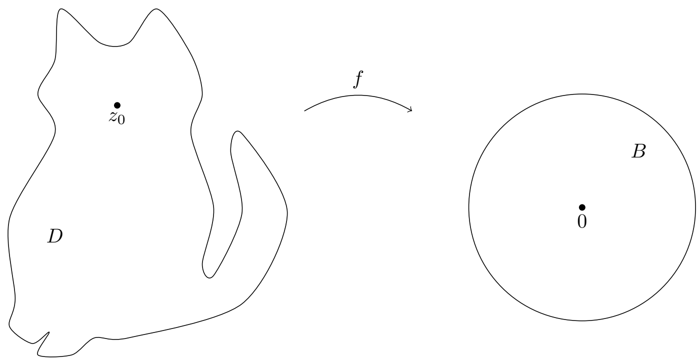
Konformikuvauksista

Lotta Jokiniemi

23.5.2016

Ohjaaja: Jouni Parkkonen



Sivuainetutkielma

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2016

Tiivistelmä

Jokiniemi, Lotta
Konformikuvauksista
Sivuainetutkielma
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto, toukokuu 2016, 47 sivua.

Tässä työssä tarkastellaan konformikuvauksia ja sitä, miten niitä voidaan hyödyntää fysiikan ongelmissa. Konformikuvauksella tarkoitetaan analyyttistä injektiota avoimelta, yhtenäiseltä joukolta kuvajoukolleen. Konformikuvauksilla on se ominaisuus, että ne säilyttävät käyrien väliset kulmat.

Työssä todistetaan Riemannin kuvauslause, jonka mukaan avoin, yhdesti yhtenäinen kompleksitason aito osajoukko voidaan kuvata konformikuvauksella yksikkökiekoksi. Fysiikan ongelmissa tulee joskus vastaan tilanteita, joissa ongelmaa ei osata ratkaista alkuperäisessä, mahdollisesti monimutkaisessa alueessa, mutta alue saadaan konformikuvauksen avulla muutettua muotoon, jossa ongelma osataan ratkaista. Riemannin kuvauslause kertoo kuitenkin vain tällaisen kuvauksen olemassaolosta, mutta ei ota kantaa siihen, mikä kuvaus tarkalleen on.

Toisinaan tällaisen kuvauksen muoto saadaan kuitenkin selvitettyä. Tässä työssä esitellään ja todistetaan Schwarzin ja Christoffelin kaava, jonka avulla saadaan muodostettua konformikuvaus monikulmion ja kompleksitason ylemmän puolitason välille. Kuvaus osataan ratkaista suljetussa muodossa muutamassa yksinkertaisessa tapauksessa, joista esimerkkinä esitellään tässä työssä Schwarzin kolmiofunktiot.

Työn lopussa esitellään vielä muutama fysiikan ongelma, joissa konformikuvauksia voidaan hyödyntää. Tällaisia ongelmia löytyy esimerkiksi virtausmekaniikasta, lämmönjohtavuudesta sekä sähköstatiikasta.

Avainsanat: Konformikuvaus, Riemannin kuvauslause, Schwarzin ja Christoffelin kaava

Sisältö

1. Johdanto

Tässä työssä perehdytään konformikuvauksiin ja niiden hyödyntämiseen fysiikan ongelmissa. Konformikuvausten avulla saadaan usein palautettua monimutkaisen muotoiset alueet esimerkiksi kiekoiksi tai puolitasoksi, mikä helpottaa fysikaalisten ongelmien ratkaisemista. Teksti pohjautuu lähteisiin [1], [2], [3], [4], [5], [6] ja [7].

Toisessa luvussa käsitellään Cauchyn lauseen lokaali versio ja esitellään sen tärkeimpiä seurauksia. Cauchyn lauseen avulla saadaan johdettua muun muassa Cauchyn integraalikaava sekä Cauchyn integraalikaava derivaatoille, jonka avulla monien integraalien laskeminen palautuukin derivointiin, mikä on usein helpompaa. Cauchyn lauseen seurauksena saadaan myöskin osoitettua, että analyyttisen funktion kaikki derivaatat ovat analyyttisia, mikä on vahva tulos analyyttisille funktioille. Suurin osa luvun 2 todistuksista pohjautuu lähteeseen [7].

Luvussa 3 käsitellään funktiojonojen tasaista ja normaalia suppenemista sekä niihin liittyviä tuloksia. Tasainen ja normaali suppeneminen ovat keskeisessä osassa normaaliperheiden teoriassa, johon perehdytään myöhemmin työssä. Luvussa nähdään muun muassa, että normaalisti suppenevan jonon funktioiden jatkuvuus ja analyyttisyys periytyvät rajafunktiolle. Suurin osa tämänkin luvun todistuksista pohjautuu lähteeseen [7].

Luvussa 4 määritellään normaaliperheet, sekä käydään läpi joitakin niiden ominaisuuksia. Luvussa määritellään myös yhtäjatkuvuuden ja pisteittäisen rajoittuneisuuden käsitteet ja huomataan, että Arzèla-Ascolin lauseen nojalla jatkuvan funktioperheen normaalius on yhtäpitävää sen yhtäjatkuvuuden ja pisteittäisen rajoittuneisuuden kanssa. Lisäksi luvussa todistetaan Montel'n lause, jonka mukaan analyyttisen funktioperheen normaaliuden testaamiseksi riittää tarkastella sen pisteittäistä rajoittuneisuutta.

Luvun 5 keskeisin tulos on residylause, jolla on monia hyödyllisiä seurauksia. Residylauseen avulla saadaan johdettua muun muassa avoimen kuvauksen lause sekä muutamia univalentteja funktioita, eli analyyttisiä injektioita, koskevia tuloksia. Kappaleessa keskitytään ainoastaan tämän työn kannalta tärkeisiin tuloksiin, eikä perehdytä sen tarkemmin residyteoriaan. Kappaleen tulokset ovat pääasiassa lähteestä [7].

Luvussa 6 määritellään konformikuvaus ja esitellään sen ominaisuuksia. Konformikuvaukset ovat kompleksitason kuvauksia, jotka säilyttävät käyrien väliset kulmat. Luvussa huomataan, että konformisuus on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvaus on analyyttinen injektio. Lisäksi esitellään eksakti muoto konformikuvauksille, jotka kuvaavat yksikköpallon itselleen. Luvun tulokset ovat pääosin lähteistä [1] ja [7].

Luvussa 7 todistetaan Riemannin kuvauslause. Riemannin kuvauslauseen nojalla kompleksitason yhdesti yhtenäinen avoin aito osajoukko voidaan kuvata konformikuvauksella yksikkökiekolle. Lause ei kuitenkaan kerro mitään siitä, millainen kuvauksen eksakti muoto on, vaan ainoastaan takaa sellaisen olemassaolon. Luvun tulokset pohjautuvat lähteeseen [7].

Luvussa 8 käsitellään konformikuvauksia monikulmioille. Luvun tärkein lause on Schwarz-Christoffelin kaava, joka antaa eksaktin muodon kuvauksille, jotka kuvaavat puolitason monikulmiolle. Huomataan, että tällaisen kuvauksen avulla saadaan eksakti muoto Riemannin kuvauslauseen ennustamalle konformikuvaukselle monikulmiolta yksikkökiekolle, kun tiedetään konformikuvaus ylemmän puolitason ja yksikkökiekon välillä. Luvun tulokset ovat lähteistä [1], [3] ja [7].

Viimeisessä luvussa esitellään joitakin fysiikan ongelmia, joiden ratkaisemisessa voidaan käyttää hyväksi konformikuvauksia. Tällaisia ongelmia ilmenee esimerkiksi virtausmekaniikassa, lämmonjohtavuudessa sekä sähköstatiikassa. Kappaleen esimerkit ovat kirjoista [4], [2] ja [5].

Hieman termistöä

Luonnolliset luvut

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$$

Avoin kiekko

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

Suljettu kiekko

$$\bar{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

Punkteerattu kiekko

$$B^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$$

Kehä

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

Oletetaan, että $A \subset \mathbb{C}$. Tällöin saadaan seuraavat määritelmät:
Sisäpisteiden joukko

$$\mathrm{Int}A = \{z \in A :\ \exists\ r > 0 \text{ s.e. } B(z, r) \subset A\}$$

Ulkopisteiden joukko

$$\mathrm{Ext}A = \{z \in \mathbb{C} :\ \exists\ r > 0 \text{ s.e. } B(z, r) \subset \mathbb{C} - A\}$$

Reunapisteiden joukko

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} :\ \forall\ r > 0\ B(z, r) \cap A \neq \emptyset \text{ ja } B(z, r) \cap (\mathbb{C} - A) \neq \emptyset\}$$

Sulkeuma

$$\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} :\ \forall\ r > 0\ B(z, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Laajennettu kompleksitaso

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Laajennettu reuna

$$\widehat{\partial} A = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} :\ \forall\ r > 0\ B(z, r) \cap A \neq \emptyset \text{ ja } B(z, r) \cap (\widehat{\mathbb{C}} - A) \neq \emptyset\}$$

Laajennettu sulkeuma

$$\widehat{A} = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} :\ \forall\ r > 0\ B(z, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Lisäksi työssä käytetään seuraavia merkintöjä ja termejä:
Jatkuvien funktioiden joukko

$$C(U) = \{f : U \to \mathbb{C}; f \text{ jatkuva}\}$$

Jatkuvasti derivoituvien funktioiden joukko

$$C^1(U) = \{f : U \to \mathbb{C}; f' \text{ on olemassa ja jatkuva}\}$$

Jordan-käyrä=suljettu, itseään leikkaamaton käyrä

2. Cauchyn lause ja sen seuraukset

Tässä työssä tutkitaan lähestulkoon pelkästään analyyttisia funktioita ja niiden ominaisuuksia. Funktio on analyyttinen pisteessä z_0, mikäli se on kompleksisesti derivoituva tässä pisteessä. Sanotaan, että funktio on analyyttinen, mikäli se on derivoituva kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä. Usein pistettä $z \in \mathbb{C}$ merkitään $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ovat pisteen reaali- ja imaginääriosat, ja funktiota $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, missä $u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R}$ ovat funktion reaali- ja imaginääriosat. Tällöin funktio f on analyyttinen, jos ja vain jos sen reaali- ja imaginääriosien osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia, sekä toteuttavat *Cauchy-Riemannin yhtälöt*

$$\begin{aligned}\partial_x u(x, y) &= \partial_y v(x, y)\\ \partial_y u(x, y) &= -\partial_x v(x, y)\ .\end{aligned}$$

Analyyttisilla funktioilla on monia hyödyllisiä ominaisuuksia. Erityisesti kaikki analyyttiset funktiot ovat jatkuvia. Tässä luvussa esitellään Cauchyn lause ja sen seurauksia. Cauchyn lauseen lokaalin version nojalla analyyttisen funktion polkuintegraali yli suljetun, paloittain sileän polun häviää. Tässä työssä esitellään vain Cauchyn lauseen lokaali, kiekossa määritelty versio.

Suurinta osaa tämän luvun tuloksista ei todisteta tässä työssä, sillä ne sisältyvät kompleksianalyysin kursseihin. Useimpien lauseiden todistukset löytyvät kirjasta [7].

Seuraava lemma toimii aputuloksena Cauchyn lauseen todistuksessa. Lemman nojalla analyyttisen funktion integraali suorakulmion reunan yli häviää.

Lemma 2.1. *Jos funktio f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

kaikille suljetuille suorakaiteille $R \subset U$.

Todistus. Todistus sivuutetaan, ks. esimerkiksi [7, p.141]. □

Nyt voidaan muotoilla Cauchyn lause kiekossa:

Lause 2.2. (Cauchyn lause kiekossa)
Olkoon $B \subset \mathbb{C}$ avoin kiekko ja f analyyttinen B:ssä. Tällöin

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

kaikille suljetuille, paloittain sileille poluille γ.

Todistus. Todistus pohjautuu muun muassa Lemmaan 2.1. Ks. esimerkiksi [7, p.148]. □

Olkoon $\gamma : I \to \mathbb{C}$ suljettu, paloittain sileä polku ja $z \in \mathbb{C} - \gamma(I)$. Tällöin *$\gamma$:n kiertoluku $n(\gamma, z)$ z:n ympäri* on luku

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} \in \mathbb{Z}\ .$$

Kiertoluvulle pätee seuraava tulos:

Lemma 2.3. *Olkoon $\gamma : I \to \mathbb{C}$ suljettu, paloittain sileä polku ja olkoon $U = \mathbb{C} - \gamma(I)$. Tällöin:*

(i) $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2)$*, kun z_1 ja z_2 kuuluvat samaan U:n komponenttiin*
(ii) $n(\gamma, z) = 0$ *kaikille z, jotka kuuluvat U:n rajoittamattomaan komponenttiin*
(iii) kun γ on yksinkertainen, joko $n(\gamma, z) = 1$ kaikille rajoitetun komponentin pisteille z tai $n(\gamma, z) = -1$ kaikille sellaisille z.

Nyt voidaan esitellä Cauchyn integraalikaava kiekossa:

Lause 2.4. (Cauchyn integraalikaava kiekossa)
Olkoon f analyyttinen avoimessa kiekossa B ja $\gamma : I \to B$ suljettu, paloittain sileä polku. tällöin

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

kaikille $z \in B - \gamma(I)$.

Todistus. Cauchyn integraalikaava voidaan todistaa Cauchyn lauseen avulla. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.161]. □

Cauchyn integraalikaavan seurauksena saadaan muun muassa, että analyyttisen funktion derivaatta on analyyttinen, jolloin funktio on itseasiassa äärettömän monta kertaa derivoituva ja kaikki derivaatat ovat analyyttisia ja jatkuvia.

Lause 2.5. *Jos f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin myös f' on analyyttinen U:ssa. Erityisesti siis, $f \in C^1(U)$.*

Seuraus 2.6. *Jos f on analyyttinen avoimessa joukossa U, niin se on äärettömän monta kertaa derivoituva. Lisäksi funktiot f', f'',...,$f^{(k)}$,... ovat analyyttisia U:ssa. Erityisesti siis, $f \in C^\infty$.*

Analyyttisen funktion derivaatan analyyttisyydestä seuraa myös Cauchyn lauseen vastakkainen suunta suorakulmioille. Tätä tulosta kutsutaan Moreran lauseeksi ja se kertoo, että mikäli funktion polkuintegraalit yli suljettujen suorakaiteiden reunojen häviävät, funktio on analyyttinen.

Lause 2.7. (Moreran lause)
Olkoon funktio f jatkuva avoimessa joukossa U. Oletetaan, että

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

kaikille suljetuille suorakaiteille $R \subset U$, joiden sivut ovat koordinaattiakseleiden suuntaisia. Tällöin f on analyyttinen U:ssa.

Todistus. Todistus tälle ei ole pitkä. Se löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.165]. □

Kun Moreran lause yhdistetään Lemman 2.1 kanssa, saadaan seuraava hyödyllinen tulos:

Lause 2.8. *Olkoon funktio f jatkuva avoimessa joukossa U ja analyyttinen joukossa $U - \{z_0\}$. Tällöin f on analyyttinen joukossa U.*

Todistus. Moreran lause 2.7 + Lemma 2.1. □

Cauchyn integraalikaavasta voidaan johtaa myös versio analyyttisen funktion derivaatoille:

Lause 2.9. *Olkoon funktio f analyyttinen avoimessa kiekossa B, $k \in \mathbb{N}$ ja $\gamma : I \to B$ suljettu, paloittain sileä polku. Tällöin*

$$n(\gamma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}$$

kaikilla $z \in B - \gamma(I)$.

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [6, p.95]. □

Lauseen 2.9 avulla saadaan johdettua arvio analyyttisen funktion derivaattojen moduleille:

Lause 2.10. (Cauchyn estimaatti)
Olkoon f analyyttinen avoimessa kiekossa $B = B(z_0, r)$ ja $|f(z)| \leq m$ kaikilla $z \in B$ jollakin $m > 0$. Tällöin kaikille $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!mr}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

kaikilla $z \in B$. Erityisesti $|f^{(k)}(z_0)| \leq k!mr^{-k}$.

Todistus. Todistus pohjautuu Lauseeseen 2.9. Se löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.167]. □

Cauchyn estimaatin avulla huomataan, että jos koko kompleksitasossa määritelty analyyttinen funktio on rajoitettu, sen täytyy olla vakio. Tätä tulosta kutsutaan *Liouvillen lauseeksi.*

Lause 2.11. (Liouvillen lause)
Jos analyyttinen funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on rajoitettu, sen täytyy olla vakio.

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [1, p.122]. □

Seuraavaksi tarkastellaan Riemannin kuvauslauseen todistuksessa tarvittavia tuloksia analyyttisille funktioille.

Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin joukko. Käyrän γ sanotaan olevan *0-homologinen* U:ssa, mikäli $n(\gamma, z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C} - U$. Alueen D sanotaan olevan *yhdesti yhtenäinen*, jos kaikki suljetut, paloittain sileät polut γ ovat 0-homologisia D:ssä. Yhdesti yhtenäisyydestä seuraa muun muassa analyyttisen funktion primitiivin olemassaolo.

Lause 2.12. *Olkoon $D \in \mathbb{C}$ alue. Tällöin D on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos jokaisella analyyttisella funktiolla $f : D \to \mathbb{C}$ on primitiivi.*

Todistus. Todistus ei ole pitkä, se löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.196]. □

Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Tällöin *logaritmin haara* alueessa D on analyyttinen funktio $g : D \to \mathbb{C}$, jolle pätee $e^{g(z)} = z = f(z)$ kaikilla $z \in D$. Tällöin erityisesti täytyy päteä $0 \notin D$, toisin sanoen f:n nollakohdat eivät sisälly alueeseen D.

Logaritmin haara voidaan määritellä yleisemminkin mielivaltaiselle analyyttiselle funktiolle $f : D \to \mathbb{C}$. Analyyttista funktiota $g : D \to \mathbb{C}$, jolle pätee $e^{g(z)} = f(z)$

kaikilla $z \in D$, sanotaan *funktion f logaritmin haaraksi alueessa D*, mikäli sellainen on olemassa. Jos funktiolla f on nollakohtia alueessa D, tällaista funktiota ei selvästikään voi olla olemassa. Ehto $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$ ei kuitenkaan takaa funktion logaritmin haaran olemassaoloa. Seuraavaksi johdetaan hyödyllinen tulos funktion logaritmin haaran olemassaololle.

Lause 2.13. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Tällöin D on yhdesti yhtenäinen jos ja vain jos jokaiselle analyyttiselle funktiolle f, jolla ei ole nollakohtia D:ssa, on olemassa* $\log f(z)$*:n haara alueessa D.*

Todistus. Oletetaan ensin, että D on yhdesti yhtenäinen. Olkoon f analyyttinen funktio, jolla ei ole nollakohtia. Tällöin Lauseen 2.12 nojalla analyyttisella funktiolla $f'(z)/f(z)$ on primitiivi $F(z)$ alueessa D.

Olkoon $z_0 \in D$. Määritellään $l_f : D \to \mathbb{C}$,

$$l_f(z) = F(z) - F(z_0) + \operatorname{Log}(f(z_0)) .$$

Määritellään lisäksi $g : D \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = f(z)e^{-l_f(z)} .$$

Tällöin

$$\begin{aligned} g(z_0) &= f(z_0)e^{-l_f(z_0)} = f(z_0)e^{F(z_0)-F(z_0)-\operatorname{Log}(f(z_0))} \\ &= f(z_0)e^{-\operatorname{Log}(f(z_0))} = \frac{f(z_0)}{f(z_0)} = 1 \end{aligned}$$

ja kaikille $z \in D$ pätee

$$\begin{aligned} g'(z) &= f'(z)e^{-l_f(z)} - f(z)l_f'(z)e^{-l_f(z)} \\ &= f'(z)e^{-l_f(z)} - f(z)F'(z)e^{-l_f(z)} \\ &= f'(z)e^{-l_f(z)} - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-l_f(z)} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Siispä g on vakio, $g \equiv 1$. Tällöin siis $1 = f(z)e^{-l_f(z)}$, joten $e^{l_f(z)} = f(z)$. Siispä $l_f(z)$ on $\log f(z)$:n haara alueessa D.

Oletetaan sitten, että jokaiselle analyyttiselle funktiolle $f : d \to \mathbb{C}$, jolla ei ole nollakohtia alueessa D, on olemassa logaritmin haara alueessa D.

Olkoon $z \in \mathbb{C} - D$ ja olkoon $f : D \to \mathbb{C}$, $f(\zeta) = \zeta - z$. Koska f on analyyttinen ja $\neq 0$ alueessa D, oletuksen nojalla $\log f$:lla on haara alueessa D. Valitaan tällainen haara, $g : D \to \mathbb{C}$. Tällöin

$$g'(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$$

ja

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g'(\zeta)d\zeta = 0$$

kaikilla suljetuilla, paloittain sileillä poluilla γ alueessa D. Koska tämä pätee kaikille $z \in \mathbb{C} - D$, kaikki tällaiset polut γ ovat 0-homologisia D:ssa. Siispä D on yhdesti yhtenäinen. $\square$

3. Tasainen ja normaali suppeneminen

Tässä luvussa tarkastellaan funktiojonojen tasaista ja normaalia suppenemista ja niistä seuraavia tuloksia. Kerrataan aluksi eri suppenemistyyppien määritelmät.

Funktiojonon (f_n), missä $f_n : A \to \mathbb{C}$, sanotaan suppenevan pisteittäin kohti rajafunktiota f, mikäli kaikilla $z \in A$ pätee

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z) \ .$$

Tätä vahvempi suppenemisen muoto on *tasainen suppeneminen*. Funktiojonon (f_n) sanotaan suppenevan *tasaisesti* kohti rajafunktiota f, mikäli kaikille $\epsilon > 0$ löytyy sellainen $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$, että $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ kaikilla $z \in A$ aina kun $n \geq N$.

Tasaisessa suppenemisessa funktiojonon funktioiden analyyttisyys periytyy rajafunktiolle.

Lause 3.1. *Olkoon (f_n) jono joukossa A jatkuvia funktioita siten, että $f_n \to f$ tasaisesti A:ssa jollekin f. Tällöin f on myös jatkuva A:ssa. Lisäksi*

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

kaikille joukon A paloittain sileille poluille γ.

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.244-245]. □

Tasaisen suppenemisen todistaminen määritelmän avulla voi kuitenkin välillä olla hankalaa, jos esimerkiksi funktiojono koostuu monimutkaisista funktioista. Tätä varten esitellään Cauchyn ehto tasaiselle suppenemiselle.

Funktiojonoa (f_n) sanotaan *tasaiseksi Cauchy-jonoksi joukossa A*, mikäli kaikille $\epsilon > 0$ löytyy luku $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$ kaikilla $z \in A$, kun $m > n \geq N$. Tasaisesti suppeneva funktiojono on selvästi myös tasainen Cauchy-jono. Seuraavassa tuloksessa tarkastellaan päinvastaista suuntaa.

Lause 3.2. (Cauchyn ehto tasaiselle suppenemiselle)
Jono (f_n), missä $f_n : A \to \mathbb{C}$, suppenee tasaisesti A:ssa jos ja vain jos se on tasainen Cauchy-jono.

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.246]. □

Tarkastellaan seuraavaksi suppenemisen muotoa, joka on heikompi kuin tasainen suppeneminen, mutta vahvempi kuin pisteittäinen suppeneminen. Tällaista suppenemista kutsutaan*normaaliksi suppenemiseksi.*

Määritelmä 3.3. Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f_n : U \to \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Funktiojono (f_n) *suppenee normaalisti kohti rajafunktiota f joukossa U*, mikäli (f_n) suppenee pisteittäin kohti funktiota f ja lisäksi suppeneminen on tasaista jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset U$.

Seuraavan tuloksen avulla normaalin suppenemisen tarkastamiseksi riittää tarkastella suppenemista kaikissa suljetuissa kiekoissa, jotka sisältyvät U:hun.

Lemma 3.4. *Olkoon $U \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f_n : U \to \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jono (f_n) suppenee normaalisti joukossa U jos ja vain jos se suppenee tasaisesti jokaisessa suljetussa kiekossa $\bar{B}(x, r) \subset U$.*

Todistus. Todistus löytyy esim. kirjasta [7, p.247]. □

Seuraavan tuloksen nojalla normaalissa suppenemisessa funktiojonon analyyttisyys periytyy rajafunktiolle. Lisäksi rajafunktion polkuintegraali voidaan laskea raja-arvona funktiojonon integraaleista.

Lause 3.5. *Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita $U \to \mathbb{C}$ siten, että (f_n) suppenee normaalisti kohti rajafunktiota f joukossa U. Tällöin f on jatkuva joukossa U. Lisäksi*

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz$$

kaikille suljetuille paloittain sileille poluille $\gamma \subset U$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että f on jatkuva. Olkoon $K \subset U$ kompakti. Tällöin oletuksen nojalla $f_n \to f$ tasaisesti K:ssa. Siispä Lauseen 3.1 nojalla f on jatkuva K:ssa. Nyt siis f on jatkuva kaikissa U:n kompakteissa osajoukoissa. Osoitetaan, että f on jatkuva koko U:ssa.

Olkoon (x_n) jono U:ssa siten, että $x_n \to x$. Tällöin joukko $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ on kompakti joukko U:ssa. Siispä f on jatkuva A:ssa. Tällöin $f(x_n) \to f(x)$, joten f on jatkuva U:ssa.

Todistetaan sitten lauseen toinen väite. Olkoon $\gamma : [a, b] \to D$ suljettu, paloittain sileä polku. Tällöin joukko $\gamma([a, b])$ on kompakti, joten $f_n \to f$ tasaisesti joukossa $\gamma([a, b])$. Tällöin on sellainen $N_0 \in \mathbb{N}$, että

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{l(\gamma) + 1}$$

kaikilla $z \in \gamma([a, b])$, kun $n \geq N_0$, missä $l(\gamma)$ on polun γ pituus. Tällöin

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz \right| &= \left| \int_\gamma (f(z) - f_n(z))dz \right| \\
&\leq \int_\gamma |f(z) - f_n(z)|dz \\
&< l(\gamma)\frac{\epsilon}{l(\gamma) + 1} < \epsilon \,,
\end{aligned}$$

kun $n \geq N_0$. Siispä

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz \,.$$

□

Lisäksi voidaan osoittaa, että mikäli funktiojono suppenee normaalisti, funktiojonon derivaatat suppenevat normaalisti kohti rajafunktion derivaattoja.

Lause 3.6. *Olkoon (f_n) jono joukossa U analyyttisia funktioita siten, että $f_n \to f$ normaalisti U:ssa. Tällöin f on analyyttinen U:ssa. Lisäksi $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ normaalisti U:ssa kaikille $k \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Lauseen 3.5 nojalla rajafunktio on jatkuva U:ssa. Nyt Lauseen 3.5 ja Lemman 2.1 nojalla

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial R} f_n(z)dz = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla $R \subset U$. Tällöin Moreran lauseen 2.7 nojalla f on analyyttinen U:ssa. Näytetään seuraavaksi, että $f_n' \to f'$ normaalisti U:ssa. Lemman 3.4 nojalla riittää osoittaa, että $f_n' \to f'$ tasaisesti jokaisessa U:n suljetussa kiekossa. Olkoon siis $B = \bar{B}(z_0, r) \subset U$. Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt halutaan löytää $N \in \mathbb{N}$ siten, että $|f_n'(z) - f'(z)| < \epsilon$ kaikilla $z \in B$, kun $n \geq N$. Olkoon $s > r$ siten, että $\bar{B}(z_0, s) \subset U$. Tällainen valinta on mahdollista, sillä U on avoin. Olkoon $z \in B$. Lauseen 2.8 ja Cauchyn lauseen 2.2 nojalla

$$\begin{aligned}
|f_n'(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = s} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta \\
&\leq \frac{2\pi s}{2\pi} \frac{1}{(s-r)^2} \max\{|f_n(\zeta) - f(\zeta)| : \zeta \in S(z_0, s)\} \\
&\leq \frac{s}{(s-r)^2} \max\{|f_n(\zeta) - f(\zeta)| : \zeta \in S(z_0, s)\} .
\end{aligned}$$

Tässä $|\zeta - z| \geq ||\zeta| - |z|| \geq s - r$, kun $z \in B$ ja $\zeta \in S(z_0, s)$. Oletuksen nojalla $f_n \to f$ tasaisesti $\bar{B}(z_0, s)$:ssa. Siispä voidaan valita $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{(s-r)^2 \epsilon}{s}$$

kaikilla $\zeta \in \bar{B}(z_0, s)$ aina kun $n \geq N$. Siispä

$$\max\{|f_n(\zeta) - f(\zeta)| : \zeta \in S(z_0, s)\} < \frac{(s-r)^2 \epsilon}{s} ,$$

kun $n \geq N$. Tällöin

$$|f_n'(z) - f'(z)| < \epsilon ,$$

kaikilla $z \in B$, kun $n \geq N$. Siispä $f_n' \to f'$ tasaisesti jokaisessa U:n suljetussa kiekossa. Siispä $f_n' \to f'$ normaalisti U:ssa. Soveltamalla tätä funktiojonoon (f_n') saadaan väite todistettua funktiojonolle (f_n'') ja niin edelleen. $\square$

4. Normaaliperheet

Tässä luvussa tarkastellaan Riemannin kuvauslauseen todistuksessa keskeisessä roolissa olevia normaaliperheitä.

Määritelmä 4.1. Sanotaan, että perhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on *normaali* (tai *pre-kompakti*) joukossa U, mikäli jokaisella $\mathcal{F}$:n jonolla (f_n) on vähintään yksi normaalisti suppeneva osajono (f_{n_k}).

Seuraavaksi esiteltävä yhtäjatkuvuuden käsite on tärkeässä roolissa normaaliperheiden teoriassa.

Määritelmä 4.2. Perhe $\mathcal{F}$ on *yhtäjatkuva* pisteessä $z_0 \in U$, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta = \delta(z_0) > 0$ siten, että $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ kaikille $f \in \mathcal{F}$, kun $|z - z_o| < \delta$. Jos $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva kaikissa pisteissä $z_0 \in U$, sanotaan, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva U:ssa.

Yhtäjatkuvuuden tärkein ominaisuus on, että se yhdistää pisteittäisen suppenemisen ja normaalin suppenemisen käsitteet toisiinsa.

Lause 4.3. *Olkoon (f_n) jono yhtäjatkuvassa perheessä $\mathcal{F} \subset C(U)$. Tällöin, jos jono suppenee pisteittäin U:ssa, niin se suppenee normaalisti U:ssa.*

Todistus. Olkoon $f \in \mathcal{F}$ siten, että $f_n \to f$ pisteittäin U:ssa. Olkoon $K \subset U$ kompakti joukko. Osoitetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti K:ssa. Lauseen 3.2 nojalla riittää osoittaa, että (f_n) on tasainen Cauchy-jono K:ssa. Oletetaan, että (f_n) ei ole tasainen Cauchy. Tällöin on $\epsilon > 0$ siten, että ei ole olemassa lukua $N \in \mathbb{N}$, jolle pätisi

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon ,$$

kaikilla $n, m \geq N$ kaikilla $z \in K$. Tällöin siis kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on olemassa indeksit m_k ja n_k siten, että $m_k > n_k \geq k$ ja

$$|f_{m_k}(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geq \epsilon \tag{4.1}$$

jollakin $z_k \in K$. Tällaisista pisteistä muodostettu jono (z_k) kuuluu kompaktiin joukkoon K. Tällöin siis (z_k):lla on vähintään yksi kasautumispiste. Olkoon $z_0 \in K$ tällainen kasautumispiste. Koska $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva pisteessä z_0, voidaan valita $\delta > 0$ siten, että

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{4.2}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $z \in K$, joille $|z - z_0| < \delta$. Koska $m_k \to \infty$ ja $n_k \to \infty$, kun $k \to \infty$, tästä seuraa, että

$$|f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| \to |f(z_0) - f(z_0)| = 0 ,$$

kun $k \to \infty$. Tällöin voidaan valita $k_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} , \tag{4.3}$$

kun $k \geq k_0$. Koska z_0 on (z_k):n kasautumispiste, voidaan valita $k \geq k_0$ siten, että $|z_k - z_0| < \delta$. Kolmioepäyhtälö yhdistettynä yhtälöiden (4.1-4.3) kanssa antaa

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq |f_{m_k}(k_k) - f_{n_k}(z_k)| \\ &|f_{m_k}(z_k) - f_{m_k}(z_0)| + |f_{m_k}(z_0) - f_{n_k}(z_0)| + |f_{n_k}(z_0) - f_{n_k}(z_k)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \,,\end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Siispä (f_n) on tasainen Cauchy-jono ja $f_n \to f$ tasaisesti K:ssa. Tällöin siis (f_n) suppenee normaalisti U:ssa. □

Lauseelle 4.3 voidaan johtaa myös hieman vahvempi versio.

Lause 4.4. *Olkoon (f_n) jono yhtäjatkuvassa perheessä $\mathcal{F} \subset C(U)$. Tällöin, jos jono $f_n(\xi)$ suppenee jokaisella $\xi \in S$, missä $S \subset U$ on tiheä, niin (f_n) suppenee normaalisti U:ssa.*

Todistus. Lauseen 4.3 nojalla riittää osoittaa, että (f_n) suppenee pisteittäin U:ssa. Tämän osoittamiseksi riittää osoittaa, että kaikilla $z \in U$ jono $(f_n(z))$ on Cauchy-jono. Olkoon siis $z \in U$ ja $\epsilon > 0$. Nyt täytyy löytää sellainen $N \in \mathbb{N}$, että

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

kaikilla $m > n \geq N$. Koska $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva pisteessä z_0, voidaan valita $\delta > 0$ siten, että

$$|f_n(w) - f_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, kun $|w - z| < \delta$. Nyt, koska S on tiheä U:ssa, voidaan valita $\zeta \in S$ siten, että

$$|\zeta - z| < \delta \,.$$

Oletuksen nojalla $(f_n(\zeta))$ suppenee. Tällöin erityisesti $(f_n(\zeta))$ on Cauchy-jono. Tällöin on sellainen $N \in \mathbb{N}$, että

$$|f_m(\zeta) - f_n(\zeta)| < \frac{\epsilon}{3} \,,$$

kun $m > n \geq N$. Tällöin

$$\begin{aligned}|f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(\zeta)| + |f_m(\zeta) - f_n(\zeta)| + |f_n(\zeta) - f_n(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \,,\end{aligned}$$

kun $m > n \geq N$. Tällöin siis $(f_n(z))$ on Cauchy-jono. Koska tämä pätee kaikilla $z \in U$, niin (f_n) suppenee normaalisti U:ssa. □

Seuraavaksi halutaan löytää yhteys aliperheen rajoittuneisuudelle ja normaaliudelle. Tätä varten täytyy ensin määritellä rajoittuneisuuden käsitteet.

Sanotaan, että perhe $\mathcal{F}$ on pisteittäin rajoitettu U:ssa, mikäli kaikilla $z \in U$ joukko $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ on rajoitettu $\mathbb{C}$:ssa.

Lisäksi, sanotaan, että $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu U:ssa, mikäli sen alkiot ovat tasaisesti rajoitettuja jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset U$, mikä tarkoittaa, että jokaiselle kompaktille $K \subset U$ löytyy vakio $m = m(K)$ siten, että $|f(z)| \leq m$ kaikilla $z \in K$ ja kaikilla funktioilla $f \in \mathcal{F}$.

Seuraava lause kertoo normaaliperheen yhteyden pisteittäiseen rajoittuneisuuteen.

Lause 4.5. (Arzelà-Ascolin lause)
Aliperhe $\mathcal{F} \subset C(U)$ on normaali avoimessa joukossa U jos ja vain jos se on yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu U:ssa

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva ja pisteittäin rajoitettu U:ssa. Olkoon (f_n) jono $\mathcal{F}$:ssä. Nyt täytyy osoittaa, että (f_n):llä on normaalisti suppeneva osajono. Olkoon

$$S_0 = \{z \in U : \mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z \in \mathbb{Q}\} .$$

Tällöin S_0 on tiheä U:ssa. Lisäksi S_0 on numeroituva, joten S_0:n alkioista voidaan muodostaa jono (z_n). Nyt jono $f_n(z_1)$ on $\mathcal{F}$:n pisteittäisen rajoittuneisuuden nojalla rajoitettu. Tällöin Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla sillä on vähintään yksi kasautumispiste $\mathbb{C}$:ssa. Valitaan tällainen kasautumispiste $w_1 \in \mathbb{C}$. Tällöin jonolla $(f_n(z_1))$ on osajono, joka suppenee pisteeseen w_1. Toisin sanoen, voidaan valita indeksit $m_1^{(1)} < m_2^{(1)} < m_3^{(1)} < ...$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} f_{m_k}^{(1)}(z_1) = w_1 .$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi merkitään $f_{m_i}^{(1)} = f_{1,i}$. Nyt jono $(f_{1,k}(z_2))_{k=1}^{\infty}$ on myöskin rajoitettu kompleksilukujono, joten voidaan valita sen kasautumispiste w_2 ja indeksit $m_1^{(2)} < m_2^{(2)} < m_3^{(2)} < ...$ jonosta $(m_k^{(1)})$ siten, että

$$\lim_{k\to\infty} f_{2,k}(z_2) = w_2 .$$

Jatkamalla tätä induktiivisesti saadaan kaikilla $l \in \mathbb{N}$ jono $(m_k^{(l)})$, jolle pätee

$$\lim_{k\to\infty} f_{l,k}(z_l) = w_l ,$$

siten, että jono $(m_k^{(l+1)})$ on jonon $m_k^{(l)}$ osajono. Merkitään kaikilla $k \geq 1$ $n_k = m_k^{(k)}$. Tällöin $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ ja jono (f_{n_k}) on jonon (f_n) aito osajono. Lisäksi kaikilla $l \geq 1$ jono (f_{n_k}), lukuun ottamatta mahdollisesti $l-1$ ensimmäistä termiä, on jonon $(f_{l,k})$ osajono. Tällöin

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z_l) = \lim_{k\to\infty} f_{l,k}(z_l) = w_l$$

kaikilla $l \in \mathbb{N}$, eli jonolla $(f_{n_k}(\zeta))$ on raja-arvo kaikilla $\zeta \in S_0$. Tällöin Lauseen 4.4 nojalla (f_{n_k}) suppenee normaalisti U:ssa. Täten $\mathcal{F}$ on normaali U:ssa.

Oletetaan sitten, että $\mathcal{F}$ on normaali U:ssa. Osoitetaan ensin, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva U:ssa. Olkoon $z_0 \in U$. Nyt, jos $\mathcal{F}$ ei olisi yhtäjatkuva z_0:ssa, löytyisi sellainen $\epsilon > 0$, jolle ei löytyisi lukua $\delta > 0$ siten, että kaikilla $f \in \mathcal{F}$ pätisi

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

aina kun $|z - z_0| < \delta$. Erityisesti, valitsemalla $\delta = 1/n$, missä $n \in \mathbb{N}$, voidaan valita $f_n \in \mathcal{F}$ ja $z_n \in U$ siten, että

$$|z - z_n| < 1/n ,$$

mutta

$$|f_n(z_n) - f_n(z_0)| \geq \epsilon .$$

Oletuksen nojalla jonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}), joka suppenee normaalisti U:ssa kohti jotakin rajafunktiota f. Tällöin Lauseen 3.1 nojalla $f \in C(U)$, joten voidaan valita

$\delta > 0$ siten, että suljettu kiekko $K = \bar{B}(z_0, \delta) \subset U$ ja

$$|f(z) - f_(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

kun $z \in K$. Koska $f_n \to f$ tasaisesti K:ssa ja koska $z_{n_k} \to z_0$, voidaan valita $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_{n_k}(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}$$

kaikilla $z \in K$ siten, että $z_{n_k} \in K$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\epsilon &\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z_0)| \\
&\leq |f_{n_k}(z_{n_k}) - f(z_{n_k})| + |f(z_{n_k}) - f(z_0)| + |f(z_0) - f_{n_k}(z_{n_k})| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\,,
\end{aligned}$$

mikä on ristiriita. Siispä $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva U:ssa. Osoitetaan vielä, että $\mathcal{F}$ on pisteittäin rajoitettu U:ssa. Jos $\mathcal{F}$ ei olisi pisteittäin rajoitettu, olisi $z_0 \in U$ ja jono (f_n) $\mathcal{F}$:ssä siten, että $|f_n(z_0)| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Tällaisella jonolla ei kuitenkaan voisi olla (normaalisti) suppenevaa osajonoa, joten $\mathcal{F}$ ei voisi olla normaali U:ssa. Siispä $\mathcal{F}$ on pisteittäin rajoitettu. □

Arzèla-Ascolin lauseesta voidaan johtaa Montel'n lause, joka kertoo, että analyyttisen funktioperheen normaaliuden tarkastamiseen riittää osoittaa perheen lokaali rajoittuneisuus.

Lause 4.6. (Montel'n lause)
Olkoon $\mathcal{F}$ perhe analyyttisia funktioita, jotka ovat jatkuvia avoimessa joukossa U. Tällöin, jos $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu U:ssa, niin $\mathcal{F}$ on normaaliperhe U:ssa.

Todistus. Perhe $\mathcal{F}$ on selvästi pisteittäin rajoitettu U:ssa. Tällöin Arzèla-Ascolin lauseen 4.5 perusteella riittää osoittaa, että $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva U:ssa. Olkoon $z_0 \in U$ ja olkoon $r > 0$ siten, että suljettu kiekko $K = \bar{B}(z_0, 2r) \subset U$. Oletuksen nojalla on vakio $m = m(K) > 0$ siten, että $|f(\zeta)| < m$ kaikilla $f \in \mathcal{F}$ ja $\zeta \in K$. Olkoon $z \in B = B(z_0, r)$. Tällöin Cauchyn integraalikaavan 2.4 nojalla

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \\
&= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} d\zeta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 4\pi r \frac{m}{2r^2} |z - z_0| \\
&= \frac{m|z - z_0|}{r}\,.
\end{aligned}$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin voidaan valita $\delta = \min\{r, \frac{r\epsilon}{m}\}$, jolloin

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

kaikilla $f \in \mathcal{F}$, kun $|z - z_0| < \delta$. Siispä $\mathcal{F}$ on yhtäjatkuva z_0:ssa, mistä seuraa, että $\mathcal{F}$ on normaali U:ssa. □

5. Residylause ja sen seuraukset

Tämän luvun keskeisessä osassa on residylause, jolla on monia hyödyllisiä sovelluksia. Sanotaan, että piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f *eristetty erikoispiste*, mikäli on $r > 0$ siten, että f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$. Sanotaan, että funktio f on *analyyttinen joukossa G lukuun ottamatta eristettyjä erikoispisteitä*, mikäli on eristettyjen erikoispisteiden joukko $E \subset G$ siten, että E:lla ei ole kasautumispisteitä joukossa G ja f on analyyttinen joukossa $G - E$.

Olkoon nyt f funktio, jolla on eristetty erikoispiste pisteessä z_0. Tällöin f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$ jollakin $r > 0$. Siispä funktio voidaan esittää yksikäsitteisenä z_0-keskisenä Laurentin sarjana

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ .$$

Tällöin erikoispiste z_0 on

(i) *poistuva erikoispiste,*
mikäli $a_n = 0$ kaikille $n \in \mathbb{Z}_-$,
(ii) *napa,*
mikäli $a_n \neq 0$ vähintään yhdelle $n \in \mathbb{Z}_-$, mutta $\#\{n \in \mathbb{Z}_- : \ a_n \neq 0\} < \infty$,
(iii) *oleellinen erikoispiste,*
mikäli $\#\{n \in \mathbb{Z}_- : \ a_n \neq 0\} = \infty$.

Laurentin sarjan kerrointa a_{-1} kutsutaan funktion f *residyksi pisteessä* z_0. Sitä merkitään usein $\mathrm{Res}(z_0, f)$.

Lause 5.1. (Residylause)
Olkoon funktio f analyyttinen avoimessa joukossa U lukuun ottamatta eristettyjä erikoispisteitä, E f:n erikoispisteiden joukko U:ssa ja γ suljettu polku joukossa $U - E$. Tällöin

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in E} n(\gamma, z) Res(z, f) \ .$$

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.323-325]. □

Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ sanotaan olevan *avoin kuvaus*, mikäli kaikilla avoimilla joukoilla $U \subset D$ kuvajoukko $f(U)$ on avoin. Residylauseen avulla saadaan johdettua seuraava hyödyllinen tulos:

Lause 5.2. (Avoimen kuvauksen lause) *Jos funktio f on analyyttinen ja ei-vakio tasoalueessa D, f on alueen D avoin kuvaus. Erityisesti $f(D)$ on alue.*

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.347]. □

Kompleksianalyysissä analyyttistä injektiota kutsutaan *univalentiksi.* Univalenteilla funktioilla on muutamia mielenkiintoisia ominaisuuksia.

Lause 5.3. *Olkoon f analyyttinen funktio alueessa D. Jos f on univalentti D:ssa, niin $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$.*

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.347-348]. □

Kolmas hyödyllinen tulos kertoo normaalisti suppenevan funktiojonon ominaisuuksien periytymisestä rajafunktiolle.

Lause 5.4. *Olkoon* (f_n) *jono alueessa* D *analyyttisia ja univalentteja funktioita siten, että* $f_n \to f$ *normaalisti* D*:ssa. Tällöin* f *on joko univalentti tai vakio alueessa* D*.*

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.349]. □

Meromorfisella funktiolla tarkoitetaan tässä työssä funktiota, jolla ei ole määrittelyjoukossaan napaa pahempia erikoispisteitä. Siispä tällainen funktio on analyyttinen mahdollisia eristettyjä erikoispisteitä lukuunottamatta. Funktion f sanotaan olevan analyyttinen äärettömyydessä, mikäli yhdistetty funktio $f(\frac{1}{z})$ on analyyttinen 0:ssa. Funktiota, joka on meromorfinen laajennetussa kompleksitasossa $\widehat{\mathbb{C}}$, mutta jolla ei ole napoja, kutsutaan *holomorfiseksi* funktioksi.

Lause 5.5. *Jos* $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ *on holomorfinen funktio, niin* f *on vakio* $\widehat{\mathbb{C}}$*:ssä.*

Todistus. Koska f on analyyttisena funktiona jatkuva $\widehat{\mathbb{C}}$:ssä ja koska $\widehat{\mathbb{C}}$ on kompakti joukko, $f(\widehat{\mathbb{C}})$ on kompakti. Koska $f(z) \neq \infty$ kaikilla $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $f(\widehat{\mathbb{C}})$ on kompakti joukko $\mathbb{C}$:ssä. Tällöin $f(\widehat{\mathbb{C}})$ on erityisesti rajoitettu. Tällöin f: rajoittuma $\mathbb{C}$:hen on rajoitettu kokonainen funktio. Tällöin Liouvillen lauseen 2.11 nojalla f on vakio $\mathbb{C}$:ssä. Siispä jatkuvuuden nojalla f on vakio $\widehat{\mathbb{C}}$:ssä. □

6. Konformikuvaus

Konformikuvauksilla tarkoitetaan kompleksianalyysissä "kulmat säilyttäviä kuvauksia". Tällaisten kuvausten määrittelemiseksi täytyy ensin määritellä, mitä käyrien välisellä kulmalla tarkoitetaan.

Määritellään aluksi kompleksilukujen välinen kulma. Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$, $z, w \neq 0$. Tällöin funktiota $\theta(z, w) = \operatorname{Arg}(w/z)$, missä $\operatorname{Arg}(w/z) \in (-\pi, \pi]$, sanotaan *suunnatuksi kulmaksi* pisteestä z pisteeseen w.

Määritellään sitten säännöllisten käyrien välinen kulma. *Säännöllisellä käyrällä* tarkoitetaan polun α määrittelemää käyrää, missä $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ on sileä, yksinkertainen, ei-suljettu polku, jolle $\alpha'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$. Tällaista parametrisointia kutsutaan *säännölliseksi parametrisoinniksi.* Olkoot γ_α ja γ_β säännölliset käyrät, joilla on yhteinen piste $z_0 \in \mathbb{C}$ ja jotka ovat muuten erilliset. Tällöin sanotaan, että γ_α ja γ_β ovat *käyräviivaisen* z_0*-kärkisen kulman sivut* ja *suunnattu kulma* γ_α:sta γ_β:aan määritellään

$$\theta(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) = \theta(\alpha'(a), \beta'(c)) \ , \tag{6.1}$$

missä $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ ja $\beta : [c, d] \to \mathbb{C}$ ovat käyrien γ_α ja γ_β parametrisoinnit, joille pätee $\alpha(a) = z_0 = \beta(c)$.

Määritellään seuraavaksi eräs konformikuvausten kannalta tärkeä käsite, *diffeomorfismi.* Olkoon U avoin joukko ja $f : U \to \mathbb{C}$, $f \in C^1(U)$. Merkitään $f = u + iv$, missä u on funktion reaaliosa ja v imaginääriosa. Tällöin funktion f *Jakobiaani* J_f on jatkuva, reaaliarvoinen funktio, joka määritellään

$$J_f(z) = \partial_x u(z) \partial_y v(z) - \partial_y u(z) \partial_x v(z) \ ,$$

joka voidaan z- ja $\bar{z}$-derivaattojen avulla kirjoittaa muodossa

$$J_f(z) = |\partial_z f(z)|^2 - |\partial_{\bar{z}} f(z)|^2 \ .$$

Mikäli f on derivoituva pisteessä $z_0 \in U$, niin $\partial_z f(z) = f'(z_0)$ ja $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$, jolloin

$$J_f(z_0) = |f'(z_0)|^2 \ .$$

Määritelmä 6.1. Alueessa $D \subset \mathbb{C}$ määritelty *univalentti* (analyyttinen injektio) funktio $f : D \to \mathbb{C}$, $f \in C^1(D)$ on *alueen D diffeomorfismi* (tai C^1*-diffeomorfismi*) *kuvajoukolleen f(D)*, mikäli $J_f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$.

Huomataan, että diffeomorfismille f pätee joko $J_f(z) > 0$ kaikilla $z \in D$ tai $J_f < 0$ kaikilla $z \in D$, sillä D on yhtenäinen joukko ja f analyyttisena funktiona jatkuva kaikkialla D:ssa. Mikäli J_f on positiivinen, funktiota kutsutaan *suunnan säilyttäväksi* ja mikäli J_f on negatiivinen, sitä kutsutaan *suunnan kääntäväksi.*

Olkoon nyt $f : D \to \mathbb{C}$ diffeomorfismi ja γ säännöllinen käyrä D:ssa. Tällöin myös $f(\gamma)$ on säännöllinen käyrä. Tämän osoittamiseksi tarkastellaan γ:n säännöllistä parametrisointia $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = x(t) + iy(t)$. Koska f on univalentti funktio $C^1(D)$:ssa, $\beta(t) = f(\alpha(t))$ määrittelee sileän, yksinkertaisen, ei-suljetun polun. Jos olisi $\beta'(t_0) = 0$ jollekin $t_0 \in [a, b]$, voitaisiin kirjoittaa $f = u + iv$ ja ketjusäännön nojalla saataisiin

$$0 = \beta'(t_0) = \partial_x u(\alpha(t_0)) x'(t_0) + \partial_y u(\alpha(t_0)) y'(t_0) + i[\partial_x v(\alpha(t_0)) x'(t_0) + \partial_y v(\alpha(t_0)) y'(t_0)] \ ,$$

mistä seuraisi, että

$$\partial_x u(\alpha(t_0)) x'(t_0) + \partial_y u(\alpha(t_0)) y'(t_0) = 0$$

ja

$$\partial_x v(\alpha(t_0))x'(t_0) + \partial_y v(\alpha(t_0))y'(t_0) = 0 \ .$$

Nyt vaatimuksesta $J_f \neq 0$ kuitenkin seuraisi, että $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, mikä tarkoittaisi, että $\alpha'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) = 0$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä α oli γ:n säännöllinen parametrisointi. Siispä täytyy olla $\beta'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$, jolloin β määrittelee $f(A)$:n säännöllisen parametrisoinnin.

Siispä diffeomorfismi $f : D \to \mathbb{C}$ kuvaa alueen D käyrälineaarisen kulman, jonka sivut ovat γ_α ja γ_β, alueen $D' = f(D)$ käyrälineaariseksi kulmaksi, jonka sivut ovat $f(\gamma_\alpha)$ ja γ_β.

Nyt voidaan määritellä *konformikuvaus*. Tässä työssä konformikuvauksen määritelmä rajataan ainoastaan diffeomorfismeihin. Diffeomorfismia $f : D \to \mathbb{C}$ sanotaan *kulmat säilyttäväksi* (eli *isogonaaliseksi*) pisteessä $z_0 \in D$, mikäli

$$|\theta(\gamma_\alpha, \gamma_\beta)| = |\theta(f(\gamma_\alpha), f(\gamma_\beta))| \ , \tag{6.2}$$

aina kun γ_α ja γ_β ovat alueen D käyrälineaarisen z_0-kärkisen kulman sivut. Jos $J_f(z_0) > 0$, ehto (6.2) saadaan muotoon

$$\theta(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) = \theta(f(\gamma_\alpha), f(\gamma_\beta)) \ , \tag{6.3}$$

ja jos $J_f(z_0) < 0$, se saadaan muotoon

$$\theta(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) = \theta(f(\gamma_\beta), f(\gamma_\alpha)) \ . \tag{6.4}$$

Kun (6.3) pätee, kuvausta sanotaan *konformiseksi* pisteessä z_0 ja kun (6.4) pätee, sitä sanotaan *antikonformiseksi* z_0:ssa. Aikaisempien havaintojen nojalla ei selvästikään ole mahdollista, että f olisi konforminen yhdessä D:n pisteessä ja antikonforminen toisessa. Jos f on konforminen jokaisessa pisteessä $z_0 \in D$, kuvausta sanotaan alueen D konformikuvaukseksi.

Seuraava tulos liittää edellä olevan määrittelyn analyyttisiin funktioihin.

Lause 6.2. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon $f : D \to f(D)$ diffeomorfismi. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä pisteessä $z_0 \in D$:*

(i) f on differentioituva z_0:ssa
(ii) f on isogonaalinen z_0:ssa ja $J_f(z_0) > 0$
(iii) f on konforminen z_0:ssa.

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.380-382]. □

Lauseen 6.2 globaali versio tekee konformikuvausten teoriasta analyyttisten funktioiden teorian erityisen osa-alueen.

Lause 6.3. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue. Funktio $f : D \to f(D)$ on alueen D konformikuvaus jos ja vain jos se on univalentti analyyttinen funktio.*

Todistus. Todistetaan vain lauseen toinen suunta, eli ehdon riittävyys. Toisen suunnan todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.382].

Olkoot nyt γ_1 ja γ_2 säännöllisiä polkuja alueessa D siten, että $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ ja $f : D \to f(D)$ analyyttinen funktio, jolle $f'(z_0) \neq 0$. Huomataan, että tällöin

$$(f \circ \gamma_i)'(0) = f'(z_0)\gamma_i'(0) \neq 0 \ ,$$

missä $i \in \{1, 2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\theta(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) &= \mathrm{Arg}((f \circ \gamma_1)'(0)) - \mathrm{Arg}((f \circ \gamma_2)'(0)) \\ &= \mathrm{Arg}(f'(z_0)\gamma_1'(0)) - \mathrm{Arg}(f'(z_0)\gamma_2'(0)) \\ &= \mathrm{Arg}(f'(z_0)) + \mathrm{Arg}(\gamma_1'(0)) - \mathrm{Arg}(f'(z_0)) - \mathrm{Arg}(\gamma_2'(0)) \\ &= \mathrm{Arg}(\gamma_1'(0)) - \mathrm{Arg}(\gamma_2'(0)) \\ &= \theta(\gamma_1, \gamma_2)\ ,\end{aligned}$$

joten tällainen kuvaus säilyttää säännöllisten polkujen välisen kulman pisteessä z_0. Siispä univalentti analyyttinen funktio todellakin säilyttää säännöllisten polkujen väliset kulmat, eli on konformikuvaus. □

Lauseesta 6.3 seuraa, että konformikuvausten yhdistetty kuvaus on konformikuvaus. Lisäksi konformikuvauksen käänteiskuvaus on konformikuvaus.

Lauseen 6.3 avulla voidaan määritellä konformikuvaus yksikköpallolta itselleen.

Lause 6.4. *Funktiot, jotka kuvaavat yksikköpallon $B = B(0, 1)$ konformisesti itselleen ovat funktioita $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jotka ovat muotoa*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z + c}{1 + \bar{c}z}\ ,$$

missä $\theta \in \mathbb{R}$ ja $c \in \mathbb{C}$ siten, että $|c| < 1$.

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.388-389]. □

7. Riemannin kuvauslause

Riemannin kuvauslauseen mukaan jokainen yhdesti yhtenäinen alue kompleksitasossa voidaan kuvata konformisesti yksikkökiekolle. Ennen Riemannin kuvauslauseen formaalia muotoilua ja sen todistusta muotoillaan ensin muutama aputulos.

Lemma 7.1. *Olkoon $f : D \to f(D)$ konformikuvaus, missä $D \subset \mathbb{C}$ on yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin $D' = f(D)$ on myös yhdesti yhtenäinen alue.*

Todistus. Jos $D' = \mathbb{C}$, väite on selvä. Oletetaan siis, että $D \neq \mathbb{C}$. Koska f on ei-vakio analyyttinen funktio, D' on avoimen kuvauksen lauseen 5.2 nojalla alue. Nyt riittää osoittaa, että $n(\beta, w) = 0$ aina, kun $w \in \mathbb{C} - D'$ ja β on suljettu, paloittain sileä polku D':ssa. Olkoon siis $w \in \mathbb{C} - D'$ ja $\beta : [a, b] \to D'$ suljettu ja paloittain sileä. Määritellään $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma = f^{-1} \circ \beta$, jolloin $\beta(t) = f(\gamma(t))$. Tällöin γ on suljettu, paloittain sileä polku D:ssa. Koska D on yhdesti yhtenäinen, γ on 0-homologinen D:ssa. Koska f on konformikuvaus, tiedetään, että f^{-1} on analyyttinen. Koska $w \notin D'$, funktio $f'/(f - w)$ on analyyttinen D:ssa. Cauchyn lauseen 2.2 nojalla

$$0 = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - w} dt = \int_a^b \frac{\beta'(t)}{\beta(t) - w} dt = \int_\beta \frac{d\zeta}{\zeta - w} = 2\pi i n(\beta, w) ,$$

mistä seuraa, että $n(\beta, w) = 0$. □

Toisen aputuloksen nojalla yhdesti yhtenäinen kompleksitason alue, joka ei ole koko kompleksitaso, voidaan kuvata konformisesti alueelle, joka sisältyy yksikkökiekkoon.

Lemma 7.2. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue, $D \neq \mathbb{C}$, ja olkoon $z_0 \in D$. Tällöin on olemassa konformikuvaus $f : D \to f(D)$, joka toteuttaa ehdot*

(i) alue $f(D) \subset B = B(0, 1)$
(ii) $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.

Todistus. Osoitetaan lauseen olemassaoloväite yhdistetyllä funktiolla $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, jolla on halutut ominaisuudet ja missä funktiot f_i ovat konformikuvauksia, jotka tullaan seuraavaksi määrittelemään. Valitaan aluksi $b \in \mathbb{C} - D$ ja määritellään $f_1 : D \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = z - b$. Koska D on $\mathbb{C}$:n aito osajoukko, tällainen valinta voidaan tehdä. Kuvaus f_1 kuvaa D:n yhdesti yhtenäiseksi alueeksi $D_1 = f(D)$, joka ei sisällä origoa. Valitaan sitten funktioksi f_2 mikä tahansa logaritmin haara D_1:ssa. Tällaisen haaran olemassaolo seuraa Lauseesta 2.13. Lisäksi tiedetään, että f_2 on univalentti. Olkoon nyt $w_0 \in D_2 = f_2(D_1)$ ja $r > 0$ siten, että $\bar{B}(w_0, r) \subset D_2$. Valitaan $\tilde{w}_0 = w_0 + 2\pi i$. Tällöin $\bar{B}(\tilde{w}_0, r) \cap D_2 = \emptyset$. Jos olisi piste $\tilde{w} \in \bar{B}(\tilde{w}_0, r) \cap D_2$, niin $\tilde{w}$ olisi toisaalta muotoa $\tilde{w} = f_2(\tilde{z})$ jollakin $\tilde{z} \in D_1$ ja toisaalta muotoa $\tilde{w} = w + 2\pi i$ jollakin $w \in \bar{B}(w_0, r)$. Lisäksi tietenkin olisi myös $w = f_2(z)$ jollakin $z \in D_1$. Tällöin

$$\tilde{z} = e^{f_2(\tilde{z})} = e^{\tilde{w}} = e^{w + 2\pi i} = e^w = e^{f_2(z)} = z .$$

Tästä seuraisi, että $w = f_2(z) = f_2(\tilde{z}) = \tilde{w} = w + 2\pi i$, mikä on selvästi ristiriita. Siispä $\bar{B}(\tilde{w}_0, r) \cap D_2 = \emptyset$. Tällöin siis $|z - \tilde{w}_0| > r$ kaikilla $z \in D_2$. Olkoon nyt

$$f_3 = \frac{r}{z - \tilde{w}_0} .$$

Tällöin $D_3 = f_3(D_2) \subset B$. Funktio $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ muodostaa nyt konformikuvauksen $D \to B$. Asetetaan seuraavaksi $c = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z_0)$. Lauseen 6.4 nojalla funktio

$f_4 : B \to B$,

$$f_4(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z} \, ,$$

kuvaa B:n konformisesti itselleen. Lisäksi huomataan, että $f_4(c) = 0$. Nyt yhdistetty funktio $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ kuvaa D:n konformisesti B:lle ja $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z_0) = 0$. Lopulta, Lauseen 5.3 nojalla $d = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0) \neq 0$. Merkitään $u = e^{-i\mathrm{Arg} d}$ ja määritellään $f_5 : B \to \mathbb{C}$, $f_5(z) = uz$. Tällöin $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ muodostaa konformikuvauksen D:lta alueelle $f(D) \subset B$. Tälle funktiolle pätee $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) = f_5'(0)(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)'(z_0) = ud = |d| > 0$. Nyt siis f on konformikuvaus, jolla on lemmassa väitetyt ominaisuudet. □

Kolmannen aputuloksen mukaan, mikäli Lemman 7.2 kuvaus f ei kuvaa aluetta D koko yksikkökiekoksi, on olemassa toinen lemman ehdot täyttävä kuvaus, jonka derivaatta pisteessä Z_0 on suurempi kuin f:n derivaatta tässä pisteessä:

Lemma 7.3. *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue, $D \neq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ ja $f : D \to f(D)$ konformikuvaus, jolle pätee*

(i) $f(D) \subset B = B(0,1)$
(ii) $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.

Oletetaan, että $f(D) \neq B$. Tällöin on olemassa konformikuvaus $g : D \to \mathbb{C}$, joka toteuttaa ehdot (i) ja (ii) ja $g'(z_0) > f'(z_0)$.

Todistus. Merkitään $D_0 = f(D)$. Muodostetaan jälleen ehdot toteuttava g yhdistettynä funktiona $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$. Valitaan aluksi piste $b \in B - D_0$. Koska $0 = f(z_0) \in D_0$, niin $b \neq 0$. Lauseen 6.4 perusteella Möbius-kuvaus

$$g_1(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

kuvaa B:n konformisesti itselleen. Siispä g_1 kuvaa yhdesti yhtenäisen alueen $D_0 \subset B_0$ toiselle alueelle $D_1 = g_1(D_0) \subset B$. Alue D_1 ei sisällä origoa ($= g_1(b)$), mutta se sisältää pisteen $-b = g_1(0)$. Nyt

$$g_1'(z) = \frac{1 - \bar{b}z + \bar{b}(z - b)}{(1 - \bar{b}z)^2} \, ,$$

joten $g_1'(0) = 1 - |b|^2$.

Nyt Lause 2.13 takaa logaritmin haaran olemassaolon alueessa D_1. Valitaan joku tällainen haara ja merkitään sitä L:llä. Valitaan sitten funktioksi g_2 neliöjuuren haara $g_2(z) = \exp(L(z)/2)$. Tällöin $|g_2(z)| = \sqrt{|z|} < 1$ kaikilla $z \in D_1$ ja g_2 on univalentti D_1:ssa: jos $g_2(z) = g_2(\tilde{z})$, niin $z = (g_2(z))^2 = (g_2(\tilde{z}))^2 = \tilde{z}$. Toisin sanoen, g_2 on konformikuvaus D_1:lta yhdesti yhtenäiselle alueelle $D_2 = g_2(D_1) \subset B$. Merkitään $c = g_2(-b) \in D_2$ ja huomataan, että $g_2'(-b) = 1/(2g_2(-b)) = 1/(2c)$. Lopuksi valitaan $g_3 : B \to B$ siten, että

$$g_3(z) = \frac{u(z - c)}{1 - \bar{c}z} \, ,$$

missä $u = e^{i\mathrm{Arg} c}$. Alue $D_3 = g_3(D_2) \subset B$ ja $0 = g_3(c) \in D_3$ ja lisäksi

$$g_3'(z) = \frac{(1 - \bar{c}z)u - u(z - c)(-\bar{c})}{(1 - \bar{c}z)^2} = \frac{u(1 - |c|^2)}{(1 - \bar{c}z)^2} \, ,$$

mistä seuraa, että

$$g_3'(c) = \frac{u}{1-|c|^2} \, .$$

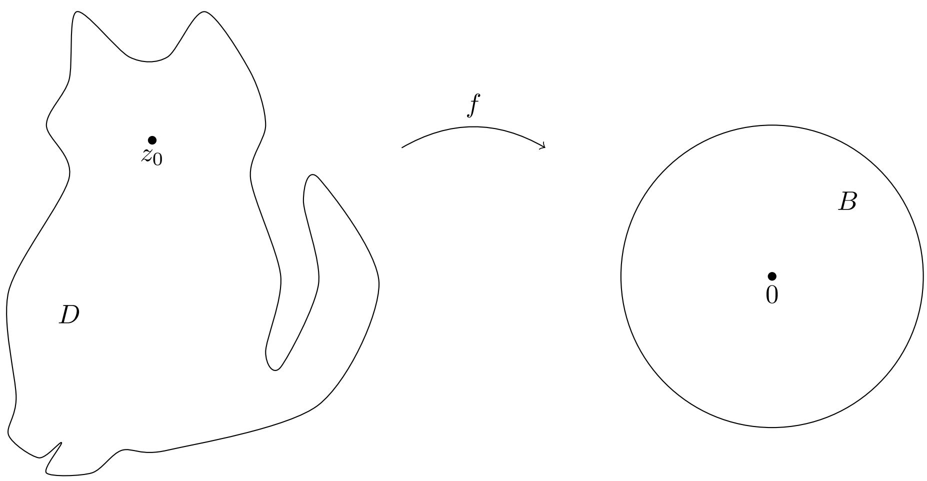
Yhdistetty kuvaus $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ f$ kuvaa D:n konformisesti alueelle D_3 ja lisäksi sille pätee $g(z_0) = 0$ ja

$$\begin{aligned} g'(z_0) = g_3'(c)g_2'(-b)g_1'(0)f'(z_0) &= \left(\frac{u}{1-|c|^2}\right)\left(\frac{1}{2c}\right)(1-|b|^2)f'(z_0) \\ &= \left(\frac{1+|c|^2}{2|c|}\right)f'(z_0) > f'(z_0) \, , \end{aligned}$$

koska $u/c = 1/|c|$, $|c|^2 = |g_2(-b)|^2 = |b|$ ja $1+|c|^2 > 2|c|$. Siispä haluttu kuvaus on löydetty. □

Nyt voidaan muotoilla ja todistaa Riemannin kuvauslause näiden edellä määriteltyjen aputulosten sekä aikaisempien lukujen tulosten avulla. Tässä esitelty Riemannin kuvauslause poikkeaa alkuperäisestä Riemannin muotoilemasta lauseesta muun muassa siten, että kuvajoukon vaaditaan olevan yksikkökiekko. Lisäksi todistus poikkeaa Riemannin alkuperäisestä todistuksesta joiltain osin. Itse asiassa Riemannin alkuperäinen todistus on osoittautunut virheelliseksi [7, p.418].

Lause 7.4. (Riemannin kuvauslause)
Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ yhdesti yhtenäinen alue, $D \neq \mathbb{C}$, ja olkoon $z_0 \in D$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen konformikuvaus $f : D \to B = B(0,1)$, joka toteuttaa ehdot $f(z_0) = 0$ ja $f'(z_0) > 0$.



Kuva 1

Todistus. Olkoon

$$\mathcal{F} = \{f : D \to B; \text{ univalentti }, f(z_0) = 0 \text{ ja } f'(z_0) > 0\} \, .$$

Tällöin Lemman (7.3) nojalla $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Nyt, koska D on avoin, voidaan valita $r_0 > 0$ siten, että $B(z_0, r_0) \subset D$. Olkoon $f \in \mathcal{F}$. Tällöin f on Lauseen (6.3) nojalla analyyttinen $B(z_0, r_0)$:ssa, joten erityisesti f on jatkuva. Toisin sanoen

$$\mathcal{F} \subset C(D) = \{f : f \text{ jatkuva } D\text{:ssa}\} \, .$$

Nyt, jos $f \in \mathcal{F}$, niin $f(z) \in B = B(0,1)$ kaikilla $z \in D$. Tällöin siis $|f(z)| < 1$ kaikilla $z \in D$. Nyt Cauchyn estimaatin 2.10 nojalla

$$|f'(z_0)| \leq 1! \times 1 \times r^{-1} = r^{-1} .$$

Tällöin siis

$$\{f'(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$$

on rajoitettu, epätyhjä positiivisten reaalilukujen joukko. Niinpä joukolla on pienin yläraja. Merkitään sitä

$$l = \sup\{f'(z_0) : f \in \mathcal{F}\} .$$

Valitaan nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$ funktio $f_n \in \mathcal{F}$ siten, että

$$l - \tfrac{1}{n} \leq f_n'(z_0) \leq l . \tag{7.1}$$

Nyt kaikki funktiot $f \in \mathcal{F}$ ovat selvästi rajoitettuja kaikissa D:n kompakteissa osajoukoissa. Erityisesti kaikille kompakteille joukoille $K \subset D$ pätee $|f(z)| < 1$ kaikilla $z \in K$ kaikilla $f \in \mathcal{F}$, joten perhe $\mathcal{F}$ on lokaalisti rajoitettu D:ssa. Tällöin Montel'n lauseen 4.6 perusteella $\mathcal{F}$ on normaaliperhe D:ssa. Tällöin siis normaalin aliperheen määritelmän nojalla jonolla (f_n) on osajono (f_{n_k}), jolle pätee $f_{n_k} \to f$ normaalisti D:ssa jollekin f. Tällöin Lauseen 3.6 nojalla f on analyyttinen D:ssa. Lisäksi

$$f(z_0) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(z_0) = 0$$

ja edelleen Lauseen 3.6 ja vaatimuksen (7.1) nojalla

$$f'(z_0) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}'(z_0) = l > 0 .$$

Erityisesti siis f ei ole vakio D:ssa. Lauseen 5.4 nojalla f on siis univalentti D:ssä.

Selvästi $f(D) \subset \bar{B}$. Avoimen kuvauksen lauseen 5.2 nojalla $f(D)$ on alue, eli erityisesti avoin. Siispä täytyy olla $f(D) \subset B$. Nyt siis $f \in \mathcal{F}$. Nyt lauseen olemassaoloväitteen todistamiseksi riittää osoittaa, että $f(D) = B$.

Nyt, jos olisi $f(D) \neq B$, niin Lemman 7.3 nojalla löytyisi kuvaus $g \in \mathcal{F}$, jolle pätee

$$g'(z_0) > f'(z_0) = l ,$$

mikä on ristiriita, sillä l oli valittu supremumiksi derivaatoista $f'(z_0)$, $f \in \mathcal{F}$. Siispä täytyy olla, että $f(D) = B$, eli f kuvaa joukon D konformisesti joukolle B. Siispä olemassaolo on todistettu.

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi oletetaan, että on toinen konformikuvaus $g : D \to B$, $g(D) = B$, jolle pätee $g(z_0) = 0$ ja $g'(z_0) > 0$. Määritellään funktio $\varphi : B \to B$, $\varphi = g \circ f^{-1}$. Nyt funktio φ kuvaa joukon B konformisesti itselleen ja φ:lle pätee

$$\varphi(0) = g \circ f^{-1}(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_0) = 0$$

ja

$$\varphi'(0) = (g \circ f^{-1})'(0) = g'(f^{-1}(0))(f^{-1})'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} > 0 .$$

Lauseen 6.4 nojalla konformikuvaukset φ, jotka kuvaavat B:n itselleen, ovat muotoa

$$\varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z + c}{1 + \bar{c}z} .$$

Nyt, koska $\varphi(0) = 0$, tästä seuraa, että $c = 0$. Siispä φ on muotoa

$$\varphi(z) = e^{i\theta} z ,$$

eli kierto origon ympäri. Nyt pitää olla $\varphi'(0) > 0$, joten

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = e^{i\theta} > 0 \\ \Rightarrow \theta = n2\pi, n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \varphi(z) = z\ . \end{aligned}$$

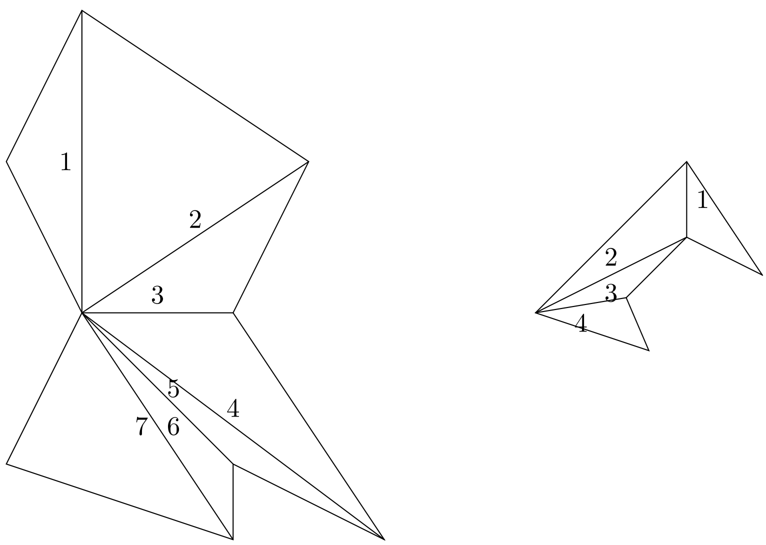
Siispä $g(z) = \varphi(f(z)) = f(z)$ kaikilla $z \in D$. Siispä $g = f$, joten yksikäsitteisyys on todistettu. $\square$

8. Konformikuvaukset monikulmioille

8.1. **Monikulmiot.** n-kulmaisen monikulmion reuna voidaan määritellä suljettuna, yksinkertaisena polkuna $\gamma = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + ... + [z_{n-1}, z_n] + [z_n, z_1]$, missä kaikille $j = 1, ..., n-1$ pätee, etteivät pisteet z_j, z_{j+1} ja z_{j+2} sijaitse samalla suoralla (kun $j = n-1$, määritellään $z_{j+2} = z_{n+1} = z_1$). Tällöin joukkoa $P = \bar{D}$, missä D on polun γ määräämän käyrän $|\gamma|$ sisään jäävä alue, sanotaan *suljetuksi monikulmioksi kärkinään* $z_1, z_2, ..., z_n$. Tässä oletetaan, että polku γ on positiivisesti suunnistettu alueen D suhteen. Merkitään pisteitä z_j ja z_{j+1} yhdistävän janan parametrisointia symbolilla λ_j. Tällöin polkuja $\lambda_1, ..., \lambda_n$ kutsutaan monikulmion P *sivuiksi*. Monikulmion P sisäkulmaa kärjessä z_j merkitään $\alpha_j \pi$, missä $0 < \alpha_j < 2$. Huomataan, että $\alpha_j \neq 1$ aikaisempien vaatimusten nojalla. Geometrian tulosten nojalla nähdään, että

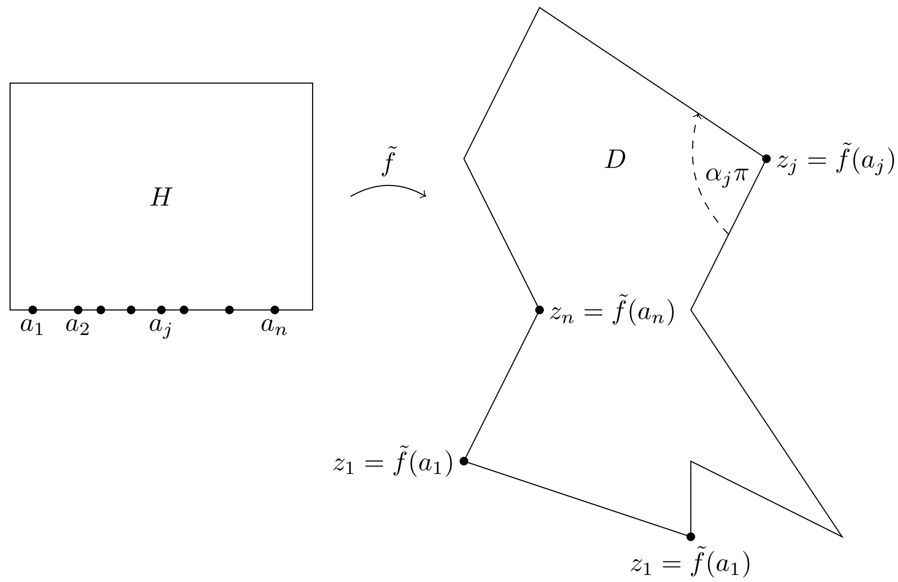
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n - 2\,. \tag{8.1}$$

Tämä seuraa siitä, että n-kulmio voidaan jakaa $n-2$:een kolmioon, kuten Kuvan 2 yhdeksän- ja kuusikulmiot. Monikulmion kulmien summa saadaan tällöin $n-2$:n kolmion kulmien summana. Koska tiedetään, että kolmion kulmien summa on π, väite seuraa tästä.



Kuva 2

Tässä luvussa tutkitaan, miten puolitaso $H = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ saadaan kuvattua konformisesti monikulmion P sisukselle D. Luvun loppupuolella esitellään Schwarzin ja Christoffelin kaava, joka antaa konkreettisen esityksen tällaiselle kuvaukselle. Kuvaus on esitetty Kuvassa 3.



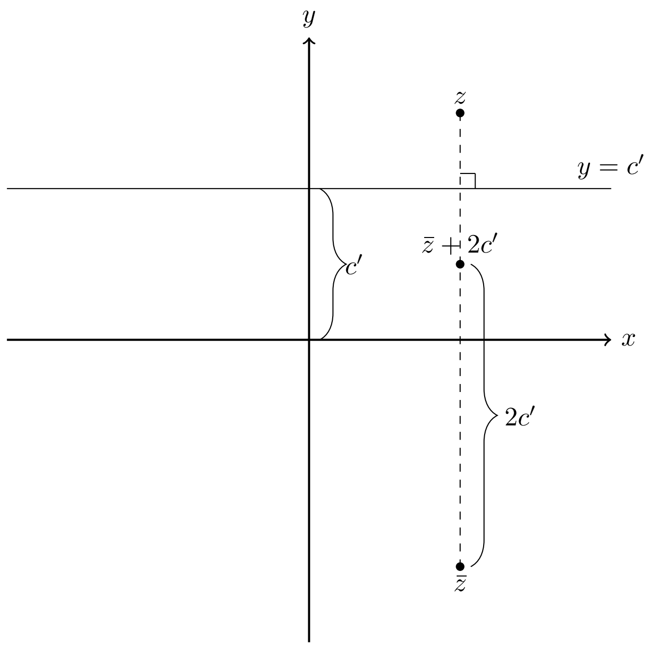
KUVA 3

8.2. **Peilaus suoran suhteen.** Peilauksella suoran L suhteen tarkoitetaan kuvausta ρ, joka kuvaa pisteen z pisteeksi $\rho(z)$ pisteen z kautta kulkevalle, suoraa L vastaan kohtisuoralle suoralle suoran L vastakkaiselle puolelle siten, että $d(z, L) = d(\rho(z), L)$ [3]. Kompleksianalyysissä usein vastaan tuleva peilaus on kompleksikonjugointi $z \mapsto \bar{z}$, eli peilaus reaaliakselin suhteen. Tässä kappaleessa tutkitaan hieman peilauksia muiden suorien suhteen. Jos kompleksitason pisteet esitetään muodossa $z = x + iy$, kompleksitason suorat ovat muotoa $ax + by = c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$. Muotoillaan nyt yhtälöt peilauksille tällaisten suorien suhteen.

Jos $a = 0$, suora on muotoa $y = c/b \equiv c'$, jolloin peilaus suoran suhteen on selvästi muotoa

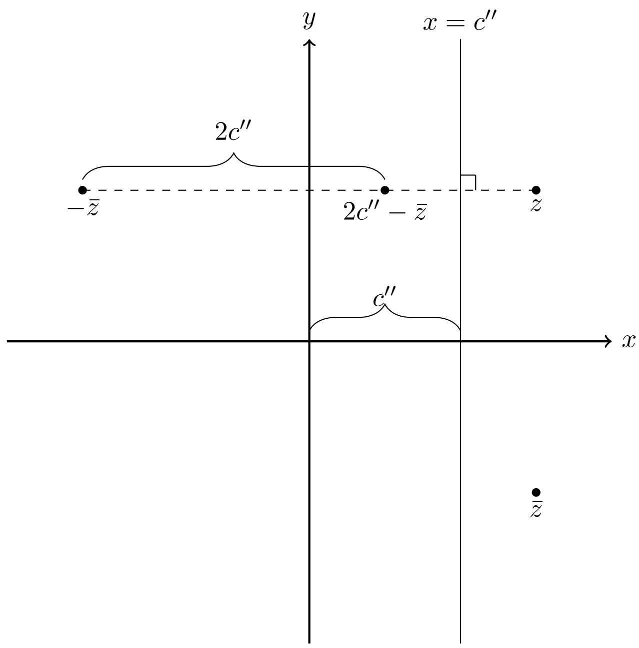
$$z \mapsto \bar{z} + 2c' \,.$$

(Ks.Kuva 4).



Kuva 4. Peilaus suoran $y = c'$ suhteen.

Jos taas $b = 0$, suora on muotoa $x = c/a \equiv c''$, jolloin peilaus saadaan muotoon
$$z \mapsto 2c'' - \bar{z}\ .$$
(Ks. Kuva 5)



Kuva 5. Peilaus suoran $x = c''$ suhteen.

Voidaan siis olettaa, että $a, b \neq 0$. Tällöin peilaus suoran suhteen saadaan yhdistettynä kuvauksena siirroista, kierroista ja peilauksesta reaaliakselin suhteen: Siirretään ensin suora kulkemaan origon kautta kuvauksella

$$z \mapsto z - i\tfrac{c}{b}\ .$$

Tällöin alkuperäinen suora kuvautuu suoraksi $ax + by = 0$. Kierretään sitten tämä suora reaaliakselille. Huomataan, että suora $ax+by = 0$ on vektorin $b-ai$ suuntainen. Tällöin suora voidaan kiertää reaaliakselille kertomalla pisteen $b + ai$ suuntaisella normitetulla vektorilla. Siispä kierto voidaan kirjoittaa muodossa

$$z \mapsto \frac{b+ai}{a^2+b^2}z = \frac{z}{b-ai}\ .$$

Nyt piste $z \in \mathbb{C}$ voidaan peilata reaaliakselin suhteen kuvauksella

$$z \mapsto \bar{z}\ .$$

Tämän jälkeen kierretään reaaliakseli takaisin suoraksi $ax + by = 0$ kuvauksella

$$z \mapsto (b-ai)z$$

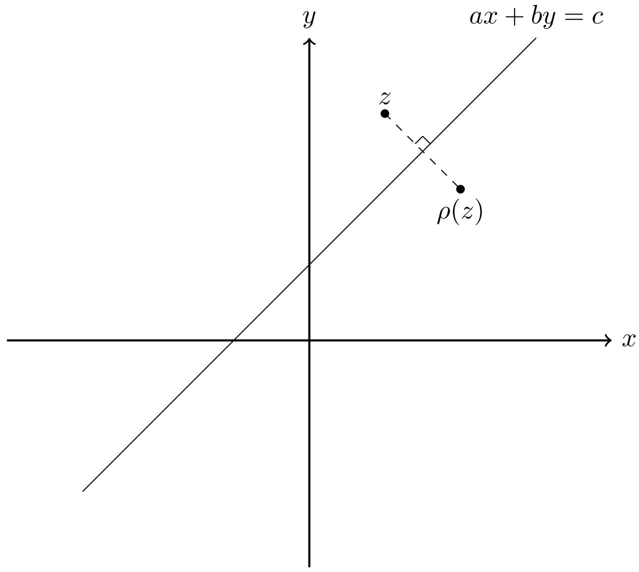
ja siirretään tämä suora takaisin alkuperäiselle suoralle kuvauksella

$$z \mapsto z + i\tfrac{c}{b}\ .$$

Siispä kaiken kaikkiaan peilaus suoran $ax + by = c$ suhteen on muotoa

$$z \mapsto (b-ai)\overline{\left(\frac{z - i\frac{c}{b}}{b-ai}\right)} + i\frac{c}{b} = \frac{2ci + (b-ai)\bar{z}}{b+ai}\ .$$

Peilaus suoran suhteen on esitetty Kuvassa 6



KUVA 6. Peilaus suoran $ax + by = c$ suhteen.

Jos nyt $a_x+b_1y = c_1$ ja $a_2x+b_2y = c_2$ ovat suoria kompleksitasossa ja kuvaukset ρ_1 ja ρ_2 peilaukset niiden suhteen, huomataan, että $\rho_1 \circ \rho_1(z) = c'z+c''$ joillain $c', c'' \in \mathbb{C}$.

8.3. **Peilaus ympyrän suhteen.** Ympyrä S laajennetussa kompleksitasossa on joko tavallinen kompleksitason ympyrä tai ∞:n kautta kulkeva ympyrä, mikä tarkoittaa, että $S = L \cup \{\infty\}$, missä L on suora $\mathbb{C}$:ssä. Olkoon nyt $S = S(z_0, r)$ tavallinen ympyrä laajennetussa kompleksitasossa $\widehat{\mathbb{C}}$. Tällöin kuvausta $\rho_S : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$,

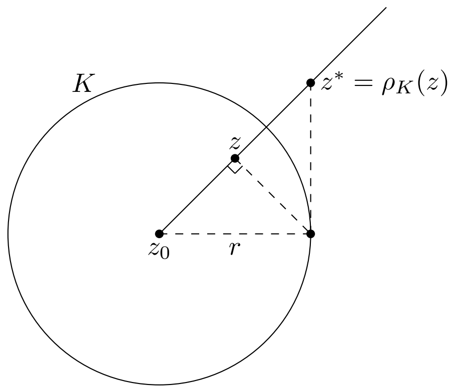
$$\rho_S(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0\bar{z} + r^2 - |z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} \ ,$$

kun $z \neq z_0, \infty$ ja $\rho_S(\infty) = z_0$ ja $\rho_S(z_0) = \infty$, kutsutaan peilaukseksi ympyrän S suhteen. Tällainen kuvaus kuvaa jokaisen pisteen $z \neq z_0, \infty$ yksikäsitteiseksi pisteeksi z^*, joka sijaitsee z_0:n ja z:n kautta kulkevalla suoralla. Jos taas $S = L \cup \{\infty\}$ jollakin suoralla L, joka toteuttaa yhtälön $Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$ joillain $C \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, peilaus ρ_S on muotoa

$$\rho_S(z) = (-\bar{B}/B)\bar{z} - (C/B) \ ,$$

kun $z \neq \infty$ ja $\rho_S(\infty) = \infty$. Tällöin siis ρ_S vastaa tavallista peilausta suoran suhteen.

Molemmissa tapauksissa ympyrän S pisteet kuvautuvat itselleen ja $\rho_S^2 = \mathbb{1}$, joten $\rho_S^{-1} = \rho_S$. Peilaus aidon ympyrän suhteen on esitetty Kuvassa 7. Peilaus äärettömyyden kautta kulkevan ympyrän suhteen palautuu Kuvan 6 tilanteeseen.



KUVA 7. Peilaus ympyrän K suhteen.

8.4. **Schwarzin ja Christoffelin kaava.** Esitellään seuraavaksi Schwarzin peilausperiaate, joka on analyyttisen jatkamisen 8.3 erikoistapaus.

Lause 8.1. (Schwarzin peilausperiaate)
Olkoot S ja $\tilde{S}$ ympyröitä laajennetussa kompleksitasossa $\widehat{\mathbb{C}}$ ja olkoot ρ ja $\tilde{\rho}$ peilaukset niiden suhteen. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue, joka on symmetrinen S:n suhteen (eli $\rho(D) = D$), olkoot G ja G^* joukon $D - S$ komponentit ja olkoon $I = D \cap S$. Olkoon $f : G \cup I \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, joka on analyyttinen G:ssä ja jolle pätee $f(I) \subset \tilde{S}$. Tällöin funktio $F : D \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , \ jos \ z \in G \cup I, \\ \tilde{\rho} \circ f \circ \rho(z) & , \ jos \ z \in G^*. \end{cases}$$

on meromorfinen funktio. Itse asiassa F on analyyttinen funktio, jollei $\tilde{S}$ ole aito ympyrä, jonka keskipiste kuuluu f:n kuvajoukkoon. Tällöin F:n ainoat navat ovat pisteissä $z \in G^*$, joille $f(\rho(z))$ on $\tilde{S}$:n keskipiste.

Todistus. Todistus perustuu Möbius-kuvauksiin ja vastaavaan tulokseen peilaukselle reaaliakselin suhteen. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [7, p.454]. □

Homeomorfismilla tarkoitetaan jatkuvaa funktiota, jonka käänteisfunktio on myös jatkuva. Homeomorfisen kuvauksen lähtö- ja maalijoukot ovat topologisessa mielessä samanlaiset.

Lemma 8.2. *Olkoon $f : H \to D$ konformikuvaus, missä $H = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ ja D on suljetun monikulmion $P \subset \mathbb{C}$ sisus. Olkoot lisäksi $-\infty < a_1 < a_2 < ... \leq \infty$ ne pisteet, jotka kuvautuvat monikulmion P kärjiksi kuvauksella $\tilde{f}$, joka on kuvauksen f homeomorfinen jatke joukkoon $\widehat{H}$. Tällöin funktio f''/f' voidaan jatkaa funktioksi g, joka on analyyttinen määrittelyjoukossaan $G = \mathbb{C} - \{a_1, a_2, ...a_n\}$.*

Todistus. Olkoot $I_1 = (-\infty, a_1), ..., I_n = (a_{n-1}, a_n)$ ja $I_{n+1} = (a_n, \infty)$ $\mathbb{R}$:n avoimia välejä (jos $a_n = \infty$, jätetään I_{n+1} huomiotta). Nyt $\tilde{f}(I_j)$ sisältyy johonkin P:n sivuun. Tällöin erityisesti $\tilde{f}(I_j) \subset L_j$ jollekin suoralle L_j. Olkoon ρ_j peilaus suoran L_j suhteen ja ρ peilaus reaaliakselin suhteen. Merkitään $H^* = \{z : \mathrm{Im} z < 0\}$ ja $D_j = H \cup I_j \cup H^*$. Tällöin Schwarzin peilausperiaatteen 8.1 nojalla funktio $\tilde{f}$ voidaan jatkaa I_j:lle, jolloin saadaan analyyttinen funktio $F_j : D_j \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$F_j(z) = \begin{cases} \tilde{f}(z) & , \text{jos } z \in H \cup I_j, \\ \rho_j \circ f \circ \rho(z) & , \text{jos } z \in H^*. \end{cases}$$

Funktio on selvästi univalentti H:ssa ja H^*:ssa. Erityisesti siis $F_j'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in H \cup H^*$ Lauseen 5.3 nojalla. Huomataan lisäksi, että $F_j'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in I_j$:

Olkoon $z_0 \in I_j$. Tällöin $w_0 = F_j(z_0) = \tilde{f}(z_0) \in \partial D \cap L_j$, mutta w_0 ei ole P:n kärki. Voidaan siis valita $s > 0$ siten, että $D \cap B(w_0, s)$ on puolikas kiekko, toinen joukon $B(w_0, s) - L_j$ komponenteista. Valitaan sitten $r > 0$ siten, että $\mathbb{R} \cap B(z_0, r) \subset I_j$ ja että $\tilde{f}(H \cap B(z_0, r)) \subset D \cap B(w_0, s)$. Joukko $F_j(H \cap B(z_0, r))$ on siten kokonaan suoran L_j jommallakummalla puolella, joten sen peilaus $F_j(H^* \cap B(z_0, r))$ on suoran vastakkaisella puolella. Siispä F_j on univalentti $B(z_0, r)$:ssa ja tällöin $F_j(z_0) \neq 0$, joten funktio $g = F_j''/F_j'$ on analyyttinen D_j:ssä.

Selvitetään seuraavaksi, miten funktiot F_j ja F_k liittyvät toisiinsa, kun $j \neq k$. Funktio F_j kuvaa joukon H^* konformisesti joukolle $\rho_j(D)$. Nyt joukossa $\rho_j(D)$ pätee

$$\begin{aligned} F_k \circ F_j^{-1} &= (\rho_k \circ f \circ \rho) \circ (\rho_j \circ f \circ \rho)^{-1} \\ &= \rho_k \circ f \circ \rho \circ \rho^{-1} \circ f^{-1} \circ \rho_j^{-1} \\ &= \rho_k \circ \rho_j^{-1} = \rho_k \circ \rho_j \ , \end{aligned}$$

sillä $\rho_j^{-1} = \rho_j$. Nyt, kuten kappaleessa 8.2 todettiin, $\rho_k \circ \rho_j$ on muotoa $\rho_k \circ \rho_j(z) = az + b$, missä $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Siispä voidaan kirjoittaa

$$F_k \circ F_j^{-1}(z) = az + b$$

kaikilla $z \in \rho_j(D)$, tai

$$F_k(z) = aF_j(z) + b$$

kaikilla $z \in H^*$. Viimeisen yhtälön nojalla

$$g_k = F_k''/F_k' = F_j''/F_j' = g_j$$

joukossa H^*, kun $j \neq k$. Määritellään joukkoon $G - \{a_1, ..., a_n\} = \bigcup_j D_j$ funktio g siten, että

$$g(z) = g_j(z) ,$$

kun $z \in D_j$. Tällöin g on analyyttinen funktio, joka kelpaa funktion f''/f' jatkeeksi. □

Seuraavan lemman todistuksessa tarvitaan analyyttisen jatkamisen periaatetta.

Lemma 8.3. (Analyyttisen jatkamisen periaate)
Jos funktiot h ja l ovat analyyttisiä alueessa D ja $h(z) = l(z)$ kaikilla $z \in A \subset D$, jossa A:lla on kasautumispiste D:ssä, niin $h(z) = l(z)$ kaikilla $z \in D$.

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [5, p.307]. □

Lemma 8.4. *Olkoot Lemman 8.2 oletukset voimassa. Olkoon $\alpha_j \pi$ monikulmion P sisäkulma kärjessä $\tilde{f}(a_j)$. Jos $a_j \neq \infty$, niin funktion g singulariteetti pisteessä a_j on yksinkertainen napa, jonka residy on $\alpha_j - 1$. Lisäksi $g(z) \to 0$, kun $z \to \infty$.*

Todistus. Merkitään $a = a_j$ ja $\alpha = \alpha_j$. Oletetaan, että $a \neq \infty$. Olkoon

$$h(z) = g(z) - \frac{\alpha - 1}{z - a}$$

kaikille $z \in G$. Näytetään, että jossain punkteeratussa kiekossa $B^*(a, \delta)$ funktio h voidaan esittää muodossa

$$h(z) = \frac{(\alpha + 1) f_0'(z) + (z - a) f_0''(z)}{\alpha f_0(z) + (z - a) f_0'(z)} , \tag{8.2}$$

missä f_0 on analyyttinen ja $\neq 0$ kiekossa $B(a, \delta)$. Koska

$$\frac{(\alpha + 1) f_0'(z) + (z - a) f_0''(z)}{\alpha f_0(z) + (z - a) f_0'(z)} \to \frac{(\alpha + 1) f_0'(z)}{\alpha f_0(z)} ,$$

kun $z \to a$, niin h:lla on poistuva erikoispiste pisteessä a. Siispä g:n singulariteetti pisteessä a on yksinkertainen napa, jonka residy on $\alpha - 1$.

Jos nyt $c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, ovat vakioita, niin kuvaus $\varphi = cf + d$ kuvaa H:n konformisesti monikulmaiselle alueelle D'. Kuvauksen φ homeomorfinen jatke $\widehat{H}$:hon on $\tilde{\varphi} = c\tilde{f} + d$, joten $\tilde{\varphi}$ kuvaa pisteet $a_1, a_2, ..., a_n$ monikulmion D' kärjiksi. Siispä Lemmaa 8.2 voidaan soveltaa kuvaukseen φ. Tällöin siis on olemassa funktio, joka on analyyttinen D:ssä ja yhtyy funktioon $\varphi''/\varphi' = f''/f'$ alueessa H. Tällöin Lemman 8.3 nojalla f''/f':n yksikäsitteinen analyyttinen jatke G:lle on funktio g, joka määriteltiin Lemman 8.2 todistuksessa. Siispä Lemmaa 8.2 voidaan soveltaa φ:n sijaan f:ään. Nyt siis voidaan olettaa, että $\tilde{f}$, f:n jatke $\widehat{H}$:hon, toteuttaa $\tilde{f}(a) = 0$ ja että reaaliakseli puolittaa P:n sisäkulman origossa. Näillä oletuksilla voidaan valita s, jolle

$$D \cap B(0, s) = \{w \in B(0, s) : |\mathrm{Arg} w| < \alpha\pi/2\} .$$

Nyt voidaan valita r, jolle

$$\tilde{f}(\widehat{H} \cap B(a, r)) \subset B(0, s) .$$

Määritellään funktio $z \mapsto z^a = e^{a Log z}$, missä $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. Lopulta voidaan määritellä funktio $\psi : \widehat{H} \cap B(a, r) \to \mathbb{C}$ siten, että

$$t = \psi(z) = (\tilde{f}(z))^{1/\alpha} .$$

Tällöin ψ on homeomorfismi, joka kuvaa joukon $H \cap B(a,r)$ konformisesti alueelle, joka sijaitsee puolitasossa $\{t : \mathrm{Re} z > 0\}$. Lisäksi se kuvaa välin $(a-r, a+r)$ avoimeksi väliksi imaginääriakselille.

Jatketaan nyt ψ imaginääriakselin toiselle puolelle peilaamalla. Tällöin saadaan konformikuvaus $\Psi : B(a,r) \to \mathbb{C}$, jolle $f(z) = (\Psi(z))^\alpha$ kaikilla $z \in H \cap B(a,r)$. Koska Ψ on analyyttinen $B(a,r)$:ssa ja sen ainoa nollakohta on a, Ψ voidaan kirjoittaa muodossa $\Psi(z) = (z-a)\Psi_0(z)$, missä Ψ_0 on analyyttinen ja $\neq 0$ $B(a,r)$:ssa. Siispä Lauseen 2.13 perusteella on olemassa $\log \Psi_0(z)$:n haara $B(a,r)$:ssa. Valitaan tällainen ja merkitään sitä L:llä. Voidaan olettaa, että $L(z) = \mathrm{Log}\Psi(z) - \mathrm{Log}(z-a)$ kaikilla $z \in H \cap B(a,r)$. Siispä kaikilla $z \in H \cap B(a,r)$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (\Psi(z))^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Log}\Psi(z)} = e^{\alpha[\mathrm{Log}\Psi(z) - \mathrm{Log}(z-a)] + \alpha \mathrm{Log}(z-a)} \\
&= (z-a)^\alpha e^{\alpha L(z)}\,.
\end{aligned}
$$

Huomataan, että $f_0(z) \equiv e^{\alpha L(z)}$ on analyyttinen kiekossa $B(a,r)$, jossa sillä ei ole nollakohtia. Nyt $f(z) = (z-a)^\alpha f_0(z)$ kaikilla $z \in H \cap B(a,r)$. Tällöin

$$
h(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{\alpha - 1}{z-a} = \frac{(\alpha+1)f_0'(z) + (z-a)f_0''(z)}{\alpha f_0(z) + (z-a)f_0'(z)}\,.
$$

Koska jälkimmäisen muodon nimittäjä ei häviä a:ssa, voidaan valita $\delta \in (0,r)$ siten, että jälkimmäinen esitysmuoto on analyyttinen kiekossa $B(a,\delta)$. Koska tämä funktio ja h vastaavat toisiaan $H \cap B(a,r)$:ssa ja koska molemmat ovat analyyttisia $B^*(a,\delta)$:ssa, niiden täytyy Lemman 8.3 nojalla yhtyä $B^*(a,\delta)$:ssa. Tällöin lauseen ensimmäinen osa saatiin todistettua.

Nyt riittää tarkastella, mitä tapahtuu $g(z)$:lle, kun $z \to \infty$. Määritellään $f_1 : H \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = f(-z^{-1})$. Tällöin f_1 on konformikuvaus $H \to D$, jolle $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}(\infty)$. Olkoon lisäksi $g_1(z) = g(-z^{-1})$. Tällöin

$$
g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2}{z} + \frac{f_1''(-z^{-1})}{z^2 f_1'(-z^{-1})}
$$

kaikille $z \in H$. Siispä H:ssa pätee

$$
g(z) = -\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} g_1\left(-\frac{1}{z}\right)\,. \tag{8.3}
$$

Nyt yhtälön (8.3) molemmat puolet ovat analyyttisiä funktioita joukossa $U = \mathbb{C} - \{0, a_1, ...a_n\}$. Koska nämä funktiot yhtyvät H:ssa, Lemman 8.3 nojalla (8.3) pätee U:ssa.

Nyt täytyy vielä tarkastella kahta erikoistapausta. Ensiksi, jos $\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}(\infty)$ ei ole P:n kärki, niin g_1 on analyyttinen origon lähellä, joten $g_1(-z^{-1}) \to g_1(0) \neq \infty$, kun $z \to \infty$. Tästä, yhdistettynä (8.3):n kanssa, seuraa, että $g(z) \to 0$, kun $z \to \infty$. Jos toisaalta $\tilde{f}_1(0)$ on P:n kärki, niin lemman ensimmäisen osan perusteella g_1:lla on yksinkertainen napa origossa. Siispä $z g_1(z) \to l$ jollekin $|l| \neq \infty$, kun $z \to 0$. Siten $z^{-1} g(-z^{-1}) \to -l$, kun $z \to \infty$. Siispä yhtälöstä (8.3) seuraa, että $g(z) \to 0$, kun $z \to \infty$. □

Seuraavassa lauseessa potenssifunktio on määritelty logaritmin päähaaran avulla, kuten Lemman 8.4 todistuksessa.

Lause 8.5. (Schwarzin ja Christoffelin kaava)
Olkoon $f : H \to D$ konformikuvaus, missä H on puolitaso $H = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ ja D suljetun suorakulmion $P \subset \mathbb{C}$ sisus. Olkoot $-\infty < a_2 < a_2 < ... < a_n \leq \infty$ pisteet, jotka kuvautuvat P:n kärjiksi f:n homeomorfisella jatkeella $\tilde{f} : \widehat{H} \to P$ ja olkoon $\alpha_j \pi$ P:n sisäkulma kärjessä $\tilde{f}(a_j)$. Tällöin on vakiot $C, C' \in \mathbb{C}$ siten, että

$$f(z) = C \int_i^z \prod_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)^{-\beta_k} d\zeta + C' \ , \tag{8.4}$$

missä $\beta_k = 1 - \alpha_k$, mikäli $a_n \neq \infty$. Mikäli $a_n = \infty$,

$$f(z) = C \int_i^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{-\beta_k} d\zeta + C' \ . \tag{8.5}$$

Todistus. Olkoon g funktiosta f konstruoitu funktio kuten Lemmassa 8.2. Olkoon h määritelty g:n määrittelyjoukossa G siten, että

$$h(z) = g(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} \ ,$$

jos $a_n \neq \infty$, ja

$$h(z) = g(z) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} \ ,$$

jos $a_n = \infty$. Tällöin h on analyyttinen G:ssä. Lemman 8.4 nojalla h:n singulariteetit pisteissä $a_1, a_2, ..., a_n$ ja ∞, ovat kaikki poistuvia singulariteetteja. Kun ne poistetaan, saadaan h:sta holomorfinen funktio $\widehat{\mathbb{C}}$:ssa. Tällöin Lauseen 5.5 nojalla h on vakio. Koska $h(\infty) = 0$, $h(z) = 0$ kaikille $z \in \mathbb{C}$. Tästä saadaan eksplisiittinen muoto funktiolle g.

Oletetaan, että $a_n \neq \infty$. Lauseen 2.13 nojalla voidaan valita $\log f'(z)$:n haara l alueessa H ja huomataan, että

$$l'(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = g(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{z - a_j} = \frac{d}{dz} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1) \mathrm{Log}(z - a_j)$$

tässä puolitasossa. Tällöin alueessa H

$$l(z) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1) \mathrm{Log}(z - a_j) + A$$

jollakin vakiolla $A \in \mathbb{C}$. Eksponentioimalla saadaan

$$f'(z) = e^{l(z)} = C \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{-\beta_n} \ ,$$

missä $C = e^A$. Väite seuraa tästä, sillä analyyttisen funktion f' primitiiviksi voidaan valita integraali 8.4. Tapaus $a_n = \infty$ voidaan todistaa samaan tapaan muuttamalla ainoastaan summien ylärajat. □

Koska integraalien (8.4) ja (8.5) integrandit ovat jatkuvia funktioita joukossa $\bar{H} - \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, integraalit saavat selvästi arvon $\tilde{f}(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{R} - \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, missä $\tilde{f}$ on funktion f homeomorfinen jatke. Jos taas $z = a_j$ jollakin $j \in \{1, ..., n\}$ tai $z = \infty$, niin integraalien (8.4) ja (8.5) oikeat puolet saavuttavat myöskin arvon $\tilde{f}(z)$, vaikka integraalista tuleekin mahdollisesti epäoleellinen. Näin käy, jos $z = a_j$ jollakin j ja vastaava $\alpha_j < 1$, tai jos $z = \infty$. Jälkimmäisessä tapauksessa voidaan valita integrointipoluksi $\gamma(t) = ti$, missä $1 \le t \le \infty$. Integraalien (8.4) ja (8.5) alaraja i on mielivaltaisesti valittu. Mikä tahansa muukin $\bar{H}$:n piste olisi käynyt alarajaksi. Tällöin ainoastaan vakio C' muuttuisi. Usein integraalit (8.4) ja (8.5) kirjoitetaankin muodossa

$$f(z) = C \int_0^z \prod_{k=1}^{n} (\zeta - a_k)^{-\beta_k} d\zeta + C' , \tag{8.6}$$

mikäli $a_n \neq \infty$ ja

$$f(z) = C \int_i^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - a_k)^{-\beta_k} d\zeta + C' , \tag{8.7}$$

mikäli $a_n = \infty$.

Esitellään seuraavaksi konkreettinen esimerkki Schwarzin ja Christoffelin kaavan käytöstä.

Esimerkki 8.6. *(Schwarzin kolmiofunktiot)*
Kuvataan ylempi puolitaso $H = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$ kolmiolle, jonka kulmat ovat $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi$ ja $\alpha_3\pi$, siten, että pisteet $z = 0, z = 1$ ja $z = \infty$ kuvautuvat kolmion kärjiksi $0, 1$ ja ic, missä $\mathrm{Im} c > 0$. Tällöin yhtälön (8.7) nojalla $f(z)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = C_1 \int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} d\zeta + C_2$$

joillain vakioilla C_1 ja C_2. Nyt, koska $f(0) = 0$ ja koska integraali häviää, kun $z \to 0$, täytyy olla $C_2 = 0$. Lisäksi, koska $f(1) = 1$, täytyy olla

$$C_1 = \frac{1}{\int_0^1 \zeta^{\alpha_1 - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} d\zeta} .$$

Siispä konformikuvaus saadaan muotoon

$$f(z) = \frac{\int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} d\zeta}{\int_0^1 \zeta^{\alpha_1 - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} d\zeta} .$$

joka voidaan ratkaista halutuille kulmille α_1, α_2 (ja α_3).

Nyt käänteisfunktio f^{-1} voidaan jatkaa ympäröiville kolmioille peilauksella kolmion sivujen suhteen. Tämä prosessi on erityisesti kiinnostava silloin, kun se johtaa meromorfiseen funktioon. Tällöin, kun kolmiota peilataan sellaisten sivujen suhteen, joilla on yhteinen loppupiste, pitäisi äärellisellä määrällä peilauksia päätyä alkuperäiseen kolmioon. Siispä vakioiden α_1, α_2 ja α_3 täytyy olla muotoa $\alpha_1 = 1/n_1,\ \alpha_2 = 1/n_2$ ja $\alpha_3 = 1/n_3$ joillain $n_1, n_2 n_3 \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Koska yhtälön (8.1) nojalla tällöin

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 ,$$

täytyy kolmikon (n_1, n_2, n_3) olla muotoa $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$ tai $(2, 3, 6)$. Siispä kolmion täytyy olla joko tasasivuinen kolmio, tasakylkinen kolmio tai tasasivuisen kolmion puolikas. Näillä kaikilla kolmioilla voidaan täyttää koko kompleksitaso ilman päällekkäisyyksiä tai aukkoja. Tällaiset meromorfisten kuvausten rajoittumat tunnetaan nimellä *Schwarzin kolmiofunktiot.*

9. Konformikuvaukset fysiikan ongelmissa

Konformikuvauksia voidaan hyödyntää fysiikan ongelmissa laskujen yksinkertaistamiseen. Koska kompleksiarvoinen funktio voidaan jakaa reaali- ja imaginääriosiin, jotka ovat molemmat reaaliarvoisia funktioita, analyyttisten funktioiden ominaisuuksia voidaan hyödyntää kahden muuttujan ongelmissa kaksiulotteisessa avaruudessa. Tämän luvun esimerkit pohjautuvat kirjaan [4].

9.1. **Dirichlet'n ongelma.** Funktio $u(x, y)$ toteuttaa *Laplacen yhtälön* (tai on *harmoninen*) alueessa A, mikäli

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \, .$$

Tämän ehdon lisäksi fysiikan ongelmissa on yleensä annettu reunaehtoja, jotka funktion u tulee toteuttaa. Nämä reunaehdot yleensä määrittävät u:n yksikäsitteisesti. Jos esimerkiksi harmonisen funktion $u(x, y)$ arvot tiedetään alueen A reunalla, niin funktio määräytyy yksikäsitteisesti [5, p.145]. Yhtälöparia

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ u|_{\partial A} = f \end{cases}$$

sanotaan *Dirichlet'n ongelma*ksi.

Mikäli Dirichlet'n ongelmassa $u(x, y)$ ei ole jatkuva reunalla ∂A, mutta alue A on rajoitettu, niin yksikäsitteisyystulokset ovat voimassa. Jos taas A on rajoittamaton, niin ongelman ratkaisut eivät enää ole yksikäsitteisiä. Jos esimerkiksi A on ylempi puolitaso, niin sekä $u_1(x, y) = x + y$ että $u_2(x, y) = x$ toteuttavat samat reunaehdot reunalla $y = 0$ ja molemmat funktiot ovat harmonisia, mutta selvästikään ne eivät ole samoja.

Jotta rajoittamattomassakin alueessa löydettäisiin ongelmille yksikäsitteiset ratkaisut, täytyy ongelmille lisätä "reunaehdot ∞:ssä". Tällainen ehto tarkoittaa, että u:n täytyy olla rajoitettu.

Yleensä Dirichlet'n ongelma alueessa A ratkaistaan muuttamalla ensin alue A konformikuvauksella yksinkertaisemmaksi alueeksi B, missä ongelma osataan ratkaista, mikäli ongelmaa ei osata ratkaista A:ssa. Seuraava lause näyttää, että harmonisen funktion ja konformikuvauksen yhdistetty kuvaus on harmoninen.

Lause 9.1. *Olkoon u harmoninen funktio alueessa B ja olkoon $f : A \to B$ analyyttinen. Tällöin funktio $u \circ f$ on harmoninen A:ssa.*

Todistus. Todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [5]. □

Nyt siis alueessa B saatu ratkaisu voidaan kuvata takaisin A:lle. Dirichlet'n ongelman reunaehdot reunalla ∂A kuvautuvat konformikuvauksella f reunaehdoiksi reunalla ∂B.

Jos nyt etsitään ylemmässä puolitasossa $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$ harmonista funktiota u, joka saa arvon c_0 välillä $]-\infty, x_1[$, arvon c_1 välillä $]x_1, x_2[$, ..., ja arvon c_n välillä $]x_n, \infty[$, missä $x_1 < x_2 < ... < x_n \in \mathbb{R}$, niin huomataan, että ratkaisu on muotoa

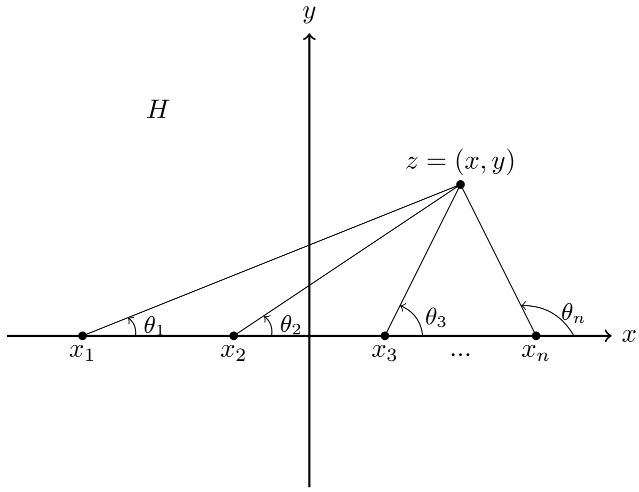
$$u(x, y) = c_n + \frac{1}{\pi}[(c_{n-1} - c_n)\theta_n + ... + (c_0 - c_1)\theta_1] \, , \tag{9.1}$$

missä $\theta_1, ..., \theta_n$ ovat kuten Kuvassa 8, $0 \leq \theta_i \leq \pi$.

Tämä nähdään helposti, sillä u on analyyttisen funktion

$$c_n + \frac{1}{\pi i}[(c_{n-1} - c_n)\log(z - x_n) + ... + (c_0 - c_1)\log(z - x_1)]$$

reaaliosana harmoninen. Lisäksi välillä $]x_i, x_{i+1}[$ u on vakio c_i. Tällöin siis u on rajoitettu, joten se on fysikaalisesti järkevä ratkaisu. Tätä ratkaisua käytetään hyväksi seuraavien kappaleiden esimerkeissä.



KUVA 8. Dirichlet'n ongelma ylemmässä puolitasossa.

9.2. **Nesteen virtaus.** Nesteen liikkeen tuntemiseksi täytyy tietää nopeusvektori jokaisessa nesteen pisteessä kaikilla ajanhetkillä. Oletetaan, että neste on kokoonpuristumatonta, eli että sen tiheys on vakio, ja että virtaus on tasaista, eli ajasta riippumatonta, ja kaksiulotteista. Tällaista virtausta esiintyy muun muassa, kun neste virtaa sylinterin läpi, jonka akseli on yhdensuuntainen virtaussuunnan kanssa. Tällöin nopeusvektori voidaan ilmoittaa jatkuvana kompleksiarvoisena funktiona $V = V(z)$, missä $z \in G$ jollakin alueella $G \subset \mathbb{C}$. Lisäksi voidaan olettaa, ettei alueessa G ole lähteitä tai nieluja, eli pisteitä, joissa nestettä syntyy tai tuhoutuu. Nopeusfunktiolle V saadaan luonnollinen reunaehto, kun vaaditaan, että virtaus on alueen reunan suuntaista. Tämä siis tarkoittaa, että esimerkiksi putkessa virtaus on putken seinämien suuntaista.

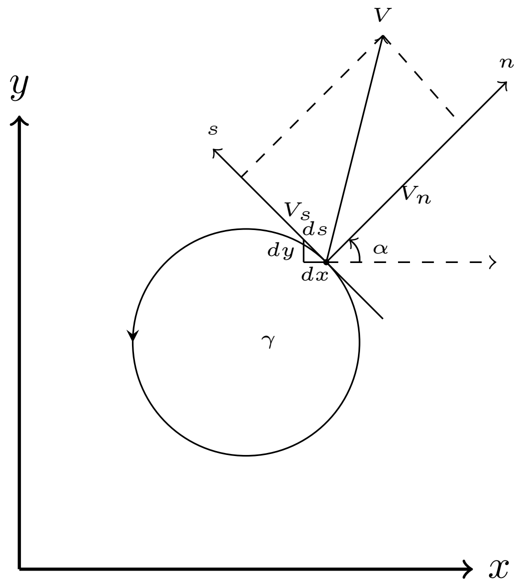
Koska oletettiin, että neste on kokoonpuristumatonta ja että alueessa G ei ole lähteitä tai nieluja, täytyy alueen G yhdesti yhtenäisissä alueissa olla aina sama määrä nestettä. Tällöin pituusyksikön ds läpi virtaaman nesteen määrä aikayksikköä kohden paloittain sileän itseään leikkaamattoman G:n suljetun polun γ läpi on $V_n ds$, missä V_n on V:n polkua γ vastaan kohtisuorassa oleva komponentti. Tällöin käyrästä ulospäin suuntautuva kokonaisvirtaama on

$$Q = \int_\gamma V_n ds = 0 \, . \tag{9.2}$$

Nopeuden V tangentiaalisen komponentin V_s polkuintegraalia polun γ yli,

$$\Gamma = \int_\gamma V_s ds \ , \tag{9.3}$$

sanotaan V:n *kiertovirtaukseksi* polulla γ. Jos kiertovirtaus ei ole nolla jollakin polulla γ, neste kiertää polun γ ympäri. Jos taas kiertovirtaus on nolla kaikilla poluilla $\gamma \in G$, virtausta sanotaan *pyörteettömäksi*. Oletetaan nyt, että virta on pyörteetön, eli että $\Gamma = 0$. Olkoon $\alpha = \alpha(z)$ γ:n normaalivektorin ja positiivisen reaaliakselin välinen kulma pisteessä z. Ks. Kuva 9.



Kuva 9. Nopeusvektorin komponentit.

Kiertämällä ns-koordinaatistoa pisteen z suhteen kulman $-\alpha$ verran nopeuden V normaali- ja tangentiaalisiksi komponenteiksi saadaan

$$V_n = \mathrm{Re}(e^{-i\alpha}V)$$
$$V_s = \mathrm{Im}(e^{-i\alpha}V) \ .$$

Erityisesti tällöin

$$e^{-i\alpha}V = V_n + iV_s \ . \tag{9.4}$$

Tällöin dx ja dy voidaan ilmoittaa pituusyksikön ds avulla seuraavasti:

$$dx = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) ds$$
$$dy = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) ds \ ,$$

mistä seuraa, että

$$dz = dx + idy = e^{i(\pi/2+\alpha)}ds = ie^{i\alpha} \ . \tag{9.5}$$

Nyt, jos γ on paloittain sileä Jordan-käyrä G:ssä, niin yhtälöiden (9.2)-(9.5) nojalla

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{V(z)}dz &= i\int_\gamma \overline{(e^{-i\alpha}V)}ds \\ &= i\int_\gamma \overline{(V_n+iV_s)}ds \\ &= \int_\gamma (V_s+iV_n)ds = 0\ ,\end{aligned}$$

joten Moreran lauseen 2.7 nojalla $\overline{V(z)}$ on analyyttinen. Jos G on yhdesti yhtenäinen, niin tällöin funktion $\overline{V(z)}$ primitiivi on analyyttinen funktio $w(z) = u(z)+iv(z)$, jota kutsutaan virran *kompleksiseksi potentiaaliksi*. Funktiota u sanotaan *potentiaalifunktioksi* ja funktiota v *virtafunktioksi*. Virtauksen yksittäiset hiukkaset liikkuvat pitkin käyriä, jotka ovat joka pisteessä nopeusvektorin suuntaisia. Tällaisia käyriä sanotaan *virtaviivoiksi* ja ne toteuttavat yhtälön $v(z) = vakio$, sillä tällaisen käyrän tangentin kulmakerroin on Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla

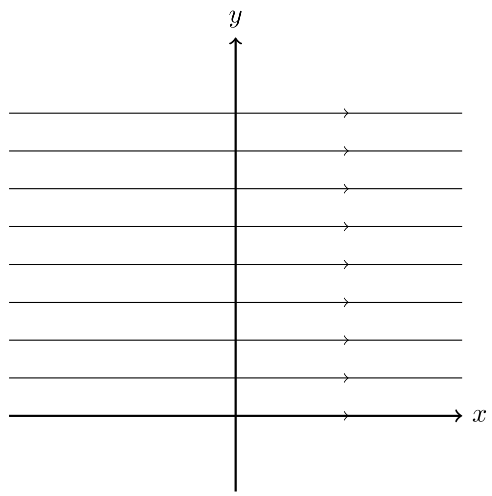
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x v}{\partial_y v} = -\frac{\partial_x v}{\partial_x u} = -\tan\ \arg\ w' = \tan\ \arg\ V\ ,$$

sillä $V = \bar{w}'$. Käyriä $u(z) = vakio$ kutsutaan *tasapotentiaaliviivoiksi* ja ne ovat kohtisuorassa virtaviivoja vastaan, sillä niille pätee

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x u}{\partial_y u} = \frac{\partial_x u}{\partial_x v} = \frac{-1}{\tan\arg V}\ .$$

Pisteitä, joissa $V(z) = 0$, ja siten $w'(z) = 0$, sanotaan virran *patoutumispisteiksi*.

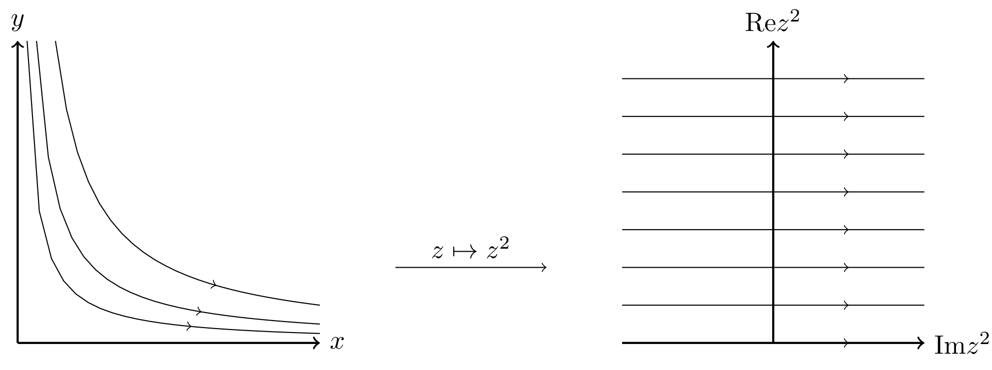
Esimerkki 9.2. Nestevirtausta äärettömän leveässä putkessa voidaan approksimoida ylemmässä puolitasossa nopeudella $A > 0$ positiivisen x-akselin suuntaan virtaavalla tasaisella virtauksella, ks. Kuva 10. Koska $V(z) = A$, niin $w'(z) = A$, joten kompleksiseksi potentiaaliksi saadaan $w(z) = Az + c$, missä $c = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$ on vakio. Siten $u(z) = Ax + c_1$ ja $v(z) = Ay + c_2$, joten tasapotentiaaliviivat ovat imaginääriakselin suuntaisia ja virtaviivat reaaliakselin suuntaisia. Asettamalla $c = 0$ virtaviiva $v = 0$ vastaa reaaliakselia.



Kuva 10. Tasainen virtaus positiivisen x-akselin suuntaan ylemmässä puolitasossa.

Jos nyt funktio f kuvaa jonkin alueen G konformisesti ylemmälle puolitasolle $H = f(G)$ ja kompleksinen potentiaali $w(z)$ tunnetaan H:ssa, niin kompleksinen potentiaali alueessa G on $w(f(z))$, joka on kahden analyyttisen funktion yhdistettynä funktiona analyyttinen. Nyt, jos virtaus ylemmässä puolitasossa H on kuten esimerkissä 9.2, niin virtaviivat G:ssä ovat ne käyrät, jotka kuvautuvat yhdistetyllä funktiolla $w \circ f$ suoriksi $v = vakio$ ylempään puolitasoon. Tällaisten yhdistettyjen funktioiden selvittäminen on keskeisessä roolissa virtausmekaniikan ongelmissa.

Esimerkki 9.3. Jos ollaan kiinnostuneita virtaviivoista suoraa kulmaa pitkin, niin tätä ongelmaa voidaan approksimoida tutkimalla virtausta tason ensimmäisessä neljänneksessä. Kuvaus $z \mapsto z^2$ kuvaa ensimmäisen neljänneksen puolitasolle. Siispä, jos virtauksen kompleksinen potentiaali $w = w(f(z))$ tiedetään ylemmässä puolitasossa, tällöin potentiaali ensimmäisessä neljänneksessä on muotoa $w = w(z^2)$. Jos nyt oletetaan, että virtaus ylemmässä puolitasossa on kuten esimerkissä 9.2 ja $c = 0$, kompleksinen potentiaali ylemmässä puolitasossa on muotoa $w = Af(z)$. Siispä kompleksinen potentiaali ensimmäisessä neljänneksessä toteuttaa yhtälön $w = Az^2$ ja virtaviivat ovat hyperbelejä $2Axy = vakio$ (ks. Kuva 11) ja nopeusvektori on muotoa $V(z) = 2A\bar{z}$. Origo on tällaisen virtauksen patoutumispiste.



Kuva 11. Virtaviivat suoraa kulmaa pitkin.

9.3. **Lämmönjohtuminen.** Lämmönjohtumista kiinteässä homogeenisessa kappaleessa voidaan tutkia samaan tapaan kuin nestevirtausta, mikäli kappale on sen muotoinen, että lämmönjohtumista voidaan ajatella kaksiulotteisena ongelmana, ja mikäli lämmönjohtuminen on tasaista. Oletetaan, ettei yhdesti yhtenäisessä alueessa G ole lämmönlähteitä tai -nieluja. Koska alueen kahdessa eri pisteessä voi olla eri lämpötila, alueessa ilmenee lämmönjohtumista lämpimämmistä alueista kylmempiin. *Lämmönjohtumisvektori* $Q = Q(z)$ voidaan kirjoittaa jatkuvana kompleksiarvoisena funktiona. Paloittain sileän itseään leikkaamattoman alueen G polun γ sisukselta ulosjohtuvan lämmön täytyy toteuttaa

$$\int_\gamma Q_n ds = 0 \ ,$$

sillä muuten lämpötila polun sisällä muuttuisi. Koska lämpö johtuu lämpimämmistä osista kylmempiin, virtaus on pyörteetöntä, joten

$$\int_\gamma Q_s ds = 0 \ ,$$

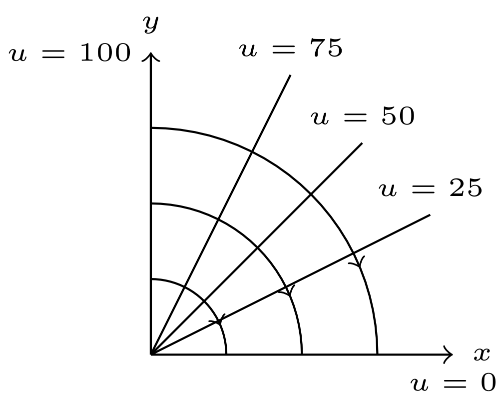
joten Moreran lauseen 2.7 nojalla, kuten kappaleessa 9.2, $\bar{Q}$ on analyyttinen alueessa G. Tällöin

$$Q(z) = -k\overline{w'(z)} \ ,$$

missä k on *lämmönjohtavuusvakio* ja $w = u + iv$ on lämpökentän *kompleksinen potentiaali*. Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla $\overline{w'(z)} = \partial_x u + i\partial_y u = \text{grad } u(z)$, joten $Q = -k \text{ grad } u$ (Fourierin laki). Tästä seuraa, että lämpö johtuu kohtisuoraan käyriä $u(z) = \textit{vakio}$ vastaan. Tällaisen käyrän pisteissä täytyy siis olla sama lämpötila, joten käyrät $u(z) = \textit{vakio}$ ovat *isotermejä* ja $u(z)$ on *lämpötila*. Käyriä $v(z) = \textit{vakio}$ kutsutaan *virtaviivoiksi* ja ne ovat kohtisuorassa isotermejä vastaan.

Lämmöjohtumiseen liittyvissä ongelmissa on usein keskeisessä roolissa isotermien muodostaminen alueessa G annetuilla lämpötilan reunaehdoilla.

Esimerkki 9.4. Etsitään levyn G isotermit, missä levy on kompleksitason ensimmäinen neljännes, kuten kuvassa 12. Aluetta rajaavat jana $z = y \geq 0$, joka on lämpötilassa 100°C sekä jana $z = x \geq 0$, joka on lämpötilassa 0°C.



Kuva 12

Kuvataan ensin neljännes ylemmäksi puolitasoksi kuvauksella $z \mapsto z^2$, kuten esimerkissä 9.4.

Lämpötilan tulee olla rajoitettu funktio, jotta se olisi fysikaalisesti järkevä. Muuten saavutettaisiin mielivaltaisen suuria tai pieniä lämpötilan arvoja, mikä ei ole mahdollista. Siispä ratkaisuksi ylemmässä puolitasossa saadaan yhtälön (9.1) avulla

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}(100\arg z) = \frac{100}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Tällöin lämpötilafunktioksi alueessa G saadaan

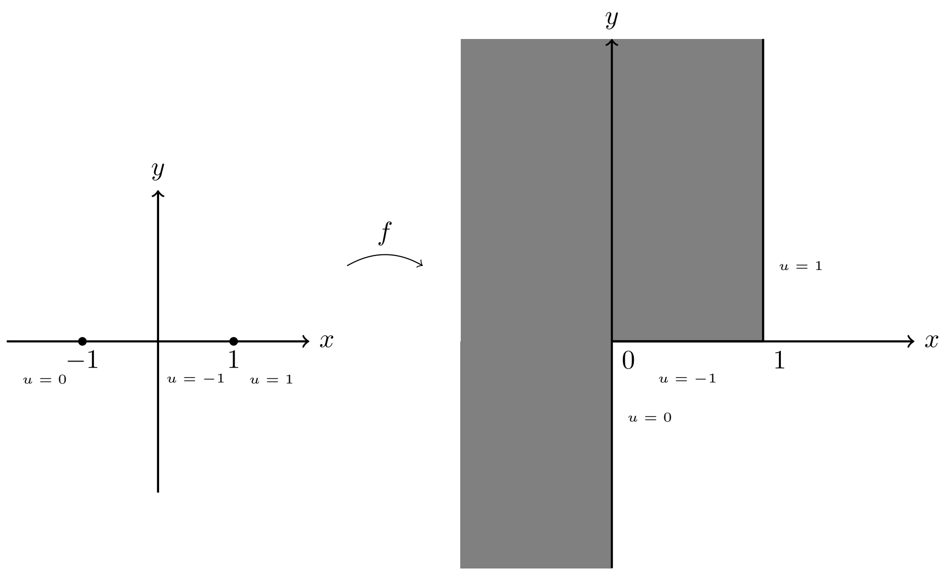
$$u_0(x,y) = u(z^2) ,$$

missä $z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = (x^2 - y^2, 2xy)$. Siispä

$$u_0(x,y) = \frac{100}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right) ,$$

missä $\tan^{-1}$ on tangentin käänteisfunktion haara välillä $[0,\pi]$. Isotermit ja virtaviivat on esitetty kuvassa 12.

Esimerkki 9.5. Etsitään isotermit levyssä G, kun alue on kuten kuvassa 13. Aluetta G rajaavat janat $[0,1]$, $[-i\infty, 0]$ ja $[1, 1+i\infty]$, jotka ovat lämpötiloissa $-1, 0$ ja 1°C vastaavasti.



KUVA 13

Koska alueen sisäkulmat pisteissä 0 ja 1 ovat $-\pi/2$ ja $\pi/2$, vastaavasti, niin Schwartz-Christoffelin yhtälö

$$f(z) = 1 + \frac{i}{\pi}\int_1^z \sqrt{\frac{w+1}{w-1}}dw = 1 + \frac{i}{\pi}[\sqrt{z^2-1} + \cosh^{-1} z]$$

kuvaa ylemmän puolitason alueelle G siten, että pisteet $-1, 1$ ja ∞ kuvautuvat pisteiksi $0, 1, 1+i\infty$. Tässä $\cosh^{-1}$ on hyperbolisen kosinin käänteisfunktion haara, jolle pätee $cosh^{-1}(z) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi i]$. Tällöin siis alue G saadaan kuvattua ylemmälle puolitasolle käänteiskuvauksella f^{-1}. Nyt lämpötilaksi ylemmässä puolitasossa saadaan yhtälön (9.1) avulla

$$u(x,y) = 1 + \frac{1}{\pi}[-2\arg(z-1) + \arg(z+1)] \ ,$$

joten lämpötilaksi alueessa G saadaan

$$u_0(x,y) = u(f^{-1}(z)) = 1 + \frac{1}{\pi}[-2\arg(f^{-1}(z)-1) + \arg(f^{-1}(z)+1)] \ .$$

9.4. **Sähköstatiikka.** Olkoon $E(z)$ tasomainen sähkökenttä, joka syntyy mielivaltaisen systeemin varauksien välisistä veto- ja hylkimisvoimista. Olkoon G yhdesti yhtenäinen alue, joka sisältää nämä varaukset. Tällöin jokaiselle paloittain sileälle Jordan-käyrälle γ, joka sisältyy G:hen, pätee Gaussin lain nojalla

$$\int_\gamma E_n ds = 0 \ .$$

Kentän *kiertovirtaus* on kentän tekemä työ, kun positiivinen yksikkövaraus kierretään kierros polun γ ympäri. Koska sähkökentän ylläpitämiseen ei tarvita energiaa, tällöin

$$\int_\gamma E_S ds = 0 \ .$$

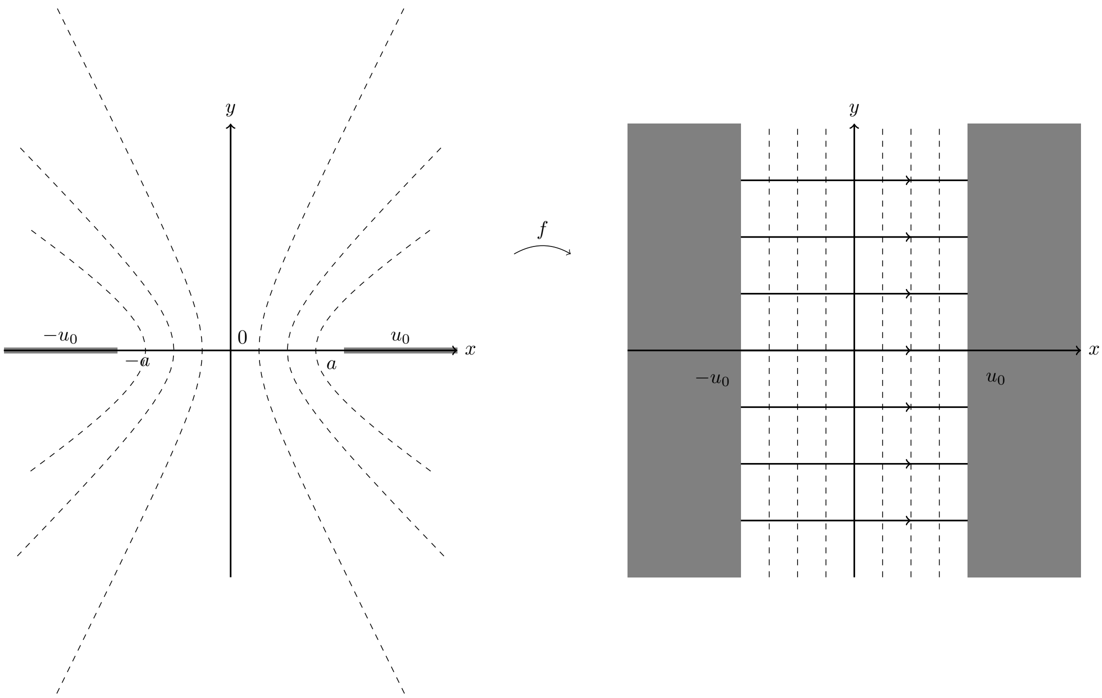
Tällöin kenttää E sanotaan *potentiaalikentäksi*. Lisäksi $\bar{E}/i$ on analyyttinen ja sen primitiiviä $iw = -v + iu$ sanotaan kentän *kompleksiseksi potentiaaliksi*. Funktiota $-v$ sanotaan *voimafunktioksi* ja funktiota u *potentiaalifunktioksi*. Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla

$$E = -\overline{w'(z)} = -(\partial_x u + i\partial_y u) = -\text{grad } u \ .$$

Käyrät $v(z) = vakio$ ovat *voimaviivoja*, ja käyrät $u(z) = vakio$ *tasapotentiaaliviivoja*.

Usein sähköstatiikassa on ongelmana löytää tasapotentiaaliviivat tasomaiselle sähkökentälle, joka on rajoitettu reunoilla, joissa potentiaali on vakio.

Esimerkki 9.6. Kondensaattori koostuu kahdesta samassa tasossa olevasta puolitasosta, joiden samansuuntaiset reunat ovat $2a$:n päässä toisistaan ja niiden välillä on potentiaaliero $2u_0$. Jokainen levyjä vastaan kohtisuora poikkileikkaus on tasokenttä G, jossa on kaksi rakoa, ks. Kuva 14. Etsitään tällaisen poikkileikkauksen tasapotentiaaliviivat.



Kuva 14

Huomataan, että funktio

$$f(z) = \frac{2u_0}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)$$

kuvaa alueen G kaistaleelle $|x| < u_0$ (Ks. Kuva 15):

Kaistale $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| < u_0\}$ saadaan kuvattua kaistaleeksi $|x| < \frac{\pi}{2}$ kuvauksella $z \mapsto \frac{\pi}{2u_0}z$. Tämä kaistale saadaan kierrettyä x-akselin suuntaiseksi kuvauksella $z \mapsto iz$. Tämä kaistale puolestaan saadaan kuvattua eksponenttikuvauksella puolitasoksi $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$. Määritellään sitten kuvaus $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}) \; .$$

Huomataan, että φ kuvaa joukon $S(0,1) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ väliksi $]-1,1[$, joukon $i\mathbb{R} - \{0\}$ joukoksi $\mathbb{R} - \{0\}$, joukon $B(0,1) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$ ylemmäksi puolitasoksi $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ sekä joukon $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\} - \bar{B}(0,1)$ alemmaksi puolitasoksi $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z < 0\}$. Siispä $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}) = \mathbb{C} - (]-\infty, -1] \cup [1, \infty[)$. Tämä alue saadaan helposti kuvattua alueeksi G kuvauksella $z \mapsto az$. Siispä yhdistetty kuvaus $g : U \to G$,

$$g(z) = \frac{a}{2i}(e^{i\frac{\pi}{2u_0}z} - e^{-i\frac{\pi}{2u_0}z}) = a \sin\left(\frac{\pi}{2u_0}z\right)$$

kuvaa alueen U alueeksi G. Kuvaus on konformikuvausten yhdistettynä kuvauksena konformikuvaus. Nyt alue G saadaan kuvattua alueeksi U kuvauksella

$$f(z) = g^{-1}(z) = \frac{2u_0}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{z}{a}\right) \; ,$$

missä $\sin^{-1}$ on sinin rajoittuman kaistaleeseen $|x| < \frac{\pi}{2}$ käänteisfunktio. Kaistaleessa U virtaviivat ovat x-akselin suuntaisia ja tasapotentiaaliviivat y-akselin suuntaisia, kuten Kuvassa 14. Kuvassa 15 on esitetty alueen U tasapotentiaaliviivojen kuvautuminen yhdistetyllä kuvauksella g. Tasapotentiaaliviivoja on kuvassa merkitty yhtenäisillä viivoilla. Huomataan, että U:n tasapotentiaaliviivat kuvautuvat kuvauksella $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2u_0}z}$ origoalkuisiksi puolisuoriksi (joskin origo ei kuulu suoraan)puolitasoon $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} > 0\}$. Lisäksi huomataan, että kuvaus φ kuvaa suorat hyperbeleiksi:

Selvästi φ kuvaa positiivisen reaaliakselin imaginääriakseliksi. Tutkitaan sitten puolisuoria $R_\phi = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \phi\}$, missä $\phi \in]-\pi, \pi[-\{0\}$. Olkoon $z \in R_\phi$. Tällöin $z = re^{i\phi}$ jollakin $r > 0$. Siten

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{2i}\left(re^{i\phi} - \frac{1}{r}e^{-i\phi}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(r\cos\phi - \frac{1}{r}\cos\phi + i\left(r\sin\phi + \frac{1}{r}\sin\phi\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\phi - \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\phi\ ,\end{aligned}$$

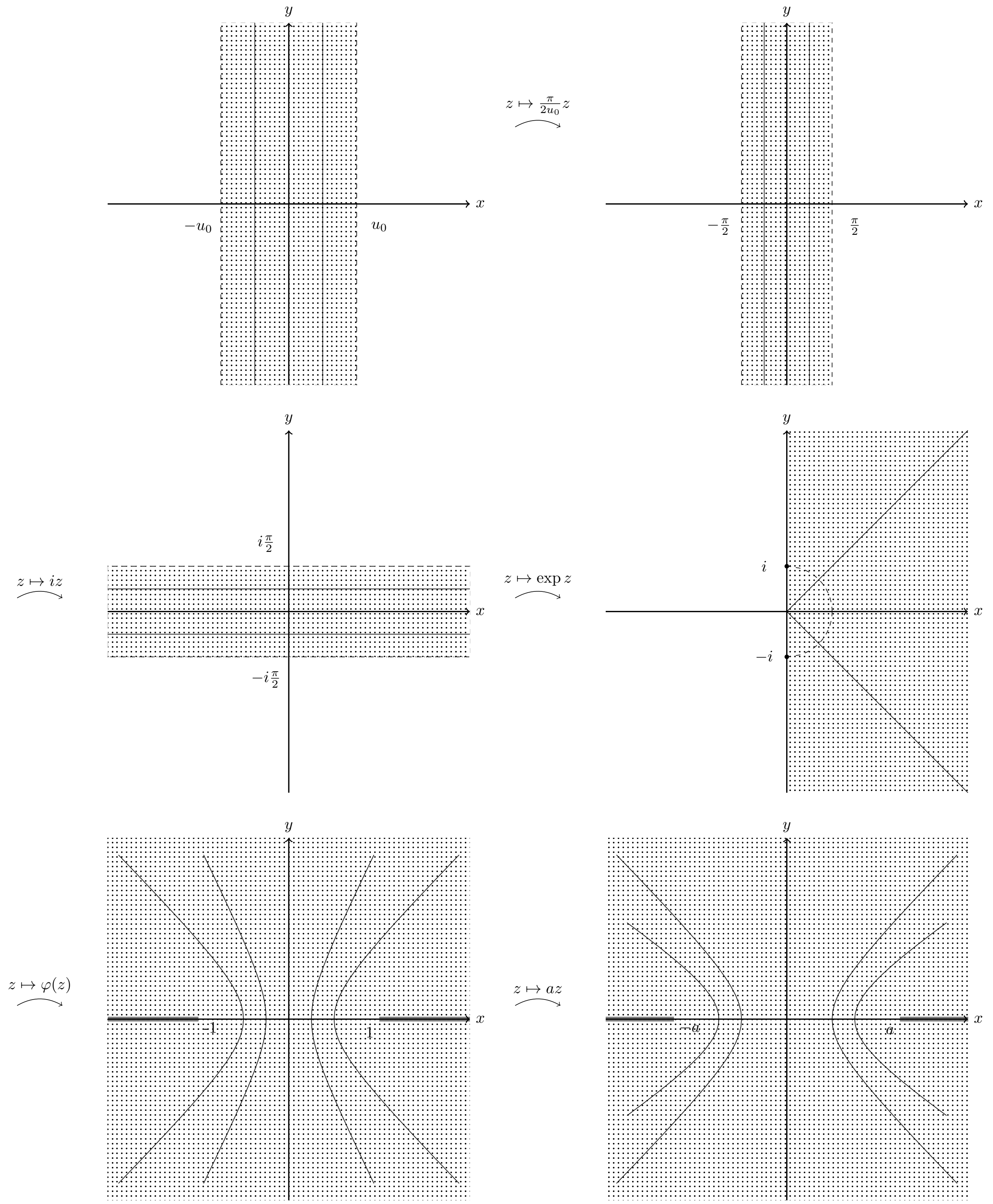
mistä saadaan

$$\frac{(\mathrm{Re}\varphi(z))^2}{\sin^2\phi} - \frac{(\mathrm{Im}\varphi(z))^2}{\cos^2\phi} = \frac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 1\ ,$$

eli suoran kuva toteuttaa hyperbelin yhtälön. Siispä tasapotentiaaliviivoiksi alueessa G saadaan hyperbelit

$$\frac{x^2}{a^2\sin^2\frac{\pi u}{2u_0}} - \frac{y^2}{a^2\cos^2\frac{\pi u}{2u_0}} = 1\ ,$$

missä $u \in \mathbb{R} - \{0\}$.


y
x
$-u_0$
u_0
$z \mapsto \frac{\pi}{2u_0} z$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$z \mapsto iz$
$i\frac{\pi}{2}$
$-i\frac{\pi}{2}$
$z \mapsto \exp z$
i
$-i$
$z \mapsto \varphi(z)$
-1
1
$z \mapsto az$
$-a$
a

Kuva 15

Viitteet

[1] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978.
[2] George Arfken, *Mathematical methods for physicists.* Academic Press, New York-London, 1966.
[3] H.S.M. Coxeter, F.R.S., *Introduction to geometry.* John Wiley & Sons, Inc. New York, second edition,1969.
[4] William R. Derrick, *Complex analysis and applications.* Wadsworth International Group, Belmont, California, second edition, 1983.
[5] Jerrold E. Marsden, *Basic complex analysis.* W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
[6] Zeev Nehari, *Conformal Mapping*, Dover Publications, Inc., New York, 1975. Reprinting of the 1952 edition.
[7] Bruce P. Palka, *An introduction to complex function theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.