Differentiaalimuodot ja niiden integrointi euklidisten avaruuksien alimonistoilla

Antti Kosonen

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2016

Tiivistelmä: Antti Kosonen, *Differentiaalimuodot ja niiden integrointi euklidisten avaruuksien alimonistoilla*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 82 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2016.

Differentiaalimuodot ovat oleellinen osa modernin matematiikan koneistoa. Niitä käytetään paitsi geometrian tutkimuksessa, myös teoreettisen fysiikan kentällä muun muassa elektrostatiikassa, mekaniikassa ja termodynamiikassa. Differentiaalimuodot elävät luonnollisesti sileillä monistoilla, jotka puolestaan esiintyvät kaikkialla, missä on tarve puhua siisteistä joukoista koordinaattien avulla.

Tässä tutkielmassa tutustutaan differentiaalimuotojen perusteoriaan alkaen euklidisten avaruuksien alimonistoista. Tämän jälkeen määritellään monistojen tangentti- ja kotangenttiavaruudet, k-muotojen ulkoinen tulo, differentiaalimuotojen ulkoinen derivaatta sekä lopulta differentiaalimuodon integraali yli suunnistetun moniston. Tutkielman tärkeimpänä yksittäisenä tavoitteena on esittää ja todistaa Stokesin ja Cartanin lauseena tunnettu teoreema. Tämä tulos mahdollistaa differentiaali- ja integraalilaskennasta tuttujen Gaussin, Greenin ja Stokesin lauseiden esittämisen yhtenäisellä tavalla, samalla yleistäen niiden sanoman paitsi korkeampiin ulottuvuuksiin, myös euklidisia avaruuksia abstraktimpiin joukkoihin.

Tutkielmassa käsitteitä ja konstruktioita pyritään tarkastelemaan unohtamatta niihin liittyvää geometriaa. Lisäksi työssä tarkastellaan edellä mainittuihin fysiikan aihepiireihin liittyviä esimerkkejä monistojen ja differentiaalimuotojen tarjoamassa kontekstissa. Kokonaisuutena työn on tarkoitus toimia johdatuksena näihin differentiaaligeometriaksi kutsutun matematiikan alan keskeisiin työkaluihin ja antaa välähdys siitä, mitä niillä voi tehdä. Nämä työkalut ovat välttämättömiä jatkettaessa aiheessa eteenpäin, lisättäessä monistoille edelleen rakenteita ja perehdyttäessä niihin syvällisemmin.

Sisältö

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä differentiaalimuotojen ja sileiden monistojen teoriaa tasolla, joka riittää Stokesin ja Cartanin lauseena tunnetun teoreeman esittämiseen ja todistamiseen. Tämä elegantti tulos tarjoaa sekä yleistyksen että yhtenäisen esitystavan klassisille Gaussin, Greenin ja Stokesin lauseille. Tätä varten tutustutaan useisiin määritelmiin ja käsitteisiin, joihin on pakkautunut runsaasti informaatioita niiden hioutuessa matematiikan kehityksessä. Tällaisten käsitteiden avulla tulokset voidaan kuitenkin esittää todella ytimekkäästi ja helposti muistettavalla tavalla. Matkan varrella tutkielmassa pysähdytään katsomaan, kuinka esiteltävät käsitteet liittyvät geometriaan ja erilaisiin fysiikkaan liittyviin sovelluksiin. Sovellusten aihepiireiksi ovat valikoituneet termodynamiikka, virtausmekaniikka ja sähköoppi. Lähtökohtaisesti käytössä on usean reaalimuuttujan differentiaali- ja integraalilaskennan sekä lineaarialgebran koneisto, mukaanlukien polku- ja pintaintegraalit euklidisissa avaruuksissa. Lisäksi tutkielmassa tarvitaan joukko erilaisia merkintöjä. Lukijaa ajatellen on eräitä merkintöjä ja määritelmiä koottu tutkielman loppuun liitteisiin A: Merkintöjä sekä B: Määritelmiä.

Differentiaalimuotoihin perehtyminen alkaa tutustumisella monistoihin, joilla tässä tutkielmassa tarkoitetaan euklidisten avaruuksien alimonistoja. Sileä n-ulotteinen monisto on väljästi sanottuna siisti joukko, jonka pisteistä voidaan puhua koordinaattien avulla. Moniston n-ulotteisuus tarkoittaa, että moniston pisteiden esittämiseen riittävä koordinaattien määrä on n. Sileä kaksiulotteinen pinta kolmiulotteisessa euklidisessa avaruudessa on esimerkki kaksiulotteisesta sileästä monistosta. Yleisesti monistot ovat kuitenkin paljon enemmän. Ne ovat itsenäisiä joukkoja, riippumattomia siitä, onko niiden ympärillä jotakin muuta avaruutta tai ”tilaa”.

Euklidisista avaruuksista tuttu differentiaalilaskenta on mahdollista siirtää monistoille, kunhan niille annetaan riittävästi rakennetta. Differentiaalilaskenta perustuu lineaarisiin operaatioihin. Niinpä tarkasteltavan moniston jokaiseen pisteeseen p liitetään abstrakti, mutta geometrisesti tulkittavissa oleva vektoriavaruus, jota kutsutaan tangenttiavaruudeksi pisteessä p. Kullekin tangenttiavaruudelle duaalista vektoriavaruutta kutsutaan puolestaan kotangenttiavaruudeksi, ja siellä eläviä lineaarisia funktioita kovektoreiksi tai 1-muodoiksi. Nämä 1-muodot operoivat tangenttiavaruuden vektoreilla. Muotojen algebra on alternoivien tensorien algebraa, jonka tekee ainutlaatuiseksi muotojen ulkoinen tulo. Sen avulla voidaan 1-muodoista edelleen muodostaa korkeamman kertaluvun alternoivia funktioita, k-muotoja, joilla paljastuu olevan selkeä geometrinen merkitys.

Differentiaalimuodot ovat hyvin käyttäytyviä kuvauksia, jotka liittävät jokaiseen moniston pisteeseen k-muodon. Differentiaalimuodot perivät laskutoimituksekseen muotojen ulkoisen tulon. Lisäksi differentiaalimuodoille määritellään uniikki derivointioperaatio, ulkoinen derivaatta, joka yhdessä ulkoisen tulon kanssa riittää paitsi funktion gradientin, vektorikentän divergenssin ja roottorin esittämiseen, myös yleistämiseen. Nämä derivointioperaatiot ovat samat, joita tarvitaan edellä mainittujen klassisten lauseiden esittämiseen perinteisellä tavalla.

Differentiaalimuodot tarjoavat koordinaateista riippumattoman tavan integroida monistoilla. Kuten differentiaalilaskenta, myös integraalilaskenta vaatii kuitenkin lisää rakennetta siirtyäkseen monistoille. Tämä tarkoittaa moniston suunnistamista, joka on fysikaalisesti hahmotettavissa positiivisen liikesuunnan valintana esimerkiksi nesteen virratessa pinnan läpi. Kun tämä on tehty, ei erillisiä määritelmiä erityyppisille integraaleille enää tarvita; k-muotoja integroidaan aina k-ulotteisten monistojen yli. Tutkielman lopuksi tutustutaan reunallisiin monistoihin. Tämä käsite yhdessä aiempien määritelmien kanssa mahdollistaa Stokesin ja Cartanin lauseen esittämisen. Tulos yhdistää differentiaalimuodon ulkoisen derivaatan integraalin yli moniston itse differentiaalimuodon integraaliin yli moniston reunan.

1 Monistot ja sileät rakenteet

1.1 Monistoista

Aloitetaan tutustumalla differentiaalimuotojen ”luonnolliseen elinympäristöön”, *sileisiin monistoihin*. Tämän luvun tavoiteena on esitellä sileiden monistojen perusteoriaa differentiaalimuotojen käsittelyyn riittävällä tasolla. Tärkeitä tässä luvussa käytettyjä lähteitä ovat [8], [10], [13] ja [15].

Oletetaan mielikuvan luomiseksi, että halutaan tutustua jonkin maa-alueen M maastonmuotoihin. Tällöin on usein järkevää etsiä käsiinsä alueen M geografiaa kuvaava kartta. Mikäli aluetta M ei saada järkevästi esitettyä yhdellä kartalla, jaetaan se pienempiin osiin. Kun kustakin osasta tehdään oma karttansa, tulee koko alue esitetyksi näistä kartoista koostuvan kartaston avulla. Alueesta M pystytään kartaston avulla puhumaan käyttämällä koordinaatteja, joiden avulla saadaan kartan ja maaston välille yksi-yhteen -vastaavuus. Nämä ajatukset mielessä asetetaan ensimmäinen määritelmä.

Määritelmä 1.1 (Kartta ja kartasto)**.** Olkoot $M \subset \mathbb{R}^m$ ja $U \subset M$ epätyhjiä joukkoja, ja olkoon $n \leq m$ positiivinen kokonaisluku. Jos on olemassa kuvaus $x : U \to \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa ehdot

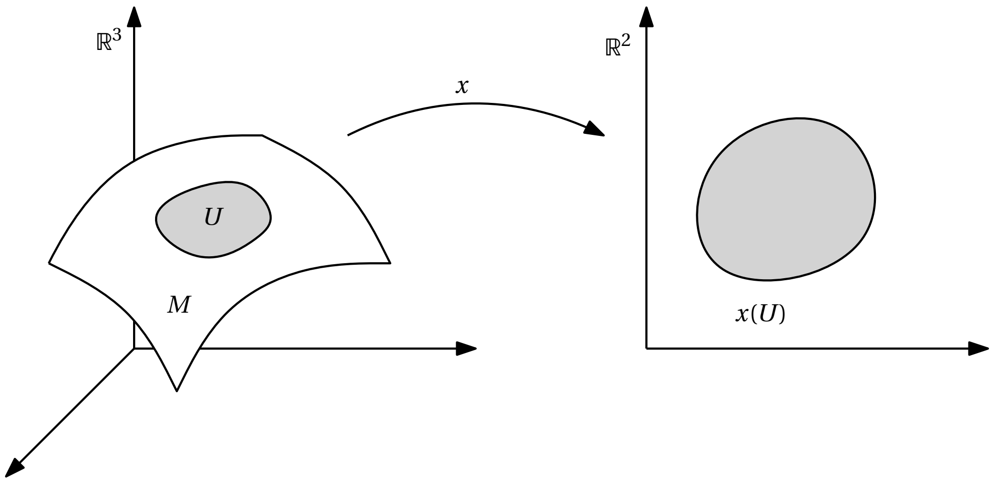
(i) kuvajoukko $x(U)$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja

(ii) kuvauksella x on jatkuva käänteiskuvaus $x^{-1}: x(U) \to \mathbb{R}^m$ siten, että x on homeomorfismi joukkojen U ja $x(U)$ välillä,

niin paria (U, x) kutsutaan joukon M osan U *kartaksi* tai *koordinaattijärjestelmäksi*. Joukko U on karttaan (U, x) liittyvä *koordinaattiympäristö*, ja kuvaus x on *karttakuvaus* tai *koordinaattikuvaus*. Jos on olemassa karttojen (U_i, x^i) kokoelma $\mathscr{A} := \{(U_i, x^i) : M = \cup_i U_i\}$, niin $\mathscr{A}$ on joukon M *kartasto*.

Kartan (U, x) olemassaolo mahdollistaa sen, että joukon M osan U pisteistä voidaan puhua niin kutsuttujen *lokaalien koordinaattien* $x(p) = \big(x_1(p), \ldots, x_n(p)\big)$ avulla. Komponenttikuvauksia x_i kutsutaan *koordinaattifunktioiksi*. Huomaa, että jos $y : U \to \mathbb{R}^n$ on toinen karttakuvaus, sen avulla joukolle U saatavat koordinaatit eivät yleensä ole samat kuin karttakuvauksen x avulla saatavat [1]. Huomionarvoista on myös, että jos joukolle M on löydettävissä kartasto $\mathscr{A}$, ei se ole lainkaan uniikki; voidaanhan samasta maastostakin laatia hyvin erilaisia karttoja ja kartastoja. Kartan toimintaa havainnollistaa kuva 1.

Sovellusten kannalta keskeinen oivallus on, että kartan idean ei tarvitse rajoittua maastonmuotoihin, vaan täsmälleen samalla ajatuksella voidaan käsitellä laajaa joukkoa



Kuva 1. Karttakuvaus x kuvaa moniston M osajoukon U euklidisen avaruuden osajoukoksi. Tässä monisto M on kaksiulotteinen pinta, joten karttakuvauksen x maalijoukko on osa avaruutta $\mathbb{R}^2$.

erilaisia ilmiöitä. Maa-alueen sijaan joukko M voisi yhtä hyvin esittää esimerkiksi suhteellisuusteorian aika-avaruutta tai jonkin mekaanisen systeemin mahdollisia konfiguraatiota. Aika-avaruuden kuvaamiseen tarvitaan neljä koordinaattia; kolme avaruuskoordinaattia sekä aikakoordinaatti. Mekaanisen systeemin konfiguraation kuvaamiseen puolestaan tarvitaan systeemin vapausasteiden verran koordinaatteja, ja näiden niin kutsuttujen yleistettyjen koordinaattien valinta tälle systeemille vastaa kartan määrittelyä systeemin konfiguraatioiden joukolle [15]. Matemaattisesti näitä tapauksia voidaan käsitellä samalla tavalla *moniston* käsitteen avulla.

Määritelmä 1.2 (Topologinen monisto)**.** Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Jos joukon $M \subset \mathbb{R}^m$ jokaisella pisteellä p on ympäristö $U \subset M$, johon liittyy jokin karttakuvaus $x : U \to \mathbb{R}^n$, niin joukko M on *n-ulotteinen topologinen monisto.* Lukua n kutsutaan moniston *M dimensioksi.*

Huomautus 1.3. Edellä määritelty monisto on itse asiassa Euklidisen avaruuden *alimonisto.* Yleisesti ottaen moniston M ei tarvitse olla euklidisen avaruuden osajoukko, vaan monistoiksi voidaan tulkita myös paljon abstraktimpia joukkoja. Esimerkiksi äärellisulotteisten vektoriavaruuksien välisten lineaarikuvauksien virittämät avaruudet voidaan nähdä monistoina [10]. Moniston määritelmä saa kuitenkin yksinkertaisemman muodon, kun rajoitutaan tarkastelemaan euklidisen avaruuden osajoukkoja, ja laskentoa monistoilla on silti mahdollista kehittää helposti yleistettävällä tavalla. Yleisempi määritelmä topologiselle monistolle on esitetty esimerkiksi lähteessä [10, s. 2]. Kaikki tämän tutkielman todistukset on toteutettu niin, että ne toimivat myös tässä yleisemmässä tapauksessa.

Esimerkki 1.4 (Pallopinta)**.** Avaruuden $\mathbb{R}^m$ n-ulotteiset pinnat ovat n-ulotteisia monistoja. Tärkeä esimerkki pinnasta on kaksiulotteinen pallopinta

$$\mathbb{S}^2 := \{p \in \mathbb{R}^3 : \|p\| = 1\} = \partial B^3(0,1).$$

Pallopinnalle voidaan valita useita erilaisia karttoja.

(a) ”Pohjoinen pallonpuolisko” $U := \{p \in \mathbb{S}^2 : \ p_3 > 0\}$ ja ”eteläinen pallonpuolisko” $W := \{p \in \mathbb{S}^2 : \ p_3 < 0\}$ saadaan esitettyä projektion $y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $y(p_1, p_2, p_3) = \big(p_1, p_2\big)$ avulla käyttämällä karttoina pareja $(U, y|_U)$ ja $(W, y|_W)$. Projektion y rajoittumat joukkoihin U ja V ovat homeomorfismeja. Esimerkiksi rajoittuman $y|_U : U \to B^2(0,1)$ käänteiskuvaus on $y|_U^{-1} : B^2(0,1) \to U$,

$$y|_U^{-1}(q_1, q_2) = \left(q_1, q_2, \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2}\right).$$

Huomaa, että nämä kartat eivät riitä koko pallopinnan esittämiseen, vaan vastaavia karttoja tarvitaan kokonaisuudessaan kuusi kappaletta.

(b) Olkoon $C \subset \mathbb{S}^2$ se isoympyrän puolikas, joka sisältää vektorien $\pm e^3$ ja e^2 kärkipisteet. Määritellään kulmafunktio $\theta : \mathbb{R}^3 - C \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\theta(p) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}\right) + \frac{\pi}{2}, \text{ kun } p_1 \geq 0, \\ -\arcsin\left(\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}\right) - \frac{\pi}{2}, \text{ kun } p_1 < 0. \end{cases}$$

Tällöin θ palauttaa pisteen p ”atsimuuttikulman” väliltä $]-\pi, \pi[$. Nyt pallopinnalle saadaan joukkoa C lukuunottamatta kartta projisoimalla se ensin sylinteripinnalle, ja levittämällä sylinteripinta edelleen tasoksi kuvan 2 mukaisesti. Tällöin karttana on kuvaus y,

$$y(p) = \big(\theta(p), p_3\big),$$

rajoitettuna joukkoon $\mathbb{S}^2 - C$.

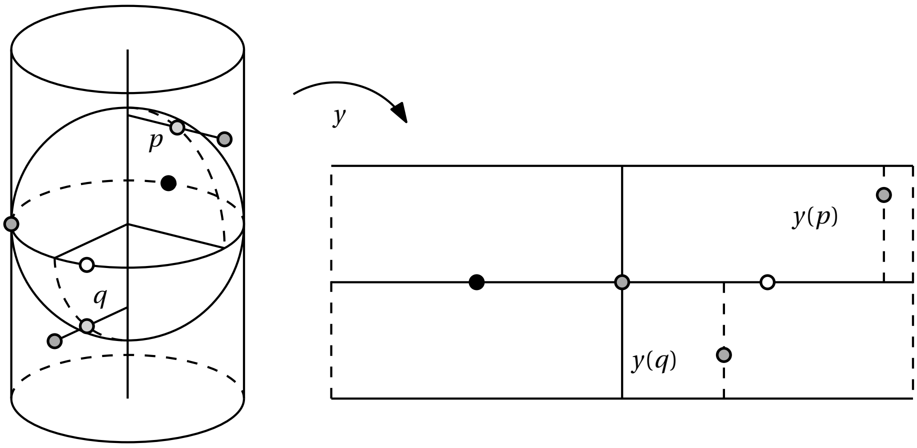
(c) Määritellään vielä funktio $\varphi : \mathbb{R}^3 - \{p \in \mathbb{R}^3 : \ p_3 = \pm 1\} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$\varphi(p) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}\right).$$

Nyt φ palauttaa ”elevaatiokulman” väliltä $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Funktiot θ ja φ ovat tavalliset ”pallokulmakoordinaatit”. Karttakuvauksen (θ, φ) käänteiskuvaus on usein käytetty parametriesitys $F : \left] -\pi, \pi \right[\times \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$,

$$F(q_1, q_2) = \big(\cos(q_1)\cos(q_2), \sin(q_1)\cos(q_2), \sin(q_2)\big),$$

joka saadaan rajoittamalla pallokoordinaattikuvaus vakiosäteelle.



Kuva 2. Sylinteriprojektio. Isoympyrän kaari C on se osa pallopintaa, josta pallopinta ”repäistään auki”.

Joskus on tarpeellista puhua avoimista, suljetuista ja kompakteista joukoista monistoilla. Olkoon tätä varten (U, x) moniston M osan U kartta. Sanotaan, että joukko $W \subset U$ on *avoin* monistolla M, jos $x(W)$ on avoin perinteisessä mielessä euklidisen avaruuden osajoukkona. Vastaavalla tavalla määritellään *suljetut* ja *kompaktit* joukot monistoilla.

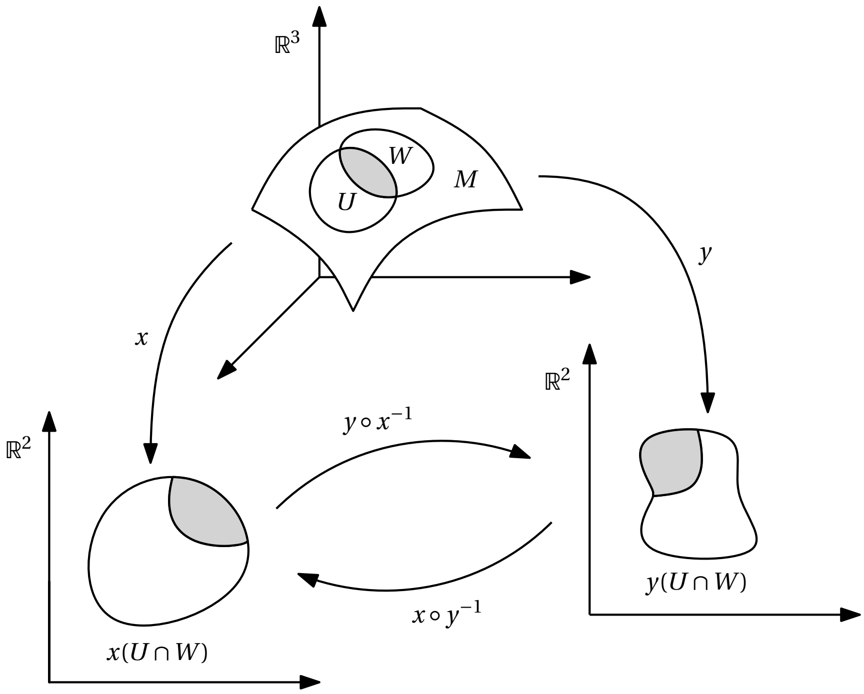
n-ulotteisilla monistoilla halutaan pystyä laskemaan vastaavasti kuin n-ulotteisessa euklidisessa avaruudessa. Erityisesti halutaan pystyä analysoimaan monistoilla määriteltyjä kuvauksia välittämättä siitä, onko monisto osa jotakin laajempaa ympäröivää avaruutta. Esimerkiksi edellä mainitulla pallopinnalla $\mathbb{S}^2$ määritellyn kuvauksen jatkuvuudesta tai differentioituvuudesta ei edes voida puhua tarkastelemalla pallopintaa avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukkona, sillä $\mathbb{S}^2$ ei ole avoin avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Jos siis halutaan kehittää mahdollisesta ulkopuolisesta avaruudesta riippumaton tapa laskea monistoilla, on kuvausten jatkuvuus ja differentioituvuus karakterisoitava uudelleen.

Jatkoa varten on käytännöllistä varata sana *funktio* tarkoittamaan nimenomaan reaaliarvoisia kuvauksia. Monistolla M määritellyille funktioille sovitaan käytettävän tavanomaisia *pisteittäisiä laskutoimituksia*. Jos f ja g ovat funktioita ja $c \in \mathbb{R}$ on jokin luku, niin tämä tarkoittaa, että

$$\begin{aligned} (f+g)(p) &= f(p)+g(p), \\ (cf)(p) &= cf(p), \qquad \text{ja} \\ (fg)(p) &= f(p)g(p) \end{aligned} \tag{1.1}$$

kaikille pisteille $p \in M$ funktioiden f ja g määrittelyjoukoissa. Myöhemmin monistoilla tullaan määrittelemään useita erilaisia kuvauksia. Näihin kaikkiin käytetään tätä samaa ”pisteittäisten laskutoimitusten periaatetta”: jos jokin laskutoimitus on mahdollista toteuttaa kahden kuvauksen arvoilla jokaisessa pisteessä, niin tämä laskutoimitus voidaan laajentaa koskemaan myös itse kuvauksia [7].

Olkoon (U, x) moniston M osan U kartta. Funktion f sanotaan olevan *jatkuva monistolla* M, jos yhdistetty kuvaus $f \circ x^{-1}$, funktion f *esitys lokaaleissa koordinaateissa*, on jatkuva. Tämä määritelmä on hyvä, sillä jatkuvuus ei nyt riipu valitusta kartasta; ovathan kaikki karttakuvaukset homeomorfismeja. Erityisen tärkeää on pystyä differentioimaan monistoilla määritelyjä funktioita. Tätä varten olisi suoraviivaista asettaa differentioituvuudelle edellisen kaltainen määritelmä: ”Olkoon (U, x) moniston M osan U kartta. Funktion f sanotaan olevan differentioituva monistolla M, mikäli yhdistetty kuvaus $f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on differentioituva.” Järkevyydestään huolimatta tämä ei kuitenkaan ole riittävä vaatimus. Jos nimittäin (U, y) on jokin toinen kartta, niin funktio $f \circ y^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ei välttämättä ole differentioituva. Tämä voidaan nähdä kirjoittamalla $f \circ y^{-1} = (f \circ x^{-1}) \circ (x \circ y^{-1})$. Vaikka funktio $f \circ x^{-1}$ olisikin differentioituva, ei mikään takaa kuvauksen $x \circ y^{-1}$ ja siten myöskään funktion $f \circ y^{-1}$ differentioituvuutta. Differentioituvuus jäisi siis riippuvaiseksi valitusta karttakuvauksesta, vaikka sen kuuluisi olla funktion itsensä ominaisuus jatkuvuuden tapaan. Näin ollen käytettäville kartastoille tulee asettaa joitakin lisävaatimuksia.



Kuva 3. Koordinaattienvaihto, kun monisto M on pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Kuva pohjautuu lähteeseen [5, s.34]

Määritelmä 1.5 (C^∞-yhteensopivuus ja sileä rakenne)**.** Olkoon M topologinen monisto ja olkoot $U, W \subset M$ koordinaattiympäristöjä. Sanotaan, että kartat (U, x) ja (W, y) ovat C^∞*-yhteensopivat*, jos joko $U \cap W = \emptyset$, tai niin kutsutut *koordinaattienvaihdot*

$$\begin{cases} x \circ y^{-1} : y(U \cap W) \to x(U \cap W), \\ y \circ x^{-1} : x(U \cap W) \to y(U \cap W) \end{cases}$$

ovat C^∞-kuvauksia. Jos moniston M kartasto koostuu C^∞-yhteensopivista kuvauksista, sanotaan kartastoa lyhyesti C^∞*-kartastoksi*. C^∞-kartaston sanotaan edelleen olevan *täysilukuinen*, jos se ei sisälly mihinkään suurempaan C^∞ -kartastoon. Täysilukuista C^∞ -kartastoa kutsutaan *sileäksi rakenteeksi*. Koordinaattienvaihtoa havainnollistaa kuva 3.

C^∞ -kartasto on siis sellainen kokoelma karttoja, jonka mistä tahansa karttakuvauksista muodostetut koordinaattienvaihdot ovat diffeomorfismeja. Jos moniston M kartastona käytetään jotakin C^∞-kartastoa, niin tämän kartaston kannalta edellä esitetty ehdotus riittää takaamaan kuvauksen f differentioituvuuden. Periaatteessa monistolle M voitaisiin kuitenkin valita useita C^∞-kartastoja, jotka määräisivät samat monistolla M differentioituvat funktiot. Tämän vuoksi sileältä rakenteelta vaaditaan täysilukuisuutta: Jos kartta (U, x) on yhteensopiva täysilukuisen kartaston $\mathscr{A}$ kaikkien karttojen kanssa, niin muita kartan (U, x) kanssa C^∞ yhteensopivia karttoja ei ole, vaan ne kaikki kuuluvat jo tähän samaan täysilukuiseen kartastoon.

Määritelmä 1.6 (Sileä monisto)**.** Olkoon M topologinen monisto, ja olkoon $\mathscr{A}$ sileä rakenne monistolle M. Pari $(M, \mathscr{A})$ on *sileä monisto*.

Luonnollisesti euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ sekä avoimet, yhtenäiset joukot $U \subset \mathbb{R}^n$ ovat sileitä n-ulotteisia monistoja. Yksinkertaisimman kartaston avaruudelle $\mathbb{R}^n$ muodostaa pari $(\mathbb{R}^n, x)$, missä $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x(p) = p$ on identtinen kuvaus. Identtisen kuvauksen komponenttifunktiot $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_i(p) = p_i$, tulevat näyttelemään tärkeää osaa jatkossa. Näitä koordinaattifunktioita x_i kutsutaan tässä tutkielmassa *euklidisiksi koordinaattifunktioiksi*. Puhuttaessa euklidisista avaruuksista ovat x_i jatkossa aina euklidiset koordinaattifunktiot. Puhuttaessa yleisesti monistosta M on symbolit x_i varattu yleisen karttakuvauksen koordinaattifunktioille.

Kartasto $\{(\mathbb{R}^n, x)\}$ voidaan laajentaa maksimaaliseksi melko pienellä vaivalla. Jos U ja W ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimia ja diffeomorfisia joukkoja, niin mikä tahansa diffeomorfismi $y : U \to W$ on välittömästi C^∞-yhteensopiva kuvauksen x kanssa. Tällaisia diffeomorfismeja voidaan itse asiassa valita vaikka kuinka monta, ja ne ovat C^∞-yhteensopivia myös keskenään [13]. Tässä tutkielmassa avaruuden $\mathbb{R}^n$ differentioituvana rakenteena käytetään aina tällaista maksimaalista kartastoa, johon identtinen kuvaus x kuuluu. Esimerkiksi tutut sylinteri- ja pallokoordinaattikuvaukset kuuluvat tällä tavalla maksimaaliseksi laajennettuun kartastoon avaruudelle $\mathbb{R}^3$.

Esimerkki 1.7 (Eräitä sileitä monistoja)**.** Seuraavat joukot ovat tärkeitä erikoistapauksia sileistä monistoista.

(a) Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, ja olkoon $f : W \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio. Tällöin funktion f graafi $\mathscr{G}_f := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \ p_{n+1} = f(q), \ q \in W\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ sileä n-ulotteinen monisto. Karttakuvauksena graafille $\mathscr{G}_f$ toimii projektion $y : \mathbb{R}^{n+1} \to W, \ y(p) = q$ rajoittuma graafipinnalle $\mathscr{G}_f$. Käänteiskuvauksena tälle toimii niin kutsuttu "Mongen tilkku" $\varphi : W \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi(q) = \big(q, f(q)\big) = p$, joka on C^∞-kuvaus, koska funktio f on differentioituva. Esimerkin 1.4 (a)-kohdassa pohjoinen ja eteläinen pallonpuolisko esitetään nimenomaan funktioiden graafeina.

   Käytännössä graafipinnan $\mathscr{G}_f$ pisteistä voidaan puhua avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ euklidisten koordinaattifunktioiden $x_1, \ldots, x_n$ avulla. Kun on selvää, että kyseessä on nimenomaan graafipinnan piste p, on voimassa yhtälö $\big(x_1(p), \ldots, x_n(p)\big) = q = y|_{\mathscr{G}_f}(p)$.

(b) Jokainen avaruuden $\mathbb{R}^m$ sileä n-ulotteinen parametrisoitu pinta on lokaalisti jonkin reaaliarvoisen funktion graafi. Näin ollen kaikki sileät parametrisoidut pinnat ovat sileitä monistoja esimerkin edellisen kohdan perusteella. Väite on todistettu tapauksessa $m = 3$ ja $n = 2$ lähteessä [1, lause 3.1.29], ja yleisemmässä tapauksessa lähteessä [12, lause 5-2]. Sileistä avaruuden $\mathbb{R}^3$ 2-ulotteisista pinnoista kerrotaan kattavasti esimerkiksi teoksissa [1] ja [7].

Edeltävän esimerkin 1.7 graafipinta- ja parametriesitysten lisäksi monistoja voidaan esittää myös reaaliarvoisten funktioiden *tasa-arvopintoina*:

Lemma 1.8 (Sileä tasa-arvopinta)**.** *Olkoon $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin joukko, $f : W \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva funktio ja $c \in \mathbb{R}$. Olkoon joukko M tasa-arvojoukon*

$$f^{-1}(c) = \{p \in W : \ f(p) = c\}$$

epätyhjä ja yhtenäinen osa, jossa $\nabla f(p) \neq 0$. Tällöin M on sileä n-ulotteinen monisto.

Todistus. Todistuksessa käytetään samoja merkintöjä kuin väitteessä. Olkoon p mikä tahansa joukon M piste. Koska joukossa M on voimassa $\nabla f(p) \neq 0$, ainakin yksi osittaisderivaatoista $\partial_i f(p)$, $i = 1, \ldots, n+1$, on erisuuri kuin nolla. Koordinaattien järjestystä tarvittaessa muuttamalla voidaan olettaa, että $\partial_{n+1} f(p) \neq 0$. Tällöin implisiittifunktiolauseen (katso esimerkiksi [14, s. 511]) nojalla on olemassa pisteen $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ jossakin ympäristössä U jatkuvasti differentioituva funktio $g : U \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f\big(q, g(q)\big) = c$$

kaikilla $q \in U$. Mutta nythän joukko M on pisteen p ympäristössä esitettävissä funktion g graafina, riippumatta pisteen p valinnasta. Siten M on esimerkin 1.7 kohdan (b) nojalla sileä monisto. □

Jatkossa sileistä monistoista puhutaan lyhyesti monistoina, ja viittaus kartastoon jätetään yleensä merkintöjen yksinkertaistamiseksi merkitsemättä. Puhuttaessa monistosta M siis oletetaan tästä eteenpäin, että M on varustettu asianmukaisesti sileällä rakenteella.

Määritelmä 1.9 (Funktion differentioituvuus monistolla)**.** Olkoon M sileä monisto, $p \in M$ jokin moniston piste ja olkoon x karttakuvaus pisteen p ympäristössä. Funktio $f : M \to \mathbb{R}$ on *differentioituva pisteessä* p, jos sen lokaali koordinaattiesitys $f \circ x^{-1}$ on C^∞-luokan funktio pisteessä $x(p)$ perinteisessä mielessä. Tällöin käytetään merkintää $f \in C^\infty(p)$. Funktion f sanotaan edelleen olevan *differentioituva monistolla* M, jos se on differentioituva jokaisessa pisteessä $p \in M$. Vastaavasti puhutaan differentioituvuudesta avoimissa joukoissa $U \subset M$, ja merkitään $f \in C^\infty(M)$ ja $f \in C^\infty(U)$.

Huomautus 1.10. Sileän rakenteen käyttö takaa, että kaikki koordinaattienvaihdot ovat C^∞-kuvauksia, eikä funktion f differentioituvuus siten jää riippuvaiseksi karttakuvauksen x valinnasta. Näin ollen määritelmä 1.9 on hyvin asetettu.

Määritelmän 1.9 mukaisesti differentioituvuus tarkoittaa jatkossa sitä, että kysymyksessä on C^∞-luokan funktio. Sen lisäksi, että C^∞-luokan funktioilla työskentely helpottaa asioita teknisesti, se on tutkielman tavoitteiden lisäksi jopa välttämätöntä. Tämä käy osaltaan ilmi luvussa kaksi. Koska monistoilla on nyt järkevää puhua differentioituvuudesta, voidaan seuraavaksi määritellä tapa derivoida funktioita monistoilla. Tämä tapahtuu lokaaleja koordinaatteja käyttämällä.

Määritelmä 1.11 (Funktion osittaisderivaatta lokaaleissa koordinaateissa)**.** Olkoon $x = (x_1, \dots, x_n)$ moniston M osan U karttakuvaus, ja olkoot $p \in U$, $q = x(p) \in x(U)$ sekä $f \in C^\infty(p)$. Funktion f i. *osittaisderivaatta lokaaleissa koordinaateissa* määritellään asettamalla

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \partial_i (f \circ x^{-1})(q),$$

missä oikealla puolella esiintyy yhdistetyn funktion $f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tavallinen i. osittaisderivaatta. Derivaattafunktiolle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ on siis

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i (f \circ x^{-1}) \circ x.$$

Huomaa, että yleensä samaa tarkoittavien merkintöjen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ja $\partial_i f$ välille tehdään määritelmässä 1.11 selvä ero. Erityisesti merkintä $\partial_i f$ halutaan varata funktion f tavalliselle osittaisderivaatalle avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Jos x_i ovat euklidiset koordinaattifunktiot, on kuitenkin voimassa yhtälö $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f$. Määritelmästä 1.11 on selvää, että kartan valinta vaikuttaa voimakkaasti i. osittaisderivaatan arvoon. Eräs tämän tutkielman tavoitteista onkin löytää koordinaateista riippumaton tapa derivoida monistoilla.

Tähän mennessä kohdattujen käsitteiden avulla on mahdollista yleistää usein tarvittu *sileän polun* käsite monistoille.

Määritelmä 1.12 (C^∞-polku monistolla)**.** Olkoon M sileä monisto ja $I \subset \mathbb{R}$ reaalilukuväli. Kuvaus $\gamma : I \to M$ on *C^∞-polku monistolla M*, kun kaikki komponenttifunktiot $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$,

$$\gamma_i := x_i \circ \gamma,$$

ovat differentioituvia missä tahansa moniston M kartassa (U, x).

C^∞-polun γ kuvajoukkoa $\gamma(I) \subset M$ kutsutaan polun γ *käyräksi.* Jos

(i) väli I on avoin,

(ii) kuvaus γ on homeomorfismi joukkojen I ja $\gamma(I)$ välillä, ja

(iii) jokaisella $t \in I$ ainakin yksi derivaatoista $\gamma_i'(t)$ eroaa nollasta,

niin käyrä $\gamma(I)$ on itse asiassa sileä yksiulotteinen (ali)monisto monistolla M. Polkuja käsiteltäessä paino on kuitenkin useampiulotteisista monistoista poiketen yleensä kuvauksessa γ, ts. käyrän $\gamma(I)$ *parametrisoinnissa.* [1].

Polun määritelmä monistolla näyttää lähes täsmälleen samalta kuin euklidisessa avaruudessa. Ero euklidisessa avaruudessa tai monistolla määritellyn polun välillä on siinä, kuinka polkujen *tangenttivektoreihin* suhtaudutaan.

1.2 Esimerkki: Monistoista termodynamiikassa

Termodynamiikan oppikirjoissa monistoja tuodaan harvemmin suoraan esille, mutta ne ovat keskeisessä osassa alan teoriassa. Alan terminologia on lisäksi tyypillisen erikoistunutta, ja ”matemaattiset” termit on korvattu fysikaalista taustaa paremmin korostavilla. Matemaattinen rakenne monistoineen on kuitenkin löydettävissä pienellä tarkastelulla. Tätä esimerkkiä varten on konsultoitu teosta [3].

Kaasun *tila* määräytyy siitä, millaiset kaasun fyysiset ominaisuudet tarkasteltaessa ovat. Kaasun tila on mahdollista ilmoittaa neljän suureen avulla. Nämä suureet ovat ainemäärä n, tilavuus V, lämpötila T ja paine p. Näitä muuttujia kutsutaan itseoikeutetusti *tilamuuttujiksi.* Kun kaasua on vakiomäärä ($n =$vakio), riittävät kolme viimeksi mainittua muuttujaa kaasun tilan kuvaamiseen. Asettamalla näiden välille jokin relaatio, voidaan tarvittavien muuttujien määrää kuitenkin edelleen vähentää.

Nämä relaatiot, *tilanyhtälöt*, juontavat juurensa kaasun fysikaalisista ominaisuuksista. *Ideaalikaasulle* tällainen relaatio on ideaalikaasun tilanyhtälö

$$pV = nRT, \tag{1.2}$$

missä R on kaasuvakio. Yhtälön avulla tasapainotilojen joukko voidaan esittää esimerkiksi tasa-arvopintana siistille funktiolle g,

$$g(p, V, T) = \frac{pV}{T} = nR = \text{vakio}.$$

Tilojen joukko on näin ollen kaksiulotteinen monisto lemman 1.8 nojalla. Toisaalta tilanyhtälön (1.2) avulla esimerkiksi paine p voidaan edelleen esittää kahden muun muuttujan avulla muodossa

$$p = f(V, T) = \frac{nRT}{V},$$

jolloin tilojen monisto tulee esitettyä funktion f graafina $\mathscr{G}_f$ esimerkin 1.7 (b)-kohdan mukaisesti. Karttakuvauksena tilojen monistolle toimii tällöin projektio

$$(V, T, p) \mapsto (V, T).$$

Yleensä tilojen moniston pisteistä eli kaasun tiloista puhutaan euklidisten koordinaattifunktoiden x_1, x_2 ja x_3 avulla siten, että näille funktoille käytetään samoja nimiä, kuin suureille joita ne kuvaavat. Tällöin siis $x_1 = V$, $x_2 = T$ ja $x_3 = p$.

Tilojen monistolla määriteltyjä funktioita kutsutaan *tilanfunktioiksi*. Termi korostaa sitä, että kyseinen funktio riippuu ainoastaan kaasun sen hetkisestä tilasta, eikä esimerkiksi tavasta, jolla tila saavutettiin. Matemaattisesti tilanfunktio on kuitenkin vain reaaliarvoinen funktio tilojen monistolla. Tärkeä esimerkki tilanfunktiosta on kaasun sisäenergia U. Sen osittaisderivaatoilla

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T =: \pi_T \qquad \text{ja} \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V =: C_V$$

on myös fysikaalinen tulkinta. π_T on kaasun sisäinen paine vakiolämpötilassa, ja C_V on kaasun lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa. Osittaisderivaattojen alaindeksit ovat alan esityksille tyypillinen käytäntö, jolla paitsi implikoidaan vakiona pysyvät muuttujat, myös tuodaan esille, mitkä mahdollisista muuttujista on valittu tilojen moniston koordinaateiksi.

2 Moniston tangentti- ja kotangenttiavaruudet

Sileän moniston *sileys* merkitsee sitä, että monistoa voidaan lokaalisti approksimoida lineaarisesti. Tuttu esimerkki on jatkuvasti derivoituvan yhden muuttujan reaaliarvoisen funktion graafi, jonka jokaiseen pisteeseen voidaan yksikäsitteisesti sovittaa tangenttisuora. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileiden kaksiulotteisten pintojen tapauksessa lineaarinen approksimointi puolestaan tarkoittaa, että pinnan jokaiseen pisteeseen voidaan sovittaa yksikäsitteinen tangenttitaso. Tämän luvun tavoitteena on yleistää tällaisten *tangenttiavaruuksien* ja siten *vektorien* käsite koskemaan myös n-ulotteisia monistoja. Tämän jälkeen tarkastellaan tangenttiavaruuden duaaliavaruutta, jota kutsutaan *kotangenttiavaruudeksi*, sekä vektori- ja kovektorikenttiä. Tämän luvun kannalta tärkeitä lähteitä ovat [7], [8], [10], [13] sekä [15].

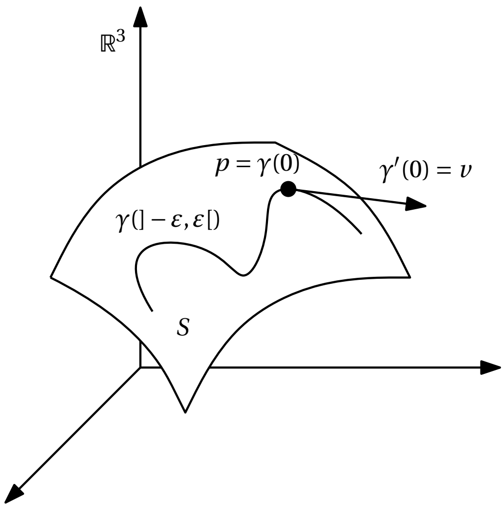
2.1 Tangenttiavaruus

Differentiaali- ja integraalilaskentaa käsittelevillä kursseilla k-ulotteisten pintojen tangenttiavaruudet esitellään ympäröivän euklidisen avaruuden k-ulotteisina vektorialiavaruuksina. Tämä tekee tangenttiavaruuksien vektoreista eli tangenttivektoreista myös ympäröivän avaruuden objekteja. Koska tässä tutkielmassa monistoja tarkastellaan euklidisten avaruuksien osajoukkoina, olisi tämä lähestymistapa mahdollinen nytkin. Kuten huomautuksessa 1.3 kuitenkin mainittiin, ei yleisessä tapauksessa moniston tarvitse olla osa euklidista avaruutta. Tästä syystä tangenttiavaruuksien käsittely vektorialiavaruuksina olisi yleisen teorian kehittämisen kannalta rajoittavaa, joten tangenttiavaruuteen tutustutaan yleistettävällä tavalla. Geometrisen mielikuvan aikaansaamista varten on joka tapauksessa hyödyllistä tarkastella aluksi ”geometrisia” tangenttivektoreita.

Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ sileä $n-1$-ulotteinen pinta ja olkoon $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to S$ C^∞-polku, jolle $\gamma(0) = p \in S$. Tällaisen polun γ derivaattavektori $\gamma'(0) = v \in \mathbb{R}^n$ on (geometrinen) tangenttivektori pinnalle S pisteessä p, sillä polun γ käyrä kulkee pinnalla S. Tilannetta havainnollistaa kuva 4.

Tangenttivektoriin v voidaan liittää seuraavanlainen suuntaisderivaatta: Jos f on jokin pisteen p avoimessa ympäristössä $U \subset \mathbb{R}^n$ määritelty reaaliarvoinen C^∞-funktio, niin luku $(f \circ \gamma)'(0)$ kertoo funktion f hetkellisen muutosnopeuden, kun lähdetään etenemään pitkin polun γ käyrää vektorin v määräämään suuntaan pisteestä p [7, s. 511]. Tätä suuntaisderivaattaa

$$(f \circ \gamma)'(0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f\big(\gamma(0)\big)\gamma_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i f(p) =: v_p[f] \tag{2.1}$$



Kuva 4. Kaksiulotteisen pinnan S geometrinen tangenttivektori polun γ derivaattavektorina avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Polkujen tangenttivektorien käyttäminen on yleinen ja geometrinen tapa tangenttiavaruuksien konstruointiin pinnoille.

voidaan kutsua tangenttivektorin $\gamma'(0) = v$ ”toimenpiteeksi” funktiolle f. On suoraviivaista näyttää, että kuvaus $f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$ on derivaatalle tyypillisesti lineaarinen ja toteuttaa Leibnizin tulosäännön, katso esimerkiksi [11, s. 13, lause 3.3.]. Nämä karakteristiset ominaisuudet haluttaisiin myös yleisien monistojen tangenttivektorien suorittamille ”toimenpiteille”. Tämä onnistuu, kun moniston tangettivektoriksi määritellään sellainen *funktio*, jolla nämä ominaisuudet on.

Määritelmä 2.1 (Tangenttivektori)**.** Olkoon M sileä monisto ja $p \in M$ piste. Moniston *M tangenttivektori pisteessä p* on funktio $v_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdot

$$v_p[c_1 f + c_2 g] = c_1 v_p[f] + c_2 v_p[g] \qquad \text{(lineaarisuus), ja}$$
$$v_p[fg] = v_p[f]g(p) + f(p)v_p[g] \qquad \text{(Leibnizin tulosääntö)}$$

kaikilla $f, g \in C^\infty(p)$ ja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Hakasulkujen käyttäminen muistuttaa, että kyseessä on funktiolla operoiva tangenttivektori.

Erittäin tärkeitä tangenttivektoreita ovat *osittaisderivaattafunktiot*, jotka saadaan määritelmän 1.11 avulla seuraavalla tavalla:

Lemma 2.2 (Osittaisderivaattafunktiot)**.** *Olkoon $x = (x_1, \dots, x_n)$ kartta monistolle M pisteen p ympäristössä, ja olkoon $f \in C^\infty(p)$. Jokaisella indeksillä $i = 1, \dots, n$ funktio*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p [f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

on moniston M tangenttivektori pisteessä p.

Todistus. Olkoot $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sekä $f, g \in C^\infty(p)$, ja merkitään $q = x(p)$. Määritelmän 1.11 ja yhtälön (1.1) mukaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [c_1 f + c_2 g] &= \partial_i\big((c_1 f + c_2 g) \circ x^{-1}\big)(q) \\ &= c_1 \partial_i (f \circ x^{-1})(q) + c_2 \partial_i (g \circ x^{-1})(q) \\ &= c_1 \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [f] + c_2 \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [g], \end{aligned}$$

joten osittaisderivaattakuvaus $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ on lineaarinen. Toisaalta tavallista Leibnitzin tulosääntöä käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [fg] &= \partial_i\big((fg) \circ x^{-1}\big)(q) \\ &= \partial_i\big((f \circ x^{-1})(g \circ x^{-1})\big)(q) \\ &= \partial_i (f \circ x^{-1})(q) \cdot (g \circ x^{-1})(q) + (f \circ x^{-1})(q) \cdot \partial_i (g \circ x^{-1})(q) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [f] g(p) + f(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [g]. \end{aligned}$$

Siispä funktio $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ toteuttaa myös Leibnizin tulosäännön, ja on siten määritelmän 2.1 mukaisesti tangenttivektori. □

Määritelmä 2.3 (Tangenttiavaruus)**.** Moniston M *tangenttiavaruus pisteessä* p on kaikkien pisteeseen p liittyvien moniston M tangenttivektorien joukko:

$$T_p M := \{v_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R} : \ v_p \text{ on tangenttivektori pisteessä } p\}.$$

Olkoot $v_p, w_p \in T_p M$ tangenttivektoreita, $c \in \mathbb{R}$ sekä $f \in C^\infty(p)$. Määritellään tangenttivektoreille yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen asettamalla

$$\begin{aligned} (v_p + w_p)[f] &= v_p[f] + w_p[f] \\ (c v_p)[f] &= c v_p[f]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Todistetaan seuraavaksi, että näillä laskutoimituksilla varustettuna tangenttiavaruus $T_p M$ on nimensä mukaisesti vektoriavaruus, jonka dimensio on sama kuin moniston M.

Lause 2.4 (Tangenttiavaruuden kanta ja dimensio)**.** *Olkoon M sileä n-ulotteinen monisto ja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ karttakuvaus pisteen $p \in M$ ympäristössä. Yhtälöiden* (2.2) *laskutoimituksilla varustettuna tangenttiavaruus $T_p M$ on n-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus, jolle erään kannan muodostavat osittaisderivaattafunktiot $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$, $i = 1, \ldots, n$.*

Todistus. Todistus perustuu lähteisiin [7] ja [15], ja se koostuu kolmesta osasta: On näytettävä, että T_pM on vektoriavaruus, että funktiot $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia, ja että ne virittävät avaruuden T_pM.

On helppoa tarkistaa, että edellä yhtälöissä (2.2) määritellyt kuvaukset $v_p + w_p$ ja cv_p ovat lineaarisia ja toteuttavat Leibnizin tulosäännön, ja ovat siten todellakin tangenttivektoreita määritelmän 2.1 mielessä. Yhteenlaskun neutraalialkioksi käy yhtälöllä $0_p[f] = 0$ määritelty funktio 0_p, ja tangenttivektorille v_p saadaan vasta-alkio asettamalla $(-v_p)[f] = -(v_p[f])$. Muiden vektoriavaruuden määritelmän vaatimusten voimassaolo seuraa suoraan reaalilukujen laskusäännöistä. Tangenttiavaruus T_pM on siis reaalinen vektoriavaruus.

Olkoon nyt (U, x) kartta pisteen $p \in M$ ympäristössä U. Lemman 2.2 mukaan osittaisderivaattakuvaukset $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ ovat moniston M tangenttivektoreita. Näytetään, että nämä kuvaukset ovat lisäksi lineaarisesti riippumattomia. Näin on, kun oletuksesta

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p = 0_p$$

seuraa, että $c_i = 0$ kaikilla indekseillä $i = 1, \ldots, n$. Yhtäpitävää on vaatia, että

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [f] = 0$$

kaikilla funktioilla $f \in C^\infty(p) - \{0_p\}$, ja siten erityisesti komponenttifunktioilla x_i. Määritelmän 1.11 mukaisesti

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [x_j] &= \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(p) \\
&= \partial_i\big(x_j \circ x^{-1}\big)\big(x(p)\big) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\big(x_j \circ x^{-1}\big)\big(x(p) + \varepsilon e_i\big) - \big(x_j \circ x^{-1}\big)\big(x_j(p)\big)}{\varepsilon} \\
&= \delta_{ij},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

missä δ_{ij} on Kroneckerin delta. Siispä

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [x_j] = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} = c_j$$

kaikilla $j = 1, \ldots, n$, ja näin ollen kuvaukset $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Tulee vielä näyttää, että osittaisderivaattafunktiot virittävät avaruuden T_pM. Tätä varten riittää osoittaa, että mikä tahansa tangenttivektori $v_p \in T_pM$ voidaan esittää lineaarikombinaationa muodossa

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v_p[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p. \tag{2.4}$$

Olkoon $f \in C^\infty(U)$. Tällöin yhdistetty funktio $h := f \circ x^{-1}$ on avoimessa joukossa $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ määritelty reaaliarvoinen funktio, ja sen avulla funktio f voidaan esittää muodossa $f = h \circ x$.

Olkoot sitten $a, b \in x(U)$ pisteitä, ja olkoon $\gamma : [0,1] \to x(U)$, $\gamma(t) = a + t(b-a)$ janapolku pisteestä a pisteeseen b. Voidaan olettaa, että $\gamma([0,1]) \subset x(U)$. Jos näin ei ole, voidaan pisteet a ja b valita jostakin joukon $x(U)$ konveksista osajoukosta. Funktiolle h on

$$\begin{aligned}
h(b) - h(a) &= \int_\gamma \nabla h \cdot \mathrm{d}\bar{s} \\
&= \int_0^1 \Big(\nabla h\big(\gamma(t)\big) \big| \gamma'(t)\Big) \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \partial_i h\big(\gamma(t)\big)\gamma_i'(t) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Tässä derivaatat $\gamma_i'(t) = b_i - a_i$ ovat vakioita, joten

$$h(b) - h(a) = \sum_{i=1}^{n} \left((b_i - a_i) \int_0^1 \partial_i h\big(a + t(b-a)\big) \,\mathrm{d}t \right).$$

Koska $a, b \in x(U)$, on olemassa pisteet $p, q \in U$ siten, että $a = x(p)$ ja $b = x(q)$. Nyt $h(a) = f(p)$ ja $h(b) = f(q)$, joten

$$f(q) - f(p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\big(x_i(q) - x_i(p)\big) \int_0^1 \partial_i h\Big(x(p) + t\big(x(q) - x(p)\big)\Big) \,\mathrm{d}t \right).$$

Määritellään nyt funktiot g_i asettamalla

$$g_i(q) = \int_0^1 \partial_i h\Big(x(p) + t\big(x(q) - x(p)\big)\Big) \,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Kun pidetään piste p kiinnitettynä, on funktiolle f voimassa yhtälö

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - x_i(p)\big) g_i.$$

Lasketaan sitten tangenttivektorin v_p arvo $v_p[f]$ hyödyntäen tietoa, että v_p on lineaarinen ja toteuttaa Leibnizin tulosäännön:

$$\begin{aligned} v_p[f] &= v_p[f(p)] + \sum_{i=1}^{n} \big(v_p[x_i - x_i(p)] g_i(p) + \big(x_i(p) - x_i(p)\big) v_p[g] \big) \\ &= v_p[f(p)] + \sum_{i=1}^{n} \big(v_p[x_i - x_i(p)] g_i(p) \big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tässä lukua $f(p)$ voidaan käsitellä vakiofunktiona. Tällöin

$$v_p[f(p)] = f(p) v_p[1 \cdot 1] = f(p)\big(v_p[1] \cdot 1 + 1 \cdot v_p[1]\big) = 2 v_p[f(p)],$$

joten on oltava $v_p[f(p)] = 0$. Niinpä

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_p[x_i] g_i(p).$$

Mutta tässä

$$g_i(p) = \int_0^1 \partial_i h\big(x(p)\big)\,\mathrm{d}t = \partial_i (f \circ x^{-1})(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [f],$$

joten

$$v_p[f] = \sum_{i=1}^{n} v_p[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p [f].$$

kaikilla $f \in C^\infty(U)$. Tämä todistaa viimeisen väitteen. □

Huomaa, että todistuksessa 2.4 on työskenneltävä C^∞ -kuvauksilla. Jos nimittäin funktio f olisi vain k kertaa jatkuvasti differentioituva, niin yhtälössä (2.5) määritellyt funktiot g_i eivät välttämättä ole kuin $k-1$ kertaa jatkuvasti differentioituvia. Tämä veisi pohjan yhtälöltä (2.6) [1, huomautus 3.4.20].

Lauseen 2.4 merkitys on, että tangenttivektorit ovat ”lineaarisia operaattoreita”. Lause antaa siis luvan laskea tangenttivektoreilla kuten vektoreilla yleensäkin. Jatkon kannalta tärkeä osa lauseen 2.4 todistusta on yhtälön (2.4) antama komponenttiesitys tangenttivektoreille. Sen mukaan tangenttivektori määräytyy täysin sen mukaan, kuinka se kuvaa koordinaattifunktiot x_i. Jos esimerkiksi $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e^i \in \mathbb{R}^n$ on jokin vektori, voidaan määritellä tangenttivektori $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ asettamalla $v_p[x_i] = v_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin

$$v_p[f] = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p \right) [f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p). \tag{2.7}$$

v_p on siis täsmälleen luvun alussa yhtälössä (2.1) mainittu vektorin v "toimenpide" funktiolle f.

Myös polkujen derivaattavektorit voidaan tulkita tangenttivektoreina, jolloin ne saadaan riippumattomaksi mahdollisesta ympäröivästä avaruudesta. Lisäksi määritelmät näyttävät oleellisesti samalta kuin euklidisessa avaruudessa.

Määritelmä 2.5 (Polun nopeusvektori)**.** Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja olkoon $\gamma : I \to M$ C^∞-polku monistolla M. Polun γ *derivaattavektori* eli *nopeusvektori hetkellä* t on tangenttivektori $\dot{\gamma}(t)$ (pisteessä $p = \gamma(t)$), joka operoi funktioihin yhtälön

$$\dot{\gamma}(t)[f] = (f \circ \gamma)'(t)$$

mukaisesti.

Kartassa (U, x) $\dot{\gamma}(t)$ saa yhtälön (2.4) avulla muodon

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t) \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\gamma(t)},$$

missä siis $\gamma_i' = x_i \circ \gamma$. Polun derivaattavektorin komponentit ovat polun koordinaattifunktioiden derivaatat, aivan kuten euklidisessa avaruudessa. Näin ollen myös polun ja polun nopeusvektorin käsitteet monistolla ovat yhteensopivia yhtälön (2.1) kanssa.

2.2 Kotangenttiavaruus

Euklidisten avaruuksien differentiaali- ja integraalilaskennassa reaaliarvoiset lineaarikuvaukset ovat keskeisessä asemassa. Tärkeä esimerkki on euklidinen sisätulo $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jota tarvitaan esimerkiksi muodostettaessa projektioita vektoriavaruuksien välillä. Tällaisia funktioita voidaan määritellä myös sileiden monistojen tangenttivektoreille, ja juuri näille funktioille tehtävät tarkastelut johtavat differentiaalimuotojen pariin. Tarkastellaan seuraavaksi moniston tangenttiavaruuden T_pM niin sanottua *duaaliavaruutta* T_p^*M, jota kutsutaan myös moniston M *kotangenttiavaruudeksi.*

Määritelmä 2.6 (Kotangenttiavaruus)**.** Joukko

$$T_p^*M := \{\alpha_p : T_pM \to \mathbb{R} : \ \alpha_p \text{ on lineaarikuvaus}\}$$

on moniston M *kotangenttiavaruus pisteessä* p. Kotangenttiavaruuden alkioita kutsutaan *kotangenttivektoreiksi* tai lyhyesti *kovektoreiksi.*

Esimerkki 2.7 (Funktion pisteittäinen differentiaali)**.** Olkoon $f \in C^\infty(M)$. Määritellään kuvaus $\mathrm{d}f(p)$, *funktion f differentiaali pisteessä $p \in M$*, asettamalla

$$\mathrm{d}f(p)v_p = v_p[f]. \tag{2.8}$$

Näin määriteltynä differentiaali $\mathrm{d}f(p)$ on lineaarinen funktio, joka kuvaa tangenttiavaruuden vektoreita reaaliluvuiksi, ja siispä $\mathrm{d}f(p) \in T_p^*M$. Erityisen tärkeään asemaan lopun tutkielman osalta nousevat *koordinaattidifferentiaalit*. Kun $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on karttakuvaus monistolla M, niin i. komponenttifunktion $p \mapsto x_i(p)$ differentiaali pisteessä p on funktio $\mathrm{d}x_i(p) \in T_p^*M$.

Kotangenttivektorien tapauksessa sulkeet argumentin ympäriltä jätetään usein merkitsemättä kuten yllä funktion differentiaalin tapauksessa. Jos sulkeita tarvitaan selkeyden vuoksi, käytetään tässä tutkielmassa tavallisia sulkeita. Olkoot nyt $\alpha_p, \beta_p \in T_p^*M$ ja $v_p \in T_pM$, sekä $c \in \mathbb{R}$. Kotangenttivektoreille sovitaan käytettävän tavallisia pisteittäisiä laskutoimituksia

$$\begin{aligned}(\alpha_p + \beta_p)v_p &= \alpha_p v_p + \beta_p v_p \\ (c\alpha_p)v_p &= c\alpha_p v_p.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Näillä laskutoimituksilla varustettuna joukko T_p^*M on reaalinen vektoriavaruus tangenttiavaruuden tapaan, ja seuraava lausetta 2.4 vastaava tulos on voimassa:

Lause 2.8 (Kotangenttiavaruuden kanta ja dimensio)**.** *Olkoon M sileä monisto ja $x = (x_1, \ldots, x_n)$ karttakuvaus pisteen p ympäristössä. Laskutoimituksilla* (2.9) *varustettuna kotangenttiavaruus T_p^*M on n-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus, jolle erään kannan muodostavat koordinaattifunktioiden x_i differentiaalit* $\mathrm{d}x_i(p)$, $i = 1, \ldots, n$.

Todistus. On selvää, että joukko T_p^*M varustettuna laskutoimituksilla (2.9) on vektoriavaruus. Kun tarkastellaan tangenttivektorien $\frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p$ kuvautumista differentiaaleilla $\mathrm{d}x_i(p)$, saadaan yhtälöiden (2.8) ja (2.3) mukaisesti

$$\mathrm{d}x_i(p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p [x_i] = \delta_{ij},$$

ja niinpä kovektorit $\mathrm{d}x_i(p)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Jos α_p on mikä tahansa kovektori ja $v_p \in T_pM$, yhtälön (2.4) avulla saadaan

$$\alpha_p v_p = \alpha_p\left(\sum_{i=1}^n v_p[x_i]\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right).$$

Mutta nythän $v_p[x_i] = \mathrm{d}x_i(p)v_p$ yhtälön (2.8) mukaan, joten kovektorien lineaarisuuden nojalla

$$\alpha_p v_p = \sum_{i=1}^n \alpha_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)\mathrm{d}x_i(p)v_p.$$

Koordinaattidifferentiaalit $\mathrm{d}x_i(p)$ ovat siis n kappaletta lineaarisesti riippumattomia funktioita, joiden lineaarikombinaationa jokainen avaruuden T_p^*M kovektori saadaan esitettyä. □

Lauseen 2.8 avulla saadaan funktion differentiaalille tutunnäköinen esitys koordinaattidifferentiaalien avulla:

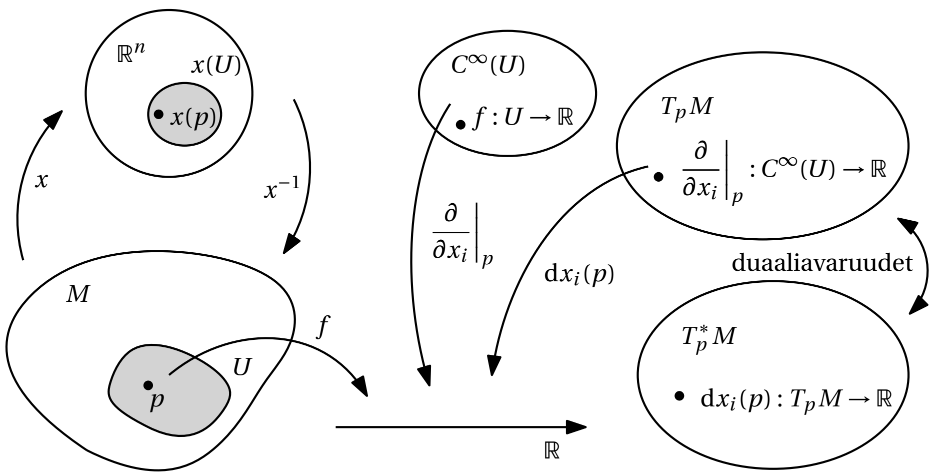
Seuraus 2.9 (Funktion differentiaalin koordiaattiesitys)**.** *Olkoon $f \in C^\infty(p)$ ja olkoon x karttakuvaus sileän moniston M pisteen p ympäristössä. Tällöin*

$$\mathrm{d}f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\,\mathrm{d}x_i(p).$$

Todistus. Yhtälön (2.8) mukaan $\mathrm{d}f(p)v_p = v_p[f]$ ja $\mathrm{d}x_i(p)v_p = v_p[x_i]$, joten yhtälöä (2.4) käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} v_p[f] &= \left(\sum_{i=1}^{n} v_p[x_i]\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p\right)\right)[f] \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_p[x_i]\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p[f] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i(p)v_p\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p[f]. \end{aligned}$$ □

Tähän mennessä on esitelty useita joukkoja, kuvauksia ja muita käsitteitä. Kootusti näiden käsitteiden suhtautumista toisiinsa havainnollistaa kuva 5.



Kuva 5. Monisto M sekä siihen liittyviä joukkoja ja kuvauksia.

2.3 Vektori- ja kovektorikentät

Monistoille on nyt rakennettu pisteittäisten tangentti- ja kotangenttiavaruuksien käsitteet. Sileillä monistoilla jokaiseen pisteeseen liittyy oma tangentti- ja kotangenttiavaruutensa, ja seuraavaksi on tarkoitus päästä liikkumaan eri pisteisiin liittyvien avaruuksien välillä. Tätä varten tarkastellaan nyt kuvauksia, jotka liittävät kuhunkin moniston M pisteeseen p jonkin tangenttivektorin $v_p \in T_pM$. Tällaisia kuvauksia kutsutaan *vektorikentiksi.*

Määritelmä 2.10 (Vektorikenttä monistolla)**.** Olkoon M sileä monisto ja $U \subset M$ avoin joukko. *Vektorikenttä monistolla* M on kuvaus V, joka liittää jokaiseen pisteeseen $p \in U$ täsmälleen yhden tangenttivektorin $V(p) \in T_pM$. Vektorikentän toimintaa havainnollistaa kuva 6.

Vektorikentille sovitaan käytettävän vastaavia pisteittäisiä laskutoimituksia kuin funktioille sovittiin käytettävän yhtälössä (1.1). Siis kun V ja W ovat vektorikenttiä, $c \in \mathbb{R}$ on reaaliluku ja f on funktio, niin

$$\begin{aligned} (V+W)(p) &= V(p)+W(p), \\ (cV)(p) &= cV(p) \qquad \text{ja} \\ (fV)(p) &= f(p)V(p) \end{aligned} \tag{2.10}$$

kaikilla $p \in M$, joilla vektorikentät V ja W sekä funktio f on määritelty.

Esimerkki 2.11 (Eräitä vektorikenttiä)**.** Seuraavassa karttakuvaus $x = (x_1, \dots, x_n)$ käsitetään avaruudessa $\mathbb{R}^n$ sovittuun tapaan identtisenä kuvauksena.

(a) Jatkon kannalta keskeisiä vektorikenttiä ovat ”osittaisderivaattakentät” $\frac{\partial}{\partial x_i}$, jotka määritellään yksinkertaisesti asettamalla

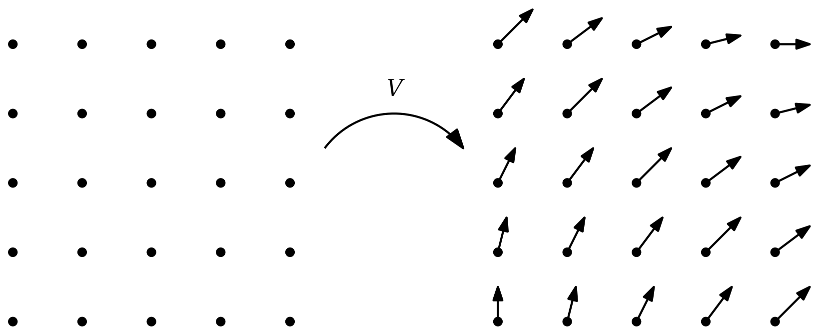
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

kaikille sileän moniston pisteille p ja indekseille $i = 1, \dots, n$.

(b) Olkoot $p \in \mathbb{R}^3$ ja $v = v_1 e^1 + v_2 e^2 + v_3 e^3$. Kuvaus

$$p \mapsto v_p = v_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p + v_3 \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_p$$

on vektorikenttä avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tämä vektorikenttä liittää jokaiseen avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteeseen p vektorin v määräämän suuntaisderivaatan $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$, joka mainittiin yhtälöissä (2.1) ja (2.7).



Kuva 6. Vektorikenttä V liittää jokaiseen moniston M pisteeseen p yhden tangenttivektorin $V(p)$. Tangenttivektoreita on tässä havainnollistettu konkreettisesti nuolina.

Esimerkissä 2.11 vektorikentät esitettiin summana osittaisderivaattakentistä $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Näin voidaan tehdä myös yleisesti. Jos (U, x) on kartta sileälle n-ulotteiselle monistolle M, niin jokainen koordinaattiympäristössä U määritelty vektorikenttä V voidaan esittää muodossa

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.11}$$

missä kertoimet V_i ovat joukossa U määriteltyjä funktioita ja $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ovat esimerkissä 2.11 mainitut vektorikentät. Lauseen 2.4 nojalla on nimittäin voimassa yhtälö

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} V(p)[x_i] \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p,$$

joten jokaisessa pisteessä $p \in U$ on voidaan valita $V_i(p) = V(p)[x_i]$, mistä väite seuraa. Funktioita V_i kutsutaan vektorikentän V *komponenttifunktioiksi*. Vektorikentän V sanotaan olevan *differentioituva*, kun komponenttifunktiot V_i ovat C^∞-luokan funktioita. Tässä tutkielmassa käsitellään ainoastaan differentioituvia vektorikenttiä.

Annetun funktion f tutkimiseksi halutaan yleensä saada tietoa funktion muutoksesta yhden pisteen sijaan jossakin moniston M osajoukossa U, ja tähän tarkoitukseen vektorikentät ovat juuri oikea työkalu. Koska luku $V(p)[f]$ antaa tietoa funktion f muutosnopeudesta pisteessä p, on luontevaa määritellä ”derivaattafunktio” Vf asettamalla

$$Vf(p) = V(p)[f].$$

Funktiota Vf kutsutaan vektorikentän V *toimenpiteeksi* funktiolle f. Toimenpiteen Vf avulla saadaan siis esille kaikki vektorikenttään V liittyvät suuntaisderivaatat $V(p)[f]$. Erityisesti osittaisderivaattafunktiot $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ voidaan nyt nähdä vektorikentän $\frac{\partial}{\partial x_i}$

toimenpiteenä funktiolle f, eli on voimassa yhtälö

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Huomaa, että koska $f \in C^\infty(U)$, niin myös $Vf \in C^\infty(U)$. Jos f olisi vain k-kertaa jatkuvasti differentioituva, olisi funktio Vf enää $k-1$ kertaa jatkuvasti differentioituva. Erityisesti kuvausta $f \mapsto Vf$ ei voitaisi käsitellä kuvauksena joukolta $C^\infty(U)$ itselleen.

Täsmälleen vektorikentille analoginen konstruktio voidaan tehdä myös kotangenttiavaruudessa, ja juuri tällä tavalla päästään differentiaalimuotojen pariin.

Määritelmä 2.12 (Kovektorikenttä)**.** Olkoon M sileä monisto ja $U \subset M$. *Kovektorikenttä sileällä monistolla* M on kuvaus ω, joka liittää jokaiseen pisteeseen $p \in U$ yhden kotangenttivektorin $\omega(p) \in T_p^*M$.

Kovektorikentän kertominen luvulla ja funktiolla määritellään pisteittäin kuten funktioiden ja vektorikenttien tapauksessa yhtälöissä (1.1) ja (2.10). On myös luontevaa haluta laskea kovektorikentälle reaalilukuarvoja vektorikentän avulla samalla tavalla kuin kuvauksen Vf tapauksessa. Määritellään *kovektorikentän* ω *toimenpide vektorikenttään* V asettamalla

$$\omega(V)(p) = \omega(p)V(p). \tag{2.12}$$

Koska jokaiselle kotangenttiavaruudelle T_p^*M saadaan lauseen 2.8 nojalla kanta koordinaattidifferentiaalien $\mathrm{d}x_i(p)$ avulla, voidaan kovektorikentät esittää komponenttimuodossa vektorikenttien tapaan. Kun (U, x) on kartta sileälle n-ulotteiselle monistolle M ja ω on joukossa U määritelty kovektorikenttä, niin

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \mathrm{d}x_i.$$

Tässä kertoimet f_i ovat joukossa U määriteltyjä funktioita ja $\mathrm{d}x_i$ on kovektorikenttä, joka liittää pisteeseen p kovektorin $\mathrm{d}x_i(p)$. Väite perustellaan samalla tavalla kuin vastaava esitys vektorikentille yhtälössä (2.11). Vektorikenttien kanssa analogiseen tapaan funktioita f_i kutsutaan kovektorikentän ω *komponenttifunktioiksi*. Kovektorikentän ω sanotaan myös olevan *differentioituva*, kun sen komponenttifunktiot f_i ovat C^∞-luokan funktioita, ja näin on tässä tutkielmassa aina. Differentioituvat kovektorikentät ovat yksinkertaisimpia *differentiaalimuotoja*.

Määritelmä 2.13 (1-differentiaalimuoto monistolla)**.** Sileällä monistolla M määritelty differentioituva kovektorikenttä ω on *differentiaalinen 1-muoto* tai *1-differentiaalimuoto* monistolla M. Monistolla M määriteltyjen differentiaalimuotojen joukkoa merkitään $\Omega^1(M)$, ja vastaavasti voidaan puhua jossakin moniston osajoukossa määritellyistä 1-differentiaalimuodoista.

Huomaa, että mielivaltaisessa moniston M pisteessä p differentiaalimuodon ω arvo, kovektori $\omega(p) : T_pM \to \mathbb{R}$, on määritelmän 2.6 mukaan lineaarikuvaus; siis

$$\omega(p)(c_1 v_p + c_2 w_p) = c_1 \omega(p) v_p + c_2 \omega(p) w_p$$

kaikilla luvuilla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ja tangenttivektoreilla $v_p, w_p \in T_pM$. Tärkeä 1-differentiaalimuoto on funktion f *differentiaali* $\mathrm{d}f$, joka voidaan nyt esittää muodossa

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i. \tag{2.13}$$

Arvo $\mathrm{d}f(p)$ lasketaan pisteittäin seurauksen 2.9 mukaisesti. Tämä klassinen esitys funktion f differentiaalille tulee usein vastaan muun muassa mekaniikkaa ja lämpöoppia käsittelevissä oppikirjoissa. Differentiaali $\mathrm{d}f$ sisältää tiedon funktion f muutosnopeudesta kaikkiin suuntiin. Huomaa, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ funktion f differentiaalin $\mathrm{d}f$ komponentit ovat samat kuin gradientin ∇f komponentit.

Lemma 2.14 (Funktion differentiaalin ominaisuudet)**.** *Olkoot $f, g : M \to \mathbb{R}$ differentioituvia funktioita ja $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ reaalilukuja. Tällöin*

(i) $\mathrm{d}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \mathrm{d}f + c_2 \mathrm{d}g$

(ii) $\mathrm{d}(fg) = (\mathrm{d}f)g + g(\mathrm{d}f)$

Todistus. Koska $\mathrm{d}f(p)v_p = v_p[f]$, väitteet seuraavat suoraan määritelmästä 2.1. □

Huomautus 2.15. Määritelmiä 2.10 ja 2.12 voidaan täsmentää. Esimerkiksi vektorikentän määrittelemiseen käytetty sääntö $p \mapsto V(p) \in T_pM$ ei itse asiassa ole kuvaus, sillä ”maalijoukko” riippuisi tällöin valitusta pisteestä. Tarkemmin sanottuna vektorikenttä on kuvaus $M \to TM$, missä TM on kaikkien parien (p, v_p) joukko, moniston M *tangenttikimppu.* Vektorikentän arvo on näin ollen pari $\big(p, V(p)\big) \in TM$. Koska ”kiinnityspiste” p käy kuitenkin ilmi V:n argumentista, käytetään vektorikentälle yleisesti samaa nimeä kuin ”vektoriosalle” V. Samoin kovektorikentät ja erityisesti differentiaalimuodot ovat tarkemmin ilmaistuna kuvauksia $M \to T^*M$, missä T^*M on kaikkien parien (p, α_p) joukko, moniston M *kotangenttikimppu.*

2.4 Esimerkki: Kaksiulotteisen virtauksen virtafunktio

Tätä esimerkkiä varten apuna on käytetty teosta [17]. Nesteen tai kaasun kaksiulotteisena virtauksena voidaan pitää sellaista virtausta, jossa kaikki oleellinen liike tapahtuu kahdessa ulottuvuudessa. Olkoon M se tila, jonka virtaava neste täyttää, ja olkoot x_1 ja x_2 ne koordinaatit, joiden suunnassa virtaus tapahtuu. Jos virtauksen käytös ei muutu ajan kuluessa (eli virtaus on tässä mielessä vakaa), voidaan virtausta kuvata ajasta riippumattomalla vektorikentällä V. Vektorikentän V komponentit V_1 ja V_2 kuvaavat vastaavasti x_1- ja x_2-suuntaisia virtauksia; $V(p)$ on siis nestevirtauksen nopeusvektori kohdassa p.

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ reaalilukuväli ja $t \in I$. Virtauksen V *virtaviiva* on sellaisen polun γ käyrä, jonka nopeusvektori $\dot{\gamma}(t)$ pisteessä $p = \gamma(t)$ on sama kuin $V(p)$. Virtaviivalla on siis voimassa yhtälö

$$\dot{\gamma}(t) = V\big(\gamma(t)\big). \tag{2.14}$$

Tilanteen geometriaa havainnollistaa kuva 7. Yhtälön (2.14) määräämää käyrää kutsutaan matemaattisemmin vektorikentän V *integraalikäyräksi*. Koordinaattimuodossa yhtälöä (2.14) vastaa tavallinen differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} (x_1 \circ \gamma)'(t) = V_1\big(\gamma(t)\big) \\ (x_2 \circ \gamma)'(t) = V_2\big(\gamma(t)\big). \end{cases}$$

Kun $V_1 \neq 0 \neq V_2$, edellä olevasta yhtälöparista voidaan johtaa yhtälö

$$\frac{(x_1 \circ \gamma)'(t)}{V_1\big(\gamma(t)\big)} = \frac{(x_2 \circ \gamma)'(t)}{V_2\big(\gamma(t)\big)}.$$

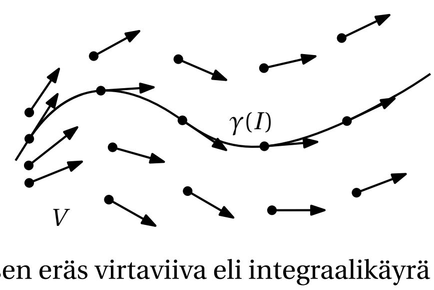
Koska $(x_i \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}x_i(p)\dot{\gamma}(t) = \mathrm{d}x_i(p)V(p) = \mathrm{d}x_i(V)(p)$, yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{\mathrm{d}x_1(V)}{V_1} = \frac{\mathrm{d}x_2(V)}{V_2}. \tag{2.15}$$

Yhtälö (2.15) voidaan edelleen esittää muodossa

$$(-V_2\,\mathrm{d}x_1 + V_1\,\mathrm{d}x_2)(V) \equiv 0.$$

Tämän tutkielman kontekstissa virtauskentän V virtaviivojen löytäminen tarkoittaa siis sellaisten 1-ulotteisten monistojen löytämistä, joiden tangenttivektoreilla 1-differentiaalimuoto $-V_2\,\mathrm{d}x_1 + V_1\,\mathrm{d}x_2$ on identtisesti nolla. Tämä on eräs esimerkki niin kutsutusta Pfaffin ongelmasta.



Kuva 7. Vektorikenttä V ja sen eräs virtaviiva eli integraalikäyrä $\gamma(I)$. Virtaviivalle kuuluvissa pisteissä on voimassa yhtälö $\dot{\gamma}(t) = V\big(\gamma(t)\big)$.

Eräs tapa lähestyä tämänkaltaista Pfaffin ongelmaan on tutkia, onko olemassa sellaista funktiota $H : M \to \mathbb{R}$, jolle $\mathrm{d}H = -V_2\,\mathrm{d}x_1 + V_1\,\mathrm{d}x_2 = 0$. Virtaviivat olisivat tällöin funktion H tasa-arvokäyriä. Jos tällainen funktio H löytyy, on sille voimassa yhtälö

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 = -V_2\,\mathrm{d}x_1 + V_1\,\mathrm{d}x_2.$$

Koordinaattidifferentiaalien kertoimia vertaamalla saadaan alkuperäisestä differentiaaliyhtälöparista niin kutsutut *Hamiltonin yhtälöt*

$$\begin{cases} (x_1 \circ \gamma)' = \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \circ \gamma \\ (x_2 \circ \gamma)' = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} \circ \gamma. \end{cases}$$

Funktio H on *Hamiltonin funktio*. Virtausmekaniikan kontekstissa funktiota H kutsutaan *virtafunktioksi*. Klassisessa mekaniikassa Hamiltonin funktio kuvaa usein tarkasteltavan mekaanisen systeemin kokonaisenergiaa.

Yhtälö (2.15) esitetään joskus muodossa

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{V_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{V_2},$$

ja tulkitaan seuraavasti: virtaviivalla infinitesimaalisen lyhyt osa virtaviivan kaarta, $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2$, on yhdensuuntainen vektorikentän V kanssa, jolloin ns. *kaarenpituusalkion* $\mathrm{d}s$ ja vektorikentän V vastaavien komponenttien on oltava verrannolliset. Tätä esitystä käytetään virtaviivojen määrittelyyn esimerkiksi teoksessa [17].

3 k-muotojen algebraa yleisessä vektoriavaruudessa

Differentioituvat kovektorikentät eli 1-differentiaalimuodot ovat erikoistapaus yleisemmistä *k-differentiaalimuodoista*, jotka ovat samaan tapaan eräänlaisia ”vektorikenttiä”, tarkemmin *muotokenttiä*. k-differentiaalimuodot liittävät tarkasteltavan moniston kuhunkin pisteeseen yhden *k-muodon*, joka puolestaan on kotangenttivektorin tapaan reaaliarvoinen kuvaus. Uutta on, että k-muodot operoivat usealla tangenttivektorilla yhden sijaan, ovat lineaarisuuden sijaan *multilineaarisia*, ja lisäksi *alternoivia*. Tässä luvussa tarkastellaan näiden k-muotojen algebraa yleisessä vektoriavaruudessa $\mathbb{V}$. Syy tähän on paitsi yleistettävyys, myös merkintöjen huomattava yksinkertaistuminen. Koska edellisen luvun perusteella joukot T_pM ja T_p^*M ovat reaalisia vektoriavaruuksia, kaikkia tässä luvussa johdettavia tuloksia voidaan myöhemmin soveltaa monistoilla. Luvun kannalta keskeisiä lähteitä ovat [2], [4], [5] ja [12]. Permutaatioista voi lukea lisää esimerkiksi kirjasta [6].

3.1 k-muodot ja ulkoinen tulo

Tässä luvussa tutustutaan k-muotojen tarkastelussa käytettäviin algebrallisiin työkaluihin ja rakenteisiin. Olkoon $\mathbb{V}$ mikä tahansa n-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Kun tästä avaruudesta otetaan tarkasteluun k kopiota, näiden karteesista tuloa merkitään

$$\mathbb{V}^k := \underbrace{\mathbb{V} \times \ldots \times \mathbb{V}}_{k \text{ kappaletta}},$$

aivan kuten avaruuden $\mathbb{R}^k$ tapauksessa. Avaruuden $\mathbb{V}$ *duaaliavaruus* on joukko

$$\mathbb{V}^* := \{L : \mathbb{V} \to \mathbb{R} : \ L \text{ on lineaarikuvaus}\}.$$

Kuten luvussa 2.2 mainittiin, kotangenttiavaruus T_p^*M on tangenttiavaruuden T_pM duaaliavaruus. Kun $\mathbf{e} := \{e^1, \ldots, e^n\}$ on avaruuden $\mathbb{V}$ jokin kanta, niin duaaliavaruuden $\mathbb{V}^*$ kannan $\mathbf{E} := \{E^1, \ldots, E^n\}$ sanotaan olevan *kannan* $\mathbf{e}$ *duaalikanta* tai *duaalinen kannalle* $\mathbf{e}$, jos $E^i(e^j) = \delta_{ij}$. Esimerkiksi kotangenttiavaruuden T_p^*M kanta $\{\mathrm{d}x_i(p)\}$ on duaalinen tangenttiavaruuden T_pM kannalle $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}$, sillä lauseen 2.8 todistuksen mukaan

$$\mathrm{d}x_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p\right) = \delta_{ij}.$$

Olkoot c_1 ja c_2 reaalilukuja ja olkoon $\left(v^1,\ldots,v^k\right) \in \mathbb{V}^k$; siis $v^i \in \mathbb{V}$ kaikilla $i = 1,\ldots,n$. Funktio $L : \mathbb{V}^k \to \mathbb{R}$, joka liittää k:hon avaruuden $\mathbb{V}$ vektoriin yhden reaaliluvun, on *multilineaarinen*, kun

$$\begin{aligned} &L\left(v^1,\ldots,c_1 v^i + c_2 v^j,\ldots,v^k\right) \\ &= c_1 L\left(v^1,\ldots,v^i,\ldots,v^k\right) + c_2 L\left(v^1,\ldots,v^j,\ldots,v^k\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

jokaisella indeksillä i ja j. Toisin sanoen multilineaarinen funktio on lineaarinen jokaisen argumenttinsa suhteen erikseen. Multilineaarifunktio L on *alternoiva* eli *antisymmetrinen*, kun

$$L\left(v^1,\ldots,v^i,\ldots,v^j,\ldots,v^k\right) = -L\left(v^1,\ldots,v^j,\ldots,v^i,\ldots,v^k\right) \tag{3.2}$$

millä tahansa kahdella indeksillä $i, j \leq n$, $i \neq j$. Alternoivan multilineaarifunktion arvo siis vaihtaa etumerkkiään aina, kun minkä tahansa kahden argumentin järjestystä vaihdetaan. Alternoivia multilineaarifunktioita kutsutaan *k-muodoiksi*:

Määritelmä 3.1 (k-muoto)**.** Olkoon $\mathbb{V}$ reaalinen n-ulotteinen vektoriavaruus ja olkoon $k \leq n$ ei-negatiivinen kokonaisluku. Alternoiva ja multilineaarinen funktio $\alpha : \mathbb{V}^k \to \mathbb{R}$ on *(ulkoinen) k-muoto* tai *muoto astetta k*. Vektoriavaruuden $\mathbb{V}$ k-muotojen joukkoa merkitään $\Lambda^k(\mathbb{V})$.

k-muoto ottaa siis argumentikseen k kappaletta avaruuden $\mathbb{V}$ vektoreita $v^1,\ldots,v^k$, ja liittää niihin reaaliluvun $\alpha\left(v^1,\ldots,v^k\right)$, käyttäytyen yhtälöiden (3.1) ja (3.2) mukaisesti. Huomaa, että luvussa 2.2 esitellyt kovektorit ovat itse asiassa vektoriavaruuden $T_p^* M$ 1-muotoja: ne ovat lineaarisia ainoan argumenttinsa suhteen, ja niiden voidaan hyvin katsoa olevan myös alternoivia. Yleisesti ottaen kaikki reaaliarvoiset lineaarikuvaukset voidaan katsoa 1-muodoiksi. 0-muoto on puolestaan yksinkertaisesti reaaliluku.

Tärkeä alternoiva ja multilineaarinen funktio on *determinantti*. Se liittää k:hon avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoriin yhden reaaliluvun, on lineaarinen jokaisen argumenttinsa suhteen erikseen, ja vaihtaa merkkiään kun kahden argumentin (tai matriisin sarakkeen) paikkaa vaihdetaan keskenään. Determinantin avulla voidaan konstruoida joukon $\Lambda^k(\mathbb{V})$ alkioita seuraavasti: Jos $\alpha^1,\ldots,\alpha^k \in \mathbb{V}^*$ ja $\left(v^1,\ldots,v^k\right) \in \mathbb{V}^k$, niin kuvaus

$$\left(v^1,\ldots,v^k\right) \mapsto \det \begin{pmatrix} \alpha^1 v^1 & \alpha^1 v^2 & \ldots & \alpha^1 v^k \\ \alpha^2 v^1 & \alpha^2 v^2 & \ldots & \alpha^2 v^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k v^1 & \alpha^k v^2 & \ldots & \alpha^k v^k \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

on determinantin ominaisuuksien perusteella alternoiva ja multilineaarinen, siis k-muoto. Huomaa, että jos edellä olevan matriisin missä tahansa kahdessa sarakkeessa esiintyy sama vektori v^i, niin kuvauksen arvo on nolla. Tämä on voimassa yleisesti alternoiville multilineaarifunktioille. Kun nimittäin $\alpha : \mathbb{V}^k \to \mathbb{R}$ on k-muoto, niin

$$\alpha\left(v^1,\ldots,v^i,\ldots,v^i,\ldots,v^k\right) = -\alpha\left(v^1,\ldots,v^i,\ldots,v^i,\ldots,v^k\right),$$

sillä α on alternoiva. Tällöin on välttämättä oltava $\alpha\left(v^1,\ldots,v^i,\ldots,v^i,\ldots,v^k\right) = 0$.

k-muodoilla on samanlaisia ominaisuuksia kuin kovektoreilla: niitä voidaan esimerkiksi laskea yhteen ja kertoa reaaliluvulla täysin samalla tavalla. k- ja l-muodoille ei kuitenkaan voida määritellä yhteenlaskua, jos $k \neq l$. Sen sijaan muodoille voidaan määritellä useampikin *tulo* riippumatta siitä, ovatko muotojen asteet k ja l samat. Intuitiivinen tapa muodostaa tällainen tulo on kertoa keskenään kahden muodon arvot. Näin saatavaa tuloa kutsutaan muotojen *tensorituloksi.*

Määritelmä 3.2 (Muotojen tensoritulo)**.** Olkoot $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ ja $\beta \in \Lambda^l(\mathbb{V})$. Muotojen α ja β *tensoritulo* on funktio $\alpha \otimes \beta : \mathbb{V}^k \times \mathbb{V}^l \to \mathbb{R}$, joka määritellään asettamalla

$$(\alpha \otimes \beta)\left(v^1,\ldots,v^k,v^{k+1},\ldots,v^{k+l}\right) = \alpha\left(v^1,\ldots,v^k\right)\beta\left(v^{k+1},\ldots,v^{k+l}\right).$$

Tässä $v^i \in \mathbb{V}$ kaikilla indekseillä $i = 1,\ldots,k+l$.

Tensoritulolla on monta hyvää ominaisuutta, jotka on helppo todeta suoraan määritelmän 3.2 avulla. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ reaaliluku. Seuraavat yhtälöt ovat voimassa, kun muotojen α, β ja γ asteet sallivat merkityt laskutoimitukset:

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \otimes \gamma &= \alpha \otimes \gamma + \beta \otimes \gamma \\
\gamma \otimes (\alpha + \beta) &= \gamma \otimes \alpha + \gamma \otimes \beta \\
(c\alpha) \otimes \beta &= \alpha \otimes (c\beta) = c(\alpha \otimes \beta) \\
(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma &= \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = \alpha \otimes \beta \otimes \gamma.
\end{aligned}$$

Tensoritulossa on kuitenkin myös puutteita. Se ei ensinnäkään ole kommutatiivinen, eli yleensä $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$. Lisäksi, vaikka funktio $\alpha \otimes \beta$ onkin multilineaarinen, ei se yleensä ottaen ole alternoiva. Siispä tensoritulolla ei suoraan saada muodostettua joukon $\Lambda^{k+l}(\mathbb{V})$ alkiota. Sen avulla on kuitenkin mahdollista rakentaa sellainen funktio, joka on alternoiva. Tähän tarvitaan tietoa *permutaatioista.*

Olkoon $I_k := \{1,2,\ldots,k\}$ kokonaislukuindeksien joukko. Joukon I_k *permutaatio* on bijektiivinen kuvaus $\sigma : I_k \to I_k$. Permutaatio σ siis vaihtaa indeksijoukon I_k alkioiden paikkoja, ja käytännössä permutaatiot voidaankin ajatella indeksien tai indeksoitavien olioiden eri järjestyksinä. Joukon I_k permutaatioiden joukkoa merkitään $\mathscr{P}(I_k)$. Koska k:n alkion joukko voidaan asettaa $k!$ eri järjestykseen, on joukolla I_k $k!$ permutaatiota; joukossa $\mathscr{P}(I_k)$ on siis $k!$ kuvausta.

Äärellisten joukkojen permutaatiot voidaan periaatteessa määritellä alkio kerrallaan. Esimerkiksi indeksijoukon $I_3 = \{1,2,3\}$ indeksien 1 ja 2 paikan vaihtava permutaatio τ voitaisiin määritellä asettamalla $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ ja $\tau(3) = 3$. Permutaation τ avulla voidaan nyt esittää seuraavanlainen 3-muodon α argumenttien järjestyksen vaihto:

$$\alpha\left(v^{\tau(1)}, v^{\tau(2)}, v^{\tau(3)}\right) = \alpha\left(v^2, v^1, v^3\right).$$

Jokainen permutaatio $\sigma \in \mathscr{P}(I_k)$ voidaan esittää yhdistettynä kuvauksena permutaation τ kaltaisista, kahden indeksin paikkaa vaihtavista permutaatioista eli *vaihdoista*; katso tarkemmin esimerkiksi [6, luvut 1.3 ja 3.5]. Jos permutaatio koostuu parillisesta määrästä vaihtoja, se on *parillinen*. Jos taas vaihtoja tehdään pariton määrä, kyseessä on *pariton* permutaatio. Joukon I_k permutaatioihin σ voidaan liittää kuvaus nimeltä *permutaation merkki* eli *Levi-Civita -symboli* $\varepsilon : \mathscr{P}(I_k) \to \{-1,1\}$,

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \sigma \text{ on parillinen permutaatio,} \\ -1, & \text{kun } \sigma \text{ on pariton permutaatio.} \end{cases}$$

Kun σ ja τ ovat kaksi permutaatiota, merkki ε toteuttaa yhtälön $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. Jos nimittäin σ ja τ ovat kumpikin joko parillisia tai parittomia, on yhdistetty permutaatio $\sigma \circ \tau$ parillinen, ja $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = 1 = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ kummassakin tapauksessa. Jos taas toinen permutaatioista on pariton ja toinen parillinen, on permutaatio $\sigma \circ \tau$ pariton, ja siten $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -1 = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

Olkoon nyt $L : \mathbb{V}^k \to \mathbb{R}$ mikä tahansa multilineaarinen funktio. Asetetaan

$$\mathrm{Alt}(L)\left(v^1, \ldots, v^k\right) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}(I_k)} \varepsilon(\sigma) L\left(v^{\sigma(1)}, \ldots, v^{\sigma(k)}\right), \tag{3.4}$$

missä $I_k = \{1,2,\ldots,k\}$ on vektorien v^i indeksien joukko. Operaatio Alt on melko tekninen mutta tarpeellinen apuväline. Näytetään seuraavaksi, että operaation Alt avulla saatava funktio $\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)$ on halutulla tavalla alternoiva, ja todistetaan joitakin muita jatkossa tarvittavia aputuloksia.

Lemma 3.3 (Kuvauksen Alt ominaisuudet)**.** *Olkoon* $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ *ja* $\beta \in \Lambda^l(\mathbb{V})$. *Yhtälöllä* (3.4) *määritellyllä kuvauksella* Alt *on seuraavat ominaisuudet:*

(i) *Kuvaus* Alt *on lineaarinen.*

(ii) $\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{V})$.

(iii) $\mathrm{Alt}(\alpha) = \alpha$.

(iv) $\mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)\big) = \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)$.

Todistus. Todistus pohjautuu lähteisiin [2, s.101-104] ja [12, s.78-79]. Todistetaan väitteet järjestyksessä aloittaen lineaarisuudesta. Olkoot $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ja $\alpha^1, \alpha^2 \in \Lambda^k(\mathbb{V})$. Suoraan yhtälöä (3.4) käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(c_1\alpha^1 + c_2\alpha^2)\left(v^1,\dots,v^{k+l}\right)\\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_k)} \varepsilon(\sigma)(c_1\alpha^1 + c_2\alpha^2)\left(v^{\sigma(1)},\dots,v^{\sigma(k+l)}\right)\\
&= c_1\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_k)} \varepsilon(\sigma)\alpha^1\left(v^{\sigma(1)},\dots,v^{\sigma(k+l)}\right) + c_2\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_k)} \varepsilon(\sigma)\alpha^2\left(v^{\sigma(1)},\dots,v^{\sigma(k+l)}\right)\\
&= c_1\mathrm{Alt}(\alpha^1)\left(v^1,\dots,v^{k+l}\right) + c_2\mathrm{Alt}(\alpha^2)\left(v^1,\dots,v^{k+l}\right),
\end{aligned}$$

joten kuvauksen Alt lineaarisuus on todistettu.

Olkoon $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ ja $\beta \in \Lambda^l(\mathbb{V})$. Funktio $\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)$ on multilineaaristen funktioiden $\alpha\otimes\beta$ summana multilineaarinen, joten toisen väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että $\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)$ on alternoiva. Olkoon tätä varten $\tau \in \mathscr{P}(I_{k+l})$ sellainen permutaatio, joka vaihtaa kahden indeksin i ja j paikkaa. Tällöin merkin ε ominaisuuden $\varepsilon(\sigma\circ\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\left(v^1,\dots,v^i,\dots,v^j,\dots,v^{k+l}\right)\\
&= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_{(k+l)})} \varepsilon(\sigma)(\alpha\otimes\beta)\left(v^{\sigma(1)},\dots,v^{\sigma(i)},\dots,v^{\sigma(j)},\dots,v^{\sigma(k+l)}\right)\\
&= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_{(k+l)})} \varepsilon(\sigma)(\alpha\otimes\beta)\left(v^{\sigma(\tau(1))},\dots,v^{\sigma(\tau(j))},\dots,v^{\sigma(\tau(i))},\dots,v^{\sigma(\tau(k+l))}\right)\\
&= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\circ\tau\in\mathscr{P}(I_{k+l})} \varepsilon(\tau)\varepsilon\big(\sigma\circ\tau\big)(\alpha\otimes\beta)\left(v^{(\sigma\circ\tau)(1)},\dots,v^{(\sigma\circ\tau)(k+l)}\right)\\
&= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\circ\tau\in\mathscr{P}(I_{k+l})} -\varepsilon\big(\sigma\circ\tau\big)(\alpha\otimes\beta)\left(v^{(\sigma\circ\tau)(1)},\dots,v^{(\sigma\circ\tau)(k+l)}\right)\\
&= -\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\left(v^1,\dots,v^j,\dots,v^i,\dots,v^{k+l}\right),
\end{aligned}$$

eli $\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta) \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{V})$. Tässä $\varepsilon(\tau) = -1$, sillä τ on vaihtona pariton.

Kolmannen kohdan todistamiseksi havaitaan ensin, että kun $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{V})$, ja τ on jälleen kahden indeksin paikan vaihto, on voimassa yhtälö

$$\alpha\left(v^1,\dots,v^{k+l}\right) = \varepsilon(\tau)\alpha\left(v^{\tau(1)},\dots,v^{\tau(k+l)}\right).$$

Koska jokainen permutaatio on esitettävissä vaihtojen yhdisteenä, on tämä yhtälö voimassa kaikille permutaatioille. Näin ollen

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Alt}(\alpha)\left(v^1,\dots,v^k\right)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_k)}\varepsilon(\sigma)\alpha\left(v^{\sigma(1)},\dots,v^{\sigma(k)}\right)\\
&=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_k)}\alpha\left(v^1,\dots,v^k\right)\\
&=\frac{1}{k!}\cdot k!\cdot\alpha\left(v^1,\dots,v^k\right)\\
&=\alpha\left(v^1,\dots,v^k\right),
\end{aligned}$$

sillä joukossa $\mathscr{P}(I_k)$ on $k!$ alkiota. Tämä todistaa kolmannen väitteen. Viimeinen väite seuraa suoraan edeltävistä kohdista. □

Määritelmä 3.4 (Muotojen ulkoinen tulo)**.** Olkoon α k-muoto ja β l-muoto. Muotojen α ja β *ulkoinen tulo* on $(k+l)$-muoto $\alpha\wedge\beta$, joka määritellään asettamalla

$$\alpha\wedge\beta := \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\operatorname{Alt}(\alpha\otimes\beta).$$

Huomaa, että lemman 3.3 kohdan *(ii)* nojalla $\alpha\wedge\beta$ todella on $(k+l)$-muoto. Määritelmässä 3.4 esiintyvä kerroin $\frac{(k+l)!}{k!l!}$ ei ole välttämätön, ja kirjallisuudessa esiintyy myös määritelmiä, joissa kerroin on jätetty pois. Kerroin kuitenkin eliminoi joitakin vakioita, ja monet kirjailijat käyttävät tässä esitettyä määritelmää. Ulkoisella tulolla on kaikki tensoritulon hyvät ominaisuudet. Lisäksi ulkoinen tulo vaihtaa merkkiään tulontekijöiden järjestyksen muuttuessa, riippuen niiden asteesta. Tämä ominaisuus osoittautuu erittäin tärkeäksi myöhemmin. Ulkoisen tulon algebralliset ominaisuudet on listattu seuraavassa lauseessa.

Lause 3.5 (Ulkoisen tulon ominaisuudet)**.** *Olkoon $c\in\mathbb{R}$, ja olkoot $\alpha\in\Lambda^k(\mathbb{V})$, $\beta\in\Lambda^l(\mathbb{V})$ ja $\gamma\in\Lambda^m(\mathbb{V})$ muotoja. Ulkoinen tulo toteuttaa seuraavat yhtälöt:*

(i) $(\alpha+\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge\gamma+\beta\wedge\gamma$ *ja*
$\gamma\wedge(\alpha+\beta)=\gamma\wedge\alpha+\gamma\wedge\beta,$ *kun* $k=l$.

(ii) $(c\alpha)\wedge\beta=\alpha\wedge(c\beta)=c(\alpha\wedge\beta)$

(iii) $\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha$

(iv) $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

Todistus. Väitteiden todistukset pohjautuvat lemmaan 3.3, ja niiden idea on sama kuin teoksessa [12]. Todistetaan kohdat järjestyksessä aloittaen ensimmäisestä. Koska muotojen tensoritulolle on voimassa yhtälö $(\alpha+\beta)\otimes\gamma=\alpha\otimes\gamma+\beta\otimes\gamma$, niin lemman 3.3 ensimmäisen kohdan nojalla $\mathrm{Alt}\big((\alpha+\beta)\otimes\gamma\big)=\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\gamma)+\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)$. Vastaavasti $\mathrm{Alt}\big(\gamma\otimes(\alpha+\beta)\big)=\mathrm{Alt}(\gamma\otimes\alpha)+\mathrm{Alt}(\gamma\otimes\beta)$, mikä todistaa ensimmäisen väitteen. Toinen kohta toteutuu tensoritulon ominaisuuksien nojalla, sillä $\mathrm{Alt}\big((c\alpha)\otimes\beta\big)=\mathrm{Alt}\big(\alpha\otimes(c\beta)\big)=\mathrm{Alt}\big(c(\alpha\otimes\beta)\big)$.

Kolmannen väitteen todistusta varten olkoon τ sellainen permutaatio, jolle

$$\left(v^{\tau(1)},\dots,v^{\tau(k)},v^{\tau(k+1)},\dots,v^{\tau(k+l)}\right)=\left(v^{k+1},\dots,v^{k+l},v^1,\dots,v^k\right).$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
&(\alpha\otimes\beta)\left(v^1,\dots,v^{k+l}\right)\\
&=\alpha\left(v^1,\dots,v^k\right)\beta\left(v^{k+1},\dots,v^{k+l}\right)\\
&=\beta\left(v^{\tau(1)},\dots,v^{\tau(l)}\right)\alpha\left(v^{\tau(l+1)},\dots,v^{\tau(l+k)}\right)\\
&=(\beta\otimes\alpha)\left(v^{\tau(1)},\dots,v^{\tau(k+l)}\right).
\end{aligned}$$

Jos nyt lasketaan kuten lemman 3.3 toisen kohdan todistuksessa, saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\left(v^1,\dots,v^{k+l}\right)\\
&=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\circ\tau\in\mathscr{P}(I_{k+l})}\varepsilon(\tau)\varepsilon\big(\sigma\circ\tau\big)(\beta\otimes\alpha)\left(v^{(\sigma\circ\tau)(1)},\dots,v^{(\sigma\circ\tau)(k+l)}\right)\\
&=\varepsilon(\tau)\mathrm{Alt}(\beta\otimes\alpha)\left(v^1,\dots,v^{k+l}\right).
\end{aligned}$$

Mutta tässähän $\varepsilon(\tau)=(-1)^{kl}$, sillä permutaatio τ koostuu $k\cdot l$ vaihdosta.

Liitännäisyyden todistamiseksi käytetään lemman 3.3 kohtia *(i)*, *(iii)* ja *(iv)*, joiden nojalla

$$\mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)-\alpha\otimes\beta\big)=\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)-\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)=0.$$

Tällöin tensoritulon ominaisuuksista johtuen myös $\mathrm{Alt}\left(\gamma\otimes\left(\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)-(\alpha\otimes\beta)\right)\right)=0$, joten

$$\mathrm{Alt}\left(\gamma\otimes\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\right)=\mathrm{Alt}(\gamma\otimes\alpha\otimes\beta).$$

Mutta tämähän tarkoittaa, että

$$\begin{aligned}
\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) &= \frac{(m+k+l)!}{m!(k+l)!}\mathrm{Alt}\big(\gamma \otimes (\alpha \wedge \beta)\big) \\
&= \frac{(m+k+l)!}{m!(k+l)!} \cdot \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\gamma \otimes \alpha \otimes \beta) \\
&= \frac{(m+k+l)!}{m!k!l!}\mathrm{Alt}(\gamma \otimes \alpha \otimes \beta).
\end{aligned}$$

Täysin samanlaisella laskulla saadaan, että myös $(\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta = \frac{(m+k+l)!}{m!k!l!}\mathrm{Alt}(\gamma \otimes \alpha \otimes \beta)$, joten $\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta) = (\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta$. Siispä viimeinenkin ominaisuus on nyt todistettu. $\square$

Lauseen 3.5 kohdan *(iv)* nojalla voidaan tuloja $\gamma \wedge (\alpha \wedge \beta)$ ja $(\gamma \wedge \alpha) \wedge \beta$ jatkossa kumpaakin merkitä $\gamma \wedge \alpha \wedge \beta$. Tämä merkintä voidaan toki yleistää niin monelle muodolle kuin halutaan. Lisäksi kohdasta *(iii)* seuraa, että kun $E^i \in \mathbb{V}^*$, niin

$$E^i \wedge E^i = -E^i \wedge E^i,$$

jolloin $E^i \wedge E^i \equiv 0$. Erityisesti tämä on voimassa kovektoreilla $\mathrm{d}x_i(p) \in T_p^*M$; siis $\mathrm{d}x_i(p) \wedge \mathrm{d}x_i(p) \equiv 0$. Yleisesti ottaen lause 3.5 tarkoittaa, että muissa tapauksissa ulkoinen tulo käyttäytyy laskettaessa tavallisen tulon tavoin sillä lisäehdolla, että tulon merkki vaihtuu aina kahden tulontekijän paikkojen vaihtuessa.

Esimerkki 3.6 (Ulkoinen tulo)**.** Takastellaan seuraavaksi, kuinka muotojen ulkoinen tulo liittyy ristituloon ja determinantteihin.

(a) Lasketaan avaruuden T_pM 1-muotojen $\alpha_p = a_1\,\mathrm{d}x_1(p) + a_2\,\mathrm{d}x_2(p) + a_3\,\mathrm{d}x_3(p)$ ja $\beta_p = b_1\,\mathrm{d}x_1(p) + b_2\,\mathrm{d}x_2(p) + b_3\,\mathrm{d}x_3(p)$ ulkoinen tulo. Jätetään piste p luettavuuden vuoksi merkitsemättä argumenttina:

$$\begin{aligned}
\alpha_p \wedge \beta_p &= (a_1\,\mathrm{d}x_1 + a_2\,\mathrm{d}x_2 + a_3\,\mathrm{d}x_3) \wedge (b_1\,\mathrm{d}x_1 + b_2\,\mathrm{d}x_2 + b_3\,\mathrm{d}x_3) \\
&= a_1b_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_1b_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + a_1b_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \\
&\qquad a_2b_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_2b_2\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + a_2b_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \\
&\qquad\quad a_3b_1\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3b_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 + a_3b_3\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \\
&\qquad (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \\
&\qquad\quad (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Muodon $\alpha_p \wedge \beta_p$ komponentit ovat samat, kuin avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorien $\sum_{i=1}^3 a_i e^i$ ja $\sum_{i=1}^3 b_i e^i$ ristitulovektorin komponentit. Tässä mielessä muotojen ulkoinen tulo siis yleistää avaruuteen $\mathbb{R}^3$ kahlitun ristitulon.

(b) Ulkoisen tulon määritelmä vastaa tietyissä tapauksissa täysin determinanttia. Jos nimittäin $\alpha^1,\ldots,\alpha^k \in \mathbb{V}^*$ ja $\left(v^1,\ldots,v^k\right) \in \mathbb{V}^k$, niin yhtälön (3.3) kuvaus voidaan esittää ulkoisena tulona muodossa

$$\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^k \left(v^1,\ldots,v^k\right) = \det \begin{pmatrix} \alpha^1 v^1 & \alpha^1 v^2 & \ldots & \alpha^1 v^k \\ \alpha^2 v^1 & \alpha^2 v^2 & \ldots & \alpha^2 v^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k v^1 & \alpha^k v^2 & \ldots & \alpha^k v^k \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Tätä tietoa voidaan käyttää myöhemmin muotojen $\mathrm{d}x_{i_1}(p) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}(p)$ arvojen laskemiseen sekä geometriseen tulkintaan, ja jopa muuttujanvaihtoihin liittyvien Jacobin determinanttien laskemiseen.

3.2 k-muotojen vektorialgebraa

Muotojen ulkoisen tulon avulla voidaan nyt konstruoida korkeampiasteisia muotoja matalampiasteisten muotojen avulla. Koska avaruuden $\mathbb{V}$ dimensio on kuitenkin rajattu lukuun n, ei muotojen aste voi olla aivan mikä tahansa. Seuraava lause yleistää lauseen 2.8 koskemaan astetta k olevia muotoja.

Lause 3.7 (k-muotojen avaruuden $\Lambda^k(\mathbb{V})$ kanta ja dimensio)**.** *Olkoon* $\mathbb{V}$ *reaalinen vektoriavaruus kantanaan* $\mathbf{e} := \left\{e^1,\ldots,e^n\right\}$*, ja olkoon* $\mathbb{V}^*$ *avaruuden* $\mathbb{V}$ *duaaliavaruus, jonka kanta* $\mathbf{E} := \left\{E^1,\ldots,E^n\right\}$ *on duaalinen kannalle* $\mathbf{e}$*. Joukko* $\Lambda^k(\mathbb{V})$ *on reaalinen vektoriavaruus, jonka dimensio on* $\binom{n}{k}$*. Erään kannan avaruudelle* $\Lambda^k(\mathbb{V})$ *muodostavat* k*-muodot*

$$E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k},$$

joille $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$*.*

Todistus. Todistuksen idea on sama kuin lähteessä [5]. On selvää, että k-muotojen yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen pisteittäin määriteltynä tekevät joukosta $\Lambda^k(\mathbb{V})$ vektoriavaruuden, jonka nolla-alkio on identtisesti nolla k-muoto. Kuten lauseiden 2.4 ja 2.8 todistuksissa, tavoitteena on nyt näyttää, että muodot $E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k}$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Tämän jälkeen näytetään, että jokainen k-muoto α voidaan yhtälön (2.4) mukaisesti esittää muodossa

$$\alpha = \sum_{\kappa_k(I_n)} c_{i_1,\ldots,i_k} E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k}, \tag{3.6}$$

missä $c_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{R}$, ja $\kappa_k(I_n)$ tarkoittaa indeksijoukon I_n niitä k-kombinaatioita, joille $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$; summaus tapahtuu siis kaikkien tällaisten järjestettyjen multi-indeksien yli.

Muodot $E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, kun ehdosta

$$\sum_{\kappa_k(I_n)} c_{i_1,\ldots,i_k} E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k} \equiv 0$$

seuraa, että $c_{i_1,\ldots,i_k} = 0$ kaikilla kombinaatioilla $\kappa_k(I_n)$. Koska tämän on toteuduttava kaikilla $\left(v^1, \ldots, v^k\right) \in \mathbb{V}^k$, on erityisesti oltava

$$\sum_{\kappa_k(I_n)} c_{i_1,\ldots,i_k} E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k} \left(e^{j_1}, \ldots, e^{j_k}\right) = 0, \tag{3.7}$$

missä $j_1, \ldots, j_k$ on jokin kiinnitetty multi-indeksi. Ulkoisen tulon määritelmän ja lauseen 3.5 todistuksen mukaisesti

$$\begin{aligned}
&E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k} \left(e^{j_1}, \ldots, e^{j_k}\right) \\
&= \frac{(1+1+\ldots+1)!}{1! \cdot 1! \cdot \ldots \cdot 1!} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}(I_k)} \varepsilon(\sigma) E^{i_1} \otimes \ldots \otimes E^{i_k} \left(e^{\sigma(j_1)}, \ldots, e^{\sigma(j_k)}\right) \\
&= \frac{(k \cdot 1)!}{(1!)^k} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathscr{P}(I_k)} \varepsilon(\sigma) E^{i_1} \otimes \ldots \otimes E^{i_k} \left(e^{\sigma(j_1)}, \ldots, e^{\sigma(j_k)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathscr{P}(I_k)} \varepsilon(\sigma) E^{i_1} \left(e^{\sigma(j_1)}\right) \cdot \ldots \cdot E^{i_k} \left(e^{\sigma(j_k)}\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Koska $\mathbf{E}$ on kannan $\mathbf{e}$ duaalikanta, on $E^i(e^j) = \delta_{ij}$. Siispä, koska indeksit $i_1, \ldots, i_k$ ovat suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan, vain yhtä permutaatiota vastaava summan (3.8) termi voi olla nollasta eroava. Tämän permutaation on oltava sellainen, joka asettaa indeksit $j_1, \ldots, j_k$ suuruusjärjestykseen. Jos nimittäin indeksit $\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k)$ eivät ole suuruusjärjestyksessä, löytyy edellä olevan yhtälön nojalla tällaista permutaatiota vastaavasta summan (3.8) termistä välttämättä ainakin yksi tulontekijä, joka on nolla. Tämän perusteella voidaan havaita, että suotuisaa permutaatiota vastaavalle termille on voimassa

$$E^{i_1} \left(e^{\sigma(j_1)}\right) \cdot \ldots \cdot E^{i_k} \left(e^{\sigma(j_k)}\right) = \begin{cases} 1, & \text{jos } i_1 = \sigma(j_1), \ldots, i_k = \sigma(j_k), \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Koska argumentin $\left(e^{j_1}, \ldots, e^{j_k}\right)$ indeksit $j_1, \ldots, j_k$ on kiinnitetty, täsmälleen yksi summan (3.7) termeistä eroaa nollasta. Siispä

$$0 = \sum_{\kappa_k(I_n)} c_{i_1,\ldots,i_k} E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k} \left(e^{j_1}, \ldots, e^{j_k}\right) = c_{j_1,\ldots,j_k}$$

riippumatta multi-indeksistä $j_1, \ldots, j_k$. Näin ollen muodot $E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k}$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Olkoon sitten $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ mikä tahansa k-muoto. Näytetään, että α voidaan esittää kuten yhtälössä (3.6). Määritellään tätä varten k-muoto β asettamalla

$$\beta = \sum_{\kappa_k(I_n)} \alpha\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}\right) E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k}.$$

Tällöin edellä tehdyn laskun nojalla

$$\beta\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}\right) = \alpha\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}\right)$$

kaikilla multi-indekseillä $i_1, \ldots, i_k$, joten itse asiassa $\beta = \alpha$. Siispä kun valitaan $c_{i_1,\ldots,i_k} = \alpha\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}\right)$, saadaan haluttu esitys muodolle α.

Perustellaan vielä, miksi avaruuden $\Lambda^k(\mathbb{V})$ dimensio on $\binom{n}{k}$. Huomaa, että jokainen kantavektoreista $E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k}$ määrää avaruudessa $\Lambda^k(\mathbb{V})$ yhden suoran. Jos tulontekijöiden järjestystä muutetaan, ainoastaan tulon $E^{i_1} \wedge \ldots \wedge E^{i_k}$ merkki vaihtuu. Esimerkiksi $E^1 \wedge E^2 = -E^2 \wedge E^1$, joten 2-muodot $E^1 \wedge E^2$ ja $E^2 \wedge E^1$ määräävät saman suoran. Näin ollen kasvavat indeksien k-kombinaatiot $\kappa_k(I_n)$ määräävät yhtä monta suoraa kuin kaikki indeksien k-kombinaatiot, joita on $\binom{n}{k}$ kappaletta. □

Kun edeltävässä todistuksessa valitaan

$$\mathbb{V} = T_pM, \qquad \mathbb{V}^* = T_p^*M, \qquad e^{i_j} = \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}\right|_p \qquad \text{ja} \qquad E^{i_j} = \mathrm{d}x_{i_j}(p),$$

pätee lause 3.7 suoraan moniston M tangentti- ja kotangenttiavaruuksien tapauksessa. Siispä tässä luvussa rakennettua teoriaa voidaan suoraan soveltaa sileiden monistojen tangentti- ja kotangenttiavaruuksissa.

3.3 Esimerkki: Muotojen geometrinen merkitys avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Muotojen parissa on nyt tehty paljon työtä, ja lopputulos voi vaikuttaa sangen abstraktilta. Tämän vaikutelman lieventämiseksi tarkastellaan seuraavaksi muotojen geometrista tulkintaa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Kun käytetään avaruuksille $\mathbb{R}^3$ ja $T_p\mathbb{R}^3$ kantoja

$$\left\{e^1, e^2, e^3\right\} \qquad \text{ja} \qquad \left\{\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \tfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \tfrac{\partial}{\partial x_3}\Big|_p\right\},$$

huomataan, että vektorilla $v = v_1e^1 + v_2e^2 + v_3e^3 \in \mathbb{R}^3$ on samat komponentit v_i tangenttivektorin

$$v_p = v_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p + v_3 \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_p$$

kanssa. Tämä tarkoittaa, että euklidisissa avaruuksissa muotojen voidaankin tulkita operoivan pisteittäin avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreilla. Tällä tavalla muodoille saadaan selkeä geometrinen merkitys. Huomaa, että koska monistona on avaruus $\mathbb{R}^3$ ja x on identtinen kuvaus, toimii muoto $\mathrm{d}x_i(p)$ samalla tavalla jokaisessa tangenttiavaruudessa. Tämä ei pidä paikkaansa yleisesti!

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ voidaan muodostaa sellaisia k-muotoja, joille $k \leq 3$. Muotojen $\mathrm{d}x_1(p)$, $\mathrm{d}x_2(p)$ ja $\mathrm{d}x_3(p)$ avulla saadaan kanta avaruudelle $T_p^*\mathbb{R}^3 = \Lambda^1(T_p\mathbb{R}^3)$ jokaisessa pisteessä $p \in \mathbb{R}^3$, ja avaruuden $\Lambda^1(T_p\mathbb{R}^3)$ dimensio on siten $\binom{3}{1} = 3$. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ kaikki 1-muodot voidaan siis esittää muodossa

$$\alpha_p = c_1\,\mathrm{d}x_1(p) + c_2\,\mathrm{d}x_2(p) + c_3\,\mathrm{d}x_3(p).$$

Lukijan on helppoa todeta aiemmin esiteltyjen määritelmien perusteella, että

$$\alpha_p v_p = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3.$$

Tämä tarkoittaa, että muodon α_p voidaan tulkita laskevan vektorin v projektiot koordinaattiakseleille, kertovan projektioiden pituudet vastaavasti luvuilla c_i, ja summaavan tulokset [4].

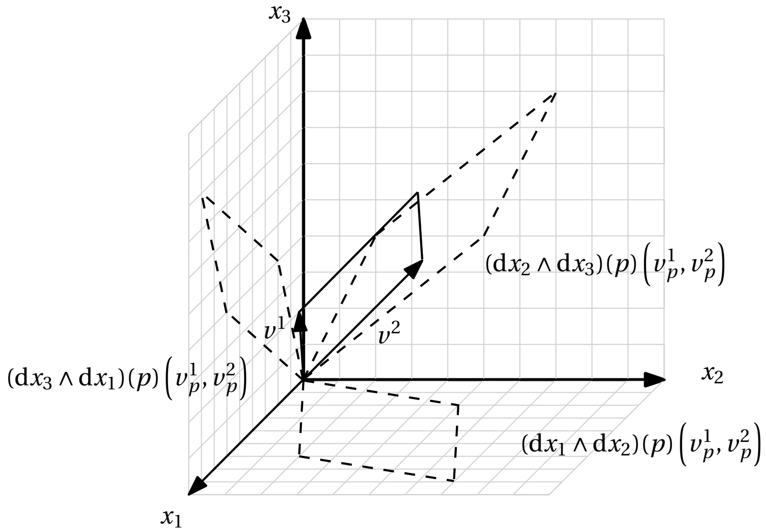
Avaruuden $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)$ dimensio on myös 3, sillä $\binom{3}{2} = 3$. Lauseen 3.7 nojalla muodoista $\mathrm{d}x_1(p) \wedge \mathrm{d}x_2(p), \mathrm{d}x_2(p) \wedge \mathrm{d}x_3(p)$, ja $\mathrm{d}x_1(p) \wedge \mathrm{d}x_3(p)$ saadaan eräs kanta avaruudelle $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)$ kaikilla $p \in \mathbb{R}^3$. Vaikka tässä ja lauseessa 3.7 kanta muodostetaan sellaisista tuloista, joissa indeksit ovat kasvavassa järjestyksessä, ei näin tarvitse välttämättä tehdä. Käytännön kannalta on monesti selkeämpää esittää muodot sellaisessa kannassa, jossa indeksit ovat *syklisessä järjestyksessä*, kuten seuraavan muodon β_p tapauksessa:

$$\beta_p = c_1\,(\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)(p) + c_2\,(\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1)(p) + c_3\,(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)(p).$$

Tässä merkittiin $\mathrm{d}x_i(p) \wedge \mathrm{d}x_j(p) = (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j)(p)$ konsistentisti myöhempien merkintöjen kanssa. Olkoot nyt $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^3$. Ulkoisen tulon määritelmästä juurensa juontavan yhtälön (3.5) ja edeltävän 1-differentiaalimuotojen geometrisen tulkinnan perusteella

$$(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j)(p)\left(v_p^1, v_p^2\right) = \det\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_i(p)\,v_p^1 & \mathrm{d}x_i(p)\,v_p^2 \\ \mathrm{d}x_j(p)\,v_p^1 & \mathrm{d}x_j(p)\,v_p^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v_i^1 & v_j^2 \\ v_i^1 & v_j^2 \end{pmatrix}.$$

Viimeisimmän determinantin tulkinta on seuraava: Valitaan vektoreista v^1 ja v^2 i- ja j-suuntaiset komponentit, jolloin saadaan vektorien v^1 ja v^2 projektiot i. ja j. koordinaattiakselin virittämälle tasolle. Determinantti laskee näiden projektiovektorien virittämän suunnikkaan pinta-alan, joka on toisin sanoen vektorien v^1 ja v^2 virittämän suunnikkaan tasoprojektion pinta-ala. Muoto β_p siis laskee ensin vektorien v^1 ja v^2 virittämän suunnikkaan projektiot kaikille koordinaattiakselien virittämille tasoille, ja



Kuva 8. Diffenrentiaalimuodon $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ geometrinen hahmotus avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

kertoo sitten kunkin projektion pinta-alan jollakin luvulla c_i. [4]. Tätä havainnollistaa kuva 8.

3-muotoja avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on vain yhdenlaisia siinä mielessä, että avaruuden $\Lambda^3(T_p\mathbb{R})$ dimensio on $\binom{3}{1} = 1$. Avaruuden $T_p\mathbb{R}^3$ 3-muodot ovat siis muotoa

$$\gamma_p = c\,(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)(p),$$

missä $c \in \mathbb{R}$. Muodolle $(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)(p)$ saadaan myös geometrinen tulkinta determinantin avulla. Kun $v^1, v^2, v^3 \in \mathbb{R}^3$, on voimassa yhtälö

$$(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)(p)\left(v_p^1, v_p^2, v_p^3\right) = \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix}.$$

Muoto γ_p siis laskee vektorien v^1, v^2 ja v^3 virittämän suuntaissärmiön tilavuuden etumerkillä varustettuna, ja skaalaa tuloksen luvulla c.

Huomaa, että karttakuvauksen x avulla saatavia lineaarisesti riippumattomia 1-muotoja $\mathrm{d}x_i(p)$ on yhtä monta kuin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on koordinaattiakseleita, ja lineaarisesti riippumattomia 2-muotoja $(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j)(p)$ on yhtä monta kuin positiivisten koodinaattiakseleiden määräämiä tasoja. Lineaarisesti riippumattomia 3-muotoja $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k$ on vain yksi; sen muodostamiseen tarvitaan kaikki käytettävissä olevat suunnat. Vaikka muodot voidaankin tulkita pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskijoina, on huomiotava, että esimerkiksi $(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3)(p)$ ja $(\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1)(p)$ palauttavat saman pinta-alan mutta *eri merkkisenä.*

4 Differentiaalimuodot monistoilla

4.1 k-muotokentät

Vektoriavaruuksien k-muodot, kuten kovektoritkin, elävät ikään kuin lukittuna tiettyyn pisteeseen. k-muotojen kanssa voidaan kuitenkin toimia samoin, kuin tangentti- ja kovektorien kanssa toimittiin luvussa 2. Tarkastellaan siis kuvauksia, jotka liittävät kuhunkin moniston pisteeseen yhden k-muodon. Tässä luvussa määritellään tällaiset *k-muotokentät* monistoilla. Erityisesti tutustutaan differentioituviin muotokenttiin, eli *differentiaalimuotoihin* ja niiden ominaisuuksiin. Lisäksi tutustutaan uuden tyyppiseen derivointioperaatioon nimeltä *ulkoinen derivaatta*. Ulkoinen derivaatta on merkittävän hieno konstruktio, jonka avulla esimerkiksi vektorikentän divergenssi ja roottori voidaan yleistää ja esittää yhtenäisellä tavalla. Mikä hienointa, tämä ulkoinen derivaatta ei riipu monistolle valitusta kartasta. Tässä luvussa on käytetty lähteinä teoksia [9], [10], [13] ja [15].

Määritelmä 4.1 (k-muotokenttä)**.** Olkoon M sileä n-ulotteinen monisto, (U,x) kartta ja $k \leq n$ positiivinen kokonaisluku. *k-muotokenttä joukossa U* on kuvaus ω, joka liittää jokaiseen joukon U pisteeseen p yhden k-muodon $\omega(p)$.

Kaikki muotojen laskutoimitukset voidaan pisteittäin laajentaa koskemaan k-muotokenttiä yhtälöiden (1.1) ja (2.10) tapaan. Tämä tarkoittaa, että kun ω ja η ovat k-muotokenttiä ja ψ on l-muotokenttä, niin

$$\begin{aligned}(\omega+\eta)(p) &= \omega(p)+\eta(p),\\ (c\omega)(p) &= c\omega(p), \qquad\qquad \text{ja}\\ (\omega\wedge\psi)(p) &= \omega(p)\wedge\psi(p).\end{aligned}$$

Näitä merkintöjä hyödynnettiin jos osin edeltävän luvun lopussa. Yhtälöä (2.12) mukaillen voidaan määritellä *k-muotokentän toimenpide useaan vektorienttään.* Kun $V^1,\dots,V^k$ ovat vektorikenttiä, asetetaan

$$\omega\big(V^1,\dots,V^k\big)(p) := \omega(p)\left(V^1(p),\dots,V^1(p)\right).$$

Lauseen 3.7 nojalla jokainen moniston M k-muotokenttä voidaan esittää muodossa

$$\omega = \sum_{\kappa_k(I_n)} f_{i_1,\dots,i_k}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$

missä x on karttakuvaus, kertoimet $f_{i_1,\dots,i_k}$ ovat monistolla M määriteltyjä funktioita, ja kuvaus $\mathrm{d}x_{i_j}$ on kovektorikenttä $p\mapsto\mathrm{d}x_{i_j}(p)$. Lauseen 3.7 todistuksessa esitelty merkintä $\kappa_k(I_n)$ tarkoittaa indeksijoukon I_n niitä k-kombinaatioita, joissa indeksit ovat suuruusjärjestyksessä. *k-differentiaalimuodoksi* kutsutaan sellaista k-muotokenttää ω, jonka *komponenttifuntiot* $f_{i_1,\dots,i_k}$ ovat differentioituvia.

Määritelmä 4.2 (k-differentiaalimuoto monistolla)**.** Sileällä monistolla M määritelty differentioituva k-muotokenttä ω on *differentiaalinen k-muoto* tai *k-differentiaalimuoto* monistolla M. Luku k on differentiaalimuodon *aste*. Monistolla M määriteltyjen differentiaalimuotojen joukkoa merkitään $\Omega^k(M)$, ja vastaavasti voidaan puhua jossakin moniston osajoukossa määritellyistä k-differentiaalimuodoista. Kun sekaantumisen vaaraa ei ole, voidaan differentiaalimuodoista puhua myös lyhyesti muotoina.

Esimerkki 4.3 (Duaali- ja vuomuodot)**.** Differentiaalimuodot liittyvät usein läheisesti monistoilla määriteltyihin vektorikenttiin. Olkoon seuraavassa $V = \sum_{i=1}^{3} V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vektorikenttä avaruudessa $\mathbb{R}^3$, ja olkoot x_i euklidiset koordinaattifunktiot.

(a) Differentiaalista 1-muotoa

$$\omega_V := V_1 \mathrm{d}x_1 + V_2 \mathrm{d}x_2 + V_3 \mathrm{d}x_3$$

kutsutaan vektorikentän V *duaalimuodoksi*, sillä sen komponenttifunktiot ovat samat kuin vektorikentän V, mutta jokaisessa pisteessä p kantavektorit $\mathrm{d}x_i(p)$ ovat kantavektoreille $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ duaalisia. Differentiaalimuotoa ω_V kutsutaan toisinaan myös vektorikentän V *työmuodoksi*. Jos vektorikenttä V nimittäin kuvaa jotakin voimakenttää, niin luvussa 5.3 yhtälöllä (5.5) määriteltävä integraali $\int_\gamma \omega_V$ antaa voiman V tekemän työn tilanteessa, jossa hiukkanen kulkee pitkin polun γ käyrää.

(b) Kuvaus $\eta_V \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\eta_V := V_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,$$

on 2-differentiaalimuoto avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Huomaa, että samaan termiin liittyville ”kantavektoreille” $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ja $\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k$ on voimassa $\mathrm{d}x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \equiv 0$ ja $\mathrm{d}x_k\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \equiv 0$. Muodon η_V i. komponentti siis huomioi vain sellaiset tangenttivektorit, jotka eivät ole samansuuntaisia vektorikentän V i. komponentin kanssa. Fysikaalisesti tulkittuna muoto η_V laskee, kuinka paljon vektorikenttä V ”virtaa” minnekin päin. Tarkemmin eriteltynä termi $V_i \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k$ laskee virtausta j. ja k. koordinaattiakselien virittämää tasoa vastaan kohtisuoraan i. koordinaattiakselin suuntaan. Tästä syystä differentiaalimuotoa η_V kutsutaan vektorikentän V *vuomuodoksi*.

4.2 Monistojen väliset kuvaukset

Reaaliarvoisten funktioiden lisäksi on tarpeellista tarkastella kahden moniston M ja N välisiä kuvauksia $F : M \to N$. Näitä kuvauksia voidaan nimittäin käyttää muiden ”olioiden”, kuten tangenttivektorien ja differentiaalimuotojen, siirtämiseen monistojen välillä. Kuten reaaliarvoisten funktioiden tapauksessa, käsitellään tässä tutkielmassa ainoastaan sellaisia kuvauksia $F : M \to N$, jotka ovat *differentioituvia*. Määritellään seuraavaksi, mitä tällä tarkoitetaan:

Määritelmä 4.4 (Monistojen välisen kuvauksen differentioituvuus)**.** Olkoot M ja N sileitä monistoja, $p \in M$, ja olkoot x ja y karttoja pisteiden p ja $F(p)$ ympäristöissä. Monistojen välinen kuvaus $F : M \to N$ on *differentioituva pisteessä p*, jos sen *lokaali koordinaattiesitys* $y \circ F \circ x^{-1}$ on C^∞-kuvaus perinteisessä mielessä (siis kuvauksena karttojen x ja y maalijoukkojen välillä) pisteessä $x(p)$. Kuvausten differentioituvuudesta monistolla tai sen osajoukoissa puhutaan samoin kuin funktioiden tapauksessa. Jos kuvauksella F on C^∞-luokan käänteiskuvaus, niin F on *diffeomorfismi*.

Joskus on hyödyllistä tarkastella kuvausta $F : M \to N$ *koordinaattifunktioiden* avulla. Tällöin F esitetään muodossa $F = (F_1, \dots, F_k)$, missä k on moniston N dimensio. Huomaa, että tämä esitys riippuu täysin käytetystä kartasta. Kun $y = (y_1, \dots, y_k)$ on karttakuvaus monistolla N, koordinaattifunktio F_i tarkoittaa funktiota $F_i = y_i \circ F$.

”Olioiden siirtämistä” varten on monistojen väliseen kuvaukseen $F : M \to N$ seuraavaksi tarkoitus liittää kaksi muuta kuvausta. Nämä ovat niin kutsuttu *tangenttikuvaus* F_*, sekä *palautuskuvaus* F^*. Näistä ensimmäinen on kahden euklidisen avaruuden välisen kuvauksen derivaatan yleistys monistoille, ja jälkimmäinen tulee toimittamaan eräänlaisen muuttujanvaihdon virkaa.

Määritelmä 4.5 (Tangenttikuvaus)**.** Olkoot M ja N sileitä monistoja, F differentioituva monistojen M ja N välinen kuvaus, ja $v_p \in T_pM$ moniston M tangenttivektori. Kuvaukseen F liittyvä *tangenttikuvaus* $F_*(p) : T_pM \to T_{F(p)}N$ vie vektorin v_p tangenttivektoriksi $F_*(p)v_p \in T_{F(p)}N$, joka määritellään asettamalla

$$F_*(p)v_p[g] = v_p[g \circ F]$$

kaikille $g \in C^\infty(N)$.

Tangenttivektorien lineaarisuudesta seuraa, että myös tangenttikuvaus $F_*(p)$ on lineaarinen. Tangenttikuvaksella on useita muitakin hyviä ominaisuuksia, ja siitä on suuri apu monistoja tutkittaessa. Tämä ei ole yllättävää, sillä kyseessä on derivaatan yleistys. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan tarkemmin tarkastella tangenttikuvauksen ominaisuuksia, vaan se esiintyy lähinnä työkalun asemassa. Kirjallisuudessa tangenttikuvaukselle esiintyy useita erilaisia merkintätapoja ja nimityksiä. Yleisin merkintä lienee $\mathrm{d}F_p$, jolloin puhutaan monistojen välisen kuvauksen F *differentiaalista*. Tämä terminologia on yleinen nimenomaan monistoihin tai avaruuden $\mathbb{R}^n$ pintoihin keskittyvissä tarkasteluissa; katso esimerkiksi [1] tai [10]. Muita nimityksiä ovat muun muassa derivaatta ja ”push-forward”, joka korostaa kuvauksen $F_*(p)$ vaikutusta tangenttivektoreihin.

Tangenttikuvauksen avulla voidaan määritellä differentiaalimuodoilla operoiva kuvaus F^*, joka kuvaa kuvauksiin F ja $F_*(p)$ nähden "vastakkaiseen suuntaan":

Määritelmä 4.6 (Palautuskuvaus)**.** Olkoot M ja N sileitä monistoja, ja olkoon $\omega \in \Omega^k(N)$ moniston N differentiaalimuoto. Kun $F : M \to N$ on differentioituva kuvaus monistojen välillä, niin siihen liittyvä *palautuskuvaus* $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ määritellään asettamalla

$$F^*\omega(p)\left(v_p^1, \dots, v_p^k\right) = \omega\big(F(p)\big)\left(F_*(p)v_p^1, \dots, F_*(p)v_p^k\right),$$

missä vektorit v_p^i ovat moniston M tangenttivektoreita. Kun $k = 0$ eli kun ω on funktio, $F^*\omega = \omega \circ F$.

Englanninkielisessä kirjallisuudessa kuvaukselle F^* käytetään lähes yksinomaan nimitystä "pull-back", joka viittaa differentiaalimuotojen "vetämiseen takaisin tutulle monistolle". Juuri tämä onkin kuvauksen F^* tarkoitus, onhan $F^*\omega$ määritelmän 4.6 mukaisesti moniston M differentiaalimuoto. Huomaa, että monistojen M ja N dimensioiden ei tarvitse olla yhtä suuret, vaan riittää, että kummankin dimensio on vähintään k. Vaikka palautuskuvaus ei ole varsinainen muuttujanvaihto, voidaan sen avulla käytännössä toteuttaa sellaisia. Seuraavan lemman avulla saadaan merkinnällisesti tehokas lähestymistapa palautuskuvauksen käsittelyyn, ja samalla hämmästyttävä yhteys euklidisten avaruuksien koordinaattimuunnoksien kanssa.

Lemma 4.7 (Palautuskuvauksen ominaisuudet)**.** *Olkoon $F : M \to N$ differentioituva kuvaus. Olkoot ω ja η differentiaalimuotoja monistolla N, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ reaalilukuja, ja olkoon $g \in C^\infty(M)$.*

(i) $F^*(c_1\omega + c_2\eta) = c_1F^*\omega + c_2F^*\eta$

(ii) $F^*(\omega \wedge \eta) = \big(F^*\omega\big) \wedge \big(F^*\eta\big)$

(iii) $F^*(g\omega) = (g \circ F)F^*\omega.$

(iv) $F^*\mathrm{d}g = \mathrm{d}\big(g \circ F\big).$

Todistus. Kohdan *(i)* todistus on suoraviivainen lasku. Kun differentiaalimuotojen ω ja η aste on k, niin

$$\begin{aligned}
&\big(F^*(c_1\omega + c_2\eta)\big)(p)\left(v_p^1, \dots, v_p^k\right) \\
&= (c_1\omega + c_2\eta)\big(F(p)\big)\left(F_*(p)v_p^1, \dots, F^*(p)v_p^k\right) \\
&= c_1\omega\big(F(p)\big)\left(F_*(p)v_p^1, \dots, F^*(p)v_p^k\right) + c_2\eta\big(F(p)\big)\left(F_*(p)v_p^1, \dots, F^*(p)v_p^k\right) \\
&= c_1F^*\omega(p)\left(v_p^1, \dots, v_p^k\right) + c_2F^*\eta(p)\left(v_p^1, \dots, v_p^k\right).
\end{aligned}$$

Kohdan *(ii)* todistaminen on myös suora lasku, jossa käytetään ulkoisen tulon määritelmää. Olkoot differentiaalimuotojen ω ja η asteet vastaavasti k ja l. Tällöin, jättämällä piste p tilan säästämiseksi merkitsemättä kuvauksien argumenttina, saadaan

$$\begin{aligned}
&F^*(\omega\wedge\eta)\left(v_p^1,\dots,v_p^k\right)\\
&=(\omega\wedge\eta)(F)\left(F_*v_p^1,\dots,F_*v_p^{k+l}\right)\\
&=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_{k+l})}\omega(F)\left(F_*v_p^{\sigma(1)},\dots,F_*v_p^{\sigma(k)}\right)\eta(F)\left(F_*v_p^{\sigma(k+1)},\dots,F_*v_p^{\sigma(k+l)}\right)\\
&=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in\mathscr{P}(I_{k+l})}F^*\omega\left(v_p^{\sigma(1)},\dots,v_p^{\sigma(k)}\right)F^*\eta\left(v_p^{\sigma(k+1)},\dots,v_p^{\sigma(k+l)}\right)\\
&=\big((F^*\omega)\wedge(F^*\eta)\big)\left(v_p^1,\dots,v_p^k\right).
\end{aligned}$$

Kolmas väite seuraa suoraan tiedosta $(g\omega)\big(F(p)\big)=(g\circ F)(p)\omega\big(F(p)\big)$ sekä palautuskuvauksen määritelmästä 4.6. Kohdan *(iv)* todistamista varten olkoon v_p moniston M tangenttivektori. Tällöin

$$F^*(\mathrm{d}g)(p)\,v_p=\mathrm{d}g\big(F(p)\big)\big(F_*(p)\,v_p\big)$$

niin ikään määritelmän 4.6 perusteella. Koska $\mathrm{d}g\big(F(p)\big)\in T^*_{F(p)}N$ ja $F_*(p)\,v_p\in T_{F(p)}N$, voidaan yhtälön (2.8) mukaisesti kirjoittaa

$$\mathrm{d}g\big(F(p)\big)\big(F_*(p)\,v_p\big)=\big(F_*(p)\,v_p\big)[g].$$

Mutta nyt tangenttikuvauksen määritelmän 4.5 ja yhtälön (2.8) mukaan

$$\big(F_*(p)\,v_p\big)[g]=v_p[g\circ F]=\mathrm{d}\big(g\circ F\big)(p)\,v_p,$$

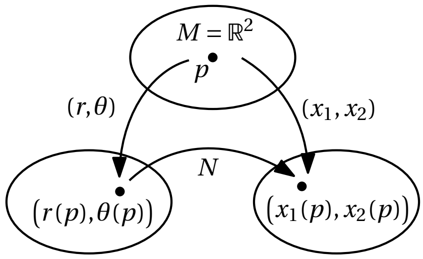
mikä todistaan neljännen kohdan. □

Seuraus 4.8. *Olkoon $F: M\to N$ C^∞-kuvaus monistojen M ja N välillä. Kun y on karttakuvaus monistolla N ja $f_{i_1,\dots i_k}\in C^\infty(N)$ ovat differentioituvia funktioita, on voimassa yhtälö*

$$F^*\left(\sum_{\kappa_k(I_n)}f_{i_1,\dots,i_k}\,\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}y_{i_k}\right)=\sum_{\kappa_k(I_n)}\big(f_{i_1,\dots,i_k}\circ F\big)\,\mathrm{d}\big(y_{i_1}\circ F\big)\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}\big(y_{i_k}\circ F\big).$$

Esimerkki 4.9 (Napakoordinaatit)**.** Olkoot x_1 ja x_2 euklidiset koordinaattifunktiot avaruudelle $\mathbb{R}^2$, ja olkoot (r,θ) napakoordinaatit. *Napakoordinaattikuvaus* on koordinaattienvaihto N, jolle

$$N(r,\theta)=\big(r\cos(\theta),r\sin(\theta)\big)=(x_1,x_2).$$



Kuva 9. Napakoordinaattikuvauksen N tulkinta koordinaattienvaihtona $(x_1, x_2) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$.

Yhdistetty kuvaus $N(r,\theta)$ on siis identtinen kuvaus ilmoitettuna napakoordinaateissa; tätä havainnollistaa kuva 9. Avaruuden $\mathbb{R}^2$ *pinta-ala-alkio* on differentiaalimuoto $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$. Seurauksen 4.8 mukaan $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ saadaan esitettyä napakoordinaateissa palautuskuvauksen $N(r,\theta)^*$ avulla seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&N(r,\theta)^* \, (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) \\
&= \mathrm{d}\big(x_1 \circ N(r,\theta)\big) \wedge \mathrm{d}\big(x_2 \circ N(r,\theta)\big) \\
&= \mathrm{d}\big(r\cos(\theta)\big) \wedge \mathrm{d}\big(r\sin(\theta)\big) \\
&= \big(\cos(\theta)\,\mathrm{d}r - r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\big) \wedge \big(\sin(\theta)\,\mathrm{d}r + r\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta\big) \\
&= -r\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r + r\cos^2(\theta)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \\
&= r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Koordinaattimuunnos voidaan siis toteuttaa yksinkertaisesti sijoittamalla uusi koordinaattiesitys vanhan paikalle ja sieventämällä [10]. Laskun tulos näyttää hämmästyttävästi samalta, kuin muuttujanvaihtokaavan

$$\int_{N(U)} f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_U f\big(N(r,\theta)\big)\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

soveltaminen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukossa U perinteisin merkinnöin, jolloin kerroin r on napakoordinaattikuvauksen Jacobin matriisin determinantti. Seurauksesta 4.8 seuraa, että muuttujanvaihtoja voidaan palautuskuvauksilla toteuttaa Jacobin determinantteineen myös yleisemmin:

Lause 4.10. *Olkoon $F = (F_1, \dots, F_n) : M \to N$ differentioituva kuvaus n-ulotteisten monistojen M ja N välillä. Kun (U, x) ja (W, y) ovat karttoja monistoilla M ja N, ja g on jatkuva funktio joukossa W, niin joukossa $U \cap F^{-1}(W)$ on voimassa yhtälö*

$$F^*\big(g\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n\big) = (g \circ F)\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Todistus. Riittää näyttää, että kummankin puolen lausekkeen toimepide vektorikenttäjoukkoon $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ on sama funktio. Seurauksen 4.8 mukaan vasemman puolen lausekkeelle on voimassa

$$\begin{aligned} F^*\left(g \mathrm{d} y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} y_n\right) &= (g \circ F)\, \mathrm{d}\big(y_1 \circ F\big) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\big(y_n \circ F\big) \\ &= (g \circ F)\, \mathrm{d} F_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d} F_n . \end{aligned}$$

Komponenttifunktioiden F_i differentiaalit ovat 1-differentiaalimuotoja, joten jokaisessa pisteessä $p \in M$ $\mathrm{d}F_i(p)$ on kovektori. Esimerkin 3.6 mukaisesti on siis

$$\mathrm{d} F_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d} F_n \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \det\left(\mathrm{d} F_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right).$$

Siispä

$$F^*\left(g \mathrm{d} y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} y_n\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = (g \circ F) \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right),$$

mikä todistaa väitteen, sillä

$$\mathrm{d} x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} x_n \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \equiv 1. \qquad \square$$

Lauseesta 4.10 seuraa välittömästi, että jos (U, x) ja (W, y) ovat kaksi karttaa samalla monistolla ja $f \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = g \,\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n$, niin joukossa $U \cap W$

$$f = g \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right).$$

Tämä nähdään valitsemalla kuvaukseksi F identtinen kuvaus. Lisäksi lauseen 4.10 nojalla n-muotojen koordinaatit voidaan vaihtaa yhtälön

$$F^*\left(\mathrm{d} y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d} y_n\right) = \det\left(\frac{\partial y_i \circ F}{\partial x_j}\right) \mathrm{d} x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d} x_n$$

mukaisesti. Tämä yhtälö seuraa valinnasta $f = g \equiv 1$.

4.3 Ulkoinen derivaatta

0-differentiaalimuodon eli funktion f differentiaali $\mathrm{d}f$ on 1-differentiaalimuoto monistolla M, ja kartassa (U, x) se voidaan esittää yhtälön (2.13) mukaisesti muodossa

$$\mathrm{d} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d} x_i .$$

Samassa kartassa k-differentiaalimuoto ω voidaan esittää muodossa

$$\omega = \sum_{\kappa_k(I_n)} f_{i_1,\dots,i_k} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

joillakin funkioilla $f_{i_1,\dots,i_k}$. Nämä esitykset yhdistämällä voitaisiin määritellä $k+1$-differentiaalimuoto, ”k-differentiaalimuodon ω differentiaali” $\mathrm{d}\omega$, asettamalla

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{\kappa_k(I_n)} \mathrm{d}f_{i_1,\dots,i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = \sum_{\kappa_k(I_n)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

Tällaiseen määritelmään sisältyy kuitenkin samankaltainen ongelma, kuin monistolla määriteltyjen funktioiden differentiointiin: $\mathrm{d}\omega$ näyttäisi riippuvan voimakkaasti valitusta kartasta. Hämmästyttävää kyllä, käy ilmi, että edellä ehdotettu kaava ”differentiaalille” $\mathrm{d}\omega$ antaa saman tuloksen riippumatta koordinaattijärjestelmästä.

Lause 4.11 (Ulkoisen derivaatan olemassaolo ja yksikäsitteisyys)**.** *Olkoon M sileä monisto, ja olkoot $\omega \in \Omega^k(M)$ ja $\eta \in \Omega^l(M)$ differentiaalimuotoja. Jokaisella k on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

(i) $\mathrm{d}(c_1\omega + c_2\eta) = c_1 \, \mathrm{d}\omega + c_2 \, \mathrm{d}\eta$, *kun $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ja $k = l$.*

(ii) $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$

(iii) $\mathrm{d}^2 := \mathrm{d} \circ \mathrm{d} \equiv 0$

(iv) Kun $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ on 0-muoto eli funktio, niin $\mathrm{d}f$ on funktion f differentiaali.

Kun (U, x) on mikä tahansa kartta monistolle M, niin joukossa U

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{\kappa_k(I_n)} \mathrm{d}f_{i_1,\dots,i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}. \tag{4.1}$$

Differentiaalimuotoa $\mathrm{d}\omega$ *kutsutaan differentiaalimuodon ω* ulkoiseksi derivaataksi, *ja kuvausta* d *kutsutaan* ulkoiseksi derivaattaoperaattoriksi.

Todistus. Tässä esitettävä todistus on lähteen [13] mukainen, ja sen idea on seuraava: Määritellään ensin ulkoinen derivaatta jossakin kartassa yhtälöllä (4.1) ja osoitetaan, että tässä kartassa ulkoinen derivaatta täyttää lauseessa 4.11 luetellut ominaisuudet. Osoitetaan tämän jälkeen, että nämä ominaisuudet karakterisoivat ulkoisen derivaatan. Tämä tehdään näyttämällä, että jos d' on jokin kuvaus, jolla nämä ominaisuudet on, niin itse asiassa $\mathrm{d}' = \mathrm{d}$ valitussa koordinaattiympäristössä. Lopuksi määritellään lauseen 4.11 kuvaus d pisteittäin rajoittumalla sopivaan koordinaattiympäristöön.

Olkoon siis (U, x) jokin kartta monistolle M, ja määritellään d koordinaattiympäristössä U yhtälöllä (4.1). Todetaan ensin, että kohta *(iv)* on selvä. Kohta *(i)* puolestaan seuraa välittömästi yhtälöstä 4.1 ja lemmasta 2.14. Tämän nojalla loput väitteet riittää perustella muodoille

$$\omega = f\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \qquad \text{ja} \qquad \eta = g\,\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}.$$

Tällöin

$$\omega \wedge \eta = fg\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l},$$

ja yhtälöä (4.1) sekä lemmaa 2.14 soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \mathrm{d}(fg) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l} \\
&= (g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l} \\
&= g\,\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l} \\
&\qquad + f\,\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l} \\
&= (\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) \wedge (g\,\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}) \\
&\qquad + (-1)^k (f\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) \wedge (\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}) \\
&= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

Tässä kerroin $(-1)^k$ juontaa juurensa ulkoisen tulon laskusääntöihin; tekijää $\mathrm{d}g$ siirretään k paikan verran toiseksi viimeiseen välivaiheeseen. Kohdassa *(iii)*

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

joten

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\,\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \right).$$

Koska Schwarzin lauseen nojalla on

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k},$$

niin tässä summassa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}\,\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_j = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\,\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k.$$

Näin ollen kaikki termit kumoutuvat summausindeksien juostessa yli indeksijoukkojen, ja siten $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) \equiv 0$. Nyt ollaan näytetty, että joukossa U operaattorilla d on lauseen 4.11 ominaisuudet.

Olkoon sitten $\mathrm{d}' : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ sellainen kuvaus, joka toteuttaa samat lauseessa 4.11 luetellut neljä ominaisuutta. Halutaan näyttää, että $\mathrm{d}' = \mathrm{d}$ kaikilla k. Kohdan *(i)* nojalla riittää jälleen tarkastella vain differentiaalimuotoja $\omega = f\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$. Kohdan *(iv)* nojalla $\mathrm{d}'f = \mathrm{d}f$, joten

$$\mathrm{d}'(f\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} + f\,\mathrm{d}'(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}).$$

Siispä jos $\mathrm{d}'(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) = 0$ kaikilla k, niin $\mathrm{d}'\omega = \mathrm{d}\omega$ joukossa U. Osoitetaan tämä induktiolla. Koska jälleen kohdan *(iv)* nojalla $\mathrm{d}'x_{i_j} = \mathrm{d}x_{i_j}$, on tapaus $k = 1$ selvä. Oletetaan sitten induktio-oletuksena, että $\mathrm{d}'(\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{j_{k-1}}) = 0$ kaikilla multi-indekseillä $j_1, \ldots, j_{k-1}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}'(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) &= \mathrm{d}'\big((\mathrm{d}'x_{i_1}) \wedge \mathrm{d}'x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}'x_{i_k}\big) \\
&= \mathrm{d}'(\mathrm{d}'x_{i_1}) \wedge \mathrm{d}'x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}'x_{i_k} \\
&\qquad - \mathrm{d}'x_{i_1} \wedge \mathrm{d}'(\mathrm{d}'x_{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}'x_{i_k}) \\
&= 0 - 0
\end{aligned}$$

ominaisuuksien *(ii)* ja *(iii)* sekä induktio-oletuksen nojalla. Siten koordinaattiympäristössä U on voimassa $\mathrm{d}' = \mathrm{d}$.

Edellä tehdyt laskut eivät riipu kartan (U, x) valinnasta. Siispä ollaan saatu näytettyä, että mielivaltaisessa koordinaattiympäristössä $U \subset M$ operaattori d on yksikäsitteinen. Jos nyt ω on koko monistolla M määritelty differentiaalimuoto, niin asettamalla pisteessä $p \in U$

$$\mathrm{d}\omega(p) = (\mathrm{d}|_U \omega|_U)(p)$$

on lause 4.11 todistettu. □

Ulkoinen derivaattaoperattori d on erityisen merkittävä siksi, että toisin kuin luvussa 1 määritelty funktion osittaisderivaatta lokaaleissa koordinaateissa, sen avulla saatava derivaatta on riippumaton käytetystä kartasta. Mikä mielenkiintoisinta, näin on siitä huolimatta, että ulkoisen derivaatan määrittelevässä lausekkeessa esiintyy määritelmän 1.11 mukaisia osittaisderivaattoja! Derivaatta d osoittautuu myös todella monipuoliseksi työkaluksi. Tästä kertoo esimerkiksi se, että paitsi avaruuden $\mathbb{R}^3$ funktion gradientti, myös vektorikentän divergenssi ja roottori voidaan sitä käyttäen esittää yhtenäisellä tavalla.

Esimerkki 4.12 (Ulkoisen derivaatan yhteys avaruuden $\mathbb{R}^3$ derivointioperaatioihin)**.** Luvussa 2 todettiinkin jo, että funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ differentiaalin $\mathrm{d}f$ komponentit ovat samat kuin gradientin ∇f komponentit. Olkoon nyt V avaruuden $\mathbb{R}^3$ differentioituva vektorikenttä. Vektorikentän V *divergenssi* $\nabla \cdot V$ ja *roottori* $\nabla \times V$ määritellään yhtälöillä

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot V &:= \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3 \\
\nabla \times V &:= \big(\partial_2 V_3 - \partial_3 V_2\big)\tfrac{\partial}{\partial x_1} + \big(\partial_3 V_1 - \partial_1 V_3\big)\tfrac{\partial}{\partial x_2} + \big(\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1\big)\tfrac{\partial}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

(a) Lasketaan vektorikentän V duaalimuodon

$$\omega_V = V_1\,\mathrm{d}x_1 + V_2\,\mathrm{d}x_2 + V_3\,\mathrm{d}x_3$$

ulkoinen derivaatta $\mathrm{d}\omega_V$ pitäen mielessä, että $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i \equiv 0$, $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$, ja että euklidisissa avaruuksissa $\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \partial_j V_i$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_V &= \mathrm{d}V_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}V_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}V_3 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= \big(\partial_1 V_1\,\mathrm{d}x_1 + \partial_2 V_1\,\mathrm{d}x_2 + \partial_3 V_1\,\mathrm{d}x_3\big) \wedge \mathrm{d}x_1 + \\
&\qquad \big(\partial_1 V_2\,\mathrm{d}x_1 + \partial_2 V_2\,\mathrm{d}x_2 + \partial_3 V_2\,\mathrm{d}x_3\big) \wedge \mathrm{d}x_2 + \\
&\qquad\quad \big(\partial_1 V_3\,\mathrm{d}x_1 + \partial_2 V_3\,\mathrm{d}x_2 + \partial_3 V_3\,\mathrm{d}x_3\big) \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= \big(\partial_2 V_3 - \partial_3 V_2\big)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \\
&\qquad \big(\partial_3 V_1 - \partial_1 V_3\big)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \\
&\qquad\quad \big(\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1\big)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Tässä "syklisessä kannassa" ulkoisen derivaatan $\mathrm{d}\omega_V$ komponenttifunktiot ovat samat, kuin roottorin $\nabla \times V$ komponenttifunktiot. Muoto $\mathrm{d}\omega_V$ on näin ollen vektorikentän $\nabla \times V$ vuomuoto.

(b) Tarkastellaan sitten vektorikentän V vuomuotoa

$$\eta_V = V_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Muodon η_V ulkoiseksi derivaataksi saadaan, jälleen laskusääntöjä $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i \equiv 0$ ja $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$ soveltamalla,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\eta_V &= \mathrm{d}V_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}V_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}V_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
&= \partial_1 V_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_2 V_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_3 V_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\
&= (\partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.
\end{aligned}$$

Tämän 3-differentiaalimuodon ainoa komponenttifunktio on vektorikentän V divergenssi $\nabla \cdot V$.

Esimerkki 4.12 osoittaa, että operaattori d todella on derivaatan yleistys monistoille. Erityisen hienoa on, että d yleistää avaruudessa $\mathbb{R}^3$ määritellyn roottorin kaikkiin ulottuvuuksiin. Operaattori d yleistää myös lemman 4.7 kohdan *(iv)* koskemaan k-differentiaalimuotoja. Tämä tarkoittaa, että palautuskuvaus kommutoi derivaattaoperaattorin d kanssa. Tällöin sanotaan, että d on luonnollinen palautuskuvausten suhteen.

Lemma 4.13 (Ulkoisen derivaatan luonnollisuus palautuskuvausten suhteen)**.** *Olkoon $F : M \to N$ C^∞-kuvaus monistojen M ja N välillä, ja olkoon $\omega \in \Omega^k(N)$. Tällöin*

$$F^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(F^*\omega).$$

Todistus. Todistetaan väite induktiolla muodon ω asteen k suhteen. Lemman 4.7 kohdan *(iv)* todistus toimii sellaisenaan mille tahansa differentioituvalle funktiolle eli 0-differentiaalimuodolle, joten tapaus $k = 0$ on sen perusteella kunnossa. Oletetaan sitten, että väite on totta jollakin k ja näytetään, että tällöin väite pätee myös asteella $k+1$. Operaattorin d ominaisuuksien nojalla riittää tarkastella differentiaalimuotoa $\omega = g\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_{k+1}}$. Lemman 4.7 kohdan *(ii)* ja lauseen 4.11 yhtälön *(ii)* nojalla

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(F^*\omega) &= \mathrm{d}\big(F^*\big(g\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{i_{k+1}}\big)\big)\\
&= \mathrm{d}\big(F^*\big(g\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\big) \wedge F^*\big(\mathrm{d}x_{i_{k+1}}\big)\big)\\
&= \mathrm{d}\big(F^*\big(g\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\big)\big) \wedge F^*\big(\mathrm{d}x_{i_{k+1}}\big) +\\
&\qquad (-1)^k F^*\big(g\ \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\big) \wedge F^*\mathrm{d}\big(\mathrm{d}x_{i_{k+1}}\big).
\end{aligned}$$

Tässä jälkimmäinen termi on lauseen 4.11 yhtälön *(iii)* nojalla identtisesti nolla. Siispä induktio-oletuksesta ja lemman 4.7 kohdasta *(ii)* seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(F^*\omega) &= \mathrm{d}\big(F^*\big(g\,\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\big)\big) \wedge F^*\big(\mathrm{d}x_{i_{k+1}}\big)\\
&= F^*\big(\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\big) \wedge F^*\big(\mathrm{d}x_{i_{k+1}}\big)\\
&= F^*(\mathrm{d}\omega).
\end{aligned}$$

□

4.4 Esimerkki: Differentiaalimuodoista sähköopissa

Differentiaalimuotoja käyttämällä voidaan yhtenäistää esimerkiksi sähköopin teorian esitystä. Tämä esimerkki pohjautuu artikkeliin [16] sekä teokseen [8]. Tarkastellaan monistoa $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ käyttäen euklidisia koordinaatteja (x_1, x_2, x_3, t) ja merkintää ∇ avaruuden $\mathbb{R}^3$ gradienttioperaattorille. *Maxwellin kenttäyhtälöt* ovat neljä osittaisdifferentiaaliyhtälöä

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot D &= \rho \\
\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\
\nabla \cdot B &= 0 \\
\nabla \times H &= \frac{\partial D}{\partial t} + J.
\end{aligned}
$$

Näissä yhtälöissä vektorikentät E ja H ovat sähkö- ja magneettikentät, D ja B ovat sähkö- ja magneettivuon tiheydet, ja J on virrantiheys. Skalaarisuure ρ on puolestaan varaustiheys. Perinteisessä esityksessä sekä kenttää että sen vuontiheyttä edustaa samanlainen matemaattinen olio, vektorikenttä. Kentän ja sen vuontiheyden välille saadaan kuitenkin tehtyä selvä ero esittelemällä duaalimuodot ω_E ja ω_H sekä vuomuodot η_D ja η_B, jotka määritellään yhtälöillä

$$
\begin{aligned}
\omega_E &:= E_1\,\mathrm{d}x_1 + E_2\,\mathrm{d}x_2 + E_3\,\mathrm{d}x_3 \\
\omega_H &:= H_1\,\mathrm{d}x_1 + H_2\,\mathrm{d}x_2 + H_3\,\mathrm{d}x_3 \\
\eta_D &:= D_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + D_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + D_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \\
\eta_B &:= B_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + B_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + B_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}
$$

Tämä esitys on paitsi tulkittavissa geometrisesti esimerkin 3.3 mukaisesti, myös antaa jossain määrin fysikaalisemman kuvan tarkasteltavista suureista. Edellä määriteltyjen muotojen avulla saadaan vastineet esimerkiksi energianvuon tiheyttä edustavalle Poyntingin vektorille $S = E \times H$, sekä energiatiheydelle $U = \frac{1}{2}\big((E|D) + (B|H)\big)$ asettamalla

$$
\eta_S = \omega_E \wedge \omega_H \qquad \text{ja} \qquad \psi_U = \frac{1}{2}(\omega_E \wedge \eta_D + \omega_H \wedge \eta_B).
$$

Muotojen η_S ja ψ_U komponenttien vastaavuus risti- ja sisätulojen kanssa on helposti tarkistettavissa laskemalla auki edellä esiintyvät ulkoiset tulot.

Muotojen ω_E ja η_B avulla voidaan määritellä niin kutsuttu *sähkömagneettinen tensori*, joka on differentiaalinen 2-muoto ξ,

$$
\begin{aligned}
\xi &:= \omega_E \wedge \mathrm{d}t + \eta_B \\
&= \big(E_1\,\mathrm{d}x_1 + E_2\,\mathrm{d}x_2 + E_3\,\mathrm{d}x_3\big) \wedge \mathrm{d}t + \\
&\qquad B_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + B_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + B_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}
$$

Muodon ξ ulkoinen derivaatta on

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\xi = &\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial E_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}t + \\ &\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial E_3}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial B_1}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial B_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1\right)\wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \\ &\left(\frac{\partial B_2}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial B_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2\right)\wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial B_3}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\right)\wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Avaamalla sulut ja järjestämällä termejä kuten esimerkissä 4.12, saadaan $\mathrm{d}\xi$ muotoon

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\xi = &\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial t}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}t + \\ &\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial t}\right)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}t + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} - \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

Tästä lausekkeesta ovat tunnistettavissa roottorin $\nabla \times E$ sekä derivaatan $\frac{\partial B}{\partial t}$ komponentit, samoin kuin vektorikentän B divergenssi $\nabla \cdot B$. Näiden avulla ulkoinen derivaatta $\mathrm{d}\xi$ saadaan kirjoitettua hieman kompaktimmin:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\xi = &\left(\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t}\right)_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}t + \left(\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t}\right)_2 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}t + \\ &\left(\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t}\right)_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}t + (\nabla \cdot B)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

Edellä kaikki neljä ulkoista tuloa ovat keskenään lineaarisesti riippumattomia, ja näin ollen vaatimus

$$\mathrm{d}\xi = 0$$

on ekvivalentti Maxwellin kenttäyhtälöiden $\nabla \cdot B = 0$ ja $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ kanssa. Myös jäljelle jääneet epähomogeeniset Maxwellin yhtälöt on mahdollista esittää differentiaalimuotojen avulla käyttäen Hodgen tähti -nimistä operaattoria; katso esimerkiksi [8, s. 796]

5 Integrointi monistoilla

Tässä luvussa tutustutaan differentiaalimuotojen integrointiin monistoilla. Differentiaalimuotoja käyttämällä saadaan aikaiseksi koordinaateista riippumaton tapa integroida funktioita monistoilla. Lisäksi nähdään, että differentiaalimuotoja voidaan integroida yli polkujen ja pintojen ilman erillisiä määritelmiä, toisin kuin avaruuden $\mathbb{R}^3$ polku- ja pintaintegraalien tapauksessa. Näin saadaan yleistettyä esimerkiksi vektorikentän vuo korkeampiin ulottuvuuksiin. Jotta "virtaussuunnat" olisivat selvillä myös useampiulotteisissa tapauksissa, on monistojen rakennetta ensin lisättävä: Monistolle, jolla integrointi tapahtuu, on valittava *suunnistus*, mikä tarkoittaa ikään kuin valintaa "oikeakätisen" ja "vasenkätisen" näkökulman välillä. Tässä luvussa on käytetty lähteinä erityisesti teoksia [5] ja [10].

5.1 Monistojen suunnistaminen

Moniston suunnistamisella tarkoitetaan heuristisesti valintaa siitä, miten päin asioita monistolla katsotaan. Euklidisessa avaruudessa suunnistuksen määrää ilman erillistä mainintaa yksikkövektoreista e^i koostuvan standardikanta. Erityisesti avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tämä tarkoittaa, että suunnistuksen määrää niin kutsuttu oikeakätinen kanta. Tämä valinta on niin tuttu, että sitä ei yleensä kyseenalaisteta. Monistoilla tilanne on kuitenkin erilainen, sillä yleensä ottaen monistot eivät edes ole vektoriavaruuksia. Tällöin luonnollista ja "oikeaa" suunnistusta ei ole, vaan tämä valinta on tehtävä sillon kun se on tarpeellista, ja näin on esimerkiksi integroinnin tapauksessa. Tutustutaan seuraavaksi siihen, mitä monistojen suunnistuksella täsmällisemmin tarkoitetaan, ja kuinka suunnisutus valitaan. Tämä alaluku perustuu kokonaan lähteeseen [10].

Yleiselle n-ulotteiselle vektoriavaruudelle $\mathbb{V}$ voidaan valita (järjestetty) kanta äärettömän monella tavalla. Jokainen näistä kannoista koostuu kuitenkin n lineaarisesti riippumattomasta vektorista, ja jokainen kanta saadaan mistä tahansa muusta kannasta lineaarisella bijektiolla. Erityisesti kannanvaihtokuvauksen determinantti on aina nollasta poikkeava; joko positiivinen tai negatiivinen. Tämä jakaa avaruuden $\mathbb{V}$ kannat kahteen ekvivalenssiluokkaan. Toisen ekvivalenssiluokan muodostavat ne kannat, joiden välisen kannanvaihdon determinantti on positiivinen, ja toisen ne, joille tämä determinantti on negatiivinen. Vektoriavaruuden $\mathbb{V}$ *suunnistus* on tällainen ekvivalenssiluokka. Kun $\{e^1, \dots, e^n\}$ on avaruuden $\mathbb{V}$ kanta, merkitään sen määräämää suunnistusta $[e^1, \dots, e^n]$, tai lyhyesti μ. Vastakkaista suunnistusta merkitään $-\mu$. Huomaa, että kun $[e^1, \dots, e^n] = \mu$ ja $\sigma \in \mathscr{P}(I_n)$, on voimassa yhtälö

$$\left[e^{\sigma(1)}, \dots, e^{\sigma(n)}\right] = \varepsilon(\sigma)\mu. \tag{5.1}$$

Avaruuden $\mathbb{V}$ *suunnistamisella* tarkoitetaan valintaa kahden mahdollisen ekvivalenssiluokan välillä, ja valitulla suunnistuksella μ varustettu vektoriavaruus on *suunnistettu vektoriavaruus.* Tätä valittua suunnistusta edustavaa kantaa kutsutaan *positiivisesti suunnistetuksi.* Toiseen ekvivalenssiluokkaan kuuluvat kannat ovat vastaavasti *negatiivisesti suunnistettuja.* Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ edellä mainittu luonnollinen suunnistus on oikeakätisen standardikannan määräämä ekvivalenssiluokka $[e^1, e^2, e^3]$. Tällä valinnalla kaikki kannat, jotka saadaan kannasta $\{e^1, e^2, e^3\}$ positiivideterminanttisella lineaarikuvauksella, ovat positiivisesti suunnistettuja.

Monistolle M voidaan määritellä suunnistus pisteittäin valitsemalla jokaiselle tangenttiavaruudelle T_pM oma suunnistus $\mu(p)$. Tämä ei kuitenkaan ole kovin hyödyllistä ilman, että näiltä valinnoilta vaaditaan jonkinlaista jatkuvuutta. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ suunnistus voisi muuten vaihtua oikeakätisestä vasenkätiseksi pisteestä toiseen jopa hyvin lähekkäisten pisteiden välillä. Pisteittäinen suunnistus saadaan jatkuvaksi karttojen avulla seuraavasti: Kiinnitetään ensin pisteittäinen suunnistus μ monistolle M. Sanotaan, että kartta (U, x) on *positiivisesti suunnistettu*, jos

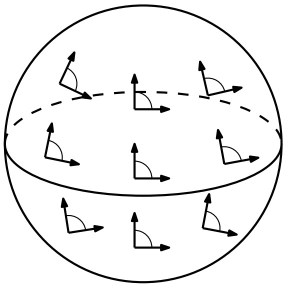
$$\left[\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right] = \mu(p),$$

eli jos kanta $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right\}$ on positiivisesti suunnistettu kanta jokaiselle tangenttiavaruudelle T_pM, kun $p \in U$. Jos kartan (U, x) määräämä kanta kuuluu vastakkaiseen ekvivalenssiluokkaan, sanotaan karttaa *negatiivisesti suunnistetuksi.* Tämä määritelmä asettaa valitulle pisteittäiselle suunnistukselle kriteerejä joukossa U: koska x on jatkuva, ei edellä kuvatun kaltaista satunnaista vaihtelua suunnistuksissa voi tapahtua, vaan lähekkäisten pisteiden tangenttiavaruuksien kannat ovat kaikki joko ”oikeakätisiä” tai ”vasenkätisiä”.

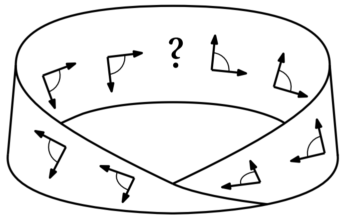
Määritelmä 5.1 (Moniston suunnistus)**.** Moniston M pisteittäinen suunnistus on *jatkuva*, kun jokainen piste $p \in M$ on positiivisesti suunnistetun kartan määrittelyjoukossa. Jos monistolle M on olemassa jatkuva pisteittäinen suunnistus, sanotaan monistoa *M suunnistuvaksi,* ja jatkuvalla pisteittäisellä suunnistuksella μ varustettu monisto on *suunnistettu monisto.*

Muun muassa esimerkin 1.4 pallopinta $\mathbb{S}^2$ on suunnistuva monisto, ja sen suunnistusta havainnollistaa kuva 10a. Kaikki monistot eivät ole suunnistuvia. Tyyppiesimerkki ei-suunnistuvasta monistosta on Möbiuksen nauha. Sen suunnistamisen ongelmaa havainnollistaa kuva 10b.

Jatkon kannalta on hyödyllistä karakterisoida moniston suunnistus kartaston ominaisuuksien avulla. Tätä varten olkoot (U, x) ja (W, y) karttoja, joille $U \cap W \neq \emptyset$, ja olkoon $p \in U \cap W$. Tarkastellaan ensin tangenttiavaruuden T_pM kannanvaihtoa kannasta



(a) Pallopinta $\mathbb{S}^2$ on suunnistuva monisto.



(b) Möbiuksen nauha ei ole suunnistuva monisto. Yritys valita nauhalle jatkuva pisteittäinen suunnistus johtaa väistämättä epäjatkuvuuteen yhden kierroksen jälkeen.

Kuva 10. Suunnistuva ja ei-suunnistuva monisto. Kuvat pohjatuvat lähteeseen [10, s.378].

$\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p \right\}$ kantaan $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right\}$, $i = 1, \ldots, n$. Olkoon $f \in C^\infty(p)$, ja merkitään $q = x(p)$ sekä $r = y(p)$. Tällöin perinteisen ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) &= \partial_j (f \circ x^{-1})(q) \\ &= \partial_j \big((f \circ y^{-1}) \circ (y \circ x^{-1}) \big)(q) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \partial_i (f \circ y^{-1})(r)\, \partial_j (y_i \circ x^{-1})(q) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}(p) \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p). \end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että kannanvaihdossa tangenttivektori $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ saadaan kannan $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_p \right\}$ vektoreista yhtälöllä

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_p .$$

Mutta tässä $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(p) = \partial_j (y_i \circ x^{-1})(q)$, joten tangenttivektorien kannanvaihtomatriisi on vastaavan koordinaattienvaihdon Jacobin matriisi (lokaaleissa koordinaateissa). Koska tangenttiavaruuden T_pM suunnistaminen tarkoittaa juuri valintaa siitä, onko kannanvaihtomatriisin determinantti positiivinen vai negatiivinen, voidaan monistolle M määrätä jatkuva pisteittäinen suunnistus kartaston perusteella. Tätä varten kutsutaan kartastoa, jonka jokaisen koordinaattienvaihdon Jacobin matriisin determinantti on positiivinen, *konsistentisti suunnistetuksi kartastoksi.*

Lause 5.2 (Kartaston määräämä suunnistus)**.** *Olkoon* $(M, \mathscr{A})$ n*-ulotteinen sileä monisto.*

(i) Jos kartasto $\mathscr{A}$ *on konsistentisti suunnistettu, niin on olemassa sellainen moniston* M *yksikäsitteinen suunnistus, jolle jokainen kartta* $(U, x) \in \mathscr{A}$ *on positiivisesti suunnistettu.*

(ii) Jos monisto M *on suunnistettu, niin kaikkien positiivisesti suunnistettujen karttojen kokoelma on konsistentisti suunnistettu kartasto.*

Todistus. Todistus perustuu lähteeseen [10]. Perustellaan ensin kohta *(i)*. Olkoon $\mathscr{A}$ konsistentisti suunnistettu kartasto. Kartaston $\mathscr{A}$ jokainen kartta määrää jatkuvan pisteittäisen suunnistuksen koordinaattiympäristössään. Jos mille tahansa koordinaattiympäristöille U ja W on $U \cap W \neq \emptyset$, niin tämän leikkausjoukon jokaisessa pisteessä p avaruuden T_pM kannanvaihtoa vastaa edellä tehdyn laskun nojalla kartaston $\mathscr{A}$ koordinaattienvaihdon Jacobin matriisi, jonka determinantti on positiivinen oletuksen nojalla. Näin saatu suunnistus on jatkuva koko monistolla M, koska jokainen moniston M piste on jossakin kartaston $\mathscr{A}$ koordinaattiympäristössä.

Perustellaan sitten väite *(ii)* ja oletetaan siis, että monistolla M on pisteittäinen ja jatkuva suunnistus. Koska jokainen moniston piste on jossakin koordinaattiympäristössä, voidaan kaikkialla valita koordinaattifunktioiden merkkiä tarvittaessa vaihtamalla positiivisesti suunnistettu karttakuvaus. Kaikkien näiden karttakuvausten koordinaattienvaihtojen determinantit ovat positiivisia, koska kannanvaihtojen determinantit ovat, ja näin ollen karttakuvaukset muodostavat konsistentisti suunnatun kartaston. $\square$

Lauseen 5.2 merkitys on, että oletus moniston suunnistuvuudesta takaa konsistentisti suunnistetun kartaston olemassaolon, ja päin vastoin. Tästä eteenpäin oletetaankin, että kun monisto M on suunnistettu, on sen kartasto konsistentisti suunnistettu. Tämä "determinanttiehto" on teknisesti käyttökelpoisempi kuin määritelmä 5.1, joka kuitenkin antaa suunnistukselle selkeän geometrisen kuvan.

5.2 Differentiaalimuodon integraali yli moniston

Lähestytään differentiaalimuodon integraalin määrittelyä ensin intuitiivisesti, kuten tehtiin funktion differentioituvuutta määriteltäessä luvussa 1, ja koetetaan aluksi määritellä differentiaalimuodon integraali avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tätä varten tarkastellaan hetki funktioiden integroituvuutta. Olkoon f jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritelty reaaliarvoinen funktio. Funktion f integraalille "kertyy arvoa" vain joukossa, jossa $f(p) \neq 0$.

Tämän joukon sulkeumaa

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{p \in \mathbb{R}^n : f(p) \neq 0\}}$$

kutsutaan funktion f *kantajaksi*. Kantajan $\operatorname{supp}(f)$ tarkastelu helpottaa integraalien käsittelyä. Esimerkiksi teoksessa [9] osoitetaan, että kompaktikantajainen funktio on integroituva.

Olkoot x_i euklidiset koordinaattifunktiot ja olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$. Differentiaalimuodon $\omega \in \Omega^n(U)$ kantaja $\operatorname{supp}(\omega)$ määritellään kuten funktion f kantaja: $\operatorname{supp}(\omega)$ on sen joukon sulkeuma, jossa ω ei ole identtisesti nolla kuvaus. Erityisesti kun $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, on $\operatorname{supp}(\omega) = \operatorname{supp}(f)$. Jos nyt oletetaan, että $\operatorname{supp}(\omega)$ on kompakti ja sisältyy joukkoon U, on funktio f integroituva yli joukon U; katso tarkemmin esimerkiksi [10, s. 402-404]. Tällöin voidaan määritellään differentiaalimuodon $\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ *integraali yli joukon* $U \subset \mathbb{R}^n$ asettamalla

$$\int_U \omega := \int_U f. \tag{5.2}$$

Kun on tarpeellista kirjoittaa integrointimuuttujat näkyviin, käytetään tässä tutkielmassa merkintää

$$\int_U f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n =: \int_U \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

integrointimuuttujien erottamiseksi. Tämä tarkoittaa vain, että integrointimuuttujille käytetään samoja nimiä, kuin koordinaateille, joissa integrointi tapahtuu. Tällainen määrittely differentiaalimuodon integraalille avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on hyvin yksinkertainen. Erityisesti muoto ω on integroituva yli joukon U täsmälleen silloin kun f on. Integroitavan muodon kompaktikantajaisuus on *riittävä* ehto edellä määritellyn integraalin olemassaololle. Oletus kompaktikantajaisuudesta ei kuitenkaan ole *välttämätön*. Yhtälön (5.2) oikean puolen integraali voi olla olemassa muutenkin, ja se voidaan tarvittaessa tulkita myös epäoleellisena Riemannin integraalina (tai Lebeguen integraalina). Seuraava askel on yleistää differentiaalimuodon integraali monistoille.

Määritelmä 5.3 (Differentiaalimuodon integraali yli moniston (1))**.** Olkoon M suunnistettu n-ulotteinen monisto ja olkoon $\omega \in \Omega^n(M)$. Olkoon (U, x) kartta ja oletetaan, että $\operatorname{supp}(\omega) \subset U$ on kompakti monistolla M. Määritellään *differentiaalimuodon ω integraali yli moniston M* asettamalla

$$\int_M \omega := \int_{x(U)} \left(x^{-1}\right)^* \omega.$$

Määritelmä 5.3 on hyvä, sillä $\left(x^{-1}\right)^*\omega$ on kompaktikantajainen differentiaalimuoto avaruudessa $\mathbb{R}^n$, ja sen integraalin olemassaolo on siten taattu. (U,x) on kuitenkin vain yksi kartta moniston M kartastossa. Voi olla niin, että muodon ω kantaja sisältyy myös jonkin toisen kartan (W,y) koordinaattiympäristöön W. Kun integraali halutaan riippumattomaksi koordinaateista, on näytettävä, että

$$\int\limits_U \omega = \int\limits_{x(U)} \left(x^{-1}\right)^*\omega = \int\limits_{y(W)} \left(y^{-1}\right)^*\omega = \int\limits_W \omega.$$

Lause 5.4. *Määritelmän 5.3 integraali on riippumaton kartasta, jonka koordinaattiympäristö sisältää integroitavan differentiaalimuodon kantajan.*

Todistus. Oletetaan, että $\operatorname{supp}(\omega) \subset U \cap W$, ja merkitään muodon ω lokaalia esitystä joukoissa $x(U)$ ja $y(W)$ vastaavasti

$$\left(x^{-1}\right)^*\omega = f\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \qquad \text{ja} \qquad \left(y^{-1}\right)^*\omega = g\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n,$$

missä z_i ovat nyt euklidiset koordinaattifunktiot symbolin x ollessa jo käytössä. Nämä esitykset saadaan toisistaan koordinaattienvaihdolla $y \circ x^{-1}$. Kun merkitään $y \circ x^{-1} = F$, on siis $f\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n = F^*\left(g\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n\right)$. Tällöin lauseen 4.10 ja muuttujanvaihtolauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\int\limits_{y(U)} g\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n &= \int\limits_{y(U\cap W)} g\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n \\
&= \int\limits_{F(x(U\cap W))} g \\
&= \int\limits_{x(U\cap W)} (g \circ F) \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right) \\
&= \int\limits_{x(U\cap W)} F^*\left(g\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n\right) \\
&= \int\limits_{x(U)} f\,\mathrm{d}z_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n.
\end{aligned}$$

Siispä integraali ei riipu valitusta karttakuvauksesta. Koska määritelmässä 5.3 lisäksi oletettiin moniston M olevan suunnistettu, on edellä esiintyvä determinantti

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right) = \det\left(\frac{\partial z_i \circ (y \circ x^{-1})}{\partial z_j}\right) = \det\left(\partial_j (y_i \circ x^{-1})\right)$$

positiivinen, ja integraalin merkki on siten hyvin määritelty. Suunnistuksen valinta siis kiinnittää integraalin merkin, joka muuttuu suunnistuksen muuttuessa [5]. $\square$

Differentiaalimuodon ω integraali yli moniston on nyt määritelty hyvin, kun $\text{supp}(\omega)$ sisältyy kokonaan yhteen koordinaattiympäristöön. Aina näin ei kuitenkaan ole, ja näissä tilanteissa integraali on määriteltävä jotenkin muuten kuin edellä. Tapoja on ainakin kaksi: joko jaetaan $\text{supp}(\omega)$ yksinkertaisimpiin joukkoihin, tai hajotetaan integroitava differentiaalimuoto osiin, jotka ovat identtisesti nollia yksinkertaisten joukkojen ulkopuolella [5]. Jälkimmäiseen tapaan on olemassa valmis työkalu nimeltä *ykkösen ositus.*

Määritelmä 5.5 (Ykkösen ositus)**.** Olkoon M monisto, ja olkoon $\{U_i\}$ moniston M avoin peite indeksoituna joukolla I. *Peitteelle* $\{U_i\}$ *alisteinen ykkösen ositus* on sellainen samalla joukolla I indeksoitu funktioiden $\psi_i : M \to \mathbb{R}$ joukko $\{\psi_i\}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $0 \le \psi_i(p) \le 1$ kaikilla $i \in I$ ja $p \in M$.

(ii) $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$ kaikilla $i \in I$.

(iii) Jokaisella pisteellä $p \in M$ on ympäristö, joka leikkaa joukkoa $\text{supp}(\psi_i)$ vain äärellisen monella indeksillä i.

(iv) $\sum_I \psi_i(p) = 1$ kaikilla $p \in M$. Tämä summa on äärellinen edellisen vaatimuksen nojalla.

Jos jokainen funktioista ψ_i on differentioituva, niin ykkösen osituksen $\{\psi_i\}$ sanotaan olevan *sileä.*

Lause 5.6 (Differentioituvan ykkösen osituksen olemassaolo)**.** *Kun M on sileä monisto ja $\{U_i\}$ on mikä tahansa indeksoitu avoin peite monistolle M, niin on olemassa peitteelle $\{U_i\}$ alisteinen sileä ykkösen ositus.*

Todistuksesta. Todistus on luettavissa ainakin teoksissa [1], [5] ja [10]. □

Määritelmä 5.7 (Differentiaalimuodon integraali yli moniston (2))**.** Olkoon M suunnistettu n-ulotteinen monisto ja ω kompaktikantajainen differentiaalimuoto monistolla M. Olkoon $\{U_i\}$ moniston M joukolla I indeksoitu äärellinen avoin peite siten, että kukin kartoista (U_i, x^i) on positiivisesti suunnistettu. Olkoon $\{\psi_i\}$ peitteelle $\{U_i\}$ alisteinen sileä ykkösen ositus. *Differentiaalimuodon ω integraali yli moniston M on*

$$\int_M \omega := \sum_I \int_M \psi_i \omega.$$

Tässä määritelmässä jokainen $\psi_i\omega$ on kompaktikantajainen joukossa U_i, joten summan termit ovat hyvin määriteltyjä edellisen määritelmän perusteella. Ainoa kysymys on siis, onko tämä integraali riippumaton ykkösen osituksen valinnasta. Vastaus on kyllä:

Lause 5.8. *Määritelmän 5.7 integraali on riippumaton valitusta ykkösen osituksesta.*

Todistus. Olkoot $\{U_i\}$, $\{\psi_i\}$ ja ω kuten lauseessa, ja olkoon $\{W_j\}$, $j \in J$, jokin toinen avoin peite monistolle M siten, että kartat (W_i, y^i) määräävät saman suunnistuksen kuin kartat (U_i, x^i). Olkoon $\{\varphi_i\}$ peitteelle $\{W_i\}$ alisteinen sileä ykkösen ositus. Tällöin

$$\sum_I \int_M \psi_i \omega = \sum_I \int_M \psi_i \left(\sum_J \varphi_j \right) \omega = \sum_I \sum_J \int_M \psi_i \varphi_j \omega,$$

ykkösen ositusten ominaisuuksien nojalla. Vastaavasti

$$\sum_J \int_M \varphi_j \omega = \sum_J \int_M \varphi_j \left(\sum_I \psi_i \right) \omega = \sum_I \sum_J \int_M \psi_i \varphi_j \omega,$$

joten

$$\sum_I \int_M \psi_i \omega = \sum_J \int_M \varphi_j \omega. \qquad \square$$

Ykkösen osituksen käyttö integraalien laskemiseen ei selvästikään ole kovin näppärää; käytettävä ykkösen ositus olisi ensinnäkin esitettävä eksplisiittisesti, ja sen jälkeen pitäsi vielä pystyä integroimaan kukin mahdollisesti hankalista differentiaalimuodoista $\psi_i \omega$. Ykkösen ositus on kuitenkin korvaamaton tehtäessä teoreettisia tarkasteluja.

Edellä esitetyistä todistuksista on helposti johdettavissa seuraavat ominaisuudet differentiaalimuodon integraalille:

Lause 5.9 (Differentiaalimuodon integraalin ominaisuudet)**.** *Olkoot M ja N sileitä n-ulotteisia ja suunnistettuja monistoja, sekä olkoot $\omega, \eta \in \Omega^n(M)$.*

(i) Kun c_1 ja c_2 ovat reaalilukuja,

$$\int_M (c_1 \omega + c_2 \eta) = c_1 \int_M \omega + c_2 \int_M \eta.$$

(ii) Kun $-M$ symboloi monistoa M vastakkaisella suunnistuksella,

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

(iii) Kun N on sileä monisto koordinaatein y_i ja $F: N \to M$ on diffeomorfismi, niin

$$\int_M \omega = \begin{cases} \int_N F^*\omega, \; kun \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right) > 0, \\ -\int_N F^*\omega, \; kun \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right) < 0. \end{cases}$$

Todistus. Ominaisuus *(i)* periytyy suoraan funktioiden integraalilta. Kohta *(ii)* puolestaan seuraa lauseen 5.4 todistuksesta: vastakkaisen suunnistuksen valinta aiheuttaa muuttujanvaihdon determinantin merkin vaihtumisen.

Kohdan *(iii)* todistamiseksi riittää olettaa, että $\operatorname{supp}(\omega)$ sisältyy yhden kartan koordinaattiympäristöön, sillä mikä tahansa kompaktikantajainen differentiaalimuoto voidaan esittää tällaisten muotojen summana ykkösen osituksen avulla. Olkoon nyt (U, x) positiivisesti suunnistettu kartta, jolle $\operatorname{supp}(\omega) \in U$. Tällöin, jos

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right) > 0,$$

on pari $(F^{-1}(U), x \circ F)$ positiivisesti suunnistettu kartta monistolle N, ja $\operatorname{supp}(F^*\omega) \in F^{-1}(U)$. Väite seuraa nyt lauseen 5.4 todistusta vastaavalla laskulla. Jos puolestaan $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right) < 0$, väite seuraa tästä tuloksesta hyödyntämällä kohtaa *(ii)*. □

5.3 Polku- ja pintaintegraalit differentiaalimuotojen avulla

Tähän mennessä on tarkasteltu nimenomaan monistolla M määritellyn differentiaalimuodon integraalia yli kyseisen moniston. Integroitava differentiaalimuoto voi kuitenkin olla määritelty laajemmin monistoa M ympäröivässä euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällaisen integraalin olemassaolo on taattu, kun joukko $\operatorname{supp}(\omega) \cap M$ on kompakti monistolla M. Integroinnin kannalta relevanttia on vain, että integroitavan differentiaalimuodon aste on sama kuin moniston M dimensio; koordinaatteina ei tarvitse käyttää moniston M omia koordinaatteja. Integroinnin sovellusten ja havainnollistamisen kannalta erityisen mielenkiintoinen on tapaus, jossa M on 2-ulotteinen pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Huomautus 5.10. Periaatteessa voitaisiin tarkastella myös tilannetta, jossa M on jonkin moniston N matalampiulotteinen *alimonisto*, jolloin ”ulkoisina koordinaatteina” olisivatkin moniston N koordinaatit. Monissa sovelluksissa tarkasteltavina ovat kuitenkin nimenomaan pintaintegraalit jonkin euklidisen avaruuden (ali)moniston M yli, joten tapaus $M \subset \mathbb{R}^n$ on tässä mielessä relevantimpi. Tällöin päästään myös ikään kuin hyödyntämään luvussa 1 monistoille esitettyä määritelmää.

Esimerkki 5.11 (2-muodon integraali yli pallopinnan)**.** Olkoon $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ "radiusfunktio", ja olkoon

$$V = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektorikenttä joukossa $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Vektorikenttä V rajoitettuna minkä tahansa origokeskisen pallon pinnalle on tämän pallon "ulkoinen yksikkönormaali". V voidaan nimittäin samaistaa "euklidisen" vektorikentän $\sum_{i=1}^{3} V_i e^i$ kanssa, jolloin on voimassa $\|V\| \equiv 1$, kun $\|\cdot\|$ on euklidinen normi. Lisäksi $V(p)$ osoittaa tällaisen pallon säteen suuntaan poispäin origosta.

Olkoon η_V vektorikentän V vuomuoto joukossa $\mathbb{R}^3 - \{0\}$,

$$\eta_V = \frac{x_1}{r} \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \frac{x_2}{r} \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{x_3}{r} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Tarkastellaan monistona R-säteisen pallon $B^3(0,R) \subset \mathbb{R}^3$ pintaa $S := \partial B(0,R)$, käyttäen koordinaatteina esimerkin 1.4 (b)- ja (c)-kohdassa esiteltyjä kulmafunktioita (θ, φ). Olkoon F karttakuvauksen (θ, φ) niin ikään esimerkissä 1.4 esitelty käänteiskuvaus skaalattuna säteellä R, ja merkitään $W = \left]-\pi, \pi\right[\times \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Muodon η_V integraali yli pallopinnan on määritelmän 5.3 mukaisesti

$$\int_S \eta_V = \int_W F^* \eta_V.$$

Laskemalla kuten esimerkissä 4.9, saadaan palautuksille $F^*(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j)$ esitykset

$$\begin{aligned} F^*(\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3) &= R^2 \cos(\theta) \cos^2(\varphi)\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \\ F^*(\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1) &= R^2 \sin(\theta) \cos^2(\varphi)\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \\ F^*(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) &= R^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Avaamalla lausekkeet $x_i \circ F$ ja toteamalla, että $r \equiv R$ pinnalla S, saadaan ulkoisen tulon laskusäännöt muistamalla $F^* \eta_V = R^2 \cos(\varphi)\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi$. Siispä

$$\int_S \eta_V = \int_W R^2 \cos(\varphi)\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi)\, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2.$$

Edeltävän esimerkin pohjalta voidaan tehdä mielenkiintoinen havainto: Jokaiselle palautukselle $F^*(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j)$ on nimittäin voimassa

$$F^*(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) = \det \begin{pmatrix} \partial_1 F_i & \partial_2 F_i \\ \partial_1 F_j & \partial_2 F_j \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi.$$

Laskemalla on helppoa tarkistaa, että tällöin

$$F^*\eta_V = \big((V \circ F)\big|\partial_1 F \times \partial_2 F\big)\, \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi.$$

Siispä

$$\int_S \eta_V = \int_W \big((V \circ F)\big|\partial_1 F \times \partial_2 F\big) = \int_S V \cdot \mathrm{d}\overline{S}. \tag{5.3}$$

Vektorikentän V vuomuodon integraali on siis täsmälleen vektorikenttää V vastaavan "euklidisen" vektorikentän tavallinen pintaintegraali! Lisäksi, koska V vastaa pallopinnan yksikkönormaalia $\overline{n}$, on vektorikentän pintaintegraalin määritelmän nojalla

$$\int_S \eta_V = \int_S V \cdot \mathrm{d}\overline{S} = \int_S \big(\overline{n}\big|\overline{n}\big)\mathrm{d}S = \int_W \|\partial_1 F \times \partial_2 F\|,$$

mikä on laskulauseke pinnan pinta-alalle käytettäessä parametriesitystä F. Esimerkin 5.11 laskun tulos ei siis todellakaan ole sattumaa. Yleisesti, kun $\overline{n}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ pinnan S yksikkönormaalivektorikenttä euklidisen normin mielessä, kutsutaan sen vuomuotoa

$$\eta_{\overline{n}} = n_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + n_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + n_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$$

pinnan S *pinta-ala-alkioksi*. Pinta-ala-alkiolle käytetään usein merkintää $\mathrm{d}A$ siitä huolimatta, että kyseessä harvemmin on minkään muodon ulkoinen derivaatta. Pinta-ala-alkiolle $\mathrm{d}A$ voidaan johtaa tutun näköiset yhtälöt

$$\begin{aligned}
n_1\,\mathrm{d}A &= \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\\
n_2\,\mathrm{d}A &= \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1\\
n_3\,\mathrm{d}A &= \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Katso todistusta varten esimerkiksi [12, s. 128].

Toisin kuin perinteisen pintaintegraalin tapauksessa, differentiaalimuodon "pintaintegraalia" ei tarvitse rajoittaa avaruuteen $\mathbb{R}^3$, vaan k-muodon integrointi onnistuu aina yli k-ulotteisen moniston, riippumatta dimensiosta k. Erilliset määritelmät eivät myöskään ole tarpeen, sillä kaikki integrointiin tarvittava on sisäänrakennettuna muotojen algebrassa, palautuskuvauksessa ja ulkoisessa derivaatassa.

Differentiaalimuotoja voidaan toki integroida myös yli polkujen, oli kyseessä sitten polku avaruudessa $\mathbb{R}^n$ tai monistolla M. Tällöin integroitavana on aina differentiaalinen 1-muoto. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $\gamma : I \to M$ polku monistolla M, ja olkoon $\omega \in \Omega^1(M)$. Muodon ω *polkuintegraali* pitkin polkua γ määritellään asettamalla

$$\int_\gamma \omega := \int_I \gamma^*\omega. \tag{5.4}$$

Huomaa, että kun ω on vektorikentän V duaalimuoto, $\omega = \sum_{i=1}^{n} V_i \,\mathrm{d}x_i$, saa palautus $\gamma^*\omega$ seurauksen 4.8 avulla muodon

$$\int_I \gamma^*\omega = \int_I \gamma^* \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \,\mathrm{d}x_i \right) = \int_I \left(\sum_{i=1}^{n} (V_i \circ \gamma)\,\mathrm{d}(x_i \circ \gamma) \right) = \int_I \left(\sum_{i=1}^{n} (V_i \circ \gamma)\gamma_i' \right) \mathrm{d}t,$$

missä t on reaaliakselin $\mathbb{R}$ euklidinen koordinaattifunktio ja $\gamma_i = x_i \circ \gamma$. Euklidisissa avaruuksissa $\int_\gamma \omega$ on siis täsmälleen vektorikentän V perinteinen polkuintegraali, joten voidaan kirjoittaa

$$\int_\gamma V \cdot \mathrm{d}\bar{s} = \int_\gamma \left(\sum_{i=1}^{n} V_i \,\mathrm{d}x_i \right). \tag{5.5}$$

Polun $\gamma : I \to \mathbb{R}$ *parametrinvaihto* on diffeomorfismi $\sigma : J \to I$, missä J on reaalilukuväli I:n tavoin. Oletetaan, että $\sigma' > 0$ koko välillä J. Tällöin, merkitsemällä

$$f_i := (V_i \circ \gamma)\gamma_i',$$

saadaan edellisestä laskusta muuttujanvaihtolausetta soveltamalla

$$\int_\gamma \omega = \int_{\sigma(J)} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right) \mathrm{d}t = \int_J \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \sigma)\sigma_i' \right) \mathrm{d}\tau = \int_{\gamma\circ\sigma} \omega.$$

Parametrinvaihdot, joille $\sigma' > 0$, eivät siis vaikuta muodon ω polkuintegraalin arvoon. Jos taas $\sigma' < 0$, vaihtuu integraalin merkki; polkuintegraali käyttäytyy siis parametrinvaihdon alla samoin, kuin monistolla määritelty integraali koordinaattienvaihdon suhteen.

Kun integroitavana 1-muotona on funktion f differentiaali, vastaavat polkuintegraalit $\int_\gamma \mathrm{d}f$ ja $\int_\gamma \nabla f \cdot \bar{s}$ toisiaan. Kun polun γ käyrä sisältyy yhtenäiseen joukkoon, on voimassa

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = \int_I \gamma^*(\mathrm{d}f) = \int_I \mathrm{d}(f \circ \gamma) = \int_I (f \circ \gamma)'\mathrm{d}t = (f \circ \gamma)(c_2) - (f \circ \gamma)(c_1),$$

kun $I = [c_1, c_2]$. Differentiaalin $\mathrm{d}f$ polkuintegraalin arvo riippuu siis vain polun γ päätepisteistä $\gamma(c_1)$ ja $\gamma(c_2)$. Yhtälö

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = f\big(\gamma(c_2)\big) - f\big(\gamma(c_1)\big)$$

yleistää näin ollen analyysin peruslauseen koskemaan integrointia polkujen yli monistoilla.

5.4 Esimerkki: Differentiaalimuodon polku- ja pintaintegraaleista fysiikassa

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan muun muassa alaluvussa 1.2 kohdattua sisäenergiafunktiota U sekä alaluvun 4.4 differentiaalimuotoja ja Maxwellin yhtälöitä. Termodynamiikkaan liittyvät tiedot pohjautuvat teokseen [3]. Sähköoppiin liittyvät faktat on koottu artikkelin [16] pohjalta.

Olkoon M termodynaamisen systeemin mahdollisten tilojen joukko, ja $p^1, p^2 \in M$. Termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön mukaan eristetyn termodynaamisen systeemin sisäenergia U on vakio. Tämä tarkoittaa väljästi ilmaistuna, että systeemin sisäenergia muuttuu täsmälleen silloin, kun systeemille tehdään jotakin. Kun Q on systeemiin lämpönä siirretty energia ja W on systeemiin tehty työ sen siirtyessä tilasta p^1 tilaan p^2, niin

$$\Delta U = Q + W, \tag{5.6}$$

missä $\Delta U = U(p^2) - U(p^1)$. Sisäenergia U on alan terminologiassa tilanfunktio, sillä sen arvo riippuu ainoastaan tiloista p^1 ja p^2. Sen sijaan suureiden Q ja W arvot voivat riippua siitä, kuinka muutos tilasta p^1 tilaan p^2 tapahtuu; toisin sanottuna suureet Q ja W voivat riippua pisteitä p^1 ja p^2 yhdistävästä polusta γ.

Yhtälö 5.6 esitetään usein "differentiaalisessa muodossa" esimerkiksi tapaan

$$\mathrm{d}U = đQ + đW, \tag{5.7}$$

ja $\mathrm{d}U$, $đQ$ sekä $đW$ tulkitaan vastaavien suureiden infinitesimaalisina muutoksina. Poikkiviiva jälkimmäisissä d-kirjaimissa muistuttaa, että kyseessä *ei ole* niin kutsuttu *eksakti differentiaali*. Yhtälön (5.7) kaikki termit voidaan tulkita 1-differentiaalimuotoina tilojen monistolla M. Tällöin eksakti differentiaali $\mathrm{d}U$ on nimensä mukaisesti täsmälleen funktion U differentiaali myös yhtälön (2.8) mielessä. Kun $\gamma : [c_1, c_2] \to M$ on polku, on aiempien tarkastelujen pohjalta voimassa

$$\Delta U = \int_\gamma \mathrm{d}U,$$

kun $p^i = \gamma(c_i)$: sisäenergian muutoksen arvo ei siis riipu reitistä, jota pitkin siirtyminen tilojen välillä tapahtuu. *Epäeksaktit differentiaalit* $đQ$ ja $đW$ ovat sellaisia 1-differentiaalimuotoja, jotka eivät ole minkään funktion differentiaaleja. Näiden polkuintegraalit

$$Q = \int_\gamma đQ \qquad \text{ja} \qquad W = \int_\gamma đW$$

voivat näin ollen riippua polun γ valinnasta. Polun valinta vastaa alan terminologiassa valintaa siitä *prosessista*, jota käyttäen tilojen välillä siirrytään.

Eksaktin differentiaalin käsite voidaan siirtää tämän tutkielman kontekstiin sanomalla differentiaalimuotoa *eksaktiksi*, kun se on jonkin muun differentiaalimuodon ulkoinen derivaatta; differentiaali $\mathrm{d}U$ on eksakti tässäkin mielessä. Sähkökentälle E duaalinen 1-differentiaalimuoto

$$\omega_E = E_1 \,\mathrm{d}x_1 + E_2 \,\mathrm{d}x_2 + E_3 \,\mathrm{d}x_3$$

on myös eksakti, sillä kun u on sähkökentän E skalaaripotentiaali, niin $\mathrm{d}u = \omega_E$. Koska muodon ω_E integraalin arvo saadaan päätepistearvojen erotuksena, on umpinaisille poluille γ voimassa

$$\int_\gamma \omega_E = 0.$$

Edellä mainitut kolme eksaktien differentiaalimuotojen ominaisuutta

(i) ω on eksakti avoimessa ja yhtenäisessä joukossa U

(ii) $\int_\gamma \omega$ riippuu vain polun γ päätepisteistä, kun $\gamma(I) \subset U$

(iii) $\int_\gamma \omega = 0$ umpinaisille poluille γ

ovat ekvivalentteja; katso todistusta varten esimerkiksi [5, s. 18].

Kaikki fysiikassa pintaintegraaleihin liittyvät tulokset voidaan polkuintegraalien tavoin kirjoittaa differentiaalimuotoja käyttämällä. Esimerkiksi (fysikaalisesti tulkittu) Gaussin lause sähkökentille sanoo, että kokonaisvaraus Q suljetun pinnan sisällä on yhtä suuri, kuin sähkökentän D vuo kyseisen suljetun pinnan läpi. Suljetuksi pinnaksi voidaan valita esimerkiksi jokin pallopinta ∂B, jolloin edellinen on vuomuodon η_D integraalin avulla ilmaistuna

$$\int_{\partial B} \eta_D = Q.$$

Toisaalta, kun tarkastellaan muotoa η_D avaruuden $\mathbb{R}^3$ differentiaalimuotona, ja kun ρ on varaustiheys,

$$\mathrm{d}\eta_D = \nabla \cdot D \,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \rho \,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$$

Maxwellin yhtälöiden nojalla. Tämän "tiheysmuodon" integraali yli pinnan ∂B sisäänsä sulkeman pallon B on täsmälleen kokonaisvarus Q, joten

$$\int_{\partial B} \eta_D = \int_B \mathrm{d}\eta_D.$$

Tämä fysikaalisesti motivoitu yhtälö toimii kauniisti myös muissa ulottuvuuksissa. Esimerkiksi kun ω_H on magneettikentän H duaalimuoto, on tapauksessa $\frac{\partial D}{\partial t} \equiv 0$ niin ikään Maxwellin yhtälöiden nojalla voimassa

$$\int_{\gamma} \omega_H = \int_{S} \mathrm{d}\omega_H \tag{5.8}$$

pinnan S "reunan" parametrisoivalle polulle γ. Seuraavassa ja viimeisessä luvussa perustellaan tämä *Stokesin ja Cartanin lauseena* tunnettu yhtälö.

6 Stokesin ja Cartanin lause

Tämän luvun tavoitteena on huipentaa differentiaalimuotoihin tutustuminen Stokesin ja Cartanin lauseena tunnettuun tulokseen. Tämä lause yhdistää differentiaalimuodon $d\omega$ integraalin yli moniston M muodon ω integraaliin yli sopivan ”reunamoniston”. Stokesin ja Cartanin lause yleistää Gaussin, Greenin ja Stokesin lauseet monistoille, ja mahdollistaa näiden kaikkien tulosten esittämisen yhtenäisellä ja elegantilla tavalla. Itse tuloksen esittely vaatii edellä mainitun ”reunan” määrittelyn ja suunnistamisen, joka toteutetaan ”ulospäin osoittavien” vektorien avulla. Tässä luvussa tärkeimpinä lähteinä on käytetty kirjoja [5] ja [10], mutta myös teosta [12].

6.1 Reunalliset monistot ja reunan suunnistaminen

Ylempi suljettu puoliavaruus on joukko

$$\mathbb{H}^n := \left\{(p_1,\dots,p_n) \in \mathbb{R}^n : \ p_n \geq 0\right\}.$$

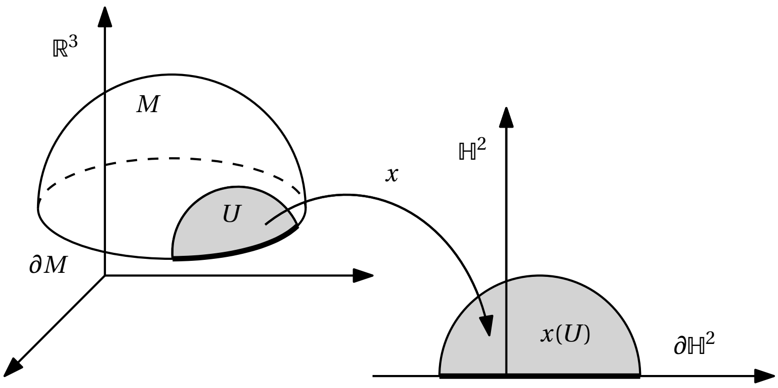
Joukon $\mathbb{H}^n$ reuna $\partial\mathbb{H}^n$ on joukko, jonka pisteille $p_n = 0$. Reuna $\partial\mathbb{H}^n$ voidaan samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ kanssa; eksplisiittisesti tämä tapahtuu bijektiivisellä kuvauksella $\iota : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial\mathbb{H}^n$, $\iota(p_1,\dots,p_{n-1}) = (p_1,\dots,p_{n-1},0)$.

Määritelmä 6.1 (Reunallinen monisto)**.** Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Jos joukon $M \subset \mathbb{R}^m$ jokaisella pisteellä p on ympäristö $U \subset M$, johon liittyy jokin karttakuvaus $x : U \to \mathbb{H}^n$, niin joukko M on *n-ulotteinen reunallinen monisto.* Kartta (U,x) on *reunakartta,* jos $x(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$, ja piste $p \in M$ on *reunapiste,* jos $x(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ jollakin karttakuvauksella x. Reunapisteiden joukkoa kutsutaan moniston M *reunaksi,* ja sille käytetään merkintää ∂M. Reunallinen monisto varustettuna määritelmän 1.5 mukaisella sileällä rakenteella on *sileä reunallinen monisto.*

Jatkossa tarkasteltavien reunallisten monistojen oletetaan aina olevan sileitä, ja sileistä reunallisista monistoista puhutaan lyhyemmin reunallisina monistoina. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ reunallista kaksiulotteista monistoa ja reunakartan toimintaa havinnollistaa kuva 11.

Lemma 6.2 (Moniston reunan yksikäsitteisyys)**.** *Moniston reuna on hyvin määritelty, eli kaikki reunakartat määräävät saman reunan monistolle M.*

Todistus. Todistus perustuu lähteeseen [5]. Olkoon (U,x) kartta, jolle $x_n(p) = 0$. Tällöin p on reunapiste käytettäessä karttaa (U,x). Oletetaan nyt, että jollekin reunakartalle (W,y) pisteen p ympäristössä on voimassa $y_n(p) \neq 0$, jolloin väistämättä $y_n(p) > 0$.



Kuva 11. Kaksiulotteinen reunallinen monisto avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Reunakartta x kuvaa määrittelyjoukossaan U olevan osan moniston M reunaa joukon $\mathbb{H}^2$ reunalle $\partial\mathbb{H}^2$.

Kuvaus $x \circ y^{-1} : y(U \cap W) \to x(U \cap W)$ on koordinaattienvaihtona diffeomorfismi. Koska $y_n(p) > 0$, on olemassa pisteen $y(p)$ avoin ympäristö $Q \subset y(U \cap W)$, jonka kaikkien pisteiden viimeinen koordinaatti on positiivinen. Nyt rajoittuma

$$(x \circ y^{-1})|_Q : Q \to \mathbb{H}^n$$

on differentioituva kuvaus, jonka Jacobin determinantti on nollasta poikkava pisteessä $y_n(p)$. Tällöin voidaan soveltaa käänteisfunktiolausetta, jonka mukaan kuvaus $(x \circ y^{-1})|_Q$ on lokaali diffeomorfismi pisteessä $y(p)$. Niinpä jokin pisteen $y(p)$ (pallo)ympäristö B on diffeomorfinen joukon $(x \circ y^{-1})|_Q(B)$ kanssa. Mutta nythän pisteen $y(p)$ kuva on joukon $\mathbb{H}^n$ reunalla, ja näin ollen sen ympäristössä $(x \circ y^{-1})|_Q(B)$ on pisteitä, joiden viimeinen koordinaatti on negatiivinen. Mikään tälläinen piste ei kuitenkaan voi kuulua joukkoon $\mathbb{H}^n$, joten saatiin aikaiseksi haluttu ristiriita. □

Olkoon M reunallinen monisto ja p reunapiste. Kun tarkastellaan reunaa ∂M moniston M $(n-1)$-ulotteisena osajoukkona, on intuitiivisesti selvää, että $T_p\partial M$ on avaruuden T_pM $(n-1)$-ulotteinen vektorialiavaruus. Kun x on mikä tahansa karttakuvaus (reunalla), virittävät vektorit $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big|_p\right\}$ avaruuden $T_p\partial M$. Loput tangenttivektorit voidaan erotella toisistaan sen perusteella, onko niiden viimeinen komponentti positiivinen vai negatiivinen.

Määritelmä 6.3 (Ulospäin osoittava vektori)**.** Olkoon M reunallinen monisto, (U, x) reunakartta ja p reunapiste. Tangenttivektori $v_p = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \in T_pM$ on *ulospäin osoittava*, kun $v_n < 0$. (Tämäkin määritelmä vaikuttaa riippuvan karttakuvauksesta x, mutta se on kuitenkin hyvin asetettu. Katso tarkemmin esimerkiksi [10, s. 118, propositio 5.41].)

Lause 6.4 (Moniston reuna on monisto)**.** *n-ulotteisen sileän moniston M reuna on $(n-1)$-ulotteinen sileä monisto. Jos M on suunnistuva, on myös reuna ∂M suunnistuva. Lisäksi, kun $\overline{n}$ on mikä tahansa ulospäin osoittava vektorikenttä, niin $\overline{n}$ indusoi reunalle ∂M yksikäsitteisen suunnistuksen.*

Todistus. Todistus pohjautuu lähteisiin [5] ja [10]. Olkoon x reunakartta reunapisteen p ympäristössä U, ja tulkitaan joukko $x(U) \cap \partial\mathbb{H}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ avoimena osajoukkona käyttäen samaistusta $\iota : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial\mathbb{H}^n$,

$$\iota(q_1, \ldots, q_{n-1}) = (q_1, \ldots, q_{n-1}, 0).$$

Joukko $\hat{U} := x^{-1}\big(x(U) \cap \partial\mathbb{H}^n\big)$ on osa reunaa ∂M, ja rajoittuma

$$\hat{x} := x|_{\hat{U}} : \hat{U} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

on karttakuvaus reunan ∂M osalle $\hat{U}$. Näin voidaan tehdä kaikille kartoille (U, x), joille $x(U) \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$. Tällä tavalla saatava kartasto $\hat{\mathscr{A}} := \big\{\big(\hat{U}_i, (\hat{x}^i)\big\}$ on sileä rakenne reunalle ∂M. Siispä ∂M on sileä $(n-1)$-ulotteinen monisto.

Näytetään sitten, että edellä kuvatulla tavalla konstruoidun kartaston koordinaattienvaihtojen Jacobin determinantit ovat positiivisia. Olkoot $(U, x), (W, y) \in \mathscr{A}$ sekä $(\hat{U}, \hat{x}), (\hat{W}, \hat{y}) \in \hat{\mathscr{A}}$, ja merkitään $F := x \circ y^{-1}$ ja $\hat{F} := \hat{x} \circ \hat{y}^{-1}$. Olkoon $q \in \partial\mathbb{H}^n \cap y(U \cap W)$. Koska kuvaukset F ja $\hat{F}$ saavat joukossa $\partial\mathbb{H}^n \cap y(U \cap W)$ täsmälleen samat arvot, on voimassa

$$\partial_i F_j(q) = \partial_i \hat{F}_j(q),$$

kun $i < n$ ja $j < n$. Lisäksi $\partial_i F_n(q) = 0$ kun $i < n$, sillä $F_n \equiv 0$ joukossa $\partial\mathbb{H}^n \cap y(U \cap W)$ lemman 6.2 nojalla. Näin ollen kuvauksen F Jacobin matriisin determinantille on voimassa

$$\det\big(\partial_j F_i\big) = \det \left(\begin{array}{cccc|c} \partial_1 \hat{F}_1 & \partial_2 \hat{F}_1 & \ldots & \partial_{n-1} \hat{F}_1 & \partial_n F_1 \\ \partial_1 \hat{F}_2 & \partial_2 \hat{F}_2 & \ldots & \partial_{n-1} \hat{F}_2 & \partial_n F_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 \hat{F}_{n-1} & \partial_2 \hat{F}_{n-1} & \ldots & \partial_{n-1} \hat{F}_{n-1} & \partial_n F_{n-1} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & \partial_n F_n \end{array}\right) = \partial_n F_n \det\big(\partial_j \hat{F}_i\big),$$

missä $\partial_n F_n$ otetaan toispuoleisena osittaisderivaatta. Koska $F_n(q) = 0$, mutta pisteen q lähellä joukossa $\mathbb{H}^n$ on voimassa $F_n > 0$, on oltava $\partial_n F_n(q) > 0$. Mutta oletuksen nojalla $\det(\partial_j F_i) > 0$, joten on oltava myös $\det\big(\partial_j \hat{F}_i\big) > 0$. Näin ollen ∂M on suunnistuva.

Olkoot sitten $\overline{n}$ ja $\overline{m}$ ulospäin osoittavia vektorikenttiä, ts. $\overline{n}(p)$ ja $\overline{m}(p)$ ovat ulospäin osoittavia vektoreita kun p on reunapiste. Koska kummankin viimeinen komponentti on negatiivinen ja siten nollasta eroava, ovat

$$\Big\{\overline{n}(p), \tfrac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}\big|_p\Big\} \qquad \text{ja} \qquad \Big\{\overline{m}(p), \tfrac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}\big|_p\Big\}$$

kantoja avaruudelle T_pM, pisteen p ollessa edelleen reunapiste. Näiden kantojen kannanvaihtomatriisin determinantti on positiivinen, ja siten

$$\left[\overline{n}(p), \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big|_p\right] = \left[\overline{m}(p), \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\Big|_p\right].$$

Koska molemmat kannat määräävät saman suunnistuksen avaruudelle T_pM, seuraa lauseen edellisestä kohdasta, että vektorit $\overline{n}$ ja $\overline{m}$ määräävät saman suunnistuksen avaruudelle $T_p\partial M$. □

Ulospäin osoittavan vektorikentän $\overline{n}$ reunalle ∂M antamaa suunnistusta

$$\partial\mu := \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right]$$

kutsutaan *Stokesin suunnistukseksi* reunalle ∂M.

Esimerkki 6.5 (Reunallisista monistoista)**.** Tarkastellaan hieman reunallisia monistoja sekä niiden reunakarttoja ja suunnistusta.

(a) Joukko $\overline{B^3(0,1)}$ on reunallinen monisto reunanaan $\mathbb{S}^2$. Vaikka pallopinnan reunamonisto on sama joukko kuin pallon $B^3(0,1)$ joukko-opillinen reuna, näin ei yleensä ole moniston reunan tapauksessa!

(b) Olkoon M esimerkin 1.4 ”pohjoinen pallonpuolisko” yhdessä joukon $C = \{p \in \mathbb{R}^3 : p_3 = 0\}$ kanssa. Tällöin M on reunallinen monisto, ja $\partial M = C$. Reuna ∂M on siis pallopinnan ”päiväntasaaja”.

   Eräs reunakartta saadaan rajoittamalla koordinaatit θ ja φ monistolle M, ja käyttämällä karttakuvauksena paria $x = (\theta, \varphi)$. Tällöin pisteille $p \in \partial M$ on voimassa $x(p) = \big(\theta(p), 0\big) \in \partial\mathbb{H}^2$, eli tasa-arvojoukko $\varphi \equiv 0$ sisältyy päiväntasaajaan ∂M. Samaistamalla joukko $\hat{U} := x(M) \cap \partial\mathbb{H}^2$ avaruuden $\mathbb{R}$ vastaavan osajoukon kanssa lemman 6.4 todistuksen mukaisesti, saadaan päiväntasaajalle yhtä pistettä lukuunottamatta oma yhden koordinaatin kartta $\hat{x} : \hat{U} \to \mathbb{R}$, $\hat{x} = \theta|_{\hat{U}}$.

(c) Määrätään Stokesin suunnistus reunalle $\partial\mathbb{H}^n$, kun avaruudelle $\mathbb{H}^n$ käytetään euklidisten koordinaattifunktioiden x_i määräämää suunnistusta

$$\mu = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right].$$

   Nyt vektorikenttä $-\frac{\partial}{\partial x_n}$ on ulospäin osoittava reunalla $\partial\mathbb{H}^n$, ja määrää sille siten Stokesin suunnistuksen $\partial\mu$. Huomaa, että yhtälön (5.1) mukaan

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right] = (-1)^n\mu.$$

   Reunamoniston $\partial\mathbb{H}^n$ tavallinen karttakuvaus $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ on tämän nojalla positiivisesti suunnistettu Stokesin suunnistuksen $\partial\mu$ mielessä täsmälleen silloin, kun n on parillinen luku! [10, s. 386, esimerkki 15.26]

Lause 6.6 (Stokes-Cartan)**.** *Olkoon M sileä, suunnistuksella μ varustettu n-ulotteinen reunallinen monisto, olkoon ω kompaktikantajainen $(n-1)$-differentiaalimuoto monistolla M, ja olkoon reuna ∂M varustettu Stokesin suunnistuksella $\partial\mu$. Tällöin*

$$\int\limits_M \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Todistus. Todistus mukailee John M. Leen todistusta, katso [10, s. 411-414], ja se on jaettu neljään "etenevään" erikoistapaukseen. Ensin näytetään väite todeksi, kun $M = \mathbb{H}^n$. Tämän jälkeen on helppoa tarkastaa tapaus $M = \mathbb{R}^n$. Sitten näytetään, että väite pätee, kun ω on kompaktikantajainen yhdessä koordinaattiympäristössä mielivaltaisella monistolla M. Lopulta edellinen kohta yleistetään ykkösen osituksen avulla koskemaan myös sellaisia kompaktikantajaisia differentiaalimuotoja, joiden kantaja ei mahdu yhteen koordinaattiympäristöön.

Olkoon siis ensin $M = \mathbb{H}^n$, ja olkoon $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{H}^n)$ kompaktikantajainen. Koska $\operatorname{supp}(\omega)$ on kompakti, on olemassa luku $c > 0$ siten, että $\operatorname{supp}(\omega) \subset R := [-c, c] \times \ldots \times [-c, c] \times [0, c]$. Avaruuksien $\Lambda_p^{n-1}(\mathbb{H}^n)$ dimensio on $\binom{n}{n-1} = n$, joten ω voidaan euklidisia koordinaattifunktioita x_i käyttäen kirjoittaa muodossa

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

joillekin funktoille f_i. Tässä $\widehat{\mathrm{d}x_i}$ tarkoittaa, että kyseistä tulontekijää ei esiinny summan i. termissä. Nyt

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Sisemmässä summassa vain i. termi on nollasta eroava ulkoisen tulon ominaisuuksista johtuen. Tälle termille on voimassa

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

sillä i. koordinaattidifferentiaali siirtyy "oikealle paikalleen" $i-1$ vaihdolla. Siispä

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

ja ulkoisen derivaatan $\mathrm{d}\omega$ integraaliksi saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_R \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_0^c \int_{-c}^{c} \ldots \int_{-c}^{c} \partial_i f_i(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

Kaikissa termeissä voidaan integrointijärjestystä muuttaa siten, että suoritetaan integrointi i. muuttujan suhteen ensin, jolloin päästään käyttämään analyysin peruslausetta. Termeille, joille $i < n$, saadaan

$$\begin{aligned}&\int_0^c \int_{-c}^{c} \ldots \int_{-c}^{c} \left(\int_{-c}^{c} \partial_i f_i(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_0^c \int_{-c}^{c} \ldots \int_{-c}^{c} \big(f_i(x_1, \ldots, c, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, -c, \ldots, x_n) \big) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \mathrm{d}x_n \\ &= 0.\end{aligned}$$

Joukossa $\partial R - \partial\mathbb{H}^n$ nimittäin $f_i \equiv 0$, sillä $\operatorname{supp}(\omega) \subset R$ (ja c voidaan valita niin suureksi, että $\operatorname{supp}(\omega)$ on aito osajoukko.) Termi $i = n$ ei välttämättä häviä integroitaessa, vaan

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\omega &= (-1)^{n-1} \int_{-c}^{c} \ldots \int_{-c}^{c} \big(f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, c) - f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \big) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{-c}^{c} \ldots \int_{-c}^{c} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}.\end{aligned}$$

Tutkitaan sitten todistettavan yhtälön oikean puolen integraalia:

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \int_{R \cap \partial\mathbb{H}^n} \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n \right).$$

Tätä integraalia laskettaessa muoto ω palautetaan joukkoon $R \cap \mathbb{R}^{n-1}$ käyttämällä samaistusta (tai *inkluusiokuvausta*) $\iota : R \cap \mathbb{R}^{n-1} \to \partial\mathbb{H}^n$, $\iota(q) = (q_1, \ldots, q_{n-1}, 0)$. Tällöin $\iota^* \mathrm{d}x_n = \mathrm{d}(x_n \circ \iota) \equiv 0$, joten kaikki termit, joille $i < n$, häviävät. Ainoa nollasta eroava termi on siis jälleen termi $i = n$, joten

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = \int_{R \cap \partial\mathbb{H}^n} f_n \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}.$$

Huomaa, että integroitaessa käytetään nyt avaruuden $\mathbb{R}^{n-1}$ euklidisia koordinaattifunktioita. Esimerkin 6.5 (c)-kohdan mukaan nämä koordinaatit ovat positiivisesti suunnistettuja reunan Stokesin suunnistuksen $\partial\mu$ mielessä täsmälleen silloin, kun n on parillinen. Koska negatiivisesti suunnistetun kartan käyttäminen vaihtaa integraalin merkin, saadaan

$$\int\limits_{\partial\mathbb{H}^n} \omega = (-1)^n \int\limits_{-c}^{c} \dots \int\limits_{-c}^{c} f_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{n-1},$$

mikä todistaa väitteen tapauksessa $M = \partial\mathbb{H}^n$.

Olkoon sitten $M = \mathbb{R}^n$, jolloin $\mathrm{supp}(\omega) \subset [-c, c]^n$ ja $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$. Kun nyt tehdään sama lasku kuin edellä, myös $i = n$ termi häviää integroitaessa yli avaruuden $\mathbb{R}^n$, ja toisaalta integraali yli tyhjän joukon on nolla, joten

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\omega = 0 = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n} \omega.$$

Siirrytään seuraavaksi mielivaltaiselle reunalliselle monistolle M ja oletetaan, että $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ on kompaktikantajainen yhden positiivisesti suunnistetun kartan (U, x) koordinaattiympäristössä U. Tällöin määritelmän 5.3 nojalla

$$\int\limits_{M} \mathrm{d}\omega = \int\limits_{x(U)} x^{-1}\mathrm{d}\omega = \int\limits_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\big(\big(x^{-1}\big)^*\omega\big).$$

Nyt $\big(x^{-1}\big)^*\omega$ on kompaktikantajainen $(n-1)$-differentiaalimuoto joukossa $\mathbb{H}^n$, joten ensimmäisenä todistetun tapauksen nojalla

$$\int\limits_{M} \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\mathbb{H}^n} \mathrm{d}\big(\big(x^{-1}\big)^*\omega\big) = \int\limits_{\partial\mathbb{H}^n} \big(\big(x^{-1}\big)^*\omega\big) = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että reunan suunnistus säilyy palautuksessa $\big(x^{-1}\big)^*$.

Viimeisenä ja yleisimpänä tapauksena olkoon ω mielivaltainen kompaktikantajainen $(n-1)$-muoto reunallisella monistolla M. Valitaan positiivisesti suunnistettujen karttojen (U_i, x^i) koordinaattiympäristöistä avoin peite $\{U_i\}$, (äärellisenä) indeksijoukkonaan I, kantajalle $\mathrm{supp}(\omega)$. Olkoon $\{\psi_i\}$ peitteelle $\{U_i\}$ alisteinen ykkösen ositus, ja esitetään ω sen avulla:

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial M} \left(\sum_I \psi_i \omega\right) = \sum_I \int\limits_{\partial M} \psi_i \omega.$$

Jokainen $\psi_i\omega$ on kompaktikantajainen koordinaattiympäristössä U_i, joten edellisen vaiheen todistuksen nojalla

$$\sum_I \int_{\partial M} \psi_i\omega = \sum_I \int_M \mathrm{d}(\psi_i\omega).$$

Laskemalla eteenpäin käyttäen ulkoisen derivaatan ominaisuuksia, saadaan

$$\sum_I \int_M \mathrm{d}(\psi_i\omega) = \sum_I \int_M \left(\mathrm{d}\psi_i \wedge \omega + \psi_i \mathrm{d}\omega\right) = \int_M \left(\mathrm{d}\left(\sum_I \psi_i\right) \wedge \omega + \left(\sum_I \psi_i\right) \mathrm{d}\omega\right).$$

Tässä $\sum_I \psi_i \equiv 1$ ykkösen osituksen ominaisuuksien nojalla. Tällöin d1 häviää, joten lopulta jäljelle jää yhtälö

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega. \qquad \square$$

Esimerkki 6.7. Stokesin ja Cartanin lauseen tulos on voimassa myös, kun integroitavana on monistoa M ympäröivän euklidisen avaruuden differentiaalimuoto. Tällöin myös reunan suunnistuksen määräävä ulospäin osoittava vektorikenttä $\overline{n}$ on selvemmin hahmotettavissa. Tarkastellaan esimerkissä 5.11 esiintynyttä vuomuotoa

$$\eta_V = \frac{x_1}{r}\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \frac{x_2}{r}\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \frac{x_3}{r}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,$$

missä $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, ja $\frac{x_i}{r} = V_i$ vektorikentälle V. Nyt vektorikenttä V on ulospäin osoittava, kun pallopintaa $\mathbb{S}^2$ tarkastellaan pallon $B^3(0,R)$ reunamonistona. V määrää siten suunnistuksen ja ”ulkopuolen” pallopinnalle $\mathbb{S}^2$. Muodon η_V ulkoinen derivaatta on esimerkin 4.12 (b)-kohdan avulla laskettuna

$$\mathrm{d}\eta_V = (\nabla \cdot V)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = \frac{2}{r}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

Kun G on pallokoordinaattikuvaus, saadaan lausetta 4.10 hyödyntämällä

$$G^*\left(\frac{2}{r}\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\right) = \frac{2}{r} r^2\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = 2r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi,$$

missä (r,θ,φ) ovat pallokoordinaattifunktiot. Nyt

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \mathrm{d}\eta_V &= \int_{B(0,R)} 2r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} 2r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi R^2.
\end{aligned}$$

Vertaamalla tätä esimerkin 5.11 tulokseen, nähdään, että todellakin

$$\int_{B^3(0,1)} \mathrm{d}\eta_V = \int_{\mathbb{S}^2} \eta_V.$$

6.2 Esimerkki: Vektorianalyysin klassiset tulokset Stokesin ja Cartanin lauseen erikoistapauksina

Tutkielman tärkein yksittäinen tavoite on nyt lauseen 6.6 muodossa saavutettu. Tässä esimerkissä annetaan luvattu tulkinta klassisille vektorianalyysin lauseille Stokesin ja Cartanin lauseen erikoistapauksina, sekä perustellaan nämä tulokset tätä lausetta käyttäen. Lauseille tarjotaan myös fysikaalinen tulkinta.

Lause 6.8 (Gaussin lause)**.** *Olkoon $M \subset \mathbb{R}^3$ sileä 3-ulotteinen reunallinen monisto siten, että M on kompakti avaruudessa $\mathbb{R}^3$, ja olkoon reuna ∂M suunnistettu ulospäin osoittavan vektorikentän määräämällä Stokesin suunnistuksella. Olkoon $V = V_1 e^1 + V_2 e^2 + V_3 e^3$ differentioituva vektorikenttä avoimessa joukossa $W \subset \mathbb{R}^3$, jolle $M \subset W$. Tällöin*

$$\int_{\partial M} V \cdot \mathrm{d}\overline{S} = \int_M \nabla \cdot V.$$

Todistus. Vuomuodon $V_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ ulkoinen derivaatta on esimerkin 4.12 nojalla $(\nabla \cdot V)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$. Yhtälön (5.3) perusteella

$$\int_{\partial M} V \cdot \mathrm{d}\overline{S} = \int_{\partial M} (V_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2),$$

ja Stokesin ja Cartanin lauseen 6.6 nojalla

$$\int_{\partial M} (V_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2) = \int_M (\nabla \cdot V)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

Tämä todistaa väitteen, koska $M \subset \mathbb{R}^3$. □

Gaussin lauseella on seuraavanlainen fysikaalinen tulkinta: Jos V on jonkin virtaavan nesteen nopeusvektori, vuomuoto $\eta_V = V_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + V_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + V_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ pitää kirjaa siitä, kuinka paljon nestettä virtaa mihinkin suuntaan ja missäkin kohden pintaa. Vuomuodon η_V integraali puolestaan kertoo, kuinka paljon nestettä virtaa pinnan läpi aikayksikköä kohden; muoto η_V siis todella ansaitsee nimensä.

Lause 6.9 (Greenin lause)**.** *Olkoon $M \subset \mathbb{R}^2$ sileä 2-ulotteinen reunallinen monisto, jolloin ∂M on moniston M ("vastapäivään") suunnistettu reunakäyrä. Olkoon $V = V_1 e^1 + V_2 e^2$ differentioituva vektorikenttä joukossa $W \subset \mathbb{R}^2$, jolle $\overline{M} \subset W$. Tällöin*

$$\int_{\partial M} V \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int_M (\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1).$$

Todistus. Muodon $V_1 \,\mathrm{d}x_1 + V_2 \,\mathrm{d}x_2$ ulkoinen derivaatta on $(\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, joten yhtälön (5.5) ja lauseen 6.6 perusteella

$$\int_{\partial M} V \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int_{\partial M} (V_1 \,\mathrm{d}x_1 + V_2 \,\mathrm{d}x_2) = \int_M (\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2. \qquad \square$$

Greenin lauseella on mielenkiintoinen geometrinen merkitys. Kun integroitavaksi 1-muodoksi valitaan $\omega = \frac{1}{2}(-x_2 \mathrm{d}x_1 + x_1 \mathrm{d}x_2)$, on voimassa yhtälö $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$; ulkoiseksi derivaattaksi saatiin avaruuden $\mathbb{R}^2$ pinta-ala-alkio. Näin ollen käyrän ∂M sisäänsä sulkema pinta-ala voidaan laskea polkuintegraalina:

$$\int_M \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2} \int_{\partial M} (-x_2 \mathrm{d}x_1 + x_1 \mathrm{d}x_2)\,.$$

Yleisemmin avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorikentälle V on

$$\int_M (\nabla \cdot V)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 = \int_{\partial M} (-V_2 \mathrm{d}x_1 + V_1 \mathrm{d}x_2).$$

Jos oikealla puolella esiintyvä 1-differentiaalimuoto on jonkin funktion H differentiaali, seuraa tästä yhtälöstä lauseen 4.11 kohdan *(iii)* nojalla, että $\nabla \cdot V \equiv 0$. Tulkittuna fysikaalisesti esimerkin 2.4 kontekstissa, tämä tarkoittaa, että virtaavan fluidin kokoonpuristumattomuus on välttämätön ehto virtafunktion H olemassaololle.

Perustellaan lopuksi vielä klassinen ristituloon turvaava Stokesin lause, jota käytetään tyypillisesti esimerkiksi Ampèren lakina tunnettun yhtälön (5.8) johtamiseen. Lauseen 6.6 avulla saavutettava todistuksen lyhyys puhunee puolestaan.

Lause 6.10 (Stokesin lause)**.** *Olkoon $M \subset \mathbb{R}^3$ kaksiulotteinen reunallinen monisto, jonka reuna on suunnistettu Stokesin suunnistuksella. Olkoon $V = V_1 e^1 + V_2 e^2 + V_3 e^3$ differentioituva vektorikenttä avoimessa joukossa $W \subset \mathbb{R}^3$, jolle $M \subset W$. Tällöin*

$$\int_{\partial M} V \cdot \mathrm{d}\overline{s} = \int_M (\nabla \times V) \cdot \mathrm{d}\overline{S}.$$

Todistus. Duaalimuodon $V_1 \,\mathrm{d}x_1 + V_2 \,\mathrm{d}x_2 + V_3 \,\mathrm{d}x_3$ ulkoinen derivaatta on esimerkin 4.12 nojalla roottorin $\nabla \times V$ vuomuoto, joten väite seuraa Stokesin ja Cartanin lausesta 6.6 yhdessä yhtälöiden (5.3) ja (5.5) kanssa. $\square$

Loppusanat

Tässä pro-gradu -tutkielmassa on tehty katsaus differentiaalimuotoihin ja niiden integrointiin sileillä monistoilla. Differentiaalimuodot ovat välttämättömiä haluttaessa jatkaa tutustumista differentiaaligeometriaan ja edettäessä syvemmälle alan sovelluksiin. Mahdollisia etenemissuuntia olisivat esimerkiksi Riemannin geometria tai symplektinen geometria, ja sitä kautta Hamiltonin mekaniikka. Ensin mainitulla alalla tutkitaan metriikalla varustettujen monistojen geometriaa, viimeksi mainitulla puolestaan degeneroitumattomalla 2-differentiaalimuodolla varustettuja, symplektisiksi kutsuttuja monistoja. Tärkeä symplektinen monisto on huomautuksessa 2.15 mainittu kotangenttikimppu, jonka piste edustaa kappaleen paikkaa ja liikemäärää Hamiltonin mekaniikassa.

Kiitokset

Haluan kiittää yliopistonlehtori Jouni Parkkosta tämän pro gradu -tutkielman ohjaamisesta ja kannustavista kommenteista työn edetessä. Kiitokset myös kotijoukoilleni sekä opiskelijatovereilleni kannustamisesta ja vinkeistä.

Lähteet

[1] Marco Abate ja Francesca Tovena. *Curves and Surfaces.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[2] Ralph Abraham ja Jerrold E. Marsden. *Foundations of Mechanics.* AMS Chelsea Publishing, toinen laitos, 2008.

[3] Peter Atkins ja Julio de Paula. *Physical Chemistry.* Oxford University Press, 10. laitos, 2014.

[4] David Bachman. *A Geometric Approach to Differential Forms.* Springer Science & Business Media, toinen laitos, 2012.

[5] Manfredo P. do Carmo. *Differential Forms and Applications.* Springer Science & Business Media, 1994.

[6] David S. Dummit ja Richard M. Foote. *Abstract algebra.* John Wiley and Sons, Inc., kolmas laitos, 2004.

[7] Alfred Gray. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces.* CRC Press, 1993.

[8] Sadri Hassani. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations.* Springer International Publishing, 2000.

[9] John Hubbard ja Barbara Burke Hubbard. *Vector Calculus, Linear Algebra and Differential Forms. A Unified Approach.* Prentice Hall, toinen laitos, 2002.

[10] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer-Verlag New York, toinen laitos, 2012.

[11] Barrett O'Neill. *Elementary Differential Geometry.* Elsevier, toinen laitos, 2006.

[12] Michael Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus.* Perseus Books, toinen laitos, 1971.

[13] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, osa 1. Publish or Perish, kolmas laitos, 2005.

[14] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner, ja Andrew M. Bruckner. *Elementary Real Analysis.* ClassicalRealAnalysis.com, toinen laitos, 2008.

[15] Gerardo F. Torres del Castillo. *Differentiable Manifolds. A Theoretical Physics Approach.* Birkhäuser Basel, 2012.

[16] Karl F. Warnick, Richard H. Selfridge, ja David V. Arnold. Teaching electromagnetic field theory using differential forms. *IEEE Transactions on Education*, 40:53–68, 2 1997.

[17] Frank M. White. *Fluid Mechanics*. Mc Graw Hill Education, 2011.

Liite A: Merkintöjä

Taulukko 1. Eräitä tutkielmassa käytettäviä merkintöjä niiden esiintymisjärjestyksessä.

merkintä	**selitys**
M, N	monisto
U, W	koordinaattiympäristö, joukko
x, y	karttakuvaus, avaruudessa $\mathbb{R}^n$ $x_i(p) = p_i$
$\mathscr{A}$	kartasto
$\mathbb{S}^2$	avaruuden $\mathbb{R}^3$ yksikköpallon pinta
$B^n(0, R)$	avaruuden $\mathbb{R}^n$ origokeskinen R-säteinen avoin pallo
e^i	avaruuden $\mathbb{R}^n$ i. standardikantavektori, luvussa 3 avaruuden $\mathbb{V}$ kantavektori
C^∞(”-”)	äärettömän monesti jatkuvasti differentioituva pisteessä/joukossa ”-”
$\partial_i f$	funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ i. tavallinen osittaisderivaatta
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	funktion $f : M \to \mathbb{R}$ i. osittaisderivaatta lokaaleissa koordinaateissa
v_p	tangenttivektori pisteessä p
$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\|_p$	i. osittaisderivaattafunktio pisteessä p
δ_{ij}	Kroneckerin delta: $\delta_{ij} = 1$ kun $i = j$, muulloin $\delta_{ij} = 0$
T_pM	moniston M tangenttiavaruus pisteessä p
T_p^*M	moniston M kotangenttiavaruus pisteessä p
$\dot{\gamma}(t)$	polun γ derivaattavektori pisteessä $\gamma(t)$
$\mathrm{d}f(p)$	funktion f differentiaali pisteessä p
$\mathbb{V}$	äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus
$\Lambda^k(\mathbb{V})$	vektoriavaruuden $\mathbb{V}$ k-muotojen joukko
I_k	k:n alkion indeksijoukko
$\mathscr{P}(I_k)$	indeksijoukon I_k permutaatioiden joukko
$\kappa_k(I_n)$	indeksijoukon I_n ne k-kombinaatiot, joille $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$
$\Omega^k(U)$	joukossa U määriteltyjen k-differentiaalimuotojen joukko
ω_V	vektorikentän V duaalimuoto
η_V	vektorikentän V vuomuoto
$F_*(p)$	kuvaukseen $F : M \to N$ liittyvä tangenttikuvaus, $F_*(p) : T_pM \to T_{F(p)}N$
F^*	kuvaukseen $F : M \to N$ liittyvä palautuskuvaus, $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$
d	ulkoinen derivaattaoperaattori
supp(”-”)	funktion/differentiaalimuodon ”-” kantaja
$\{\psi_i\}$	ykkösen ositus

Liite B: Määritelmiä

Määritelmä (Funktion osittaisderivaatta)**.** Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä p. Funktion f i*. osittaisderivaatta pisteessä* p on luku

$$\partial_i f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te^i) - f(p)}{t}.$$

Määritelmä (Sileä pinta avaruudessa $\mathbb{R}^n$)**.** Avaruuden $\mathbb{R}^m$ osajoukko S on *sileä n-ulotteinen pinta*, jos jokaiselle pisteelle $p \in S$ on olemassa C^∞-kuvaus $F : W \to \mathbb{R}^n$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimelta osajoukolta W siten, että

(i) on olemassa pisteen p avoin ympäristö $B \subset \mathbb{R}^m$ siten, että $F(W) = S \cap B =: U$,

(ii) F on homeomorfismi kuvajoukolleen, ja

(iii) kuvauksen F Jacobin matriisissa on n lineaarisesti riippumatonta saraketta, ts. derivaattakuvaus $\mathrm{D}F(q) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on injektiivinen kaikilla $q \in W$.

Kuvausta F kutsutaan pinnan S *lokaaliksi parametriesitykseksi* (pisteen p ympäristössä). Kuvaus $x := F^{-1} : U \to W \subset \mathbb{R}^n$ on *karttakuvaus* pisteen p koordinaattiympäristössä U.

Määritelmä (Vektorikentän polkuintegraali)**.** Olkoon I suljettu reaalilukuväli ja olkoon $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus, *polku avaruudessa* $\mathbb{R}^n$. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorikentän V *polkuintegraali* yli polun γ on

$$\int_\gamma V \cdot \mathrm{d}\overline{s} := \int_I \big(V \circ \gamma | \gamma'\big) = \int_I \left(\sum_{i=1}^{n} V\big(\gamma(t)\big)\gamma_i' \right) \mathrm{d}t,$$

silloin kun oikean puolen integraali on olemassa.

Olkoon seuraavassa $W \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $q \in W$. Olkoon S sileä 2-ulotteinen pinta, jolla on lokaali parametriesitys $F : W \to \mathbb{R}^3$. Parametriesityksen F *suurennussuhde* pisteessä $p = F(q)$ on luku $\|\partial_1 F(q) \times \partial_2 F(q)\|$. Kuvaus $\overline{n}$,

$$\overline{n} \circ F = \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{\|\partial_1 F \times \partial_2 F\|},$$

on pinnan S *yksikkönormaali*.

Määritelmä (Funktion pintaintegraali avaruudessa $\mathbb{R}^3$)**.** Reaaliarvoisen funktion $f : F(W) \to \mathbb{R}$ *pintaintegraali* pinnan S osan $F(W)$ yli on

$$\int_{F(W)} f \mathrm{d}S := \int_W f \circ F \|\partial_1 F \times \partial_2 F\|,$$

silloin kun jälkimmäinen integraali on olemassa. Pinnan S osan $F(W)$ *pinta-ala* on

$$\int_{F(W)} 1 \mathrm{d}S = \int_W \|\partial_1 F \times \partial_2 F\|.$$

Funktion f integraalia koko pinnan S yli merkitään myös $\int_S f \mathrm{d}S$.

Määritelmä (Vektorikentän pintaintegraali avaruudessa $\mathbb{R}^3$)**.** Olkoon $F : S \to \mathbb{R}^n$ jatkuva vektorikenttä. Vektorikentän F *vuo pinnan* S *osan* $F(W)$ *läpi* on

$$\int_{F(W)} F \cdot \mathrm{d}\overline{S} := \int_{F(W)} (V|\overline{n}) \mathrm{d}S = \int_W \big(V \circ F \big| \partial_1 F \times \partial_2 F\big)$$

silloin kun jälkimmäinen integraali on olemassa.