapauksen muodostavat gaussiset stokastiset kentät  $g(\bar{x})$ . Niiden todennäköisyysfunktio  $\mathbb{P}(g)$  kenttäavaruudessa  $g$  on gaussista muotoa [11]

$$\mathbb{P}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_g} \exp\left(-\frac{g^2}{2\sigma_g^2}\right).$$

Gaussisilla kentillä on se ominaisuus, että korkeammat korrelaatiofunktiot määräytyvät suoraan kaksipistefunktiosta  $\xi_g(r)$ . Kaikki parittomat korrelaattorit häviävät ja parilliset saadaan summana kaksipistefunktioiden tulojen permutaatioista [11]

$$\begin{aligned} \langle g_{\bar{k}_1} \cdots g_{\bar{k}_{2n+1}} \rangle &= 0 \\ \langle g_{\bar{k}_1} \cdots g_{\bar{k}_{2n}} \rangle &= \sum \prod \langle g_{\bar{k}_i} g_{\bar{k}_j} \rangle. \end{aligned}$$

Summassa  $2n$  kenttää jaetaan kaikkien mahdollisten erilaisten parien tuloiksi siten, että jokainen termi summassa on  $n:n$  parin tulo. Esimerkiksi nelipistefunktio on nyt

$$\langle g_{\bar{k}_1} g_{\bar{k}_2} g_{\bar{k}_3} g_{\bar{k}_4} \rangle = \langle g_{\bar{k}_1} g_{\bar{k}_2} \rangle \langle g_{\bar{k}_3} g_{\bar{k}_4} \rangle + \langle g_{\bar{k}_1} g_{\bar{k}_3} \rangle \langle g_{\bar{k}_2} g_{\bar{k}_4} \rangle + \langle g_{\bar{k}_1} g_{\bar{k}_4} \rangle \langle g_{\bar{k}_2} g_{\bar{k}_3} \rangle.$$

Vastaava tulos korrelaattoreille tunnetaan kvanttikenttäteoriassa Wickin teoreeman, jonka avulla lasketaan vakuuiodotusarvoja [19]. Edelliset määritelmät voidaankin yleistää kvanttikentille korvaamalla klassinen odotusarvo  $\langle \dots \rangle$  vakuuiodotusarvolla  $\langle 0 | \dots | 0 \rangle$ . Esimerkiksi kvantitetun skalaarikentän  $\hat{f}$  korrelaatiofunktio on [14]

$$\xi_f(r) = \langle 0 | \hat{f}(t, \bar{x}) \hat{f}(t, \bar{x}') | 0 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} |f_k|^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \equiv \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_f(k) \frac{\sin(kr)}{kr},$$

josta voidaan lukea tehospektri

$$\mathcal{P}_f(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |f_k|^2. \quad (86)$$

Tässä  $f_k$  on kentän  $\hat{f}$  Fourier-kehityksessä esiintyvä moodifunktio.

## 5.2 Fluktuaatiot inflaation aikana

Heisenbergin epätarkkuusperiaatteen nojalla klassisessa inflatonkentässä tapahtuu kvanttifluktuaatioita mikroskooppisella tasolla. Tutkitaan seuraavaksi, kuinka mielivaltaisen skalaarikentän  $\chi$  kvanttifluktuaatiot käyttäytyvät inflaation aikana. Koska  $\chi$  on mielivaltainen kenttä, pätee saadut tulokset sekä yhden kentän että monen kentän inflaatiomalleissa. Erityisesti nähdään, että kaikkien kevyiden kenttien fluktuaatiot jäätyvät niiden siirtyessä superhorisonttiin  $k \gg aH$ .

### 5.2.1 Massaton kenttä de Sitter -rajalla

Tarkastellaan massatonta vapaata skalaarikenttää  $\chi$ , jonka Lagrangen tiheys on  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi$ . Tällöin sen liikeyhtälö on [14]

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{\nabla^2}{a^2}\chi = 0.$$

Kenttä  $\chi$  kvantisoidaan tekemällä Fourier-ekspansio ja korottamalla Fourier-kertoimet operaattoreiksi [14]

$$\chi(t, \bar{x}) \rightarrow \hat{\chi}(t, \bar{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} (\chi_k(t)\hat{a}_{\bar{k}}e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} + \chi_k^*(t)\hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}}), \quad (87)$$

missä luomis- ja tuhoamisoperaattorit toteuttavat kommutaatiorelaation  $[\hat{a}_{\bar{k}}, \hat{a}_{\bar{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\bar{k} - \bar{k}')$  sekä funktiot  $\chi_k$  toteuttavat liikeyhtälön

$$\ddot{\chi}_k + 3H\dot{\chi}_k + \frac{k^2}{a^2}\chi_k = 0.$$

Konjugaattiliikemääräksi määritellään  $\pi(t, \bar{x}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\chi}} = \dot{\chi}$ , jolloin kenttäoperaattoreiden kommutaatiorelaatio on  $[\hat{\chi}(t, \bar{x}), \hat{\pi}(t, \bar{x}')] = i\delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{x}')$ .

Määritellään apukenttä  $v = a\chi$ , jolloin liikeyhtälö konformiajan avulla lausuttuna on

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)v_k = 0. \quad (88)$$

Kenttä  $v$  saa siis efektiivisen ajasta riippuvan massan  $m^2 = -\frac{a''}{a}$ . de Sitter -rajalla skaalatekijä on  $a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}$  ja liikeyhtälöksi (88) tulee

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)v_k = 0, \quad (89)$$

jonka ratkaisu on [14]

$$v_k(\tau) = A(k)e^{-ik\tau} \left(1 + \frac{1}{ik\tau}\right) + B(k)e^{ik\tau} \left(1 - \frac{1}{ik\tau}\right).$$

Funktioiden  $A(k)$  ja  $B(k)$  selvittämiseen tarvitaan alkuehdot, joiden valitseminen vastaa teorian vakuumin  $\hat{a}|0\rangle = 0$  valintaa.

Comoving-moodien subhorisonttiehto  $k \gg aH$  vastaa de Sitter-inflaatiossa hyvin varhaista maailmankaikkeutta  $\tau \rightarrow -\infty$  tai  $|k\tau| \gg 1$ . Tällöin liikeyhtälö (89) redusoituu harmonisen oskillaattorin yhtälöksi  $v_k'' + k^2 v_k = 0$ , missä taajuus  $k$  on ajasta riippumaton. Tällä rajalla aika-avaruuden voi approksimoida laakeaksi Minkowskin avaruudeksi ja vakuumiksi voidaan määritellä Hamiltonin operaattorin  $\hat{H}$  perustila, joka on yksikäsitteinen. Edellisen motivoimina asetetaan ratkaisuille ehto [7]

$$v_k \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}. \quad (90)$$

Kyseinen valinta tunnetaan Bunch-Davies vakuumina. Yksikäsitteistä valintaa ei voi tehdä, jos taajuus on ajasta riippuva  $k = k(\tau)$ , sillä hetkellä  $\tau_0$  määritelty vakuumi  $|0\rangle_{\tau_0}$  ei välttämättä ole enää minimienergian tila myöhemmällä ajanhetkellä  $|0\rangle_{\tau_1} \neq |0\rangle_{\tau_0}$ ,  $\tau_1 > \tau_0$  [10].

Alkuehdon (90) toteuttava ratkaisu on [7]

$$v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right). \quad (91)$$

Superhorisonttiehto  $k \ll aH$  on de Sitter -inflaatiossa  $|k\tau| \ll 1$ . Tällöin kentän  $\chi = \frac{v}{a}$  amplitudi on ajan suhteen vakio

$$\chi_k \xrightarrow{k \ll aH} \frac{iH}{\sqrt{2k^3}}.$$

Tällöin tehospetriksi saadaan

$$\mathcal{P}_\chi(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\chi_k|^2 \xrightarrow{k \ll aH} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2.$$

Koska kentän  $\chi$  Fourier-komponentit  $\chi_k$  jäävät superhorisontissa, riittää laskea niiden arvo horisontin ylityksessä  $k = aH$

$$\mathcal{P}_\chi(k) = \frac{\mathcal{P}_v(k)}{a^2} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \Big|_{k=aH}, \quad m_\chi = 0. \quad (92)$$

de Sitter -ekspansiossa  $H$  on vakio, joten tehospetri on skaalariippumaton.

## 5.2.2 Massiivinen kenttä de Sitter -rajalla

Edellinen tarkastelu voidaan yleistää lisäämällä Lagrangen tiheyteen massatermi  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2$ . Apukentän  $v = a\chi$  liikeyhtälöksi tulee [14]

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{1}{\tau^2}\left(v_\chi^2 - \frac{1}{4}\right)\right)v_k = 0, \quad v_\chi^2 = \frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2}. \quad (93)$$

Jos  $v_\chi$  on reaalinen eli kentän massa on pieni, Bunch-Davies -vakuumiehdon (90) toteuttava ratkaisu on [14]

$$v_k = \sqrt{\frac{-\pi\tau}{4}} i^{(v_\chi+1/2)} H_{v_\chi}^{(1)}(-k\tau), \quad v_\chi^2 \geq 0, \quad (94)$$

missä  $H_{\nu_\chi}^{(1)}$  on ensimmäisen lajin Hankelin funktio.  
Superhorisontissa kentän  $\chi$  amplitudi on [14]

$$|\chi_k| \xrightarrow{k \ll aH} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} 2^{\nu_\chi - 3/2} \frac{\Gamma(\nu_\chi)}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{k}{aH}\right)^{3/2 - \nu_\chi},$$

joten tehospektriksi tulee

$$\mathcal{P}_\chi(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\chi_k|^2 \stackrel{m_\chi \ll H}{\approx} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{2m_\chi^2/3H^2}. \quad (95)$$

Massatermin vuoksi tehospektri riippuu nyt sekä skaalasta että ajasta. Kevyille kentille riippuvuus on pientä ja amplitudi on samaa suuruusluokkaa kuin massattoman kentän tapauksessa. Tällöin tehospektrin superhorisonttiarvoa voi approksimoida laskeamalla sen arvo horisontin ylityksessä  $k = aH$ .

Jos kenttä on hyvin massiivinen eli  $\nu_\chi$  on imaginaarinen, superhorisontin tehospektri vähenee kentän massan kasvaessa ja on voimakkaasti suppressoitu suurilla aallonpituuksilla  $k^{-1} \gg (aH)^{-1}$  [14]

$$\mathcal{P}_\chi(k) \approx \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{H}{m_\chi}\right) \left(\frac{k}{aH}\right)^3.$$

### 5.2.3 Slow-roll -inflaatio

Edellisissä tarkasteluissa oletettiin ideaalinen de Sitter -ekspansio, jossa  $H$  on vakio. Tästä seurasi kevyiden kenttien lähes skaalariippumaton ja aikariippumaton tehospektri superhorisontissa. Slow-roll -inflaatiossa Hubblen parametri riippuu kuitenkin ajasta  $\dot{H} = -\epsilon H^2$ . Tämä aiheuttaa skaalariippuvuuden kevyen kentän tehospektriin, sillä  $\frac{d \ln H_k}{d \ln k} = -\epsilon \Rightarrow H_k \propto k^{-\epsilon}$ , joten  $\mathcal{P}_\chi(k) \propto H_k^2 \propto k^{-2\epsilon}$ . Koska  $\epsilon \geq 0$ ,  $n_\chi < 1$  ja spektriä sanotaan punaiseksi, sillä se saa suurimman kontribuution pitkistä aallonpituuksista. Vastaavasti spektriä sanotaan siniseksi, jos  $n_\chi > 1$ .

Koska  $\dot{\epsilon} = \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon\delta)$ , ensimmäisessä kertaluvussa slow-roll -parametrien suhteen voidaan approksimoida  $\epsilon = \text{vakio}$ . Skaalatekijän ja konformiajan välillä on relaatio  $a(\tau) = \frac{1}{H\tau(\epsilon-1)}$ , jolloin kentän  $v = a\chi$  liikeyhtälö on samaa muotoa kuin (93) parametrilla [14]

$$\nu_\chi^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon - \frac{m_\chi^2}{H^2}.$$

Kevyelle kentälle tehospektri saadaan lausekkeesta (95) ja vastaava spektraali-indeksi on [14]

$$n_\chi - 1 = 3 - 2\nu_\chi \approx 2 \left( \frac{m_\chi^2}{3H^2} - \epsilon \right).$$

### 5.3 Metriikan ja energia-liikemäärä -tensorin perturbaatiot

Inflaation aikana aika-avaruuden dynamiikkaa dominoi homogeeninen klassinen kenttä  $\varphi(t)$ . Kvanttimekaniikan mukaan tässäkin kentässä täytyy esiintyä fluktuaatioita  $\delta\varphi(t, \bar{x})$  hyvin pienessä mittakaavassa. Jotta taustan homogeenisuus ei häiriintyisi, fluktuaatioiden odotusarvon on oltava nolla  $\langle \delta\varphi(t, \bar{x}) \rangle = 0$ . Tarkastellaan ensin, mitä perturbaatiot saavat aikaan universumin dynamiikan kannalta.

Edellisen motivoimina jaetaan inflatonkenttä homogeeniseen taustaan ja epä-homogeeniseen perturbaatioon  $\varphi(t, \bar{x}) = \bar{\varphi}(t) + \delta\varphi(t, \bar{x})$ , missä  $\bar{\varphi}(t)$  toteuttaa homogeenisen yhtälön (36). Tämä indusoi häiriöitä skalaarikentän energia-liikemäärä -tensoriin (29), mikä puolestaan aiheuttaa perturbaatioita metriikkaan Einsteinin yhtälön nojalla. Koska liikeyhtälö  $g^{\alpha\mu}\nabla_\alpha\nabla_\mu\varphi - V'(\varphi) = 0$  riippuu metriikasta, takaisin-kytkennän  $\delta\varphi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta\varphi$  seurauksena kentän  $\varphi$  häiriöt vaikuttavat sen omaan evoluutioon.

Skalaarikentän  $\varphi$  määräämän energia-liikemäärä -tensorin häiriöt saadaan perturboimalla lauseketta (29) [14]

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} = & 2\partial_{(\mu}\bar{\varphi}\partial_{\nu)}\delta\varphi - \left( \frac{1}{2}\bar{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\varphi}\partial_\beta\bar{\varphi} + V \right) \delta g_{\mu\nu} \\ & - \bar{g}_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\varphi}\partial_\beta\bar{\varphi} + \bar{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\delta\varphi\partial_\beta\bar{\varphi} + V'\delta\varphi \right). \end{aligned}$$

Nähdään, että anisotrooppista stressiä ei esiinny yhden skalaarikentän tapauksessa. Tekemällä metriselle tensorille  $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$  SVT-hajotelma häiriöiden eri komponentit ovat [14]

$$a^2\delta T^0_0 = -\bar{\varphi}'\delta\varphi' - a^2\frac{dV}{d\bar{\varphi}}\delta\varphi + A\bar{\varphi}'^2 = -\delta\rho \quad (96)$$

$$a^2\delta T^0_i = -\partial_i(\bar{\varphi}'\delta\varphi) \quad (97)$$

$$a^2\delta T^i_0 = \partial^i(\bar{\varphi}'\delta\varphi + B\bar{\varphi}'^2) + \hat{B}^i\bar{\varphi}'^2 \quad (98)$$

$$a^2\delta T^i_j = \left( \bar{\varphi}'\delta\varphi' - \bar{\varphi}'^2A - a^2\frac{dV}{d\bar{\varphi}}\delta\varphi \right) \delta^i_j = \delta p\delta^i_j. \quad (99)$$

Ainoat mittainvariantit suureet voidaan muodostaa nyt häiriön  $\delta\varphi$  eri kombinaatioista metriikan häiriöiden kanssa. Yhden skalaarikentän tapauksessa esiintyy siis vain yksi riippumaton skalaariperturbaatio. Koska koordinaatistomuunnoksessa (52)  $\delta\varphi \rightarrow \delta\varphi - \bar{\varphi}'T$ , saadaan mittainvariantit suureet [14]

$$\delta\varphi^{(gi)} = \delta\varphi + \bar{\varphi}'(B - E') \quad (100)$$

$$Q = \delta\varphi - \bar{\varphi}'\frac{C}{\mathcal{H}} = \delta\varphi^{(gi)} + \bar{\varphi}'\frac{\Psi}{\mathcal{H}}. \quad (101)$$

Tässä  $\delta\varphi^{(gi)}$  on skalaarikentän perturbaatio Newtonilaisessa mitassa ja  $Q$  perturbaatio spatiaalisesti laakeassa mitassa. Lisäksi comoving-kaarevuusperturbaatio  $\mathcal{R} = C + \mathcal{H}(B + v)$  voidaan nyt lausua häiriön  $\delta\varphi$  avulla. Vertaamalla energia-liikemäärä -tensoreiden  $0i$ -komponentteja (60) ja (97) saadaan

$$B + v = -\frac{\bar{\varphi}'\delta\varphi}{a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} = -\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'},$$

missä on käytetty taustakentälle relaatiota  $\dot{\bar{\varphi}}^2 = \bar{\rho} + \bar{p}$ . Comoving-ehto inflaation aikana on  $\delta\varphi = 0$  ja kaarevuusperturbaatio on siten

$$\mathcal{R} = C - \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} = -\frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} Q. \quad (102)$$

Slow-roll -inflaation aikana myös vakioenergiatiheyden mitan kaarevuusperturbaatio  $\zeta = -C + \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}$  määräytyy häiriöstä  $\delta\varphi$ . SRA:n mukaan  $\bar{\rho} \approx V(\bar{\varphi})$ , joten  $\delta\rho = V'(\bar{\varphi})\delta\varphi$ . Siispä pätee  $\zeta = -C + \mathcal{H} \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} = -\mathcal{R}$ . Slow-roll -inflaatiossa riittää tällöin tarkastella vain toisen kaarevuusperturbaation kehitystä.

Häiriöiden kehityksen määrää Einsteinin yhtälö (70). Kuten kappaleessa 3 todettiin, kosmologisessa häiriöteoriassa evoluutioyhtälöt skalaari-, vektori- ja tensorimoodeille eivät sekoitu ensimmäisessä kertaluvussa. Koska skalaarikentän energia-liikemäärä -tensori ei sisällä vektoriaalisia lähteitä, ainoa vektoriperturbaatio on metriikasta tuleva  $\hat{\Phi}^i$ . Yhtälön (78) nojalla  $\hat{\Phi}^i \propto a^{-2}$ , joten vektoriperturbaatioita ei käytännössä esiinny lainkaan enää inflaation lopussa. Tulos on täysin riippumaton inflaatiomallista.

Tensorimoodeille saadaan evoluutioyhtälö (79) tapauksessa  $\hat{\Pi}_{ij} = 0$ . Kiinnostavinta on tietää ratkaisujen käytös superhorisontissa. Kun  $k \ll aH$ , voidaan gradienttitermi jättää pois, jolloin evoluutioyhtälö redusoituu muotoon  $\hat{E}_{ij}^{k''} + 2\mathcal{H}\hat{E}_{ij}^{k'}$  = 0. Tämän yhtälön dominoiva ratkaisu on  $\hat{E}_{ij}^k = \text{vakio}$ , joten tensorimoodit jäätyvät siirtyessään superhorisonttiin.

Skalaariperturbaatioista kiinnostavin on yhtälö kentän häiriölle  $\delta\varphi$ . Tämä saadaan perturboimalla liikeyhtälöä  $\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi - V'(\varphi) = 0$ . Mittainvariantin suureen  $Q$  avulla lausuttuna liikeyhtälö on [14]

$$Q'' + 2\mathcal{H}Q' - \nabla^2 Q + a^2 \frac{d^2 V}{d\varphi^2} Q = \bar{\varphi}' \left( X' - \frac{1}{\mathcal{H}} \nabla^2 \Psi \right), \quad (103)$$

missä  $X = \Phi + \Psi + (\Psi/\mathcal{H})'$ . Itse asiassa  $\delta T^i_j \propto \delta^i_j$ , joten Einsteinin yhtälön komponentin  $\delta G^i_j, i \neq j$ , nojalla Bardeenin potentiaalien täytyy olla samat  $\Phi = \Psi$ .

Yleensä kentän  $\varphi$  häiriöitä käsitellään comoving-mitan kaarevuusperturbaation  $\mathcal{R}$  avulla, sillä se säilyy superhorisontissa. Tällöin tehospektri  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  pysyy muuttumattomana niin kauan, kun ehto  $k \ll aH$  on voimassa. Näin ollen se sisältää tärkeää informaatiota varhaisista inflatonikentän fluktuaatioista. Tässä täytyy kuitenkin olettaa, että ei-adiabaattisia häiriöitä ei synny inflaation jälkeen. Voi esimerkiksi olla niin, että inflaation aikana esiintyy energeettisesti subdominantteja kenttiä, joista myöhemmin inflaation jälkeen tulee tärkeitä. Eräs tällainen tapaus on ns. kurvatonimalli, jossa varhaiset perturbaatiot generoi inflatonikentän sijaan jokin muu kevyt skalaarikenttä  $\chi$ . Kurvatonimalliin voi tutustua tarkemmin lähteiden [11, 14, 20–22] avulla.

Osoitetaan seuraavaksi  $\mathcal{R}$ :n säilyminen superhorisontissa. Suoraan määritelmästä derivaataksi saadaan

$$\mathcal{R}' = -\frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} \left( Q' + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}} Q - \frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'} Q \right).$$

Muistetaan, että Einsteinin yhtälön komponentit  $\delta G^0_0$  ja  $\delta G^0_i$  antavat lausekkeen comoving-mitan tiheyskontrastille  $\delta^C$  (ks. yhtälö (73))

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G_N a^2 \bar{\rho} \delta^C.$$

Energiatiheyden perturbaatio on  $a^2\delta T^0_0 = -\delta\rho$ , joten

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\delta^C &\equiv \delta\rho^C = \delta\rho - \bar{\rho}'\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'} = \frac{1}{a^2}(\bar{\varphi}'\delta\varphi' - \bar{\varphi}'^2A) + V'\delta\varphi - \frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}'}\left(\frac{\bar{\varphi}'\bar{\varphi}''}{a^2} - \frac{\bar{\varphi}'^2a'}{a^3} + V'\bar{\varphi}'\right) \\ &\stackrel{C=0}{=} \frac{1}{a^2}(\bar{\varphi}'(Q' - \bar{\varphi}'A) - Q(\bar{\varphi}'' - \mathcal{H}\bar{\varphi}')) ,\end{aligned}$$

missä on siirrytty spatiaalisesti laakeaan mittaan  $C = 0$ . Tässä mitassa metriikan perturbaatio  $A$  voidaan lausua Einsteinin yhtälön komponentin  $\delta G^0_i$  avulla muodossa  $A \stackrel{C=0}{=} \frac{4\pi G_N \bar{\varphi}'}{\mathcal{H}} Q$ . Käyttämällä taustakentälle relaatiota  $4\pi G_N \bar{\varphi}'^2 = -\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 4\pi G_N(\bar{\rho} + \bar{p})a^2$  saadaan lopulta [22]

$$\delta\rho^C = \frac{\bar{\varphi}'}{a^2}\left(Q' + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}}Q - \frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'}Q\right) = -\frac{\bar{\varphi}'}{a^2}\frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\mathcal{R}' . \quad (104)$$

Kaarevuusperturbaatio toteuttaa siis spatiaalisesti laakeassa mitassa yhtälön

$$\mathcal{R}' = -\frac{a^2\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'^2}\delta\rho^C = -\frac{\mathcal{H}}{4\pi G_N \bar{\varphi}'^2}\nabla^2\Psi = -\frac{2}{3\mathcal{H}}\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho} + \bar{p}}\nabla^2\Psi ,$$

missä on käytetty Friedmannin yhtälöä (8) taustauniversumille. Tällöin Fourier-komponenttien yhtälöksi tulee

$$\mathcal{R}'_k = \frac{2\bar{\rho}\mathcal{H}}{3(\bar{\rho} + \bar{p})}\left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^2\Psi_k \xrightarrow{k \ll \mathcal{H}} 0 . \quad (105)$$

Koska  $\mathcal{R}$  on mittainvariantti, pätee saatu tulos missä tahansa mitassa. Siispä yhden kentän inflaatiossa kaarevuusperturbaatio säilyy superhorisonttiskaaloissa. Vastaava tulos ei välttämättä päde enää monen kentän malleissa, kuten esimerkiksi kurvatonimallissa [14, 22].

## 5.4 Perturbaatioiden kvantitus

Äskeisessä tarkastelussa oletettiin perturbaation  $\delta\varphi$  olemassaolo. Seuraavaksi nähdään, että  $\delta\varphi$  syntyy taustakentän  $\bar{\varphi}$  kvanttimekaanisista fluktuaatioista. Tarkoituksena on siis kvantisoida mahdolliset perturbaatiot. Tässä rajoitutaan vain skalaari- ja tensoriperturbaatioihin, sillä vektoriperturbaatiot käytännössä hajoavat pois ennen inflaation loppua.

Edellä perturbaatioiden liikeyhtälö johdettiin taustan liikeyhtälöstä, jolloin taktiikka oli aktio  $\rightarrow$  liikeyhtälö  $\rightarrow$  perturboitu liikeyhtälö. Ekvivalentti ja korkeammissa kertaluvuissa käytännöllisempi tapa on perturboida suoraan aktiota, jolloin strategia on aktio  $\rightarrow$  perturboitu aktio  $\rightarrow$  liikeyhtälö perturbaatioille. Karakterisoidaan inflatonikentän perturbaatioita muuttujalla  $v$ , jonka lauseke on

$$v = aQ = -z\mathcal{R} , \quad z = \frac{a\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}} = M_{pl}a\sqrt{2\epsilon} ,$$

missä parametrin  $z$  määrittelyssä on käytetty yhtälöä (35). Perturboimalla aktiota (27) toiseen kertalukuun ja tarkastelemalla vain skalaarimoodeja saadaan konformisessa ajassa [14]

$$\delta^{(2)}S_s = \frac{1}{2}\int d\tau d^3x \left(v'^2 - (\partial_i v)^2 + \frac{z''}{z}v^2\right) . \quad (106)$$



Aktio (106) antaa liikeyhtälöksi

$$v'' - \left( \nabla^2 + \frac{z''}{z} \right) v = 0 .$$

Saman yhtälön saa lausekkeesta (103) muuttujanvaihdon  $v = aQ$  jälkeen [14].

Seuraavaksi suoritetaan kentälle  $v$  kanoninen kvantisointi Fourier-ekspansioon kautta

$$v(\tau, \bar{x}) \rightarrow \hat{v}(\tau, \bar{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} (v_k(\tau) \hat{a}_{\bar{k}} e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} + v_k^*(\tau) \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}}) , \quad (107)$$

missä moodifunktiot  $v_k$  toteuttavat yhtälön

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0 . \quad (108)$$

Differentiaaliyhtälön (108) alkuehdoksi valitaan Bunch-Davies vakuu (90). Ratkaisusta saadaan kaarevuusperturbaation  $\mathcal{R}$  superhorisontin tehospektri lausekkeella

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\mathcal{R}_k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k}{z} \right|^2 = \frac{\mathcal{P}_v(k)}{|z|^2} \Big|_{k=aH} = \left( \frac{\mathcal{H}}{a\dot{\varphi}'} \right)^2 \mathcal{P}_v(k) \Big|_{k=aH} , \quad (109)$$

missä riittää laskea arvo horisontin ylityksessä  $k = aH$ , sillä  $\mathcal{R}_k \approx$  vakio superhorisontissa.

Tensoriperturbaatioiden tarkastelussa edetään analogisesti. Rajoittumalla pelkkiin tensorimodeihin aktion (27) perturboinnissa saadaan toisessa kertaluvussa [14]

$$\delta^{(2)} S_T = \frac{M_{pl}^2}{8} \int d\tau dx^3 a^2 (h_{ij}'^2 - (\partial_k h_{ij})^2) . \quad (110)$$

Aktion (110) variointi antaa liikeyhtälön (79) tapauksessa  $\hat{\Gamma}_{ij} = 0$ . Lausumalla tensorin  $h_{ij}$  SVT-hajotelman tensoriosa  $\hat{E}_{ij}$  polarisaatiosummana  $\hat{E}_{ij} = \sum_\lambda \hat{E}_\lambda \epsilon_{ij}^\lambda$  ja määrittelemällä  $\mu_\lambda = M_{pl} a \hat{E}_\lambda$  aktio (110) muuttuu muotoon [14]

$$\delta^{(2)} S_T = \frac{1}{2} \sum_\lambda \int d\tau dx^3 \left( \mu_\lambda'^2 - (\partial_i \mu_\lambda)^2 + \frac{a''}{a} \mu_\lambda^2 \right) . \quad (111)$$

Tensorimoodien  $h_{ij}$  aktio saatiin siis redusoitua kahden riippumattoman skalaarikentän  $\mu_\lambda(\tau, \bar{x})$  aktioiden summaksi.

Polarisaatiomoodien kvantitus tehdään kuten skalaarikentille yleensä

$$\mu_\lambda(\tau, \bar{x}) \rightarrow \hat{\mu}_\lambda(\tau, \bar{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} (\mu_{\lambda,k}(\tau) \hat{a}_{\bar{k}} e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} + \mu_{\lambda,k}^*(\tau) \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}}) ,$$

jolloin Fourier-komponentit toteuttavat liikeyhtälön

$$\mu_{\lambda,k}'' + \left( k^2 - \frac{a''}{a} \right) \mu_{\lambda,k} = 0 . \quad (112)$$

Kyseessä on sama yhtälö kuin (88), joten moodit  $\hat{E}_\lambda$  käyttäytyvät massattoman kentän tavoin.

Alkuehdoksi asetetaan Bunch-Davies -vakuumi molemmille polarisaatioille

$$\mu_{\lambda,k} \xrightarrow{k \ll aH} \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau} .$$

Yhtälön (112) ratkaisusta saadaan yhden polarisaatiomoodin  $\hat{E}_\lambda$  tehosppektri

$$\mathcal{P}_{\hat{E}_\lambda} = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{1}{M_{pl}^2} \left| \frac{\mu_{\lambda,k}}{a} \right|^2 .$$

Koska  $h_{ij} = 2\hat{E}_{ij}$ , niin summaamalla polarisaatioiden yli tensoriperturbaatioiden kokonaistehosppektri superhorisontissa on [14]

$$\mathcal{P}_T = \frac{k^3}{2\pi^2} |h_{ij}^k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{8}{M_{pl}^2} \left| \frac{\mu_{\lambda,k}}{a} \right|^2 = \frac{8}{M_{pl}^2} \frac{\mathcal{P}_{\mu_\lambda}(k)}{a^2} \Big|_{k=aH} , \quad (113)$$

missä riittää laskea arvo horisontin ylityksessä  $k = aH$ , sillä  $\hat{E}_{ij}^k =$  vakio superhorisontissa.

## 5.5 Flukтуаatiot slow-roll -inflaatiossa

Jotta yhtälöt (108) ja (112) voisi ratkaista, täytyy selvittää skaalatekijän  $a(\tau)$  ja parametrin  $z(\tau)$  käyttäytyminen. Slow-roll -inflaatiossa, joka oletettiin lauseketta (106) johdettaessa, pätee  $\epsilon \ll 1$ ,  $\epsilon \approx$  vakio ja  $H \approx$  vakio, joten kyseessä on lähes de Sitter-ekspansio. Tällöin voidaan approksimoida

$$a(\tau) \approx -\frac{1}{(1-\epsilon)H\tau} \approx -\frac{1}{H\tau} , \quad \frac{z''}{z} \approx \frac{a''}{a} = \frac{2}{\tau^2} ,$$

jolloin myös kenttä  $\hat{Q} = \frac{\hat{\varphi}}{a}$  käyttäytyy massattoman kentän tavoin. Ratkaisut saadaan lausekkeesta (91) ja tehosppektrit yhtälöstä (92) [7]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{M_{pl}^2} \frac{1}{\epsilon} \Big|_{k=aH} , \quad \mathcal{P}_T(k) = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_{pl}^2} \Big|_{k=aH} . \quad (114)$$

Tehosppektrien avulla määritellään tensori-skalaari -suhde

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)} = 16\epsilon , \quad (115)$$

joka kertoo tensorimoodien suhteellisen voimakkuuden. Tulosta (115) sanotaan usein slow-roll -inflaation konsistenssirelaatioksi. Tensori-skalaari -suhde määrää myös kentän arvon muutoksen inflaation aikana [7]

$$r = \frac{8}{M_{pl}^2} \left( \frac{d\varphi}{dN} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{\Delta\varphi}{M_{pl}} \approx \sqrt{\frac{r}{8}} \Delta N .$$

Suuri  $r$ :n arvo vastaa siten suuren kentän inflaatiota  $\Delta\varphi > M_{pl}$ .

Tehospektrin skaalariippuvuutta karakterisoi spektraali-indeksi, joka on määritelty lausekkeilla (81) ja (84). Ketjusäännön nojalla

$$\frac{d\ln\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\ln k} = \frac{d\ln\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{dN} \frac{dN}{d\ln k} = \left( 2 \frac{d\ln H}{dN} - \frac{d\ln \epsilon}{dN} \right) \frac{dN}{d\ln k}.$$

Käyttämällä määritelmiä ja ehtoa  $k = aH$  horisontin ylitykselle saadaan skalaari- ja tensorimoodien indekseiksi [7]

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 2\delta - 4\epsilon \quad (116)$$

$$n_T = -2\epsilon. \quad (117)$$

Indeksien skaalariippuvuudet määritellään yhtälön (83) avulla. Tässä tapauksessa ne ovat [14]

$$\alpha_{\mathcal{R}} = -4\epsilon(\epsilon - \delta) - 2\xi, \quad \alpha_T = -4\epsilon(\epsilon - \delta), \quad \xi = \frac{\dot{\epsilon} - \delta}{H}. \quad (118)$$

Ensimmäisessä kertaluvussa slow-roll -parametrien suhteen  $n_{\mathcal{R}} \approx$  vakio ja  $n_T \approx$  vakio, joten tehospektrejä voi approksimoida potenssilakien (82) ja (85) avulla.

Tulokset voidaan ilmaista myös potentiaalın  $V$  sekä sen muodosta kertovien parametrien  $\epsilon_V$  ja  $\eta_V$  avulla. Muistetaan, että SRA:ssa  $\epsilon \approx \epsilon_V$ ,  $\delta \approx \eta_V - \epsilon_V$  ja  $H^2 \approx \frac{1}{3M_{pl}^2} V$ .

Tällöin

$$n_{\mathcal{R}} - 1 = 2\eta_V - 6\epsilon_V \quad (119)$$

$$n_T = -2\epsilon_V \quad (120)$$

$$r = 16\epsilon_V = -8n_T \quad (121)$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{M_{pl}^4} \frac{1}{\epsilon_V} \Big|_{k=aH}, \quad \mathcal{P}_T(k) = \frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{M_{pl}^4} \Big|_{k=aH}. \quad (122)$$

Tensorimoodien tehospektrin mittaaminen antaisi tärkeää tietoa inflaation aikaisesta energiaskaalasta  $\mathcal{P}_T \propto \frac{H^2}{M_{pl}^2}$ . Spektraali-indeksit puolestaan kertoisivat potentiaalın muodon toiseen kertalukuun. Kaarevuusperturbaatiolle indeksi on jo mitattu  $n_{\mathcal{R}} = 0.968 \pm 0.006$ , mutta tensorimoodille on saatu ainoastaan yläraja  $r < 0.11$  (95 % luotamustaso) [12]. Relation (121) testaaminen havainnoilla antaisi osviittaa siitä, esiintyikö slow-roll -inflaation aikana useampi kuin yksi skalaarikenttä.

Hubblen parametri ei kuitenkaan ole täysin vakio slow-roll -inflaation aikana, vaan sen aikakehitys riippuu parametrissa  $\epsilon$  yhtälön  $\dot{H} = -H^2\epsilon$  mukaisesti. Tarkemmassa analyysissä funktiot  $a(\tau)$  ja  $z(\tau)$  lausutaan inflaatioparametrien avulla [14]

$$\frac{z''}{z} = \mathcal{H}^2(2 + 2\epsilon - 3\delta + \delta^2 - \epsilon\delta + \xi), \quad \frac{a''}{a} = \mathcal{H}^2(2 - \epsilon),$$

jotka ovat eksakteja tuloksia. Ensimmäisessä kertaluvussa  $\mathcal{H} = -\frac{1}{\tau}(1 + \epsilon)$ , jolloin saadaan ekspansiot

$$\frac{z''}{z} \approx \frac{2 + 6\epsilon - 3\delta}{\tau^2}, \quad \frac{a''}{a} \approx \frac{2 + 3\epsilon}{\tau^2}.$$

Skalaarimoodien yhtälöksi tulee

$$v_k'' + \left( k^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\tau^2} \right) v_k = 0, \quad \nu = \frac{3}{2} + 2\epsilon - \delta,$$

joten  $\hat{Q}$  käyttäytyy kuten massiivinen kenttä, jonka massa on  $m^2 = (3\delta - 6\epsilon)H^2$ . Nyt  $v^2 \geq 0$ , joten ratkaisun antaa lauseke (94) ja tehospetriksi tulee lopulta [14]

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{M_{pl}^2 \epsilon} (1 - 2(2C + 1)\epsilon + 2C\delta) \left(\frac{k}{aH}\right)^{2\delta - 4\epsilon} \\ &\approx \frac{1}{8\pi^2} \frac{H^2}{M_{pl}^2 \epsilon} \left[1 - 2(2C + 1)\epsilon + 2C\delta + (2\delta - 4\epsilon)\ln\left(\frac{k}{aH}\right)\right] \end{aligned} \quad (123)$$

$$\approx \frac{1}{8\pi^2} (1 - 2(2C + 1)\epsilon + 2C\delta) \left(\frac{H^2}{M_{pl}^2 \epsilon}\right) \Big|_{k=aH}, \quad (124)$$

missä  $C = \gamma_E + \ln 2 - 2$  ja  $\gamma_E \approx 0.5772$  on Eulerin vakio. Yleiselle eksponenttifunktiolle on käytetty approksimaatiota  $a^x \approx 1 + \ln a \cdot x$ ,  $x \ll 1$ .

Tensorimoodien yhtälö on sama kuin skalaarimoodilla, mutta parametrilla  $\nu = \frac{3}{2} + \epsilon$ . Tehospektri on tällöin [14]

$$\mathcal{P}_T \approx \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_{pl}^2} \left[1 - 2(C + 1)\epsilon - 2\epsilon \ln\left(\frac{k}{aH}\right)\right] \quad (125)$$

$$\approx \frac{2}{\pi^2} (1 - 2(C + 1)\epsilon) \left(\frac{H^2}{M_{pl}^2}\right) \Big|_{k=aH}. \quad (126)$$

Skalaari- ja tensoriperturbaatiot toteuttavat tässäkin tapauksessa relaatiot (119) ja (120). Jos lisäksi slow-roll -parametrit ovat suunnilleen samat  $\delta \approx \epsilon$ , myös yhtälö (121) toteutuu. Yhtälöistä (123) ja (125) nähdään, että korjaukset yhtälössä (114) esiintyviin tehospetreihin ovat suppressoituja parametreilla  $\delta$  ja  $\epsilon$ , jotka slow-roll -inflaatiossa oletetaan pieniksi.

## 5.6 Perturbaatioiden luonne

Inflatonikentän generoimilla perturbaatioilla on kolme tärkeää ominaisuutta, joita voidaan verrata havaintoihin. Yhden kentän slow-roll -mallit ennustavat, että superhorisontin perturbaatiot ovat [14]

- adiabattisia
- gaussisia
- lähes skaalainvariantteja.

Slow-roll -parametrien pienuudesta johtuen Hubblen parametri on lähes vakio inflaation aikana. Tehospettrin horisonttiarvoa approksimoitiin arvolla horisontin ylityksessä  $k = aH$ , sillä skalaariperturbaatio  $\mathcal{R}$  ja tensoriperturbaatio  $\hat{E}_{ij}$  jäävät siirtyessään superhorisonttiin. Ideaalisen de Sitter -ekspansion aikana  $H = \text{vakio}$ , jolloin horisontin ylityksen aikaan Hubblen parametri on sama kaikille skaaloille ja spektri on siten skaalainvariantti.

Pieni aikariippuvuus  $H$ :ssa aiheuttaa tehospetriin heikon skaalariippuvuuden. Suurimmat skaalat poistuvat horisontista ensimmäisenä. Koska Hubblen parametri pienenee ajan kuluessa, tehospektri kasvaa skaalan koon mukana.  $H$ :n aikariippuvuus

tekee siten spektristä punaisen. Tehospektrin skaalariippuvuus on kuitenkin slow-roll -parametrien suppressoima, kuten spektraali-indeksien lausekkeista (119) ja (120) nähdään.

Yhtälön (105) nojalla kaarevuusperturbaatio säilyy superhorisontissa. Kappaleessa 3 nähtiin yhtälön (76) kautta, että  $\mathcal{R}$ :n säilyminen on kytköksissä entropiaperturbaatioon  $\Gamma$ , joka kertoo, ovatko häiriöt adiabaattisia vai ei-adiabaattisia. Sama pätee myös inflaation aikana. Energia-liikemäärä -tensorin häiriöistä  $\delta T^0_0$  ja  $\delta T^i_j$  nähdään, että energiatiheys- ja paineperturbaatio ovat samat comoving-mitassa  $\delta\rho - \delta p = 2a^2 V' \delta\varphi \stackrel{\delta\varphi=0}{=} 0$ . Tässä mitassa mittainvariantin suureen  $\Gamma$  lauseke on

$$\Gamma = \frac{(1 - c_s^2)\delta\rho}{\bar{p}} = \frac{(1 - c_s^2)\delta\rho^C}{\bar{p}}, \quad (127)$$

missä  $\delta\rho^C \equiv \bar{\rho}\delta^C = \delta\rho - \bar{\rho}'\frac{\delta\varphi}{\bar{\varphi}}$  on mittainvariantti comoving-mitan energiatiheden perturbaatio. Mittainvarianssin nojalla relaatio (127) pätee kaikissa mitoissa. Kun siirytään spatiaalisesti laakeaan mittaan, saadaan (ks. lauseke (104))

$$\Gamma = \frac{(1 - c_s^2)\delta\rho^C}{\bar{p}} \stackrel{c=0}{=} -\frac{2V'}{\bar{\rho}'\bar{p}} \frac{\bar{\varphi}'^2}{a^2\mathcal{H}} \mathcal{R}' \xrightarrow{k \ll \mathcal{H}} 0. \quad (128)$$

Jälleen mittainvarianssin nojalla yhtälö (128) pätee missä tahansa mitassa. Siispä yhden kentän inflaatio tuottaa superhorisonttiin adiabaattisia perturbaatioita. Tämän vuoksi isokurvatuurifluktuaatioita, jotka määriteltiin lausekkeella (69), ei synny  $S_{IJ} = 0$ . Monen kentän inflaation tapauksessa edellinen ei välttämättä pidä enää paikkaansa [22].

Gaussisuus liittyy siihen, että kentän  $\varphi$  perturbaatioita on käsitelty lineaarisen häiriöteorian avulla. Kaikki ensimmäistä kertalukua korkeammat termit oletetaan pieniksi. Yhden kentän tapauksessa kentän  $\delta\varphi$  itseiskytkennät ovat slow-roll -suppressoituja [11]. Tämän seurauksena  $\delta\varphi$  on lähes vapaa kenttä, jolloin sen Fourier-komponenttien  $\delta\varphi_k$  välillä ei ole kytkentää ja niitä voi pitää toisistaan riippumattomina satunnaismuuttujina [11]. Todennäköisyysteorian keskeisen raja-arvolauseen mukaan riippumattomien satunnaismuuttujien aritmeettinen keskiarvo lähestyy gaussista jakaumaa, kun satunnaismuuttujien lukumäärä kasvaa rajatta [18]. Tämä pätee riippumatta siitä, mitä jakaumaa kukin yksittäinen satunnaismuuttuja noudattaa. Koska inflatonikentän perturbaatio  $\delta\varphi(\tau, \bar{x})$  on Fourier-integraali (summa) riippumattomista moodeista  $\delta\varphi_k$ , perturbaatioiden spatiaalinen jakauma on gaussinen.

Koska gaussisuuden takia eri Fourier-moodit eivät korreloi toistensa kanssa, perturbaatioiden statistiset ominaisuudet määräytyvät kaksipistefunktioista  $\langle \delta\varphi_k \delta\varphi_{k'} \rangle$ . Primordiaalisten fluktuaatioiden kaikki informaatio saadaan siten mittaamalla tehospektri  $\mathcal{P}_{\delta\varphi}(k)$ .

Gaussisten perturbaatioiden tärkeä ominaisuus on se, että ne säilyvät gaussisina lineaarisessa kehityksessä [18]. Toisin sanoen, jos satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, niin myös  $f(X)$  noudattaa normaalijakaumaa, kun  $f$  on lineaarikuvaus. Tällöin ne skaalat, jotka eivät ole vielä siirtyneet epälineaariseen evoluutioon, sisältävät informaatiota varhaisten perturbaatioiden gaussisesta luonteesta. Pienemmissä skaaloissa painovoima on tehnyt kehityksestä jo epälineaarista ja tuhonnut mahdolliset gaussiset alkuehdot.

Perturbaatioiden ei-gaussisuus ilmenee vasta häiriöteorian toisessa kertaluvussa. Ei ole yksikäsitteistä tapaa määritellä ei-gaussisuutta, sillä on vain yksi tapa olla

gaussinen, mutta käytännössä loputon määrä tapoja olla ei-gaussinen muuttuja. Koska fysiikassa halutaan kuitenkin verrata ennusteita havaintoihin, täytyy poikkeavuutta karakterisoida jollain tavalla. Eräs tapa on lokaali ei-gaussisuus, jossa kaarevuusperturbaatio kehitetään sarjaksi gaussisen muuttujan  $\mathcal{R}_g$  suhteen [11]

$$\mathcal{R}(\bar{x}) = \mathcal{R}_g(\bar{x}) + \frac{3}{5}f_{NL}\mathcal{R}_g^2(\bar{x}) . \quad (129)$$

Muitakin määritelmiä ei-gaussisuudelle on olemassa ja niihin voi tarkemmin tutustua lähteiden [10], [11] ja [24] avulla. Slow-roll -inflaatio ennustaa, että gaussiselle perturbaatiolle  $\delta\varphi$  pätee  $\frac{3}{5}f_{NL} = \epsilon_V - \frac{1}{2}\eta_V$  [11]. Poikkeavuus gaussisuudesta on pientä, sillä slow-roll -inflaatiossa potentiaalin täytyy olla hyvin laakea ja siten kentän itseiskyt-kennät ovat heikkoja.

Viimeisenä on tärkeää huomata se, että inflatonkentän kvanttimekaaniset häiriöt muuttuvat klassisiksi perturbaatioiksi niiden ylittäessä horisontin. Kenttä  $\hat{\varphi}(\tau, \bar{x})$  saa yksinkertaisen aikariippuvuuden superhorisontissa yhtälön (91) nojalla

$$v_k(\tau) \xrightarrow{k \ll aH} \frac{i}{\sqrt{2k^3\tau}} .$$

Tällöin  $v^*(\tau) = -v_k(\tau)$  ja  $v'_k(\tau) = -\frac{v_k(\tau)}{\tau}$ , joten kentän  $\hat{\varphi}(\tau, \bar{x})$  ja sen konjugaattiliikemäärän  $\hat{\pi}(\tau, \bar{x}) = \hat{\varphi}'(\tau, \bar{x})$  lausekkeet ovat

$$\hat{\varphi}(\tau, \bar{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} v_k(\tau) (\hat{a}_{\bar{k}} e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} - \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}}) , \quad \hat{\pi}(\tau, \bar{x}) = -\frac{\hat{\varphi}(\tau, \bar{x})}{\tau} .$$

Nähdään, että kentät ovat verrannollisia toisiinsa ja alkavat kommutoida superhorisontissa. Tämä tarkoittaa sitä, että kvanttikentästä  $\hat{\varphi}(\tau, \bar{x})$  on tullut klassinen stokastinen kenttä [11]. Tulos on merkittävä, sillä superhorisontin perturbaatiot määräävät alkuehdot universumin myöhemmälle kehitykselle. Niillä on ennalta määrätty arvot ja kvanttimekaanisia superpositioita ei enää esiinny.

## 5.7 Esimerkkimallit

Tarkastellaan seuraavaksi havainnollistamisen vuoksi kappaleessa 2 käsitellyjä esimerkkejä inflatonkentän potentiaaleista. Aloitetaan tapauksesta  $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$  [3,7]. Slow-roll -parametreiksi laskettiin

$$\epsilon_V = \eta_V = \frac{2M_{pl}^2}{\varphi^2} ,$$

joten spektraali-indeksit ja tensori-skalaari -suhde ovat

$$n_{\mathcal{R}} = 1 - 8\left(\frac{M_{pl}}{\varphi}\right)^2 , \quad n_T = -4\left(\frac{M_{pl}}{\varphi}\right)^2 , \quad r = 32\left(\frac{M_{pl}}{\varphi}\right)^2 .$$

Koska teorian ennusteita verrataan taustasäteilystä saatuihin havaintoihin, täytyy kentän  $\varphi$  arvo laskea sillä hetkellä, kun suurimmat nykyisin havaittavat skaalat poistuivat

horisontista. Lausekkeesta (48) nähtiin, että  $e$ -foldien määrä horisontin ylityksestä inflaation loppuun on  $N \approx 60$ , kun oletetaan välitön reheating-prosessi.  $e$ -foldien ja kentän arvon välinen relaatio on

$$N = \frac{1}{M_{pl}^2} \int_{\varphi_{end}}^{\varphi} \frac{V}{V'} d\varphi \stackrel{\varphi_{end}=\sqrt{2}M_{pl}}{=} \frac{\varphi^2}{4M_{pl}^2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left( \frac{M_{pl}}{\varphi} \right)^2 = \frac{1}{4N-2} \stackrel{N \approx 60}{\approx} 0.0042 ,$$

jolloin saadaan

$$n_{\mathcal{R}} \approx 0.966 , \quad n_T \approx -0.0168 , \quad r \approx 0.134 .$$

Spektraali-indeksi on sopusoinnussa Planck-satelliitin datasta saadun arvon  $n_{\mathcal{R}} = 0.968 \pm 0.006$  kanssa, mutta gravitaatioaaltojen osuus on hieman liian suuri verrattuna havainnoista saatuun ylärajaan  $r < 0.11$  (95 % luottamustaso) [12].

Mittauksista saatu skalaarimoodien tehospektrin voimakkuus  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_{cmb}) \approx 2 \cdot 10^{-9}$  rajoittaa kentän massan arvoa, sillä yhtälön (122) nojalla

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) &= \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{M_{pl}^4} \frac{1}{\epsilon_V} \Big|_{k=aH} = \frac{m^2}{96\pi^2 M_{pl}^2} \left( \frac{\varphi}{M_{pl}} \right)^4 \Big|_{k=aH} \\ \Leftrightarrow m &= \sqrt{96\pi^2 M_{pl}^2 \left( \frac{1}{4N-2} \right)^2 \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)} \approx 6 \cdot 10^{-6} M_{pl} \approx 1.4 \cdot 10^{13} \text{ GeV} . \end{aligned}$$

Tällöin inflaation lopussa energiaskaala on ollut

$$V^{1/4}(\varphi_{end}) = \left( \frac{1}{2} m^2 \varphi_{end}^2 \right)^{1/4} = \sqrt{\frac{m}{M_{pl}}} M_{pl} \approx 2.45 \cdot 10^{-3} M_{pl} \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ GeV} ,$$

joka määrää ylärajan reheating-lämpötilalle.

Potentiaalin  $V(\varphi) = V_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{p}} \frac{\varphi}{M_{pl}}\right)$  tapauksessa slow-roll -parametreiksi saatiin

$$\epsilon_V = \frac{1}{p} , \quad \eta_V = \frac{2}{p} .$$

Spektraali-indeksit ja tensori-skalaari -suhde määräytyvät siten pelkästään parametrista  $p$

$$n_{\mathcal{R}} = 1 - \frac{2}{p} , \quad n_T = -\frac{2}{p} , \quad r = \frac{16}{p} .$$

Muiden ennusteiden teko ei onnistu, sillä tässä mallissa inflaatio ei pääty koskaan. Malli on kuitenkin teoreettisesti mielenkiintoinen sen vuoksi, että slow-roll -approksimaatiota ei välttämättä tarvita, sillä yhtälöille (108) ja (112) on olemassa eksakti ratkaisu [14].

## 6 TEORIA JA HAVAINNOT

Tässä kappaleessa käydään läpi, kuinka inflaatiota voidaan testata kosmologisten havaintojen avulla ja mikä on inflaatioparadigman nykyinen status. Tärkeimmät lähteet ovat kosminen mikroaaltotausta ja materian jakautuminen suuressa mittakaavassa. Kosmisen taustasäteilyn fysiikka on itsessään oma aihepiirinsä, joten tarkastelu pyritään pitämään mahdollisimman yleisellä tasolla ja ainoastaan inflaation kannalta oleelliset asiat tuodaan esille. Yhtälöiden yksityiskohtaiset johdot löytyvät viitatuista lähteistä. Vastaavasti suuren mittakaavan rakenteen analysointi vaatisi syvempää paneutumista kosmologisen häiriöteorian yhtälöihin. Molemmissa tapauksissa tarkkojen ennusteiden tekemiseen tarvitaan numeerisia koodeja.

### 6.1 Kosminen taustasäteily

Kosminen taustasäteily syntyi, kun lämpötila oli tarpeeksi alhainen  $T_{rec} \approx 0.3$  eV [14], jotta elektronit ja protonit pystyivät muodostamaan neutraaleja atomeja. Tätä prosessia kutsutaan rekombinaatioksi. Sitä ennen säteily ja materia olivat termisessä tasapainossa, sillä fotonit ja elektronit olivat tiukasti kytköksissä toisiinsa. Rekombinaation jälkeen fotonit pystyivät kulkemaan vapaasti avaruudessa. Tänä päivänä havaittu taustasäteily tarjoaa siten punasiirtyneen kuvan varhaisesta maailmankaikkeudesta. Taustasäteilyn syntyä voi approksimoida olettamalla välitön irtikykytyminen, jolloin taustasäteily muodostaa pallopinnan havaitsijan ympärille punasiirtymän arvoilla  $z \approx 1100$  [2]. Todellisuudessa prosessin tilastollisen luonteen vuoksi rekombinaatio ei tapahdu heti, vaan ajoittuu punasiirtymän arvoille  $z \approx 1100 - 1400$  riippuen siitä, kuinka suuri osa elektroneista on vapaita [14].

Kosminen taustasäteily on kosmologian ehkä arvokkain informaatiolähde, sillä sen ominaisuudet riippuvat kosmologisten parametrien  $H_0$  ja  $\Omega_{i,0}$  arvoista sekä primordiaalisista alkuehdoista. Taustasäteily antaa siten mahdollisuuden testata inflaation antamia yleisiä ennusteita sekä sen avulla voidaan poissulkea yksittäisiä havaintoihin sopimattomia inflaatiomalleja. Koska vektorimoodit käytännössä hajoavat kokonaan inflaation loppuun mennessä, rajoitutaan tarkastelemaan skalaari- ja tensorimoodien vaikutusta taustasäteilyn luonteeseen.

#### 6.1.1 Statistiikkaa

Taustasäteily on lähes isotrooppinen läpi koko taivaan. Anisotropiat ovat kuitenkin hyvin tärkeitä, sillä ne heijastelevat primordiaalisia alkuehtoja ja ne toimivat rakenteiden synnyn siemeninä. Lämpötilafluktuaatioita käsitellään lineaarisen häiriöteorian avulla ja niitä karakterisoi kirkkausfunktio  $\Theta$  [14]

$$\Theta(\theta, \phi) = \frac{\delta T(\theta, \phi)}{\bar{T}},$$

missä  $\bar{T} \approx 2.725$  K on havaittu lämpötilan keskiarvo ja  $\delta T(\theta, \phi)$  suunnasta riippuva perturbaatio. Koska funktio  $\Theta(\theta, \phi)$  on määritelty pallon pinnalla, voidaan se lausua



palloharmonisten funktioiden  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  avulla [14]

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) ,$$

missä kertoimet  $a_{lm}$  saadaan sisätulosta

$$a_{lm} = \int d\Omega \Theta(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) .$$

Koska perturbaatioiden keskiarvo häviää  $\langle \Theta(\theta, \phi) \rangle = 0$ , pätee myös  $\langle a_{lm} \rangle = 0$ .

Korrelaatiofunktion lausekkeeksi tulee

$$C(\vartheta) = \langle \Theta(\theta_1, \phi_1) \Theta(\theta_2, \phi_2) \rangle = \sum_{l_1, m_1} \sum_{l_2, m_2} \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}^* \rangle Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2 m_2}(\theta_2, \phi_2) .$$

Lämpötilafluktuaatioiden statistiikka määräytyy siten multipolikertoimista  $a_{lm}$ . Korrelaatiofunktio riippuu vain pisteiden välisestä kulmasta  $\vartheta$ , sillä lämpötilajakauma on tilastollisesti isotrooppinen. Tällöin  $C(\vartheta)$  voidaan ilmaista Legendren polynomien  $P_l(x)$  avulla [4]

$$C(\vartheta) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos \vartheta) , \quad \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l .$$

$C_l$  karakterisoi multipolikertoimien  $a_{lm}$  varianssia ja muodostaa kosmisen taustasäteilyn kulmatehospektrin. Kosmologisia malleja voidaan testata vertaamalla ennustettua kulmatehospektriä  $C_l$  taustasäteilystä mitattuun spektriin  $\hat{C}_l$ . Multipolien  $l$  arvot vastaavat karkeasti kulmaskaalaa  $\theta \approx 2\pi/l$ . Alhaisilla multipolien arvoilla teorian ja havaintojen vertaamista rajoittaa ns. kosminen varianssi [14].

### 6.1.2 Skalaarimoodit

Muistetaan, että adiabaattisten perturbaatioiden tapauksessa kaarevuusperturbaatio  $\mathcal{R}$  ja tensoriperturbaatio  $\hat{E}_{ij}$  säilyvät superhorisontissa. Rekombinaation aikainen superhorisontti vastaa kulmaskaaloja  $\theta \gg 1^\circ$ . Tällöin tarkastellessa kulmatehospektrin pieniä multipoleja  $l$  voidaan saada suoraan tietoa inflaation aikaisista fluktuaatioista. Suuremmilla multipoleilla subhorisontin fysikaaliset prosessit ovat päässeet sekoittamaan primordiaalisia alkuehtoja.

Maailmankaikkeuden ollessa tietyn fluidin dominanssissa voidaan approksimoida, että  $w \approx$  vakio hyvin pitkän aikaa. Tällöin Newtonilaisessa mitassa lausutun differentiaaliyhtälön (75) superhorisontin hajoava ratkaisu ei kontribuoi, jolloin saadaan [18]

$$\Phi \approx -\frac{3+3w}{5+3w} \mathcal{R} \approx \text{vakio} . \quad (130)$$

Tulos pätee kaikissa mitoissa, sillä  $\Phi$  ja  $\mathcal{R}$  ovat mittainvariantteja. Erityisesti rekombinaation aikaan maailmankaikkeuden ollessa materiadominanssissa pätee  $\Phi = -\frac{3}{5} \mathcal{R}$ . Kaarevuusperturbaatio aiheuttaa siten fluktuaatioita gravitaatiopotentiaaliin  $\Phi$ , mikä puolestaan indusoi perturbaatioita fotonien lämpötilaan, sillä ne menettävät energiaa kiiwetessään eri syvyisistä gravitaatiokuopista. Täytyy kuitenkin muistaa, että havaittuun taustasäteilyn lämpötilaan vaikuttavat alkuehtojen lisäksi myös fotonin matkalla

kokemat muutokset. Esimerkiksi pimeä energia ja fotonien vuorovaikutus ionisoituneen kaasun kanssa vaikuttavat lämpötilajakaumaan [14]. Nämä efektit pitää poistaa havainnoista, jos halutaan tietoa primordiaalisesta kaarevuusperturbaatiosta  $\mathcal{R}$ .

Suurilla skaaloilla pääasiallinen kontribuutio lämpötilafluktuaatioihin tulee Sachs-Wolfe -termistä [14]

$$\Theta_{SW} = \frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi .$$

Adiabaattisista alkuehdoista seuraa  $\frac{1}{4}\delta_\gamma^N = \frac{1}{3}\delta_m^N = -\frac{2}{3}\Phi$ , joten saadaan yksinkertainen relaatio

$$\Theta_{SW} = \frac{1}{3}\Phi = \frac{1}{5}\mathcal{R} . \quad (131)$$

Kaarevuusperturbaation vaikutus kulmatehospektriin on siten [14]

$$C_l^{TT} = \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_l^2(k(\tau_0 - \tau_{cmb})) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) , \quad (132)$$

missä  $j_l(x)$  on kertalukua  $l$  oleva Besselin funktio ja yläindeksi  $TT$  viittaa lämpötilafluktuaatioihin.

Potenssilain (82) tapauksessa integraali voidaan suorittaa analyttisesti. Jos  $n_s \approx 1$ , kulmatehospektriin tulee [14]

$$\frac{l(l+1)C_l^{TT}}{2\pi} = \frac{A_s}{25} = \text{vakio} . \quad (133)$$

Skaalainvariantti spektri näkyy tyypillisissä kuvaajissa laakeana alueena pienten multipolien  $l \lesssim 30$  arvoilla (ks. kuva 8). Spektrin skaalariippuvuus vaikuttaa kulmatehospektrin kaltevuuteen

$$l(l+1)C_l^{TT} \propto l^{n_s-1} .$$

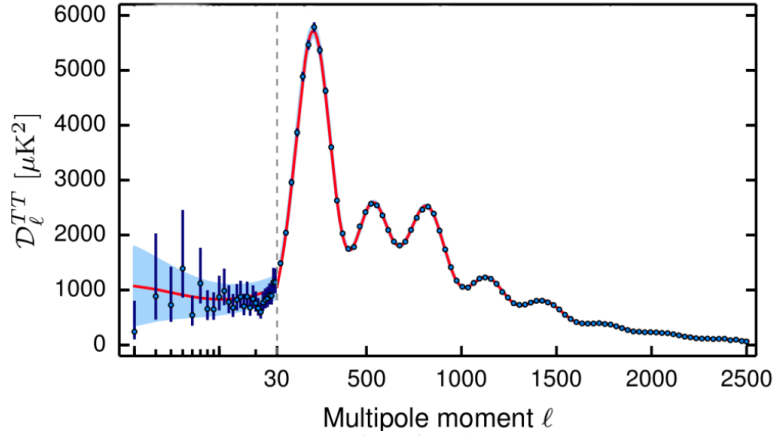
Jos alkuehdoissa puolestaan esiintyy isokurvatuurifluktuaatioita  $S_m = \delta_m - \frac{3}{4}\delta_\gamma \neq 0$ , niin  $\Theta_{SW} = 2\Phi = -\frac{2}{5}S_m$ . Tapauksessa  $n_s \approx 1$  kulmatehospektri on [14]

$$\frac{l(l+1)C_l^{TT}}{2\pi} = \frac{72}{25}A_s = \text{vakio} . \quad (134)$$

Alkuehtojen adiabaattisuus vaikuttaa siten laakean alueen korkeuteen sekä keskisuurilla skaaloilla ns. akustisten piikkien muotoon, kuten seuraavaksi nähdään.

Mainittakoon vielä, että hyvin pienillä multipoleilla täytyy ottaa ns. integroitu Sachs-Wolfe -termi huomioon [14]. Viimeaikaisen pimeän energian dominanssin vuoksi gravitaatiopotentiaali  $\Phi$  alkaa hajota, mikä aiheuttaa pienen nousun kulmatehospektrin alkuosaan (ks. kuva 8).

Keskisuurilla skaaloilla  $30 \lesssim l \lesssim 2000$  kulmatehospektrissä voidaan nähdä sarja maksimeja ja minimejä (ks. kuva 8). Ennen rekombinaatiota materia ja säteily olivat tiukasti kytköksissä toisiinsa, jolloin baryoni-fotoni-plasma vuoroin supistui gravitaatiion vaikutuksesta ja vuoroin laajeni säteilyn paineen vaikutuksesta. Näitä plasmassa eteneviä ääniaaltoja kutsutaan akustisiksi oskillaatioiksi [14]. Taustasäteilyyn on jäänyt jälki kyseisen värähtelyn viimeisestä hetkestä, kun fotonit irtaantuivat plasmasta ja pääsivät etenemään esteettä rekombinaation aikaan. Inflaation kannalta tärkeää on, että alkuehtojen adiabaattisuus vaikuttaa piikkien paikkoihin ja niiden suhteellisiin amplitudeihin. Keskisuurten skaalojen Sachs-Wolfe -termi  $\Theta_{SW}$  voidaan lausua sinin



Kuvio 8: Planck-satelliitin mittaama TT-kulmatehospektri sovitettuna parhaiten sopivaan  $\Lambda$ CDM-malliin. Tässä  $D_l^{TT} = \frac{l(l+1)C_l^{TT}}{2\pi}$ . Kuva lähteestä [12].

ja kosinin lineaarikombinaationa. Osoittautuu, että adiabaattiset alkuehdot virittävät värähtelyyn vain kosinimoodin ja isokurvatuurifluktuaatiot virittävät vain sinimoodin [14]. Värähtelyjen vaihe-ero  $\frac{\pi}{2}$  siirtää maksimien paikkaa sekä vaikuttaa niiden suhteellisiin korkeuksiin. Suurin vaikutus piikkeihin tulee kuitenkin kosmologisista parametreista, jotka määräävät rekombinaation ajanhetken  $\tau_{cmb}$  ja punasiirtymän  $z_{cmb}$ .

Kaikkein suurimmilla multipoleilla eli pienimmillä skaaloilla kulmatehospektri on voimakkaasti suppressoitu fotonien diffuusion vuoksi. Kyseinen ilmiö tunnetaan nimellä Silk damping [11, 14]. Multipolia  $l \approx 2000$  suuremmilla arvoilla spektri on käytännössä täysin vaimentunut (ks. kuva 8), mikä asettaa pienimmän kulmaskaalan, joka voidaan saavuttaa havaintojen avulla [14].

### 6.1.3 Tensorimoodit

Skalaarimoodien lisäksi tensoriperturbaatioilla on oma kontribuutionsa taustasäteilyyn. Kappaleessa 3 nähtiin (ks. kuva 7), että radiaatio- ja materiadominansseissa gravitaatioaalto vaimenevat voimakkaasti siirtyessään horisontin sisälle. Tensorimoodien vaikutus nähdään siten vain alhaisilla multipoleilla  $l \lesssim 100$ . Kuten skalaariperturbaatiot, myös gravitaatioaalto ennustavat laakeaa kontribuutiota kulmatehospektriin [14]

$$l(l+1)C_l^{TT} \propto l^{n_T} . \quad (135)$$

Toinen mahdollisesti havaittava merkki inflaation tuottamista gravitaatioaalloista löytyy taustasäteilyn polarisaatiosta. Vektorin  $\hat{e}_3$ -suuntaan etenevän sähkömagneettisen aallon sähkökenttä voidaan lausua muodossa [14]

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \mathcal{E} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})] , \quad \mathcal{E} = (A_1 e^{i\theta_1}, A_2 e^{i\theta_2}, 0) .$$

Vaiheiden  $\theta_1$  ja  $\theta_2$  sekä amplitudien  $A_1$  ja  $A_2$  avulla määritellään Stokesin parametrit

$$Q \equiv \langle a_1^2 \rangle - \langle a_2^2 \rangle , \quad U \equiv 2\langle a_1 a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \rangle .$$

Kun tehdään kierto vektorin  $\hat{e}_3$  muodostaman akselin ympäri kulman  $\psi$  verran, funktiot  $Q \pm iU$  muuttuvat kuten spin 2 -kenttä  $(Q \pm iU)(\hat{e}_3) \rightarrow e^{\mp 2i\psi}(Q \pm iU)(\hat{e}_3)$ .

Edellinen tarkastelu voidaan yleistää mille tahansa aallon kulkusuunnalle  $\hat{e}_3 \rightarrow \hat{n}$ . Tällöin funktiot  $Q \pm iU$  kehitetään sarjaksi spin 2 -palloharmonisten funktioiden  $\pm_2 Y_{lm}(\hat{n})$  avulla [14]

$$(Q \pm iU)(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{lm}^{(\pm 2)} \pm_2 Y_{lm}(\hat{n}) .$$

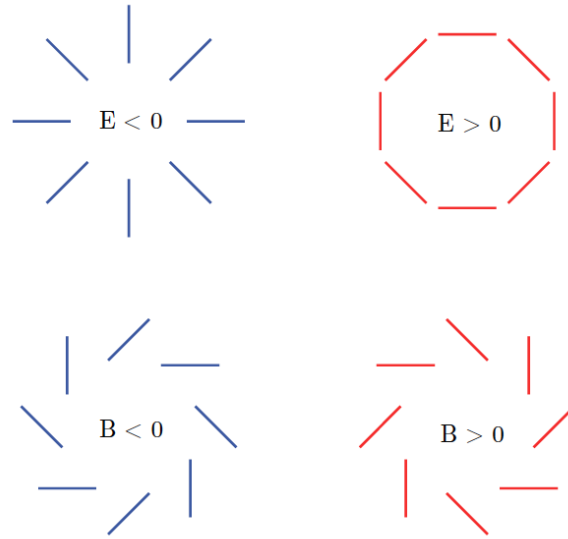
Kertoimien  $a_{lm}^{(\pm 2)}$  ja tavallisten palloharmonisten funktioiden  $Y_{lm}(\hat{n})$  avulla määritellään kaksi skalaarisuuretta [7]

$$E(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{E,lm} Y_{lm}(\hat{n}) , \quad B(\hat{n}) = \sum_{lm} a_{B,lm} Y_{lm}(\hat{n}) , \quad (136)$$

missä

$$a_{E,lm} = -\frac{1}{2}(a_{lm}^{(+2)} + a_{lm}^{(-2)}) , \quad a_{B,lm} = -\frac{1}{2i}(a_{lm}^{(+2)} - a_{lm}^{(-2)}) .$$

Funktiot  $E(\hat{n})$  ja  $B(\hat{n})$  määräävät täysin lineaarisen polarisaatiokentän.  $E$ -moodin polarisaatio on pyörteetön sekä sen polarisaatiovektorit ovat radiaalisia kylmien pisteiden ympäristössä ja tangenciaalisia kuumien pisteiden ympärillä.  $B$ -moodin polarisaatio on lähteetön, mutta sen polarisaatiovektoreilla on pyörteisyyttä jokaisen pisteen ympärillä. Nimitykset  $E$  ja  $B$  tulevat siitä, että vektoria  $\hat{n}$  kohtisuorassa tasossa tehdyssä pariteettimuunnoksessa  $\bar{x} \rightarrow -\bar{x}$  komponentit muuttuvat kuten sähkö- ja magneettikentällä  $a_{E,lm} \rightarrow (-1)^l a_{E,lm}$  ja  $a_{B,lm} \rightarrow (-1)^{l+1} a_{B,lm}$ . Kuvassa 9 näkyvät puhtaan  $E$ - ja  $B$ -moodin polarisaatiokuviot taustasäteilyn kylmän ja kuumen pisteen ympärillä.



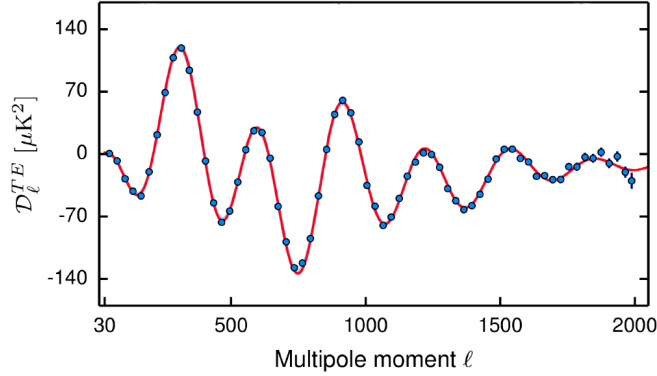
Kuvio 9: Puhtaan  $E$ - ja  $B$ -moodin polarisaatiokuviot taustasäteilyn kylmän pisteen (vasen) ja kuumen pisteen (oikea) ympärillä. Kuva lähteestä [7].

Lämpötilafluktuaatioiden  $T$  sekä polarisaatiomoodien  $E$  ja  $B$  avulla voidaan määrittellä eri kulmatehospektrit [7]

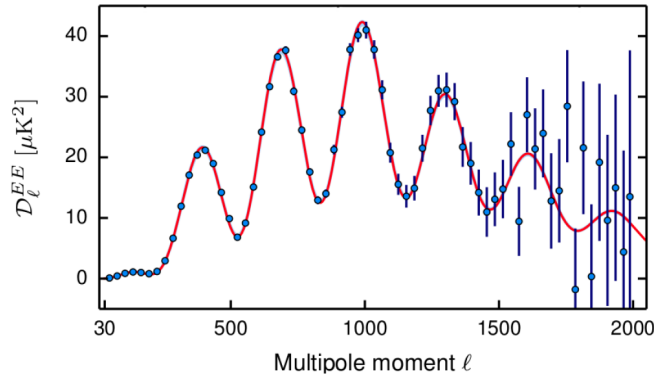
$$C_l^{XY} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{X,lm}^* a_{Y,lm} \rangle , \quad X, Y = T, E, B , \quad (137)$$

missä symmetrioiden vuoksi ainoastaan parit  $TT$ ,  $EE$ ,  $BB$  ja  $TE$  ovat nollasta poikkeavia. Tärkein ominaisuus polarisaation hajotelmassa  $E$ - ja  $B$ -moodeihin on se, että

skalaariperturbaatiot tuottavat vain  $E$ -moodeja ja tensoriperturbaatiot sekä  $E$ - että  $B$ -moodeja [7]. Tällöin  $B$ -moodien havaitseminen taustasäteilyn polarisaatioissa olisi lähes varma merkki inflaatiosta, sillä etenkin suurilla skaaloilla muuta mekanismia primordiaalisten gravitaatioaaltojen synnylle ei tiedetä. Myös vektoriperturbaatiot tuottavat  $B$ -moodeja, mutta niiden vaikutus on pieni rekombinaation aikaan, sillä ne hajoavat universumin laajetessa. Kuvissa 10 ja 11 näkyvät Planck-satelliitin mittaama TE- ja EE-kulmatehospektri. BB-korrelaatiota ei toistaiseksi ole havaittu.



Kuvio 10: Planck-satelliitin mittaama TE-kulmatehospektri sovitettuna parhaiten sopivaan  $\Lambda$ CDM-malliin. Tässä  $\mathcal{D}_l^{TE} = \frac{l(l+1)C_l^{TE}}{2\pi}$ . Kuva lähteestä [12].



Kuvio 11: Planck-satelliitin mittaama EE-kulmatehospektri sovitettuna parhaiten sopivaan  $\Lambda$ CDM-malliin. Tässä  $\mathcal{D}_l^{EE} = \frac{l(l+1)C_l^{EE}}{2\pi}$ . Kuva lähteestä [12].

## 6.2 Suuren mittakaavan rakenne

Inflaation tuottaman kaarevuusperturbaation  $\mathcal{R}$  vaikutus on nähtävissä myös nykyisessä galaksien jakaumassa (ks. kuva 12). Kaarevuusperturbaation tullessa horisontin sisälle syntyy gravitaatiokaivoja, jotka keräävät ympäröivää materiaa puoleensa. Ajan myötä tiheet alueet kasvavat entisestään ja muodostavat kasvualustan tuleville galakseille. Materian tehospektri siten heijastelee alkuperäisen kaarevuusperturbaation olemusta.

Oletetaan, että nykyään havaittu materian tiheyskontrasti  $\delta_m^C \equiv \Delta_m$  voidaan lausua alkuperäisen kaarevuusperturbaation  $\mathcal{R}_{in}$  ja siirtofunktion  $T(k)$  avulla

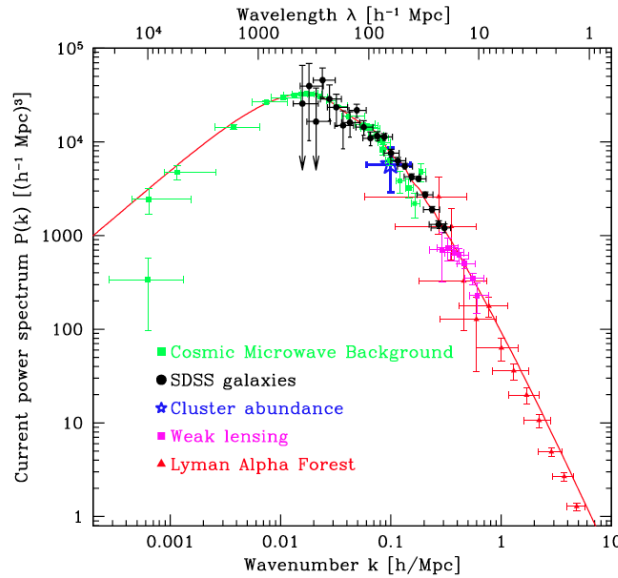
$$\Delta_m(k) = T(k)\mathcal{R}_{in}(k) .$$

Siirtofunktio kertoo alkuperäisen perturbaation kehityksen kosmologisten rakenteiden muodostuessa. Jaetaan tarkastelu skaaloihin  $k < k_{eq}$  ja  $k > k_{eq}$ , missä  $k_{eq}$  vastaa horisontin kokoa materian ja säteilyn tasapainon aikaan. Jako tehdään sen vuoksi, että rakenteiden kehitys on erilaista eri dominansseissa. Ne skaalat, joille  $k < k_{eq}$ , ovat tulleet horisontin sisälle vasta materiadominanssin alkaessa. Poissonin yhtälön (73) ja yhtälön (130) nojalla pätee ( $\Psi = \Phi$ )

$$\Delta_m(k) \propto k^2 \Phi(k) \propto k^2 \mathcal{R}_{in}(k) \Rightarrow T(k) \propto k^2 ,$$

missä on käytetty tietoa siitä, että gravitaatiopotentiaali  $\Phi$  on vakio materiadominanssissa [18] ja siten suoraan verrannollinen alkuperäiseen kaarevuusperturbaatioon. Tällöin inflaatio ennustaa materian tehospektrille lineaarista riippuvuutta skaaloilla  $k < k_{eq}$

$$P_{\Delta_m}(k < k_{eq}) \propto k^4 P_{\mathcal{R}_{in}}(k) \propto k^{n_{\mathcal{R}}} \approx k . \quad (138)$$



Kuvio 12: Materian tehospektri eri menetelmillä mitattuna ja sovitettuna parhaiten sopivaan  $\Lambda$ CDM-malliin. Havaintotarkkuuden vuoksi suurimmat skaalat on saatu kosmisesta taustasäteilystä. Kuva lähteestä [23].

Tarkastellaan seuraavaksi skaalaa, joka on tullut horisontin sisälle jo säteilydominanssin aikaan eli  $k > k_{eq}$ . Koska pimeä aine dominoi materiajakaumaa, riittää tarkastella sen kehitystä radiaatidominanssista materian ja säteilyn tasapainoon saakka. Itse asiassa pimeä aine vastaa subhorisontin tiheyskontrastin kasvusta säteilydominanssissa, sillä baryoninen aine on tiukasti kytkeytynyt fotonien kanssa ja käy läpi akustisia oskillaatioita. Tiheyskontrastille voidaan johtaa differentiaaliyhtälö Newtonilaisessa mitassa [11]

$$\ddot{\delta}_{cdm} + aH\dot{\delta}_{cdm} = 0 ,$$

jonka alkuehdot ovat  $\dot{\delta}_{cdm,0} \approx aH\delta_{cdm,0}$  ja  $\delta_{cdm,0} = \frac{4}{3}\mathcal{R}_{in}$ . Yhtälön ratkaisu on [11]

$$\delta_{cdm} \approx \mathcal{R}_{in} \ln\left(\frac{k}{aH}\right) \stackrel{t=t_{eq}}{=} \mathcal{R}_{in} \ln\left(\frac{k}{k_{eq}}\right) .$$

Nähdään, että kasvu on vain logaritmista  $\delta_{cdm} \propto \ln a$ , sillä säteilyn paine vastustaa rakenteiden muodostumista. Materiadominanssissa kasvu muuttuu lineaariseksi  $\delta_{cdm} \propto a$  kaikissa skaaloissa [14]. Koska pienillä skaaloilla  $\delta^N \approx \delta^C$  [14], siirtofunktioksi tulee  $T(k) \propto \ln(k/k_{eq})$ . Inflaation ennustama tehospektri skaaloille  $k > k_{eq}$  on täten

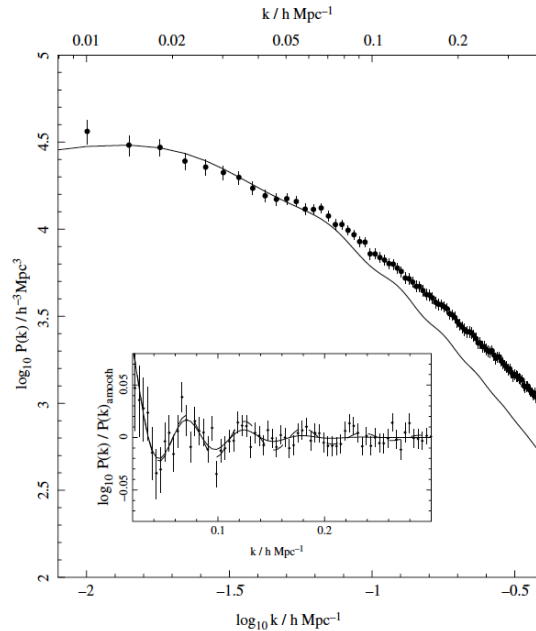
$$P_{\Delta_m}(k > k_{eq}) \propto \ln^2\left(\frac{k}{k_{eq}}\right) P_{\mathcal{R}_{in}} \propto \ln^2\left(\frac{k}{k_{eq}}\right) k^{n_{\mathcal{R}}-4} \approx k^{-3} \ln^2\left(\frac{k}{k_{eq}}\right). \quad (139)$$

Kuvassa 12 on eri havaintomenetelmillä saatu materian tehospektri. Valitettavasti pimeää ainetta ei voi suoraan havaita muuten kuin gravitaatiolinssi-ilmiöllä, joten sen jakaumaa täytyy arvioida näkyvän baryonisen aineen  $\delta_b$  avulla. Usein on hyödyllistä tehdä approksimaatio vääristymäparametrin  $b$  (bias) avulla [7]

$$\delta_b = b\delta_{cdm}, \quad P_{\delta_b} = b^2 P_{\delta_{cdm}}.$$

Vääristymäparametri kuvaa huonosti tunnettua prosessia, jossa galaksit muodostuvat pimeään aineeseen luomiin painovoimataskuihin. Parametri  $b$  voidaan määrätä mittaamalla galaksien bispektri  $B_{\delta_b}$  [7]. Näistä monimutkaisuuksista huolimatta materian tehospektri on tärkeä mittari inflaation testaamiseksi. Koska sillä päästään taustasäteilyyn verrattuna pienempiin skaaloihin, se on komplementaarinen keino tutkia inflaation indusoimia skalaariperturbaatioita.

Tarkemmassa analyysissä materian tehospektriin vaikuttavat akustiset oskillaatiot ja alhaisilla punasiirtymillä pimeä energia täytyy ottaa huomioon. Lisäksi hyvin pienillä skaaloilla lineaarinen häiriöteoria ei enää päde, mikä aiheuttaa oman kontribuutionsa spektriin (ks. kuva 13).



Kuvio 13: Tarkempi materian tehospektri skaaloille  $k > k_{eq}$  sovitettuna parhaiten sopivaan  $\Lambda$ CDM-malliin. Käyrä edustaa lineaarisen häiriöteorian antamaa ennustetta ja alkaa poiketa mittauksista pienillä skaaloilla, jolloin epälineaariset ilmiöt tulevat merkittäviksi. Kuvassa näkyvät myös baryonien akustiset oskillaatiot. Kuva lähteestä [1].

### 6.3 Todisteita inflaatiosta?

Vielä tähän päivään mennessä yhtään varmaa todistetta inflaation puolesta tai sitä vastaan ei ole tehty. Yksi ongelma on se, että inflaatio on laaja käsite ja sisältää hyvin paljon erilaisia malleja, joiden ennusteet poikkeavat toisistaan. Yksittäinen malli voidaan toki sulkea pois havaintodatan avulla, mutta samalla jokin toinen malli nousee ennakkosuosikiksi.

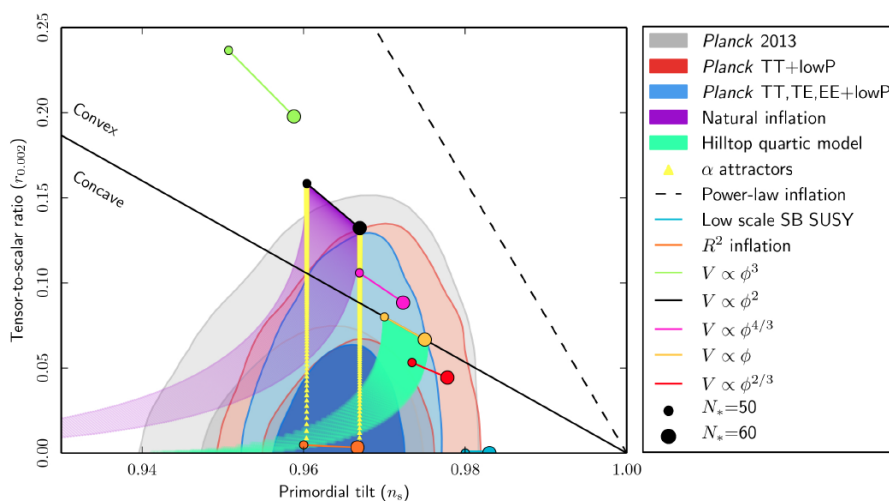
Yleisemmällä tasolla havainnot voivat tehdä eron yhden kentän ja monen kentän inflaation välillä, jos perturbaatiot osoittautuvat ei-adiabaattisiksi. Merkittävä ei-gaussisuus kertoisi inflatonkentän vuorovaikutuksista itsensä tai muiden kenttien kanssa inflaation aikana. Perturbaatioiden huomattava skaalariippuvuus puolestaan hylkäisi tavallisimmat slow-roll -mallit. Koko inflaatiokäsitteen täydelliseen tyrmäämiseen vaadittaisiin erittäin poikkeavia havaintoja. Esimerkiksi, jos avaruuden kaarevuus olisi merkittävästi positiivinen tai negatiivinen, täytyisi inflaatioparadigmaa harkita uudelleen. On kuitenkin ehdotettu inflaatiomalleja, joissa avaruudella on positiivinen tai negatiivinen kaarevuus [14].

Planck-satelliitin kosmisesta taustasäteilystä keräämä informaatio on yhtäpitävää yksinkertaisimpien yhden kentän mallien ennusteiden kanssa. Tällä tarkoitetaan niitä slow-roll -malleja, joiden Lagrangen tiheys on muotoa (28). Uusin taustasäteilyn analyysi inflaatioparametrien suhteen löytyy lähteestä [12] ja kosmologisten parametrien suhteen lähteestä [2]. Erittäin kattava analyysi erilaisten mallien antamista ennusteista ja niiden sopivuudesta Planckin dataan löytyy lähteestä [25]. Viimeisimmän tiedon mukaan:

- Nykyinen maailmankaikkeus on mittaustarkkuuksien rajoissa lähes laakea. Kaarevuustiheysparametrille on saatu yläraja  $|\Omega_{k,0}| < 0.005$  [2]. Saattaa vaikuttaa kehäpäättelmältä pitää tätä vahvistuksena inflaatiolle, sillä inflaatio motivoitiin selittämään laakeus varhaisessa maailmankaikkeudessa. Kuitenkin 1980-luvulla Guthin tuodessa inflaatiota esille avaruuden laakeus oli epätriviaali ennuste, joka oli tuolloin jopa vastoin silloisia havaintoja [7].
- Perturbaatiot vaikuttavat erittäin vahvasti adiabaattisilta. Havainnoista on saatu ylärajat  $|\alpha_{nad}| < 1.9\%, 4.0\%, 2.9\%$  kylmän pimeän aineen, neutriinon tiheyden ja neutriinon nopeuden isokurvatuurifluktuaatioille [12]. Prosenttiosuudet tarkoittavat kontribuutiota adiabaattisiin perturbaatioihin verrattuna.
- Perturbaatiot ovat lähes skaalainvariantteja. Spektraali-indeksin arvoksi on saatu  $n_{\mathcal{R}} = 0.968 \pm 0.006$  sekä sen skaalariippuvuudeksi  $\alpha_{\mathcal{R}} = -0.003 \pm 0.007$  [12].
- Perturbaatiot ovat käytännössä gaussisia. Lokaalia ei-gaussisuutta karakterisovalle parametrille  $f_{NL}$  (ks. lauseke (129)) on saatu havainnoista arvo  $f_{NL} = 0.8 \pm 5.0$  [24]. Koska  $|\mathcal{R}_g| \propto \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{1/2} \approx 10^{-5}$ , termin  $\frac{3}{5}f_{NL}\mathcal{R}_g^2(\bar{x})$  kontribuutio on lähes mitätön.
- Minkäänlaisia merkkejä kosmisista säikeistä tai muista topologisista defekteistä ei ole löydetty [2].
- Primordiaalisia gravitaatioaaltoja ei ole toistaiseksi havaittu. Toisin sanoen signaalia  $B$ -moodin polarisaatiosta, joka olisi hyvin varhaista alkuperää, ei ole löydetty. Tensori-skalaari -suhteelle on saatu yläraja  $r < 0.11$  (95 % luottamus-



taso) [12]. Yhdessä spektraali-indeksin kanssa tämä sulkee joitain malleja pois epätodennäköisinä vaihtoehtoina (ks. kuva 14).



Kuvio 14: Spektraali-indeksin ja tensori-skalaari -suhteen luotettavuuskäyrät. Kuvasa näkyvät myös joidenkin inflaatiomallien antamat ennusteet ja sijoittuminen havainnoista saatuihin rajoihin. Kuva lähteestä [12].

Kosmisen taustasäteilyn lisäksi materian tehospektrin muoto (ks. kuva 12) vastaa inflaation antamaa karkeaa ennustetta sekä suurilla että pienillä skaaloilla. Tämä vahvistaa taustasäteilystä saatua tietoa siitä, että perturbaatiot ovat lähes skaalainvariantteja. Erityisesti skaalainvarianssi nähdään entistä pienemmässä mittakaavassa eli galaksijoukkojen tasolla taustasäteilyyn verrattuna.

Kuten sanottu, edelliset tulokset ovat yhtäpitäviä inflaation antamien ennusteiden kanssa, mutta eivät vielä täysin todista sen paikkansapitävyyttä. Tähän tarvittaisiin esimerkiksi suora havainto primordiaalisista gravitaatioaaltoista tai  $B$ -moodin löytyminen taustasäteilyn polarisaatiosta.

## 6.4 Avoimia kysymyksiä

Inflaatio on säilynyt kosmologian paradigmana jo kymmeniä vuosia ja kestänyt sitä vastaan esitetyn kritiikin. Se on kaunis hypoteesi siinä mielessä, että se selittää useita standardikosmologiassa esiintyviä ongelmia. Erityisesti varhaisten tiheysperturbaatioiden synty on yksi inflaation vankimmista ennustuksista. Inflaatio on myös kvantitatiivisesti sopusoinnussa havaintojen kanssa. Kuitenkin se jättää joitain asioita avoimiksi ja yleisyyden kannalta kyseenalaisiksi:

- Mikä on kenttä  $\phi$ ? Monia ehdokkaita on esitetty supersymmetriasta säieteoriaan [10], mutta yhtenevään johtopäätökseen ei olla päästy. Tiedetään vain, että kyseessä täytyy olla ainakin efektiivisesti klassinen homogeeninen skalaarikenttä, joka vastaa avaruuden kiihtyvää laajenemisesta.
- Inflatonikentän täytyy olla hyvin homogeeninen. Kentän alkuperäiset epähomogeeniat nimittäin jarruttavat kiihtyvää laajenemista gradienttitermin  $\nabla\phi$  toimesta. Numeerisista analyyseistä on nähty, että alussa kentän  $\phi$  pitää olla homogee-

ninen muutamia kertoja horisonttia suuremmalla alueella, jotta inflaatio lähtee käyntiin [7].

- Kentän alkunopeus  $\dot{\phi}$  täytyy olla hyvin pieni. Nopeuden ollessa liian suurta kenttä ohittaa potentiaalın inflaatiolle suotuisan alueen liian nopeasti eikä kiihtyvää laajenemista käytännössä esiinny lainkaan. Tämä on suuri ongelma varsinkin pienen kentän malleille, koska niissä Hubblen kitkatermi ei hidasta kenttää tarpeeksi ennen potentiaalın inflaatioaluetta [7].
- Onko potentiaali  $V$  "luonnollinen"? Slow-roll -inflaatiossa potentiaalın täytyy olla hyvin sileä ja tasainen, jotta inflaatio alkaisi ja pysyisi käynnissä tarpeeksi pitkään. Tämä vaatii potentiaalın keinotekoisista hienosäätämistä varsinkin, jos kyseessä ei ole suuren kentän malli. Yhdessä edellisten kohtien kanssa voidaan tiivistää, että inflaatio tarvitsee erityisiä alkuehtoja toimiakseen.
- Suurimmat nykyisin havaittavat skaalat poistuivat horisontista n. 60  $e$ -foldia ennen inflaation loppua. Jos inflaatio kestää huomattavasti pidempään kuin 60  $e$ -foldia, nykyinen horisontti oli inflaation alussa pienempi kuin Planckin etäisyys. Tällöin ollaan kvanttigravitaation alueella. Ovatko inflaation antamat ennusteet siten enää voimassa? Voivatko nämä tuntemattomat fysikaaliset prosessit jättää jäljen havaintoihin? Varmoja vastauksia näihin kysymyksiin ei vielä tiedetä. Ratkaisuksi on ehdotettu esimerkiksi dispersiorelaation  $\omega_{phys} = k_{phys}$  modifikaatiota sekä kommutaatiorelaation  $[x, p] = i\hbar$  laajennusta [14].
- Kuinka todennäköinen meidän universumimme on? Moderni käsitys inflaatiosta on, että se ei koskaan lopu [26]. Havaittava maailmankaikkeus on vain pieni osa valtavaa ikuisesti inflatoituvaa multiversumia. Eri taskumaailmankaikkeuksilla on erilaiset fysikaaliset lait ja parametrit, jotka määräytyvät satunnaisesti. Ongelmana on vain se, että todennäköisyysmittaa, joka antaa esiintymistiheydet eri parametreille, ei tunneta [26]. Lisäksi selitys oman maailmankaikkeutemme parametrien arvoille voidaan aina kiertää antrooppisilla argumenteilla. Fysikaaliset lait ovat sellaisia kuin ovat, sillä muuten älyllistä elämää ei olisi voinut kehittyä. Multiversumiteoriaa ei voi myöskään millään tavalla hylätä tai vahvistaa, sillä määritelmänsä nojalla muista taskumaailmankaikkeuksista ei voi saada koskaan informaatiota.
- Mitä tapahtui ennen inflaatiota? Inflaatio ei selitä maailmankaikkeuden alkuperää, sillä se ei poista FRW-kosmologiassa esiintyvää singulariteettia  $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  [26]. Universumin syntyä koskeva fysiikka on toistaiseksi täysin tuntematonta, sillä se vaatii kvanttiteoriaa gravitaatiolle. Tähän ei olla vielä päästy, vaikkakin supersäieteoria vaikuttaa lupaavalta vaihtoehdolta [14].

Lisäksi taustasäteilystä saadut spektraali-indeksin ja tensori-skalaari -suhteen arvot ovat sulkeneet joitakin yksinkertaisimpia potentiaaleja pois epätodennäköisinä vaihtoehtoina (ks. kuva 14). Tätä on kritisoitu vahvasti ja pidetty jopa todisteena inflaatioparadigmaa vastaan [27–29]. Jäljelle jäävät mallit tarvitsevat hyvin paljon hienosäätöä, sisältävät multiversumin tuomat ongelmat sekä ovat eksponentiaalisesti epätodennäköisempiä kuin havaintodatan ulkopuolella olevat yksinkertaiset mallit. Kritiikkiin on kuitenkin vastattu kuuluisimpien inflaation puolestapuhujien toimesta [30,31].

Inflaatiolle on myös olemassa kilpailevia teorioita. Faasitransitioissa syntyvät kosmiset säikeet olivat pitkään varteenotettava vaihtoehto rakenteiden synnylle [14]. Taustasäteilyssä suurilla skaaloilla havaitut korrelaatiot sulkivat kuitenkin pois tämän vaihtoehdon epätodennäköisenä.

Toinen kilpaileva teorialuokka on ns. bouncing-mallit [32]. Niissä universumi on ennen alkuräjähdyttä käynyt läpi hitaan kutistumisvaiheen, joka tunnetaan myös nimellä ekpyrosis. Hidas kutistuminen saadaan aikaan skalaarikentällä, joka liikkuu erittäin jyrkässä potentiaalissa [33]. Tällöin universumia dominoi fluidi, jonka tilanyhtälöparametri on  $w \gg 1$ . Kutistumisvaiheen lopussa tapahtuu varsinainen alkuräjähdytys ja universumi "ponnahtaa" perinteiseen laajenemisvaiheeseen. Näissä malleissa joko klassista singulariteettiä ei lainkaan esiinny tai singulariteetti vältetään kvanttitasolla [34]. Ponnahtuksia voi maailmankaikkeuden historiassa olla useita, jolloin puhutaan syklisistä malleista. Eräs keino saada aikaan syklinen universumi on kahden neliulotteisen braanin väliset säännölliset törmäykset viidennessä ulottuvuudessa [33].

Syklisten mallien avulla voidaan ratkaista laakeus-, horisontti- ja monopoli-ongelmat [33]. Primordiaalisten perturbaatioiden synty selitetään sillä, että kvanttifluktuaatioiden takia braanit eivät törmää toisiinsa kaikkialla täsmälleen samaan aikaan. Näiden lisäksi pimeällä energialla on oma roolinsa, sillä se tulkitaan braanien väliseksi vetovoimaksi viidennessä ulottuvuudessa. Pimeä energia pitää siten syklejä yllä ja aiheuttaa braanien väliset toistuvat törmäykset. Yksinkertaisia syklisiä malleja on kuitenkin hankala sovittaa havaintoihin ja erityisesti skaalainvarianttien tiheysperturbaatioiden generoiminen pelkästään yhden kentän avulla tuottaa ongelmia [32]. On kuitenkin olemassa monimutkaisempia malleja, jotka sopivat taustasäteilystä saatuun informaatioon [34].

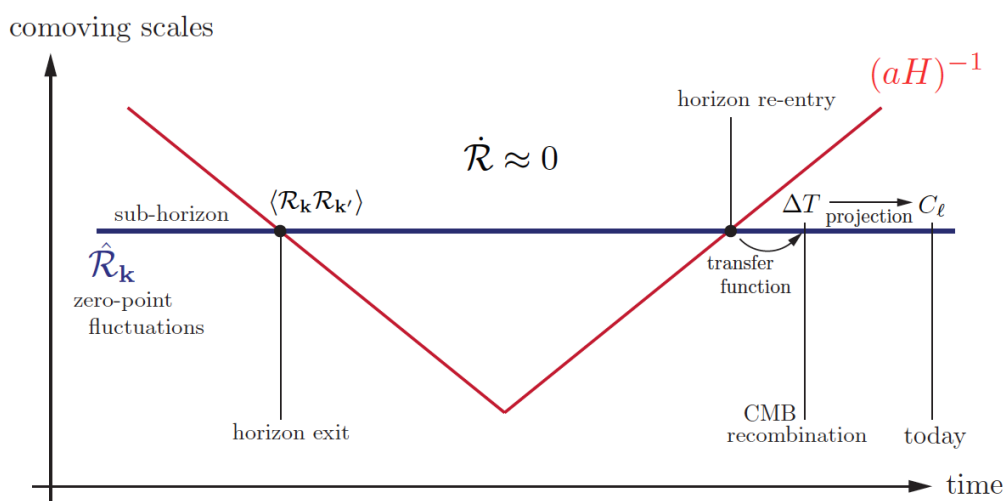
Ovatko sykliset mallit potentiaalinen kilpailija inflaatiolle? On huomattava, että ne usein perustuvat monimutkaiseen ja spekulatiiviseen fysiikkaan, kuten supersäieteoriaan. Toisaalta inflaationkaan taustalla olevaa fysiikkaa ei ymmärretä vielä täysin tyydyttävästi. Rakennettaessa varhaisen maailmankaikkeuden teoriaa onkin syytä pitää kaikki potentiaaliset vaihtoehdot mukana siihen asti, kunnes havainnot tekevät eron niiden välille. Sykliset mallit ennustavat merkittävää ei-gaussisuutta ja gravitaatioalloseille heikkoa sinistä spektriä [33], joten tulevat kosmologiset havainnot nousevat entistä tärkeämpään rooliin. Syklisiin malleihin voi tutustua tarkemmin lähteiden [14], [32] ja [33] avulla.

Mainittakoon vielä, että bouncing-mallit voidaan yhdistää inflaation kanssa. Nämä mallit sisältävät inflaation vahvuudet, mutta välttävät ikävän singulariteetti-ongelman. Esimerkkejä tällaisista konstruktioista löytyy lähteistä [35], [36] ja [37].

## 7 JOHTOPÄÄTÖKSET

Inflaatio on hypoteesi. Se selittää standardikosmologian laakeus-, horisontti- ja monopoliongelman. Havaittava maailmankaikkeus on peräisin pienestä kausaalista alueesta, jonka mielivaltainen kaarevuus on tasoittunut lähes eksponentiaalisen laajenemisen vuoksi. Avaruuden koon moninkertaistuessa kaikki lukumäärätiheydet dilutoituivat pois, jolloin maailmankaikkeus tyhjeni kaikesta edeltävästä materiasta ja säteilystä.

Inflaatio tarjoaa myös mekanismin varhaisten tiheysperturbaatioiden synnylle. Inflaatioprosessin aikana inflatonkentän kvanttifluktuaatiot synnyttävät perturbaatioita, jotka voidaan kosmologisen häiriöteorian mukaan jakaa skalaari-, vektori- ja tensoriperturbaatioihin. Vektoriperturbaatiot hajoavat avaruuden laajetessa ja eivät siten kontribuoi universumin dynamiikkaan. Inflaation aikana comoving-Hubblerin säde kutistuu, jolloin eri comoving-skaalat siirtyvät superhorisonttiin. Kaarevuusperturbaation  $\mathcal{R}_k$  ja tensoriperturbaation  $\hat{E}_{ij}^k$  arvot jäävät superhorisontissa. Niiden primordiaaliset arvot horisontin ylityksen aikaan määräävät alkuehdot universumin myöhemmälle kehitykselle, kun perturbaatiot palaavat takaisin horisontin sisälle säteily- ja materiadominanssissa. Kuva 15 tiivistää kaarevuusperturbaation kehityksen.



Kuvio 15: Yhteenveto inflaation generoiman kaarevuusperturbaation  $\mathcal{R}_k$  kehityksestä. Subhorisontissa syntynyt perturbaatio ylittää horisontin ja sen arvo jäätyy, kun comoving-Hubblerin säde kutistuu perturbaatiota vastaavaa skaalaa pienemmäksi. Radiaatio- ja materiadominanssissa comoving-Hubblerin säde alkaa kasvaa ja  $\mathcal{R}_k$  palaa horisontin sisälle. Tällöin sen jäänyt primordiaalinen arvo aiheuttaa häiriöitä gravitaatiopotentiaaliin ja sitä kautta taustasäteilyn lämpötilaan. Havaituista taustasäteilyn lämpötilafluktuaatioista voidaan saada tietoa inflaatiosta, kun subhorisontin evoluutio otetaan huomioon. Kuva lähteestä [7].

Ennen kaikkea inflaatio on testattavissa oleva hypoteesi. Yksinkertaisimmat yhden kentän inflaatiomallit ennustavat superhorisontin perturbaatioiden olevan adia-

baattisia, gaussisia ja lähes skaalainvariantteja. Ennusteet ovat sopusoinnuissa taustasäteilystä ja galaksien jakaumasta saadun informaation kanssa. Kiistattomasti todiste inflaation puolesta olisi varhaisten gravitaatioaaltojen löytyminen. Gravitaatioaalto voivat jättää havaittavan jäljen taustasäteilyn polarisaatioon. Erityisesti B-moodin esiintyminen polarisaatiossa olisi käytännössä varma merkki inflaatiosta. Tällöin pystyttäisiin testaamaan slow-roll -inflaation antamaa relaatiota  $r = -8n_T$  ja saataisiin tietoa inflaation aikaisesta energiaskaalasta. Tällä hetkellä tensorimoodien kontribuutiolle on saatu vain ylärajoja.

Inflaatio ei selitä hyvin varhaisen maailmankaikkeuden tapahtumia tyhjentävästi. Se ei poista alkuräjähdysteoriassa esiintyvää singulariteettia. Se vaatii erityisiä alkuehtoja toimiakseen sekä johtaa usein ikuiseen inflaatioon ja huonosti ymmärretyn multiversumin käsitteeseen. Nämä oletettavasti liittyvät kvanttigravitaatioon ja näkyvää inflaatiovaihetta korkeaenergiseen fysiikkaan. Standardimallin hiukkasten syntyminen reheating- ja preheating-prosesseissa sekä prosessien vaikutusta havaintoihin ei tunneta vielä täsmällisesti. Inflaatioteorian oleellimmat rakennuspalikat eli kenttä  $\varphi$  ja potentiaali  $V(\varphi)$  ovat hämärän peitossa, sillä niiden alkuperää ei tunneta. Useita ehdotuksia toki on, mutta yksittäistä mallia on vaikea suosia nykyisten mittaustarkkuuksien rajoissa. Koska erilaisia inflaatiomalleja on tusinoittain, koko inflaatioparadigman falsifointi on hankalaa. Inflaatiolle on olemassa kilpailevia teorioita, kuten supersäieteoriaan perustuvat sykliset mallit, mutta niiden yleinen ennuste sinisestä spektristä ei näytä olevan sitä, mitä taustasäteilyssä havaitaan.

Yhä tarkempia kosmologisia havaintoja tarvitaan inflaation testaamiseksi. Euroopan avaruusjärjestö ESA on suunnitellut laukaisevansa Euclid-avaruusluotaimen vuonna 2020 [38]. Luotaimen on tarkoitus kartoittaa universumin laajenemishistoriaa ja rakenteiden kehitystä mittaamalla galaksien punasiirtymiä sekä jakaumaa taivaalla. Suuren mittakaavan rakennetta tutkimalla Euclid kykenee asettamaan yhä tiukempia rajoja perturbaatioiden tehospektrille, ei-gaussisuudelle ja ei-adiabaattisuudelle. Galaksien jakauman lisäksi taustasäteilyä tullaan kartoittamaan entistä tarkemmin. Tällä hetkellä BICEP3-teleskooppi mittaa taustasäteilyn polarisaatiota etelänavalla [39]. Edellinen BICEP2-teleskooppi löysi vuonna 2014 merkkejä B-moodeista, mutta nämä osoittautuivat Linnunradan pölystä johtuvaksi ilmiöksi [39]. Taustasäteilyä tulee tutkimaan myös NASAn PIXIE-avaruusluotain ja PIPER-teleskooppi [40, 41]. Näiden lisäksi muita inflaation kannalta mielenkiintoisia projekteja ovat Japanin LiteBIRD [42] sekä ESAn PRISM ja CoRE [43, 44].

Tulevaisuus näyttää valoisalta ainakin inflaatioparadigman testaamisen kannalta. Mittaustarkkuuksien yhä parantuessa voidaan eri mallit erotella paremmin toisistaan. Kokeiden selkeä paino on gravitaatioaaltojen havaitsemisessa, sillä se on tällä hetkellä ainoa keino "todistaa" inflaatio tapahtuneeksi. Siihen asti inflaatio on vain potentiaalinen, mutta erittäin lupaava hypoteesi kuvaamaan varhaisen maailmankaikkeuden tapahtumia.

## LÄHTEET

- [1] Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press 2014.
- [2] Planck 2015 results, XIII, Cosmological parameters, [arxiv.org/abs/1502.01589](https://arxiv.org/abs/1502.01589) (2015).
- [3] David H. Lyth and Andrew R. Liddle, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press 2006.
- [4] Carlo Giunti and Chung W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford University Press 2014.
- [5] J. Yadav, S. Bharadwaj, T.R. Seshadri, Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One, [arxiv.org/abs/astro-ph/0504315](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0504315) (2005).
- [6] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Pearson New International Edition, Pearson 2014.
- [7] Daniel Baumann, TASI Lectures on Inflation, [arxiv.org/abs/0907.5424](https://arxiv.org/abs/0907.5424) (2012).
- [8] Antonio Riotto, Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations, [arxiv.org/abs/hep-ph/0210162](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210162) (2002).
- [9] Viatcheslav Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press 2005.
- [10] Daniel Baumann, *The Physics of Inflation*, DAMTP Lecture Notes, [damtp.cam.ac.uk/user/db275/TEACHING/INFLATION/Lectures.pdf](http://damtp.cam.ac.uk/user/db275/TEACHING/INFLATION/Lectures.pdf) (2012).
- [11] David H. Lyth and Andrew R. Liddle, *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*, Cambridge University Press 2012.
- [12] Planck 2015 results, XX, Constrains on Inflation, [arxiv.org/pdf/1502.02114v1.pdf](https://arxiv.org/pdf/1502.02114v1.pdf) (2015).
- [13] James Fergusson, Part III Cosmology - Lecture Notes, [damtp.cam.ac.uk/user/examples/3R2La.pdf](http://damtp.cam.ac.uk/user/examples/3R2La.pdf) (2015).
- [14] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan, *Primordial Cosmology*, Oxford University Press 2013.
- [15] Lev Kofman, Andrei Linde and Alexei A. Starobinsky, Towards the Theory of Reheating After Inflation, [arxiv.org/abs/hep-ph/9704452](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9704452) (1997).
- [16] Marco Bruni, Sabino Matarrese, Silvia Mollerach and Sebastiano Sonego, Perturbations of spacetime: gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond, [arxiv.org/abs/gr-qc/9609040](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9609040) (1997).
- [17] Karim A. Malik and David R. Matravers, *A Concise Introduction to Perturbation Theory in Cosmology*, [arxiv.org/abs/0804.3276](https://arxiv.org/abs/0804.3276) (2008).
- [18] Hannu Kurki-Suonio, *Cosmological Perturbation Theory*, part 1, [theory.physics.helsinki.fi/cpt/CosPer.pdf](http://theory.physics.helsinki.fi/cpt/CosPer.pdf) (2015).

- [19] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press 1995.
- [20] David H. Lyth and David Wands, Generating the curvature perturbation without an inflaton, [arxiv.org/abs/hep-ph/0110002](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0110002) (2002).
- [21] David H. Lyth, Carlo Ungarelli and David Wands, The primordial density perturbation in the curvaton scenario, [arxiv.org/abs/astro-ph/0208055](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0208055) (2002).
- [22] Hannu Kurki-Suonio, *Cosmological Perturbation Theory, part 2*, [theory.physics.helsinki.fi/cpt/CosPer2.pdf](http://theory.physics.helsinki.fi/cpt/CosPer2.pdf) (2015).
- [23] The 3D power spectrum of galaxies from the SDSS, [arxiv.org/abs/astro-ph/0310725](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310725) (2003).
- [24] Planck 2015 results, XVII, Constraints on primordial non-Gaussianity, [arxiv.org/abs/1502.01592](https://arxiv.org/abs/1502.01592) (2015).
- [25] Jerome Martin, Christophe Ringeval and Vincent Vennin, *Encyclopaedia Inflationaris*, [arxiv.org/abs/1303.3787](https://arxiv.org/abs/1303.3787) (2013).
- [26] Alan H. Guth, Eternal inflation and its implications, [arxiv.org/abs/hep-th/0702178](https://arxiv.org/abs/hep-th/0702178) (2007).
- [27] Anna Ijjas, Paul J. Steinhardt and Abraham Loeb, Inflationary paradigm in trouble after Planck2013, [arxiv.org/abs/1304.2785](https://arxiv.org/abs/1304.2785) (2013).
- [28] Anna Ijjas, Paul J. Steinhardt and Abraham Loeb, Inflationary schism after Planck2013, [arxiv.org/abs/1402.6980](https://arxiv.org/abs/1402.6980) (2014).
- [29] Anna Ijjas, Paul J. Steinhardt, Implications of Planck2015 for inflationary, ekpyrotic and anamorphic bouncing cosmologies, [arxiv.org/abs/1512.09010](https://arxiv.org/abs/1512.09010) (2015).
- [30] Alan H. Guth, David I. Kaiser and Yasunori Nomura, Inflationary paradigm after Planck 2013, [arxiv.org/abs/1312.7619](https://arxiv.org/abs/1312.7619) (2014).
- [31] Andrei Linde, Inflationary Cosmology after Planck 2013, [arxiv.org/abs/1402.0526](https://arxiv.org/abs/1402.0526) (2014).
- [32] Diana Battfeld and Patrick Peter, A Critical Review of Classical Bouncing Cosmologies, [arxiv.org/abs/1406.2790](https://arxiv.org/abs/1406.2790) (2014).
- [33] Jean-Luc Lehnars, Ekpyrotic and Cyclic Cosmology, [arxiv.org/abs/0806.1245](https://arxiv.org/abs/0806.1245) (2009).
- [34] Jean-Luc Lehnars and Paul J. Steinhardt, Planck 2013 results support the cyclic universe, [arxiv.org/abs/1304.3122](https://arxiv.org/abs/1304.3122) (2013).
- [35] Felipe T. Falciano, Marc Lilley and Patrick Peter, A classical bounce: constraints and consequences, [arxiv.org/abs/0802.1196](https://arxiv.org/abs/0802.1196) (2008).
- [36] Taotao Qiu and Yu-Tong Wang, G-Bounce Inflation: Towards Nonsingular Inflation Cosmology with Galileon Field, [arxiv.org/abs/1501.03568](https://arxiv.org/abs/1501.03568) (2015).
- [37] Hai-Guang Li, Yong Cai and Yun-Song Piao, Towards the bounce inflationary gravitational wave, [arxiv.org/abs/1605.09586](https://arxiv.org/abs/1605.09586) (2016).
- [38] *Cosmology and Fundamental Physics with the Euclid Satellite*, [arxiv.org/abs/1606.00180](https://arxiv.org/abs/1606.00180) (2016).

- [39] Optical Characterization of the BICEP3 CMB Polarimeter at the South Pole, [arxiv.org/abs/1607.04567](https://arxiv.org/abs/1607.04567) (2016).
- [40] The Primordial Inflation Explorer (PIXIE): A Nulling Polarimeter for Cosmic Microwave Background Observations, [arxiv.org/abs/1105.2044](https://arxiv.org/abs/1105.2044) (2011).
- [41] The Primordial Inflation Polarization Explorer, [arxiv.org/abs/1607.06172](https://arxiv.org/abs/1607.06172) (2016).
- [42] Mission design of LiteBIRD, [xxx.lanl.gov/abs/1311.2847](https://xxx.lanl.gov/abs/1311.2847) (2013).
- [43] PRISM (Polarized Radiation Imaging and Spectroscopy Mission): An Extended White Paper, [arxiv.org/abs/1310.1554](https://arxiv.org/abs/1310.1554) (2014).
- [44] COre (Cosmic Origins Explorer) A White Paper, [arxiv.org/abs/1102.2181](https://arxiv.org/abs/1102.2181) (2011).