

Lukiolaisten käsitykset pyörimisliikkeen mekaniikassa

Pro gradu -tutkielma, 23.6.2016

Tekijä:

PAULI HYTÖLÄ

Ohjaaja:

JOUNI VIIRI



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIIKAN LAITOS

Tiivistelmä

Hytölä, Pauli

Lukiolaisten käsitykset pyörimisliikkeen mekaniikasta

Pro gradu -tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2016, 52 sivua

Tutkimuksessa etsittiin yleisiä harhakäsityksiä, joita suomalaisilla lukio-opiskelijoilla on pyörimisliikkeen mekaniikasta. Oppilaiden käsitysten tutkimista varten laadittiin monivalintatesti. Suurimmassa osassa testin tehtävistä opiskelijan piti perustella valitsemansa vastausvaihtoehto. Lopuksi lukiolaisilla havaittuja käsityksiä vertailtiin aiemmissa pyörimisliikkeen mekaniikkaa käsittelevissä tutkimuksissa paljastuneisiin harhakäsityksiin. Tutkimuksen perusteella lukio-opiskelijoilla havaittiin aiemman kaltaisia harhakäsityksiä ja ongelmia erityisesti kitkaa käsittelevissä aiheissa, pyörimisliikkeen mallien soveltamisessa suoraviivaiseen liikkeeseen sekä vierimisessä.

Avainsanat: pyöriminen, pyörimisliike, mekaniikka, harhakäsitykset, monivalintatesti, lukio

Abstract

Hytölä, Pauli

Student understanding of rotational mechanics in upper secondary school

Master's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2016, 52 pages

Upper secondary school students' common misconceptions on rotational mechanics were studied using a multiple-choice test made for the purpose. In most of the questions students were required to justify their choices. Finally the results were compared to students' misconceptions found earlier in studies on rotational mechanics. According to the results the Finnish upper secondary school students have certain misconceptions similar to those found in the previous studies. Misconceptions were found especially about the topics concerning friction, applications of rotational motion concepts in rectilinear motion, and rolling motion.

Keywords: rotation, rotational motion, mechanics, misconceptions, multiple-choice test, upper secondary school

Esipuhe

Suurin oivallukseni oli nähdä systeemin pyörivän, vaikei se pyörinytkään.

– Ote kandidaatintutkielmani muistiinpanoista

Haluan kiittää ohjaajaani professori Jouni Viiriä korvaamattomista neuvoista ja opastuksesta työni edetessä sekä siitä, että sain vapaat kädet tutkielmani aiheen valinnassa. Kiitoksen ansaitsevat myös Sirpa Suontausta, Jarkko Helin ja Tom Nevanpää, jotka antoivat minun tehdä tutkimusta oppitunneillaan. Erityisesti haluan kiittää perhettäni ja läheisiäni heidän antamastaan tuesta ja kannustuksesta, joita ilman en olisi päässyt opinnoissani tähän pisteeseen saakka.

Jyväskylässä 23. kesäkuuta 2016
Pauli Hytölä

Sisältö

Tiivistelmä	i
Abstract	ii
Esipuhe	iii
Sisältö	iv
1 Johdanto	1
2 Taustaa	3
2.1 Aiempia tutkimuksia	3
2.2 Tutkimuksissa havaittuja harhakäsityksiä	6
3 Tutkimuskysymykset	12
4 Tutkimusmenetelmät	14
4.1 Datan keruu	14
4.2 Monivalintatestin kysymykset	15
4.2.1 Kiertokulma, kulmanopeus ja nopeus	16
4.2.2 Hitausmomentti	18
4.2.3 Pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen	19
4.2.4 Pyörimisenergia, vierimisen energiatarkastelu ja ener- gian säilymlaki	23
4.2.5 Vierimisehto	25
4.2.6 Kitkavoima vierimisessä	27
4.3 Datan analysointi	31
5 Tutkimustulokset	33
5.1 Monivalintatestin kysymysten anti	33
5.2 Tulokset aihealueittain	43
6 Johtopäätökset	47
Viitteet	51
Liite A Monivalintatesti	I

1 Johdanto

Yksi fysiikan päätavoitteita on luonnon tutkiminen tieteellisillä metodeilla sekä sen ilmiöiden selittäminen ja ennustaminen kvalitatiivisten ja kvantitatiivisten mallien avulla. Ihmiselle on luontaista etsiä uuteen ilmiöön helppoiten käsitettävä ja vähiten ponnisteluja vaativa selitys. Luonnon ilmiöitä mallinnettaessa helpoin selitys ei usein ole oikea, vaikka se näyttäisi sopivan havaintoihin. Ristiriita havaitaan yleensä vasta myöhemmin, kun sama malli ei enää selitäkään seuraavia havaintoja. Virheelliseen selitykseen tai malliin tahattomasti uskomisesta käytetään nimitystä harhakäsitys. Harhakäsitysten synnylle otollista on luontoa havainnoivan henkilön kokemattomuus luonnontieteellisen tiedon muodostamisesta. Tällainen henkilö ei siis itse voi tietää muodostamansa käsityksen olevan virheellinen, mikä voi johtaa harhakäsityksen juurtumiseen hyvinkin syvälle.

Kokemattomuus ei tietenkään ole seikka, joka rajoittaa henkilön mahdollisuuksia luonnontieteellisen tiedon muodostamiseen. Oikeanlaisella opastuksella ja opetuksella kokematonkin havainnoija voi kehittää ajatteluaan. Tämä onkin Opetushallituksen nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen sekä vuoden 2003 että 2015 opetussuunnitelman perusteiden mukaan yksi lukioiden fysiikan opetuksen tavoitteista [1, 2]. Fysiikan opetus on myös keino välttää harhakäsityksinä eteen avautuvat sudenkuopat. Tässä astuu kuvaan opettajan roolin tärkeys. Fysiikanopettaja on vastuussa omasta ammattitaidostaan eikä hänellä tulisi olla harhakäsityksiä fysiikasta. Näin vältetään harhakäsitysten periytyminen seuraaville luonnontieteilijäsukupolville.

Miten opettaja voi ennaltaehkäistä harhakäsityksiä? Riittävätkö oman ammattitaidon laatu ja virheettömät käsitykset luonnon toiminnasta? Todennäköisesti eivät, sillä opettaja ei voi tietää, minkälaisen käsityksen opetettavasta aiheesta oppilas saa, ennen kuin tulee oppilaan tietojen ja taitojen arvioinnin vuoro. Tässä vaiheessa harhakäsitys on valitettavasti saattanut jo syntyä ja istua syväänkin. Reflektio on avainsana harhakäsitysten kitkemisessä. Oppilaalla havaitun virheellisen käsityksen perusteella opettaja kehittää opetusta siihen suuntaan, että vastaavan virheen syntyminen voidaan jatkossa estää.

Yksi tapa havaita oppilaiden harhakäsityksiä on testata ja arvioida oppilaiden tietoja. Tietyltä aihealueelta kerätyistä tuloksista voi päätellä, missä aiheissa oppilailla on keskimäärin eniten hankaluuksia – siis potentiaalisia virhekäsitysten syntypaikkoja. Testiä tulee edelleen kehittää siten, että se

pyrkii luotaamaan juuri näitä aihealueita. Näin voi muodostaa periaatteessa tarkankin kuvan oppilaiden harhakäsityksistä – tosin vain suppealla fysiikan osa-alueella.

Tässä tutkielmassa testataan lukio-oppilaiden käsityksiä pyörimisliikkeestä. Painopisteenä on kolme aiemmissa tutkimuksissa havaittua harhakäsityksiä aiheuttanutta aihealuetta pyörimisliikkeen mekaniikassa. Vaikka tutkielman aiheena on nimenomaan pyörimisliikkeen käsitykset, sivutaan aihealueissa jonkin verran myös ympyräliikettä. Tutkielman tavoitteena on selvittää, vastaavatko oppilailta kerätyt käsitykset aiemmin havaittuja harhakäsityksiä tutkituista aihealueista.

Motivaationa tälle tutkielmalle on halu edesauttaa oppilaiden luonnontieteellisen ajattelun kehittämistä ja harhakäsitysten välttämistä. Erityisesti pyörimisliikkeen tapauksessa tämä on tavoiteltavaa: lukioiden uudet opetussuunnitelman perusteet otetaan käyttöön syyslukukauden 2016 alkaessa ja pyörimisen mekaniikka on siinä jaettu kahteen eri kurssiin (FY4 ja FY5) [2]. Näin ollen saman aihealueen harhakäsitykset voivat itää oppilaan mielessä läpi kahden eri kurssin ja koko niiden välisen ajan ennen kuin opettaja ne huomaa oppilaiden arvioinneissa. Vertailun vuoksi edellisessä opetussuunnitelman perusteissa pyörimisen mekaniikka sisällytettiin kokonaan kurssiin FY5 [1].

Osaltaan motivaationa toimi laajentaa tekijän LuK-tutkielmaa, jossa verrattiin aiemmissa tutkimuksissa havaittuja harhakäsityksiä suomalaisten lukion oppikirjojen sisältöihin. Tutkielmassa havaittiin, että aihealueidensa perusteella kolmeen eri kategoriaan jaettuja harhakäsityksiä pyörimisestä ja vierimisestä käsiteltiin oppikirjoissa hyvin vähän, jos ollenkaan. Tutkielmassa todettiin myös, että kyseiset aiheet kuuluisivat lukion opetussuunnitelman (2003) perusteella fysiikassa opetettaviin asioihin, jotka tulisi oppikirjoista löytyä [3]. Tavoitteena on tutkia, löytyykö suomalaisilta lukio-opiskelijoilta samoja tai samankaltaisia harhakäsityksiä.

Tutkielman lopussa oleva liite A sisältää tutkimuksessa käytetyt kysymykset. Kysymyslomake voi toimia mallina vastaavien tutkimusten laatijoille ja toteuttajille tai sitä voi käyttää tutkimus- ja opetuskäytössä halutessaan selaisenaan. Oikeat vastaukset löytyvät mm. taulukosta 2 ja niiden perustelut käydään läpi kappaleessa 4.2.

2 Taustaa

Fysiikan oppimiseen liittyvät oppimisvaikeudet ja harhakäsitykset ovat olleet suosittuja tutkimusaiheita. Tähän tutkielmaan valikoiduissa aiemmissa tutkimuksissa suosituimmat tiedonkeruumetodit ovat olleet monivalintatesti ja opiskelijoiden haastattelu. Myös pyörimisliikkeen ilmiöiden kokeellista havainnointia on käytetty. Tutkimuksissa on kartoitettu opiskelijoiden käsityksiä erilaisista tilanteista ja ongelmista sekä tapoja selittää niitä. Kappaleessa 2.1 käydään läpi laaja otanta pyörimisliikkeen harhakäsityksiä käsitelleistä aiemmista tutkimuksista. Varsinaisiin harhakäsityksiin palataan kappaleessa 2.2.

2.1 Aiempia tutkimuksia

Sataa yliopistossa matematiikan opettajaksi opiskelevaa opiskelijaa testattiin Dumanin, Demircin ja Şekercioğlun tutkimuksessa käyttäen monivalintatestiä. Testin aihealueina olivat vieriminen, pyörimisliike ja momentti. Tulosten perusteella havaittiin, että yliopisto-opiskelijoilla oli useita ongelmia näihin aihealueisiin liittyvien käsitteiden ymmärtämisessä, soveltamisessa ja tulkitsemisessä. Testi paljasti myös monia harhakäsityksiä näistä aiheista [4].

Mashood ja Singh ovat olleet tuotteliaita pyörimisliikkeen osaamista tutkivien testien kehittäjiä. Kulmanopeuteen ja -kiihtyvyyteen liittyvien harhakäsitysten löytämiseksi he laativat monivalintatestin, jonka kehittämiseen osallistui pilottiryhmänä opiskelijoita, opettajia ja asiantuntijoita. Valmiin monivalintatestin suorittivat ryhmä yliopistotasoa alempana olevia opiskelijoita ja pieni ryhmä kansainvälisiin fysiikkaolympialaisiin osallistuvia opiskelijoita sekä fysiikan perustutkinto-opintoja vetäviä opettajia, jotka olivat koulutukseltaan vähintään maistereita. Tulokset paljastivat pyörimis- ja ympyräliikkeen sekoittamista keskenään sekä virheitä kulmanopeus- ja -kiihtyvyydsvektorien suuntien antamisessa. Osa harhakäsityksistä juonsi juurensa aiempiin fysiikan opintoihin suoraviivaisesta liikkeestä. Mielenkiintoista tuloksissa oli ennen kaikkea se, että opettajat pärjäsivät testissä keskimäärin paljon huonommin kuin fysiikkaolympialaisiin osallistuvat opiskelijat [5].

Mashoodin ja Singhin tuotantoa edustaa myös tutkimus pyörimisliikkeen suureiden ja suoraviivaisen liikkeen yhdistämisestä. Tutkimus luotiin samantapaisesti kuin [5] käyttäen apuna opiskelijoita ja opettajia. Valmiin monivalintatestin suorittivat maisterin tutkinnon suorittaneet fysiikan opettajat,

jotka eivät olleet osallistuneet pilottiryhmään. Tutkimuksessa opettajilla havaittiin olleen yhteneviä harhakäsityksiä pyörimisliikkeen suureiden käytöstä suoraviivaisessa liikkeessä [6].

Tutkimus differentiaalilaskentaa soveltavan fysiikan yliopisto-opiskelijoiden tiedoista liittyen pyörimismäärään suoraviivaisessa liikkeessä on Closen ja Heronin käsialaa. Tutkimus toteutettiin haastatteleamalla opiskelijoita ja keräämällä heidän selityksiään kolmeen tätä aihealuetta edustavaan tehtävään. Opiskelijoita haastateltiin kolmeen eri otteeseen: ensimmäisellä kerralla ilman ohjausta, toisella kerralla ohjauksen jälkeen ja kolmannella kerralla edelleen kehitetyn ohjauksen jälkeen. Tulosten perusteella opiskelijoiden kyvyt käyttää pyörimismäärää suoraviivaisessa liikkeessä pääsääntöisesti paranivat ohjausten myötä kaikissa kolmessa tehtävässä. Ennen ohjauksia opiskelijoilla oli harhakäsityksiä pyörimismäärästä ja sen säilymisestä sekä yhetydestä liikemäärän säilymiseen [7].

Carvallhon ja Sousan tutkimuksessa fysiikan opettajia ja fysiikan opettajiksi opiskelevia pyydettiin kommentoimaan väittämiä vierimisestä ja kitkasta, kuten kitkavoiman suunnasta, normaalivoimasta ja Newtonin 3. laista. Vastaukset paljastivat opettajilla ja opiskelijoilla samansuuntaisia vaikeuksia vierivien kappaleiden tarkastelussa, eri voimien momenttien vaikutuksissa ja kitkavoiman luonteessa. Samassa tutkimuksessa esiteltiin kolme tilannetta, joissa vieriminen ja kitka ovat tärkeässä roolissa. Opiskelijoiden harhakäsityksiä ja vaikeuksista Carvalho ja Sousa nostivat esiin liikkeen ja kitkavoimien keskinäisen luonteen, tapaukset, joissa kitkaa ei ole sekä kitkavoimien suunnat. Julkaisussa otettiin myös kantaa opetukseen ja esiteltiin vinkkejä opettajille vierimisen opettamisessa [8].

Rimoldini ja Singh tutkivat fysiikan peruskursseja suorittavien korkeakouluopiskelijoiden vaikeuksia pyörimisliikkeeseen ja vierimiseen liittyvissä aiheissa. Tutkimusmenetelminä he käyttivät monivalinta- ja selityskysymyksiä fysiikan johdantokurssien opiskelijoiden testaamisessa sekä haastatteluja vertaillakseen edellä mainittujen ja jo mekaniikan kurseja suorittaneiden opiskelijoiden käsityksiä. Rimoldini ja Singh havaitsivat, että opiskelijoilla oli samanlaisia ongelmia peruskäsitteiden, kuten momentin, hitausmomentin, pyörimisenergian, vierimisen ja kitkan vaikutuksen, hallitsemisessa riippumatta heidän taitotasostaan. Yleisesti ottaen opiskelijoilla oli vaikeuksia energian säilymlain ja suhteellisen nopeuden käsitteen soveltamisessa [9].

Singhin tutkimuksessa selvitettiin fysiikan professorien ongelmanratkaisustrategioita käyttäen vierimisen ja kitkan yhdistävää mekaniikan peruskurssien

tason tehtävää. Lähestulkoon jokaisella professorilla oli tehtävän vaikeustasosta huolimatta ongelmia ratkaisuisaan, sillä heidän intuiotensa pettivät heidät. Sama tehtävä annettiin myös opiskelijoille, jotka olivat jo suorittaneet pyörimisliikkeen ja vierimisen tentin. Opiskelijoilla tehtävä tuotti vielä suurempia vaikeuksia ja enemmän vääriä vastauksia. Opiskelijat eivät osanneet käyttää ongelman ratkaisuun useampaa kuin yhtä mallia kerrallaan. Vaikka professoreilla oli ongelmia tehtävän ratkaisussa, osoittivat he hallitsevansa menetelmät ja mallit, joiden avulla oikeaan ratkaisuun olisi lopulta päädytty [10].

Williamson, Torres-Isea ja Kletzing julkaisivat artikkelin liikemäärän ja pyörimismäärän säilymisen havainnollistamisesta mekaniikan opintojen laboratoriotöissä. Vaikka artikkeli käsittelee suurimmalta osin itse koejärjestelyjä ja teoriaa, raportoidaan siinä myös opiskelijoiden vaikeuksista yhdistää pyörimismäärää suoraviivaiseen liikkeeseen, koska sellaisia tilanteita ei juurikaan käsitellä [11].

Hierrezuelo ja Carnero raportoivat opiskelijoiden vaikeuksista hahmottaa kitkavoiman luonnetta vierimisessä. Heidän mukaansa suurin osa opiskelijoista käsitti liukumattoman vierimisen olevan mahdollista vain, jos kappaleeseen kohdistuu kitkavoima. Opiskelijoiden yleiset harhakäsitykset olivat, että pyöriminen vaatii aina jonkin momentin ja että ei-ideaalisissa tilanteissa kitkavoima (ennemmin kuin vierimisvastus) aiheuttaa vierivien kappaleiden hidastumisen ja pysähtymisen. Artikkelista tekee mielenkiintoisen osaltaan se, että siinä tehdään selkeä ero vierimisvastuksen ja kitkan välille sekä näytetään, miten vierimisvastusta voi käsitellä opetuksessa ottamalla huomioon ei-ideaalisten kappaleiden ja pintojen muodonmuutokset [12].

Lukio- ja yliopisto-opiskelijoiden käsityksiä suoraviivaisen liikkeen ja pyörimisen yhdistelmästä käsitellään Menigaux'n tutkimuksessa. Vierimistä käsittelevistä tutkimuksista poiketen tässä kappaleen pyöriminen tapahtui samassa tasossa etenemisliikkeen kanssa, eli kappaleen pyörimisakseli oli kohtisuorassa maanpintaan nähden. Opiskelijoille annetussa tehtävässä kahta identtistä kiekkoa vedettiin yhtä pitkä matka vaakasuoralla alustalla yhtäsuurilla ja samansuuntaisilla voimilla. Voimavektorin jatke kulki ensimmäisen kiekon (massa-)keskipisteen kautta ja toisella kiekolla voima kohdistui kiekon sivuun. Tehtävänä oli selvittää, kumpi kiekkoista osuisi ensin tason vastapäiseen reunaan. Suurin osa haastatelluista opiskelijoista lähti ratkaisemaan ongelmaa pyörimis- ja etenemisliikkeen malleilla erikseen peräkkäin, vaikka molemmat liikkeen lait olivat voimassa yhtäaikaan. Toinen käsitys oli, että pyörimisliike ja eteneminen vaikuttavat jollain tavoin toisiinsa. Kolmas vir-

heellinen taipumus oli soveltaa liikkeen lakeja vain voiman vaikutuspisteeseen eikä koko kappaleeseen [13].

2.2 Tutkimuksissa havaittuja harhakäsityksiä

Tässä kappaleessa käydään läpi aiemmissa tutkimuksissa havaittuja harhakäsityksiä aihealueittain. Tutkimuksista sisällytetään tähän kappaleeseen myös muutamia valikoituja lainauksia opiskelijoiden haastatteluista. Havaittujen harhakäsitysten aihealueet ja niitä vastaavat tutkimukset on lopuksi eritelty taulukossa 1.

Kiertokulma, kulmanopeus, kulmakiiktyvyys ja momentti

Harhakäsityksiä aivan pyörimisliikkeen perustavimmissa suureissa tutkittiin Dumanin, Demircin ja Şekercioğlun, Mashoodin ja Singhin sekä Rimoldinin ja Singhin tutkimuksissa [4, 5, 9].

Dumanin, Demircin ja Şekercioğlun mukaan opiskelijoiden ongelmat liittyivät momentin, kulmanopeuden ja kulmakiiktyvyyden yhdistämiseen. Tyypillinen opiskelijoiden selitys oli [4]:

”Vakiomomentti aiheuttaa vakiokulmanopeuden ja vakiokulmakiiktyvyyden.”

Mashood ja Singh jaottelivat opiskelijoiden ja opettajien harhakäsityksiä ja ongelmia kulmanopeuden ja -kiiktyvyyden ymmärtämisessä [5]:

- Opiskelijat hahmottavat kulmanopeusvektorin $\vec{\omega}$ ja kulmakiiktyvyysvektorin \vec{a} suunnat väärin. Suurin osa opiskelijoista oli sitä mieltä, että kulmanopeus on samansuuntainen kappaleen liikeradan kanssa. Opiskelijoiden ongelmana on pyörimisliikkeen miettiminen ympyräliikkeen mallin ulkopuolella.
- Yhtälöiden $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ja $\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ soveltaminen tilanteisiin, joissa kappale ei ole ympyräradalla, vaikka kyseiset yhtälöt pätevät vain silloin.
- Suoraviivaisen liikkeen harhakäsitysten periytyminen pyörimisliikkeen: hyvänä esimerkkinä väite, että jos kulmanopeus on nolla, myös kulmakiiktyvyys on nolla.

Rimoldini ja Singh pyysivät opiskelijoita selittämään, mitä paperiselle ”helikopterille” tapahtuu, kun se päästetään vapaasti putoamaan ja miksi. Suurin osa opiskelijoista vastasi helikopterin alkavan pyöriä, koska ilmanvastuksella oli jotain tekemistä asiassa, mutteivät osanneet selittää mitä tai miksi. Osa selitti helikopterin alkavan pyöriä, koska ilmanvastus aiheuttaa sen siipiin erisuuriset voimat. Ongelmana oli hahmottaa ilmanvastuksen vaakasuorat komponentit, joiden momentit aiheuttivat helikopterin pyörimisen [9].

Hitausmomentti ja pyörimisen liikeyhtälö

Duman, Demirci ja Şekercioglu tutkivat harhakäsityksiä hitausmomentista. Moni opiskelija ei tiennyt hitausmomentin riippuvan kappaleen massajakau-
masta pyörimisakselin ympärillä. Opiskelijoiden haastattelussa paljastui lukumääräisesti runsaana seuraavia harhakäsityksiä [4]:

”Hitausmomentti riippuu pyörivän kappaleen kulmanopeudesta.”
ja ”Hitausmomentti ei riipu pyörivän kappaleen massasta.”

Mashood ja Singh sivusivat artikkelissaan ongelmaa, joka johtui virheellisestä pyörimisen liikeyhtälöstä. He laativat tehtävän, jossa pistemäinen kappale liikkuu suoraviivaisesti vakionopeudella ja origo ei sijainnut kappaleen reitillä. Tässä systeemin hitausmomentti ei ole vakio, sillä pistemäisen kappaleen etäisyys origoon muuttuu. Tällöin tavanomainen yhtälö $M = J\alpha$, missä M on kokonaismomentti, J on hitausmomentti ja α on kulmakiihtyvyys, ei päde. Oikeassa versiossa otetaan huomioon myös hitausmomentin muutos ajan suhteen. Mashoodin ja Singhin tutkimuksessa suurin osa opiskelijoista oli sitä mieltä, että kulmakiihtyvyys vaatii aina nollasta eroavan kokonaismomentin, vaikka kappaleeseen ei kohdistuisikaan voimia [6].

Pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen

Pyörimismäärän säilyminen erityisesti suoraviivaisessa liikkeessä on yksi eniten harhakäsityksiä aiheuttaneista aihealueista. Tämä liittyy myös pyörimisen liikeyhtälön virheelliseen muotoon.

Close ja Heron laativat tehtäviä, joissa kappale liikkuu suoraviivaisesti vakionopeudella ja tarkastelupisteet eivät sijaitse kappaleen liikeradalla tai kappaleilla on aluksi näennäisesti vain suoraviivainen liikemäärä ja lopuksi kap-

paleet pyörivät. Ensimmäisessä tehtävässä opiskelijoiden haastattelu tuotti tyypillisen vastauksen [7]:

”Koska [kappale] ei pyöri, [systeemin] pyörimismäärä on nolla.”

Toisessa tehtävässä opiskelijoille annettiin tehtäväksi tarkastella tilanteita, joissa liikkuva pistemäinen kappale osuu paikallaan olevan sauvan keskelle (massakeskipisteen kohdalle) tai sauvan päähän. Melkein puolet vastaajista oli sitä mieltä, että jälkimmäisessä tapauksessa pyörimismäärä on ennen törmäystä nolla ja nollassa eroava törmäyksen jälkeen. Tämän harhakäsityksen katsottiin johtuvan liikemäärän säilymislain ja pyörimismäärän säilymislain käyttämisestä sekaisin. Yli puolet opiskelijoista vastasivat, että pyörimättömän systeemin liikemäärä törmäyksen jälkeen on suurempi kuin systeemissä, jossa törmäyksen jälkeen tapahtuu pyörimistä. Esimerkkinä erään opiskelijan perustelu, joka antaa viitteitä pyörimis- ja liikemäärän säilymisen sekoittamisesta energian säilymiseen [7]:

”Koska ulkoisia voimia ei ole, liikemäärä säilyy, mutta osa siitä muuttuu pyörimismääräksi.”

Williamson, Torres-Isea ja Kletzing mainitsevat artikkelissaan näiden harhakäsitysten syntyvän siitä, että tilanne on opiskelijoille harvoin vastaan tuleva. Heidän mukaansa opiskelijoilla on käsitys, että systeemissä, jossa on vain suoraviivaista kineettistä energiaa, ei ole pyörimismäärää [11].

Pyörimisenergia ja vieriminen

Opiskelijoiden vaikeuksista hahmottaa kappaleen kineettisen energian, hitausmomentin ja kulmanopeuden yhteyttä raportoitiin Dumanin, Demircin ja Şekercioglun tutkimuksessa. Seuraavat tyypilliset opiskelijoiden selitykset tulkittiin harhakäsityksiksi [4]:

”Mitä suurempi pyörän massa on, sen suurempi sen pyörimisenergia on.” sekä ”Kevyemmän pyörän pyörimisenergia on suurempi. . . , koska se liikkuu nopeammin.”

Vierimisen osalta opiskelijoilla oli vaikeuksia erottaa vierivän jäykän renkaan eri osien suhteellisia nopeuksia pyörimisakseliin ja maanpintaan nähden. Useimmat opiskelijat eivät tiedeneet, että vierivän renkaan maanpintaa koskettava piste on hetkellisesti paikoillaan maanpintaan nähden. Opiskelijoiden perusteluja [4]:

”Hetkellinen nopeus maanpintaan nähden on aina vierivän ympyrän tangentin suuntainen.” ”Jokaisen pisteen vauhti maanpintaan nähden pitäisi olla aina sama, koska ne ovat saman vierivän renkaan pisteitä.”

Rimoldini ja Singh testasivat opiskelijoiden käsitystä pyörimisenergiasta tehtävällä, jossa pystytasossa kitkatta pyörivän vanteen kehälle on kiinnitetty pakkelimöykky. Tehtävänä oli selittää, kuinka paljon vanne pyörähtää, kun se päästetään pyörimään vapaasti ja miksi. Useimmat opiskelijat osasivat kuvailla vanteen pyörimistä oskilloivaksi ja että pakkelimöykky nousisi vastakkaiselle puolelle pyörähdettyään yhtä korkealle kuin lähtökorkeus oli. Perustelut kuitenkin jäivät perin ontuviksi, sillä opiskelijat eivät osanneet käyttää tilanteeseen energian säilymislakia [9].

Rimoldini ja Singh teettivät opiskelijoilla myös tehtävän, jossa jäykkä rengas vierii liukumatta vaakasuoralla alustalla. Yksikään opiskelijoista ei osannut kertoa ja perustella, mitkä olivat tasoon nähden renkaan suhteelliset nopeudet renkaan ylimmässä pisteessä ja tasoa koskettavassa pisteessä. Haastattelujen perusteella opiskelijat eivät olleet selvillä suhteellisen suoraviivaisen liikkeen käsitteestä eivätkä ymmärtäneet vierimisehtoa [9].

Kitka vierimisessä

Toinen erityisen paljon harhakäsityksiä ja vaikeuksia tuottavista aihealueista on kitkavoiman luonne vierimisessä. Ongelmia tuottavat kitkavoiman olemassaolo, sen momentti sekä sen suunta.

Dumanin, Demircin ja Şekercioğlun mukaan suurin osa opiskelijoista oli sitä mieltä, että kitkan täytyy aina hidastaa kaikenlaista liikettä [4].

Carvalhon ja Sousan tutkimus keskittyi yksinomaan kitkan luonteeseen vierimisessä. Opiskelijoille annettiin kolmeen eri aiheeseen liittyviä tehtäviä. Ensimmäisessä tehtävässä kolikko vierii liukumatta vaakasuoran pöydän päällä

ja pyydettiin perustelevaan kitkavoiman suunta tilanteessa. Opiskelijoiden yleisen käsityksen mukaan liikkeestä seuraa aina kitkavoima, joka pyrkii vastustamaan liikettä. Tämän vuoksi kolikon vauhti hidastuu ja lopulta kolikko pysähtyy, vaikka oikeana aiheuttajana (ei-ideaalisessa tilanteessa) onkin kappaleen ja pinnan deformaatiosta johtuva vierimisvastus. Carvalhon ja Sousan mukaan käsitys kitkavoiman luonteesta johtuu siitä, että tositilanteissa kappaleet eivät vieri ikuisesti [8].

Toinen aihe oli vieriminen kaltevalla tasolla. Tehtävässä sylinteri laitetaan vierimään liukumatta ylös kaltevaa tasoa. Opiskelijoita pyydettiin perustelevaan sylinterin ja tason välisen kitkavoiman suunnat, kun sylinterin vieri ylämäkeen ja sitten alamäkeen. Jälleen kerran opiskelijat katsoivat kitkavoiman olevan aina liikettä vastustava voima, mutta he käsittelivät vierivää kappaletta pistemäisenä kappaleena, johon pätevät suoraviivaisen liikkeen lait. Näin ollen opiskelijat asettivat kitkavoiman osoittamaan ylämäkeen vierivällä sylinterillä alamäkeen ja päinvastoin [8].

Kolmas aihe Carvalhon ja Sousan tutkimuksessa käsitteli kiihtyvästi vierivien kappaleiden ja kitkavoimien välistä yhteyttä. Tehtävässä polkupyörä kiihdytti vauhtiaan tasaisella tienpinnalla renkaiden vierissä liukumatta ja opiskelijoiden piti perustella, mihin suuntaan tienpinnan ja renkaiden väliset kitkavoimat osoittivat. Jälleen kerran opiskelijat näkivät kitkavoiman liikettä hidastavana voimana, jolloin heidän mielestään molemmissa renkaissa kitkavoimat osoittivat taaksepäin. Polkupyörää kiihdyttäväksi voimaksi opiskelijat nimesivät polkupyöräilijän aiheuttaman ”ajovoiman”, joka veti pyörää liikkeen suuntaan [8].

Rimoldinin ja Singhin tutkimuksessa opiskelijat saivat vertailla pallon ja pallikan liikettä kaltevalla tasolla, kun tason kaltevuuskulmaa kasvatettiin. Useat opiskelijat eivät tiedäneet, mitä tarkoittaa liukumatta vieriminen (vierimisehto). Jotkut olivat sitä mieltä, että kappaleet vierisivät alas tasoa paremmin, jos kitkaa ei olisi. Jotkut taas uskoivat, että hyvin suuri lepokitkakerroin estäisi kappaleiden liikkumisen kokonaan, vaikka taso olisi lähes pystysuorassa [9].

Hierrezuelon ja Carneron artikkelissa opiskelijat vertailivat kahta tilannetta: liukumatonta vierimistä ja liikettä, joka muuttuu liukumisesta vierimiseksi. Opiskelijoita askarrutti yleisesti kaksi kysymystä [12]:

”Miten kitkavoima voi kadota?” sekä ”Jos kitkavoima katoaa, mikä aiheuttaa pyörimisen vaatiman momentin?”

Siinä, missä ensimmäinen kysymys paljasti vaikeuksia kitkan yleisen luon-
teen hallitsemisessa, kertoi toinen kysymys pyörimisen liikeyhtälön heikosta
osaamisesta [12].

Taulukko 1: Aiemmissä tutkimuksissa havaitut harhakäsitykset ja ongelmat
aihealueittain

Aihealue	Tutkimukset
Kiertokulma, kulmanopeus, kulmakiihtyvyys ja momentti	[4, 5, 9]
Hitausmomentti ja pyörimisen liikeyhtälö	[4, 6]
Pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen	[7, 11]
Pyörimisenergia ja vieriminen	[4, 9]
Kitka vierimisessä	[4, 8, 9, 12]

3 Tutkimuskysymykset

Tässä luvussa tutkielman aihetta rajataan ja määritellään yleisellä tasolla. Tutkimuksen tarkoitus määräytyy esittämällä kysymys ja vastaamalla kysymykseen: mitä halutaan tutkia? Tämän kysymyksen – tai pikemminkin näiden kysymysten – pohjalta laaditaan yksityiskohtaisemmat, opiskelijoiden vastattavaksi annettavat kysymykset aihealueittain kappaleessa 4.2.

Tutkimuksen yleisenä tavoitteena on kartoittaa suomalaisissa lukioissa opiskelevien nuorten tietoja ja käsityksiä pyörimisliikkeestä klassisessa mekaniikassa. Tavoitetta tarkennetaan jakamalla ja rajaamalla kysymykset kappaleessa 2.2 eriteltyihin aihealueisiin. Aiempien tutkimusten perusteella opiskelijoilla on havaittu selvästi muita alueita enemmän harhakäsityksiä ja vaikeuksia pyörimismäärän käsittelyssä suoraviivaisessa liikkeessä sekä kitkavoimien luonteessa vierimisessä. Vastaavat aihealueet ovat olleet myös tekijän aiemman tutkielman mukaan suomalaisissa oppikirjoissa vähemmällä käsittelyllä [3]. Näiden syiden vuoksi tässä tutkimuksessa painotetaan kyseisten aihealueiden tutkimista.

Listataan seuraavaksi yleiset kysymykset tutkimusta varten. Ensimmäiset kaksi pääkysymystä edustavat [3]:ssa eriteltyjä, painotettavia aihealueita.

1. Miten lukiolaiset mieltävät pyörimismäärän käsitteen suoraviivaisessa liikkeessä?
 - Osaavatko lukiolaiset soveltaa pyörimisliikkeen malleja (pyörimismäärän säilyminen, kulmanopeus jne.) suoraviivaiseen liikkeeseen?
2. Miten lukiolaiset mieltävät kitkavoiman vierimisessä?
 - Mitä mieltä lukiolaiset ovat kitkavoiman olemassaolosta muuttumattomassa vierimisessä (esimerkiksi vaakasuoralla alustalla vakionopeudella)?
 - Mihin suuntaan, suhteutettuna vierivän kappaleen liikkeeseen, lukiolaiset mieltävät kitkavoiman osoittavan?
 - Osaavatko lukiolaiset perustella fysikaalisesti edellä mainitut suunnat?
3. Osaavatko lukiolaiset yhdistää kiertokulman, kulmanopeuden ja nopeuden toisiinsa?

4. Osaavatko lukiolaiset yhdistää suoraviivaisen liikkeen ja pyörimisliikkeen?
 - Hallitsevatko lukiolaiset vierimisehdon?
 - Miten hyvin lukiolaiset hallitsevat pyörimisenergian käsitteen?
5. Miten hyvin lukiolaiset hallitsevat hitausmomentin käsitteen?
6. Miten hyvin lukiolaiset hallitsevat pyörimismäärän säilymislain?

4 Tutkimusmenetelmät

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen varsinainen käytännön toteutus. Kapaleessa 4.1 kerrotaan, miten opiskelijoiden käsityksistä kerätään tietoa. Kapaleessa 4.2 käydään läpi tällä hetkellä vallalla olevan käsityksen mukainen 'oikea teoria' tutkimuskysymysten takana, jotta tutkimustuloksista voidaan tehdä kattavampia päätelmiä harhakäsityksistä ja jopa niiden synnystä. Kapaleessa 4.3 kerrotaan, millaisella prosessilla opiskelijoiden antamista vastauksista päästään johtopäätöksiin.

4.1 Datan keruu

Yleisten tutkimuskysymysten (luku 3) pohjalta laadittiin testi, joka teetettiin kohderyhmällä. Tutkimuksen kohderyhmäksi valittiin ne lukio-opiskelijat, jotka olivat aiemmin suorittaneet fysiikan pyörimisliikkeen mekaniikkaa käsittelevän kurssin (FY5 [1]). Kohderyhmän valinta perustui siihen, että tutkimuksen tarkoituksena on selvittää opetuksesta huolimatta – tai pahimmillaan siitä johtuen – opiskelijoiden tiedoissa ja käsityksissä piileviä harha- tai väärinkäsityksiä. Näin ollen kohderyhmäläisten oli täytynyt osallistua ennen testiä fysiikan opetuksen siihen vaiheeseen, jossa testin aihealueet käsitellään.

Testi on luonteeltaan monivalintatesti. Testin kysymykset voidaan jakaa kolmeen eri luokkaan riippuen siitä, miten kohderyhmäläisten pitää kysymyksiin vastata:

1. *'Tavalliset' monivalintakysymykset.* Näissä opiskelija valitsee tehtävänannon perusteella mielestään oikean vaihtoehdon tehtävänannossa esitettyyn kysymykseen tai kehoitteeseen.
2. *Perusteltavat monivalintakysymykset.* Näissä opiskelija valitsee tehtävänannon perusteella mielestään oikean vaihtoehdon tehtävänannossa esitettyyn kysymykseen tai kehoitteeseen **sekä** valitsee mielestään sen perusteluvaihtoehdon, joka perustelee hänen valintansa fysiikan laeilla.
3. *Avoimen perustelun monivalintakysymykset.* Näissä opiskelija valitsee tehtävänannon perusteella mielestään oikean vaihtoehdon tehtävänannossa esitettyyn kysymykseen tai kehoitteeseen **sekä** kirjoittaa omin sanoin lyhyen perustelun, miksi hän valitsi juuri kyseisen vaihtoehdon.

Monivalintatestin kysymyksistä (liite A) ensimmäiseen luokkaan kuuluvat kysymykset numero 4 ja 15, toiseen luokkaan kysymykset numero 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13 ja 14 sekä kolmanteen luokkaan kysymys numero 11. Kaikkien kysymysten tehtävänannot ovat kirjallisia, ja suurimmassa osassa tekstin tukena on myös tilannetta havainnollistava kuva. Vastausvaihtoehdoissa käytetään tehtävästä riippuen eri representaatioita. Kysymyksissä numero 11, 13 ja 14 vastausvaihtoehdot on annettu kuvina, jotka ovat yksinkertaistettuja vapaakappalekuvia. Muissa kysymyksissä vastausvaihtoehdot ovat tekstimuodossa ja/tai lyhyinä kaavoina ja yhtälöinä tai epäyhtälöinä.

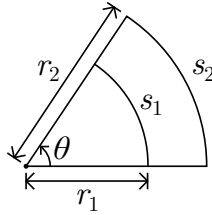
Käytännössä opiskelijat tekivät testin itsenäisesti ja anonyymisti. Kysymykset oli painettu paperilomakkeisiin, jotka toimivat samalla opiskelijoiden vastauslomakkeina. Oppikirjan, taulukkokirjan ja kaikenlaisen elektronisen opetusmateriaalin käyttö oli testin aikana kielletty. Laskinta opiskelija sai käyttää, mutta tehtävänannot oli suunniteltu siten, ettei laskinta tarvinnut tai edes voinut käyttää yhdenkään tehtävän ratkaisemiseen. Testin tekemisen oltiin arveltu vievän lukiolaisilta korkeintaan 45 minuuttia.

Ennen testin teettämistä kohderyhmällä testi kävi läpi lyhyen vertaisanalyysin mahdollisten epäloogisuuksien, ulkoasun selkeyteen vaikuttavien seikkojen ja puhtaiden virheiden varalta. Vertaispalautteen perusteella testiä muokattiin vain vähäisessä määrin (mm. vaihtamalla tehtävässä 4 vierivä kappale sylinteristä palloksi, sisentämällä perusteluvaihtoehdot sekä tarkentamalla joitain ilmaisuja). Varsinaista kohderyhmän pilottivaihetta tutkimuksessa ei toteutettu.

Tutkimuksen käytännön vaihe toteutettiin maaliskoukokuussa 2016 Jyväskylässä. Monivalintatestin suorittivat lukion toisen vuoden opiskelijat kolmesta eri lukiosta. Testiin osallistui yhteensä 53 opiskelijaa. Yhtä opiskelijaa lukuunottamatta kaikki olivat ilmoituksensa mukaan suorittaneet FY5-kurssin ennen testiin osallistumistaan. Testit suoritettiin fysiikan oppituntien aikana luokkahuoneissa osana normaalia päiväjärjestystä.

4.2 Monivalintatestin kysymykset

Otsikoiden alla olevilla kysymysten numeroilla viitataan liitteen A kysymykseen. Osa kysymyksistä voi kuulua useampaan eri aihealueeseen. Kysymyksiä on muokattu varsinaiseen testiin nähden teorian läpikäyntiä varten ja kuva- viittausten vähentämiseksi.



Kuva 1: Kiertokulma θ on riippumaton ympäräsektorin säteestä

4.2.1 Kiertokulma, kulmanopeus ja nopeus

Kysymykset 1, 9 ja 10

Tehtävä 1. Polkupyörän vanne pyörii yhden täyden kierroksen vastapäivään. Vanteen kehällä sijaitsee venttiili ja puoleenväliin yhtä pinnaa on asennettu heijastin.

Tässä tehtävässä opiskelijaa pyydetään valitsemaan, ovatko venttiilin ja heijastimen kulkemat matkat, nopeudet vai kiertokulmat yhtä suuret yhden kierroksen aikana tai onko jomman kumman kulmanopeus suurempi kuin toisen. Koska vanne on jäykkä kappale, eivät sen eri osat pääse liikkumaan toistensa suhteen. Näin ollen kuvassa 1 heijastimen (ratasäde r_1 ja kuljettu matka s_1) ja venttiilin (ratasäde r_2 ja kuljettu matka s_2) kiertokulma vanteen akselin ympäri millä tahansa ajanhetkellä, erityisesti yhden kierroksen jälkeen, on sama. Se, mikseivät venttiilin ja heijastimen kulkemat matkat ole yhtä pitkät, lienee selvää.

Kummankin kappaleen kiertokulma akselin ympäri muuttuu samassa ajassa Δt saman verran $\Delta\theta$, joten niiden kulmanopeudet ovat samat:

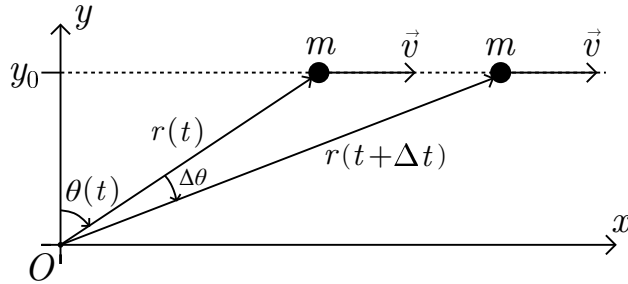
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \quad (1)$$

Venttiili ja heijastin ovat jäykän pyörivän kappaleen osia, jolloin ne ovat koko ajan ympyräradoilla. Ympyräradalla kappaleiden nopeudet ja kulmanopeudet riippuvat toisistaan säteen kautta:

$$v = \omega r. \quad (2)$$

Koska $r_2 > r_1$, niin venttiilin vauhti on suurempi kuin heijastimen, vaikka niiden kulmanopeudet ovatkin yhtäsuuret.

Tehtävä 9 käydään läpi kappaleessa 4.2.3.



Kuva 2: Pistemäinen kappale liikkuu muuttumattomalla nopeudella origon ohi

Tehtävä 10. m -massainen pistemäinen kappale liikkuu x -akselin suuntaisesti muuttumattomalla nopeudella \vec{v} . Origo ei sijaitse kappaleen liikeradalla. Ajanhetkellä $t = 0$ s kappale on pisteessä $(0, y_0)$. Origosta kappaleeseen piirretty jana muodostaa y -akselin kanssa ajan suhteen muuttuvan kulman $\theta(t)$.

Idea tehtäviin 9 ja 10 on peräisin Mashoodin ja Singhin artikkelista [6]. Opiskelijan tehtävänä on kuvata perustellen, mitä kappaleen kulmanopeudelle origon suhteen tapahtuu ajan kuluessa. Opiskelijan on ensimmäisenä havaittava, että kappale etääntyy koko ajan origosta. Käyttämällä kulmanopeuden ja nopeuden välistä yhteyttä $\omega = v/r$ perusteena, on vastaus tietenkin, että kulmanopeus pienenee, koska ratasäde r kasvaa ja vauhti v on vakio. Vaikka vastaus on oikein, on perustelu kuitenkin virheellinen. Yhtälö (2) nimittäin pätee vain ympyräradalla oleviin kappaleisiin.

Vastauksen voi perustella sekä geometrisesti että analyttisesti. Kuvaa 2 tarkastelemalla voidaan vakuuttua siitä, että kiertokulman muutos $\Delta\theta$ pienenee ajan kuluessa, jolloin kulmanopeus pienenee yhtälön (1) nojalla.

Täsmällisempi perustelu saadaan matemaattisesti. Kappaleen x -koordinaatti mielivaltaisella ajanhetkellä t on $x(t) = vt$. Tällöin

$$\tan \theta = \frac{x}{y_0} = \frac{vt}{y_0} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan \left(\frac{vt}{y_0} \right).$$

Kappaleen kulmanopeus ajan funktiona on

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \arctan \left(\frac{vt}{y_0} \right) = \frac{\frac{v}{y_0}}{1 + \left(\frac{vt}{y_0} \right)^2} = \frac{y_0 v}{y_0^2 + (vt)^2}.$$

Ajan Δt kuluttua kappaleen kulmanopeus on pienempi kuin ajanhetkellä t :

$$\omega(t + \Delta t) = \frac{y_0 v}{y_0^2 + \underbrace{(vt + v\Delta t)^2}_{>(vt)^2}} < \frac{y_0 v}{y_0^2 + (vt)^2} = \omega(t).$$

4.2.2 Hitausmomentti

Kysymykset 2, 8 ja 15

Tehtävä 2. Kaksi samanmassaista ja säteilään yhtä suurta ympyrälieriötä pyörivät pituusakseliensa ympäri. Lieriö I on ontto ja lieriö II on umpinainen siten, että sen massa on jakautunut tasaisesti sen koko tilavuuteen.

Opiskelijan tehtävänä on valita perustellen, kumman lieriön hitausmomentti on suurempi vai ovatko ne yhtäsuuret. Mahdollisuutena on myös vastata, että hitausmomentteja ei voi vertailla, koska siihen tarvittaisiin lisätietoja.

Jatkuvan tai paloittain jatkuvan massajakauman hitausmomentti kiinnitetyn pyörimisakselin suhteen määritellään integraalina

$$J = \int r^2 dm, \quad (3)$$

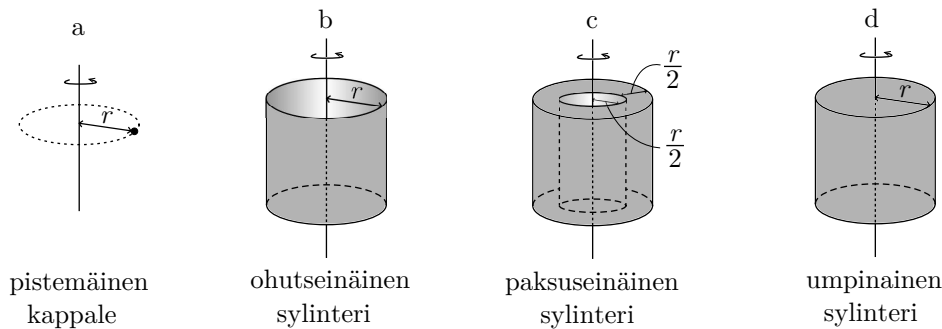
missä r on pyörimisakselista mitattu kohtisuora etäisyys. Yhtälön (3) perusteella hitausmomentti on verrannollinen sekä kappaleen massaan, että massan pyörimisakselista mitatun etäisyyden neliöön. Koska lieriön I massa sijaitsee kokonaan lieriön säteen etäisyydellä pyörimisakselista, on sen hitausmomentti tällöin suurempi kuin lieriön II, vaikka lieriöiden massat ja säteet ovatkin samat.

Hitausmomentti on kappaleen ominaisuus, ei sen liikkeen. Näin ollen lieriöiden hitausmomentit eivät riipu niiden pyörimisnopeuksista, joten lisätietoja ei tehtävässä tarvita.

Tehtävä 8 käydään läpi kappaleessa 4.2.4.

Tehtävä 15. Järjestä kappaleiden a, b, c ja d (kuva 3) hitausmomentit suuruusjärjestykseen. Jokaisen kappaleen massa on m.

Tämän tehtävän tarkoituksena ei ole testata, miten hyvin opiskelijat osavat käyttää yhtälöä (3), sillä se ei ole lukiotason ongelma. Pääasiallisena



Kuva 3: Massa m jakautuneena eri tavoin pyörimisakselin ympärille

tarkoituksena on selvittää, miten opiskelijat osaavat hyödyntää kysymyksen 2 oikeaa perustelua: ”hitausmomentti on verrannollinen massaan ja massan pyörimisakselista mitatun etäisyyden neliöön.” Tietysti tehtävään voi vastata oikein myös osaamalla ulkoa kyseisten kappaleiden hitausmomenttien kaavat. Vastausta ei pyydetä perustelemaan erikseen.

Kaikkien kuvan 3 kappaleiden hitausmomentit voidaan johtaa yhtälöstä (3). Pistemäisen kappaleen (a) hitausmomentti on triviaalisti mr^2 ja kappaleiden b, c ja d hitausmomentit löytyvät useista taulukkokirjoista, esimerkiksi [14, s. 41 – 42]:

$$J_a = mr^2, \quad J_b = mr^2, \quad J_c = \frac{1}{2}m \left(r^2 + \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right) = \frac{5}{8}mr^2 \quad \text{ja} \quad J_d = \frac{1}{2}mr^2.$$

Näin ollen hitausmomentit ovat suuruusjärjestyksessä

$$J_a = J_b > J_c > J_d.$$

4.2.3 Pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen

Kysymykset 3, 7, 9 ja 12

Tehtävä 3 käydään läpi kappaleessa 4.2.6.

Tehtävä 7. Ontto sylinteri pyörii pystysuoran pituusakselinsa ympäri kulmanopeudella ω . Sylinteriä aletaan hitaasti täyttää hiekalla.

Opiskelijaa pyydetään kertomaan hidastuuko, nopeutuuko vai pysyykö sylinterin kulmanopeus samana. Kysymykseen on mahdollista vastata täysin intuitiivisesti. Perusteluksi kuitenkin vaaditaan kertomaan säilyykö systeemin (sylinteri ja hiekka) yhteenlaskettu pyörimismäärä tilanteessa.

Lukiolaisille lienee pyörimismäärän säilymislain käsittelystä tuttu seuraava demonstraatio tai esimerkki: pyörivän kappaleen hitausmomenttia kasvataan muuttamalla massapisteiden etäisyyttä lähemmäs tai kauemmas pyörimisakselista. Tällöin kappaleen kulmanopeus kasvaa tai pienenee vastaavasti. Tehtävän 7 tilanteessa hitausmomenttia ei kuitenkaan muuteta massajakaumaa muuttamalla, vaan massaa lisäämällä. Jälleen kerran opiskelijan on osattava yhdistää hitausmomentin muutos massan muutokseen kysymyksen 2 oikean perustelun avulla.

Tarkastellaan hiekkaa ja sylinteriä yhtenä systeeminä. Alussa sylinterin hitausmomentti on J_i ja kulmanopeus $\omega_i = \omega$. Hiekan kulmanopeus alussa on nolla, joten sillä ei ole pyörimismäärää. Kun kaikki hiekka on valunut sylinteriin, on hiekan ja sylinterin yhteenlaskettu hitausmomentti J_f ja yhteinen kulmanopeus ω_f . Systeemiin ei vaikuta ulkoisien voimien momentteja: hiekka liikkuu alussa painovoiman vaikutuksesta vain sylinterin pyörimisakselin suuntaisesti. Tämä pyörimisakseli on kiinnitetty, joten hiekan painosta aiheutuva momentti ei vaikuta sylinteriin. Itse asiassa, vaikka se vaikuttaisi-kin, niin se vain vääntäisi sylinteriä eri pyörimisakselin suhteen. Siis, koska systeemiin ei kohdistu pyörimisakselin suuntaisia ulkoisia momentteja, systeemin pyörimismäärä (pyörimisakselin suhteen) säilyy:

$$J_i\omega_i = J_f\omega_f. \quad (4)$$

Hiekan massa kasvattaa sylinterin hitausmomenttia, eli $J_f > J_i$. Näin ollen sylinterin (ja hiekan) kulmanopeus lopussa on

$$\omega_f = \frac{J_i}{J_f}\omega_i = \frac{J_i}{J_f}\omega < \omega.$$

Tehtävä 9. m -massainen pistemäinen kappale liikkuu x -akselin suuntaisesti muuttumattomalla nopeudella \vec{v} . Origo ei sijaitse kappaleen liikeradalla. Ajanhetkellä $t = 0$ s kappale on pisteessä $(0, y_0)$. Origosta kappaleeseen piirretty jana muodostaa y -akselin kanssa ajan suhteen muuttuvan kulman $\theta(t)$. (ks. kuva 2)

Opiskelijan tehtävänä on perustella, onko pistemäisen kappaleen pyörimismäärä origon suhteen nolasta eroava, nolla vai kenties määrittelemätön. Vaihtoehtoa ”pyörimismäärä on nolla” tukevat perustelut ”kappale ei ole ympyräradalla” sekä ”kappale on pistemäinen”. Näistä ensimmäisen valitseminen kertoo, että opiskelija ei ymmärrä pyörimismäärän käsitteen voivan päteä suoraviivaiseen liikkeeseen. Jälkimmäinen vaihtoehto on sinänsä järkevä, että pistemäinen kappale ei voi pyöriä itsensä ympäri. Tässä tehtävässä

niin ei kuitenkaan väitetä. Vastaavilla perusteluilla voi myös valita vaihtoehdon ”pyörimismäärä ei kasva tai vähene”, koska sitä ei voi määritellä.

Kappaleella kuitenkin on nollasta eroava pyörimismäärä origon suhteen. Pyörimismäärä voidaan määritellä hitausmomentin ja kulmanopeuden tulona:

$$L = J\omega. \quad (5)$$

Pistemäisen kappaleen hitausmomentti on mr^2 , ja etäisyys r kasvaa ajan kuluessa. Hitausmomentti on pienimmillään $my_0^2 > 0$. Kappaleen kulmanopeus origon suhteen puolestaan on nollasta eroava, koska kulma θ muuttuu koko ajan (yhtälö (1)). Näin ollen pyörimismäärä origon suhteen on

$$L = mr^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \neq 0.$$

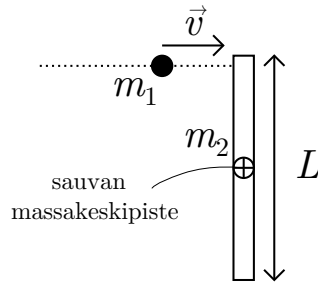
Kulmanopeuden perusteluksi ei edelleenkään kelpaa $\omega = v/r$, sillä kappale ei ole ympyräradalla.

Tehtävä 12. pistemäinen kappale (massa m_1) ja sauva (massa m_2 ja pituus L) ovat vaakasuoran tason päällä. Sauvan massakeskipiste sijaitsee sauvan puolivälissä. Alussa sauva on paikoillaan ja pistemäinen kappale liikkuu vakionopeudella \vec{v} . Törmäyksessä sauva ja kappale takertuvat toisiinsa. Alusta on kittaton.

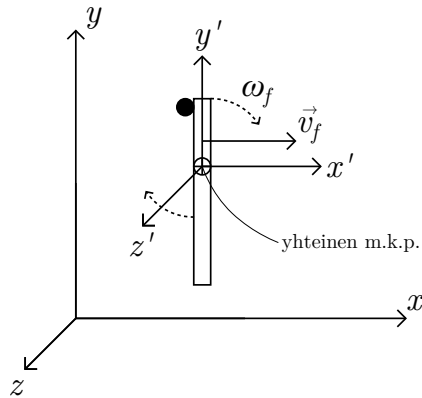
Idea tähän tehtävään on peräisin Closen ja Heronin sekä Williamsonin, Torres-Isean ja Kletzingin tutkimuksista [7, 11]. Tehtävässä opiskelijaa pyydetään kuvaamaan yhteenliittyneiden sauvan ja kappaleen liikettä törmäyksen jälkeen sekä perustelemaan valintansa liikemäärän ja pyörimismäärän säilymislakeihin nojaten. Se, mitä tapahtuu törmäyksen jälkeen, vaatii opiskelijoilta intuitiivista käsitystä tilanteesta.

Tarkastellaan systeemiä (kappale ja sauva) laboratoriokoordinaatistossa, jonka origo sijaitsee sauvan massakeskipisteessä (ks. kuva 4). Systemin liikemäärä on ennen törmäystä nollasta eroava. Niin on myös pyörimismäärä, sillä origo ei sijaitse pistemäisen kappaleen liikeradalla (kuten kysymyksissä 9 ja 10). Kumpaankaan kappaleeseen ei kohdistu toisensa tasapainottavia gravitaatiota ja tason tukivoimaa lukuunottamatta ulkoisia voimia tai momenteja, joten sekä liikemäärä että pyörimismäärä säilyvät.

Törmäyksen jälkeen yhteenliittyneiden sauvan ja kappaleen yhteinen massakeskipiste liikkuu laboratoriokoordinaatistossa (x, y, z) kappaleen alkuperäiseen suuntaan liikemäärän säilymisen nojalla. Sauvan ja kappaleen massakeskipistekoordinaatistossa (x', y', z') ne pyörivät origon ympäri siten, että



Kuva 4: Pistemäinen kappale törmää sauvan päähän (ylhäältä päin kuvattuna)



Kuva 5: Tilanne törmäyksen jälkeen: sauva ja kappale pyörivät origon ympäri kulmanopeudella ω_f massakeskipistekoordinaatistossa (x', y', z') , joka liikkuu vakionopeudella \vec{v}_f laboratoriokoordinaatistossa (x, y, z)

pyörimismäärä on yhtä suuri kuin se oli laboratoriokoordinaatistossa ennen törmäystä.

Kuten tehtävissä 9 ja 10, tässäkin oikean perustelun käyttäminen vaatii, että opiskelija ymmärtää pyörimismäärän olevan määritelty myös suoraviivaisessa liikkeessä. Intuitiivinen käsitys siitä, mitä törmäyksen jälkeen tapahtuu, auttaa opiskelijaa huomaamaan, että pyörimismäärän täytyi "tulla jostain". Valittavissa olevat virheelliset vaihtoehdot puolestaan voivat horjuttaa opiskelijan käsitystä siitä, mitä törmäyksen jälkeen tapahtuu. Esimerkiksi, jos opiskelija pitää sitkeästi kiinni käsityksestään, että systeemin pyörimismäärä on nolla, saattaa hän vetää johtopäätöksen, etteivät sauva ja kappale ala törmäyksen jälkeen pyöriä ollenkaan. Kysymys 12 on siis eräänlainen ansa.

4.2.4 Pyörimisenergia, vierimisen energiataarkastelu ja energian säilymlslaki

Kysymykset 5, 6 ja 8

Tehtävä 8. Kaksi samankokoista ja -massaista palloa vierivät ensin vaakasuoralla pinnalla yhtä suurilla nopeuksilla ja alkavat sitten vierii ylämäkeen. Pallon I hitausmomentti on kaksi kertaa niin suuri kuin pallon II.

Tässä tehtävässä kysytään, kumpi palloista vierii pidemmälle ylämäkeen, vai vierivätkö ne yhtä pitkälle sekä perustelut tähän. Helpoin tapa lienee lähteä liikkeelle energiataarkastelusta. Kummallakin pallolla on alussa tietty kineettinen energia, joka on translaatioenergian ja rotaatioenergian summa. Ylämäessä pallot vierivät niin pitkälle, kunnes kaikki kineettinen energia on muuttunut potentiaalienergiaksi. Näin ollen se pallo, jolla on suurempi kineettinen energia alussa, vierii myös pidemmälle.

Suoraviivaisen liikkeen mallit saattavat kaataa opiskelijan pohdinnat. Jos pallojen kineettisen energian ajattelee olevan vain translaatioenergiaa, ei pallojen energioissa ole eroja, koska niiden nopeudet olivat alussa samat. Nopeus ja kineettinen energia eivät kuitenkaan vierimisessä kulje käsi kädessä samoin kuin suoraviivaisessa liikkeessä. Kappaleen rotaatioenergia on

$$K^{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2, \quad (6)$$

missä J on kappaleen hitausmomentti ja ω kulmanopeus (molemmat pyörimisakselin suhteen). Vierimisessä kulmanopeus ja massakeskipisteen nopeus linkittyvät vierimisehdon kautta, joten tehtävän tilanteessa kummankin kappaleen kulmanopeus on alussa sama. Pallon I hitausmomentti on kaksi kertaa pallon II hitausmomentti, joten sen rotaatioenergiakin on kaksi kertaa niin suuri kuin pallolla II. Koska molempien pallojen translaatioenergiat ovat samat, on pallon I kineettinen kokonaisenergia suurempi kuin pallon II, joten se vierii pidemmälle ylämäkeen ennen pysähtymistään.

Tehtävä 5. Kaksi 4 kg:n massaista keilapalloa lasketetaan alas pitkin kahta kaltevaa tasoa. Molempien tasojen lähtökorkeus on 1 m. Ensimmäinen taso on kiillotettua peltiä, jossa keilapallo liukuu kitkatta koko matkan alas saakka. Toinen taso on päällystetty hiiekkapaperilla, joka saa keilapallon vierimään liukumatta alas saakka (vierimisvastus on olematon).

Opiskelijaa pyydetään perustellen valitsemaan, kumpaa tasoa pitkin liikkuvan keilapallon kokonaisenergia on suurempi, vai ovatko ne yhtäsuuret. Tämä

tehtävätyyppi on hyvin klassinen energian säilymislain osaamista luotaavissa testeissä. Samalla se on puoliksi kompakysymys. Koska molemmat keilapallot lähtevät samalta korkeudelta, niiden potentiaalienergiat ovat yhtäsuuret. Molemmat lähtevät lisäksi levosta, joten kokonaisenergia on yhtä suuri kuin pallojen potentiaalienergia. Energian säilymislain nojalla pallojen kokonaisenergiat ovat yhtäsuuret myös tasojen alapäässä.

Liukumisen ja vierimisen energiataarkastelu saattaa sekoittaa opiskelijan järjekyllä. Vierivällä pallolla kineettinen energia on massakeskipisteen translaatioenergian ja rotaatioenergian summa. Nopeasti ajateltuna vierivän pallon kineettinen energia olisi siis suurempi kuin pelkän translaatioenergian omaavalla pallolla. Todellisuudessa kummallakin pallolla kokonaisenergia on rotaatiosta ja translaatiosta riippumatta aina yhtä suuri kuin potentiaalienergia alussa.

Tehtävä 6. Tehtävänanto on sama kuin kysymyksessä 5. Nyt opiskelijan tehtävänä on perustella, kumman keilapallon vauhti on suurempi tason alapäässä. Energian säilymislaki on jälleen helpoin työkalu tehtävän ratkaisemiseen, mutta se asettaa myös hätiköidyille pohdinnoille sudenkuopan. Mikäli opiskelija vastasi ja perusteli oikein kysymyksen 5, saattaa hän sekoittaa keilapallojen kineettiset energiat niiden massakeskipisteiden nopeuksiin.

Suoraviivaisen liikkeen laeista opiskelija saattaa muistaa, että kaksi samanmassaista kappaletta liikkuu yhtä suurilla nopeuksilla, jos niiden kineettiset energiat ovat yhtäsuuret. Vierimisessä kappaleen osat kuitenkin liikkuvat pyörimisakselin ympäri vierimisehdon mukaisesti. Jos kappale lähtee levosta (etenemisen ja pyörimisen suhteen), muuttuu osa potentiaalienergiasta rotaatioenergiaksi. Näin ollen vierivän pallon translaatioenergia on pienempi kuin liukuvan pallon, eli liukuvan pallon vauhti on suurempi tason alapäässä.

Opiskelija voi kuitenkin alkaa pohtia vierimisehdon vaikutusta. Osa vierivän pallon potentiaalienergiasta muuttuu rotaatioenergiaksi, mutta eikös vierimisehto yhdistä pallon nopeuden ja kulmanopeuden toisiinsa? Silloinhan kulmanopeuden saa muutettua takaisin pallon massakeskipisteen nopeudeksi ja lopputulos on sama kuin liukuvalla pallolla? Vertaillaan tilanteita:

Oletetaan potentiaalienergian nollassa kummankin tason alapäähän ja että kumpikin pallo lähtee levosta. Olkoon pallon massa m ja tason lähtökorkeus h . Peltisen tason tilanteessa keilapallon potentiaalienergia alussa on

yhtä suuri kuin sen kineettinen translaatioenergia lopussa:

$$\begin{aligned} U_i &= K_f^{\text{tr}} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_{\text{mkp}}^2 \\ \Rightarrow v_{\text{mkp}} &= \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

Jos unohdetaan reiät, keilapallo on umpinainen pallo, jonka hitausmomentti on $J = \frac{2}{5}mr^2$ [14, s. 42]. Hiekkapaperilla päällystetyn tason tilanteessa keilapallon potentiaalienergia alussa on yhtä suuri kuin sen kineettisen translaatioenergian ja rotaatioenergian summa lopussa:

$$\begin{aligned} U_i &= K_f^{\text{tr}} + K_f^{\text{rot}} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_{\text{mkp}}^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{mkp}}^2 + \frac{J}{2} \frac{v_{\text{mkp}}^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{2}v_{\text{mkp}}^2 \left(m + \frac{J}{r^2} \right) = \frac{1}{2}v_{\text{mkp}}^2 \left(m + \frac{2mr^2}{5r^2} \right) \\ &= \frac{7}{10}mv_{\text{mkp}}^2 \\ \Rightarrow v_{\text{mkp}} &= \sqrt{\frac{10}{7}gh} < \sqrt{2gh}, \end{aligned}$$

missä käytettiin vierimisehtoa (8). Siis liukuvan keilapallon vauhti tason alapäässä on suurempi kuin vierivän.

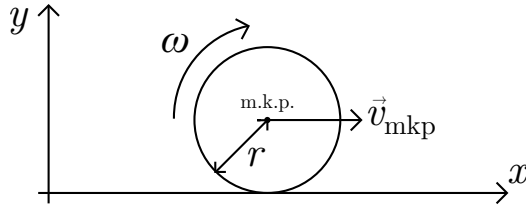
4.2.5 Vierimisehto

Kysymykset 3, 4, 13 ja 14

Tehtävä 3 käydään läpi kappaleessa 4.2.6.

Tehtävä 4. Mikä seuraavista tilanteista kuvaa parhaiten vierimisehdon toteutumista täysin pyöreän pallon liikkeessä vaakasuoralla alustalla?

Vaihtoehtoiksi annetaan erilaisia pallon ja alustan suhteellista liikettä kuvaavia vaihtoehtoja (ks. liite A). Tehtävä on yksinomaan vierimisehdon, eli suoraviivaisen liikkeen ja pyörimisliikkeen erikoistapauksen hallintaa mittava ongelma. Opiskelijan on osattava itse vierimisehto sekä osattava visualisoida vierivän kappaleen eri osasten nopeuksia paikoillaan olevan tarkastelijan näkökulmasta.



Kuva 6: Sylinteri- tai pallosymmetrinen kappale vierii liukumatta vaakasuoralla alustalla

Vierimisehto kuvaa pyörivän ja etenevän kappaleen kulmanopeuden ja massakeskipisteen kautta kulkevan pyörimisakselin suoraviivaisen nopeuden verrannollisuutta. Tehtävän 4 tilanne voidaan esittää esimerkiksi kuvan 6 tavalla. Sijaitkoon kappaleen massakeskipiste kappaleen symmetrisesti lävistävällä pyörimisakselilla ja olkoon tämä pyörimisakseli yhdensuuntainen kappaleen alla olevan pinnan kanssa. Olkoon kappaleen säde r , pyörimisakselin (ja täten myös massakeskipisteen) vauhti v_{mkp} ja kulmanopeus pyörimisakselin suhteen suuruudeltaan ω .

Oletetaan nyt yksinkertaisuuden vuoksi, että kappaleemme on täydellinen pallo, jolloin vain yksi piste pallosta koskettaa alustaa kerrallaan. Pallo vierii liukumatta vakiovauhdilla, jos sen alustaa koskettava piste ei liu'u alustan päällä. Toisin sanoen pallon alustaa koskettavan pisteen nopeus alustan suhteen on nolla. Tämä on myös oikea vastaus tehtävään 4.

Tarkastellaan tilannetta pallon massakeskipistekoordinaatistossa. Tällöin massakeskipisteen nopeus on nolla, mutta siihen nähden alustaa koskettava piste liikkuu vauhdilla v_{mkp} . Koska massakeskipistekoordinaatistossa tämä piste on aina ympyräradalla, on sen nopeus pallon kulmanopeuden ja pisteen paikkavektorin ristitulo:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (7)$$

Kun huomataan, että $\vec{\omega}$ ja \vec{r} ovat aina kohtisuorassa ja siirrytään takaisin laboratoriokoordinaatistoon, on vierivän kappaleen massakeskipisteen vauhti maanpinnan suhteen

$$v_{\text{mkp}} = \omega r. \quad (8)$$

Tätä yhtälöä kutsutaan vierimisehdoksi. Vastaavilla päätelmillä voidaan johdattaa vierimisehdot myös massakeskipisteen paikalle ja kiihtyvyydelle:

$$x_{\text{mkp}} = \theta r \quad (9)$$

$$a_{\text{mkp}} = \alpha r, \quad (10)$$

missä θ on kappaleen kiertokulma ja α kulmakiikkyvyys (itseisarvoiltaan) pyörimisakselin suhteen.

Jos pallon jokainen piste alustan suhteen liikkuisi vakionopeudella, ei pallo pyörisi ollenkaan. Tämä liike olisi puhdasta liukumista. Itse asiassa jos pallon minkä tahansa kahden eri pisteen nopeudet (suunta ja suuruus) olisivat samat, ei pallo pyörisi, koska se on jäykkä kappale. Pelkkä pallon pyöriminen ja liikkuminen yhtenäikaisesti ei riitä täyttämään vierimisehtoa, sillä tämä väite mahdollistaa epäyhtälön yhtälön (8) paikalle. Sama on mahdollista myös, jos pallon pyörimisakseli liikkuu suoraviivaisesti, mutta kulmanopeudesta ei tiedetä mitään.

Tehtävät 13 ja 14 käydään läpi kappaleessa 4.2.6.

4.2.6 Kitkavoima vierimisessä

Kysymykset 3, 11, 13 ja 14

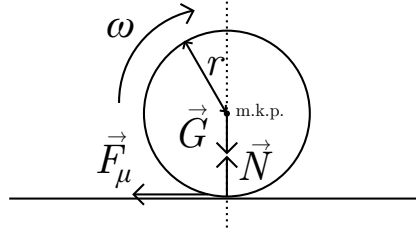
Tehtävä 3. Sylinteri vierii liukumatta vaakasuoralla alustalla vakionopeudella.

Idea tähän tehtävään on osittain peräisin Hierrezuelon ja Carneron artikkelista [12]. Opiskelijan tehtävänä on perustella kitkavoiman luonne tapauksessa. Hän voi perustellen valita joko, että sylinteriin kohdistuu tai ei kohdistu kitkavoiman momenttia tai perustella, mitä kitkan olemassaolosta tai olemattomuudesta seuraa.

Tarkastellaan tehtävän 3 tilannetta vapaakappalekuvion (kuva 7) avulla. Varmaksi tiedetään, että sylinteriin kohdistuu sen paino \vec{G} sekä alustan tukivoima \vec{N} . Oletetaan, että sylinteriin kohdistuu sen liikkeelle vastakkainen kitkavoima \vec{F}_μ . Ilmanvastus voidaan jättää huomiotta, kuten myös vierimisvastus, koska sylinteri ja alusta ovat ideaalisia. Sylinteri vierii liukumatta, joten riittää tarkastella vain sen pyörimisliikettä. Kulmanopeus voidaan haluttaessa kytkeä massakeskipisteen eli pyörimisakselin nopeuteen vierimisehdolla (yhtälö (8)). Pyörimisen liikeyhtälö tilanteessa, jossa kappaleen hitausmomentti ei muutu, on

$$\sum_i M_i = J\alpha, \quad (11)$$

missä M_i :t ovat sylinteriin kohdistuvien voimien momentit ja α sylinterin



Kuva 7: Oikealle päin vierivään sylinteriin mahdollisesti vaikuttavat voimat

kulmakiihtyvyyks, molemmat pyörimisakselin suhteen. Sylinterin painon ja pinnan tukivoiman vaikutussuorat kulkevat sylinterin massakeskipisteen ja pyörimisakselin kautta, joten niiden momentit ovat nollia. Jäljelle jää vain kitkavoima, jonka vaikutussuora ei kulje pyörimisakselin kautta. Jos valitaan positiivinen kiertosuunta myötäpäivään, yhtälöstä (11) saadaan

$$\begin{aligned} M_{F_\mu} &= F_\mu r = J\alpha \\ \Rightarrow F_\mu &= \frac{J\alpha}{r} = \frac{Ja_{\text{mkp}}}{r^2}, \end{aligned}$$

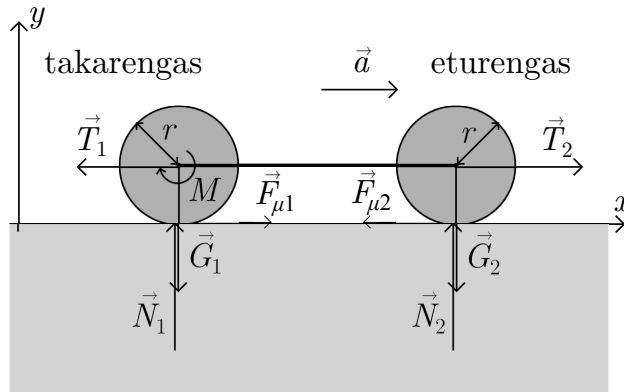
missä käytettiin vierimisehtoa (10) kiihtyvälle liikkeelle. Tehtävässä sylinteri vierii vakionopeudella, joten kitkavoima on nolla ja erityisesti sen momentti on nolla.

Jos sylinterin ja pinnan välissä olisi nollasta eroava kitkavoima, muuttaisi tämän voiman momentti sylinterin pyörimismäärää. Pyörimismäärä ja liikemäärä kuitenkin voidaan jälleen linkittää toisiinsa vierimisehdon kautta, joten toinen niistä ei voi muuttua ilman, että toinenkin muuttuisi tai sitten vieriminen muuttuisi osittain liukumiseksi. Sylinterin liike ei myöskään voi muuttua vierimisestä kokonaan liukumiseksi, ellei jokin momentti tee työtä pyörimisen pysäyttämiseksi.

Tehtävä 11. Polkupyöräilijä ajaa vaakasuoralla tieosuudella ja kiihdyttää vauhtiaan tasaisesti.

Tehtävä on peräisin Carvalhon ja Sousan tutkimuksesta [8]. Opiskelijalle annetaan kuvavaihtoehtoja, joissa on piirretty eri suuntiin osoittavia polkupyörän renkaisiin kohdistuvia tienpinnan kitkavoimia. Osassa kuvista on myös piirretty polkupyörään kohdistuva ulkoinen ”haamuvoima”, joka kiihdyttää pyörää. Opiskelijaa pyydetään valitsemaan kuva, jossa voimat on merkitty oikein ja perustelemaan lyhyesti, miksi juuri se olisi oikea vaihtoehto.

Aloitetaan piirtämällä tilanteesta vapaakappalekuvio. Sovitaan positiivinen



Kuva 8: Polkupyörään kohdistuvat voimat ja momentit; voimien suhteelliset suuruudet eivät välttämättä ole kuvan mukaiset

liikesuunta x -akselilla polkupyörän kiihtyvyyden suuntaan ja y -akselilla ylöspäin. Olkoon molempien renkaiden säde r . Kun polkupyörä yksinkertaistetaan kahdeksi renkaaksi, jotka on yhdistetty venymättömällä tangolla akselistaan toisiinsa, voidaan polkupyörä ja polkija käsittää kuvan 8 kaltaiseksi kappaleeksi.

Nimetään pyörään kohdistuvat voimat ja momentit. Taka- ja eturenkaan painoja merkitään \vec{G}_1 :llä ja \vec{G}_2 :lla vastaavasti. Rungon ja polkijan paino vaikuttavat renkaiden painojen kautta ottamatta kantaa rungon ja polkijan massojen sijaintiin. Merkitään takarengaaseen massaa m_1 :llä, eturenkaan massaa m_2 :lla sekä rungon ja polkijan yhteismassaa m_3 :lla.

Koska pyörä ei liiku pystysuunnassa, painoja vastaan täytyy vaikuttaa yhtäsuuret tienpinnan tukivoimat \vec{N}_1 ja \vec{N}_2 . Merkitään polkijan tuottaman momentin suuruutta M :llä. Polkupyörän rungon taka- ja eturenkaiden akselisiin kohdistamia voimia merkitään \vec{T}_1 :llä ja \vec{T}_2 :lla sekä tienpinnan renkaiisiin kohdistamaa lepokitkaa (lepokitka, koska renkaat eivät liu'u tien pinnalla) $\vec{F}_{\mu 1}$:llä ja $\vec{F}_{\mu 2}$:lla vastaavasti. Piakkoin osoittautuu, että voimien \vec{T}_1 , \vec{T}_2 , $\vec{F}_{\mu 1}$ ja $\vec{F}_{\mu 2}$ suunnat ovat juuri, kuten kuvassa 8. Yksinkertaisuuden vuoksi vapaa-kappalekuvaan ei piirretä näiden voimien vastavoimia.

Mietitään aluksi, mikä polkupyörää liikuttaa. Tämä on tietysti polkija, joka kohdistaa polkimien ja ketjujen välityksellä takarenkaaseen momentin. Polkupyörään ja polkijaan ei kohdistu mitään ulkoista ”ajovoimaa”. Polkupyörän kiihtyvyys johtuu siis yksinomaan takarenkaan runkoon, polkijaan ja eturenkaaseen kohdistamasta voimasta. Tämän voiman vastavoima on \vec{T}_1 . Mutta tämä voima ei tule kappaleen ulkopuolelta, joten se ei voi suoraan olla kiih-

tyvyyden aiheuttaja! Vapaakappalekuvaa tarkastelemalla voidaan päätellä, että polkupyörää kiihdyttävä voima voi olla ainoastaan tienpinnan ja renkaiden välinen lepokitka.

Tarkastellaan eturengasta. Koska polkupyörä on takavetoinen, ei polkijan momentti kohdistu sen akseliin. Renkaan paino \vec{G}_1 ja tien tukivoima \vec{N}_1 eivät aiheuta momenttia renkaaseen. Runko työntää eturenkaan akselia eteenpäin voimalla \vec{T}_2 . Renkaan ja tienpinnan välinen lepokitka estää rengasta liukumasta, eli kitkavoiman pitää kohdistaa renkaaseen taaksepäin osoittava voima.

Tarkastellaan takarengasta. Koska polkupyörä kiihdyttää eteenpäin, täytyy siihen Newtonin 1. lain nojalla kohdistua jokin eteenpäin osoittava ulkoinen voima. Ainoaksi vaihtoehdoksi jää jälleen kitkavoima. Samaan lopputulokseen pääsee myös pohtimalla polkijan momentin vaikutusta. Tämä momentti aiheuttaa tienpinnan kosketuspisteessä tienpintaan taaksepäin osoittavan kitkavoiman. Koska rengas ei liu'u, tienpinta kohdistaa Newtonin 3. lain nojalla takarengastaan yhtä suuren, eteenpäin osoittavan kitkavoiman.

Entäs kitkavoimien suhteelliset suuruudet? Nyt on osoitettu, että ainoat polkupyörään kohdistuvat tienpinnan suuntaiset ulkoiset voimat ovat $\vec{F}_{\mu 1}$ ja $\vec{F}_{\mu 2}$. Ratkaisemalla polkupyörän kiihtyvyys liikeyhtälöstä

$$\sum_i F_{i,x} = F_{\mu 1} - F_{\mu 2} = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

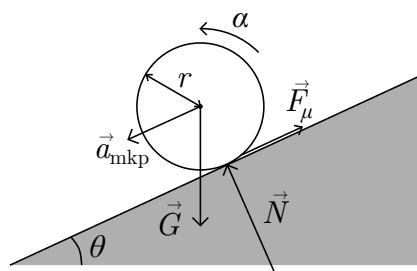
$$\Rightarrow a = \frac{F_{\mu 1} - F_{\mu 2}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

havaitaan, että $F_{\mu 1} > F_{\mu 2}$, sillä $a > 0$.

Tehtävät 13 ja 14. Umpinainen ympyrälieriö, massa 5 kg ja säde 1 m, vierii liukumatta ensin ylös kaltevaa tasoa, hidastuu, pysähtyy ja alkaa sitten vierii liukumatta kiihtyvällä vauhdilla alamäkeen.

Idea tehtäviin 13 ja 14 on peräisin Carvalhon ja Sousan tutkimuksesta [8]. Opiskelijan tehtävänä on perustellen valita mihin suuntaan lieriöön kohdistuva tason kitkavoima osoittaa ylä- ja alamäessä vai onko kitkavoimaa ollenkaan.

Pohditaan ensin tilannetta, jossa lieriö vierii ylämäkeen ja sen vauhti hidastuu. Piirretään tilanteesta vapaakappalekuvio (kuva 9). Lieriöön kohdistuu varmasti sen paino \vec{G} sekä mäen tukivoima \vec{N} . Tiedetään, että lieriön massakeskipisteen kiihtyvyyden suunta on alamäkeen. Lieriö vierii liukumatta,



Kuva 9: Lieriö vierimässä ylämäkeen tai alamäkeen

joten sen kulmakiiktyvyys voidaan kiinnittää joka hetki lieriön kiihtyvyyteen yhtälöllä (10). Koska lieriön kiihtyvyys on vakio, on myös sen kulmakiiktyvyys vakio ja suunnaltaan vastapäivään kuvassa 9.

Lieriöllä on siis nolasta eroava vakiokulmakiiktyvyys. Pyörimisen liikeyhtälön nojalla lieriöön täytyy kohdistua nolasta eroava vakiomomentti. Lieriön painon ja mäen tukivoiman vaikutussuorat kulkevat lieriön massakeskipisteen kautta, joten ne eivät saa aikaan momenttia. Ainoaksi vaihtoehdoksi jää mäen ja lieriön välinen kitkavoima \vec{F}_μ , joka ei vaikuta suoraan lieriön massakeskipisteeseen. Kitkavoiman momentin on oltava samansuuntainen kuin kulmakiiktyvyyden, eli vastapäivään. Siis lieriöön kohdistuva kitkavoima on nolasta eroava, osoittaa ylämäkeen ja on lisäksi vakio. Mikäli kalteva taso olisi kitkaton, pyörisi lieriö alussa saamallaan vakiokulmanopeudella koko matkan, sillä siihen ei kohdistuisi minkäänlaista momenttia. Lieriö ei voi vieriä liukumatta kaltevilla tasolla ilman kitkaa, sillä pintojen välinen lepokitka on ainoa kiihtyvän liikkeen vierimisehdon (yhtälö (10)) toteutumisen mahdollistava tekijä.

Mietitään sitten alamäkitilannetta. Lieriön vauhti kasvaa, joten sen massakeskipisteen kiihtyvyys on alamäen suuntaan. Mutta sehän oli kiihtyvyyden suunta myös ylämäkeen mentäessä! Hetkellistä nopeutta ja kulmanopeutta lukuunottamatta mikään ei muuttunut. Vapaakappalekuvissa ei ole eroa ylä- ja alamäkeen mentäessä, joten kitkavoiman suunta ja suuruus ovat samat.

4.3 Datan analysointi

Kun kaikkien kohderyhmäläisten lomakkeet oli kerätty, ne sekoitettiin, jotta vastauksia ei voi yhdistää tiettyyn opiskelijaan tai lukioon. Myöhempiä viitteitä varten lomakkeet numeroitiin. Tulokset taulukoitiin oppilaskohtaisesti

ti siten, että jokaisen lomakkeen jokainen vastaus kirjattiin ylös. Taulukon vaakariveillä juoksivat kysymysnumerot ja pystysarakkeilla vastauslomakkeiden numerot. Näin saatiin taulukko, josta voitiin vertailla sekä yksittäisen opiskelijan vastauksia että jokaisen tehtävän saamia vastauksia. Kysymyksen 11 avoimet perustelut analysoitiin vielä erikseen.

Itse monivalintatestin kysymysten arviointia varten jokaisesta kysymyksestä laskettiin *suhteellinen vaikeusindeksi*. Ensin laskettiin jokaiselle tehtävälle vaikeusindeksi vähentämällä sadasta prosentista tehtävään kerääntyneiden oikeiden vastausten prosenttiosuus. Se tehtävä, jonka vaikeusindeksi oli suurin, on testin keskimäärin vaikein tehtävä. Tehtävän suhteellinen vaikeusindeksi κ_r on tehtävän vaikeusindeksin ja vaikeimman tehtävän vaikeusindeksin osamäärä:

$$\kappa_r = \frac{1 - \frac{\text{tehtävän oikeiden vastausten lkm}}{53}}{\text{vaikeimman tehtävän vaikeusindeksi}}. \quad (12)$$

Tällöin suhteellinen vaikeusindeksi on aina välillä $0 \dots 1$ siten, että vaikeimman tehtävän suhteellinen vaikeusindeksi on 1. Mitä suurempi suhteellinen vaikeusindeksi on, sitä vaikeampi kyseinen tehtävä oli opiskelijoilta kerättyjen vastausten valossa. Monivalintatestin kysymysten oikeat vastaukset, oikeiden vastausten lukumäärät, prosenttiosuudet sekä suhteelliset vaikeusindeksit on esitetty taulukossa 2.

5 Tutkimustulokset

Datan analysoinnissa tehdyt havainnot kerätään yhteen tässä luvussa. Monivalintatestin tulokset käsitellään eri tavoin kahteen otteeseen. Ensimmäinen – kappaleessa 5.1 – kerätyt vastaukset käydään läpi kysymys kerrallaan ja vertaillaan eri kysymysten haastavuutta tulosten valossa. Tutkimuskysymyksiin (luku 3) vastaamista varten testin vastaukset käsitellään myös aihealueittain kappaleessa 5.2.

5.1 Monivalintatestin kysymysten anti

Opiskelijoiden vastaukset käydään läpi kysymys kerrallaan. Vastauksen oikeellisuus riippuu kysymyksen luokasta (ks. kappale 4.1). Ilman perustelua vaadittavan tehtävän vastaus on oikein, jos oikea vastausvaihtoehto on merkitty yksiselitteisesti vastauslomakkeeseen (useampi valinta tai epäselvä valinta katsotaan vääräksi vastaukseksi). Perusteltavissa monivalintatahtävissä vastauksen katsotaan olevan oikein, jos sekä oikea vastausvaihtoehto että oikea perusteluvaihtoehto on merkitty yksiselitteisesti vastauslomakkeeseen. Avoimen perustelun tehtävässä vastaus on oikein, jos oikea vastausvaihtoehto on merkitty yksiselitteisesti vastauslomakkeeseen. Tämän tehtävän perusteita tarkastellaan erikseen.

Mielenkiintoisia ovat myös perusteltavien monivalintakysymysten virheelliset vastaukset. Koska oikeaksi vastaukseksi tulkitaan vain oikea vastausvaihtoehto ja perusteluvaihtoehto, pitää oikean vastausvaihtoehdon selittäminen väärällä perustelulla kartoittaa erikseen. Perusteltaviin monivalintakysymyksiin kerätyt vastaukset on eritelty taulukossa 3 sen mukaan, onko vastaus perusteltu virheellisesti vai oikein.

Tehtävä 1

Ensimmäinen tehtävä käsitteli kiertokulmaa ja kulmanopeutta. Se oli myös testin helpoin tehtävä suhteellisen vaikeusindeksin perusteella. Yhteensä 69,8 % opiskelijoista vastasi venttiilin ja heijastimen kiertyvän kierroksen aikana yhtä suuren kiertokulman. 66,0 % opiskelijoista perustelivat tämän oikein. 24,5 % puolestaan vastasivat, että venttiilin kulmanopeus on joko pienempi tai suurempi kuin heijastimen ja perustelivat sen vaihtoehdolla ”kulmanopeus riippuu etäisyydestä pyörimisakselista yhtälön $\omega = v/r$ mukaisesti” huomaamatta, että kyseinen yhtälö ei väitä nopeuden v olevan vakio.

Taulukko 2: Opiskelijoiden ($N = 53$) vastaukset monivalintatestin kysymyksiin sekä kysymysten suhteelliset vaikeusindeksit

Kysymys nro	Oikea vastaus	Oikeita vastauksia		κ_r
		lkm	%	
1	C2	35	66,0	0,35
2	A4	16	30,2	0,73
3	B4	2	3,8	1,00
4	A	10	18,9	0,84
5	C2	30	56,6	0,45
6	A1	18	34,0	0,69
7	A2	11	20,8	0,82
8	B3 (B4)	15	28,3	0,75
9	A3	9	17,0	0,86
10	B5	6	11,3	0,92
11	B	9	17,0	0,86
12	D5	20	37,7	0,65
13	A2	3	5,7	0,98
14	A4	3	5,7	0,98
15	B	16	30,2	0,73

Tehtävä 2

Toisessa tehtävässä samanmassaisten ja -säteisten sylinterien hitausmomenttien vertailu jakoi vahvasti vastauksia. 30,2 % opiskelijoista valitsi onton lieriön hitausmomentin suuremmaksi ja toiset 30,2 % puolestaan valitsivat umpinaisen lieriön. Kumpikin näistä ryhmistä perusteli vaihtoehdon oikein vastauksesta huolimatta. Suurin osa (54,7 %) opiskelijoista oli kuitenkin sitä mieltä, että umpinaisen lieriön hitausmomentti on suurempi, jos perustelut jätetään huomiotta. Tämä voi johtua siitä, että he mielsivät umpinaisen sylinterin painavammaksi kuin onton, vaikka tehtävänannossa oli sanottu niiden olevan samanmassaisia. Vain 3,8 % opiskelijoista pitivät hitausmomenttia kulmanopeudesta riippuvana suurena ja näin ollen eivät osanneet määrittää, kumman sylinterin hitausmomentti olisi suurempi. Perustelujen osalta hitausmomentin teoria näyttäisi olleen opiskelijoiden hallussa hyvin: 60,4 % valitsivat perusteluvaihtoehdon, jossa hitausmomentin riippuvuus massasta ja säteestä oli oikein.

Taulukko 3: Opiskelijoiden ($N = 53$) vastaukset perusteltaviin monivalintakysymyksiin

Kysymys nro	Vastaus oikein, perustelu väärin		Molemmat oikein	
	lkm	%	lkm	%
1	2	3,8	35	66,0
2	2	3,8	16	30,2
3	3	5,7	2	3,8
5	1	1,9	30	56,6
6	2	3,8	18	34,0
7	24	45,3	11	20,8
8	11	20,8	15	28,3
9	9	17,0	9	17,0
10	9	17,0	6	11,3
12	16	30,2	20	37,7
13	11	20,8	3	5,7
14	27	50,9	3	5,7

Tehtävä 3

Suhteellisen vaikeusindeksin perusteella tämä tehtävä oli ehdottomasti testin haastavin. Vastausten hajonta käsitti lähes koko vaihtoehtojen kirjon. Vastanneista selkeästi suurin osuus (37,7%) valitsi vaihtoehdon, jonka mukaan tasaisella nopeudella liukumatta vierivään sylinteriin kohdistuu kitkavoiman momentti. 24,5% opiskelijoista perusteli tämän johtuvan vaihtoehdosta ”pyöriminen vaatii aina nollasta eroavan momentin”. Yhteensä 20,8% opiskelijoista valitsi oikeaksi vaihtoehdoksi kitkavoiman pienentävän sylinterin pyörimismäärää liikemäärän pysyessä vakiona perustellen sen joko kitkavoiman taipumuksena hidastaa kappaleen liikettä tai pyörimismäärän ja liikemäärän riippumattomuutena. 30,2% puolestaan väittivät sylinterin vierimisen muuttuvan kokonaan liukumiseksi, jos alusta muuttuisi kitkattomaksi. Vain 3,8% opiskelijoista vastasivat oikein, mutta yhtä suuri osuus perusteli kitkavoiman momentin olevan nolla kitkavoiman hidastavan vaikutuksen takia.

Tehtävä 4

Vierimisehtoa käsittelevä tehtävä osoittautui vaikeusindeksin perusteella kuuluvansa testin haastavampaan päähän ja vastausten hajontakin oli varsin suuri. Suosituin vastaus (32,1% vastanneista) oli ”alustaa koskettavan pallon

pisteen nopeus alustan suhteen on yhtä suuri kuin pallon pyörimisakselin nopeus”. Hämmästyttävää kyllä, toiseksi eniten (20,8 % vastanneista) kannatus- ta keräsi vaihtoehto ”riittää, että pallo pyörii ja liikkuu suoraviivaisesti yhtä aikaa” huolimatta siitä, ettei nopeudesta ja kulmanopeudesta kerrottu tehtävänannossa mitään. Oikea vastaus jäi kolmannelle sijalle (18,9 %). 17,0 % opiskelijoista väittivät vierimisehdon toteutuvan, jos jokainen piste pallossa liikkuu alustan suhteen vakionopeudella. 9,4 % valitsi riittävän ehdon olevan, että pallon pyörimisakseli liikkuu suoraviivaisesti. Puuttuvat 1,8 % ovat yhden opiskelijan tyhjä vastaus.

Tehtävä 5

Ensimmäinen energian säilymlaki -tehtävistä oli osattu suhteellisen hyvin. Yhteensä 58,5 % opiskelijoista vastasivat molempien keilapallojen kokonaisenergian olevan yhtä suuri tason alapäässä ja heistä 56,6 prosenttiyksikköä oli valinnut myös oikean perustelun. 28,3 % vastaajista valitsivat vierivän pallon (hiekkapaperilla päällystetty taso) energian suuremmaksi, koska vierivän keilapallon liike-energia olisi rotaatioenergian ja translaatioenergian summana suurempi kuin pelkkä translaatioenergia. 3,8 % opiskelijoista oli arvatenkin lähtenyt tarkastelemaan ongelmaa intuitiivisesti ja valinnut liukuvan keilapallon (peltinen taso) energian suuremmaksi, koska sen nopeus on suurempi tason alapäässä.

Tehtävä 6

Keilapallojen vauhtien vertailussa saavutettiin kaksi yhtä suosittua vastausperustelu-paria. 34,0 % opiskelijoista vastasivat liukuvan pallon vauhdin olevan suurempi tason alapäässä, koska vierivällä pallolla osa potentiaalienergiasta muuttui rotaatioenergiaksi. Samoin 34,0 % opiskelijoista päättelivät vauhtien olevan yhtä suuret, koska pallojen kokonaisenergiatkin olivat yhtä suuret. Ilmeisesti 15,1 % opiskelijoista käsittivät pyörimisen myös lisäävän keilapallon vauhtia, koska he valitsivat virheellisesti vierivän pallon vauhdin suuremmaksi, mutta perustelivat sen oikealla perusteluvaihtoedolla.

Tehtävä 7

Tehtävän perusteella opiskelijoiden intuitio tilanteesta on hyvä, sillä 66,0 % vastasivat sylinterin kulmanopeuden pienentyvän, kun sylinterin massaa kas-

vatetaan hiekalla. Kuitenkin heistä suurempi osa (45,3 prosenttiyksikköä) perustelivat tämän johtuvan siitä, että systeemin pyörimismäärä ei säilyisi. 17,0 % opiskelijoista perustelivat kulmanopeuden säilyvän muuttumattomana, koska pyörimismääräkin säilyi vakiona. 17,0 % vastaajista olivat mahdollisesti kadottaneet intuitionsa ollessaan sitä mieltä, että sylinterin kulmanopeus kasvaisi!

Tehtävä 8

Tämäkin energian säilymlakia ja pyörimisenergiaa soveltava tehtävä jakoi mielipiteitä, mutta hyvin johdonmukaisella tavalla. Vastausten jakauma paljasti myös tehtävän ja perusteluvaihtoehtojen olleen hieman viallisia. 28,3 % opiskelijoista vastasivat suuremman hitausmomentin pallon vierivän pidemmälle ylämäkeen, koska pallon pyörimisenergia on suoraan verrannollinen sen hitausmomenttiin. 18,9 % valitsivat saman vastauksen, mutta perustelivat sen vaihtoehdolla ”pyörimisenergia muuttuu potentiaalienergiaksi sitä hitaammin, mitä suurempi on hitausmomentti”. Heuristisesti tämä on myös oikea perustelu, sillä hitausmomenttihan kuvaa kappaleen pyörimisliikkeen muutosta vastustavaa hitautta. Näin ollen B3 ja B4 ovat yhtäläillä hyväksyttäviä oikeaksi vastaukseksi. 34,0 % opiskelijoista vastasivat pienemmän hitausmomentin pallon vierivän pidemmälle ylämäkeen ja perustelivat sen puoliksi ja puoliksi (17,0 ja 17,0 prosenttiyksikköä) em. vaihtoehdoilla. Näin suuri osuus vääriä vastauksia oikealla perustelulla voivat johtua osittain tehtävänannon epäselvyydestä. Jälkikäteen mietittynä ”pallon I hitausmomentti on kaksi kertaa niin suuri kuin pallon II” on sekava ja voi johtaa pallojen hitausmomenttien keskinäiseen sekoittamiseen, ellei tehtävänantoa lue erityisen huolella. Tekijän puolustukseksi voidaan tosin sanoa, että tämä käskettiin tehdä testin yleisissä ohjeissa.

Tehtävä 9

Suoraviivaisen liikkeen pyörimismäärä tuotti suuren hajonnan vastauksiin. 34,0 % opiskelijoista valitsivat oikean vaihtoehdon, jonka mukaan suoraviivaisesti liikkuvan kappaleen pyörimismäärä on nolasta eroava, jos origo ei ole kappaleen liikeradalla. Heistä suurempi osuus (17,0 prosenttiyksikköä) perusteli vastauksen oikein kulman θ muutoksesta johtuvaksi, kun taas 15,1 % vastaajista perustelivat pyörimismäärän olevan nolasta eroava käyttäen ympyräliikkeen yhtälöä $\omega = v/r$. 9,4 % vastaajista päättelivät pyörimismäärän olevan nolla, koska kappale ei ole ympyräradalla. Yhteensä 45,3 % vastaajis-

ta valitsi tilanteen olevan jokin muu joko koska kappale ei ole ympyräradalla, koska pyörimismäärää ei voi määrittellä tässä tilanteessa tai koska kappale on pistemäinen.

Tehtävä 10

Kulmanopeus suoraviivaisessa liikkeessä jakoi myös mielipiteitä. Oikea vastaus ja perustelu jäivät pienelle suosiolle, kun vain 11,3 % opiskelijoista valitsivat nämä. 7,5 % opiskelijoista valitsivat oikean vaihtoehdon, mutta perustelivat sen virheellisesti käyttäen ympyräliikkeen yhtälöä $\omega = v/r$. Opiskelijoista 15,1 % oli sitä mieltä, että kappaleen kulmanopeus on nolla, koska se ei ole ympyräradalla ja 26,4 % valitsi kulmanopeuden olevan määräämättömissä samalla perustelulla.

Tehtävä 11

Polkupyörän renkaisiin kohdistuvien kitkavoimien suunnat aiheuttivat suuren hajonnan vastauksiin. Käydään läpi kaikki vaihtoehdot ja listataan joitain opiskelijoiden kirjallisia perusteluja jokaiseen. Koska osa perusteluisista oli epäselviä, tulkinnanvaraisia (käsiälältään tai sisällöltään), kirjoittajan omia jäsentelemättömiä ajatuksia tai jätetty kokonaan tyhjäksi, on tähän valikoitu vain selvästi tulkittavat perustelut, joista voi päätellä, mitä opiskelija on ajatellut vastatessaan. Lainaukset on valikoitu em. seikkojen puitteissa. Opiskelijan numerolla viitataan tässä järjestysnumeroa, jolla palautetut kysymyslomakkeet identifioitiin sekoittamisen jälkeen.

Suosituin vaihtoehto oli kuva, jossa molempien renkaiden kitkavoimat osoittavat taaksepäin ja eturenkaan kitkavoima on pienempi kuin takarenkaan (vaihtoehto D). Tämän vaihtoehdon valitsi 24,5 % vastaajista. Perusteluja:

”Paino on enemmän takana -> isompi kitka. Ja kitkavoima on liikettä päinvastaiseen osoittava voima.” – Opiskelija nro 8

”Kitkavoima on aina kappaleen liikesuuntaa vastaan. Pyöräilijä istuu lähempänä takarengasta, joten sen ja tien välinen kitkavoima on suurempi.” – Opiskelija nro 39

”Kitka on liikkeen suunnalle vastakkainen. $F_{\mu 1}$ [(takarenkaaseen

kohdistuva kitkavoima)] on suurempi, koska paino sijoittuu lähemmäksi sitä kuin $F_{\mu 2}$:sta.” – Opiskelija nro 48

”Takarenkaaseen kohdistuu suurempi kitka kuin eturenkaaseen, sillä [takarenkaaseen] tehdään enemmän työtä. Kitka vaikuttaa vastakkaiseen suuntaan kuin se voima minne mennään.” – Opiskelija nro 53

Toiseksi eniten valintoja keräsi vaihtoehto F, jossa molemmat kitkavoimat ovat yhtä suuret ja osoittavat taaksepäin sekä polkupyörään kohdistuu eteenpäin osoittava ”haamuvoima”. Tämän vaihtoehdon valitsi 22,6 % vastaajista. Perusteluja:

”Kitkavoimat kohdistuvat voimaa vastaan vastakkaiseen suuntaan eli vasemmalle ja voimasta aiheutuu kiihtyvyys oikealle.” – Opiskelija nro 7

”Kitkavoima hidastaa ja renkaiden pinta-alat ovat samat, joten kitkavoimat myös ovat yhtäsuuret.” – Opiskelija nro 17

”Voima menee eteenpäin, kuten pyörän kulkusuunta. Kitkaa pitää olla taaksepäin, että pyörä voi liikkua eteenpäin.” – Opiskelija nro 35

”Molemmat kitkavoimat $F_{\mu 1}$ ja $F_{\mu 2}$ toimivat pyörää eteenpäin liikuttavan voiman vastavoimina.” – Opiskelija nro 50

”Kitkavoima vaikuttaa pyöräilijää vastaan ja on yhtä suuri molempiin renkasiin, koska ihmisen [(polkijan)] paino on jakautunut tasaisesti.” – Opiskelija nro 52

20,8 % opiskelijoista valitsi vaihtoehdon, jossa molempien renkaiden kitkavoimat osoittavat eteenpäin ja eturenkaan kitkavoima on pienempi (vaihtoehto C). Perusteluja:

” $\vec{F}_{\mu 1}$ pitää olla suurempi kuin $\vec{F}_{\mu 2}$, koska pyöräilijä polkee. Vektorit ovat eteenpäin, koska kitka tekee positiivista työtä.” – Opiskelija nro 3

”Kitkavoima on renkaan pyörimissuuntaa vastainen.” – Opiskelija nro 5

”Takarenkaan momentti on suurempi kuin eturenkaan, kun pyöräilijä kiihdyttää ja [kitka-]voimat ovat pyörimissuuntaa vastaan, jotta ne [renkaat] pyörisivät.” – Opiskelija nro 6

”Takarenkaalla on enemmän kitkaa, sillä se liikuttaa pyörää.” – Opiskelija nro 25

”Kitkavoimat ovat menosuuntaa kohti, sillä renkaat liikkuvat vastakkaiseen suuntaan. Takarenkaan kitkavoima on voimakkaampi, sillä poljettaessa siihen kohdistuu enemmän voimaa.” – Opiskelija nro 37

”Pyöräilijä istuu lähempänä takapyörää, joten paino on sen pyörän päällä ja kitka on suurempi. Kitka mahdollistaa eteenpäin ajamisen pyörällä.” – Opiskelija nro 47

Oikea vaihtoehto (B) keräsi 17,0 % vastauksista. Takarenkaaseen kohdistuva kitkavoima on suurempi ja osoittaa eteenpäin. Pienempi eturenkaaseen vaikuttava kitkavoima puolestaan osoittaa taaksepäin. Perusteluja:

” $F_{\mu 1}$ on suurempi kuin $F_{\mu 2}$, jolloin pyörä kulkee eteenpäin: $F_{\mu 1} - F_{\mu 2}$.” – Opiskelija nro 15

”Takarengas tarvitsee kitkaa päästäkseen eteenpäin ja eturengas pyörii vapaasti, joten $F_{\mu 1}$ on vastakkainen verrattuna $F_{\mu 2}$:een.” – Opiskelija nro 16

”Kumpaankin renkaaseen vaikuttaa kitkavoima. Eturenkaassa se vastustaa etenemistä. Takarenkaassa se on toisen suuntainen, jotta kiihdytys on mahdollista.” – Opiskelija nro 27

” $F_{\mu 1}$ on kitka, joka syntyy kun pyöräilijä polkee eteenpäin, siksi nuoli eteenpäin, sillä se ei vastusta pyöräilijän etenemistä. $F_{\mu 2}$ on vastustava, joten nuoli taaksepäin.” – Opiskelija nro 36

”Takarenkaaseen kohdistuva kitkavoima työntää pyörää eteenpäin ja eturenkaaseen kohdistuva kitkavoima hidastaa liikettä. Kuvassa B voimat ovat näin.” – Opiskelija nro 41

”Eturingas hidastaa hiukan, mutta kokonaisvoima suurempi -> kiihtyy. Takarenkaaseen kohdistuu pyöräilijän voima, jolla pyörä pääsee etenemään hyödyntäen tien ja renkaan välistä kitkaa.” – Opiskelija nro 42

Vaihtoehdon E valitsi 9,4% opiskelijoista. Tässä vaihtoehdossa molempiin renkasiin kohdistuu eteenpäin osoittavat, yhtä suuret kitkavoimat ja pyörään kohdistuu eteenpäin osoittava voima. Tehtävän perustelut olivat hyvin suppeita tai olemattomia, mikä vaikeuttaa opiskelijoiden käsitysten selvittämistä. Itse asiassa pisimmän perustelun kirjoitti opiskelija nro 13, joka oli testin ainoa, joka ei ollut käynyt FY5-kurssia ennen testiä:

”Koska pyörä on ajamassa vaakasuoralla tasolla, \vec{F}_{kok} ja \vec{a} pitäisi olla samassa suunnassa.” – Opiskelija nro 13

Vaihtoehto, jossa eturenkaaseen kohdistuva pienempi kitkavoima osoittaa eteenpäin ja takarenkaaseen kohdistuva taaksepäin (A) oli 5,7%:n mielestä oikea vastaus. Perusteluja:

”Takapyörästä maahan välittyvä voima taaksepäin työntää pyöräilijää eteenpäin suuremmalla voimalla kuin etupyörän vastakkainen voima. Näin ollen pyörä kiihtyy.” – Opiskelija nro 21

”Kitkavoimien suuruuksien $F_{\mu 1}$ ja $F_{\mu 2}$ on oltava erisuuruiset ja -suuntaiset, jotta pyöräilijä pystyy liikkumaan / kasvattamaan vauhtiaan.” – Opiskelija nro 34

”Kitkavoima ei voi olla suurempi kuin pyörää eteenpäin vievä voima. Ja nuolet ovat näihin suuntiin, koska pyörän pyörät pyörivät myötäpäivään.” – Opiskelija nro 45

Tehtävä 12

Opiskelijoiden intuitioon luottava tehtävä menestyi kohtalaisen hyvin. Yhteensä 67,9 % vastasivat yhteenliittyneiden sauvan ja kappaleen alkavan liikua ja pyöriä. Heistä jopa 37,7 prosenttiyksikköä myös osasivat perustella tämän ilmiön liikemäärän ja pyörimismäärän säilymisenä. 13,2 % opiskelijoista käsittivät vain systeemin liikemäärän säilyvän ja 9,4 % olivat sitä mieltä, että systeemillä oli liikemäärä, muttei pyörimismäärää ennen törmäystä. Lisäksi 11,3 % opiskelijoista vastasivat, että sauva ja kappale alkavat vain pyöriä, koska systeemin liikemäärä säilyy.

Tehtävä 13

Tehtävät 13 ja 14 muodostavat yhteisen kokonaisuuden, mutta käsitellään ne tässä vielä erillisinä. Ne jakoivat myös testin toiseksi haastavimman tehtävän sijoituksen suhteellisen vaikeusindeksin perusteella. Mielenkiintoisempiin tuloksiin näistä kahdesta tehtävästä palataan kappaleessa 5.2.

Lieriön vieressä ylämäkeen yhteensä 67,9 % opiskelijoista olivat sitä mieltä, että lieriön kohdistuva kitkavoima osoittaa alamäkeen. Heistä suurin osa (45,3 prosenttiyksikköä) perustelivat kitkan aiheuttavan lieriön vauhdin hidastumisen. 9,4 % perusteli kitkavoiman osoittavan alamäkeen, koska kitkavoima olisi samansuuntainen kuin lieriön kiihtyvyys. Vain 26,4 % opiskelijoista valitsi kitkavoiman osoittavan ylämäkeen ja heistäkin pieni osuus (5,7 prosenttiyksikköä) perusteli suunnan kulmakiihtyvyyden ja momentin suuntien avulla. Joka tapauksessa vain 5,7 % opiskelijoista päättelivät eri perusteluihin nojaten, että kitkavoima oli nolla.

Tehtävä 14

Lieriön vieriminen alamäkeen aiheutti hieman suuremman hajonnan vastauksissa kuin ylämäkitapaus. Nyt oikea vaihtoehto – ylämäkeen – keräsi yhteensä 56,6 % opiskelijoiden vastauksista, mutta heistä vain 5,7 prosenttiyksikköä perustelivat sen oikein. Suurin osuus (43,4 prosenttiyksikköä) oikean vaihtoehdon valinneista perusteli suunnan sillä, että kitkavoima pyrkii hidastamaan lieriön vauhtia. Jälleen yhteensä 5,7 % opiskelijoista olivat sitä mieltä, että kitkavoimaa ei ollut.

Tehtävä 15

Hitausmomenttien vertailu osoittautui odotetusti haastavaksi ja käsityksiä jakavaksi, sillä se nojasi ehkä turhankin paljon ulkoa osaamiseen. Kolme opiskelijaa jättivät vastaamatta tähän tehtävään. Joka tapauksessa oikea järjestyks sai 32,0% vastaajista puolelleen. Vaihtoehdot C ja D, joiden mukaan kappaleet olivat kuvassa 3 kasvavassa hitausmomenttien järjestyksessä, keräsivät molemmat 28,0% vastauksista. Vaihtoehto A, jonka mukaan ympyrärataa kiertävän pistemäisen kappaleen hitausmomentti on suurempi kuin samanmassaisen ja -säteisen onton lieriön, oli 8,0%:n mielestä oikea vaihtoehto. 4,0% vastaajista väittivät kaikkien kappaleiden hitausmomenttien olevan yhtäsuuria.

5.2 Tulokset aihealueittain

Testi ja sen monivalintakysymykset on jaettu aihealueisiin samoin kuin kappaleessa 4.2. Opiskelijoiden vastauksia käsitellään tässä kappaleessa poikittaissuuntaisemmin, eli katsotaan, miten yksittäiset opiskelijat ovat keskimäärin pärjänneet eri aihealueissa. Opiskelijoiden menestystä eri aihealueissa mitataan laskemalla yksittäisten opiskelijoiden oikeat vastaukset aihealueittain. Tulokset on eritelty taulukossa 4 sen perusteella, onko opiskelija vastannut oikein kaikkiin, vähintään yhteen, muttei kaikkiin vai ei yhteenkään aihealueen kysymyksistä. Esimerkiksi, jos opiskelija on vastannut oikein kysymykseen numero 1, mutta väärin kysymykseen numero 10, hänet luetaan taulukossa 4 kyseisen aihealueen kohdalla sarakkeeseen 'osa oikein'.

Kiertokulma, kulmanopeus ja nopeus

Testin parhaiten osattu tehtävä, numero 1, vaikutti suuresti oikeiden vastausten määrään tässä aihealueessa. Jokainen opiskelija, joka oli vastannut oikein kysymykseen numero 10 oli vastannut oikein myös ensimmäiseen tehtävään. Näin ollen taulukossa 4 kaikki sarakkeen 'osa oikein' opiskelijat olivat vastanneet väärin vain kysymykseen 10. Toisin sanoen voidaan päätellä, että nopeuden, kulmanopeuden ja kiertokulman yhdistäminen oli osattu huomattavasti paremmin pyörimisliikkeessä kuin suoraviivaisessa liikkeessä.

Taulukko 4: Yksittäisten opiskelijoiden menestys testissä aihealueittain (A = kiertokulma, kulmanopeus ja nopeus, B = hitausmomentti, C = pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen, D = pyörimisenergia, vierimisen energiataarkastelu ja energian säilymlaki, E = vierimisehto, F = kitkavoima vierimisessä); 'osa oikein' tarkoittaa niitä opiskelijoita, jotka ovat vastanneet oikein vähintään yhteen aihealueen kysymyksistä, mutteivät kaikkiin

Aihealue	Kysymykset	Kaikki oikein		Osa oikein		Kaikki väärin	
		lkm	%	lkm	%	lkm	%
A	1, 10	6	11,3	29	54,7	18	34,0
B	2, 15	11	20,8	10	18,9	32	60,4
C	7, 9, 12	1	1,9	29	54,7	23	43,4
D	8, 5, 6	5	9,4	32	60,4	16	30,2
E	4	10	18,9	–	–	43	81,1
F	3, 11, 13, 14	1	1,9	12	22,6	40	75,5

Hitausmomentti

Hitausmomenttia käsittelevät tehtävät oli osattu keskimäärin yhtä hyvin. Kuitenkin yli puolet (60,4 %) opiskelijoista ei osannut vertailla annettujen kappaleiden hitausmomentteja tai perustella, mistä suureista hitausmomentti riippuu. 16:sta tehtävään numero 15 oikein vastanneesta opiskelijasta 11 oli myös vastannut oikein tehtävään numero 2. Hitausmomentin 'teorian' osaminen tehtävässä 2 siis näyttäisi vaikuttavan positiivisesti samankaltaisten kappaleiden hitausmomenttien järjestämiseen. On kuitenkin syytä huomioda, että tehtävässä numero 15 ei vaadita perusteluja, joten sen voi saada oikein myös arvaamalla. Tätä tukee erityisesti kyseisen tehtävän vastausten suuri hajonta (ks. kappale 5.1).

Pyörimismäärä ja pyörimismäärän säilyminen

Pyörimismäärän määrittäminen abstraktissa suoraviivaisessa liikkeessä (tehtävä numero 9) osoittautui opiskelijoille haastavaksi. Sitä vastoin intuitiiviseen mielikuvaan perustuva tehtävä numero 12 oli osattu paljon paremmin. 20:sta tehtävään numero 12 oikein vastanneista vain kaksi oli osannut vastata oikein myös tehtävään numero 9. Pyörimismäärän säilymistä käsittelevissä tehtävissä menestys oli hieman parempaa: 20:sta tehtävään numero 12 oikein vastanneista kahdeksan oli hallinnut pyörimismäärän säilymlain myös tehtävässä numero 7.

Pyörimisenergia, vierimisen energiatarkestelu ja energian säilymislaki

Tehtävä numero 8 käsitteli testin ainoana tehtävänä pyörimisenergian riippuvuutta hitausmomentista. Tehtävät 5 ja 6 liittyivät toisiinsa ja niissä sovellettiin vierivään kappaleeseen energian säilymislakia. Yhteensä 13 opiskelijaa vastasi oikein molempiin tehtäviin. Mielenkiintoisin tulos on, että kaikista 30:sta tehtävään numero 5 oikein vastanneista opiskelijoista 13 väittivät myös keilapallojen vauhtien olevan yhtäsuuret tason alapäässä.

Vierimisehto

Tehtävä numero 4 oli testin ainoa, jossa vierimisen määritelmää, eli vierimisehtoa kysyttiin suoraan. Kaikki aihealueen kannalta oleellinen tulostieto on käsitelty kysymyksen numero 4 yhteydessä kappaleessa 5.1. Vierimisehtoa käytettiin epäsuorasti kysymyksissä numero 3, 5, 6, 8, 11, 13 ja 14.

Kitkavoima vierimisessä

Kitkavoiman luonne vierimisessä osoittautui testin ylivoimaisesti vaikeimmaksi aihealueeksi. Tehtävä numero 3 sekä osaltaan 13 ja 14 käsittelivät kitkavoiman olemassaoloa. Vain kolme opiskelijaa oli valinnut kitkavoiman olevan nolla joko tehtävässä numero 13 tai 14, mutta heistä yksikään ei valinnut kitkavoiman momentin olevan nolla tehtävässä numero 3. Tehtävissä numero 11, 13 ja 14 vierivä kappale oli kiihtyvässä liikkeessä ja kitkavoiman suuntaa kysyttiin. Polkupyörätehtävän (kysymys numero 11) perusteella kitka nähtiin yleisesti liikkeelle 'pahana' asiana (vaihtoehdot D ja F). Vain pieni osa (22,7%) opiskelijoista oli sitä mieltä, että kitkavoima voi olla erisuuntainen etu- ja takarenkaissa. Heistäkin 5,7 prosenttiyksikköä oli valinnut väärät suunnat.

Tehtävät numero 13 ja 14 olivat yhdistelmä, joka käsitteli kitkavoiman suuntaa kiihtyvässä vierimisessä. Yksittäisten opiskelijoiden vastaukset ovat mielenkiintoisinta antia näistä tehtävistä. Vain 18,9% vastaajista oli valinnut kitkavoimien osoittavan samaan suuntaan sekä ylä- että alamäessä. Heistä 5,7 prosenttiyksikköä oli valinnut ylämäen ja loput alamäen suunnan. Muiden (poislukien ne, jotka pitivät kitkavoimaa olemattomana) mielestä kitkavoima siis muutti suuntaansa eri suuntiin mentäessä. Käsitys kitkavoiman luonteesta oli myös selkeästi näkyvissä: tehtävässä numero 13 yhteensä 50,9% sekä

tehtävässä numero 14 yhteensä 52,8 % opiskelijoista perustelivat vastauksensa sillä, että kitkavoima hidastaisi lieriön vauhtia. Toisin sanoen kitkavoima nähtiin jälleen liikkeelle haitallisena, vastustavana voimana. Molemmissa tehtävissä vain pieni osa opiskelijoista (9,4 % ja 7,5 % vastaavasti) perustelivat valintansa sillä, että kitkavoima ja lieriön kiihtyvyys olisivat yhdensuuntaiset. Toisin sanoen näitä opiskelijoita lukuunottamatta sylinteriä käsiteltiin vierivänä kappaleena – suoraviivaisen liikkeen ja pyörimisliikkeen mallit yhdistäen – eikä vain liikkuvana kappaleena.

6 Johtopäätökset

Tutkimuksesta tehdyt johtopäätökset ovat kaksiosaiset. Ensin vastataan luvussa 3 esitettyihin tutkimuskysymyksiin tutkimustulosten perusteella. Tämän jälkeen opiskelijoilla havaituista harhakäsityksistä tehdään yhteenveto, jossa vertaillaan tutkimuksessa saatuja havaintoja aiempien tutkimusten (luku 2) havaintoihin.

Vastaus tutkimuskysymyksiin

Pyörimismäärän käsite suoraviivaisessa liikkeessä osattiin paremmin intuitiivista tilannekuvaa vaativassa tehtävässä (tehtävä numero 12) kuin abstraktissa tapauksessa (tehtävä numero 9). Toisaalta ensin mainitussa tehtävässä vain noin puolet systeemin tilanteen kehittymistä oikein kuvailleista opiskelijoista käsittivät sekä pyörimismäärän että liikemäärän säilyvän. Loput heistä arvelivat systeemissä olevan nollasta eroavana vain liikemäärää. Abstraktissa tapauksessa suurin osa opiskelijoista väittivät kappaleen pyörimismäärän olevan nolla tai määräämätön, koska kappale on pistemäinen tai koska se ei ole ympyräradalla. Niistä opiskelijoista, jotka valitsivat oikean vaihtoehdon, jopa puolet perusteli sen virheellisesti käyttäen ympyräliikkeen yhtälöä kappaleen kiertokulman muutoksen sijaan.

Kitkavoiman olemassaolo, suunta ja luonne vierimisessä aiheuttivat opiskelijoille suhteellisen paljon virheellisiä käsityksiä. Tilanteessa, jossa kappale vierii muuttumattomalla nopeudella (tehtävä numero 3) noin neljännes väitti kappaleen pyörimisen vaativan aina nollasta eroavan kitkavoiman momentin. Tämä kertoo myös osaltaan ongelmista pyörimisen liikeyhtälön hallinnassa. Vain pieni osa (3,8 %) opiskelijoista tiesi kitkavoiman momentin olevan nolla, koska kappaleen kulmakiihtyvyyksikin oli nolla. Toisaalta yhtä suuri osuus opiskelijoista perusteli momentin nolaksi, koska kitkavoima hidastaisi kappaleen pyörimistä.

Erityisesti kiihtyvässä liikkeessä kitka nähtiin yleisesti aina liikettä hidastavana ja liikkeelle haitallisena asiana. Kiihtyvää vierimisliikettä käsittelevissä tehtävissä (tehtävät numero 11, 13 ja 14) noin puolet opiskelijoista vastasivat kitkavoiman hidastavan kappaleen tai kappaleiden liikettä pinnan suhteen, vaikka ne vierivät liukumatta. Tämä näkyi runsasmääräisenä erityisesti polkupyörätehtävän (11) kirjallisissa perusteluissa.

Kitkavoiman suunta vierimisessä jakoi opiskelijoiden käsityksiä vahvasti. Al-

le neljäsosa uskoi, että kiihtyvässä liikkeessä olevan polkupyörän renkaisiin kohdistuvat tienpinnan kitkavoimat voivat olla vastakkaissuuntaiset. Oikean vastauksen valinneilla perustelut olivat pääsääntöisesti ainakin hyvin lähellä fysikaalisesti oikeaa, vaikkakin käsitys kitkan hidastavasta vaikutuksesta oli paikoin näkyvissä. Ylä- ja alamäkeen vierivän sylinterin ja mäen välisen kitkavoiman suunta aiheutti myös runsaasti harhakäsityksiä. Alle viidesosa opiskelijoista uskoi kitkavoiman olevan samansuuntainen sekä ylä- että alamäessä. Jälleen perusteluista kävi ilmi käsitys kitkavoiman hidastavasta luonteesta. Tulosten perusteella suurin osa opiskelijoista ei osannut yhdistää kappaleen kulmakiihtyvyyttä ja kappaleeseen vaikuttavaa momenttia toisiinsa. Toisaalta harhakäsitys voi syntyä myös pelkän suoraviivaisen liikkeen mallien käyttämisestä: jos pyörivä lieriö korvattaisiin esimerkiksi liukuvalla laatikolla, olisivat kitkavoimien suunnat, kuten suurin osa opiskelijoista oli vastannut. Tällöin kyseessä on kuitenkin liukukitka eikä lepokitka.

Puhtaassa pyörimisliikkeessä kiertokulman käsite osattiin hyvin. Suurimmalla osalla opiskelijoista käsitys jäykän kappaleen osien kiertymisestä oli oikea. On huomattava, että kuitenkin noin neljäsosa käsitti jäykän kappaleen eri pisteiden kulmanopeuksien riippuvan pisteiden etäisyyksistä pyörimisakselista. Suoraviivaisessa liikkeessä kulmanopeuden soveltaminen oli huomattavasti hankalampaa. Tilanne, jossa muuttumattomalla nopeudella (suunta ja suuruus) liikkuvan kappaleen kulmanopeutta origon suhteen piti kuvailla, melkein puolet vastasivat kulmanopeuden olevan nolla tai määräämätön. He perustelivat vastauksensa sillä, että kappale ei ollut ympyräradalla. Sitä vastoin kulmanopeuden muutosta oikein kuvailleista osa päätyi edelleen perustelemaan valintansa vain ympyräliikkeelle pätevällä yhtälöllä. Vain 11,3 % opiskelijoista osasi käyttää perustelussaan kulmanopeuden määritelmää kiertokulman muutoksena ajan suhteen.

Vierimisehdon määrittely oli lukiolaisilta hukassa, mikä voi johtua siitä, että he eivät osanneet hahmottaa suhteellisen nopeuden käsitettä. Vierimisehdolla voidaan tarkoittaa sekä matemaattista että sanallista määritelmää. Ensiksi mainittu yhdistää kappaleen massakeskipisteen nopeuden kappaleen kulmanopeuteen pyörimisakselin suhteen. Jälkimmäinen kertoo, että vieriminen on sellaista etenemistä, jossa kappale ei liu'u. Juurikin jälkimmäisen määritelmän osaaminen tuotti vaikeuksia opiskelijoille. Alle viidesosa tiesi kappaleen ja alustan kosketuspisteen olevan paikoillaan alustan suhteen.

Pyörimisenergian riippuvuus hitausmomentista ja kulmanopeudesta osattiin kohtalaisen hyvin. Ongelmat johtuivat pääsääntöisesti energian säilymlain hallitsemisesta sekä todennäköisesti yhden tehtävän sekavasta tehtävänan-

nosta ja/tai tehtävänannon huolimattomasta lukemisesta. Energian säilymlain soveltamisessa selkein harhakäsitys oli, että pyöriminen kasvattaa kappaleen kokonaisenergiaa, vaikka kokonaisenergia oli alussa kiinnitetty.

Hitausmomentin 'teoria' oli osattu hyvin, sillä 60,4% opiskelijoista tiesivät kappaleen hitausmomentin riippuvan suoraan massasta ja neliöllisesti sen etäisyydestä. Teorian soveltaminen kappaleiden hitausmomenttien vertailuun oli sen sijaan heikkoa myös niillä, jotka osasivat teorian. Tehtävä, jossa kahden samanmassaisen ja -säteisen sylinterin hitausmomentteja piti vertailla (tehtävä numero 2), kumpikin sylintereistä keräsi yhtä suuren kannatuksen suuremman hitausmomentin omaavaksi, vaikka niiden massat olivat jakautuneet eri tavoin. Yleisesti hitausmomentin katsottiin olevan kulmanopeudesta riippumaton.

Pyörimismäärää ja liikemäärää yhdistelevät tehtävät olivat haasteellisia opiskelijoille. Vierimisehdon osaamista luotaavassa tehtävässä (numero 3) puolet opiskelijoista valitsivat vaihtoehdot, joissa kappaleen pyörimismäärä ja liikemäärä saattoivat muuttua toisistaan riippumatta, vaikka vierimisehto toteutuisikin. Pyörimismäärän säilymlain voimassaolo muuttuvan massan tapauksessa (tehtävä numero 7) jakoi vahvasti opiskelijoiden käsityksiä. Suurin osa niistä opiskelijoista, jotka vastasivat oikein kappaleen kulmanopeuden pienentyvän massan kasvaessa väittivät pyörimismäärän muuttuvan tilanteessa, vaikka kappaleeseen ei kohdistunut ulkoisia momentteja. Suoraviivaisessa liikkeessä pyörimis- ja liikemäärän säilyminen osoittivat samansuuntaisia tuloksia kuin kulmanopeuden soveltamisessa. Reilu kolmasosa opiskelijoista tiesivät liikemäärän ja pyörimismäärän säilyvän täysin kimmottomassa törmäyksessä (tehtävä numero 12). Kuitenkin reilu viidesosa totesivat vain liikemäärän säilyvän tai ettei systeemissä ollut pyörimismäärää ennen törmäystä. Tämä voi johtua siitä, etteivät he mieltäneet pyörimismäärää olevan suoraviivaisessa liikkeessä.

Yhteenveto ja vertailu aiempiin tutkimuksiin

Lukio-opiskelijoilla teetetyn monivalintatestin perusteella opiskelijoilla oli eniten harhakäsityksiä ja vaikeuksia kitkavoiman olemassaoloa, luonnetta ja suuntaa käsittelevissä aiheissa, pyörimisliikkeen mallien soveltamisessa suoraviivaiseen liikkeeseen sekä vierimisliikkeessä. Jotkin harhakäsitykset vastasivat aiemmissä tutkimuksissa havaittuja.

Kitkavoima nähtiin luonteeltaan yleisesti liikkeelle haitallisena voimana, vaik-

ka se olisikin ainoa liikkeen muutoksen mahdollistava voima. Tämä havainto on samankaltainen kuin Dumanin, Demircin ja Şekercioğlun sekä Carvalhon ja Sousan tutkimuksissa ([4, 8]). Carvalhon ja Sousan tutkimusartikkelista lainatut tehtävät tuottivat tässä tutkimuksessa samankaltaisia tuloksia: kitkavoima nähtiin liikettä vastustavana voimana ja sen suunta oletettiin tämän vuoksi liikkeelle vastakkaiseksi. Kitkavoiman momentin vaikutuksessa myös Hierrezuelon ja Carneron tutkimuksessa ([12]) havaittu ”pyöräminen vaatii momentin”-perustelu oli selkeästi näkyvissä.

Eri tehtävien perusteella opiskelijat käyttivät usein ympyräliikkeessä olevalle kappaleelle pätevää yhtälöä $v = \omega r$ virheellisesti tilanteissa, joissa kappale ei ollut ympyräradalla. Tämän havainnon tekivät myös Mashood ja Singh ([5]). Kulmanopeuden ymmärtäminen virheellisesti vain suoraviivaisen nopeuden ja säteen avulla oli huomattavasti yleisempää kuin kulmanopeuden ymmärtäminen kiertokulman muutoksena ajan suhteen.

Suoraviivaisessa liikkeessä yleinen harhakäsitys oli kulmanopeuden ja pyörimismäärän olevan nolla tai määräämätön, koska systeemissä ei ollut pyöriviä kappaleita tai ne eivät olleet ympyräradalla. Tämä havainto vastaa Closen ja Heronin sekä Williamsonin, Torres-Isean ja Kletzingin tutkimuksissa tehtyjä havaintoja ([7, 11]).

Vierimisliikkeessä ylivoimaisesti eniten vaikeuksia tuottivat kitkaan liittyvät käsitteet sekä vierimisehdon osaaminen. Vierimisehdossa harhakäsitykset olivat samankaltaisia kuin Dumanin, Demircin ja Şekercioğlun havaitsemat.

Hitausmomentista ei löytynyt merkittävässä määrin samoja harhakäsityksiä kuin Dumanin, Demircin ja Şekercioğlun tutkimuksessa: havaintojen perusteella suurin osa opiskelijoista tiesi hitausmomentin riippuvan massasta ja olevan riippumaton kulmanopeudesta.

Viitteet

- [1] Opetushallitus, määräys 33/011/2003: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*
- [2] Opetushallitus, määräys 60/011/2015: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015*
- [3] Pauli Hytölä: *Pyörimisliikkeen käsittely lukion oppikirjoissa*, LuK-tutkielma, Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2014
- [4] İsmail Duman, Neşet Demirci, Ayşe Gül Şekercioğlu: *University students' difficulties and misconceptions on rolling, rotational motion and torque concepts*, International Journal on New Trends in Education and Their Implications, Vol. 6, Issue 1, 2015
- [5] K. K. Mashood, Vijay A. Singh: *An inventory on rotational kinematics of a particle: unravelling misconceptions and pitfalls in reasoning*, European Journal of Physics, Vol. 33, Number 5, 2012; doi:10.1088/0143-0807/33/5/1301
- [6] K. K. Mashood, Vijay A. Singh: *Rotational kinematics of a particle in rectilinear motion: Perceptions and pitfalls*, American Journal of Physics, Vol. 80, Issue 8, 2012, doi:10.1119/1.4721641
- [7] Hunter G. Close, Paula R. L. Heron: *Student understanding of the angular momentum of classical particles*, American Journal of Physics, Vol. 79, Issue 10, 2011; doi:10.1119/1.3579141
- [8] Paulo Simeão Carvalho, Adriano Sampaio e Sousa: *Rotation in secondary school: teaching the effects of frictional force*, Physics Education, Vol. 40, Number 3, 2005; doi:10.1088/0031-9120/40/3/007
- [9] Lorenzo G. Rimoldini, Chandralekha Singh: *Student understanding of rotational and rolling motion concepts*, Physical Review Special Topics – Physics Education Research, Vol. 1, Issue 1, 2005; doi:10.1103/PhysRevSTPER.1.010102
- [10] Chandralekha Singh: *When physical intuition fails*, American Journal of Physics, Vol. 70, Issue 11, 2002; doi:10.1119/1.1512659
- [11] J. Charles Williamson, Ramon O. Torres-Isea, Craig A. Kletzing: *Analyzing linear and angular momentum conservation in digital videos of*

puck collisions, American Journal of Physics, Vol. 68, Issue 9, 2000;
doi:10.1119/1.1302325

[12] J. Hierrezuelo, C. Carnero: *Sliding and rolling: the physics of a rolling ball*, Physics Education, Vol. 30, Number 3, 1995; doi:10.1088/0031-9120/30/3/009

[13] Jacqueline Menigaux: *Students' reasoning in solid mechanics*, Physics Education, Vol. 29, Number 4, 1994; doi:10.1088/0031-9120/29/4/011

[14] Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, John Liu: *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Third Edition, McGraw-Hill, 2009

Liite A Monivalintatesti

Pyörimisliike

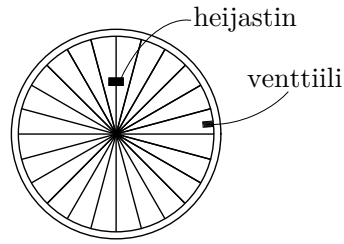
tutkimus lukio-oppilaiden tiedoista

Ohjeet:

- Lue jokainen kysymys huolellisesti läpi.
- Osassa tehtävistä valitsemasi vastausvaihtoehto (iso kirjain edessä tai kuvavaihtoehtodon alla) on perusteltava jollakin annetuista perusteluvaihtoehdoista (edessä numero).
- Perustelu voidaan vaatia myös kirjallisena, jolloin vastaukseksi riittää muutaman virkkeen mittainen perustelu annettuun tekstikenttään.
- Jokaisessa tehtävässä on tasan yksi oikea vastaus ja yksi oikea perustelu, jos perusteluvaihtoehdot on annettu.
- Merkitse tehtäväpaperiin mielestäsi oikea vaihtoehto **ympyröimällä** vaihtoehtodon kohdalla oleva kirjain ja perusteluvaihtoehtodon numero.
- Käytä merkintöjen tekemiseen **lyijykynää** (HB tai nro 2) ja tarvittaessa korjaa pieleen menneet merkinnät **pyyhekumilla**.
- Tutkimukseen vastataan nimettömänä.
- Voit tehdä tehtäväpaperiin omia merkintöjä, kunhan ne eivät sekoita vastaustasi tai perustelujasi.

Kaikissa tehtävissä voit olettaa vastusvoimien olevan merkityksettömän pieniä, ellei tehtävässä toisin sanota.

Kysymykset alkavat seuraavalta sivulta.



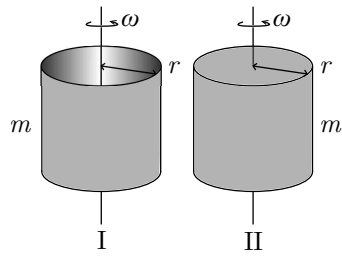
Kuva 1: Kuva kysymykseen 1

1. Polkupyörän vanne pyörii yhtä kierrosta vastapäivään. Vanteen kehällä sijaitsee venttiili ja puoleenväliin yhtä pinnaa on asennettu heijastin. Mikä seuraavista väittämistä on oikein?

- A. Venttiili ja heijastin kulkevat kierroksen aikana yhtä pitkän matkan,
- B. Venttiili ja heijastin liikkuvat koko ajan yhtä suurella nopeudella,
- C. Venttiili ja heijastin kiertävät kierroksen aikana yhtä suuren kiertokulman,
- D. Venttiilin kulmanopeus on suurempi kuin heijastimen,
- E. Venttiilin kulmanopeus on pienempi kuin heijastimen,

koska...

1. polkupyörän vanne on jäykkä kappale ja jäykän kappaleen kaikki osat liikkuvat samalla nopeudella.
2. polkupyörän vanne on jäykkä kappale ja jäykän kappaleen kaikki osat kiertävät pyörimisakseliin nähden aina yhtä suuren kulman.
3. Kulmanopeus riippuu etäisyydestä pyörimisakselista yhtälön $\omega = v/r$ mukaisesti.



Kuva 2: Kuva kysymykseen 2

2. Kaksi samanmassaista ja säteiltään yhtä suurta ympyrälieriötä pyörivät pituusakselien sa ympäri. Lieriö I on ontto ja lieriö II on umpinainen siten, että sen massa on jakautunut tasaisesti sen koko tilavuuteen. Kumman lieriön hitausmomentti on suurempi?

- A. Lieriön I,
- B. Lieriön II,
- C. Kummankin lieriön hitausmomentti on yhtä suuri,
- D. Ei voi sanoa,

koska...

1. hitausmomentti on suoraan verrannollinen lieriön säteeseen.
2. hitausmomentti on suoraan verrannollinen lieriön massaan.
3. hitausmomentti on suoraan verrannollinen lieriön massaan ja säteeseen.
4. hitausmomentti on verrannollinen massaan ja massan pyörimisakselista mitatun etäisyyden neliöön.
5. hitausmomentti on suoraan verrannollinen lieriön kulmanopeuteen.

3. Sylinteri vierii liukumatta vaakasuoralla alustalla vakionopeudella. Mikä seuraavista väitteistä on tosi?

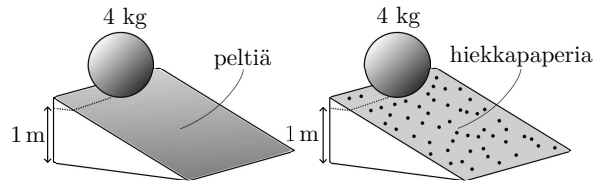
- A.** Sylinteriin kohdistuu kitkavoiman momentti,
- B.** Sylinteriin ei kohdistu kitkavoiman momenttia,
- C.** Sylinterin ja pinnan välinen kitkavoima pienentää sylinterin pyörimismäärää, mutta sylinterin liikemäärä pysyy vakiona,
- D.** Jos alusta muuttuisi yhtäkkiä kitkattomaksi, muuttuisi sylinterin vieriminen kokonaan liukumiseksi,

koska...

1. pyöriminen vaatii aina nollasta eroavan momentin.
2. pyörimismäärä ja liikemäärä ovat toisistaan riippumattomia.
3. kitkavoimat hidastavat kappaleiden liikettä.
4. sylinteri pyörii vakiikulmanopeudella.

4. Mikä seuraavista tilanteista kuvaa parhaiten vierimisehdon toteutumista täysin pyöreän pallon liikuessa vaakasuoralla alustalla?

- A.** Alustaa koskettavan pallon pisteen nopeus alustan suhteen on nolla.
- B.** Jokainen piste pallossa liikkuu alustan suhteen vakionopeudella.
- C.** Riittää, että pallo pyörii ja liikkuu suoraviivaisesti yhtä aikaa.
- D.** Alustaa koskettavan pallon pisteen nopeus alustan suhteen on yhtä suuri kuin pallon pyörimisakselin nopeus.
- E.** Riittää, että pallon pyörimisakseli liikkuu suoraviivaisesti.



Kuva 3: Kuva kysymyksiin 5 ja 6

5. Kaksi 4 kg:n massaista keilapalloa lasketetaan alas pitkin kahta kaltevaa tasoa. Molempien tasojen lähtökorkeus on 1 m. Ensimmäinen taso on kiillotettua peltiä, jossa keilapallo liukuu kitkatta koko matkan alas saakka. Toinen taso on päällystetty hiekkapaperilla, joka saa keilapallon vierimään liukumatta alas saakka (vierimisvastus on olematon). Kummassa tilanteessa keilapallon kokonaisenergia on suurempi tason alapäässä?

- A. Peltisen tason tilanteessa,
- B. Hiekkapaperilla päällystetyn tason tilanteessa,
- C. Kummassakin tapauksessa kokonaisenergia on yhtä suuri,

koska...

1. osa vierivän keilapallon potentiaalienergiasta muuttuu pyörimisenergiaksi.
2. keilapallojen lähtökorkeus on sama.
3. vierivä keilapallo etenee pidemmälle kuin liukuva pallo.
4. kitkatta liukuva keilapallo saa alamäessä suuremman vauhdin kuin vierivä.
5. vierimisenergia on pyörimisenergian ja etenemisen liike-energian summana suurempi kuin pelkkä etenemisen liike-energia.

6. Järjestely on sama kuin tehtävässä 5. Kummassa tilanteessa keilapallon vauhti on suurempi tason alapäässä?

- A. Peltisen tason tilanteessa,
- B. Hiekkapaperilla päällystetyn tason tilanteessa,
- C. Kummassakin tapauksessa vauhti on yhtä suuri,

koska...

1. osa vierivän keilapallon potentiaalienergiasta muuttuu pyörimisenergiaksi.
2. keilapallojen lähtökorkeus on sama.
3. valitsemassani vaihtoehdossa keilapallon kokonaisenergia on suurempi.

7. Ontto sylinteri pyörii pystysuoran pituusakselinsa ympäri kulmanopeudella ω . Sylinteriä aletaan hitaasti täyttää hiekalla. Mitä sylinterin pyörimisliikkeelle tapahtuu?

- A. Kulmanopeus pienenee,
- B. Kulmanopeus ei muutu,
- C. Kulmanopeus kasvaa,

koska...

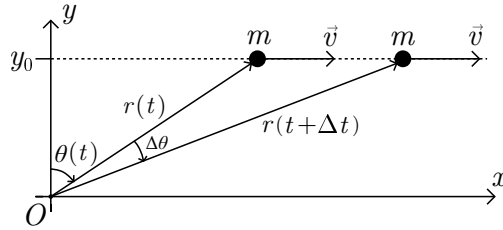
1. hiekan ja sylinterin yhteenlaskettu pyörimismäärä ei säily.
2. hiekan ja sylinterin yhteenlaskettu pyörimismäärä säilyy.

8. Kaksi samankokoista ja -massaista palloa vierivät ensin vaakasuoralla pinnalla yhtä suurilla nopeuksilla ja alkavat sitten vieriä ylämäkeen. Pallon I hitausmomentti on kaksi kertaa niin suuri kuin pallon II. Kumpi palloista vieriä pidemmälle ylämäkeen?

- A. Molemmat pallot vierivät yhtä pitkälle ylämäkeen,
- B. Pallo I,
- C. Pallo II,
- D. Ei voi sanoa,

koska...

1. pallojen nopeudet olivat alussa samat.
2. pyörimisenergiat olivat alussa samat.
3. pyörimisenergia on suoraan verrannollinen hitausmomenttiin.
4. pyörimisenergia muuttuu potentiaalienergiaksi sitä hitaammin, mitä suurempi on hitausmomentti.
5. vastaus riippuu mäen jyrkkyydestä.



Kuva 4: Kuva kysymyksiin 9 ja 10

9. m -massainen pistemäinen kappale liikkuu x -akselin suuntaisesti muuttumattomalla nopeudella \vec{v} . Origo ei sijaitse kappaleen liikeradalla. Ajanhetkellä $t = 0$ s kappale on pisteessä $(0, y_0)$. Origosta kappaleeseen piirretty jana muodostaa y -akselin kanssa ajan suhteen muuttuvan kulman $\theta(t)$. Mikä seuraavista väitteistä on tosi?

- A. Origossa sijaitsevan tarkastelijan näkökulmasta kappaleen pyörimismäärä origon suhteen on nolasta eroava,
- B. Origossa sijaitsevan tarkastelijan näkökulmasta kappaleen pyörimismäärä origon suhteen on nolla,
- C. Ei kumpikaan edellisistä,

koska...

1. kappaleen kulmanopeus origon suhteen on $\omega = v/r$.
2. kappale ei ole ympyräradalla.
3. kulma θ muuttuu ajan kuluessa.
4. pyörimismäärää ei voi määrittellä tässä tilanteessa.
5. kappale on pistemäinen.

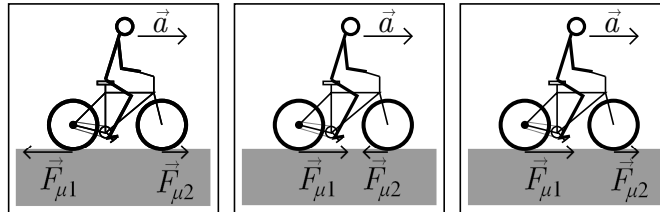
10. Järjestely on sama kuin tehtävässä 9. Origossa sijaitsevan tarkastelijan näkökulmasta mitä tapahtuu kappaleen kulmanopeudelle origon suhteen ajan kuluessa?

- A. Se on vakio nolla,
- B. Se pienenee,
- C. Se kasvaa,
- D. Ei mikään edellisistä,

koska...

1. kappaleen ratasäde r kasvaa ajan kuluessa ja $\omega = v/r$.
2. kappale on pistemäinen.
3. kappale etääntyy origosta koko ajan.
4. kappale ei ole ympyräradalla.
5. koska kiertokulman muutos $\Delta\theta$ pienenee ajan kuluessa ja $\omega = \Delta\theta/\Delta t$.

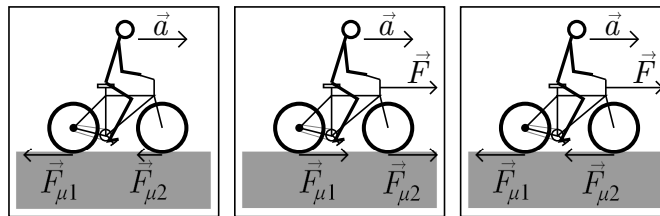
11. Polkupyöräilijä ajaa vaakasuoralla tieosuudella ja kiihdyttää vauhtiaan tasaisesti. Kuvissa $\vec{F}_{\mu 1}$ on takarenaan ja $\vec{F}_{\mu 2}$ eturenkaan sekä tienpinnan välinen kitkavoima. Huomaa voimien keskinäiset suuruuserot! Mikä seuraavista piirroksista vastaa parhaiten polkupyörään kohdistuvia, tienpinnan suuntaisia voimia?



A.

B.

C.

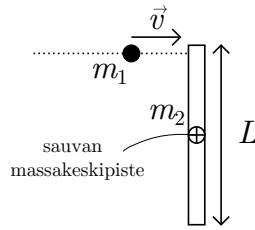


D.

E.

F.

Perustelut:



Kuva 5: Kuva kysymykseen 12

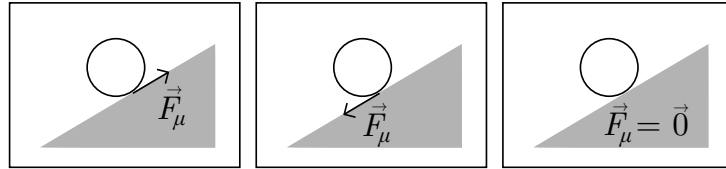
12. Kuvassa 5 on esitetty ylhäältä päin kuvattuna pistemäinen kappale (massa m_1) ja sauva (massa m_2 ja pituus L), jotka ovat vaakasuoran tason päällä. Sauvan massakeskipiste sijaitsee sauvan puolivälissä. Alussa sauva on paikoillaan ja pistemäinen kappale liikkuu vakionopeudella \vec{v} . Törmäyksessä sauva ja kappale takertuvat toisiinsa. Mitä tapahtuu törmäyksen jälkeen? Alusta on kitkaton.

- A. Sauva ja kappale eivät liiku mihinkään,
- B. Sauva ja kappale liikkuvat yhdessä kappaleen alkuperäiseen liikesuuntaan,
- C. Sauva ja kappale alkavat pyöriä niiden yhteisen massakeskipisteen ympäri,
- D. Sekä B että C ovat oikein,
- E. Sauva ja kappale liikkuvat pyörimättä kappaleen alkuperäiseen liikesuuntaan,

koska...

1. törmäys oli täysin kimmoisa.
2. sauva-kappale-systeemillä oli liikemäärä ennen törmäystä, muttei pyörimismäärää.
3. sauva-kappale-systeemin pyörimismäärä säilyy.
4. sauva-kappale-systeemin liikemäärä säilyy.
5. sekä sauva-kappale-systeemin pyörimismäärä että liikemäärä säilyvät.

13. Umpinainen ympyrälieriö, massa 5 kg ja säde 1 m, vierii liukumatta ylös kaltevaa tasoa. Lieriön vauhti hidastuu. Missä kuvassa lieriöön kohdistuva kitkavoima \vec{F}_μ on oikein?



A.

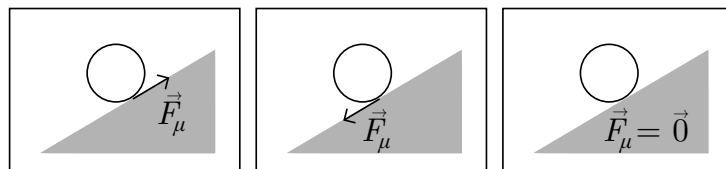
B.

C.

koska...

1. lieriö vierii liukumatta.
2. kitkavoiman momentti ja lieriön kulmakiilhtyvyys ovat yhdensuuntaiset.
3. kitkavoima ja lieriön kiihtyvyys ovat yhdensuuntaiset.
4. lieriö ei voi vieriä ylämäkeen, jos siihen ei kohdistu ylämäkeen osoittavia voimia.
5. lieriön vauhti hidastuu kitkan vaikutuksesta.

14. Järjestely on sama kuin tehtävässä 13. Lieriö pysähtyy lopulta ja alkaa vieriä liukumatta alaspäin kaltevaa tasoa. Lieriön vauhti kasvaa. Missä kuvassa lieriöön kohdistuva kitkavoima \vec{F}_μ on oikein?



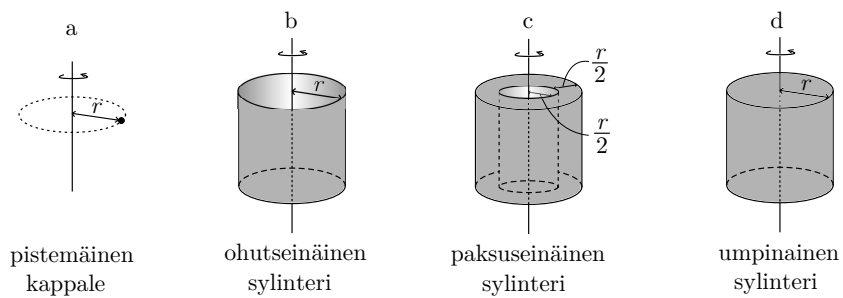
A.

B.

C.

koska...

1. lieriö vierii liukumatta.
2. kitkavoima pyrkii hidastamaan lieriön vauhtia.
3. kitkavoima ja lieriön kiihtyvyys ovat yhdensuuntaiset.
4. kitkavoiman momentti ja lieriön kulmakiilhtyvyys ovat yhdensuuntaiset.
5. lieriön vauhti kasvaa.



Kuva 6: Kuva kysymykseen 15

15. Kuvassa 6 jokaisen kappaleen massa on m . Järjestä kappaleiden hitausmomentit suuruusjärjestykseen.

- A. $J_a > J_b = J_c > J_d$
- B. $J_a = J_b > J_c > J_d$
- C. $J_a = J_b < J_c < J_d$
- D. $J_a < J_b = J_c < J_d$
- E. $J_a = J_b = J_c = J_d$

Kysymykset päättyivät.

Tarkista vielä, että olet vastannut kaikkiin kysymyksiin, ennen kuin palautat tehtäväpaperin!