Jäykät liikkeet ja Sivu-Kulma-Sivu -sääntö

Venla Haapala

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2016

Tiivistelmä: Venla Haapala, *Jäykät liikkeet ja SKS -sääntö* (engl. *Rigid motions and SAS*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 57 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2016.

Tämän tutkielman tarkoituksena on selventää euklidisen tasogeometrian ja analyyttisen eli karteesisen geometrian välistä yhteyttä jäykkien liikkeiden tutkimisen kautta. Lisäksi tutkielman tarkoituksena on osoittaa, että jäykkien liikkeiden olemassaolo **(ERM)** on yhtäpitävä yhtenevyysaksiooman Sivu-Kulma-Sivu **(SKS)** kanssa, kun muut Hilbertin aksioomat ovat voimassa.

Tutkielmassa lähdetään algebrallisista lähtökohdista rakentamaan geometrista mallia, jossa geometriset käsitteet määritetään kunnan ominaisuuksien avulla. Tällä muodostetulla karteesisella tasolla yli valitun kunnan kaikki Hilbertin aksioomat ovat voimassa, kun kunnan ominaisuuksista oletetaan tarpeeksi. Algebrallinen lähestyminen antaa mahdollisuuden ratkaista geometrisia ongelmia laskennallisesti, ja tämänkaltaisen karteesisen koordinaatiston kehittäminen on johtanut nykyaikaisen analyyttisen geometrian syntyyn. Tutkielmassa siis osoitetaan, että analyyttisessä geometriassa on pohjalla täsmälleen samat aksioomat kuin perinteisessä euklidisessa tasogeometriassa.

Tutkielmassa määritellään tason jäykät liikkeet, jotka ovat nimensä mukaisesti jäykkiä kuvauksia. Ne ovat injektioita geometrialta itselleen, kuvaavat suorat suoriksi ja säilyttävät välissäolon, kulmien suuruuden ja pituuden. Tutkielmassa osoitetaan, että **(ERM)**:stä seuraa aksiooman **(SKS)** voimassaolo, kun tasolla on tietyt ominaisuudet. Lisäksi Hilbertin aksioomien ollessa voimassa jäykkiä liikkeitä on olemassa tarpeeksi ja siten **(SKS)**-aksiooman voimassaolosta seuraa **(ERM)**. Aksiooman **(SKS)** sijaan Hilbertin aksioomajärjestelmässä voisikin siis itse asiassa olla aksioomana jäykkien liikkeiden olemassaolo.

Tutkielmassa tutustutaan syvemmin jäykkiin liikkeisiin aksiomaattisista lähtökohdista isometrioiden kautta. Hilbertin tasolla isometriaoletus eli oletus pituuden säilyttämisestä riittää osoittamaan muut jäykkien liikkeiden ominaisuudet, jolloin isometriset kuvaukset ovat yhtäpitäviä jäykkien liikkeiden kanssa. Yksi tutkielmassa todistettava päätulos liittyen isometrioihin on, että kaikki tason isometriat voidaan muodostaa kolmen heijastuksen avulla. Muita isometrisia kuvauksia ovat siirto, kierto, liukuheijastus ja identtinen kuvaus ja nämä ovat ainoat tason isometriat, mikä myös tullaan todistamaan.

Jäykkiä liikkeitä käsitellään euklidisen tason lisäksi Poincarén mallilla, jossa muut Hilbertin aksioomat paralleeliaksioomaa lukuunottamatta ovat voimassa. Poincarén mallia ja sen jäykkiä liikkeitä varten käsitellään lyhyesti ympyräheijastuksia eli inversioita ja niiden tärkeimpiä ominaisuuksia. Tutkielmassa osoitetaan, että Poincarén mallilla on olemassa tarpeeksi jäykkiä liikkeitä, jonka seurauksena saadaan aksiooman **(SKS)** voimassaolo Poincarén mallilla tutkielman aiempien tulosten seurauksena.

Tutkielman lopussa on vielä tiivis silmäys siihen, miten euklidista ja analyyttista geometriaa sekä yhtenevyyskuvauksia käsitellään lukion pitkän matematiikan kurssikirjoissa. Näiden kahden geometrisen mallin suhde jää useimmissa oppikirjoissa epäselväksi. Tutkielmassa pohditaan muutamia keinoja tämän yhteyden selventämiseksi kuten aksioomien perusteellisempi esittely, uudet opetusmallit ja kehittynyt opetusteknologia.

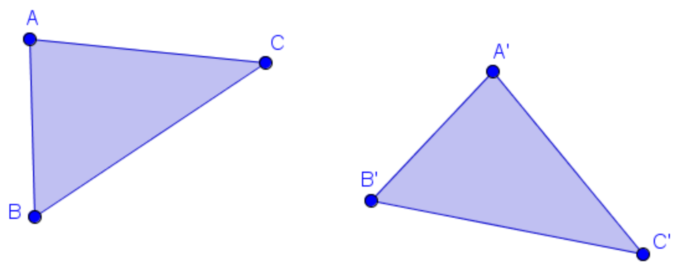
Sisältö

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on selventää euklidisen tasogeometrian ja analyyttisen eli karteesisen geometrian välistä yhteyttä. Tutkielman luvussa 1 määritellään geometriset käsitteet algebrallisesta lähtökohdasta ja osoitetaan, että Hilbertin aksioomat ovat voimassa karteesisella tasolla, jolla on tietynlaiset ominaisuudet. Tämän yhteydessä tutustutaan myös kunnan käsitteeseen ja ominaisuuksiin.

Kreikkalainen matemaatikko Eukleides (noin 300 e.a.a) yritti todistaa **(SKS)**-säännön liikuttamalla tason objekteja päällekäin ja osoittamalla, että ne näin asetettuina ovat yhtenevät. Päättelyn kulku oli seuraava.

Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kolmioita siten, että sivut $AB \cong A'B'$ ja $AC \cong A'C'$ ja kulmat $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ (Kuva 0.1). Eukleideen idea oli asetettaa kolmio $\triangle ABC$ kolmion $\triangle A'B'C'$ päälle eli siirtää kolmiota $\triangle ABC$ tasolla siten, että piste A menee pisteen A' päälle ja sivu AB menee sivun $A'B'$ päälle.



Kuva 0.1. Eukleides yritti todistaa **(SKS)**-aksiooman liikuttamalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ päällekäin

Nyt Eukleideen päättelyn mukaan puolisuoran $\overrightarrow{AC}$ on mentävä puolisuoran $\overrightarrow{A'C'}$ päälle, sillä oletuksena kulmat $\sphericalangle BAC$ ja $\sphericalangle B'A'C'$ ovat yhtenevät. Lisäksi pisteen C on mentävä pisteen C' päälle janojen AC ja $A'C'$ yhtenevyyden nojalla. Tästä Eukleides päättelee, että kolmioiden on mentävä kokonaan päällekäin eli ne ovat yhtenevät.

Eukleideen todistus ei ole aukoton, sillä geometristen objektien liikuttaminen tasolla ei ole välttämättä sallittua Eukleideen käyttämien aksioomien perusteella. Jotta objektien liikuttaminen olisi mahdollista muuttamatta mitään niihin liittyvistä ominaisuuksista, täytyy olettaa, että geometria on samanlaista tason joka puolella.

Eukleideen metodin kaltaisella tyylillä voidaan kuitenkin todella todistaa **(SKS)**-sääntö, kunhan ensin osoitetaan, miksi se on perusteltua. Tätä varten tässä tutkielmassa otetaan luvussa 2 käyttöön tason jäykät liikkeet eli tason transformaatiot, jotka säilyttävät useat tasoon liittyvät ominaisuudet kuten pituuden. Jotta Eukleideen metodi toimisi, täytyy olettaa, että on olemassa tarpeeksi jäykkiä liikkeitä, jotta

(1) mikä tahansa piste voidaan viedä miksi tahansa toiseksi pisteeksi

(2) mikä tahansa puolisuora voidaan kiertää lähtöpisteensä suhteen toiseksi puolisuoraksi
(3) minkä tahansa suoran suhteen voidaan heijastaa, jolloin suoran erottamat puolitasot vaihtavat paikkaa.

Reaalisella karteesisella tasolla nämä tarpeelliset jäykät liikkeet ovat nimeltään *siirto*, *kierto* ja *heijastus* ja ne on yksinkertaista muodostaa.

Kirjoitelman päätavoitteena on siis määritellä ja tutkia, millaisia kuvauksia ovat tason jäykät liikkeet, ja osoittaa, että jäykkien liikkeiden olemassaolo on yhtäpitävää Hilbertin aksiooman **(SKS)** kanssa, mikä tehdään luvussa 2.

Luvussa 3 tutustutaan tarkemmin jäykkiin liikkeisiin tasolla, jossa kaikki Hilbertin aksioomat ovat voimassa. Erityisesti nämä jäykät liikkeet ovat isometrioita, sillä ne säilyttävät pituuden. Jäykkien liikkeiden muut ominaisuudet ovat injektiivisyys, suorien säilyttäminen suorina, välissäolon säilyttäminen ja kulmien suuruuden säilyttäminen, ja erityisesti näiden muiden ominaisuuksien toteutuminen voidaan osoittaa kuvauksen isometrisyyden nojalla, kun ollaan Hilbertin tasolla. Luvussa myös määritellään suorat ja käänteiset isometriat ja tutkitaan isometrioita suhteessa siihen, paljonko ne muuttavat tasoa, eli puhutaan isometrisen kuvauksen suhteen muuttumattomista eli invarianteista pisteistä. Näiden ominaisuuksien avulla todistetaan, että kaikki tason isometriat voidaan muodostaa enintään kolmen heijastuksen yhdisteenä. Tämä johtaa tulokseen, että ainoat tasolla olemassa olevat isometriset kuvaukset ovat siirto, kierto, heijastus, liukuheijastus ja identtinen kuvaus, jonka voidaan ajatella olevan myös nollasiirto.

Tutkielman neljännen luvun päätavoite on osoittaa, että jäykkiä liikkeitä on olemassa myös Poincarén mallilla, joka on Hyberbolisen geometrian malli, jossa kaikki Hilbertin aksioomat paralleeliaksioomaa lukuunottamatta ovat voimassa. Tämän seurauksena saadaan aksiooman **(SKS)** voimassaolo Poincarén mallilla helposti tutkielman aiempien tulosten nojalla. Ennen sitä luvussa käsitellään ympyräinversiota, ja esitellään sen tärkeimpiä ominaisuuksia, joita tarvitaan erityisesti jäykkien liikkeiden olemassaolon todistukseen Poincarén mallilla. Lisäksi luvussa konstruoidaan Poincarén malli ja mietitään, mitä välissäolo ja kulmien ja suorien yhtenevyys mallilla tarkoittaa.

Tutkielman lopettaa luku, jossa tutustutaan euklidisen ja analyyttisen geometrian väliseen suhteeseen ja yhtenevyyskuvausten käsittelyyn koulumatematiikassa, erityisesti lukion pitkän matematiikan kursseilla kolme *Geometria* ja neljä *Analyyttinen Geometria*. Kappaleessa esitetään kolmen eri lukion pitkän matematiikan kirjasarjan kuvaukset euklidisesta ja analyyttisestä geometriasta sekä yhtenevyydestä, ja perehdytään aiheen käsittelyn eri näkökulmiin sekä mahdollisiin puutteisiin kirjasarjoissa ja niiden välillä. Aivan luvun lopussa pyritään myös esittämään joitain mahdollisia tapoja, joilla euklidisen ja analyyttisen geometrian välistä suhdetta pystyttäisiin koulumatematiikan tasolla oppilaille selventämään.

Tutkielmassa käytetään vakiintuneita merkintöjä geometrisille suureille. Pisteet nimetään suurilla kirjaimilla, esimerkiksi piste A ja piste B. Näiden pisteiden kautta kulkevaa suoraa merkitään $\overleftrightarrow{AB}$ ja puolisuoraa, joka alkaa pisteestä A ja menee pisteen B suuntaan merkitään $\overrightarrow{AB}$. Merkintä AB tarkoittaa pisteet A ja B yhdistävää janaa ja $\overline{AB}$ tämän janan AB pituutta. Kulmaa, jonka kärkenä on piste A ja sivuina puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ merkitään $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB$. Pisteet A, B ja C yhdistävien janojen rajoittamaa tasoaluetta eli kolmiota merkitään $\triangle ABC$.

Tutkielman tärkeimmät lähteet ovat Robin Hartshornen kirja *Geometry: Euclid and beyond* [**6**], josta myös johdannon tiedot on pääpiirteittäin otettu, Marvin Jay Greenbergin kirja *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History* [**5**], H. S. M. Coxeterin kirja *Introduction to Geometry* [**2**], sekä Lassi Kuritun, Veli-Matti Hokkasen ja Lauri Kahanpään luentomoniste *Geometria* [**13**].

LUKU 1

Geometria ja kunnat

Euklidista tasogeometriaa kehitti ja kokosi alunperin kreikkalainen matemaatikko Eukleides kirjassaan *Alkeet* (engl. *Elements*) noin 300 vuotta ennen ajanlaskun alkua. Tätä aksiomaattista geometriaa täydennettiin ja korjailtiin myöhemmin muiden matemaatikkojen, kuten saksalaisen David Hilbertin (1862–1943) toimesta. Euklidinen geometria perustuu aksioomiin eli perustotuuksiin, joiden pohjalta loogisella päättelyllä pystytään johtamaan muita tuloksia.

Euklidisen geometrian erityispiirre on, että se tutkii puhtaasti geometrisia suureita kuten tasossa sijaitsevia pisteitä, suoria ja niiden muodostamia objekteja. Se ei siis käytä ollenkaan hyväkseen numeroita pituuksien, kulmien tai pinta-alojen mittaamiseen. Pitkään aritmetiikka ja geometria pidettiinkin erossa toisistaan. Kuitenkin, kun algebran laskumenetelmät kehittyivät 1400-luvun jälkeen, myös geometrisia suureita alettiin käsitellä numeroiden tavoin.

Ranskalainen René Descartes (1596–1650) teki merkittävän uudistuksen geometriseen ajatteluun, kun hän keksi tavan yhdistää algebralliset laskutoimitukset geometrisiin suureisiin. Tämä johti ideaan esittää tason pisteet lukupareina ja liittää geometriseen objektiin algebrallinen yhtälö, jolloin geometrian ongelmia pystyttiin ratkaisemaan ensimmäistä kertaa laskennallisesti. Tämän Descartesin (*lat. Renatus Cartesius*) mukaan nimetyn karteesisen koordinaatiston kehittäminen johti nykyaikaisen analyyttisen geometrian syntyyn.

Tässä luvussa lähdetään liikkeelle yleisestä kunnasta F, kun nykyaikaisen analyyttisen geometrian pohjalla on reaalilukujen kunta $F = \mathbb{R}$. Luvussa määritellään, mitä tarkoitetaan karteesisella tasolla yli kunnan F, ja tutkitaan millaisia ominaisuuksia kunnalla on oltava, jotta tarvittavat Hilbertin aksioomat (Liite A) saadaan voimaan kyseisellä tasolla (Määritelmä 1.1).

Lähtökohtana on siis algebrallinen määritelmä kunnalle, jonka avulla saadaan malli Hilbertin aksioomien määrittämälle geometrialle. Geometriset käsitteet piste, suora, välissäolo ja yhtenevyys määritetään kunnan ominaisuuksien avulla. Kaikki kappaleen määritelmät ja lauseet ovat lähteestä [**6**].

Määritelmä 1.1. *Hilbertin taso* koostuu joukosta pisteitä, ja näiden muodostamista osajoukoista, joita kutsutaan suoriksi, sekä määrittelemättömistä välissäolon ja janojen sekä kulmien yhtenevyyksien käsitteistä, jotka toteuttavat aksioomat **(I1)**, **(I2)**, **(I3)**, **(B1)**, **(B2)**, **(B3)**, **(B4)**, **(C1)**, **(C2)**, **(C3)**, **(C4)**, **(C5)** ja **(SKS)** (ks. Liite A).

Määritelmä 1.2. Joukko F on *kunta*, kun kaikille a, $b \in F$ on määritelty laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ siten, että $a + b \in F$ ja $a \cdot b \in F$ ja lisäksi

(1) laskutoimituksella $+$ varustetulle joukolle F pätee
   (a) $(a + b) + c = a + (b + c)$ kaikille a, b, $c \in F$

(b) $a + b = b + a$ kaikille a, $b \in F$
(c) on olemassa alkio $0 \in F$, jolle $a + 0 = a$ kaikille $a \in F$
(d) kaikille $a \in F$ on olemassa alkio $-a \in F$, jolle $a + (-a) = 0$

(2) laskutoimituksella $\cdot$ varustetulle joukolle F pätee
(a) $(ab)c = a(bc)$ kaikille a, b, $c \in F$
(b) $ab = ba$ kaikille a, $b \in F$
(c) on olemassa alkio $1 \in F \setminus \{0\}$, jolle $a \cdot 1 = a$ kaikille $a \in F \setminus \{0\}$
(d) kaikille $a \in F \setminus \{0\}$ on olemassa alkio $a^{-1} \in F$, jolle $a \cdot a^{-1} = 1$

(3) laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ ovat distributiivisia toistensa suhteen eli $a(b + c) = ab + ac$ kaikille a, b, $c \in F$

Määritelmän 1.2 nojalla joukko F on siis kunta, jos se on varustettu kahdella peruslaskutoimituksella, jotka ovat kommutatiivisia ja assosiatiivisia, ja joiden tulos sisältyy myös kuntaan F. Lisäksi kunnan F tulee sisältää laskutoimitusten neutraali- ja käänteisalkiot. Voidaan myös sanoa, että F on kommutatiivinen ryhmä (ns. *Abelin ryhmä*) laskutoimituksen $+$ suhteen ja $F \setminus \{0\}$ on kommutatiivinen ryhmä laskutoimituksen $\cdot$ suhteen, sillä ryhmän käsite sisältää oletuksen laskutoimituksen assosiatiivisuudesta sekä neutraali- ja käänteisalkion olemassaolosta. Lisäksi kunnan F laskutoimitukset ovat distributiivisia toistensa suhteen [**6**], [**14**].

Huomataan myös, että vähennyslasku ja jakolasku saadaan määriteltyä summan ja tulon käänteisalkioiden avulla. Tällöin voidaan ajatella, että kunta F on itse asiassa neljällä peruslaskutoimituksella varustettu.

Määritellään seuraavaksi, mitä pisteillä ja suorilla tarkoitetaan mielivaltaisen kunnan F suhteen.

Määritelmä 1.3. Taso Π_F eli *karteesinen taso yli kunnan F* on joukko F^2, joka koostuu kunnan F järjestetyistä alkiopareista. Näitä alkiopareja kutsutaan tason Π_F *pisteiksi*. *Suora* on tason Π_F osajoukko, jonka määrittää lineaarinen yhtälö

$$ax + by + c = 0,$$

missä a, b, $c \in F$ ja vähintään $a \neq 0$ tai $b \neq 0$. Jos $b \neq 0$, voidaan suoran yhtälö kirjoittaa myös muodossa $y = kx + d$, jolloin sanotaan, että suoran *kulmakerroin* on k. Muotoa $x = c$ olevia suoria kutsutaan *pystysuoriksi* ja niiden kulmakertoimen sanotaan olevan ∞ [**6**].

Seuraava Lause 1.4 kertoo, että olemassaoloaksioomat ja paralleeliaksiooma (Liite A) ovat voimassa karteesisella tasolla yli minkä tahansa kunnan F.

Lause 1.4. *Olkoon F kunta. Tällöin karteesinen taso Π_F toteuttaa Hilbertin olemassaoloaksioomat* **(I1)**, **(I2)**, **(I3)** *ja paralleeliaksiooman* **(PA)**.

Todistus. **(I1)**: Kunnassa F voidaan suorittaa laskutoimituksia $+$, $-$, $\cdot$ ja $\div$ (Määritelmä 1.2). Olkoon $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ eri pisteitä siten, että A, $B \in F^2$. Merkitään $k_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, kun $x_2 \neq x_1$, ja sijoitetaan tämä pisteen A kautta kulkevan suoran yhtälöön $y - y_1 = k(x - x_1)$. Huomaa, että jos $x_1 = x_2$, on kyseessä pystysuora. Tällöin siis

$$\begin{aligned}(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad &\Leftrightarrow \quad (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad ax + by + c = 0,\end{aligned}$$

missä $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ ja $c = x_1y_2 - x_2y_1$, ja selvästi myös piste B toteuttaa kyseisen yhtälön.

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi oletetaan, että pisteet A ja B ovat suorilla

$$y = k_1x + d_1 \quad \text{ja} \quad y = k_2x + d_2,$$

ja käsitellään pystysuora tapaus erikseen. Tällöin

$$\begin{cases} y_1 = k_1x_1 + d_1 \\ y_1 = k_2x_1 + d_2 \\ y_2 = k_1x_2 + d_1 \\ y_2 = k_2x_2 + d_2, \end{cases}$$

mistä saadaan, että

$$\begin{cases} k_1x_1 + d_1 = k_2x_1 + d_2 \\ k_1x_2 + d_1 = k_2x_2 + d_2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_2 - d_1 = x_1(k_1 - k_2) \\ d_2 - d_1 = x_2(k_1 - k_2), \end{cases}$$

ja edelleen

$$x_1(k_1 - k_2) = x_2(k_1 - k_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)(k_1 - k_2) = 0.$$

Nyt aina $x_1 \neq x_2$, koska $A \neq B$ ja näiden pisteiden kautta kulkeva suora ei ole pystysuuntainen, jolloin välttämättä $k_1 = k_2$. Sijoittamalla tämä edeltävään yhtälöryhmään, saadaan, että myös $d_1 = d_2$. Siispä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on yksikäsitteinen.

Jos pisteet A ja B ovat pystysuorilla suorilla $x = c_1$ ja $x = c_2$, saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_1 = c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_2 = c_2, \end{cases}$$

mistä seuraa suoraan, että $c_1 = c_2$. Siispä pisteiden A ja B kautta kulkeva suora on tässäkin tapauksessa yksikäsitteinen

Tapauksessa, jossa pisteet A ja B ovat suorilla $x = c$ ja $y = kx + d$, saadaan

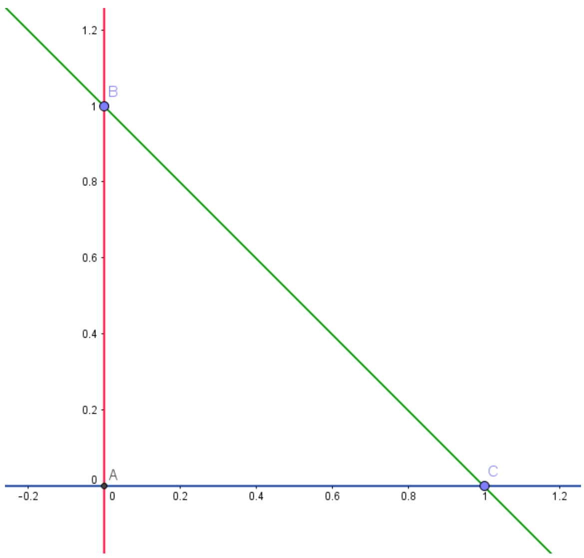
$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c \\ y_1 = kx_1 + d \\ y_2 = kx_2 + d, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = c \\ y_1 = kc + d \\ y_2 = kc + d, \end{cases}$$

mistä seuraa, että $y_1 = y_2$, mikä kuitenkin on ristiriita, sillä $A \neq B$. Siispä pisteet A ja B eivät voi samanaikaisesti olla sekä tyyppiä $x = c$ että tyyppiä $y = kx + d$ olevilla suorilla, vaan tilanteen on oltava edellisten kohtien kaltainen.

(I2): Jokaisessa kunnassa F on vähintään alkiot 0 ja 1 (Määritelmä 1.2). Jos mielivaltainen suora l on muotoa $y = kx + d$ (Määritelmä 1.3), asetetaan $x = 0$, jolloin $y = d$ ja saadaan piste $(0, d) \in l$, tai $x = 1$, jolloin $y = k + d$ ja saadaan toinen piste $(1, k + d) \in l$. Jos taas suora l on muotoa $x = c$ (Määritelmä 1.3), asetetaan $y = 0$ tai $y = 1$, jolloin etsityt pisteet suoralta l ovat $(c, 0)$ ja $(c, 1)$.

$\therefore$ Millä tahansa suoralla on vähintään kaksi pistettä.

(I3): Olkoon $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ ja $C = (1, 0)$ pisteitä. Tällöin mikään suora ei kulje kaikkien pisteiden A, B ja C kautta (Kuva 1.1). Suora, joka sisältää pisteet A ja B on muotoa $x = 0$, jolloin $C \notin \overleftrightarrow{AB}$. Toisaalta suora, joka sisältää pisteet A ja C, on muotoa $y = 0x + 0 = 0$, jolloin $B \notin \overleftrightarrow{AC}$. Pisteiden B ja C kautta kulkeva suora on muotoa $y = -x + 1$, jolloin $A \notin \overleftrightarrow{BC}$, sillä $0 \neq 1$. Lisäksi nämä kaikki suorat $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ ja $\overleftrightarrow{BC}$ ovat yksikäsitteisiä aksiooman **(I1)** nojalla.



Kuva 1.1. Mikään suora ei kulje kaikkien kolmen pisteen $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ ja $C = (1, 0)$ kautta

(PA): Tasolla Π_F kaksi eri suoraa ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakerroin k on sama. Olkoon $y = kx + d$ ja $y = kx + e$ kaksi eri suoraa. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = kx + d \\ y = kx + e \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad kx + d = kx + e \quad \Leftrightarrow \quad d = e,$$

mikä on ristiriita, sillä muuten kyseessä olisi sama suora. Siispä eri suorat, joilla on sama kulmakerroin, eivät leikkaa eli ne ovat yhdensuuntaiset. Olkoon l suora, jonka kulmakerroin on k, ja $P = (x_0, y_0)$ piste, joka ei ole suoralla l. Tällöin kaavasta

$$(y - y_0) = k(x - x_0)$$

nähdään, että pisteen P kautta kulkee täsmälleen yksi suora, jonka kulmakerroin on k, ja joka siis on yhdensuuntainen suoran l kanssa. $\square$

Huomautus 1.5.

(1) Aksiooman **(I1)** todistuksessa on merkityksetöntä, missä järjestyksessä pisteiden A ja B x- ja y-koordinaatit esitetään. Lisäksi muuttujista x ja y voidaan pisteen A koordinaattien sijaan vähentää myös pisteen B muuttujat eli kaava ei ole riippuvainen suoralla olevan pisteen valinnasta.
(2) Aksiooman **(PA)** todistuksessa löydetään siis suoran l kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen P kautta. Erityisesti löydetty suora on yksikäsitteinen, eli voimaan saadaan paralleeliaksioomaa voimakkaampi tulos.

Aksioomat **(I1)**, **(I2)** ja **(I3)** ovat siis voimassa tasolla Π_F yli minkä tahansa kunnan F. Sama ei kuitenkaan päde välissäololle, sillä kaikissa kunnissa ei ole järjestystä, kuten esimerkiksi kompleksilukujen joukossa $\mathbb{C}$. Välissäolon määrittelemiseksi esitellään siis seuraavaksi järjestetyn kunnan käsite.

MÄÄRITELMÄ 1.6. *Järjestetty kunta* on kunta F, jossa on *positiivisten* alkioiden osajoukko P, jolle pätee:

(1) Jos $a, b \in P$, niin $a + b \in P$ ja $a \cdot b \in P$.
(2) Mille tahansa $a \in F$ täsmälleen yksi seuraavista on voimassa: $a \in P$, $a = 0$ tai $-a \in P$.

HUOMAUTUS 1.7.

(1) Järjestetyllä kunnalla F, jonka positiivisten alkioiden joukko on P, määritellään $a > b$ mikäli $a - b \in P$ ja $a < b$ mikäli $b - a \in P$.
(2) Olkoon F järjestetty kunta ja olkoon $x \in F$. Tällöin

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Itseisarvo on siis aina kunnan F alkio, sillä kun $x \in F$, niin $-x \in F$ ja aina $0 \in F$ (Määritelmä 1.2).

Seuraava lause kertoo, että karteesisella tasolla Π_F yli kunnan F on mahdollista tehdä koordinaatistomuutos, joka siirtää akseleita, mutta pitää muun tason paikoillaan. Tätä ominaisuutta tarvitaan aksiooman **(B4)** todistamisessa. Määritellään sitä ennen, mitä välissäololla tasolla Π_F tarkoitetaan.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ ja $C = (x_3, y_3)$ pisteitä samalla suoralla $y = kx + d$ siten, että $A \neq B \neq C$. Tällöin piste B on pisteiden A ja C *välissä*, merkitään $A * B * C$, mikäli

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ tai } x_3 < x_2 < x_1.$$

Jos suora on pystysuora, käytetään pisteiden toisia koordinaatteja samaan tapaan.

LAUSE 1.9. *karteesisella tasolla Π_F yli kunnan F on mahdollista tehdä lineaarinen koordinaatistomuutos*

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f, \end{cases}$$

missä uudet koordinaattiakselit ovat mitkä tahansa kaksi leikkaavaa suoraa ja yksikköpisteet ovat mitkä tahansa näiden suorien pisteet P, $Q \neq O'$, missä O' on uusien *koordinaattiakselien leikkauspiste. Erityisesti tämä koordinaattimuutos säilyttää välissäolon.*

TODISTUS. Tässä todistuksessa käytetään hyväksi tietoa siitä, että lineaaristen kuvausten yhdiste on lineaarinen kuvaus. Todistetaan ensin, että lineaarinen kuvaus säilyttää välissäolon.

Olkoon $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2) \in \Pi_F$ pisteitä, joille pätee $A \neq B \neq C$ ja $A * B * C$. Oletetaan, että $a_1 < b_1 < c_1$, jolloin $a_2 < b_2 < c_2$ jos suora $\overleftrightarrow{AC}$ on nouseva eli suoran kulmakerroin $k > 0$ tai $c_2 < b_2 < a_2$ jos se on laskeva eli suoran kulmakerroin $k < 0$. Tapaukset $c_1 < b_1 < a_1$, $k = 0$ tai $k = \infty$ käsitellään vastaavasti.

Olkoon Ψ koordinaattimuutoskuvaus. Merkitään

$$\begin{aligned}
A' &= \Psi(A) = (aa_1 + ba_2 + c, da_1 + ea_2 + f) = (a'_1, a'_2), \\
B' &= \Psi(B) = (ab_1 + bb_2 + c, db_1 + eb_2 + f) = (b'_1, b'_2) \quad \text{ja} \\
C' &= \Psi(C) = (ac_1 + bc_2 + c, dc_1 + ec_2 + f) = (c'_1, c'_2).
\end{aligned}$$

Koska pisteet A, B ja C ovat samalla suoralla, voidaan merkitä myös, että

$$a_2 = ka_1 + g, \quad b_2 = kb_1 + g \quad \text{ja} \quad c_2 = kc_1 + g.$$

Tällöin

$$a'_1 = aa_1 + b(ka_1 + g) + c = aa_1 + kba_1 + bg + c = (a + kb)a_1 + bg + c$$

ja samoin saadaan alkioille b'_1 ja c'_1

$$b'_1 = (a + kb)b_1 + bg + c \quad \text{ja} \quad c'_1 = (a + kb)c_1 + bg + c$$

ja alkioille a'_2, b'_2 ja c'_2 saadaan

$$a'_2 = (d + ek)a_1 + eg + f, \quad b'_2 = (d + ek)b_1 + eg + f \quad \text{ja} \quad c'_2 = (d + ek)c_1 + eg + f.$$

Tutkitaan nyt erikseen tapauksia $a = -kb$, $a < -kb$ ja $a > -kb$.

(1) $a = -kb$: Tällöin $a'_1 = b'_1 = c'_1 = bg + c$ eli kyseessä on pystysuora tapaus, jolloin tutkitaan pisteiden A', B' ja C' toisia koordinaatteja a'_2, b'_2 ja c'_2 niiden keskinäisen järjestyksen selvittämiseksi. Koska saman vakion $eg + f$ lisääminen tai vähentäminen ei muuta alkioiden välistä järjestystä, määrittää sen kerroin $d + ek$. Jos $d + ek > 0$ niin $a'_2 < b'_2 < c'_2$, sillä $a'_1 < b'_1 < c'_1$ eikä positiivisella luvulla kertominen muuta järjestystä. Jos taas $d + ek < 0$, niin $a'_2 > b'_2 > c'_2$, koska $a'_1 < b'_1 < c'_1$ ja negatiivisella luvulla kertominen kääntää alkioiden järjestyksen. Joka tapauksessa siis b'_2 on alkioiden a'_2 ja c'_2 välissä.

(2) $a < -kb$: Koska saman vakion $bg+c$ lisääminen ei muuta alkioiden keskinäistä järjestystä ja koska nyt $a + kb < 0$ ja oletuksen mukaan $a_1 < b_1 < c_1$, niin koordinaattimuunnos kääntää alkioiden välisen järjestyksen eli $a'_1 > b'_1 > c'_1$. Erityisesti b'_1 on alkioiden a'_1 ja c'_1 välissä.

(3) $a > -kb$: Koska nyt $a + kb > 0$, säilyy alkioiden välinen järjestys eli $a'_1 < b'_1 < c'_1$. Erityisesti b'_1 on alkioiden a'_1 ja c'_1 välissä.

$\therefore$ Välttämättä piste B' on pisteiden A' ja C' välissä. Kuitenkin riippuen kertoimista a, b, d ja e pisteiden järjestys saattaa suoralla kääntyä.

Muodostetaan nyt koordinaattimuunnos vaiheittain. Siirretään ensin origo $O = (0,0)$ pisteeseen $O' = (a', b')$ seuraavasti:

$$\begin{cases} x' = x + a' \\ y' = y + b'. \end{cases}$$

Nyt muutos

$$\begin{cases} x' = x - Cy \\ y' = y, \end{cases}$$

pitää x-akselin paikoillaan, koska x-akselilla $y = 0$. Lisäksi se korvaa y-akselin uudella suoralla, joka kulkee origon kautta, minkä näkee sijoittamalla pisteen $(x, y) = (0, 0)$ edelliseen yhtälöpariin. Samoilla perusteluilla muutos

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - Dx, \end{cases}$$

pitää y-akselin paikoillaan ja kääntää x-akselia.

Siirretään sitten käytössä olevan koordinaatiston yksikköpisteet akseliensa toisiksi pisteiksi muutoksella

$$\begin{cases} x' = cx \\ y' = dy, \end{cases}$$

jolloin esimerkiksi piste $(1, 0)$ muuttuisi pisteeksi $(c, 0)$.

$\therefore$ Yhdistämällä nämä käsitellyt muutokset saadaan alkuperäinen koordinaatisto muutettua halutunlaiseksi, jossa on uudet akselit ja yksikköpisteet. $\square$

Nyt voidaan osoittaa, että kaikki välissäoloaksioomat ovat voimassa tasolla Π_F yli järjestetyn kunnan F.

Lause 1.10. *Jos F on järjestetty kunta, niin tasossa Π_F määritelty välissäolo toteuttaa aksioomat* **(B1)**, **(B2)**, **(B3)** *ja* **(B4)**.

Todistus. Oletetaan, että F on järjestetty kunta ja P sen positiivisten alkioiden joukko.

Osoitetaan nyt, että aksioomat **(B1)**, **(B2)**, **(B3)** ja **(B4)** ovat voimassa tasolla yli kunnan F.

(B1): Seuraa suoraan välissäolon määritelmästä.

(B2): Seuraa järjestetyn kunnan ominaisuuksista eli annetuille $b < d \in F$ on olemassa alkiot a, c, $e \in F$ joille $a < b < c < d < e$. Koska $1 \in F$, niin voidaan valita $a = b - 1 < b$ ja $e = d + 1 > d \in F$ (Huomautus 1.7), jolloin a, $e \in F$ kunnan ominaisuuksien seurauksena (Määritelmä 1.2). Nyt riittää löytää alkio c, jolle $b < c < d$. Koska kunnan ominaisuuksien perusteella myös alkio $1 + 1 = 2 \in F$, niin tällöin myös $c = \frac{d+b}{2} \in F$. Koska

$$d - \frac{d+b}{2} = \frac{2d - d - b}{2} = \frac{d - b}{2} \in P,$$

niin $\frac{d+b}{2} < d$. Toisaalta

$$\frac{d+b}{2} - b = \frac{(d + b - 2b)}{2} = \frac{d - b}{2} \in P,$$

jolloin $\frac{d+b}{2} > b$. Siispä $b < c < d$.

(B3): Olkoon a, b ja c erillisiä kunnan F alkioita. Järjestetyllä kunnalla F vain yksi seuraavista on totta:

$$a < b < c, \quad a < c < b, \quad b < a < c, \quad b < c < a, \quad c < a < b \quad \text{tai} \quad c < b < a.$$

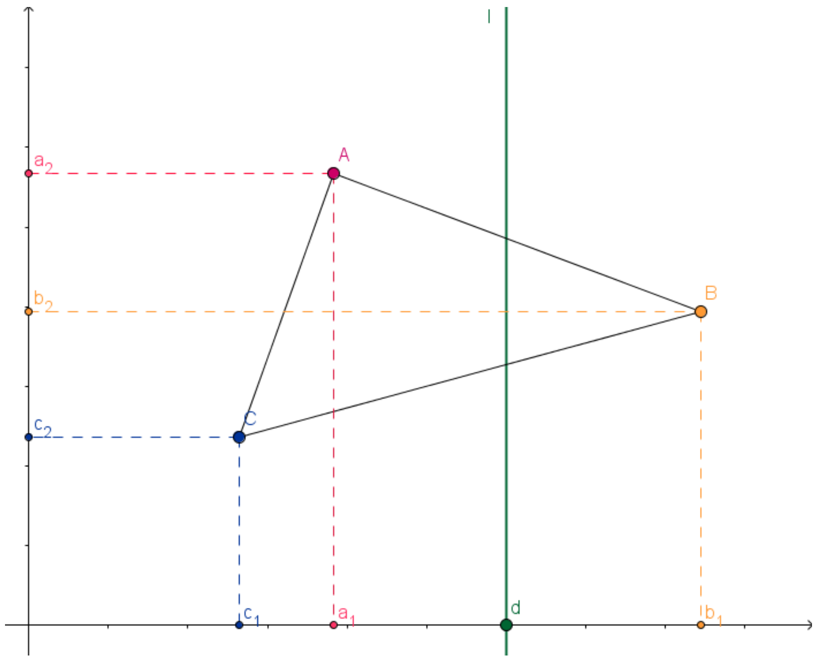
Aksiooma seuraa tästä järjestetyn kunnan ominaisuudesta.

(B4): Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja l suora, joka leikkaa kolmion $\triangle ABC$ sivua AB. Oletetaan, että $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2) \notin l$.

Oletetaan, että l on pystysuora eli $x = d$. Tämä voidaan tehdä, sillä mikä tahansa suora voidaan muuttaa pystysuoraksi koordinaattimuutoksen avulla, joka säilyttää välissäolon. (Lause 1.9), (Kuva 1.2).

Nyt joko $a_1 < d < b_1$ tai $b_1 < d < a_1$. Oletetaan ensimmäinen, sillä jälkimmäinen tapaus todistetaan vastaavasti. Jos $c_1 < d$, niin tällöin l ei voi leikata sivua AC, koska d on sekä pisteen A että C x-koordinaattia suurempi eli $a_1 \leq c_1 < d$ tai $c_1 \leq a_1 < d$. Sen sijaan l leikkaa sivua BC, sillä nyt $c_1 < d < b_1$.

Jos $d < c_1$ vastaavalla päättelyllä saadaan, että tällöin l leikkaa sivua AC, mutta ei sivua BC, ja siten **(B4)** on voimassa kyseisellä tasolla. □



Kuva 1.2. Aksiooman **(B4)** tilanne

Huomautus 1.11. Myös Lauseen 1.10 käänteinen tulos pätee. Jos F on kunta ja Π_F karteesinen taso, jossa on määritelty välissäolon käsite ja joka toteuttaa Hilbertin välissäoloaksioomat **(B1)**, **(B2)**, **(B3)** ja **(B4)**, niin tällöin F on järjestetty kunta. Todistus tälle löytyy lähteestä [**6**, Proposition 15.3].

Lauseen 1.10 nojalla välissäolo saadaan siis määriteltyä karteesisella tasolla yli kunnan F, kun kunta F on järjestetty. Seuraavaksi määritellään yhtenevyyden käsite, ja tätä varten pysytään edelleen järjestetyllä kunnalla F. Koska neliöjuuren olemassaolosta kunnassa F ei tiedetä, määritellään janojen yhtenevyyttä varten etäisyysfunktion neliö:

$$\mathrm{dist}^2(A,B) = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2,$$

missä $A = (a_1, a_2)$ ja $B = (b_1, b_2)$. Etäisyysfunktio siis antaa kahden tason Π_F pisteen A ja B algebrallisen etäisyyden [**6**]. Etäisyyden neliötä voidaan käyttää yhtenevyyden määritelmässä, sillä etäisyys on aina positiivinen ja tällöin ehdosta $a^2 = b^2$ seuraa myös, että $a = b$, jos nämä ovat kunnan F alkioita eli neliöjuuri on olemassa.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Janat AB ja CD ovat *yhtenevät* karteesisella tasolla yli kunnan F, mikäli

$$\mathrm{dist}^2(A,B) = \mathrm{dist}^2(C,D).$$

Kulmien yhtenevyyden määrittelemiseksi määritetään mille tahansa kulmalle α tangentti eli funktio $\tan\alpha$, joka kertoo kulman α suuruuden.

MÄÄRITELMÄ 1.13. Olkoon α kulma, joka muodostuu kahden puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ välille, ja olkoon näitä puolisuoria vastaavien suorien kulmakertoimet $k_{AB} \neq \infty$ ja $k_{AC} \neq \infty$. Tällöin kulman α *tangentti* määritellään

$$\tan\alpha = \pm\left|\frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AB}k_{AC}}\right|,$$

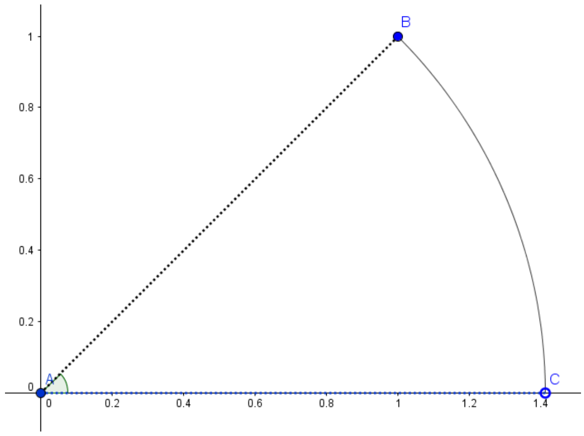
missä positiivinen arvo valitaan, kun kulma α on terävä, ja negatiivinen, kun se on tylppä.

HUOMAUTUS 1.14. Oletetaan, että suora $\overleftrightarrow{AC}$ on pystysuora, eli $k_{AC} = \infty$. Tapaus, jossa $k_{AB} = \infty$ menee vastaavasti. Tällöin kulman α tangentti saadaan raja-arvona

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \lim_{k_{AC}\to\infty} \pm\left|\frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AB}k_{AC}}\right| = \lim_{k_{AC}\to\infty} \pm\left|\frac{\frac{k_{AC}-k_{AB}}{k_{AC}}}{\frac{1+k_{AB}k_{AC}}{k_{AC}}}\right| \\ &= \lim_{k_{AC}\to\infty} \pm\left|\frac{1 - \frac{k_{AB}}{k_{AC}}}{\frac{1}{k_{AC}} + k_{AB}}\right| = \pm\left|\frac{1}{k_{AB}}\right|.\end{aligned}$$

Huomaa, että suoralle kulmalle pätee $k_{AB}k_{AC} = -1$, jolloin suoran kulman tangentin katsotaan olevan ∞. Huomaa myös, että kulman tangentti riippuu ainoastaan kulman määrittävien suorien kulmakertoimista, jolloin kaava ei automaattisesti erota kulmaa ja sen vieruskulmaa toisistaan. Tangentin määritelmästä seuraa suoraan myös, että tangentti on kunnan F alkio, kun kyseessä ei ole suora kulma. Tangentti on määritelty kunnassa F määriteltyjen laskutoimitusten ja niiden käänteisalkioiden avulla ja Huomautuksen 1.7 kohdan (2) nojalla myös itseisarvo on kunnan F alkio [**6**].

Määritellään vielä kulmien yhtenevyys tasolla Π_F, jonka jälkeen voidaan osoittaa, että myös aksioomat **(C2)**, **(C3)**,**(C4)** ja **(C5)** ovat voimassa karteesisella tasolla yli järjestetyn kunnan F. Jotta myös aksiooma **(C1)** olisi voimassa, täytyy kunnasta F tehdä vielä eräs lisäoletus, kuten Esimerkistä 1.15 huomataan [**6**].



KUVA 1.3. Aksiooma **(C1)** ei ole voimassa millä tahansa tasolla yli järjestetyn kunnan

ESIMERKKI 1.15. Valitaan kunta $F = \mathbb{Q}$ eli rationaalilukujen joukko. Tällöin esimerkiksi janaa pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(1, 1)$ ei voida siirtää x-akselille, koska $\sqrt{2}$ ei kuulu kuntaan $\mathbb{Q}$ (Kuva 1.3).

MÄÄRITELMÄ 1.16. Kulmat α ja β ovat *yhtenevät* karteesisella tasolla yli järjestetyn kunnan F, jos $\tan\alpha = \tan\beta$ ja $\tan\alpha, \tan\beta \in F \cup \{\infty\}$.

LAUSE 1.17. *Olkoon F järjestetty kunta, ja olkoon Π_F siihen liittyvä taso. Tällöin tasolla Π_F aksioomat* **(C2)**, **(C3)**,**(C4)** *ja* **(C5)** *ovat voimassa. Edelleen aksiooma* **(C1)** *on voimassa tasolla Π_F jos ja vain jos F on* Pythagoraan kunta, *eli mille tahansa alkiolle $a \in F$, alkio $\sqrt{1 + a^2} \in F$.*

TODISTUS. **(C2)**: Seuraa suoraan Määritelmästä 1.12.

(C3): Olkoon $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ ja $C = (c_1, c_2)$ pisteitä suoralta $y = kx+d$ ja $A' = (a'_1, a'_2)$, $B' = (b'_1, b'_2)$ ja $C' = (c'_1, c'_2)$ pisteitä suoralta $y = k'x + d'$ siten, että $A * B * C$ ja $A' * B' * C'$. Olkoon lisäksi $(A, B) \cong (A', B')$ sekä $(B, C) \cong (B', C')$. Huomaa, että jos ainakin toinen suorista $y = kx+d$ ja $y = k'x+d'$ on pystysuora, niin seuraavia vastaavat päättelyt voidaan tehdä käyttäen pisteiden toisia koordinaatteja.

Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}^2(A, B) &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\
&= (a_1 - b_1)^2 + ((ka_1 + d - kb_1 - d) = (a_1 - b_1)^2 + k^2(a_1 - b_1)^2 \\
&= (k^2 + 1)(a_1 - b_1)^2,
\end{aligned}$$

ja samoin $\operatorname{dist}^2(A', B') = (k'^2 + 1)(a'_1 - b'_1)^2$, jolloin oletusten ja Määritelmän 1.12 avulla huomataan, että

$$\operatorname{dist}^2(A, B) = \operatorname{dist}^2(A'B') \Leftrightarrow (k^2 + 1)(a_1 - b_1)^2 = (k'^2 + 1)(a'_1 - b'_1)^2.$$

Vastaavalla päättelyllä nähdään, että

$$\operatorname{dist}^2(B, C) = \operatorname{dist}^2(B', C') \Leftrightarrow (k^2 + 1)(b_1 - c_1)^2 = (k'^2 + 1)(b'_1 - c'_1)^2.$$

Lisäksi huomataan, että

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}^2(A,B)\cdot\operatorname{dist}^2(B,C) = (k^2+1)(a_1-b_1)^2(k^2+1)(b_1-c_1)^2\\ &= (k^2+1)^2(a_1-b_1)^2(b_1-c_1)^2 = ((k^2+1)(a_1-b_1)(b_1-c_1))^2,\end{aligned}$$

ja samoin $\operatorname{dist}^2(A',B')\cdot\operatorname{dist}^2(B',C') = ((k'^2+1)(a_1'-b_1')(b_1'-c_1'))^2$. Tällöin janojen yhtenevyydestä (Määritelmä 1.12) seuraa, että

$$((k^2+1)(a_1-b_1)(b_1-c_1))^2 = ((k'^2+1)(a_1'-b_1')(b_1'-c_1'))^2.$$

Järjesteyssä kunnassa ehdosta $s^2=t^2$ seuraa $s=t$ tai $s=-t$ ja nyt alkio b_1 on alkioiden a_1 ja c_1 välissä ja alkio b_1' on alkioiden a_1' ja c_1' välissä (Lause 1.10). Tällöin välttämättä aina $(k^2+1)(a_1-b_1)(b_1-c_1)>0$ ja $(k'^2+1)(a_1'-b_1')(b_1'-c_1')>0$, mistä seuraa, että $(k^2+1)(a_1-b_1)(b_1-c_1) = (k'^2+1)(a_1'-b_1')(b_1'-c_1')$.

Nyt voidaan osoittaa, että $\operatorname{dist}(A,C)=\operatorname{dist}(A',C')$:

$$\begin{aligned}&\operatorname{dist}^2(A,C) = (a_1-c_1)^2+(a_2-c_2)^2\\
&= ((a_1-b_1)+(b_1-c_1))^2+((a_2-b_2)+(b_2-c_2))^2\\
&= ((a_1-b_1)+(b_1-c_1))^2+((ka_1+d-kb_1-d)+(kb_1+d-kc_1-d))^2\\
&= ((a_1-b_1)+(b_1-c_1))^2+(k(a_1-b_1)+k(b_1-c_1))^2\\
&= (a_1-b_1)^2+2(a_1-b_1)(b_1-c_1)+(b_1-c_1)^2\\
&\quad +k^2(a_1-b_1)^2+k^2(b_1-c_1)^2+2k^2(a_1-b_1)(b_1-c_1)\\
&= (k^2+1)(a_1-b_1)^2+(k^2+1)2(a_1-b_1)(b_1-c_1)+(k^2+1)(b_1-c_1)^2\\
&= (k'^2+1)(a_1'-b_1')^2+(k'^2+1)2(a_1'-b_1')(b_1'-c_1')+(k'^2+1)(b_1'-c_1')^2\\
&= \operatorname{dist}^2(A',C').\end{aligned}$$

Siispä $AC\cong A'C'$.

(C4): Olkoon α annettu kulma ja olkoon $\overrightarrow{AB}$ puolisuora, jonka kulmakerroin on k_{AB}. Tällöin riittää löytää suora $\overleftrightarrow{AC}$, jonka kulmakerroin on k_{AC}, ja jolle

$$\tan\alpha = \pm\left|\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AB}k_{AC}}\right|,$$

missä merkki valitaan sen mukaan, onko kulma α terävä vai tylppä.

Nyt yhtälö voidaan ratkaista kulmakertoimen k_{AC} suhteen kunnassa F:

$$\begin{aligned}&\tan\alpha = \frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AB}k_{AC}}\\
\Leftrightarrow\quad &\tan\alpha + k_{AB}k_{AC}\tan\alpha = k_{AC}-k_{AB}\\
\Leftrightarrow\quad &k_{AC}(k_{AB}\tan\alpha-1) = -k_{AB}-\tan\alpha\\
\Leftrightarrow\quad &k_{AC} = -\frac{k_{AB}+\tan\alpha}{k_{AB}\tan\alpha-1}\\
\Leftrightarrow\quad &k_{AC} = \frac{k_{AB}+\tan\alpha}{1-k_{AB}\tan\alpha}.\end{aligned}$$

Vastaavalla laskulla saadaan, että

$$\begin{aligned} & \tan\alpha = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}k_{AC}} \\ \Leftrightarrow \quad & k_{AC} = \frac{k_{AB} - \tan\alpha}{1 + k_{AB}\tan\alpha} \\ \therefore \quad & k_{AC} = \frac{k_{AB} \pm \tan\alpha}{1 \mp k_{AB}\tan\alpha}. \end{aligned}$$

Uusi kulma α' voidaan nyt muodostaa puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ halutulle puolelle valitsemalla toinen kahdesta saadusta ratkaisusta.

(C5) Seuraa suoraan Määritelmästä 1.16.

(C1) Oletetaan ensin, että aksiooma **(C1)** on voimassa tasossa Π_F, ja osoitetaan, että tällöin kunta F on Pythagoraan kunta.

Olkoon a mikä tahansa kunnan F alkio. Tarkastellaan janaa origosta pisteeseen $(a, 1)$. Tällöin x-akselilla on tämän janan kanssa yhtenevä jana, joka alkaa myös origosta, jos on olemassa alkio $b \in F$, jolle

$$\mathrm{dist}^2((0,0),(a,1)) = \mathrm{dist}^2((0,0),(b,0)).$$

Tällöin siis

$$(1-0)^2 + (a-0)^2 = (0-0)^2 + (b-0)^2 \Leftrightarrow 1 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{1+a^2}.$$

Siispä F on Pythagoraan kunta, mikäli **(C1)** on voimassa tasossa Π_F.

Oletetaan sitten, että F on Pythagoraan kunta eli $\sqrt{1+a^2} \in F$, kun $a \in F$, ja osoitetaan, että tällöin aksiooma **(C1)** on voimassa tasolla Π_F.

Nyt mille tahansa $0 \neq b \in F$ ja $c \in F$ voidaan kirjoittaa

$$b^2 + c^2 = b^2 + b^2\left(\frac{c^2}{b^2}\right) = b^2\left(1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right).$$

Valitaan $a = \frac{c}{b}$, jolloin kunnan ominaisuuksien seurauksena (Määritelmä 1.2) $a \in F$ ja edellinen yhtälö saadaan muotoon

$$b^2 + c^2 = b^2(1+a^2) \Leftrightarrow \sqrt{b^2+c^2} = |b|\sqrt{1+a^2}.$$

Nyt $|b| \in F$ (Huomautus 1.7) ja oletuksen nojalla $\sqrt{1+a^2} \in F$, joten myös $\sqrt{b^2+c^2} \in F$. Tästä seuraa, että mille tahansa pisteille B, $C \in \Pi_F$ pisteiden B ja C *etäisyys* kuuluu myös kuntaan F, siis

$$\mathrm{dist}(B,C) = \sqrt{(b_1-c_1)^2 + (b_2-c_2)^2} \in F,$$

koska erotus kuuluu kuntaan (Määritelmä 1.2) ja edellä todettiin, että $\sqrt{b^2+c^2} \in F$.

Olkoon nyt $y = kx + d$ annettu suora ja olkoon $A = (a, ka+d)$ piste annetulta suoralta. Nyt halutaan viedä jana, jonka pituus on e, tälle suoralle. Etsitään piste

$C = (c, kc + d)$ samalta suoralta siten, että

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(A, C) =& \sqrt{(a-c)^2 + (ka + d - (kc - d))^2} = e \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{(a-c)^2 + (ka - kc)^2} = e \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{(a-c)^2 + k^2(a-c)^2} = e \\ \Leftrightarrow\quad & \sqrt{(a-c)^2(k^2+1)} = e \\ \Leftrightarrow\quad & |a-c|\sqrt{k^2+1} = e.\end{aligned}$$

Nyt oletuksen nojalla edelleen $\sqrt{k^2+1} \in F$, joten ylläolevasta yhtälöstä voidaan ratkaista c:

$$\begin{aligned}& |a-c| = \frac{e}{\sqrt{k^2+1}} \\ \Leftrightarrow\quad & a - c = \frac{e}{\sqrt{k^2+1}} \text{ tai } c - a = \frac{e}{\sqrt{k^2+1}} \\ \Leftrightarrow\quad & c = -\frac{e}{\sqrt{k^2+1}} + a \text{ tai } c = \frac{e}{\sqrt{k^2+1}} + a.\end{aligned}$$

Koska C voidaan löytää suoralta $y = kx + d$ pisteen A kummalta tahansa puolelta, on ratkaisuja alkiolle c kaksi.

Siispä **(C1)** on voimassa karteesisella tasolla yli kunnan F, mikäli F on Pythagoraan kunta eli $\sqrt{1+a^2} \in F$ kaikilla $a \in F$. $\square$

LUKU 2

Jäykät liikkeet ja Sivu-Kulma-Sivu -sääntö

Eukleides yritti geometrisessa perusteoksessaan *Alkeet* todistaa **(SKS)**-sääntöä siirtämällä päällekäin kolmiot, joilla oli yhtenevät sivut ja niiden välinen kulma (*method of superposition*). Kuitenkaan mikään Eukleideen aksiooma tai yleinen oletus ei anna suoraan lupaa geometrisen kuvion liikuttamiselle toiseen asemaan. Liikuttelun toimiminen vaatii oletuksen geometrian homogeenisuudesta eli geometrian on oltava samanlaista joka puolella avaruutta tai tasoa.

Jotta pystyttäisiin määrittämään tarkemmin, mihin oletuksiin kuvioiden liikuttaminen perustuu, pitää ottaa käyttöön tason *jäykät liikkeet*. Tässä kappaleessa osoitetaan, että jäykkien liikkeiden olemassaolo on yhtäpitävää yhtenevyysaksiooman **(SKS)** kanssa, minkä avulla voidaan osoittaa, että aksiooma **(SKS)** on voimassa tasolla yli järjestetyn kunnan F. Lisäksi osoitetaan jäykkien liikkeiden olemassaolo millä tahansa Hilbertin tasolla (Määritelmä 1.1). Kaikki luvun määritelmät ja lauseet ovat lähteestä [**6**].

2.1. Jäykät liikkeet

Tässä kappaleessa määritellään tason jäykät liikkeet ja esitetään ehdot, joiden täytyy täyttyä, jotta jäykkiä liikkeitä olisi olemassa tasolla tarpeeksi. Kappaleen lopussa todistetaan Eukleideen ajatusta seuraten, että jos jäykkiä liikkeitä on olemassa tasolla, jossa tietyt Hilbertin aksioomat ovat voimassa, niin jäykkien liikkeiden olemassaolosta seuraa aksiooma **(SKS)**.

Määritelmä 2.1. Olkoon Π geometria, joka sisältää pisteen, suoran, välissäolon sekä janojen ja kulmien yhtenevyyden käsitteet. Geometrian Π *Jäykkä liike* on kuvaus $\Phi : \Pi \to \Pi$, joka on määritelty kaikissa pisteissä seuraavasti:

(1) Kuvaus Φ on injektio geometrialta Π itselleen.
(2) Kuvaus Φ kuvaa suorat suoriksi.
(3) Kuvaus Φ säilyttää samalla suoralla olevien pisteiden välissäolon.
(4) Mille tahansa pisteille A ja B pätee, että $AB \cong \Phi(A)\Phi(B)$.
(5) Mille tahansa kulmalle α pätee $\sphericalangle\alpha \cong \sphericalangle\Phi(\alpha)$.

Määritelmän 2.1 nojalla jäykät liikkeet ovat nimensä mukaisesti jäykkiä eli kuvaus Φ ei muuta janojen pituuksia tai kulmien suuruuksia. Koska jäykät liikkeet säilyttävät pituuden, ovat ne erityisesti isometrioita (Luku 3).

Olkoon seuraavaa määritelmää varten $\mathcal{G}$ kaikkien jäykkien liikkeiden joukko, joka varmasti sisältää ainakin *identtisen kuvauksen* eli kuvauksen, joka pitää kaikki tason Π_F pisteet paikoillaan. Erityisesti $\mathcal{G}$ on *ryhmä*, sillä minkä tahansa kahden jäykän liikkeen yhdiste on uusi jäykkä liike (Luku 3) [**6**].

Määritelmä 2.2. *Jäykkien liikkeiden olemassaolo* eli **(ERM)** (existence of rigid motions). Geometriassa Π pätee **(ERM)**, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(1) Mille tahansa pisteille $A, A' \in \Pi$ on olemassa jäykkä liike $\Phi \in \mathcal{G}$, jolle $\Phi(A) = A'$.
(2) Mille tahansa pisteille O, A, A' on olemassa jäykkä liike $\Phi \in \mathcal{G}$, jolle $\Phi(O) = O$ ja Φ kuvaa puolisuoran $\overrightarrow{OA}$ puolisuoraksi $\overrightarrow{OA'}$.
(3) Mille tahansa suoralle l on olemassa jäykkä liike $\Phi \in \mathcal{G}$ siten, että $\Phi(P) = P$ kaikille $P \in l$ ja Φ vaihtaa suoran l rajoittamat puolitasot keskenään.

Määritelmän 2.2 kohdan (1) voidaan ajatella vastaavan siirtoa, kohdan (2) kiertoa ja kohdan (3) heijastusta. Seuraava lause kertoo, että kun tason ominaisuuksista oletetaan riittävästi, pystytään todistamaan, että **(ERM)**:stä seuraa **(SKS)**. Lauseen todistus on verrattavissa Eukleideen tapaan todistaa **(SKS)**.

Lause 2.3. *Oletetaan, että olemassaolo-, välissäolo-,* **(C2)**- *ja* **(C5)**-*aksioomat, sekä niiden lisäksi aksioomien* **(C1)** *ja* **(C4)** *yksikäsitteisyysosat ovat voimassa tasolla. Tällöin jäykkien liikkeiden olemassaolosta* **(ERM)** *seuraa aksiooma* **(SKS)**.

Todistus. Oletetaan, että **(ERM)** on voimassa tasolla. Olkoon lisäksi kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A_2B_2C_2$ siten, että $AB \cong A_2B_2$, $AC \cong A_2C_2$ ja $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B_2A_2C_2$. Tarkoituksena on siis osoittaa, että $\triangle ABC \cong \triangle A_2B_2C_2$ eli erityisesti, että $BC \cong B_2C_2$ ja $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle C_2B_2A_2$ sekä $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A_2C_2B_2$. Todistusta on havainnollistettu Kuvassa 2.1

Nyt **(ERM)**:n kohdan (1) nojalla on olemassa jäykkä liike Φ, joka vie pisteen A pisteeksi A_2. Kuvataan seuraavaksi samalla jäykällä liikkeellä Φ pistettä B ja merkitään $B_3 = \Phi(B)$. Tällöin $AB \cong A_2B_3$, sillä jäykkänä liikkeenä Φ säilyttää pituuden (Määritelmä 2.1). Koska oletuksena lisäksi $AB \cong A_2B_2$, niin aksiooman **(C2)** nojalla myös $A_2B_2 \cong A_2B_3$.

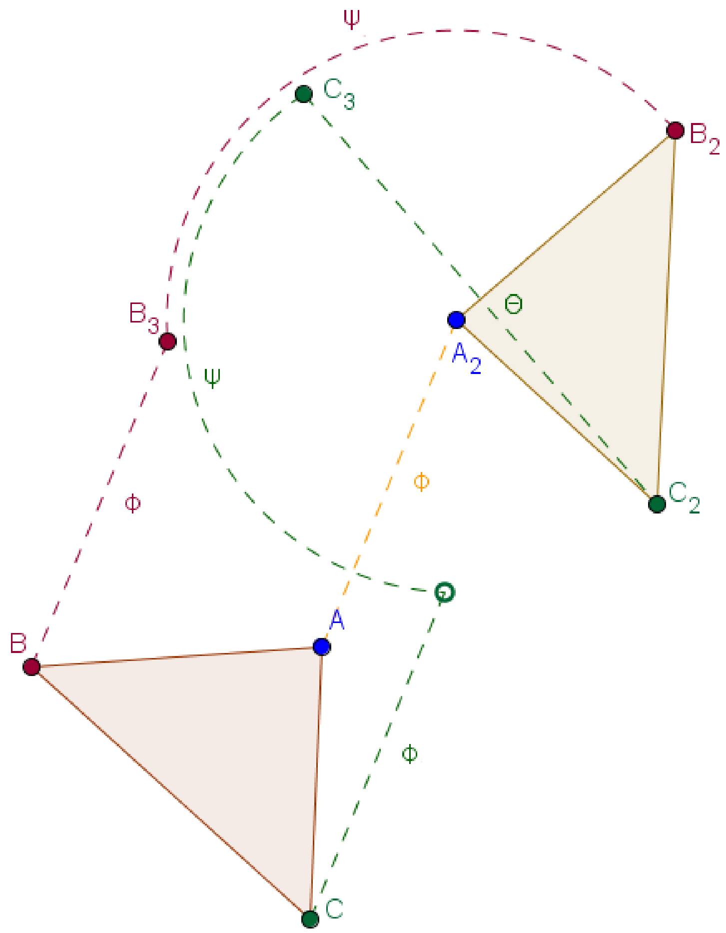
(ERM):n kohdan (2) nojalla on olemassa toinen jäykkä liike Ψ, joka pitää pisteen A_2 paikoillaan ja vie puolisuoran $\overrightarrow{A_2B_3}$ puolisuoraksi $\overrightarrow{A_2B_2}$. Koska kuvaus Ψ säilyttää pituuden (Määritelmä 2.1) ja edellä todettiin, että $A_2B_2 \cong A_2B_3$, niin aksiooman **(C1)** yksikäsitteisyysosan nojalla täytyy olla, että $\Psi(B_3) = \Psi\Phi(B) = B_2$.

Kuvataan seuraavaksi pistettä C kummallakin jäykällä liikkeellä Φ ja Ψ, ja merkitään $C_3 = \Psi\Phi(C)$. Tarkastellaan sitten kuvapistettä C_3 suoran $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ suhteen.

Koska Ψ ja Φ säilyttävät kulmien suuruuden (Määritelmä 2.1), tiedetään, että $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B_2A_2C_3 = \sphericalangle \Psi\Phi(B)\Psi\Phi(A)\Psi\Phi(C)$, mutta ei voida olla varmoja kummalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ kuvapiste C_3 on. Tästä syystä otetaan tarpeen mukaan käyttöön vielä kolmas jäykkä liike Θ (**(ERM)** (3)), joka pitää suoralla $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ olevat pisteet paikoillaan, mutta vaihtaa suoran puolet keskenään. Käytetään kuvausta Θ, mikäli $C_3 * \overleftrightarrow{A_2B_2} * C_2$. Tällöin siis $\Theta(A_2) = \Theta\Psi\Phi(A) = A_2$, $\Theta(B_2) = \Theta\Psi\Phi(B) = B_2$ ja $\Theta(C_3) = \Theta\Psi\Phi(C)$ on samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ kuin piste C_2.

Olkoon nyt $\sigma \in G$ siten, että se koostuu jäykkien liikkeiden Θ, Ψ ja Φ yhdistetystä kuvauksista $\Psi\Phi$ tai $\Theta\Psi\Phi$ sen mukaan käytettiinkö kuvausta Θ vai ei. Kuten edellä todettiin $\sigma(A) = A_2$, $\sigma(B) = B_2$ ja tiedetään, että $\sigma(C) = C_4$ on samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ pisteen C_2 kanssa.

Koska σ on jäykkä liike, se säilyttää kulmien suuruuden (Määritelmä 2.1), joten $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B_2A_2C_4$. Toisaalta oletuksen nojalla $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B_2A_2C_2$, joten aksiooman **(C5)** nojalla $\sphericalangle B_2A_2C_2 \cong \sphericalangle B_2A_2C_4$. Lisäksi, koska nyt C_2 ja C_4 ovat suoran $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ samalla puolella, aksiooman **(C4)** yksikäsitteisyysosaan vedoten $\overrightarrow{A_2C_2} \cong \overrightarrow{A_2C_4}$.



KUVA 2.1. Lauseen 2.3 todistuksen jäykät liikkeet

Koska vielä oletuksena $AC \cong A_2C_2$ ja koska σ jäykkänä liikkeenä säilyttää janojen pituuden (Määritelmä 2.1) ja siten $AC \cong A_2C_4$, niin aksiooman **(C2)** nojalla $A_2C_2 \cong A_2C_4$. Koska edelleen pisteet C_2 ja C_4 ovat pisteen A_2 samalla puolella, saadaan aksiooman **(C1)** yksikäsitteisyysosan nojalla, että $C_2 = C_4 = \sigma(C)$.

Koska σ säilyttää janojen pituuden ja kulmien suuruuden (Määritelmä 2.1) ja edellä on todettu, että $\sigma(B) = B_2$ ja $\sigma(C) = C_2$, niin $BC \cong B_2C_2 = \sigma(B)\sigma(C)$. Vastaavasti σ kuvaa kulman $\sphericalangle CBA$ kulmaksi $\sphericalangle C_2B_2A_2$, jolloin $\sphericalangle CBA \cong \sphericalangle C_2B_2A_2 = \sphericalangle\sigma(C)\sigma(B)\sigma(A)$. Vastaavasti nähdään, että $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A_2C_2B_2 = \sphericalangle\sigma(A)\sigma(C)\sigma(B)$. Siispä **(SKS)** on voimassa kun **(ERM)** on. $\square$

2.2. Siirrot, kierrot ja heijastukset

Tässä kappaleessa määritellään tason Π_F kuvaukset siirto, kierto ja heijastus, ja osoitetaan että ne ovat jäykkiä liikkeitä. Kappaleen lopussa osoitetaan, että siirto, kierto ja heijastus ovat Määritelmässä 2.2 tarvittavat jäykät liikkeet eli tosin sanoen tasolla Π_F yli järjestetyn Pythagoraan kunnan F on tarpeeksi jäykkiä liikkeitä ja siten **(ERM)** on voimassa. Tästä saadaan seurauksena myös, että jos F on järjestetty Pythagoraan kunta, niin taso Π_F on Hilbertin taso (Määritelmä 1.1).

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon $A = (a_1, a_2)$ piste. Pisteen (x, y) *siirto* eli *translaatio* pisteellä A on kuvaus τ, joka määritellään seuraavasti:

$$\begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2 \end{cases},$$

jolloin siis $\tau(x, y) = (x', y')$.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Pisteen (x, y) *kierto* eli *rotaatio* pisteen $(0, 0)$ suhteen on kuvaus ρ, joka määritellään seuraavasti:

$$\begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy \end{cases},$$

missä c, $s \in F$ ja $c^2 + s^2 = 1$. Toisin sanoen $\rho(x, y) = (x', y')$.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Pisteen (x, y) *refléktio* eli *heijastus* x-akselin suhteen on kuvaus κ, joka määritellään seuraavasti:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases},$$

eli $\kappa(x, y) = (x, -y)$

Seuraavaksi Lauseissa 2.7, 2.8 ja 2.9 todistetaan, että edellä määritellyt kuvaukset siirto, kierto ja heijastus ovat tason Π_F jäkkiä liikkeitä.

LAUSE 2.7. *Siirto tasolla Π_F on jäykkä liike.*

TODISTUS. Olkoon τ Määritelmän 2.4 mukainen kuvaus. Siirrolla τ on käänteiskuvaus

$$\begin{cases} x = x' - a_1 \\ y = y' - a_2 \end{cases},$$

joten τ on bijektio ja siten erityisesti injektio joukosta Π_F itselleen (Määritelmä 2.1 (1)).

Kuvaus τ muuttaa suoran $y = kx + d$ seuraavasti:

$$y' - a_2 = k(x' - a_1) + d \Leftrightarrow y' = kx' - ka_1 + d + a_2 \Leftrightarrow y' = kx' + c,$$

missä $c = d + a_2 - ka_1$. Erityisesti τ siis kuvaa suoran suoraksi (Määritelmä 2.1 (2)), jolla on sama kulmakerroin kuin alkuperäisellä suoralla. Siispä kuvaus τ säilyttää kulmien suuruuden (Määritelmä 2.1 (5)).

Lisäksi τ säilyttää välissäolon (Määritelmä 2.1 (3)), sillä jos pisteet B, C, $D \in \Pi_F$ ovat eri pisteitä, niin vakion a_1 lisääminen pisteiden x-koordinaatteihin ja vakion a_2 lisääminen y-koordinaatteihin ei muuta suuruusjärjestystä, sillä kaikki koodinaatit suurenevat tai pienenevät samalla vakiolla. Lisäksi edellä todettiin, että siirto τ kuvaa suorat suoriksi. Siispä jos $B * C * D$, niin $\tau(B) * \tau(C) * \tau(D)$.

Nyt pitää vielä tarkistaa, että τ säilyttää janojen yhtenevyyden. Olkoon $B = (x_1, y_1)$ ja $C = (x_2, y_2)$. Tällöin $\tau(B) = B' = (x_1 + a_1, y_1 + a_2)$ ja $\tau(C) = C' = (x_2 + a_1, y_2 + a_2)$, joten laskemalla nähdään, että

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}^2(B', C') &= (x_2 + a_1 - (x_1 + a_1))^2 + (y_2 + a_2 - (y_1 + a_2))^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \mathrm{dist}^2(B, C).\end{aligned}$$

Siispä τ säilyttää myös janojen yhtenevyyden (Määritelmä 2.1 (4)).

$\therefore$ τ on jäykkä liike. □

LAUSE 2.8. *Kierto tasolla Π_F on jäykkä liike.*

TODISTUS. Olkoon ρ tason Π_F kuvaus kuten Määritelmässä 2.5. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy \end{cases}$$

muuttujien x ja y suhteen:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x = \frac{x'}{c} + \frac{sy}{c} \\ y' = sx + cy \quad | \quad \text{sijoitetaan} \quad x \end{cases}
&& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'+sy}{c} \\ y' = \frac{sx'+s^2y}{c} + cy \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = \frac{x'+sy}{c} \\ cy' = sx' + s^2y + c^2y \end{cases}
&& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'+sy}{c} \\ (s^2 + c^2)y = cy' - sx' \quad | \quad s^2 + c^2 = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = \frac{x'+sy}{c} \quad | \quad \text{sijoitetaan} \quad y \\ y = cy' - sx' \end{cases}
&& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'+scy'-s^2x'}{c} \\ y = cy' - sx' \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = \frac{x'(1-s^2)+scy'}{c} \quad | \quad 1 - s^2 = c^2 \\ y = cy' - sx' \end{cases}
&& \Leftrightarrow \begin{cases} x = cx' + sy' \\ y = cy' - sx'. \end{cases}
\end{aligned}$$

Koska edellisen laskun nojalla kierrolla ρ on käänteiskuvaus, on ρ bijektio ja siten erityisesti injektio (Määritelmä 2.1 (1)).

Lisäksi kuvaus ρ on lineaarinen, jolloin se kuvaa suorat suoriksi. Suoralle $y = kx+b$ saadaan:

$$\begin{aligned}
&(cy' - sx') = k(cx' + sy') + b \quad \Leftrightarrow \quad cy' - ksy' = kcx' + sx' + b \\
\Leftrightarrow \quad & y'(c - ks) = (kc + s)x' + b \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{kc + s}{c - ks}x' + \frac{b}{c - ks} \\
\Rightarrow \quad & y' = k'x' + d,
\end{aligned}$$

joka todella on suora, jolle uusi kulmakerroin on $k' = \frac{kc+s}{c-ks}$ ja $d = \frac{b}{c-ks}$. Jos $c = ks$, niin k' on ∞ ja kyseessä on pystysuora. (Määritelmä 2.1 (2)).

Koska ρ on lineaarinen, se joko säilyttää tai kääntää erisuuruisten alkioiden järjestyksen, mikä voidaan osoittaa kuten Lauseen 1.9 todistuksessa. Siispä ρ säilyttää välissäolon (Määritelmä 2.1 (3)).

Kulmien suuruuden säilyvyyden osoittamiseksi määritellään suorat $y_1 = k_1x + b_1$ ja $y_2 = k_2x + b_2$ ja olkoon k_1' ja k_2' kulmakertoimet, jotka saadaan, kun suorat y_1 ja y_2

kuvataan kierrolla ρ. Koska kulmien koko ja yhtenevyys määritetään tangentin avulla (Määritelmä 1.13, Määritelmä 1.16), riittää osoittaa että

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_1' - k_2'}{1 + k_1' k_2'}.$$

Jos näin on, niin tällöin tietysti myös

$$\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{k_1' - k_2'}{1 + k_1' k_2'}\right|.$$

Nyt, kun muistetaan, että $c^2 + s^2 = 1$ saadaan:

$$\begin{aligned}
\frac{k_1' - k_2'}{1 + k_1' k_2'} &= \frac{\frac{k_1 c + s}{c - k_1 s} - \frac{k_2 c + s}{c - k_2 s}}{1 + (\frac{k_1 c + s}{c - k_1 s})(\frac{k_2 c + s}{c - k_2 s})} \\
&= \frac{\frac{c^2 k_1 + sc - csk_1 k_2 - s^2 k_2 - c^2 k_2 - sc + sck_1 k_2 + s^2 k_1}{(c - k_1 s)(c - k_2 s)}}{\frac{c^2 - csk_2 + s^2 k_1 k_2 - csk_1 + c^2 k_2 k_2 - csk_1 - csk_2 + s^2}{(c - k_1 s)(c - k_2 s)}} \\
&= \frac{c^2 k_1 - s^2 k_2 - c^2 k_2 + s^2 k_1}{c^2 + s^2 k_1 k_2 + c^2 k_1 k_2 + s^2} \\
&= \frac{s^2 (k_1 - k_2) + c^2 (k_1 - k_2)}{(s^2 + c^2) k_1 k_2 + s^2 + c^2} \\
&= \frac{(s^2 + c^2)(k_1 - k_2)}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},
\end{aligned}$$

kuten pitikin (Määritelmä 2.1 (5)).

Lopuksi osoitetaan vielä, että ρ säilyttää pituuden. Koska pituus ja yhtenevyys määriteltiin dist^2 -funktion avulla (Määritelmä 1.16), niin jos $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2) \in \Pi_F$ ovat pisteitä, riittää osoittaa, että

$$\mathrm{dist}^2(A, B) = \mathrm{dist}^2(\rho(A), \rho(B)).$$

Nyt, kun edelleen muistetaan, että $c^2 + s^2 = 1$, saadaan:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}^2(\rho(A), \rho(B)) = \mathrm{dist}^2((cx_1 - sy_1, sx_1 + cy_1), (cx_2 - sy_2, sx_2 + cy_2)) \\
&= (cx_2 - sy_2 - cx_1 + sy_1)^2 + (sx_2 + cy_2 - sx_1 - cy_1)^2 \\
&= c^2 x_2^2 - scx_2 y_2 - c^2 c_1 x_2 + scx_2 y_1 - scx_2 y_2 + s^2 y_2^2 \\
&+ scx_1 y_2 - s^2 y_2 y_1 - c^2 x_1 x_2 + scx_1 y_2 + c_2 x_1^2 - scx_1 y_1 + scx_2 y_1 \\
&- s^2 y_1 y_2 - scx_1 y_1 + s^2 y_1^2 + s^2 x_2^2 + scx_2 y_2 - s^2 x_1 x_2 \\
&- scx_2 y_1 + scx_2 y_2 - c^2 y_2^2 - scx_1 y_2 - c^2 y_1 y_2 - s^2 x_1 x_2 - scx_1 y_2 \\
&+ s^2 x_1^2 - scx_1 y_1 - scx_2 y_1 - c^2 y_1 y_2 + scx_1 y_1 + c^2 y_1^2 \\
&= x_2^2 (s^2 + c^2) - 2(s^2 + c^2) x_1 x_2 + x_1^2 (s^2 + c^2) \\
&+ y_2^2 (s^2 + c^2) - 2(s^2 + c^2) y_1 y_2 + y_1^2 (s^2 + c^2) \\
&= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \mathrm{dist}^2(A, B),
\end{aligned}$$

kuten pitkikin. Siispä ρ säilyttää myös pituuden (Määritelmä 2.1 (4)).

$\therefore$ ρ on jäykkä liike. $\square$

LAUSE 2.9. *Heijastus tasolla Π_F on jäykkä liike.*

TODISTUS. Olkoon kuvaus κ heijastus x-akselin suhteen kuten Määritelmässä 2.6. Selvästi κ on bijektio ja siten erityisesti injektio (Määritelmä 2.1 (1)), sillä heijastuksella κ on käänteiskuvaus

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}.$$

Olkoon $y = kx + b$ suora. Tällöin

$$-y' = kx' + b \Leftrightarrow y' = -kx' - b,$$

eli selvästi κ kuvaa suorat suoriksi (Määritelmä 2.1 (2)). Koska uusi kulmakerroin $k' = -k$ eli alkuperäisen kulmakertoimen vastaluku, säilyttää κ myös kulmien suuruudet (Määritelmä 2.1(5)). Huomataan myös, että heijastus κ on lineaarinen, joten se säilyttää välissäolon (Määritelmä 2.1(3)). Lisäksi, jos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2) \in \Pi_F$ ovat pisteitä, niin

$$\operatorname{dist}^2(\kappa(A), \kappa(B)) = (x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \operatorname{dist}^2(A, B),$$

eli κ säilyttää myös pituuden (Määritelmä 2.1(4)).
$\therefore$ κ on jäykkä liike. □

LAUSE 2.10. *Olkoon F järjestetty Pythagoraan kunta ja olkoon Π_F siihen liittyvä karteesinen taso. Tällöin* **(ERM)** *on voimassa tasolla Π_F.*

TODISTUS. Tarkastellaan kuvauksia siirto τ, kierto ρ ja heijastus κ tasolla Π_F, jotka määritellään alkioiden x ja y funktioina kuten Määritelmissä 2.4, 2.5 ja 2.6. Edellä osoitettiin, että nämä kuvaukset ovat jäykkiä liikkeitä, eli injektioita tasolta Π_F itselleen, jotka kuvaavat suorat suoriksi ja säilyttävät välissäolon, pituuden ja kulmien suuruuden (Määritelmä 2.1). Nyt osoitetaan, että **(ERM)** on voimassa.

Olkoon $B = (x_1, y_1)$ ja $C = (x_2, y_2)$ pisteitä ja olkoon piste $A = (a_1, a_2)$, missä $a_1 = x_2 - x_1$ ja $a_2 = y_2 - y_1$, jolloin

$$\tau(B) = (x_1 + a_1, y_1 + a_2) = (x_1 + x_2 - x_1, y_1 + y_2 - y_1) = (x_2, y_2) = C$$

Siten on löydetty jäykkä liike τ joka toteuttaa **(ERM)**:n ehdon (1).

Olkoon O, A ja $A' \in \Pi_F$ pisteitä, ja osoitetaan, että on olemassa jäykkä liike, joka kuvaa puolisuoran $\overrightarrow{OA}$ puolisuoraksi $\overrightarrow{OA'}$ (Määritelmä **(ERM)** (2)). Käyttämällä siirtoa, joka siis on jäykkä liike, voidaan mikä tahansa tapaus viedä origoon, eli voidaan olettaa, että $O = (0, 0)$. Tällöin kaikille suorille $y = kx + d$, jotka kulkevat pisteen O kautta, pätee $d = 0$.

Oletetaan, että suora $y = kx$ sisältää pisteen A ja suora $y = k'x$ sisältää pisteen A'. Mikä tahansa kierto pitää pisteen O paikoillaan, sillä

$$x' = c0 - s0 = 0 \quad \text{ja} \quad y' = s0 + c0 = 0$$

kaikilla s ja c. Siispä riittää löytää alkiot c, $s \in F$ siten, että $c^2 + s^2 = 1$ ja

$$k' = \frac{kc + s}{c - ks},$$

sillä Lauseen 2.8 todistuksessa on huomattu, että tämä on uuden suoran kulmakerroin, kun suoraa $y = kx + d$ kuvataan kuvauksella ρ.

Ratkaistaan yhtälöstä s:

$$k' = \frac{kc+s}{c-ks} \quad \Leftrightarrow \quad k'c - skk' = kc + s$$
$$\Leftrightarrow \quad s(1+kk') = c(k'-k) \quad \Leftrightarrow \quad s = \frac{k'-k}{1+kk'}c.$$

Merkitään $k_s = \frac{k'-k}{1+kk'}$, jolloin $s = k_s c$.

Sijoitetaan tämä lausekkeeseen $c^2 + s^2 = 1$:

$$c^2 + s^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 + (k_s c)^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 = \frac{1}{1+k_s^2} \Leftrightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{1+k_s^2}} \in F,$$

sillä F on järjestetty Pythagoraan kunta.

Näin ollen on olemassa kaksi kiertoa, jotka vievät suoran OA suoraksi OA'. Toinen näistä kierroista vie puolisuoran $\overrightarrow{OA}$ puolisuoraksi $\overrightarrow{OA''}$, missä $A'' * O * A'$ ja toinen vie puolisuoran $\overrightarrow{OA}$ puolisuoraksi $\overrightarrow{OA'}$, kuten haluttiin. Siispä Määritelmän 2.10 ehto (2) on voimassa tasolla Π_F.

Lauseessa 2.9 todettiin, että κ säilyttää x-akselin paikoillaan ja vaihtaa x-akselin puolet keskenään. Olkoon l mikä tahansa suora. Käytetään kuvausta τ (Lause 2.7) ja siirretään suora l kulkemaan pisteen $O = (0,0)$ kautta. Olkoon $A \neq O$ mikä tahansa piste ja olkoon ρ kierto, joka vie positiivisen x-akselin puolisuoraksi $\overrightarrow{OA}$. Nyt Määritelmän 2.10 kohdassa (3) haettu jäykkä liike on $\eta = \rho\kappa\rho^{-1}$, joka siis ensin kiertää suoran l x-akseliksi, heijastaa x-akselin suhteen ja palauttaa sitten tilanteen alkuperäisen suoran l yhteyteen.

$\therefore$ Kaikki Määritelmän 2.10 ehdot täyttyvät ja siten **(ERM)** on voimassa karteesisella tasolla Π_F yli järjestetyn Pythagoraan kunnan F. $\square$

SEURAUS 2.11. *Taso Π_F on Hilbertin taso, kun F on järjestetty Pythagoraan kunta.*

TODISTUS. Seuraa Lauseista 1.4, 1.10, 1.17, 2.1 ja 2.10. $\square$

2.3. Aksiooman (SKS) ja (ERM):n yhtäpitävyys

Tähän mennessä on osoitettu, että kun tietyt aksioomat ovat voimassa, seuraa jäykkien liikkeiden olemassaolosta **(ERM)** aksiooma **(SKS)**, ja että **(ERM)** on voimassa karteesisella tasolla Π_F yli järjestetyn Pythagoraan kunnan F. Vielä on kuitenkin todistamatta, että jos kaikki Hilbertin aksioomat ovat voimassa, mukaan lukien **(SKS)**, niin **(ERM)** on voimassa. Toisin sanoen, jotta **(ERM)** ja **(SKS)** saadaan yhtäpitäviksi, pitää vielä osoittaa, että **(SKS)**-aksiooman voimassaolosta seuraa **(ERM)** Hilbertin tasolla. Seuraavan Lauseen 2.12 todistuksessa konstruoidaan Määritelmän 2.2 jäykät liikkeet. Kappaleen lopuksi viimeistellään aksiooman **(SKS)** ja **(ERM)**:n yhtäpitävyys Hilbertin muiden aksioomien ollessa voimassa.

LAUSE 2.12. *Millä tahansa Hilbertin tasolla on tarpeeksi jäykkiä liikkeitä eli* **(ERM)** *on voimassa.*

TODISTUS. Olkoon l suora. Muodostetaan jäykkä liike η eli heijastus suoran l suhteen, joka pitää suoran l pisteet paikallaan ja vaihtaa suoran l puolet keskenään, ja muodostetaan kuvauksen η avulla jäykät liikkeet siirto τ ja kierto ρ.

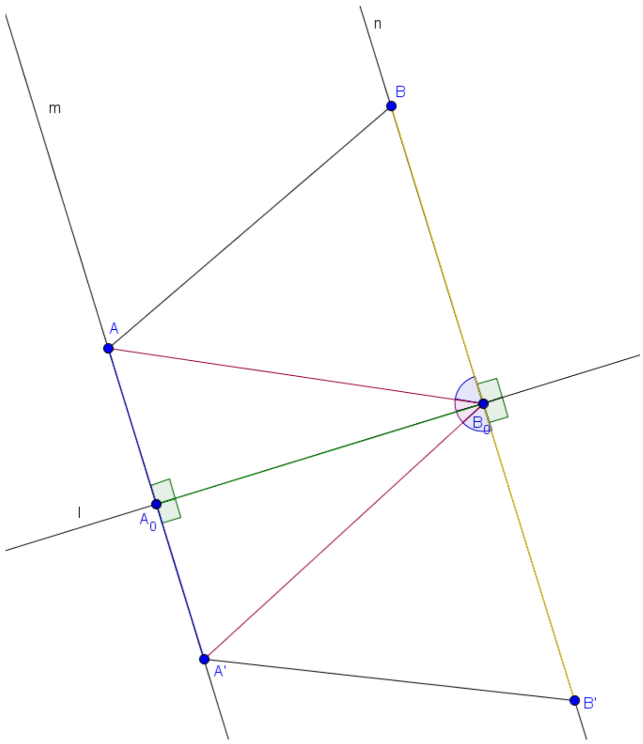
Määritellään siis mille tahansa pisteelle $A \in l$ kuvaus $\eta(A) = A$. Mille tahansa pisteelle $A \notin l$ muodostetaan ensin suoraa l vastaan kohtisuora suora $m = \overleftrightarrow{AA_0}$, joka kulkee pisteen A kautta ja $A_0 \in l$. Otetaan sitten suoralta m piste A', jolle $A * A_0 * A'$ ja $AA_0 \cong A_0A'$, ja asetetaan $\eta(A) = A'$. Koska nyt $\eta^2(A) = \eta(A') = A$, on η bijektio ja siten erityisesti injektio (Määritelmä 2.1(1)).

Olkoon sitten A ja B mielivaltaisia pisteitä, jotka eivät kuulu suoraan l. Osoitetaan, että $AB \cong \eta(A)\eta(B) = A'B'$. Oletetaan, että pisteet $A, B \in m \perp l$, P on suorien m ja l leikkauspiste ja A ja B ovat suoran l samalla puolella eli $A * B * P$ tai $B * A * P$. Oletetaan ensimmäinen tapaus sillä jälkimmäinen menee vastaavasti. Nyt aksiooman **(C3)** nojalla, koska $AP \cong A'P$ ja $BP \cong B'P$, niin

$$AB = AP - BP \cong A'P - B'P = A'B'.$$

Jos taas A ja B ovat suoran l vastakkaisilla puolilla eli $A * P * B$, niin koska $AP \cong A'P$ ja $BP \cong B'P$, seuraa väite suoraan aksioomasta **(C3)** eli $AB \cong A'B'$.

Oletetaan sitten, että pisteet A ja B eivät ole samalla suoraa l vastaan kohtisuoralla suoralla, vaan olkoon $A \in m \perp l$ ja $B \in n \perp l$ ja olkoon A_0 suorien m ja l leikkauspiste ja B_0 suorien n ja l leikkauspiste. Olkoon vielä $\eta(A) = A'$ ja $\eta(B) = B'$. Oletetaan, että pisteet A ja B sijaitsevat samalla puolella suoraa l. Nyt $A_0A \cong A_0A'$



KUVA 2.2. Lauseen 2.12 todistus, kun pisteet A ja B ovat suoran l samalla puolella

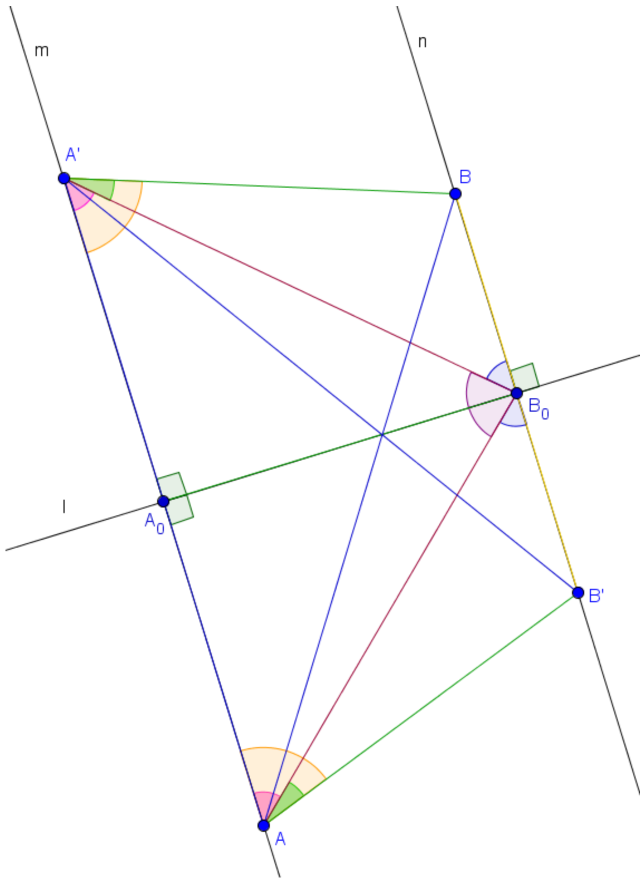
pisteen A' määritelmästä (Kuva 2.2). Koska $m \perp l$ niin $\sphericalangle AA_0B_0 \cong \sphericalangle A'A_0B_0$ ja lisäksi kolmioilla $\triangle AB_0A_0$ ja $\triangle A'B_0A_0$ on yhteinen sivu A_0B_0. Tällöin **(SKS)**-aksioomasta seuraa, että $\triangle AB_0A_0 \cong \triangle A'B_0A_0$. Erityisesti $AB_0 \cong A'B_0$ ja $\sphericalangle AB_0A_0 \cong \sphericalangle A'B_0A_0$.

Huomataan myös, että $\sphericalangle BB_0A_0 \cong \sphericalangle B'B_0A_0$, koska $n \perp l$, jolloin

$$\sphericalangle BB_0A = \sphericalangle BB_0A_0 - \sphericalangle AB_0A_0 \cong \sphericalangle B'B_0A_0 - \sphericalangle A'B_0A_0 = \sphericalangle B'B_0A'.$$

Nyt jälleen aksiooman **(SKS)** nojalla kolmiot $\triangle BB_0A \cong \triangle B'B_0A'$, sillä $BB_0 \cong B'B_0$ ja kuten edellä todettiin $\sphericalangle BB_0A \cong \sphericalangle B'B_0A$ ja $AB_0 \cong A'B_0$. Erityisesti siis $AB \cong A'B'$.

Oletetaan sitten, että A ja B ovat suoran l vastakkaisilla puolilla, ja olkoon m, n, A_0, B_0, A' ja B' määritelty kuten yläpuolella (Kuva 2.3). Vastaavanlaisella päättelyllä



Kuva 2.3. Lauseen 2.12 todistus, kun pisteet A ja B ovat suoran l eri puolilla

kuin edellä, voidaan osoittaa, että $\triangle A_0B_0A' \cong \triangle A_0B_0A$, erityisesti $\sphericalangle A_0A'B_0 \cong \sphericalangle A_0AB_0$. Samoin saadaan, että $\triangle A'B_0B \cong \triangle AB_0B'$, erityisesti $\sphericalangle B_0AB' \cong \sphericalangle B_0A'B$ ja $A'B \cong AB'$.

Nyt koska

$$\begin{aligned} \sphericalangle BA'A &= \sphericalangle BA'A_0 = \sphericalangle A_0A'B_0 + \sphericalangle B_0A'B \\ &\cong \sphericalangle A_0AB_0 + \sphericalangle B_0AB' = \sphericalangle A_0AB' = \sphericalangle A'AB', \end{aligned}$$

saadaan jälleen **(SKS)**-aksiooman nojalla, että $\triangle ABA' \cong \triangle A'B'A$, sillä yhtenevien sivujen $A'B$ ja AB', sekä kulmien $\sphericalangle BA'A$ ja $\sphericalangle A'AB'$ lisäksi kolmioilla on yhteinen sivu $A'A$. Erityisesti kolmioiden yhtenevyyden nojalla myös $AB \cong A'B'$ kuten pitikin.

Siispä η säilyttää janojen pituuden (Määritelmä 2.1(4)).

Olkoon nyt A, B ja C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla, ja jotka η kuvaa pisteiksi A', B' ja C' vastaavassa järjestyksessä. Koska edellisen nojalla $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ ja $BC \cong B'C'$, niin **(SSS)**-yhtenevyyssäännön nojalla $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ja erityisesti $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$, $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ ja $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B'$ eli η säilyttää kulmien suuruuden (Määritelmä 2.1 (5)).

Olkoon A, B ja C pisteitä suoralta $s \neq l$ ja olkoon η heijastus suoran l suhteen. Merkitään $\eta(A) = A'$, $\eta(B) = B'$ ja $\eta(C) = C'$. Pitäisi osoittaa, että kuvapisteet A', B' ja C' ovat samalla suoralla.

Koska edellä todettiin, että heijastus η säilyttää janojen pituuden, on $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ja $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ja $\overline{BC} = \overline{B'C'}$. Oletetaan, että $A * B * C$. Koska A, B ja C ovat samalla suoralla, niin $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Tällöin $\overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$, jolloin välttämättä pisteiden A', B' ja C' on oltava samalla suoralla, sillä muuten yksi kolmion $\triangle A'B'C'$ sivuista olisi yhtä pitkä kuin kahden muun summa. Samasta syystä pisteen B' on oltava pisteiden A' ja C' välissä. Siispä heijastus η kuvaa suorat suoriksi (Määritelmä 2.1 (2)) ja säilyttää välissäolon (Määritelmä 2.1 (3)).

Nyt on osoitettu, että Määritelmän 2.10 kohta (3) on voimassa heijastusten avulla. Osoitetaan seuraavaksi, että myös kierrot ja siirrot eli Määritelmän 2.1 kohdat (1) ja (2) ovat voimassa Hilbertin tasolla.

Olkoon A ja A' mitkä tahansa kaksi pistettä. Olkoon sitten l janan AA' keskinormaali. Tällöin kuvaus η eli heijastus suoran l suhteen vie pisteen A pisteeksi A' eli Määritelmän 2.10 kohta (1) on voimassa.

Olkoon sitten O, A ja A' pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla ja olkoon suora l kulman $\sphericalangle AOA'$ puolittaja. Tällöin kuvaus η eli heijastus suoran l suhteen, vie puolisuoran OA puolisuoraksi OA', sillä piste O pysyy paikoillaan ja η säilyttää kulmat. Siispä myös Määritelmän 2.10 kohta (2) on voimassa.

$\therefore$ **(ERM)** on voimassa millä tahansa Hilbertin tasolla. □

HUOMAUTUS 2.13. Lauseen 2.12 todistuksessa tarvitaan tietoa, että Hilbertin tasolla millä tahansa janalla on keskipiste ja keskinormaali ja millä tahansa kulmalla on kulmanpuolittaja. Lisäksi oletetaan tiedettäväksi **(SSS)**-yhtenevyyssääntö kolmioille ja kolmioepäyhtälö. Nämä ovat kaikki geometrian perustuloksia, joiden todistukset löytyvät esimerkiksi lähteestä [**13**].

SEURAUS 2.14. *Hilbertin aksioomien* **(I1)**, **(I2)**, **(I3)**, **(B1)**, **(B2)**, **(B3)**, **(B4)**, **(C1)**, **(C2)**, **(C3)**, **(C4)** *ja* **(C5)** *ollessa voimassa,* **(SKS)** *ja* **(ERM)** *ovat yhtäpitäviä.*

TODISTUS. Lause 2.12 sanoo, että **(ERM)** on voimassa millä tahansa Hilbertin tasolla, jolla siis erityisesti **(SKS)** on voimassa. Lause 2.3 taas sanoo, että **(ERM)**:stä seuraa **(SKS)**. □

LUKU 3

Isometrioista

Tässä luvussa tutustutaan syvemmin tason jäykkiin liikkeisiin eli isometrioihin. Lähtökohtaisesti ollaan tasolla Π_F, missä F on järjestetty Pythagoraan kunta. Luvun 2 tulosten nojalla (Seuraus 2.11) tiedetään, että tällöin Π_F on Hilbertin taso (Määritelmä 1.1), jolloin kaikki Hilbertin aksioomat ja paralleeliaksiooma ovat tasolla voimassa. Tämä antaa mahdollisuuden tutkia jäykkiä liikkeitä aksiomaattisista lähtökohdista.

Luvussa käsitellään lähinnä identtistä kuvausta, heijastuksia, siirtoja ja kiertoja, joita käytettiin luvussa 2, mutta esitellään myös viides jäykkä liike eli *liukuheijastus* tai *liukupeilaus*. Yhtenä tämän luvun päätavoitteista on osoittaa, että kaikki tason jäykät liikkeet pystytään muodostamaan enintään kolmen heijastuksen yhdisteenä. Lisäksi tutkitaan miten se tapahtuu siirtojen ja kiertojen kohdalla. Luvun tulokset ovat lähteistä [**2**] ja [**5**].

Isometria tai *liike* on tason transformaatio eli injektiivinen kuvaus joukolta itselleen, joka erityisesti säilyttää pituuden. Toisin sanoen jos A ja B ovat tason pisteitä ja A' sekä B' niitä vastaavat isometrisen kuvauksen kuvapisteet, niin $AB \cong A'B'$ (vertaa Määritelmään 2.1).

Koska nyt tasolla Π_F kaikki Hilbertin aksioomat (Liite A) ovat voimassa, riittää oletus pituuden säilyttämisestä muiden jäykkien liikkeiden ominaisuuksien voimassaolon toteamiseen. Osoitetaan tämä seuraavaksi. Huomaa, että päättely vastaa Lauseen 2.12 todistuksessa esitettyä päättelyä, jossa muodostettiin kuvaus η eli heijastus Hilbertin tasolla ja osoitettiin, että se on jäykkä liike.

Olkoon A piste, jonka isometrinen kuva on piste A'. Olkoon sitten $B \neq A$ piste, jolle myös isometrinen kuvapiste on $B' = A'$. Tällöin kuitenkin $\overline{AB} > 0 = \overline{A'B'} = \overline{A'A'}$, mikä on ristiriita, sillä isometria säilyttää pituuden. Siispä kaikille $A \neq B$ aina $A' \neq B'$ ja isometria on siten injektio.

Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jonka isometrinen kuva on kolmio $\triangle A'B'C'$. Koska isometria säilyttää pituuden, on $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ ja $BC \cong B'C'$, jolloin kolmio $\triangle A'B'C'$ on yhtenevä alkuperäisen kolmion kanssa **(SSS)**-säännön nojalla. Tällöin myös kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kulmat ovat yhtenevät eli aksiooman **(SKS)** voimassaolosta seuraa, että isometria säilyttää kulmien suuruuden.

Olkoon A, B ja C pisteitä samalta suoralta siten, että $A * B * C$ ja olkoon A', B' ja C' näiden pisteiden isometriset kuvapisteet vastaavassa järjestyksessä. Koska isometria säilyttää pituuden, on $A'C' \cong AC \cong AB + BC \cong A'B' + B'C'$, jolloin välttämättä myös pisteet A', B' ja C' ovat samalla suoralla, sillä muuten kolmiossa $\triangle A'B'C'$ yksi sivu olisi yhtä pitkä kuin kahden muun summa, mikä on mahdotonta. Isometria siis kuvaa suorat suoriksi. Samoin perustein se säilyttää myös välissäolon, sillä jos piste B' ei olisi pisteiden A' ja C' välissä, niin olisi mahdotonta, että $A'C' \cong A'B' + B'C'$.

Siispä kaikki jäykkien liikkeiden ominaisuudet Määritelmästä 2.1 ovat voimassa ja siten kuvaus on isometria jos ja vain jos se on jäykkä liike, kun ollaan Hilbertin tasolla Π_F. Huomaa, että tässä oleellista on se, minkälaisella tasolla ollaan. Luvussa 2 tasosta ja sen ominaisuuksista ei oletettu yhtä paljon, jolloin kaikki Määritelmässä 2.1 esitetyt jäykkien liikkeiden ominaisuudet olivat tarpeellisia.

Kaikkien isometrioiden joukko muodostaa ryhmän $\mathcal{G}$, sillä seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

(1) Jos λ ja $\mu \in \mathcal{G}$, niin niiden yhdistetty kuvaus $\lambda \circ \mu \in \mathcal{G}$ ja $\mu \circ \lambda \in \mathcal{G}$.
(2) On olemassa identtinen kuvaus $I \in \mathcal{G}$, joka pitää kaikki tason pisteet paikoillaan. Tällöin jos $\lambda \in \mathcal{G}$ niin $I \circ \lambda = \lambda = \lambda \circ I$.
(3) Jos $\lambda \in \mathcal{G}$ niin sen käänteiskuvaus $\lambda^{-1} \in \mathcal{G}$ ja $\lambda \circ \lambda^{-1} = I = \lambda^{-1} \circ \lambda$.
(4) Jos λ, μ ja $\nu \in \mathcal{G}$, niin $\lambda \circ (\mu \circ \nu) = (\lambda \circ \mu) \circ \nu$.

Huomaa kuitenkin, että $\lambda \circ \mu$ ei yleensä ole sama kuin $\mu \circ \lambda$. Jos $\lambda \circ \mu = \mu \circ \lambda$, sanotaan, että λ ja μ *kommutoivat*. Esimerkiksi kaksi mitä tahansa kiertoa saman pisteen O suhteen kommutoivat [**5**].

Kun kahdessa geometrisessa mallissa pisteiden $P \leftrightarrow P'$ ja suorien $l \leftrightarrow l'$ välillä on injektiivinen vastaavuus siten, että P on suoralla l jos ja vain jos P' on suoralla l', kutsutaan tätä vastaavuutta *isomorfismiksi* mallilta toiselle. Isomorfismikuvausta mallilta itselleen kutsutaan mallin *automorfismiksi*. Automorfismi on siis transformaatio, joka säilyttää tason objektien *kaikki* keskiset suhteet. Esimerkiksi neutraalissa geometriassa automorfismi on transformaatio, joka säilyttää olemassaolon, välissäolon ja yhtenevyyden. Itseasiassa jokainen isometria on automorfismi (Vertaa Määritelmään 2.1) [**5**].

Jos piste A kuvautuu itsekseen eli $A = A'$, sanotaan, että piste A on *muuttumaton* tai *invariantti* kyseisen isometrisen kuvauksen suhteen. Esimerkiksi kaikki tason pisteet ovat invariantteja *identtisen kuvauksen* I suhteen. *Kierrossa* eli *rotaatiossa* ainoastaan yksi piste on invariantti. Siinä piste, jonka suhteen kierretään, pysyy muuttumattomana. *Heijastuksessa* tai *reflektiossa* kaikki heijastussuoran pisteet pysyvät muuttumattomina ja *siirrossa* eli *translaatiossa* kaikki tason pisteet liikkuvat eli mikään tason piste ei ole invariantti [**2**].

Todistetaan seuraavaksi, että jos isometria säilyttää pisteet A ja B muuttumattomina, niin kaikki pisteet suoralta $\overleftrightarrow{AB}$ pysyvät muuttumattomina. Tätä tulosta tarvitaan osoittamaan, että jos A, B ja C ovat pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla, ja kaikki kolme pistettä pysyvät muuttumattomina, niin kyseessä on identtinen kuvaus.

LAUSE 3.1. *Jos pisteet A ja B ovat invariantteja isometrian suhteen, niin kaikki suoran $\overleftrightarrow{AB}$ pisteet ovat invariantteja kyseisen isometrian suhteen.*

TODISTUS. Olkoon λ isometria ja olkoon A ja B pisteitä, jotka säilyvät muuttumattomina kuvauksessa λ. Merkitään $\lambda(A) = A'$ ja $\lambda(B) = B'$. Olkoon C piste suoralta $\overleftrightarrow{AB}$ siten, että $C \neq A$ ja $C \neq B$, ja merkitään $\lambda(C) = C'$. Oletetaan, että $A * B * C$, sillä kaksi muuta tapausta todistetaan vastaavasti. Nyt, koska isometria säilyttää pituuden, on $AB \cong A'B'$ ja $AC \cong A'C' \cong AC'$ ja $BC \cong B'C' \cong BC'$, mistä seuraa, että $A * B * C'$. Lisäksi aksiooman **(C1)** nojalla $C = C'$ eli piste C on invariantti kuvauksen λ suhteen. $\square$

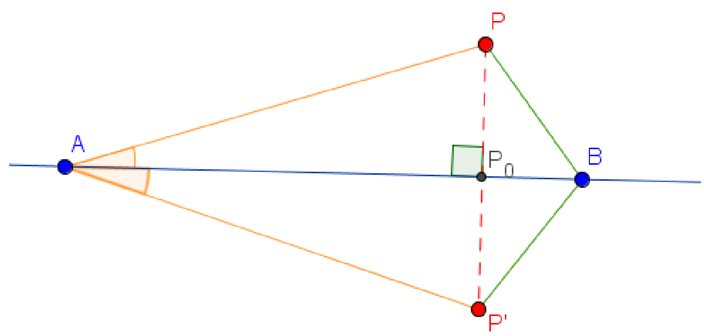
LAUSE 3.2. *Jos isometrialla on kolme invarianttia pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, niin kyseinen isometria on identtinen kuvaus.*

TODISTUS. Olkoon A, B ja C pisteitä, jotka eivät ole samalla suoralla, ja olkoon λ isometria. Oletetaan että $\lambda(A) = A$, $\lambda(B) = B$ ja $\lambda(C) = C$. Tällöin Lauseen 3.1 nojalla kaikki pisteet suorilla $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ ja $\overleftrightarrow{BC}$ ovat invariantteja. Olkoon sitten D piste, joka ei kuulu millekään edellämainituista suorista. Valitaan piste E siten, että $A * E * B$. Tällöin aksiooman **(B4)** nojalla suoralta $\overleftrightarrow{DE}$ löytyy piste F siten, että $A * F * C$ tai $B * F * C$. Koska nyt sekä piste E että piste F ovat invariantteja kuvauksen λ suhteen, niin kaikki pisteet suoralta $\overleftrightarrow{EF}$ ovat invariantteja, erityisesti piste D on muuttumaton. Siispä λ on identtinen kuvaus, sillä se säilyttää kaikki pisteet muuttumattomina. $\square$

Seuraava lause kertoo, että jos isometrialla on useampia invariantteja pisteitä, täytyy sen olla identtinen kuvaus tai reflektio. Lause on lähteestä [**2**].

LAUSE 3.3. *Jos isometrialla on enemmän kuin yksi muuttumaton piste, sen on oltava joko identtinen kuvaus tai heijastus.*

TODISTUS. Olkoon A ja B pisteitä ja olkoon λ isometria, jolle $\lambda(A) = A$ ja $\lambda(B) = B$ eli pisteet A ja B pysyvät kuvauksessa muuttumattomina. Tällöin Lause 3.1 sanoo, että kaikki pisteet suoralta $\overleftrightarrow{AB}$ ovat invariantteja. Olkoon sitten P piste, joka ei ole suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ ja olkoon $\lambda(P) = P'$.



KUVA 3.1. Pisteet P ja P' ovat eri puolilla suoraa, jolloin kyseessä on heijastus suoran suhteen

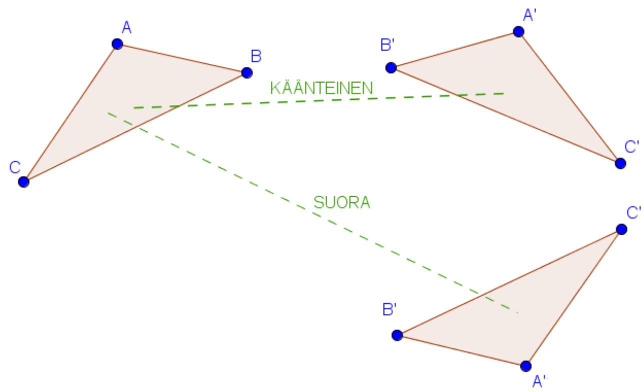
Koska isometria säilyttää pituuden, on $AP \cong AP'$ ja $BP \cong BP'$. Lisäksi tietysti janan AB pituus säilyy muuttumattomana. Tällöin kolmiot $\triangle ABP \cong \triangle ABP'$ **(SSS)**-säännön nojalla. Jos pisteet P ja P' ovat samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{AB}$, niin aksioomien **(C1)** ja **(C4)** nojalla $P = P'$. Tällöin λ on identtinen kuvaus, sillä kaikki tason pisteet pysyvät paikoillaan, olivatpa ne suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ tai eivät (Lause 3.2). Jos taas P ja P' ovat eri puolilla suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ (Kuva 3.1), niin olkoon P_0 suoran $\overleftrightarrow{AB}$ ja janan PP' leikkauspiste. Koska $AP \cong AP'$ ja $\sphericalangle PAP_0 \cong \sphericalangle P'AP_0$ ja kolmiot $\triangle APP_0$ ja $\triangle AP'P_0$ jakavat yhteisen sivun AP_0, ovat ne yhtenevät **(SKS)**-säännön nojalla. Tällöin erityisesti kulma $\sphericalangle PP_0A$ on suora. Koska isometria säilyttää pituuden on $PP_0 \cong P'P_0$, ja siten P' on pisteen P heijastuskuva suoran $\overleftrightarrow{AB}$ suhteen. □

Seuraavan lauseen tulosta tarvitaan erityisesti Lauseen 3.5 todistukseen.

LAUSE 3.4. *Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ yhteneviä kolmioita. Tällöin niitä yhdistää yksikäsitteinen isometrinen kuvaus.*

TODISTUS. Lauseen 2.3 todistuksesta saadaan, että kolmioita $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ yhdistää isometrinen kuvaus. Todistetaan vielä, että tämä kuvaus on yksikäsitteinen. Olkoon λ ja μ isometrisia kuvauksia, jotka kumpikin kuvaavat kolmion $\triangle ABC$ kolmioksi $\triangle A'B'C'$. Tällöin kuvaukset $\lambda^{-1} \circ \mu$ ja $\mu^{-1} \circ \lambda$ pitävät pisteet A, B ja C muuttumatoomina, jolloin erityisesti $\lambda^{-1} \circ \mu = \mu^{-1} \circ \lambda = I$. Nyt ryhmän ominaisuuksista seuraa, että λ^{-1} on kuvauksen μ käänteiskuvaus μ^{-1}, mistä saadaan, että välttämättä $\lambda = \mu$. □

Isometria voidaan luokitella *suoraksi* tai *käänteiseksi* isometriaksi sen mukaan, säilyttääkö vai kääntääkö se suunnan. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jonka kulmapisteet A, B ja C ovat tässä järjestyksessä kierrettäessä kolmiota myötäpäivään. Jos kolmio kuvataan isometrialla ja kolmion kulmien kuvapisteiden A', B' ja C' järjestys pysyy samana myötäpäivään kierrettäessä, on isometria suora. Jos taas järjestys vaihtuu, niin isometria on käänteinen (Kuva 3.2). Huomaa, että käänteiset ja suorat isometriat yh-



KUVA 3.2. Käänteinen ja suora isometria

distyvät kuten positiivisten ja negatiivisten lukujen kertolasku eli kahden käänteisen isometrian yhdiste on suora [**2**].

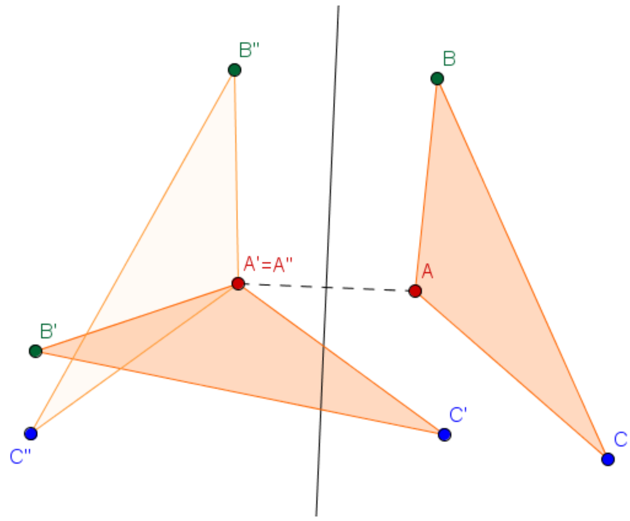
Heijastus on käänteinen isometria, jonka avulla muut isometriset kuvaukset voidaan muodostaa, kuten Lauseesta 3.5 tullaan näkemään. Sen sijaan suoria isometrioita ovat identtinen kuvaus, siirto ja kierto, jotka kaikki saadaan muodostettua kahden heijastuksen yhdisteenä. Esimerkiksi identtinen kuvaus on minkä tahansa heijastuksen ja sen itsensä yhdisteen lopputulos $\eta \circ \eta = I$ [**2**].

LAUSE 3.5. *Jokainen tason isometria voidaan muodostaa enintään kolmen heijastuksen avulla. Jos isometrialla on invariantti piste, saadaan se muodostettua enintään kahden heijastuksen avulla.*

TODISTUS. Todistuksessa käytetään apuna Lausetta 3.4. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio, jonka kuva isometrisessa kuvauksessa λ on kolmio $\triangle A'B'C'$. Jos $A = A'$, $B = B'$ ja $C = C'$, niitä yhdistävä yksikäsitteinen isometria on identiteetti (Lause 3.2), joka syntyy kun mikä tahansa sama heijastus suoritetaan kahdesti. Jos piste $A = A'$ ja piste $B = B'$, mutta $C \neq C'$, on kyseessä heijastus suoran $\overleftrightarrow{AB}$ suhteen (Lause 3.3).

Jos vain piste $A = A'$, mutta $B \neq B'$ ja $C \neq C'$, niin tapaus voidaan yksinkertaistaa toiseksi kahdesta edellisestä heijastamalla kolmio $\triangle ABC$ janan BB' keskinormaalin l suhteen. Koska isometria säilyttää pituuden niin $AB = AB'$ eli kolmio $\triangle ABB'$ on tasakylkinen, jolloin janan BB' keskinormaali l kulkee välttämättä huippupisteen A kautta. Siispä piste A pysyy heijastuksessa paikallaan ja heijastus suoran l suhteen vie ainakin janan AB janaksi AB' suoran l valinnan mukaisesti.

Yleinen tapaus voidaan viedä joksikin kolmesta edellisestä heijastamalla kolmio $\triangle ABC$ janan AA' keskinormaalin suhteen (Kuva 3.3). Tällöin kolmion $\triangle ABC$ kuvalle $\triangle A''B''C''$ pätee, että vähintään $A''{=}A'$, mikä seuraa suoraan heijastussuoran l asettamisesta. Tämä tapaus, jossa on vähintään yksi invariantti piste, voidaan ratkaista edellisten tapausten tavoin. $\square$



KUVA 3.3. Kaikki isometriat saadaan muodostettua heijastusten avulla. Yleinen tapaus saadaan yksinkertaistettua heijastamalla kolmiota $\triangle ABC$ janan AA' keskinormaalin suhteen

LAUSE 3.6. *Olkoon l ja m suoria, jotka leikkaavat pisteessä P. Heijastus suorien l ja m suhteen on kierto pisteen P suhteen. Kierto on kaksinkertainen suorien l ja m leikkauskulmaan nähden.*

TODISTUS. Olkoon l ja m suoria, jotka leikkaavat pisteessä P, ja olkoon $\triangle ABC$ kolmio. Heijastetaan kolmio $\triangle ABC$ suoran l suhteen. Tällöin, koska heijastus säilyttää pituuden ja kulmien suuruuden, niin $AP = A'P$ ja lisäksi janan AP ja suoran l

välinen kulma $\sphericalangle\alpha$ on yhtä suuri kuin janan AP' ja suoran l välinen kulma. Samanlaiset yhtäsuuruudet voidaan päätellä pisteisiin B, B' ja C, C' liittyen. Merkitään janan BP ja suoran l välistä kulmaa $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta$ ja janan CP ja suoran l välistä kulmaa $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\gamma$.

Heijastetaan sitten kolmio $\triangle A'B'C'$ suoran m suhteen ja saadaan kolmio $\triangle A''B''C''$. Edelleen $AP = A''P$ eli kaikki pisteet A, A' ja A'' ovat saman P -keskisen PA -säteisen ympyrän kehällä. Olkoon janan $A'P$ ja suoran m välinen kulma suuruudeltaan $\sphericalangle\alpha'$, jolloin suorien l ja m välinen leikkauskulma on $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha'$. Tällöin janojen $B'P$ ja $C'P$ sekä suoran m välinen kulma on suuruudeltaan vastaavassa järjestyksessä

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha' - (\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta) = \sphericalangle\alpha' - \sphericalangle\beta \quad \text{ja} \quad \sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha' - (\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\gamma) = \sphericalangle\alpha' - \sphericalangle\gamma.$$

Nyt janojen AP ja $A''P$ välinen leikkauskulma on suuruudeltaan

$$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha' + \sphericalangle\alpha' = 2(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha'),$$

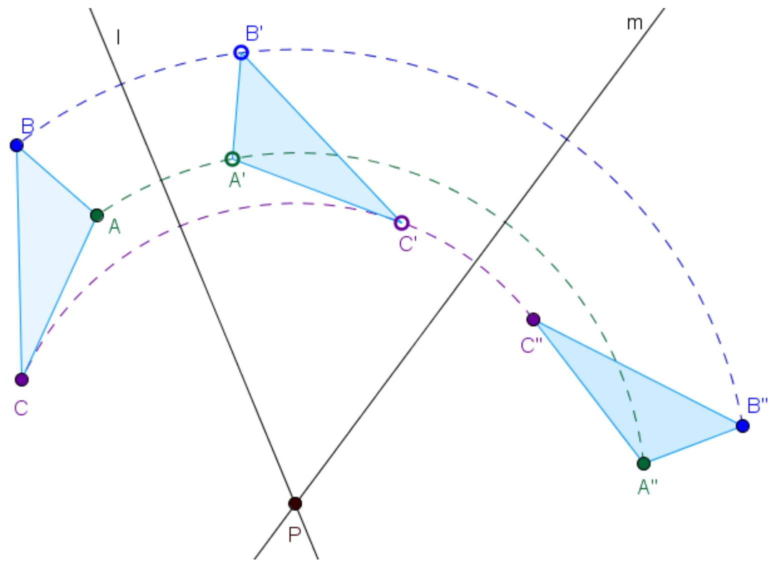
janojen BP ja BP'' välinen kulma on

$$(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta) + (\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta) + (\sphericalangle\alpha' - \sphericalangle\beta) + (\sphericalangle\alpha' - \sphericalangle\beta) = 2(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha'),$$

ja janojen CP ja $C''P$ välinen kulma on

$$(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\gamma) + (\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\gamma) + (\sphericalangle\alpha' - \sphericalangle\gamma) + (\sphericalangle\alpha' - \sphericalangle\gamma) = 2(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha').$$

Siispä kaikki kuvapisteet A'', B'' ja C'' on saatu kiertämällä pisteitä A, B ja C pisteen P suhteen kaksinkertaisesti suorien l ja m välisen kulman verran. $\square$



KUVA 3.4. Kaikki tason kierrot saadaan kahden leikkaavan suoran kautta heijastamalla. Tällöin leikkauspiste P on kiertopiste

HUOMAUTUS 3.7. Luvussa 2 kierto määritellään kuvauksena ρ lukujen c ja s avulla (Määritelmä 2.5). Kuvaukseen ρ liittyvät kertoimet c ja s vastaavat funktioita $\cos\Theta$ ja $\sin\Theta$, missä Θ on kiertokulma vastapäivään. Siten esimerkiksi Lauseessa 3.6, jos suorien l ja m välinen kulma on α, niin kiertokulma $\Theta = (\pm)2\alpha$. Merkki pitää valita sen mukaan, kierretäänkö vasta- vai myötäpäivään.

Seuraava Lause 3.9 kertoo, miten isometriakuvaus siirto voidaan esittää kahden heijastuksen avulla. Tätä varten määritellään, mitä tarkoitetaan pisteen etäisyydellä suorasta ja kahden suoran välisellä etäisyydellä.

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon l suora ja A piste, joka ei ole suoralla l, ja n normaali suoralle l pisteen A kautta. Olkoon lisäksi A_0 suorien l ja n välinen leikkauspiste. Pisteen A etäisyys suorasta l on janan AA_0 pituus.

Olkoon $m \neq l$ suora siten, että $m \parallel l$ ja olkoon M mikä tahansa suoran m piste. Olkoon lisäksi n pisteen M kautta kulkeva suoran l normaali, joka leikkaa suoraa l pisteessä L. Suorien l ja m välinen etäisyys on janan LM pituus.

LAUSE 3.9. *Olkoon $l \neq m$ yhdensuuntaisia suoria. Tällöin heijastus suorien l ja m suhteen on siirto, jonka suuruus on kaksinkertainen suorien l ja m etäisyyteen nähden.*

TODISTUS. Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja olkoon l ja m suoria, jotka ovat yhdensuuntaisia. Olkoon k pisteen A etäisyys suorasta l, $k + t$ pisteen B etäisyys suorasta l ja $k + s$ pisteen C etäisyys suorasta l. Heijastus suoran l suhteen säilyttää etäisyydet, eli heijastuspisteiden A', B' ja C' etäisyys suorasta l on sama kuin alkuperäisten pisteiden.

Olkoon sitten k' pisteen A' etäisyys suorasta m, jolloin suorien l ja m etäisyys on $k + k'$. Tällöin pisteiden B' ja C' etäisyydet suorasta m vastaavassa järjestyksessä ovat

$$k + k' - (k + t) = k' - t \quad \text{ja} \quad k + k' - (k + s) = k' - s.$$

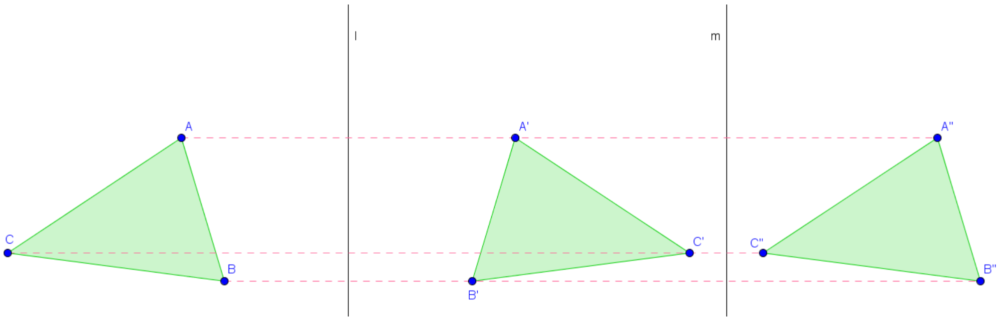
Heijastetaan pisteet A', B' ja C' vielä suoran m suhteen, jolloin saadaan kuvapisteet A'', B'' ja C'', joille

$$\begin{aligned}
\overline{AA''} &= k + k + k' + k' = 2(k + k'), \\
\overline{BB''} &= (k + t) + (k + t) + (k' - t) + (k' - t) = 2(k + k') \quad \text{ja} \\
\overline{CC''} &= (k + s) + (k + s) + (k' - s) + (k' - s) = 2(k + k').
\end{aligned}$$

Siispä pisteet A, B ja C siirtyivät heijastuksissa suorien l ja m suhteen pituuden $2(k + k')$ verran, mikä on kaksinkertainen suorien l ja m etäisyyteen nähden (Kuva 3.5). Huomaa, että todistuksessa oletetaan, että suorat l ja m ovat riittävän kaukana toisistaan, jotta mikään minkään kolmion sivuista ei missään vaiheessa leikkaa kumpaakaan niistä. Jos jonkun kolmion sivu leikkaa jompaa kumpaa suoraa l tai m, on päättelyn idea kuitenkin vastaava. $\square$

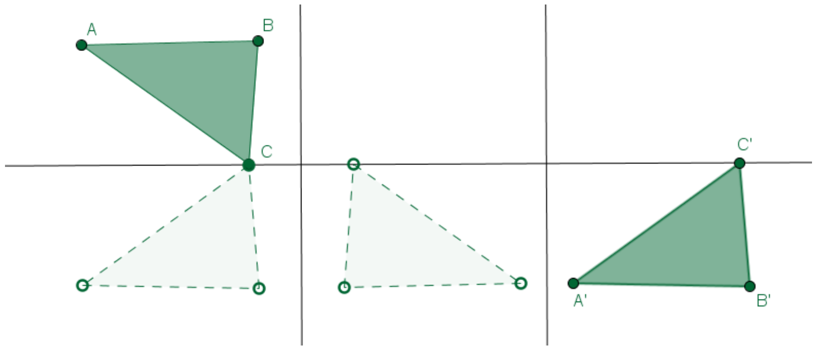
HUOMAUTUS 3.10. Luvussa 2 siirto pisteellä $A = (a_1, a_2)$ määritellään kuvauksena τ (Määritelmä 2.5). Kuvaukseen τ liittyvä siirtopiste A määrittää siis siirron pituuden ja suunnan. Siirron pituus on janan OA -pituus, missä $O = (0, 0)$ on origo, ja siirron suunta on puolisuoran $\overrightarrow{OA}$ suuntainen. Siten esimerkiksi Lauseessa 3.9, jos suorien l ja m välinen etäisyys on janan LM pituus (katso Määritelmä 3.8), missä $L \in l$ ja $M \in m$, niin siirto tapahtuu puolisuoran $\overrightarrow{LM}$ suuntaan, joka siis on kohtisuorassa suoria l ja m vasten. Lisäksi siirron suuruus on kaksinkertainen janan LM pituuteen nähden eli $2\overline{LM}$.

Tähän mennessä luvussa on käsitelty neljänlaisia isometriatyyppejä eli identtistä kuvausta, siirtoja, kiertoja ja heijastuksia. On olemassa vielä viides isometriatyyppi



Kuva 3.5. Kaikki tason siirrot saadaan kahden yhdensuuntaisen suoran kautta heijastamalla

eli *liukuheijastus* tai *liukupeilaus*, joka on yhdiste heijastuksesta suoran suhteen ja siirrosta saman suoran suuntaisesti. Myös tämä on selvästi isometrinen kuvaus kahden isometrisen kuvauksen yhdisteenä.



Kuva 3.6. Liukuheijastus on siirron ja heijastuksen yhdiste. Se voidaan muodostaa myös kolmen heijastuksen yhdisteenä

Liukuheijastus on käänteinen isometria, sillä se on käänteisen ja suoran isometrian yhdiste. Huomaa myös, että liukuheijastus voidaan muodostaa kolmen heijastuksen yhdisteenä, mikä seuraa Lauseesta 3.9. (Kuva 3.6). Liukuheijastuksella ei ole yhtään invarianttia pistettä, koska millään aidolla siirrolla ei ole muuttumattomia pisteitä. Seuraava Lause 3.11 kertoo, että kolmen heijastuksen yhdiste on joko heijastus tai liukuheijastus ja sen todistus esitetään ideatasolla.

Lause 3.11. *Kolmen heijastuksen yhdiste on aina joko heijastus tai liukuheijastus.*

Todistus. Todistuksen idea on, että kolmen minkä tahansa heijastuksen yhdiste voidaan ilmoittaa kolmen heijastuksen yhdisteenä siten, että kaksi ensimmäistä heijastussuoraa ovat yhdensuuntaiset ja kolmas on kohtisuorassa muita vastaan. Lauseessa 3.9 osoitettiin, että heijastus kahden yhdensuuntaisen suoran suhteen on itse asiassa siirto, ja sen suunta on kohtisuora heijastussuoriin nähden. Näin ollen kolmannen heijastuksen heijastusakseli on yhdensuuntainen suoritetun siirron kanssa ja näiden yhdiste on määritelmän mukainen liukuheijastus.

Erikoistapauksessa kolme heijastussuoraa ovat valmiiksi yhdensuuntaiset, jolloin niiden yhdiste on heijastus.

Todistuksen voi tehdä myös puolikiertoja apuna käyttäen, kuten lähteessä [**2**]. Tarkempi kuvaus todistuksesta löytyy myös lähteestä [**10**]. □

Lauseen 3.11 seurauksena saadaan tärkeä tulos, joka kertoo, että tässä luvussa esiintyneet isometriset kuvaukset ovat itse asiassa ainoat olemassa olevat isometriat tasolla.

SEURAUS 3.12. *Tason* Π_F *ainoat isometriakuvaukset ovat identtinen kuvaus, siirto, kierto, heijastus ja liukuheijastus.*

TODISTUS. Lause 3.5 sanoo, että jokainen isometria voidaan muodostaa enintään kolmen heijastuksen avulla. Heijastus on itsensä eli yhden heijastuksen tuote. Lauseet 3.6 ja 3.9 sanovat, että kahden heijastuksen yhdiste on kierto tai siirto tai siirron erikoistapauksena nollasiirto eli identtinen kuvaus. Lopuksi Lause 3.11 sanoo, että kolmen heijastuksen yhdiste on heijastus tai liukuheijastus. Näin ollen muita tason isometrioita ei voi olla. $\square$

LUKU 4

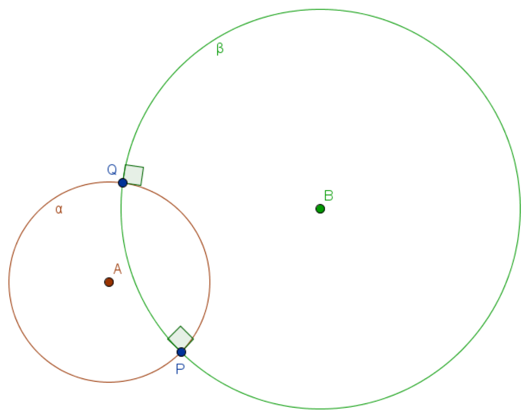
ERM ja Poincarén malli

Tämän luvun päätavoite on palauttaa mieliin Poincarén malli ja osoittaa, että **(ERM)** on voimassa Poincarén mallilla. Tätä varten kappaleessa 4.1 tarkastellaan ensin inversiota eli peilausta ympyrän suhteen ja sen tiettyjä ominaisuuksia, sekä määritellään ortogonaalisten ympyröiden käsite. Näitä tarvitaan Poincarén mallin rakentamiseksi ja myös jäykkien liikkeiden olemassaolon todistamiseksi mallilla, mikä tehdään kappaleessa 4.2.

4.1. Inversio

Luvun päätavoite on osoittaa **(ERM)**:n voimassaolo Poincarén mallilla, joten seuraavien inversion ominaisuuksien todistukset ohitetaan. Kappaleen määritelmät ja lauseet ovat lähteistä [**6**] ja[**13**], ja lauseet on myös todistettu edellä mainituissa lähteissä.

Määritelmä 4.1. Ympyrät α ja β ovat *ortogonaalisia*, jos ne leikkaavat toisiaan kahdessa pisteessä P ja Q, ja niiden tangentit näissä pisteissä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan (Kuva 4.1).



Kuva 4.1. Ympyrät α ja β ovat ortogonaalisia keskenään

Huomautus 4.2. Kun puhutaan kahden ympyrän tai ympyrän ja suoran välisestä kulmasta, tarkoitetaan ymypyröiden tangenttisuorien välistä kulmaa leikkauspisteessä.

Inversio on tason transformaatio, joka säilyttää inversioympyrän paikoillaan, ja lähettää ympyrän sisäpuoliset pisteet ympyrän ulkopuolelle ja ulkopuoliset pisteet ympyrän sisäpuolelle, kuten seuraavasta määritelmästä nähdään. Määritelmässä esiintyvä taso Π toteuttaa Hilbertin aksioomien lisäksi paralleeliaksiooman **(PA)** [**6**], [**13**].

MÄÄRITELMÄ 4.3. Olkoon Ω ympyrä, jonka keskipiste on O ja säde $r > 0$. Kuvaus $i : \Pi \setminus \{O\} \to \Pi \setminus \{O\}$ määritellään seuraavasti: Jos $P \in \Pi \setminus \{O\}$ niin $i(P) = P' \in \overrightarrow{OP}$ siten, että

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Tällöin sanotaan, että i on *peilaus eli inversio ympyrän* Ω *suhteen*, ja että piste P' on on pisteen P *inversiopiste.*

Huomataan, että $i(P)$ on aina olemassa ja aksiooman **(C1)** nojalla yksikäsitteinen. Lisäksi määritelmän nojalla $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$. Olkoon $i(i(P)) = i(P') = P''$. Koska määritelmän nojalla

$$\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}},$$

saadaan

$$\overline{OP''} = \frac{r^2}{\overline{OP'}} = \frac{r^2}{\frac{r^2}{\overline{OP}}} = r^2 \frac{\overline{OP}}{r^2} = \overline{OP}.$$

Siispä $i(i(P)) = P$ kaikilla $P \in \Pi \setminus \{O\}$, joten i on bijektio ja erityisesti itsensä käänteiskuvaus [**13**].

Määritelmän nojalla on myös selvää, että ympyrän Ω pisteet kuvautuvat itsekseen. Huomataan myös, että keskipisteen O kuvaa ei ole määritelty kuvauksen i suhteen, sillä kun piste P menee lähemmäksi pistettä O, niin inversiopiste P' lähestyy äärettömyyttä [**6**].

Seuraavat lauseet kertovat inversion hyödyllisistä ominaisuuksista, joita tarvitaan osoittamaan, että **(ERM)** on voimassa Poincarén mallilla.

LAUSE 4.4. *Olkoon $P \neq O$ piste ympyrän Ω sisäpuolelta. Olkoon AB ympyrän Ω jänne, joka on kohtisuorassa puolisuoraa $\overrightarrow{OP}$ vastaan ja kulkee pisteen P kautta. Tällöin ympyrän Ω tangentit pisteissä A ja B leikkaavat puolisuoraa $\overrightarrow{OP}$ pisteessä P', joka on pisteen P inversiopiste ympyrän Ω suhteen* (Kuva 4.2).

TODISTUS. Olkoon tilanne kuten lauseessa. Ympyrän Ω tangentit pisteissä A ja B leikkaavat puolisuoraa $\overrightarrow{OP}$ pisteissä P_1 ja P_2 vastaavassa järjestyksessä. Tangentin määritelmästä johtuen kulmat $\sphericalangle OAP_1$ ja $\sphericalangle OBP_2$ ovat suoria ja siten yhteneviä. Lisäksi $OA \cong OB$, sillä janat ovat ympyrän Ω säteitä.

Kolmiot $\triangle APO \cong \triangle BPO$ **(SSS)**-säännön nojalla, sillä Pythagoraan lauseesta saadaan, että $AP \cong BP$. Tällöin erityisesti $\sphericalangle POA \cong \sphericalangle POB$.

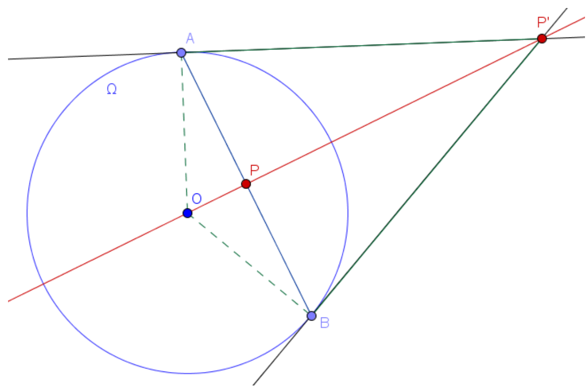
Nyt **(KSK)**-säännön nojalla kolmiot $\triangle OAP_1 \cong \triangle OBP_2$, ja erityisesti $OP_1 \cong OP_2$. Tästä seuraa, että ympyrän Ω tangentit pisteissä A ja B leikkaavat samassa pisteessä $P_1 = P_2 = P'$.

Huomataan, että kolmioilla $\triangle OPA$ ja $\triangle OP'A$ on kaksi yhtenevää kulmaa, suorat kulmat $\sphericalangle APO$ ja $\sphericalangle OAP'$ sekä yhteinen kulma pisteessä O. Siten Kulma-Kulma -säännön nojalla kolmiot ovat yhdenmuotoiset ja niiden vastinsivut ovat verrannolliset samassa suhteessa. Erityisesti

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}} \Leftrightarrow \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA} = \overline{OA}^2 = r^2.$$

Siispä inversion määritelmän nojalla P' on pisteen P inversiopiste.

□



KUVA 4.2. Pisteen P inversio ympyrän Ω suhteen (Lause 4.4)

Lause 4.4 antaa tavan konstruoida inversiopisteitä. Huomataan myös, että P' -keskinen, $P'A \cong P'B$ -säteinen ympyrä on ortogonaalinen ympyrän Ω kanssa, sillä ympyrän tangentti on aina kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan, siis $OA \perp P'A$ ja $OB \perp P'B$.

LAUSE 4.5. *Olkoon l suora, Ω ympyrä keskipisteenään O ja i peilaus ympyrän Ω suhteen. Tällöin*

(1) *Jos $O \in l$, niin $i(l \setminus \{O\}) = l \setminus \{O\}$.*
(2) *Jos $O \notin l$, niin suora l kuvautuu joukoksi $\alpha \setminus \{O\}$, missä α on ympyrä, joka kulkee pisteen O kautta, ja kääntäen.*

Lause 4.5 kertoo siis, että inversio kuvaa inversioympyrän keskipisteen kautta kulkevat suorat ja ympyrät suoriksi. Seuraava lause kertoo, että ortogonaaliset ympyrät kuvautuvat inversiossa itsekseen, ja antaa lisäksi keinon löytää ympyrälle ortogonaalisen ympyrän inversion avulla. Lause myös sanoo, että ortogonaalisen ympyrän sisäpisteet pysyvät inversiossa ympyrän sisällä.

LAUSE 4.6. *Olkoon α ortogonaalinen ympyrän Ω kanssa ja olkoon i inversio ympyrän Ω suhteen. Tällöin $i(\alpha) = \alpha$. Kääntäen, jos ympyrä α sisältää pisteen P ja sen inversiopisteen P', niin ympyrä α on ortogonaalinen ympyrän Ω kanssa. Lisäksi piste P on ympyrän α sisäpuolella jos ja vain jos piste $i(P) = P'$ on ympyrän α sisäpuolella.*

LAUSE 4.7. *Olkoon α ympyrä, joka ei kulje ympyrän Ω keskipisteen O kautta ja olkoon i inversio ympyrän Ω suhteen. Tällöin i kuvaa ympyrän α ympyräksi $i(\alpha) = \alpha'$.*

Lause 4.7 kertoo, että inversio kuvaa kaikki ympyrät ympyröiksi, jos kuvattava ympyrä ei sisällä inversioympyrän keskipistettä. Seuraava lause sanoo, että ympyröiden ja suorien säilyttämisen lisäksi inversio säilyttää kulmien suuruuden. Huomaa, että lauseessa käyrillä tarkoitetaan suoria ja ympyröitä.

LAUSE 4.8. *Kahden käyrän välinen kulma säilyy inversiossa, eli niiden inversiokuvat leikkaavat samassa kulmassa kuin alkuperäiset käyrät.*

Seuraavaksi tarkastellaan, mitä etäisyyksille käy inversiossa. Määritelmästä nähdään, että etäisyydet eivät säily, sillä pienet etäisyydet lähellä inversioympyrän keskipistettä kuvautuvat erittäin suuriksi etäisyyksiksi kauas ympyrästä. Myöskään pituuksien suhteet eivät säily. Huomataan kuitenkin, että neljän pisteen muodostama suhde eli *kaksoissuhde* (engl. *cross-ratio*) säilyy inversiossa [**6**].

MÄÄRITELMÄ 4.9. Olkoon A, B, P ja Q eri pisteitä karteesisella tasolla. Pisteiden *kaksoissuhde* (*cross-ratio*), joka on kunnan F alkio, määritellään suhteiden suhteena

$$(AB, PQ) = \frac{AP}{AQ} \div \frac{BP}{BQ} = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP}$$

LAUSE 4.10. *Olkoon Ω ympyrä keskipisteenään O ja olkoon $A \neq O$, $B \neq O$, $P \neq O$ ja $Q \neq O$ eri pisteitä tasolla. Tällöin inversio i ympyrän Ω suhteen säilyttää kaksoissuhteen, eli jos $i(A) = A'$, $i(B) = B'$, $i(P) = P'$ ja $i(Q) = Q'$, niin*

$$(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$$

Seuraavassa kappaleessa käytetään kaksoissuhdetta etäisyyden määrittämiseksi Poincarén mallilla.

4.2. Poincarén malli ja (ERM)

Poincarén malli on esimerkki epäeuklidisen geometrian olemassaolosta. Se toteuttaa kaikki Hilbertin aksioomat lukuunottamatta paralleeliaksioomaa. Ensimmäisen hyberbolisen geometrian mallin kehitti italialainen matemaatikko Eugenio Beltrami (1835-1900). Tässä kappaleessa tutkittava malli on kuitenkin saanut nimensä ranskalaisen matemaatikon Henri Poincarén (1854-1912) mukaan, jonka esittämä epäeuklidisen geometrian malli sai enemmän tunnettavuutta. Poincarén mallin olemassaolo osoittaa, että paralleeliaksioomaa ei voida todistaa muiden aksioomien avulla ja siten se myös osoittaa hyperbolisen geometrian aksioomajärjestelmän ristiriidattomuuden [**6**], [**13**].

Poincarén malli luodaan Euklidisen geometrian kehyksessä antamalla uusi tulkinta pisteiden, suorien, välissäolon ja kulmien sekä janojen yhtenevyyden käsitteille [**6**].

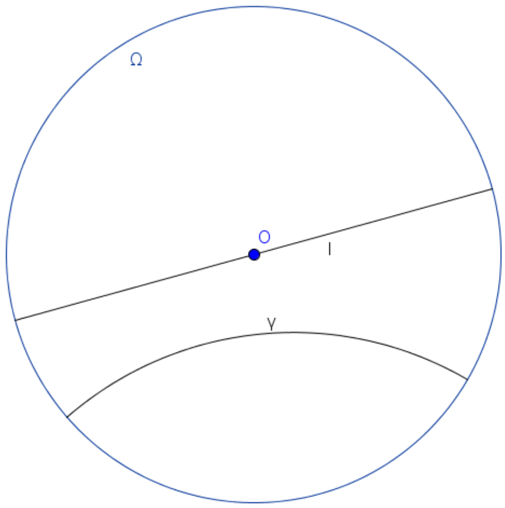
Olkoon $\Pi_{\mathbb{R}}$ karteesinen taso yli reaalilukujen kunnan $\mathbb{R}$. Kiinnitetään piste O. Olkoon Ω O-keskinen ympyrä ja olkoon vielä

$$\mathbb{O} = \{P \in \Pi_{\mathbb{R}} \quad | P \quad \text{on ympyrän} \quad \Omega \quad \text{sisäpuolella}\}.$$

Poincarén mallin pisteet, joita kutsutaan $\mathcal{P}$-pisteiksi ovat tämän joukon $\mathbb{O}$ pisteet, johon ei siis lasketa ympyrän Ω kehäpisteitä. Mallissa $\mathcal{P}$-suorat ovat joukon $\mathbb{O}$ osajoukkoja, joita on kahta tyyppiä. Joko $\mathcal{P}$-suora on pisteen O kautta kulkevan suoran l leikkaus joukon $\mathbb{O}$ kanssa tai ympyrän Ω kanssa ortogonaalisen ympyrän γ leikkaus joukon $\mathbb{O}$ kanssa (Kuva 4.3) [**6**],[**13**].

HUOMAUTUS 4.11. Etuliite $\mathcal{P}$ liitetään kaikkiin Poincarén mallin objekteihin, erottamaan ne eukilidisen geometrian objekteista.

HUOMAUTUS 4.12. $\mathcal{P}$-suorien ja -pisteiden määrittelyn jälkeen on mahdollista todistaa, että aksioomat **(I1)**, **(I2)** ja **(I3)** pätevät Poincarén mallilla. Todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [**13**].



KUVA 4.3. Poincarén mallin $\mathcal{P}$-suorat l ja γ

Määritellään seuraavaksi välissäolo ja yhtenevyys Poincarén mallilla. Tähän käytetään kaksoissuhteesta saatavaa lukua. Olkoon A ja B $\mathcal{P}$-pisteitä ja γ niitä yhdistävä $\mathcal{P}$-suora. Olkoon P ja Q ympyröiden Ω ja γ leikkauspisteet. Määritellään

$$d(A,B) = \left| \log \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP} \right| \in \mathbb{R},$$

jota kutsutaan pisteiden A ja B *hyberboliseksi etäisyydeksi* [**13**].

MÄÄRITELMÄ 4.13. Olkoon A, B ja C pisteitä $\mathcal{P}$-suoralla γ. Piste B on pisteiden A ja C välissä $\mathcal{P}$-mielessä eli $A * B * C$, jos

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C).$$

HUOMAUTUS 4.14. Poincarén mallilla myös aksioomat **(B1)**, **(B2)**, **(B3)** ja **(B4)** ovat voimassa. Todistus tällekin löytyy esimerkiksi lähteestä [**13**].

MÄÄRITELMÄ 4.15. Kaksi $\mathcal{P}$-kulmaa ovat $\mathcal{P}$-yhteneviä, jos niiden määrittämät euklidiset kulmat ovat yhtenevät tavanomaisessa mielessä.

MÄÄRITELMÄ 4.16. Olkoon A ja B $\mathcal{P}$-pisteitä ja olkoon γ niitä yhdistävä $\mathcal{P}$-suora. Tällöin sanotaan, että $\mathcal{P}$-jana AB on $\mathcal{P}$-yhtenevä $\mathcal{P}$-janan $A'B'$ kanssa mikäli

$$d(A,B) = d(A',B')$$

eli kaksoissuhde pisteille A, B, P ja Q on sama kuin pisteille A', B', P' ja Q'.

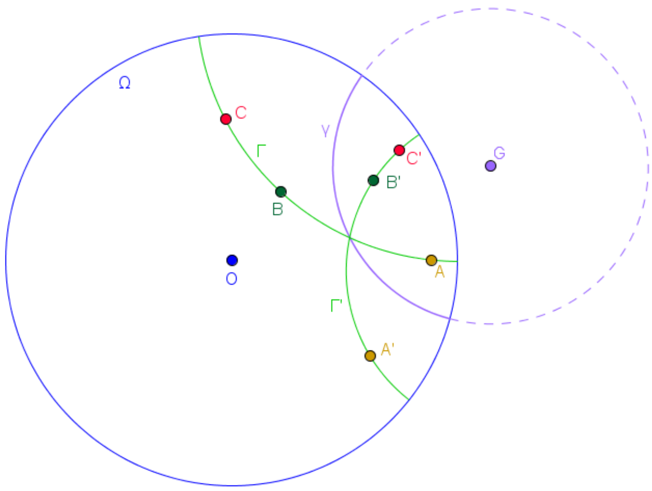
HUOMAUTUS 4.17. Poincarén malli toteuttaa yhtenevyysaksioomat **(C2)**, **(C2)**, **(C3)**, **(C4)** ja **(C5)**, mikä todistetaan esimerkiksi lähteessä [**13**].

Aksioomien **(C1)** ja **(SKS)** voimassaolo Poincarén mallilla todistetaan jäykkien liikkeiden avulla seuraavan lauseen jälkeen, joka kertoo, että **(ERM)** on voimassa Poincarén mallilla (vertaa Määritelmään 2.10).

LAUSE 4.18. *(Jäykkien liikkeiden olemassaolo eli* **(ERM)** *Poincarén mallilla) Poincarén mallilla on tarpeeksi jäykkiä liikkeitä, jotta seuraavat ovat voimassa:*

(1) *Mille tahansa $\mathcal{P}$-pisteille A ja A' on olemassa $\mathcal{P}$-jäykkä liike, joka kuvaa pisteen A pisteeksi A'.*
(2) *Mille tahansa $\mathcal{P}$-pisteille B, A, A' on olemassa $\mathcal{P}$-jäykkä liike, joka kuvaa pisteen B itsekseen ja $\mathcal{P}$-puolisuoran $\overrightarrow{BA}$ $\mathcal{P}$-puolisuoraksi $\overrightarrow{BA'}$.*
(3) *Mille tahansa $\mathcal{P}$-suoralle γ on olemassa $\mathcal{P}$-jäykkä liike, joka pitää $\mathcal{P}$-suoran γ pisteet paikallaan ja vaihtaa $\mathcal{P}$-suoran γ puolet keskenään.*

Todistus. Aloitetaan todistus muodostamalla ensin $\mathcal{P}$-heijastus η eli inversio $\mathcal{P}$-suoran γ suhteen ja muodostetaan tämän avulla muut tarvittavat jäykät liikkeet $\mathcal{P}$-siirto τ ja $\mathcal{P}$-kierto ρ (vertaa Lauseen 2.10 todistukseen). Olkoon siis γ annettu $\mathcal{P}$-



Kuva 4.4. Välissäolo säilyy inversiossa Poincarén mallilla

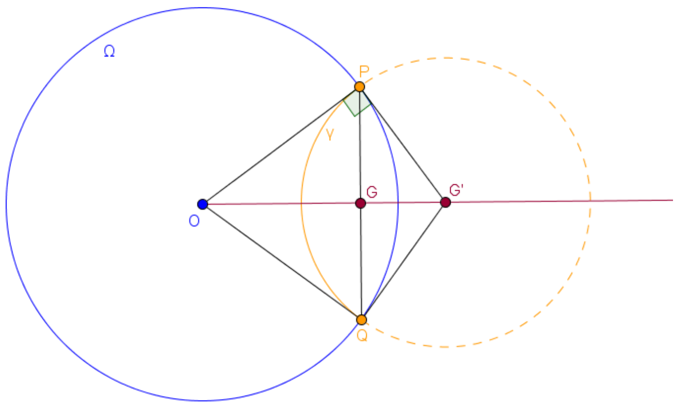
suora, joka on osa ympyrää Ω vastaan ortogonaalista ympyrää (Kuva 4.3). Olkoon η $\mathcal{P}$-heijastus eli inversio $\mathcal{P}$-suoran γ suhteen. Koska nyt Ω ja γ ovat ortogonaalisia, kuvaa inversio ympyrän Ω itsekseen (Lause 4.6). Lisäksi ympyrän Ω sisäpuoli kuvautuu ympyrän Ω sisäpuoleksi (Lause 4.6), jolloin $\mathcal{P}$-taso kuvautuu itsekseen bijektiivisesti eli erityisesti injektiivisesti, mikä seuraa inversion määritelmästä (Määritelmä 4.2). Siispä Määritelmän 2.1 ehto (1) on voimassa kuvaukselle η. Huomaa myös, että erityisesti kuvaus η pitää $\mathcal{P}$-suoran γ paikallaan ja vaihtaa sen puolet keskenään (Lause 4.6).

Koska inversio kuvaa ympyrät ympyröiksi (Lause 4.7) ja lisäksi säilyttää käyrien välisten kulmien suuruuden (Lause 4.8), vie η ympyrän Ω kanssa ortogonaaliset ympyrät toisiksi ympyrän Ω kanssa ortogonaalisiksi ympyröiksi. Siispä heijastus η kuvaa $\mathcal{P}$-suorat $\mathcal{P}$-suoriksi (Määritelmä 2.1 (2)). Huomaa, että myös $\mathcal{P}$-suora l on ortogonaalinen ympyrän Ω kanssa ja edellinen päättely pätee myös näille suorille.

Olkoon A, B ja C pisteitä $\mathcal{P}$-suoralta Γ siten, että $A * B * C$. Osoitetaan, että välissäolo säilyy invesiossa eli että $\eta(A) = A' * \eta(B) = B' * \eta(C) = C'$. Koska inversio säilyttää kaksoissuhteen (Lause 4.10), niin myös hyberbolinen pituus säilyy eli $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ ja $d(A, C) = d(A', C')$. Nyt välissäolon määritelmästä saadaan

$$d(A', C') = d(A, C) = d(A, B) + d(B, C) = d(A', B') + d(B', C'),$$

joten piste B' tosiaan on pisteiden A' ja C' välissä.



KUVA 4.5. Piste G kuvautuu pisteeksi O käyttäen samaa kaaviota, jolla piste G kuvautuu pisteeksi G'. Ensimmäinen heijastus tehdään $\mathcal{P}$-suoran γ suhteen ja toinen ympyrän Ω suhteen

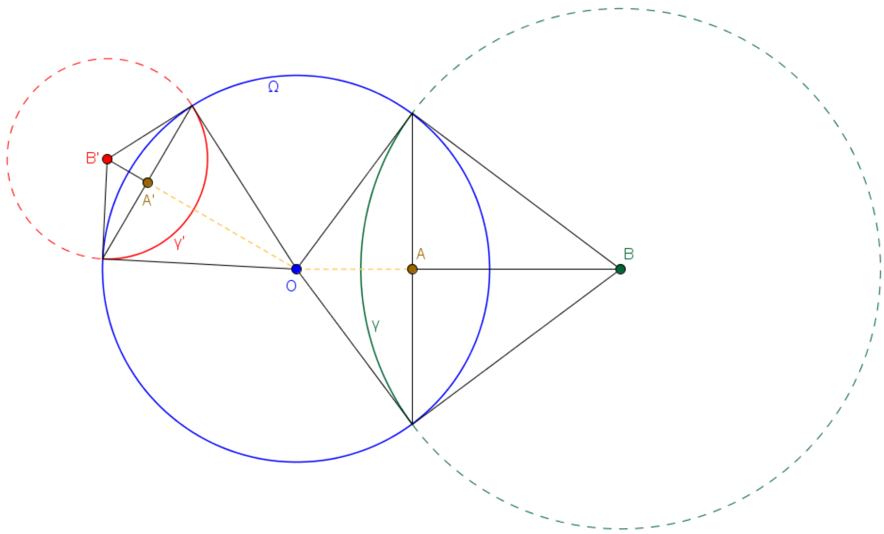
Inversio η $\mathcal{P}$-suoran γ suhteen siis säilyttää välissäolon (Määritelmä 2.1 (3)). Lisäksi se säilyttää kulmien $\mathcal{P}$-yhtenevyyden, sillä inversio säilyttää käyrien välisten kulmien suuruuden (Lause 4.8) ja kulmien yhtenevyys määritellään Poincarén mallilla normaalisti (Määritelmä 4.15). Heijastus η säilyttää myös janojen yhtenevyyden, koska yhtenevyys on määritelty kaksoissuhteen avulla ja se säilyy inversiossa muuttumattomana (Lause 4.10, Lause 4.15).

Siispä kuvaus η täyttää myös Määritelmän 2.1 kohdat (4) ja (5) ja on näin ollen haettu jäykkä liike $\mathcal{P}$-heijastus.

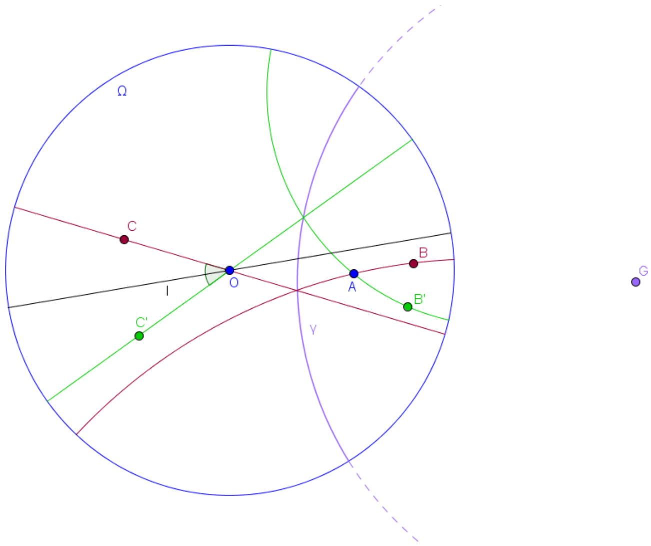
Olkoon sitten $O \neq G \in \mathbb{O}$ ja olkoon γ $\mathcal{P}$-suora, jonka keskipiste G' on pisteen G inversiopiste, kun inversio tehdään ympyrän Ω suhteen. Olkoon lisäksi $\mathcal{P}$-suoran γ ja ympyrän Ω leikkauspisteet P ja Q (Kuva 4.5). Tällöin huomataan Lauseen 4.4 avulla, että piste O on pisteen G inversiopiste, kun inversioympyränä toimii γ, sillä G on janan PQ keskipiste, O on suoralla $\overleftrightarrow{G'G}$, ja $\overleftrightarrow{OP}$ ja $\overleftrightarrow{OQ}$ ovat ympyrän γ tangentteja (Lause 4.4, Määritelmä 4.1). Siispä $\mathcal{P}$-heijastus η $\mathcal{P}$-suoran γ suhteen vie pisteen G pisteeksi O ja toisinpäin.

Olkoon A ja A' kaksi $\mathcal{P}$-pistettä. Koska $\mathcal{P}$-jäykkien liikkeiden yhdiste on $\mathcal{P}$-jäykkä liike, voidaan piste A ensin lähettää pisteeksi O heijastamalla ympyrän γ kautta, jonka keskipiste B on pisteen A inversiopiste ympyrän Ω suhteen. Tämän jälkeen voidaan kuvata piste O pisteeksi A' heijastamalla ympyrän γ' kautta, jonka keskipiste B' on pisteen A' inversiokuva ympyrän Ω suhteen (Kuva 4.6). Näiden kahden $\mathcal{P}$-heijastuksen yhdiste on $\mathcal{P}$-jäykkä liike tai $\mathcal{P}$-siirto τ, joka vie pisteen A pisteeksi A', mikä todistaa kohdan (1).

Olkoon sitten A, B ja B' $\mathcal{P}$-pisteitä ja olkoon η $\mathcal{P}$-jäykkä liike, joka vie pisteen A pisteeksi O ja olkoon $\eta(B) = C$ ja $\eta(B') = C'$. Viedään siis tilanne keskipisteeseen O, jolloin voidaan käsitellä helpompaa tyyppiä olevia $\mathcal{P}$-suoria (Kuva 4.7).



KUVA 4.6. Siirto Poincarén mallilla pisteestä A pisteeseen A'



KUVA 4.7. Kierto Poincarén mallilla

Olkoon l $\mathcal{P}$ -suora, joka kulkee pisteen O kautta ja puolittaa kulman $\sphericalangle COC'$. Tavanomainen heijastus κ suoran l suhteen pitää pisteen O paikoillaan ja vie puolisuoran $\overrightarrow{OC}$ puolisuoraksi $\overrightarrow{OC'}$. Nyt palauttamalla tilanne vielä alkuperäiseen kuvauksella τ^{-1} on löydetty $\mathcal{P}$-jäykkä liike $\tau^{-1}\kappa\tau = \rho$, joka pitää pisteen A paikoillaan ja vie puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ puolisuoraksi $\overrightarrow{AB'}$.

$\therefore$ **(ERM)** on voimassa Poincarén mallilla. $\square$

LAUSE 4.19. **(C1)** *on voimassa Poincarén mallilla.*

TODISTUS. Olkoon AB annettu $\mathcal{P}$-jana. Pitää osoittaa, että $\mathcal{P}$-puolisuoralla, joka lähtee pisteestä A', on täsmälleen yksi piste B' siten, että $AB \cong A'B'$.

Lauseen 4.18 nojalla on olemassa $\mathcal{P}$-jäykkä liike τ, joka vie pisteen A pisteeksi A'. Lisäksi on olemassa $\mathcal{P}$-jäykkä liike ρ, joka vie puolisuoran $\tau(\overrightarrow{AB})$ puolisuoraksi, joka alkaa pisteestä A'. Olkoon $B' = \rho(\tau(B))$ piste tältä puolisuoralta. Tällöin $AB \cong A'B'$, koska jäykät liikkeet τ ja ρ säilyttävät pituuden. Siispä **(C1)** on voimassa Poincarén mallilla. $\square$

SEURAUS 4.20. **(SKS)** *on voimassa Poincarén mallilla.*

TODISTUS. Hilbertin olemassaolo-, välissäolo- ja yhtenevyysaksioomien ollessa voimassa jäykkien liikkeiden olemassaolo on yhtäpitävä aksiooman **(SKS)** kanssa (Seuraus 2.14). $\square$

LUKU 5

Analyyttinen ja euklidinen geometria koulumatematiikassa

Tämän tutkielman tarkoituksena on ollut selventää karteesisen geometrian ja euklidisen geometrian välistä yhteyttä jäykkien liikkeiden tutkimisen kautta. Analyyttisen geometrian ja tasogeometrian välinen yhteys jää helposti koulumatematiikassa epäselväksi. Erityisesti geometrian opetus on sekoitusta puhtaasta tasogeometriasta ja laskennallisista menetelmistä, joita hyödynnetään soveltavissa tehtävissä. Tässä luvussa tutkitaan, millä tavalla analyyttinen geometria ja tasogeometria sekä yhtenevyysaksioomat esitetään lukion oppikirjoissa. Lukua varten on tutkittu kolmea lukion pitkän matematiikan oppikirjasarjaa ja erityisesti niiden geometrian ja analyyttisen geometrian kurssien kirjoja. Tutkitut kirjat ovat *Lukion Calculus: MAA3 Geometria* (ja) *MAA4 Analyyttinen geometria*, *Pitkä matematiikka 3: Geometria*, *Pitkä matematiikka 4: Analyyttinen geometria*, *Pyramidi 3: Geometria* ja *Pyramidi 4: Analyyttinen geometria*. Luvun lopussa pohditaan myös keinoja, joilla tasogeometrian ja analyyttisen geometrian yhteyttä voisi olla mahdollista oppikirjoissa ja opetuksessa parantaa.

Kaikissa tutkituissa lukiokirjoissa euklidisen ja analyyttisen geometrian välistä suhdetta käsitellään yleensä korkeintaan kirjojen alkupuolella. Tämän jälkeen tyyli muuttuu enemmän teoria- ja kaavapainotteiseksi. Joidenkin kappaleiden johdannoissa saatetaan vielä uudelleen mainita aksiomaattinen järjestelmä, analyyttisen geometrian algebrallisuus tai yhtenevyyslauseet, mutta tämä on harvinaista. Kirjoja edetessään lukijan on hyvin helppo alun jälkeen unohtaa, mitä geometria tai analyyttinen geometria pohjimmiltaan on, ja minkä päälle ne rakentuvat. Seuraavaksi tarkastellaan lyhyesti lähemmin kaikkia tutkittuja kirjoja kirjasarjoittain. Ensin käsitellään kirjasarjan geometrian kurssikirja ja sen jälkeen analyyttisen geometrian kurssikirja, sillä ne käydään tässä järjestyksessä läpi myös lukiossa.

Pyramidi -kirjasarja aloittaa geometrian kurssikirjan johdannolla, jossa lyhyesti kerrotaan geometrian historiasta, ja mainitaan tasogeometrian aksiomaattinen pohja. Aksioomia ei johdannossa kuitenkaan avata tai tutkita mainintaa enempää. Kirjassa lähdetään kuitenkin loogisesti johdannon jälkeen määrittämään tasogeometrian peruskäsitteitä, jolloin lukijalle tulee jonkinnäköinen kuva euklidisen geometrian lähtökohdista. Kirjan lopussa on myös lisätieto-osio, jossa syvennetään tietoa aksiomaattisen järjestelmän luonteesta. Osiossa keskitytään kuitenkin lähinnä epäeuklidisen geometrian esittelyyn, eikä osio kuulu varsinaisesti kurssin sisältöön. Siten sen tutkiminen jää lähinnä oppilaan omalle vastuulle.

Pyramidi 3:ssa on oma kappaleensa yhtenevyydelle ja kappaleen alussa määritellään yhtenevyys seuraavasti: ”Kuviot K ja K' ovat *yhtenevät*, kun kuviosta K saadaan K' yhdellä tai useammalla peräkkäisellä yhtenevyyskuvauksella (siirto, kierto ja peilaus).” Tässä kohtaa ollaan siis jo hyvin lähellä tason jäykkiä liikkeitä, mutta näiden yhtenevyyskuvausten tarkempi tarkastelu jätetään jälleen lisätieto-osioon ja opiskelijan oman mielenkiinnon varaan. Lisätieto-osiossa esitellään euklidisen tason yhtenevyyskuvaukset ja lisäksi osiossa perustellaan muutamia yhtenevyyslauseita näiden kuvausten avulla. Vaikka näiden kuvausten käytön hyväksyttävyyttä ei perustella, vastaavat yhtenevyyslauseiden perustelut jokseenkin tässä tutkielmassa käytettyä tapaa todistaa aksiooma **(SKS)** jäykkien liikkeiden olemassaolon avulla. Päättely kirjassa etenee esimerkiksi näin (vertaa Lauseen 2.3 todistukseen): ”Kuvataan ensin piste B pisteeksi B' yhdensuuntaissiirrolla. Koska $BC = B'C'$, pisteen C kuva C_1 saadaan sen jälkeen kuvauttua pisteeksi C' kiertämällä kolmiota $A_1B'C_1$ pisteen B' suhteen.”

Kirjasarjan seuraavassa osassa *Pyramidi 4* lähdetään liikkeelle jälleen johdannolla, jossa konstruoidaan havainnollisesti karteesinen koordinaatisto ja lisäksi kerrotaan melko kattavasti analyyttisen geometrian historiasta. Johdannossa myös käsitellään lyhyesti sitä, miten analyyttinen geometria on algebrallista toisin kuin perinteisen geometrian ongelmat. Tämä on kuitenkin ainoa kohta kirjassa, missä vähänkään sivutaan euklidisen ja analyyttisen geometrian yhteyttä ja alun jälkeen pysytelläänkin pitkälti analyyttisen geometrian kaavoissa, käyrien yhtälöissä ja niiden sovelluksissa. Peilauksia koordinaatistossa käsitellään lyhyesti kirjan kappaleessa 1.5 ja kiertoja koordinaatistossa suoran kulman verran origon suhteen lisätieto-osiossa.

Kaiken kaikkiaan *Pyramidi* -sarjan kirjat pyrkivät ainakin jossain määrin pohjustamaan geometrista ajattelua ja perustelemaan, mihin oletuksiin geometria perustuu. Valitettavasti tieto on kuitenkin pakattu kirjan reunoille, eikä euklidisen ja karteesisen geometrian malleja ja ajattelua pyritä pitämään esillä koko kirjan läpi. Lopputulos on kuitenkin huomattavasti seuraavaa parempi.

Pitkä matematiikka 3 kirjassa ei avata geometrian luonnetta perusteellisesti missään vaiheessa. Kirjassa mennään johdatteluitta suoraan asiaan ja tyyli pysyy samanlaisena läpi koko kirjan. Loogisen geometrisen päättelyn perusteita esitetään satunnaisesti pitkin kirjaa olevien todistusten yhteydessä. Useimmat todistukset ovat kuitenkin hyvin laskennallisia, eikä tuloksia perustella aksioomiin pohjautuen, kuten perinteisessä euklidisessa tasogeometriassa. Aksioomista ei itse asiassa ole mainintaa sen enempää kuin yhtenevyyslauseistakaan. Kirjassa keskitytään näiltä osin vain yhdenmuotoisuuteen ja kappaleiden suhteisiin.

Kirjasarjan seuraava osa *Pitkä matkematiikka 4* jatkaa samoilla linjoilla edeltäjänsä kanssa. Lukijalta oletetaan jo jonkinlaisia ennakkotietoja koordinaattigeometriasta, sillä kirjassa ei perustella tai selitetä, mikä koordinaatisto on tai miten se muodostetaan. Kirjassa ei myöskään pyritä selittämään, miten analyyttinen geometria liittyy tasogeometriaan. Yleisesti tässä kirjasarjassa ei juurikaan pysähdytä miettimään, mihin geometria ja sen tulokset euklidisessa tasossa tai koordinaatistossa oikein perustuvat. Lukijalle halutaan ensisijaisesti antaa laskukaavat ja riittävästi esimerkkejä niiden käyttämiseksi.

Lukion Calculus -sarjassa geometrian ja analyyttisen geometrian kurssit on nidottu yksiin kansiin. Kirjan alkusanoissa päästään siten jo hieman selventämään euklidisen ja analyyttisen geometrian yhteyttä ja eroja. Itse geometrian kurssi alkaa kappaleella tasogeometrian perusteista, jossa esitellään tasogeometrian peruskäsitteet. Kappaleessa myös kerrotaan lyhyesti tasogeometrian historiasta ja jonkin verran aksiomaattisesta järjestelmästä. Lisäksi siinä esitellään eukleideen viisi ensimmäistä postulaattia, mutta nykyaikaisesta Hilbertin aksioomajärjestelmästä ei ole mainintaa.

Yhtenevyys määritellään kirjassa näin: "Kahta kuviota sanotaan *yhteneviksi*, jos ne voidaan asettaa päällekäin siten, että ne täysin yhtyvät." Tämä määritelmä on melko suurpiirteinen, mutta perustuu pohjimmiltaan jäykkiin liikkeisiin. Muutamaa riviä alempana puhutaankin jo suoraan ja kääntäen yhtenevistä kuvioista, joita on käsitelty myös tämän tutkielman luvussa 3. Tämän yhteydessä tulevat esiin jäykät liikkeet siirto ja heijastus, mutta kiertoa ei mainita. Näin ollen suoraan yhtenevien kuvioiden määritelmä on kirjassa hieman vajaa. Yhtenevyyslauseet esitetään omassa taulukossaan, mutta niitä ei todisteta jäykkien liikkeiden avulla. Kappaleen lopussa on kuitenkin esittely geometrisesta todistamisesta, missä paitsi selitetään todistuksen yleiset vaiheet, annetaan muutama esimerkki ja harjoitus geometrisesta todistamisesta. Näiden kautta päästään ehkä lähemmäksi geometrisen todistamisen ja ajattelun luonnetta kuin muissa kirjasarjoissa.

Analyyttisen geometrian osuus alkaa kappaleella käyrien ja lukujen yhteydestä, jossa lyhyesti esitetään, miten analyyttinen geometria sai alkunsa, ja puhutaan käyrien yhtälöistä. Kappaleen loppupuolella todetaan: "Nyt voidaankin kuvion itsensä asemesta tutkia sen yhtälöä ja käyttää geometristen ratkaisuvälineiden asemesta algebran menetelmiä." Kirjan seuraavassa kappaleessa *2 Koordinaatisto* vielä kerrataan: "Analyyttisessä geometriassa tutkitaan kuvioiden geometrisia ominaisuuksia laskennallisin keinoin." Nämä kohdat selittävät kirjasarjassa selkeimmin analyyttisen geometrian ja euklidisen geometrian välistä yhteyttä. Myös koordinaatiston konstruoiminen esitetään kappaleessa ymmärrettävästi, mutta hyvin tiiviisti. Suoran yhtälön konstruoimisessa karteesisessa koordinaatistossa kirjasarja kunnostautuu pari kappaletta myöhemmin.

Tässäkään kirjasarjassa analyyttisen ja euklidisen geometrian yhteyttä ei pidetä esillä selkeästi ja jatkuvasti. Sarjan suurin etu on kuitenkin se, että kurssikirjat ovat rinnakkain, jolloin on aina mahdollista vertailla keskenään, miten asioita, esimerkiksi suoria, käsiteltiin geometria -kurssin puolella verrattuna analyyttisen geometrian kurssiin.

Lukiomatematiikassa geometrisen ajattelun kannalta ongelmallisinta on se, että lukiomatematiikka on hyvin laskennallista, kun euklidinen tasogeometria taas puhtaimmillaan on kaikkea muuta. Siksi euklidisen geometrian luonteeseen voi olla vaikea lukiokurssin aikana todella syventyä. Euklidisen geometrian perusteet kuten aksiomaattinen järjestelmä ja miten geometria todella rakentuu sen päälle, ovat lähinnä maintoja johdannossa. Tällöin on vaikea ymmärtää tai selittää sitä, miten analyyttinen tasogeometria, jossa pätevät täsmälleen samat lainalaisuudet tai aksioomat, yhdistyy euklidiseen tasogeometriaan.

Usein lukiossa ongelmana on myös ajankäyttö, jolloin opettajan on pakko harkita, mitä osuuksia kurssimateriaaleista käydään läpi ja minkä tutkiminen jätetään oppilaiden itsensä mielenkiinnon varaan. Yleensä painotus on tällöin soveltavissa tehtävissä ja siinä, että kaikki mahdolliset kaavat tulevat esitellyiksi, kun taas niin sanotusti ylimääräinen pohjustus aiheisiin jätetään vähemmälle. Tämä johtuu osittain myös siitä, että lukiossa opettajalla on usein paineita valmentaa oppilaita ylioppilaskirjoituksia varten, jolloin aikaa jää vähemmän oppilaiden mielenkiinnon herättämiselle ja ymmärryksen syventämiselle.

Lukiomatematiikan päätavoitteina on yleissivistää oppilaita, ja antaa heille tarvittavat taidot hyvin monenlaisiin suuntautumisvaihtoehtoihin. Tästä syystä matematiikassa painotetaan enemmän käytännönläheisiä ongelmia ja halutaan antaa niitä varten sopivat ratkaisutyökalut. Tällöin näiden ratkaisutyökalujen alkuperä ja niiden käytön perustelu jää usein vähemmälle pitkänkin matematiikan kursseilla, vaikka matematiikassa ja geometriassa juuri tämä kaikkien tulosten looginen johtaminen ja menetelmien käytön oikeutus on tärkeää. Kyse onkin pohjimmiltaan arvovalinnasta ja siitä, mitä pidetään suurimmalle osalle oppilaista hyödyllisimpänä tietona.

Jos geometrian kohdalla halutaan selventää euklidisen ja analyyttisen geometrian välistä yhteyttä, yksi ratkaisu on se, mikä *Pyramidi* -sarjassa on tehty, eli jätetään suosiolla syventävä tieto lisätieto-osioon, jolloin se on ainakin oppilaiden helposti saatavilla. Tällöin on kuitenkin hyvin todennäköistä, että suurin osa oppilaista ei tule milloinkaan asiaan perehtymään. Toisaalta olisi hyödyllisempää kantaa geometrista ajattelua ja aksiomaattista järjestelmää edes jossain määrin mukana läpi koko kirjan sen sijaan, että tieto geometrian luonteesta jätetään lyhyen johdannon varaan. Ainakin aksioomat olisi hyvä alussa esitellä ja antaa esimerkkejä aksiomaattisen järjestelmän toiminnasta, sekä kertoa, miten sen avulla todistetaan yksinkertaisia geometrisia tuloksia. Näitä tuloksia voisi johdannollisesti todistaa esimerkiksi aina uuteen aihepiiriin siirryttäessä. Kun ymmärrys euklidisen geometrian aksiomaattisuudesta olisi jollain tasolla saavutettu, olisi helpompi myös selittää analyyttistä geometriaa aksioomien kautta.

Aivan uuden keinon geometrian tutkimiselle antavat uudet teknologian välineet ja matematiikan sovellukset. Esimerkiksi Geogebra -ohjelmalla jokaisen oppilaan on mahdollista itsenäisesti tutkia matematiikkaa ja erityisesti geometriaa. Oppilaat voivat sen avulla esimerkiksi selvittää, miten eri yhtenevyyslauseet ja tason yhtenevyyskuvaukset kierto, siirto ja heijastus liittyvät toisiinsa. Eräs Geogebran hyödyllisistä ominaisuuksista on, että sen avulla pystyy rinnakkain käsittelemään geometriaa euklidisesti ja algebrallisesti. Myös muu kouluihin tullut tekniikka, kuten älytaulut, mahdollistavat interaktiivisemman oppimisen, ja erityisesti ne antavat aivan uusia mahdollisuuksia matematiikan havainnollistamiseen.

Opettamisen tyyli on viime vuosina kulkenut yhä enemmän oppilasjohtoiseen suuntaan. Yhden reitin geometrian ymmärryksen kehittämiselle voisikin antaa yksilöllisen opetuksen malli. Tässä nopeammin eteneville oppilaille pystytään yksilöllisemmin takaamaan mahdollisuus edetä muista riippumatta. Heille olisi mahdollista antaa tehtäviä, joissa käydään läpi myös sellaisia asioita, jotka opetussuunnitelmaan eivät varsinaisesti kuulu. Myös euklidisen ja analyyttisen geometrian tai siirtojen, kiertojen ja heijastusten tutkiminen voisi olla yksi tällaisista syventävistä tehtävistä.

LIITE A

Hilbertin aksioomat

Aksioomat ovat lähteistä [**6**] ja [**13**].

Olemassaoloaksioomat (Incidence axioms)

(I1) Olkoon A ja B pisteitä siten, että $A \neq B$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi suora, joka kulkee sekä pisteen A että pisteen B kautta.
(I2) Jokaisessa suorassa on ainakin kaksi eri pistettä.
(I3) On olemassa kolme pistettä $A \neq B \neq C$ jotka eivät ole kaikki samalla suoralla.

Välissäoloaksioomat (Axioms of betweenness)

(B1) Jos $A*B*C$, niin A, B ja C ovat eri pisteitä, jotka ovat kaikki samalla suoralla, ja tällöin myös $C*B*A$.
(B2) Mille tahansa pisteille pisteille A ja B, $A \neq B$, on olemassa piste C siten, että $A*B*C$.
(B3) Kolmesta saman suoran erillisestä pisteestä vain yksi voi olla kahden muun välissä.
(B4) Olkoon A, B ja C eri pisteitä, jotka eivät ole kaikki samalla suoralla ja olkoon l suora, joka ei sisällä yhtään yhtään pisteistä A, B ja C. Jos suoralla l on piste D siten, että $A*D*B$, niin sillä täytyy olla myös piste E jolle pätee joko $B*E*C$ tai $A*E*C$.

Yhtenevyysaksioomat (Axioms of congruence)

(C1) Olkoon AB jana. Puolisuoralla $\overrightarrow{CD}$ on täsmälleen yksi piste E siten, että $AB \cong CE$.
(C2) Jos $AB \cong CD$ ja $AB \cong EF$ niin $CD \cong EF$. Lisäksi jokainen jana on yhtenevä itsensä kanssa.
(C3) Olkoon $A*B*C$ ja $D*E*F$. Jos $AB \cong DE$ ja $BC \cong EF$, niin $AC \cong DF$.
(C4) Olkoon $\sphericalangle ABC$ kulma ja $\overrightarrow{DE}$ puolisuora. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{DF}$ suoran $\overleftrightarrow{DE}$ valitulta puolelta, jolle $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle FDE$.
(C5) Olkoon $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\beta$ ja $\sphericalangle\gamma$ kulmia. Jos $\sphericalangle\alpha \cong \sphericalangle\beta$ ja $\sphericalangle\alpha \cong \sphericalangle\gamma$, niin $\sphericalangle\beta \cong \sphericalangle\gamma$. Lisäksi jokainen kulma on yhtenevä itsensä kanssa.
(SKS) Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle EDF$, $AB \cong EF$ ja $AC \cong EF$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Paralleeliaksiooma (Parallel Postulate)

(PA) Jos l on suora ja P piste, joka ei ole suoralla A, niin pisteen P kautta kulkee korkeintaan yksi suoran l kanssa yhdensuuntainen suora.

Kirjallisuutta

[1] George Baloglou: *Isometries As Functions.*
http://www.emis.de/monographs/Isometrica/isometrica-1.pdf.
Päivitetty versio 2006.

[2] H. S. M. Coxeter, F. R. S.: *Introduction to Geometry.* toinen painos, John Wiley & Sons, Inc. 1969.

[3] Norman Do: *MATH 348 - Topics In Geometry.*
http://users.monash.edu/∼normd/documents/MATH-348.pdf.
Luentomoniste 2010.

[4] Moon Duchin: *Euclidean Geometry, course materials.*
http://mduchin.math.tufts.edu/UCD/141/materials.html.
Kurssimateriaalit 2008.

[5] Marvin Jay Greenberg: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History.* kolmas painos, W.H. Freeman and Company, 1993.

[6] Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond.* ensimmäinen painos, Springer, 2000.

[7] Paavo Jäppinen, Alpo Kupiainen, Matti Räsänen: *Lukion Calculus, MAA3 Geometria, MAA4 Analyyttinen geometria.* 1.-2. painos, Otava, 2004.

[8] Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela, Jorma Tahvanainen: *Pitkä matematiikka 3, Geometria.* 1.-3. painos, Werner Söderström Osakeyhtiö, 2007.

[9] Jukka Kangasaho, Jukka Mäkinen, Juha Oikkonen, Johannes Paasonen, Maija Salmela, Jorma Tahvanainen: *Pitkä matematiikka 4, Analyyttinen geometria.* 1.-3. painos, Werner Söderström Osakeyhtiö, 2008.

[10] James King: *Triple Line Reflection and Glide Reflections.*
https://www.math.washington.edu/∼king/coursedir/m444a03
/class/12-03%20Triple-Line-Reflect-Glid.html.

[11] Pekka Kontkanen, Riitta Liira, Kerkko Luosto, Juha Nurmi, Riikka Nurmiainen, Anja Ronkainen, Sisko Savolainen: *Pyramidi 3, Geometria.* 1.-5. painos, Tammi, 2005.

[12] Pekka Kontkanen, Riitta Liira, Kerkko Luosto, Anja Ronkainen, Sisko Savolainen: *Pyramidi 4, Analyyttinen geometria.* 1. painos, Tammi, 2005.

[13] Lassi Kurittu, Veli-Matti Hokkanen, Lauri Kahanpää: *Geometria.* toinen, tarkastettu painos, Jyväskylän yliopistopaino, 2008.

[14] Jouni Parkkonen: *Algebra 2014.*
http://users.jyu.fi/∼parkkone/Algebra2014/Algebra2014.pdf.
Päivitetty 6.5.2014.

[15] Mikko Saarimäki: *Vektorilaskentaa Euklidisissa Avaruuksissa.* Jyväskylän yliopistopaino, 2012.