Asymptoottiset kolmiot hyperbolisessa geometriassa

Elisa Roivainen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016

Tiivistelmä: Elisa Roivainen, *Asymptoottiset kolmiot hyperbolisessa geometriassa* (engl. *Asymptotic Triangles in Hyperbolic Geometry*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 59 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2016.

Tässä työssä esitellään asymptoottisia kolmioita koskevia tuloksia hyperbolisessa geometriassa. Asymptoottisilla kolmioilla tarkoitetaan kolmioita, joiden kärkipisteistä ainakin yksi on niin sanottu äärettömyyspiste. Kolmion sivuista kaksi lähestyy siis toisiaan asymptoottisesti tuota pistettä kohti, mutta nämä sivut eivät kuitenkaan leikkaa. Hyperbolisella geometrialla taas tarkoitetaan geometriaa, jossa neutraalin geometrian aksioomien lisäksi aksioomaksi on valittu paralleeliaksiooman negaatio. Olkoon l suora ja P piste, joka ei ole suoralla l. Paralleeliaksiooman mukaan tällöin on olemassa vain yksi pisteen P kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa. Aksiooman negaation mukaan siis on olemassa ainakin yksi suora l ja yksi piste $P \notin l$ siten, että tämän pisteen kautta kulkee ainakin kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia suoralle l. Tässä tutkielmassa käytetään kuitenkin hyperbolisena aksioomana tämän negaation vahvempaa muotoa: Olkoon l suora ja P piste, joka ei ole suoralla l. Tällöin on olemassa kaksi pisteen P kautta kulkevaa suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia suoralle l ja lähestyvät sitä asymptoottisesti. Vahvemman muodon mukaan siis *kaikille* suorille l ja *kaikille* pisteille $P \notin l$ pätee, että pisteen P kautta kulkee ainakin kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia suoralle l. Lisäksi se takaa asymptoottisesti toisiaan lähestyvien suorien olemassaolon.

Puolisuorat voidaan luokitella sen mukaan, mitä äärettömyyspistettä kohti ne kulkevat. Samansuuntaiset eli samalla suoralla samaan suuntaan olevat puolisuorat kulkevat kohti samaa äärettömyyspistettä, samoin toisiaan asymptoottisesti lähestyvät puolisuorat. Kun määritellään rajayhdensuuntaisiksi puolisuorat, jotka ovat joko samansuuntaiset tai asymptoottisesti yhdensuuntaiset, voidaan rajayhdensuuntaisuus todistaa ekvivalenssirelaatioksi. Tämän ekvivalenssirelaation avulla puolisuorat voidaan luokitella yksikäsitteisesti.

Yksinkertaiset asymptoottiset kolmiot muodostuvat kahdesta asymptoottisesti toisiaan lähestyvästä puolisuorasta ja janasta, joka yhdistää puolisuorien alkupisteet. Tällaisen kolmion kärkipisteistä yksi on siis äärettömyyspiste, ja sillä on kaksi kulmaa ja yksi sivujana. Hyperbolinen aksiooma takaa asymptoottisten puolisuorien olemassaolon, joten myös yksinkertaisia asymptoottisia kolmioita on olemassa. Yksinkertaisille asymptoottisille kolmioille todistetaan tässä työssä kaksi yhtenevyyslausetta sekä ulkokulmaepäyhtälön vastine. Yhtenevyyslauseiden mukaan yksinkertaiset asymptoottiset kolmiot ovat yhtenevät, jos niillä on kaksi yhtenevää osaa, joko molemmat kulmat tai kulma ja sivujana.

Kaksinkertaiset asymptoottiset kolmiot koostuvat kulmasta ja sen sulkevasta suorasta. Kulman sulkeva suora on suora, jonka päät lähestyvät kulman molempia kylkiä asymptoottisesti. Jokaiselle kulmalle tällainen suora on olemassa ja se on yksikäsitteinen, mutta olemassaolotodistus on monimutkainen. Todistuksessa konstruoidaan kulman sulkeva suora, joka on kahden tietyllä tavalla valitun yhdensuuntaisen suoran yhteinen normaali. Ensin täytyy kuitenkin osoittaa, että nämä suorat ovat yhdensuuntaiset ja että ne eivät lähesty toisiaan asymptoottisesti, mikä tekee todistuksesta monimutkaisen. Lisäksi todistetaan yhtenevyyslause kaksinkertaisille asymptoottisille

kolmioille: yhteneville kulmille kulman kärkipiste on yhtä etäällä kulman sulkevasta suorasta.

On myös mahdollista, että kolme suoraa lähestyy toisiaan asymptoottisesti pareittain siten, että muodostuu kolmio, jolla on kolme äärettömyyspistettä eikä yhtään varsinaista kulmaa. Tällaisia kolmiota sanotaan kolminkertaisiksi asymptoottisiksi kolmioiksi, ja niiden olemassaolo seuraa suoraan kulman sulkevan suoran olemassaolosta. Myös tällaisille kolmioille todistetaan yhtenevyyslause, jonka mukaan kaikki kolminkertaiset asymptoottiset kolmiot ovat yhteneviä keskenään. Tätä todistusta varten määritellään myös äärettömyyspisteessä oleva yleistetty kulma ja sen puolittaja. Yleistetty kulmanpuolittaja on olemassa jokaiselle yleistetylle kulmalle ja se on yksikäsitteinen.

Sisältö

Johdanto

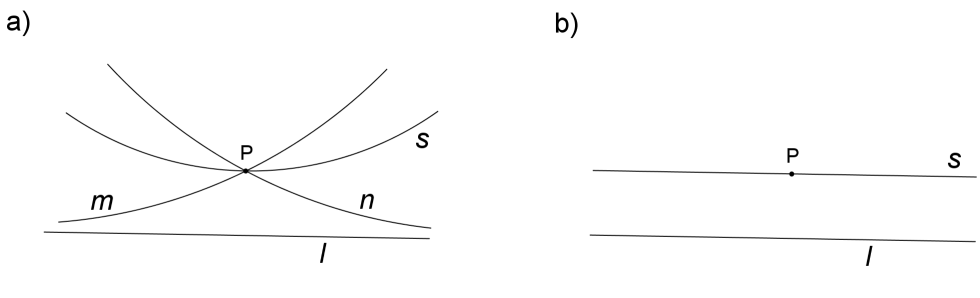
Tämän kirjoitelman tarkoituksena on esitellä asymptoottisia kolmioita hyperbolisessa geometriassa. Asymptoottisilla kolmioilla tarkoitetaan kolmioita, joiden kärkipisteistä vähintään yksi on niin sanottu äärettömyyspiste eli kolmion sivuista kaksi lähestyy kyseistä pistettä asymptoottisesti, mutta nämä sivut eivät koskaan leikkaa. Tässä työssä todistetaan tällaisten kolmioiden olemassaolo ja esitellään niihin liittyviä tuloksia, muun muassa vastaavia yhtenevyyslauseita kuin tavallisille kolmioille.

Geometriaa, jossa ei oteta kantaa siihen, onko niin sanottu paralleeliaksiooma voimassa, sanotaan *neutraaliksi* geometriaksi. Paralleeliaksiooman sisältö on seuraava: Olkoon l suora ja P piste, joka ei ole suoralla l. Tällöin on olemassa korkeintaan yksi pisteen P kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran l kanssa. Neutraalin geometrian aksioomien pohjalta voidaan osoittaa, että ainakin yksi tällainen yhdensuuntainen suora on olemassa. Paralleeliaksiooman negaation mukaan siis on olemassa ainakin yksi suora l ja yksi piste $P \notin l$ siten, että pisteen P kautta kulkevia, suoran l kanssa yhdensuuntaisia suoria on vähintään kaksi. *Hyperbolinen* geometria on geometriaa, jossa paralleeliaksiooman sijaan aksioomaksi on otettu sen negaatio; jos paralleeliaksiooma sen sijaan on voimassa, geometria on *euklidista*. Tässä tutkielmassa aksioomiksi on valittu neutraalin geometrian perustan muodostavat Hilbertin aksioomat ja hyperbolinen aksiooma, joka on paralleeliaksiooman negaatio muutamalla lisäoletuksella.

Hyperbolinen geometria on matematiikan historiassa verrattain uusi keksintö. Sen kehittivät ensimmäisinä toisistaan riippumatta Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860) ja Nikolai Ivanovitš Lobatševski (1793-1856) 1800-luvun alkupuolella. Tätä ennen Eukleides Aleksandrialaisen (325-265 eaa.) kehittämää geometriaa pidettiin ainoana todellisena geometriana. Eukleideen geometria perustuu viiteen aksioomaan, joista viides herätti keskustelua ja jota Eukleides itsekin piti sen verran ongelmallisena, että hän lykkäsi sen käyttämistä mahdollisimman pitkälle. Viides aksiooma on seuraava: Olkoon l, m ja n suoria siten, että suora n leikkaa suoraa l pisteessä A ja suoraa m pisteessä $B \neq A$. Olkoon lisäksi pisteet $C \in l$ ja $D \in m$ siten, että CDn ja $(\measuredangle ABD)^\circ + (\measuredangle BAC)^\circ < 180$. Tällöin suorat l ja m leikkaavat toisensa pisteessä P, jolle pätee, että PCn ja PDn. Voidaan osoittaa, että tämä aksiooma on ekvivalentti paralleeliaksiooman kanssa. Aksiooma herätti keskustelua, koska ajateltiin, että se on todistettavissa muista Eukleideen aksioomista. Eukleideen kehittämää geometriaa yritettiinkin parannella etsimällä todistusta viidennelle aksioomalle tai korvaamalla se jollain luonnollisemmalla oletuksella.

Seuraavaksi alettiin pohtia, mitä tapahtuisi, jos paralleeliaksiooma ei olisi voimassa. Esimerkiksi Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) ja Adrien-Marie Legendre (1752-1833) löysivät joukon uusia tuloksia olettaessaan, että paralleeliaksiooma ei päde. Vielä kuitenkin uskottiin, että jossain vaiheessa löytyisi ristiriita, mikä osoittaisi paralleeliaksiooman seuraavan muista aksioomista. Lopulta Gauss, Bolyai ja Lobatševski alkoivat ajatella, että on olemassa geometriaa, jossa paralleeliaksiooma ei ole voimassa. Saccherin, Legendren ja muiden löydökset heidän etsiessään ristiriitaa olivat tämän uuden geometrian ensimmäisiä tuloksia. Hyperbolinen geometria oli kuitenkin vielä tyhjän päällä, kunnes sille keksittiin malli, joka osoitti geometrian ristiriidattomuuden. Ensimmäisenä tällaisen mallin kehitti Eugenio Beltrami (1835-1900) ja ensimmäisenä tällaisen mallin osoitti oikeaksi Felix Klein (1849-1925). Gauss oli ensimmäinen, joka ymmärsi hyperbolisen geometrian olevan olemassa, mutta hän ei julkaissut mitään tutkimuksistaan, sillä ristiriidan löytyminen olisi tehnyt kaiken tyhjäksi. Näin ollen Bolyaita ja Lobatševskia pidetään hyperbolisen geometrian kehittäjinä.

Voidaan osoittaa, että paralleeliaksiooman negaatio on universaali: *Kaikille* suorille l ja *kaikille* pisteille $P \notin l$ pätee, että pisteen P kautta kulkee ainakin kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia suoralle l. Edelleen voidaan osoittaa, että pisteen P kautta kulkevia yhdensuuntaisia suoria on itse asiassa äärettömän monta. Useiden yhdensuuntaisten suorien olemassaolo tuo hyperboliseen geometriaan asymptoottisten suorien käsitteen: näistä saman pisteen kautta kulkevista yhdensuuntaisista suorista kaksi on lähimpänä suoraa l ja lähestyy sitä asymptoottisesti. Euklidisessa geometriassa sen sijaan yhdensuuntaiset suorat ovat jokaisessa pisteessään yhtä etäällä toisistaan.



KUVA 0.1. Suoran l kanssa yhdensuuntaisia suoria. a) Hyperbolinen tapaus: Suorat m ja n lähestyvät suoraa l asymptoottisesti. Suora s on myös yhdensuuntainen suoran l kanssa, mutta ei lähesty sitä asymptoottisesti. b) Euklidinen tapaus: suora s on jokaisessa pisteessään yhtä etäällä suorasta l.

Koska sekä euklidisen että hyperbolisen geometrian pohjalla ovat neutraalin geometrian aksioomat, näillä geometrioilla on paljon yhteistä. Muun muassa tavallisia kolmioita koskevat yhtenevyyslauseet ja ulkokulmaepäyhtälö pätevät molemmissa. Sen sijaan esimerkiksi euklidisen geometrian tulos, jonka mukaan kolmion kulmien summa on 180 astetta, ei päde hyperbolisessa geometriassa. Hyperbolisen aksiooman ollessa voimassa kolmion kulmien summa on aina pienempi kuin 180. Muita eroja euklidiseen geometriaan nähden ovat muun muassa kulma-kulma-kulma-yhtenevyyssääntö (KKK) kolmioille ja se, että hyperbolisessa geometriassa ei ole olemassa suorakulmioita. KKK-säännön mukaan kolmiot ovat yhtenevät, jos kaikki niiden kulmat ovat yhtenevät. Tästä seuraa, että hyperbolisessa maailmassa ei voisi tehdä pienoismalleja.

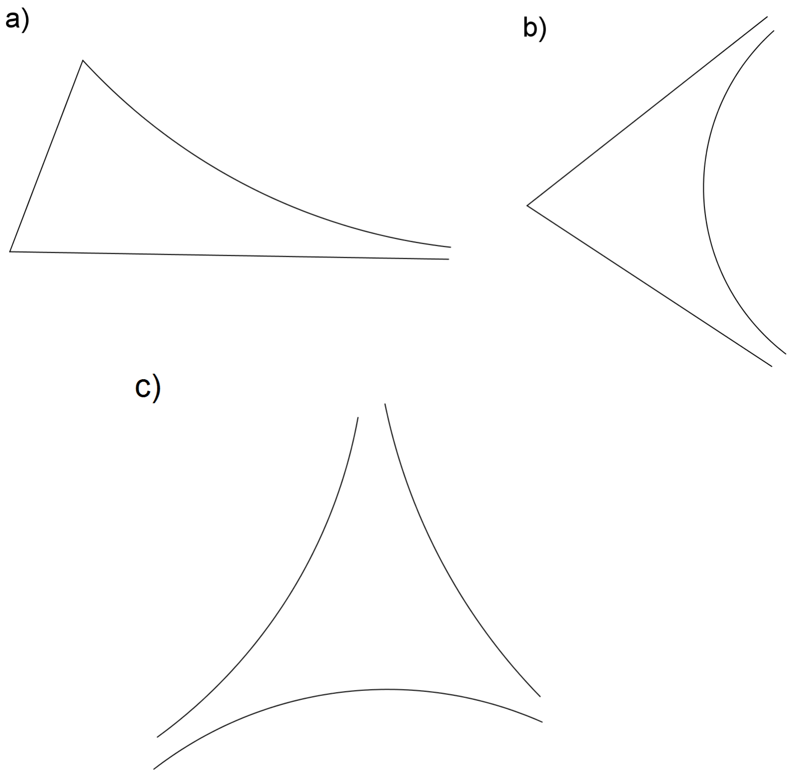
Esitietoina tutkielmassa oletetaan perustiedot neutraalista geometriasta. Ensimmäisessä luvussa luetellaan Hilbertin aksioomat ja esitellään muutama keskeinen neutraalin geometrian tulos, joita tässä työssä käytetään. Toisessa luvussa käsitellään samansuuntaisia puolisuoria, eli puolisuoria, jotka ovat samalla suoralla samaan suuntaan, ja asymptoottisesti toisiaan lähestyviä puolisuoria. Näihin liittyen määritellään ekvivalenssirelaatio, jonka avulla puolisuorat voidaan luokitella.

Kolmannessa luvussa käsitellään varsinaista pääaihetta eli asymptoottisia kolmioita. Yksinkertaiset asymptoottiset kolmiot muodostuvat kahdesta asymptoottisesti toisiaan lähestyvästä puolisuorasta ja niiden alkupisteet yhdistävästä janasta. Jos kahden asymptoottisen kolmion molemmat kulmat tai toinen kulmista ja sivujana ovat yhtenevät, kolmiot ovat yhtenevät. Yhtenevyyslauseiden lisäksi tällaisille kolmiolle todistetaan ulkokulmaepäyhtälön vastine.

Kaksinkertaiset asymptoottiset kolmiot muodostuvat kulmasta ja sen sulkevasta suorasta. Kulman sulkeva suora on suora, joka lähestyy molemmista päistään kulman kylkiä asymptoottisesti. Kaksinkertaisella asymptoottisella kolmiolla on siis kaksi äärettömyyspistettä. Tässä työssä todistetaan kulman sulkevan suoran olemassaolo. Todistuksessa konstruoidaan kulman sulkeva suora, joka on kahden tietyllä tavalla valitun yhdensuuntaisen suoran yhteinen normaali. Ensin täytyy kuitenkin osoittaa, että nämä suorat ovat yhdensuuntaiset ja että ne eivät lähesty toisiaan asymptoottisesti, mikä tekee todistuksesta monimutkaisen. Jos yhdensuuntaiset suorat eivät lähesty toisiaan asymptoottisesti, niitä sanotaan normaalisti yhdensuuntaisiksi. Nimi johtuu tuloksesta, jonka mukaan tällaisille suorille on olemassa yksikäsitteinen yhteinen normaali. Tämän tuloksen lisäksi kulman sulkevan suoran olemassaolotodistuksessa tarvitaan muun muassa sekä tavallista että asymptoottista ulkokulmaepäyhtälöä ja yhtenevyyslauseita niin tavallisille kuin asymptoottisillekin kolmioille. Kaksinkertaisille asymptoottisille kolmioille todistetaan myös yhtenevyyslause, jonka mukaan yhteneville kulmille kulman kärkipisteen etäisyys kulman sulkevasta suorasta on sama.

Kolminkertaiset asymptoottiset kolmiot muodostuvat kolmesta pareittain toisiaan asymptoottisesti lähestyvästä suorasta. Tällaisten kolmioiden olemassaolo seuraa suoraan kulman sulkevan suoran olemassaolosta. Kolminkertaisille asymptoottisille kolmioille todistetaan yhtenevyyslause, jonka mukaan kaikki tällaiset kolmiot ovat yhteneviä keskenään. Tätä todistusta varten määritellään myös äärettömyyspisteessä oleva yleistetty kulma ja sen puolittaja. Yleistetty kulmanpuolittaja on olemassa jokaiselle yleistetylle kulmalle ja se on yksikäsitteinen.

Pääasiallisena lähteenä tässä työssä on käytetty Robin Hartshornen kirjaa *Geometry: Euclid & beyond*. Suuri osa esittelemistäni tuloksista löytyy tästä kirjasta joko todistettuina tuloksina tai tehtävinä. Myös monet määritelmistä mukailevat tätä lähdettä. Osa todistuksista on otettu Richard Trudeaun kirjasta *The Non-Euclidean*



Kuva 0.2. a) Yksinkertainen asymptoottinen kolmio. b) Kaksinkertainen asymptoottinen kolmio. c) Kolminkertainen asymptoottinen kolmio.

Revolution. Hartshorne esittää kirjassaan lähinnä todistusten ideat, joten tästä kirjasta otetuissa todistuksissa oli paljon aukkoja, jotka täydensin itse. Trudeaun kirjassa sen sijaan todistukset ovat yksityiskohtaisia, joten niihin ei jäänyt paljon täydennettävää. Tutkielman kuvat on piirretty matemaattisten kuvien piirtoon tarkoitetulla Geogebra-ohjelmalla, joka oli varsin helppokäyttöinen.

LUKU 1

Esitietoja

Tässä työssä käytetään aksioomina neutraalin geometrian pohjan muodostavia Hilbertin aksioomia ja hyperbolista aksioomaa. Hilbertin aksioomat (H1)-(H13) [**2**] on lueteltu seuraavassa, hyperbolinen aksiooma esitellään myöhemmin.

(H1) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin on olemassa täsmälleen yksi suora, joka kulkee pisteiden A ja B kautta.

(H2) Jokaiseen suoraan sisältyy ainakin kaksi pistettä.

(H3) On olemassa kolme eri pistettä siten, että mikään suora ei kulje niiden kaikkien kautta.

(H4) Jos $A * B * C$, niin pisteet A, B ja C ovat eri pisteitä, ne ovat samalla suoralla ja $C * B * A$.

(H5) Jos A ja B ovat eri pisteitä, niin suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ on pisteet C, D ja E siten, että $C * A * B$, $A * D * B$ ja $A * B * E$.

(H6) Jos A, B ja C ovat eri pisteitä samalla suoralla, niin täsmälleen yksi seuraavista pätee: $B * A * C$, $A * B * C$ tai $A * C * B$.

(H7) Olkoon l suora ja pisteet $A, B, C \notin l$.
- (1) Jos ABl ja BCl, niin ACl.
- (2) Jos AlB ja BlC, niin ACl.

(H8) Jos A ja B ovat eri pisteitä ja $\overrightarrow{PQ}$ on puolisuora, niin on olemassa täsmälleen yksi piste $R \in \overrightarrow{PQ}$ siten, että $AB \cong PR$.

(H9) Janojen yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio. Olkoon AB, CD ja EF janoja. Tällöin
- (1) $AB \cong AB$. (refleksiivisyys)
- (2) Jos $AB \cong CD$, niin $CD \cong AB$. (symmetrisyys)
- (3) Jos $AB \cong CD$ ja $CD \cong EF$, niin $AB \cong EF$. (transitiivisuus)

(H10) Jos $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ ja $BC \cong B'C'$, niin $AC \cong A'C'$.

(H11) Olkoon $\angle ABC$ kulma, $\overrightarrow{B'A'}$ puolisuora ja $P \notin \overleftrightarrow{B'A'}$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi puolisuora $\overrightarrow{B'C'}$ siten, että $PC'\overleftrightarrow{B'A'}$ ja $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

(H12) Kulmien yhtenevyys on ekvivalenssirelaatio.

(H13) (Sivu-kulma-sivu-sääntö, SKS) Olkoon $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kolmioita siten, että $AB \cong A'B'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ ja $AC \cong A'C'$. Tällöin $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Kerrataan vielä aluksi joitain neutraalin geometrian perustuloksia, joita tässä työssä tullaan käyttämään.

LAUSE 1.1. *(Paschin lause) Olkoon $\triangle ABC$ kolmio ja $l \neq \overleftrightarrow{AB}$ suora, joka leikkaa sivua AB pisteessä D siten, että $A \neq D \neq B$. Tällöin suora l leikkaa myös ainakin* *toista kolmion sivuista AC ja BC. Jos l ei kulje pisteen C kautta, niin se leikkaa vain toista näistä sivuista.*

Todistus. Katso [**2**, s. 20]. $\square$

Lause 1.2. *Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja piste $D \in \overleftrightarrow{AC}$. Tällöin $D \in \measuredangle(ABC)$ jos ja vain jos $A * D * C$.*

Todistus. Katso [**2**, s. 21]. $\square$

Lause 1.3. *(Puomilause) Olkoon $\measuredangle ABC$ kulma ja piste $D \in \measuredangle(ABC)$. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{BD}$ leikkaa janaa AC.*

Todistus. Katso [**1**, s. 77-78]. $\square$

Lause 1.4. *(Ulkokulmaepäyhtälö) Olkoon kolmio $\triangle ABC$ ja piste D siten, että $B * C * D$. Tällöin $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$ ja $\measuredangle ACD > \measuredangle ABC$.*

Todistus. Katso [**2**, s. 59-60]. $\square$

Lause 1.5. *Kolmiolle $\triangle ABC$ pätee, että $(\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle ACB)^\circ \leq 180$.*

Todistus. Katso [**2**, s. 39-40]. $\square$

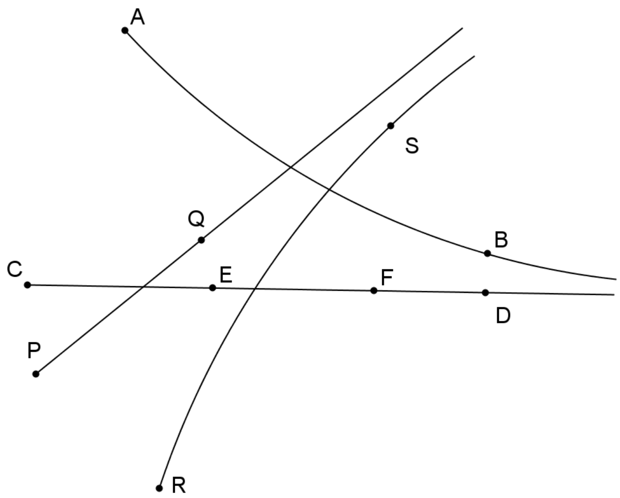
Seuraus 1.6. *Konveksille nelikulmiolle $\square ABCD$ pätee, että $(\measuredangle BAD)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle BCD)^\circ + (\measuredangle ADC)^\circ \leq 360$.*

Todistus. Jaetaan nelikulmio $\square ABCD$ kahteen kolmioon $\triangle ABC$ ja $\triangle ACD$. Koska nelikulmio $\square ABCD$ on konveksi, piste A on kulman $\measuredangle BCD$ sisällä ja piste C on kulman $\measuredangle BAD$ sisällä. Tällöin $(\measuredangle BAD)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle CAD)^\circ$ ja $(\measuredangle BCD)^\circ = (\measuredangle BCA)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ$, joten $(\measuredangle BAD)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle BCD)^\circ + (\measuredangle ADC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle CAD)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle BCA)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ + (\measuredangle ADC)^\circ = (\measuredangle BAC)^\circ + (\measuredangle ABC)^\circ + (\measuredangle BCA)^\circ + (\measuredangle CAD)^\circ + (\measuredangle ACD)^\circ + (\measuredangle ADC)^\circ \leq 180 + 180 = 360$. Arvioinnissa sovellettiin lausetta 1.5 kolmioihin $\triangle ABC$ ja $\triangle ACD$. $\square$

LUKU 2

Rajayhdensuuntaisuus

Tässä luvussa määritellään ekvivalenssirelaatio, jonka avulla puolisuorat voidaan luokitella sen mukaan, mihin suuntaan ne menevät. Kaikki samalla suoralla "samaan suuntaan" olevat puolisuorat kuuluvat näin ollen samaan ekvivalenssiluokkaan. Näiden lisäksi hyperbolisessa geometriassa on olemassa puolisuoria, jotka lähestyvät toisiaan asymptoottisesti. Myös tällaiset puolisuorat menevät kohti samaa äärettömyyspistettä ja kuuluvat siis keskenään samaan ekvivalenssiluokkaan. Tämän luvun tulokset ovat kuitenkin vielä neutraalia geometriaa. Hyperbolista aksioomaa ei vielä tarvita, sillä tässä ei oteta kantaa siihen, onko asymptoottisia puolisuoria olemassa.



Kuva 2.1. Puolisuorat $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan. Puolisuora $\overrightarrow{PQ}$ kuuluu eri ekvilvalenssiluokkaan kuin $\overrightarrow{AB}$, mutta samaan kuin $\overrightarrow{RS}$.

Tämän luvun lauseiden 2.9, 2.11 ja 2.13 todistukset on tehty Hartshornen kirjan mukaan; lauseen 2.10 todistus on otettu Trudeaun kirjasta. Muut todistukset olen tehnyt itse.

2.1. Samansuuntaisuus

Määritellään aluksi, mitä tarkoitetaan "samalla suoralla samaan suuntaan olevilla" puolisuorilla.

Määritelmä 2.1. Puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat *samansuuntaiset*, jos $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ tai $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$.

Todistetaan seuraavaksi samansuuntaisuuteen liittyviä tuloksia, joita käytetään myöhemmissä todistuksissa.

Lemma 2.2. *Olkoon* $\overrightarrow{AB}$ *ja* $\overrightarrow{CD}$ *puolisuoria ja* $A \neq C$. *Tällöin* $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$, *jos ja vain jos* $A \in \overrightarrow{CD}$ *ja* $C * A * B$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $A \in \overrightarrow{CD}$ ja $C * A * B$ ja tehdään vastaväite. Oletetaan, että puolisuora $\overrightarrow{AB}$ ei ole puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ osajoukko, eli että on olemassa piste $P \in \overrightarrow{AB}$, joka ei ole puolisuoralla $\overrightarrow{CD}$. Koska $A \in \overrightarrow{CD}$ ja $C * A * B$, niin $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$. Tällöin siis $P * C * D$. Nyt $A \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$, joten $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$, eli $P * C * A$. Koska lisäksi $C*A*B$, niin $P*A*B$, joten $P \notin \overrightarrow{AB}$, mikä on ristiriita. Siis $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$.

Oletetaan sitten, että $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$, jolloin $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD}$. Erityisesti myös $A \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$, jolloin $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$. Tehdään taas vastaväite, eli oletetaan, että $C \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$. Tällöin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Olkoon piste P siten, että $P * C * A$, jolloin siis $P \in \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$, mutta $P \notin \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$. Tämä on ristiriita, joten $C * A * B$. □

Lemma 2.3. *Olkoon* $\overrightarrow{AB}$ *puolisuora ja* $A' \in \overleftrightarrow{AB}$. *Tällöin on olemassa puolisuora* $\overrightarrow{A'B'}$ *siten, että puolisuorat* $\overrightarrow{AB}$ *ja* $\overrightarrow{A'B'}$ *ovat samansuuntaiset.*

Todistus. Jos $A' \in \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, niin olkoon B' piste siten, että $A * A' * B'$. Tällöin $\overrightarrow{A'B'} \subset \overrightarrow{AB}$ lemman 2.2 mukaan. Jos $A' \notin \overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$, niin valitaan, että $B' = B$, jolloin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ tai $A' * A * B$ eli $A' * A * B'$. Näin valitsemalla saadaan kummassakin tapauksessa, että $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{A'B'}$ (lemma 2.2). □

Lemma 2.4. *Olkoon* $\overrightarrow{AB}$ *ja* $\overrightarrow{A'B'}$ *samansuuntaisia puolisuoria. Jos* $A' \in \overrightarrow{AB}$, *niin* $\overrightarrow{A'B'} \subset \overrightarrow{AB}$.

Todistus. Jos puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ ei ole puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ osajoukko, niin $\overrightarrow{AB}$ on puolisuoran $\overrightarrow{A'B'}$ osajoukko, koska puolisuorat ovat samansuuntaiset. Tällöin lemman 2.2 mukaan $A' * A * B$, eli $A' \notin \overrightarrow{AB}$, mikä on ristiriita. Siis $\overrightarrow{A'B'} \subset \overrightarrow{AB}$. □

Lause 2.5. *Samansuuntaisuus on ekvivalenssirelaatio.*

Todistus. Refleksiivisyys ja symmetrisyys seuraavat suoraan määritelmästä, joten riittää osoittaa, että relaatio on transitiivinen. Olkoon $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ puolisuoria siten, että $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat samansuuntaiset ja $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ ovat samansuuntaiset. Jos $A = C$ niin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Vastaavasti, jos $E = C$, niin $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$. Voidaan siis olettaa, että $A \neq C \neq E$. Jaetaan tarkastelu neljään eri tapaukseen.

(1) $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{EF} \subset \overrightarrow{CD}$: Nyt $\overrightarrow{EF} \subset \overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$.

(2) $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{EF}$: Nyt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ $(A \neq C)$ ja $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC}$ $(E \neq C)$, ja lemman 2.2 mukaan $A*C*D$ ja $E*C*D$. Jos $A = E$, niin $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF}$. Voidaan siis olettaa, että $A \neq E$. Olkoon $l \neq \overleftrightarrow{AB}$ suora siten, että $C \in l$. Koska $A*C*D$, niin AlD. Koska $E*C*D$, niin myös ElD, joten aksiooman (H7) mukaan AEl. Tällöin joko $A * E * C$ tai $E * A * C$. Jos $A * E * C$, niin myös $E \in \overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$, joten lemman 2.2 perusteella $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} \subset \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$. Vastaavasti, jos $E * A * C$, niin $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{EF}$.

(3) $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF} \subset \overrightarrow{CD}$: Nyt erityisesti $A \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$ joten $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$. Koska $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF} \subset \overrightarrow{CD}$, niin lemman 2.2 nojalla $C*A*B$ ja $C*E*F$. Jos $A = E$, niin $C * A * F$. Koska myös $C * A * B$, niin $F \in \overrightarrow{AB}$, joten $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EF}$. Jos $A \neq E$, niin joko $C * A * E$, $A * C * E$ tai $A * E * C$. Tapaus $A * C * E$ ei kuitenkaan ole mahdollinen, koska $E \in \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$. Voidaan olettaa, että $C*A*E$, sillä tapaus $A*E*C$ perustellaan vastaavasti. Koska $C * A * E$ ja $C * A * B$, niin $E \in \overrightarrow{AB}$, ja koska myös $C * E * F$, niin $A * E * F$. Näin ollen $\overrightarrow{EF} \subset \overrightarrow{AB}$ lemman 2.2 perusteella.

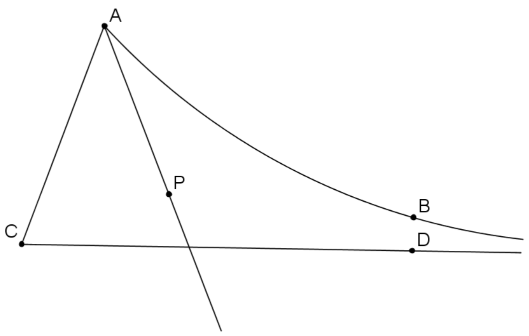
(4) $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{EF}$: Nyt $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{EF}$.

Jokaisessa tapauksessa siis puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{EF}$ ovat samansuuntaiset. □

2.2. Asymptoottinen yhdensuuntaisuus

Määritellään seuraavaksi asymptoottisesti toisiaan lähestyvät puolisuorat ja todistetaan niihin liittyviä aputuloksia. Lauseessa 2.10 osoitetaan asymptoottisen yhdensuuntaisuuden symmetrisyys ja lauseessa 2.11 transitiivisuus.

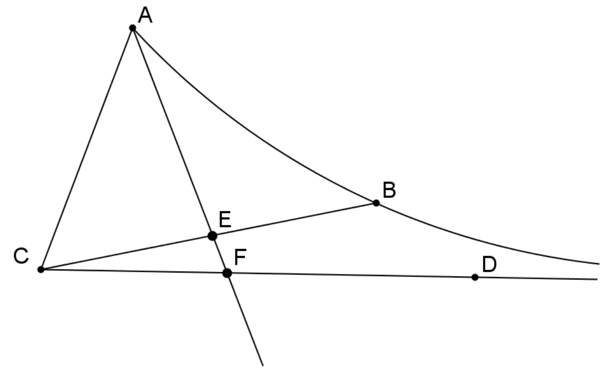
Määritelmä 2.6. Olkoon $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ suoria siten, että $\overleftrightarrow{AB} || \overleftrightarrow{CD}$. Jos jokaiselle pisteelle $P \in \measuredangle(CAB)$ pätee, että puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, niin puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on *asymptoottisesti yhdensuuntainen* puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa.



Kuva 2.2. Puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa.

Lause 2.7. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$ asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa. Tällöin $BD\overleftrightarrow{AC}$.*

Todistus. Olkoon piste E siten, että $C * E * B$, jolloin $E \in \measuredangle(CAB)$. Asymptoottisen yhdensuuntaisuuden määritelmän perusteella $\overrightarrow{AE}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$. Olkoon leikkauspiste F. Koska $F \in \overrightarrow{CD}$, niin $FD\overleftrightarrow{AC}$. Nyt myös $F \in \overrightarrow{AE}$, joten $F \in \measuredangle(CAB)$. Näin ollen $FB\overleftrightarrow{AC}$. Koska myös $FD\overleftrightarrow{AC}$, niin aksiooman (H7) mukaan $BD\overleftrightarrow{AC}$. □



Kuva 2.3. Lause 2.7.

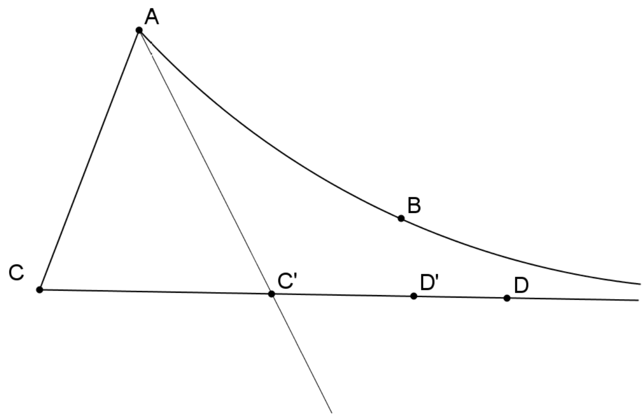
Lause 2.8. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$ asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa ja puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$ samansuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa. Tällöin*

(1) $C' \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$ jos ja vain jos $C' \in \measuredangle(CAB)$.

(2) $C \in \overrightarrow{C'D'} \setminus \{C'\}$ jos ja vain jos $C \in \measuredangle(C'AB)$.

Todistus. (1) Oletetaan, että $C' \in \overrightarrow{CD} \setminus \{C\}$. Tällöin $C'D\overleftrightarrow{AC}$, ja lauseen 2.7 mukaan $BD\overleftrightarrow{AC}$. Aksioomaa (H7) käyttämällä saadaan edelleen, että $C'B\overleftrightarrow{AC}$. Koska $\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{CD}$ ja $C' \in \overleftrightarrow{CD}$, niin $CC' \cap \overleftrightarrow{AB} = \emptyset$, eli $C'C\overleftrightarrow{AB}$. Koska $C'B\overleftrightarrow{AC}$ ja $C'C\overleftrightarrow{AB}$, niin $C' \in \measuredangle(CAB)$.

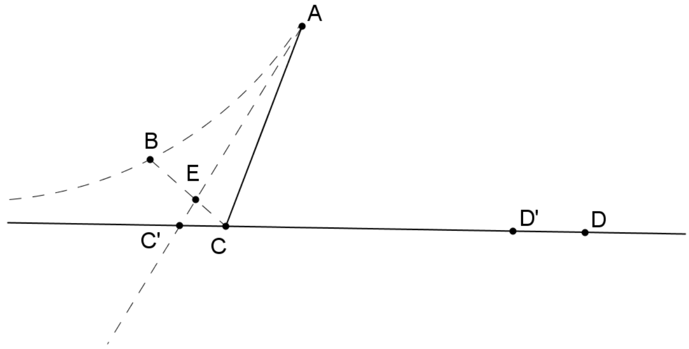
Oletetaan sitten, että $C' \in \measuredangle(CAB)$. Nyt puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa, joten puolisuora $\overrightarrow{AC'}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$. Koska $C' \in \overleftrightarrow{CD}$, niin leikkauspiste on C', joten $C' \in \overrightarrow{CD}$.



Kuva 2.4. Lause 2.8: kohta (1).

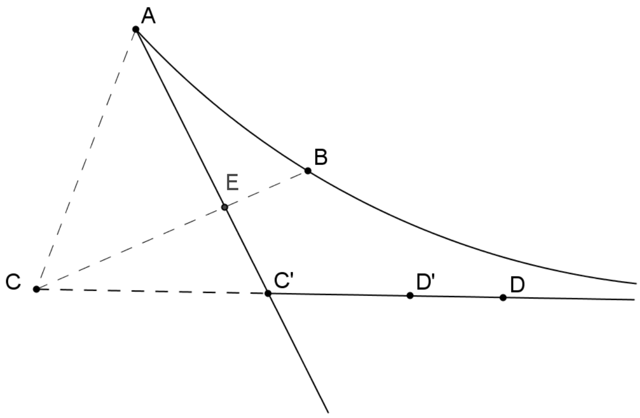
(2) Oletetaan, että $C \in \overrightarrow{C'D'} \setminus \{C'\}$. Nyt $CC'\overleftrightarrow{AB}$, sillä suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ ovat yhdensuuntaiset ja $C' \in \overleftrightarrow{CD}$. Koska $C \in \overrightarrow{C'D'}$ ja puolisuorat $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{C'D'}$ ovat samansuuntaiset, niin lemman 2.4 perusteella $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{C'D'}$. Näin ollen lemman 2.2 mukaan $C' * C * D$. Tehdään seuraavaksi vastaväite ja oletetaan,

että $B\overleftrightarrow{AC'}C$. Tällöin on olemassa piste $E \in \overleftrightarrow{AC'}$ siten, että $B * E * C$, jolloin siis piste E on kulman $\measuredangle CAB$ sisällä. Asymptoottisen yhdensuuntaisuuden määritelmän mukaan puolisuora $\overrightarrow{AE}$ leikkaa suoraa $\overleftrightarrow{CD}$ siten, että leikkauspiste kuuluu puolisuoralle $\overrightarrow{CD}$. Tämä leikkauspiste on $C' \notin \overrightarrow{CD}$ $(C' * C * D)$, mikä on ristiriita, joten $BC\overleftrightarrow{AC'}$. Koska myös $CC'\overleftrightarrow{AB}$, niin piste C on kulman $\measuredangle C'AB$ sisällä.



KUVA 2.5. Lause 2.8: kohta (2); $C \in \overrightarrow{C'D'} \setminus \{C'\}$ vain jos $C \in \measuredangle(C'AB)$.

Oletetaan sitten, että $C \in \measuredangle(C'AB)$. Jos $C \notin \overrightarrow{C'D'} \setminus \{C'\}$, niin $C = C'$ tai $C \notin \overrightarrow{C'D'}$. Jos $C = C'$, niin $C \notin \measuredangle C'AB$, mikä on ristiriita. Jos $C \notin \overrightarrow{C'D'}$, niin puolisuora $\overrightarrow{CD}$ ei ole puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ osajoukko, joten $\overrightarrow{C'D'} \subset \overrightarrow{CD}$. Näin ollen $C' \in \overrightarrow{CD}$ (ja $C' \neq C$), joten kohdan (1) nojalla piste C' on kulman $\measuredangle CAB$ sisällä. Tällöin on olemassa piste $E \in \overrightarrow{AC'}$ siten, että $C * E * B$, joten $C\overleftrightarrow{AC'}B$. Piste C ei siis ole kulman $\measuredangle C'AB$ sisällä, mikä on ristiriita. Näin ollen $C \in \overrightarrow{C'D'} \setminus \{C'\}$. $\square$



KUVA 2.6. Lause 2.8: kohta (2); $C \in \overrightarrow{C'D'} \setminus \{C'\}$ jos $C \in \measuredangle(C'AB)$.

Lause 2.9. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$ asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa ja puolisuorat $\overrightarrow{A'B'}$ ja $\overrightarrow{C'D'}$ siten, että puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{A'B'}$ ovat samansuuntaiset ja puolisuorat $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{C'D'}$ ovat samansuuntaiset. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ kanssa.*

Todistus. Puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{A'B'}$ ovat samansuuntaiset ja puolisuorat $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{C'D'}$ ovat samansuuntaiset, joten $\overleftrightarrow{A'B'} = \overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{C'D'} = \overleftrightarrow{CD}$. Näin ollen suorat $\overleftrightarrow{A'B'}$ ja $\overleftrightarrow{C'D'}$ ovat yhdensuuntaiset. Riittää siis osoittaa, että puolisuora $\overrightarrow{A'P}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{C'D'}$ kaikilla pisteillä $P \in \measuredangle(C'A'B')$. Jaetaan todistus kahteen osaan, joissa osoitetaan, että

(1) Jos puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa ja puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ on samansuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa, niin puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa.
(2) Jos puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa ja puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$ on samansuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa, niin puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ kanssa.

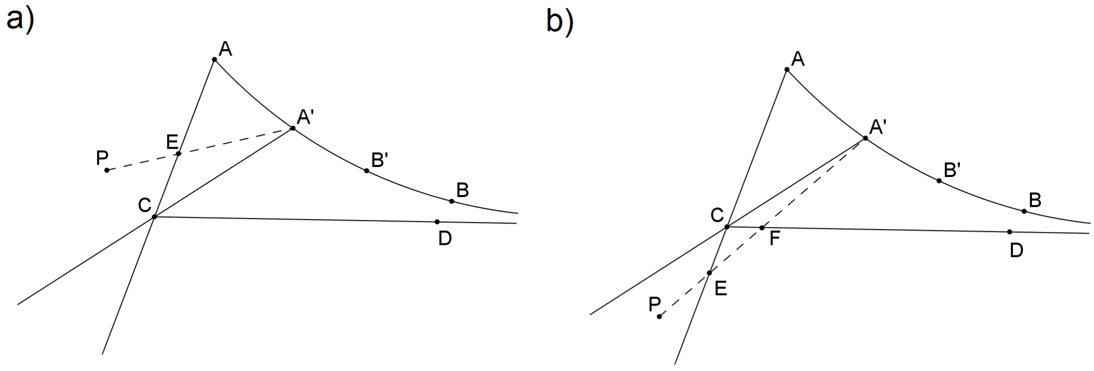
Yhdistämällä nämä tiedot saadaan haluttu tulos: nyt kohdan (1) mukaan puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa. Näin ollen kohtaa (2) voidaan soveltaa puolisuoriin $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{C'D'}$, jolloin siis puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ kanssa. Lisäksi voidaan olettaa, että $A' \neq A$ ja $C' \neq C$, sillä muuten $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ tai $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}$.

Kohta (1). Osoitetaan, että puolisuora $\overrightarrow{A'P}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$ kaikilla pisteillä $P \in \measuredangle(CA'B')$. Oletetaan ensin, että $A' \in \overrightarrow{AB}$, ja että $PA'\overleftrightarrow{CD}$. Osoitetaan seuraavaksi, että $P \in \measuredangle(CAB)$. Koska $P \in \measuredangle(CA'B')$, niin $PC\overleftrightarrow{A'B'}$ eli $PC\overleftrightarrow{AB}$. Nyt $A' \in \overrightarrow{AB}$, joten $A'B\overleftrightarrow{AC}$. Jos lisäksi $PA'\overleftrightarrow{AC}$, niin $PB\overleftrightarrow{AC}$. Tällöin $P \in \measuredangle(CAB)$.

Jos $P\overleftrightarrow{AC}A'$, niin on olemassa piste $E \in \overleftrightarrow{AC}$ siten, että $P*E*A'$. Jos olisi $E\overleftrightarrow{CD}A'$, niin olisi olemassa piste $F \in \overleftrightarrow{CD}$ siten, että $E*F*A'$. Koska lisäksi $P*E*A'$, niin $P*F*A'$, eli $P\overleftrightarrow{CD}A'$. Tämä on ristiriita oletuksen $PA'\overleftrightarrow{CD}$ kanssa. Siis $EA'\overleftrightarrow{CD}$. Lisäksi $AA'\overleftrightarrow{CD}$, joten $AE\overleftrightarrow{CD}$, eli piste E on puolisuoralla $\overrightarrow{CA}$. Näin ollen $AE\overleftrightarrow{A'C}$, ja koska $P*E*A'$, niin $PE\overleftrightarrow{A'C}$. Näistä saadaan, että $PA\overleftrightarrow{A'C}$. Toisaalta oletettiin, että $A' \in \overrightarrow{AB}$, ja koska puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{A'B'}$ ovat samansuuntaiset, niin lemman 2.4 mukaan $\overrightarrow{A'B'} \subset \overrightarrow{AB}$. Näin ollen $A*A'*B'$ lemman 2.2 perusteella, joten $A\overleftrightarrow{A'C}B'$. Tästä ja siitä, että $PA\overleftrightarrow{A'C}$ saadaan, että $P\overleftrightarrow{A'C}B'$, mikä on ristiriita, sillä piste P on oletuksen mukaan kulman $\measuredangle CA'B'$ sisällä. Siis $PA'\overleftrightarrow{AC}$ tai $P \in \overleftrightarrow{AC}$.

Nyt $PA'\overleftrightarrow{CD}$ ja $AA'\overleftrightarrow{CD}$ ($\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{CD}$), joten $PA\overleftrightarrow{CD}$. Jos $P \in \overleftrightarrow{AC}$, niin $P \in \overrightarrow{CA}$, joten $PA\overleftrightarrow{A'C}$. Aiemmin todettiin, että $A\overleftrightarrow{A'C}B'$. Yhdistämällä nämä tiedot saadaan jälleen sama ristiriita, että $P\overleftrightarrow{A'C}B'$. Siis $PA'\overleftrightarrow{AC}$.

Nyt puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, koska puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset ja $P \in \measuredangle(CAB)$. Olkoon leikkauspiste G. Koska



Kuva 2.7. Lause 2.9: kohta (1), $A' \in \overrightarrow{AB}$; $P\overleftrightarrow{AC}A'$. a) $A'P\overleftrightarrow{CD}$. b) $A'\overleftrightarrow{CD}P$.

$PA'\overleftrightarrow{CD}$, niin suora $\overleftrightarrow{A'P}$ leikkaa kolmion $\triangle ACG$ sivua AG pisteessä P, mikä nähdään seuraavasti: Nyt $PA'\overleftrightarrow{CD}$ ja $AA'\overleftrightarrow{CD}$ ($\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{CD}$), joten $PA\overleftrightarrow{CD}$. Näin ollen $A * P * G$ tai $P * A * G$. Jos $P * A * G$, niin $P\overleftrightarrow{AC}G$. Toisaalta pisteet G ja P ovat kulman $\measuredangle CAB$ sisällä, joten $GB\overleftrightarrow{AC}$ ja $PB\overleftrightarrow{AC}$. Näistä saadaan, että $PG\overleftrightarrow{AC}$, mikä on ristiriita. Siis täytyy olla $A * P * G$, eli $P \in AG$. Koska suora $\overleftrightarrow{A'P}$ leikkaa kolmion $\triangle ACG$ sivua AG, Paschin lauseen mukaan se leikkaa myös ainakin toista kolmion $\triangle ACG$ sivua.

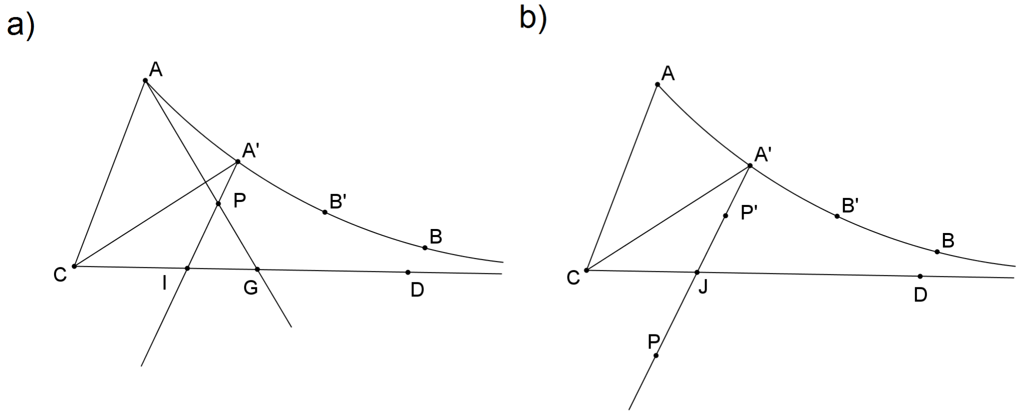
Jos suora $\overleftrightarrow{A'P}$ leikkaa sivua AC, niin on olemassa leikkauspiste H. Piste H ei voi olla piste A', sillä muuten $\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AH} = \overleftrightarrow{AA'} = \overleftrightarrow{AB}$. Piste H ei voi myöskään olla piste P, koska piste P ei ole suoralla $\overleftrightarrow{AC}$. Koska $PA'\overleftrightarrow{AC}$, niin piste H ei ole myöskään pisteiden P ja A' välissä. Siis joko $H * A' * P$ tai $A' * P * H$.

Jos $H * A' * P$, niin $H\overleftrightarrow{A'B'}P$ eli $H\overleftrightarrow{AB}P$. Toisaalta $H \neq A$, sillä muuten suorilla $\overleftrightarrow{AA'}$ ja $\overleftrightarrow{A'P}$ olisi kaksi eri leikkauspistettä A ja A'. Siis $H \in AC \setminus \{A\}$, joten $HC\overleftrightarrow{AB}$. Koska myös $H\overleftrightarrow{AB}P$, niin $P\overleftrightarrow{AB}C$. Tämä on ristiriita, sillä piste P on kulman $\measuredangle CAB$ sisällä.

Jos $A' * P * H$, niin $PH\overleftrightarrow{A'C}$. Nyt $H \neq C$, sillä muuten suorilla $\overleftrightarrow{A'C}$ ja $\overleftrightarrow{A'P}$ olisi kaksi eri leikkauspistettä A' ja C. Siis $H \in AC \setminus \{C\}$, joten $AH\overleftrightarrow{A'C}$. Koska lisäksi $PH\overleftrightarrow{A'C}$, niin $PA\overleftrightarrow{A'C}$. Edelleen, aiemmin nähtiin, että $A\overleftrightarrow{A'C}B'$, joten $P\overleftrightarrow{A'C}B'$. Tämä on ristiriita, sillä piste P on kulman $\measuredangle CA'B'$ sisällä.

Saatiin siis, että $\overleftrightarrow{A'P}$ ei voi leikata sivua AC, joten se leikkaa sivua $CG \subset \overrightarrow{CD}$. Olkoon leikkauspiste I. Nyt $I \in \overrightarrow{CD}$, joten $IC\overleftrightarrow{A'B'}$. Koska piste P on kulman $\measuredangle CA'B'$ sisällä, niin $PC\overleftrightarrow{A'B'}$. Yhdistämällä tämä tietoon $IC\overleftrightarrow{A'B'}$ saadaan, että $IP\overleftrightarrow{A'B'}$, eli piste I on puolisuoralla $\overrightarrow{A'P}$. Siis puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa.

Alussa oletettiin, että $PA'\overleftrightarrow{CD}$. Jos $P\overleftrightarrow{CD}A'$, niin on olemassa piste $J \in \overleftrightarrow{CD}$ siten, että $P * J * A'$. Valitaan piste P' siten, että $A' * P' * J$, jolloin siis $P'A'\overleftrightarrow{CD}$ ja $P' \in \measuredangle(CA'B')$. Piste P voidaan nyt korvata pisteellä P' ja tutkia puolisuoran $\overrightarrow{AP}$ sijasta puolisuoraa $\overrightarrow{AP'}$, jolloin siis piste G on puolisuorien $\overrightarrow{AP'}$ ja $\overrightarrow{CD}$ leikkauspiste. Jos piste P on suoralla $\overleftrightarrow{CD}$, niin korvataan se pisteellä P' kuten edellä.



Kuva 2.8. Lause 2.9: kohta (1), $A' \in \overrightarrow{AB}$. a) $PA'\overleftrightarrow{CD}$. b) $P\overleftrightarrow{CD}A'$.

Tutkitaan seuraavaksi tapausta $A' \notin \overrightarrow{AB}$. Olkoon pisteet Q ja R siten, että $P * A' * Q$ ja $Q * A * R$.

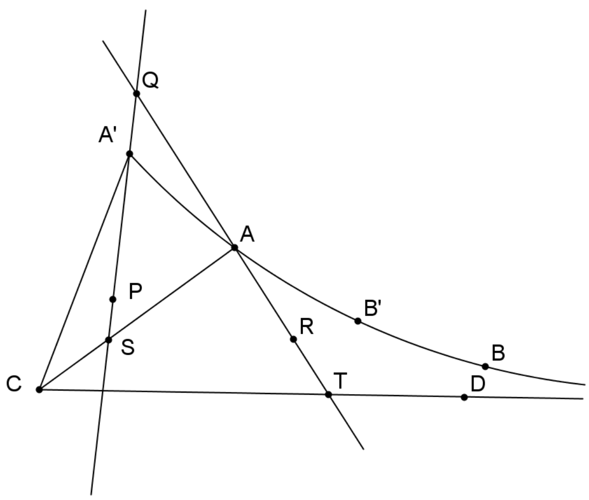
Osoitetaan, että $R \in \measuredangle(CAB)$. Nyt $P\overleftrightarrow{A'B}Q$ eli $P\overleftrightarrow{AB}Q$ ja $Q\overleftrightarrow{AB}R$, joten aksiooman (H7) mukaan $PR\overleftrightarrow{AB}$. Koska $P \in \measuredangle(CA'B')$, niin $PC\overleftrightarrow{A'B'}$ eli $PC\overleftrightarrow{AB}$. Tästä ja siitä, että $PR\overleftrightarrow{AB}$ saadaan $RC\overleftrightarrow{AB}$ aksiooman (H7) avulla.

Koska piste A' ei ole puolisuoralla $\overrightarrow{AB}$, niin puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ ei ole puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ osajoukko. Koska puolisuorat ovat kuitenkin samansuuntaiset, $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{A'B'}$. Näin ollen erityisesti piste A on puolisuoralla $\overrightarrow{A'B'}$ eli $\measuredangle CA'B' = \measuredangle CA'A$ ($A \neq A'$, koska $A' \notin \overrightarrow{AB}$). Täten puomilauseen nojalla on olemassa piste $S \in \overrightarrow{A'P}$ siten, että $A{*}S{*}C$. Koska $S \in \overrightarrow{A'P}$ ja $P * A' * Q$, niin $Q * A' * S$. Näin ollen $QA'\overleftrightarrow{AC}$. Koska $Q * A * R$, niin $Q\overleftrightarrow{AC}R$. Näistä saadaan, että $A'\overleftrightarrow{AC}R$. Koska lisäksi $A'\overleftrightarrow{AC}B$ ($A' \notin \overrightarrow{AB}$ eli $A' * A * B$), aksiooman (H7) mukaan $RB\overleftrightarrow{AC}$. Koska siis $RC\overleftrightarrow{AB}$ ja $RB\overleftrightarrow{AC}$, niin $R \in \measuredangle(CAB)$.

Kuten aiemmin, koska puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa, puolisuora $\overrightarrow{AR}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, olkoon leikkauspiste T. Nyt suora $\overleftrightarrow{A'P}$ leikkaa kolmion $\triangle ACT$ sivua AC (pisteessä S). Jälleen Paschin lauseen mukaan suora $\overleftrightarrow{A'P}$ leikkaa myös ainakin toista kolmion $\triangle ACT$ sivua. Suora $\overleftrightarrow{A'P}$ ei voi leikata sivua AT, koska tällöin se leikkaisi suoraa $\overleftrightarrow{AT}$ kahdessa pisteessä (toinen leikkauspiste Q). Siis $\overleftrightarrow{A'P}$ leikkaa sivua $CT \subset \overrightarrow{CD}$, ja vastaavasti kuten tapauksessa $A' \in \overrightarrow{AB}$ voidaan osoittaa, että leikkauspiste on puolisuoralla $\overrightarrow{A'P}$. Näin ollen puolisuora $\overrightarrow{A'B'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa.

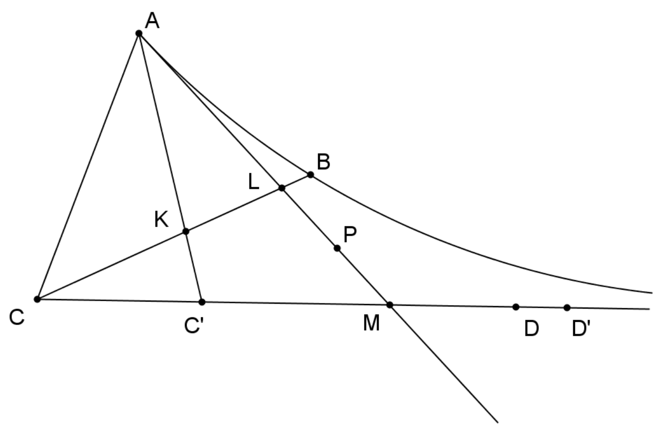
Kohta (2). Osoitetaan, että puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{C'D'}$ kaikilla pisteillä $P \in \measuredangle(C'AB)$. Jaetaan myös tämä tarkastelu kahteen osaan.

Oletetaan ensin, että $C' \in \overrightarrow{CD}$, jolloin lauseen 2.8 mukaan $C' \in \measuredangle(CAB)$. Osoitetaan, että $P \in \measuredangle(CAB)$. Koska piste P on kulman $\measuredangle C'AB$ sisällä, niin $PC'\overleftrightarrow{AB}$. Vastaavasti $C'C\overleftrightarrow{AB}$, sillä $C' \in \measuredangle(CAB)$. Näistä saadaan, että $PC\overleftrightarrow{AB}$. Koska $C' \in \measuredangle(CAB)$, niin puomilauseen nojalla on olemassa piste $K \in \overrightarrow{AC'}$ siten, että $B * K * C$.



KUVA 2.9. Lause 2.9: kohta (1), $A' \notin \overrightarrow{AB}$.

Edelleen piste P on kulman $\measuredangle C'AB = \measuredangle KAB$ sisällä, joten on olemassa myös piste $L \in \overrightarrow{AP}$ siten, että $B * L * K$. Tiedoista $B * K * C$ ja $B * L * K$ saadaan, että $B * L * C$, joten $BL\overleftrightarrow{AC}$. Lisäksi $PL\overleftrightarrow{AC}$, koska piste L on puolisuoralla $\overrightarrow{AP}$. Näin ollen $PB\overleftrightarrow{AC}$. Koska lisäksi $PC\overleftrightarrow{AB}$, on piste P kulman $\measuredangle CAB$ sisällä.

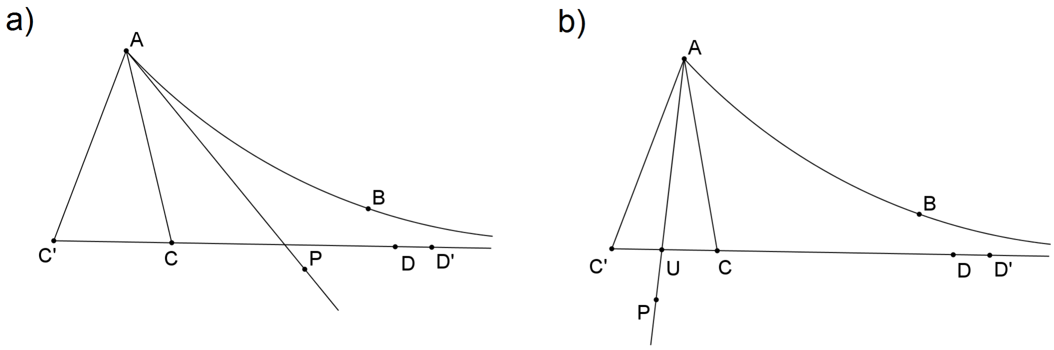


KUVA 2.10. Lause 2.9: kohta (2), $C' \in \overrightarrow{CD}$.

Koska $P \in \measuredangle(CAB)$ ja $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa, niin puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, olkoon leikkauspiste M. Nyt $M \in \measuredangle(C'AB)$, sillä $M \in \overrightarrow{AP}$ ja $P \in \measuredangle(C'AB)$. Täten $MB\overleftrightarrow{AC'}$. Koska $C' \in \measuredangle(CAB)$, niin puomilauseen perusteella puolisuora $\overrightarrow{AC'}$ leikkaa janaa CB. Näin ollen $C\overleftrightarrow{AC'}B$. Lisäksi $MB\overleftrightarrow{AC'}$, joten $C\overleftrightarrow{AC'}M$. Jos piste M ei ole puolisuoralla $\overrightarrow{C'D'}$ eli $M * C' * D'$, niin $M\overleftrightarrow{AC'}D'$. Koska lisäksi $C\overleftrightarrow{AC'}M$, niin $CD'\overleftrightarrow{AC'}$. Toisaalta $C' \in \overrightarrow{CD}$ ja puolisuorat $\overrightarrow{C'D'}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat samansuuntaiset, joten lemman 2.4 nojalla $\overrightarrow{C'D'} \subset \overrightarrow{CD}$. Täten lemman 2.2 perusteella $C * C' * D'$ eli $C\overleftrightarrow{AC'}D'$, mikä on ristiriita, sillä aiemmin saatiin, että $CD'\overleftrightarrow{AC'}$. Näin ollen $M \in \overrightarrow{C'D'}$, joten puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ kanssa.

Tutkitaan sitten tapausta, jossa piste C' on suoralla $\overleftrightarrow{CD}$, mutta ei puolisuoralla $\overrightarrow{CD}$. Nyt $CC'\overleftrightarrow{AB}$, sillä $C' \in \overleftrightarrow{CD}$ ja suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ ovat yhdensuuntaiset. Koska myös $PC'\overleftrightarrow{AB}$, niin aksiooman (H7) nojalla $PC\overleftrightarrow{AB}$. Nyt $P\overleftrightarrow{AC}C'$, $P \in \overleftrightarrow{AC}$ tai $PC'\overleftrightarrow{AC}$.

(1) $P\overleftrightarrow{AC}C'$: Nyt $C' \notin \overrightarrow{CD}$, joten piste C' ei ole kulman $\measuredangle CAB$ sisällä lauseen 2.8 mukaan. Koska kuitenkin $CC'\overleftrightarrow{AB}$, niin $C'\overleftrightarrow{AC}B$. Aksiooman (H7) avulla saadaan, että $PB\overleftrightarrow{AC}$, sillä $P\overleftrightarrow{AC}C'$. Siis $PC\overleftrightarrow{AB}$ ja $PB\overleftrightarrow{AC}$, joten piste P on kulman $\measuredangle CAB$ sisällä. Näin ollen puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, sillä puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa. Koska $C' \notin \overrightarrow{CD}$, niin puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$ ei ole puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ osajoukko, mutta koska puolisuorat ovat kuitenkin samansuuntaiset, niin $\overrightarrow{CD} \subset \overrightarrow{C'D'}$. Siis puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{C'D'}$.



Kuva 2.11. Lause 2.9: kohta (2), $C' \notin \overrightarrow{CD}$. a) $P\overleftrightarrow{AC}C'$. b) $PC'\overleftrightarrow{AC}$.

(2) $P \in \overleftrightarrow{AC}$: Koska nyt $PC\overleftrightarrow{AB}$, niin $C \in \overrightarrow{AP}$. Näin ollen puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{C'D'}$ pisteessä C.

(3) $PC'\overleftrightarrow{AC}$: Koska $C \in \overrightarrow{C'D'}$, niin $C \in \measuredangle(C'AB)$ lauseen 2.8 perusteella. Tällöin $CB\overleftrightarrow{AC'}$. Koska myös piste P on kulman $\measuredangle C'AB$ sisällä, niin $PB\overleftrightarrow{AC'}$. Näistä seuraa aksiooman (H7) mukaan, että $PC\overleftrightarrow{AC'}$. Siis $P \in \measuredangle(C'AC)$, sillä myös $PC'\overleftrightarrow{AC}$. Näin ollen puomilauseen nojalla on olemassa piste $U \in \overrightarrow{AP}$ siten, että $C' * U * C$, jolloin $U \in \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{C'D'}$.

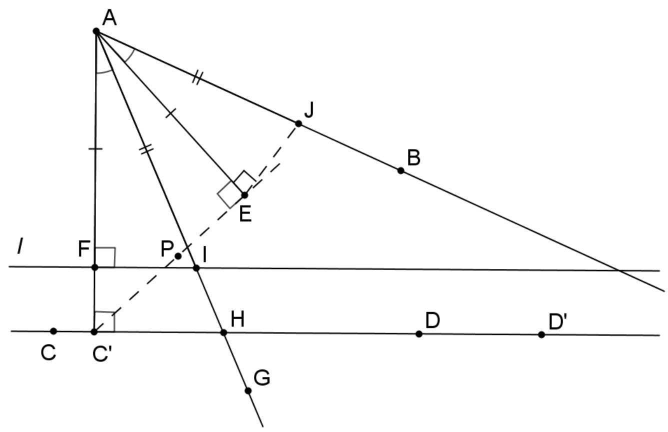
Saatiin siis, että jokaisessa tapauksessa puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{C'D'}$, eli puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ kanssa. □

LAUSE 2.10. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ puolisuoria. Jos $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa, niin myös $\overrightarrow{CD}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa.*

TODISTUS. Olkoon $\overleftrightarrow{AC'}$ suoran $\overleftrightarrow{CD}$ normaali siten, että $C' \in \overleftrightarrow{CD}$. Nyt lemman 2.3 mukaan on olemassa puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$, joka on samansuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa. Tällöin lauseen 2.9 perusteella puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ kanssa. Jos puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa, niin edelleen lauseen 2.9 perusteella puolisuora $\overrightarrow{CD}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa. Riittää siis osoittaa, että puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa. Oletetaan, että näin ei ole. Koska $\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{C'D'} = \overleftrightarrow{CD}$, niin $\overleftrightarrow{C'D'}||\overleftrightarrow{AB}$. Siis on olemassa piste $P \in \measuredangle(AC'D')$ siten, että puolisuora $\overrightarrow{C'P}$ ei leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{AB}$. Olkoon $\overleftrightarrow{AE}$ suoran $\overleftrightarrow{C'P}$ normaali siten, että $E \in \overleftrightarrow{C'P}$.

Piste P on kulman $\measuredangle AC'D'$ sisällä, joten $(\measuredangle AC'P)^\circ < (\measuredangle AC'D')^\circ = 90$. Jos $E * C' * P$, niin kulma $\measuredangle AC'E$ on kulman $\measuredangle AC'P$ täydennyskulma, joten tällöin $(\measuredangle AC'E)^\circ > 90$. Toisaalta $(\measuredangle AEC')^\circ = 90$, joten kolmiossa $\triangle AC'E$ olisi $(\measuredangle AC'E)^\circ + (\measuredangle AEC')^\circ > 180$, mikä on ristiriita. Siis piste E on puolisuoralla $\overrightarrow{C'P}$. Piste E on myös samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ kuin piste C', sillä muuten puolisuora $\overrightarrow{C'P}$ leikkaisi suoraa $\overleftrightarrow{AB}$. Nyt kulma $\measuredangle AEC'$ on suora kulma, joten kulma $\measuredangle AC'E$ on sitä pienempi, mistä seuraa, että $AE < AC'$. Näin ollen on olemassa piste F siten, että $A * F * C'$ ja $AE \cong AF$. Koska $P \in \measuredangle(AC'D')$, niin $PD'\overleftrightarrow{AC'}$. Lauseen 2.7 nojalla $BD'\overleftrightarrow{AC'}$, joten $PB\overleftrightarrow{AC'}$. Myös $EP\overleftrightarrow{AC'}$, sillä $E \in \overrightarrow{C'P}$, joten $EB\overleftrightarrow{AC'}$. Siis $EC'\overleftrightarrow{AB}$ ja $EB\overleftrightarrow{AC'}$, eli E on kulman $\measuredangle BAC'$ sisällä. Näin ollen $\measuredangle BAE < \measuredangle BAC'$.

Olkoon G piste siten, että $GE\overleftrightarrow{AC'}$ ja $\measuredangle GAC' \cong \measuredangle BAE$. Tällöin $\measuredangle GAC' \cong \measuredangle BAE < \measuredangle BAC'$. Lisäksi $GE\overleftrightarrow{AC'}$ ja $EB\overleftrightarrow{AC'}$, joten $GB\overleftrightarrow{AC'}$. Näin ollen $G \in \measuredangle(BAC')$. Koska G on kulman $\measuredangle BAC'$ sisällä ja puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{C'D'}$ kanssa, niin puolisuora $\overrightarrow{AG}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{C'D'}$, olkoon leikkauspiste H. Valitaan suora l siten, että se on suoran $\overleftrightarrow{AC'}$ normaali, joka kulkee pisteen F kautta. Koska $A * F * C'$, Paschin lauseen mukaan suora l leikkaa myös ainakin toista kolmion $\triangle AC'H$ sivua. Lisäksi suora l ei kulje pisteen C' kautta, joten $l \neq \overleftrightarrow{C'D'}$. Koska l on suoran $\overleftrightarrow{C'D'}$ normaalin normaali, se on yhdensuuntainen suoran $\overleftrightarrow{C'D'}$ kanssa. Suoran l täytyy siis leikata kolmion sivua $AH \subset \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}$, olkoon leikkauspiste I. Olkoon piste $J \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $AJ \cong AI$. Nyt $AF \cong AE$, $\measuredangle IAF = \measuredangle GAC' \cong \measuredangle BAE = \measuredangle JAE$ ja $AI \cong AJ$, joten SKS-säännön nojalla kolmiot $\triangle AFI$ ja $\triangle AEJ$ ovat yhtenevät. Näin ollen $\measuredangle AEJ$ on suora kulma, joten se on yhtenevä kulman $\measuredangle AEP$ kanssa. Jos $PJ\overleftrightarrow{AE}$, niin aksiooman (H11) mukaan $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EP}$. Kulman $\measuredangle AEP$ täydennyskulma on kuitenkin myös yhtenevä kulman $\measuredangle AEJ$ kanssa, joten joka tapauksessa $\overleftrightarrow{EJ} = \overleftrightarrow{EP}$. Siis puolisuora $\overrightarrow{C'P}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{AB}$ pisteessä J, mikä on ristiriita. Siis puolisuora $\overrightarrow{CD}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa. □



Kuva 2.12. Lause 2.10: asymptoottisen yhdensuuntaisuuden symmetrisyys.

Tästä lähtien voidaan sanoa, että “puolisuorat ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset” ja puhua “ asymptoottisista puolisuorista”, sillä relaatio on symmetrinen. Puolisuorien mainitsemisjärjestyksellä ei siis ole väliä.

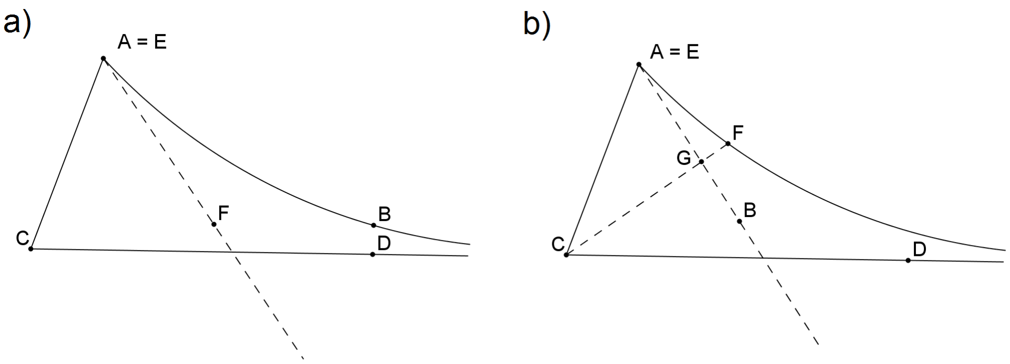
Lause 2.11. *Olkoon $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ puolisuoria siten, että $\overleftrightarrow{AB} \neq \overleftrightarrow{EF}$. Jos $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa ja $\overrightarrow{CD}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{EF}$ kanssa, niin $\overrightarrow{AB}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{EF}$ kanssa.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että pisteet A, C ja E ovat samalla suoralla. Nyt pisteet B, D ja F ovat kaikki samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{AC}$: Koska puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset, lauseen 2.7 mukaan $BD\overleftrightarrow{AC}$. Vastaavasti $DF\overleftrightarrow{AC}$. Näista saadaan, että $BF\overleftrightarrow{AC}$ (H7).

Jos lisäksi $A = E$ ja $FC\overleftrightarrow{AB}$, niin piste F on kulman $\measuredangle CAB$ sisällä. Tällöin asymptoottisen yhdensuuntaisuuden perusteella puolisuoran $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EF}$ pitäisi leikata puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, mikä on ristiriita, koska suorat $\overleftrightarrow{EF}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ ovat yhdensuuntaiset. Jos $F\overleftrightarrow{AB}C$, niin on olemassa piste $G \in \overleftrightarrow{AB}$ siten, että $F * G * C$. Näin ollen piste G on kulman $\measuredangle CEF$ sisällä. Jälleen saadaan vastaava ristiriita siitä, että puolisuora $\overrightarrow{EG} \subset \overleftrightarrow{AB}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, vaikka suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ ovat yhdensuuntaiset. Siis $A \neq E$, ja $A \neq C \neq E$ ($\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{CD}||\overleftrightarrow{EF}$), eli pisteet A, C ja E ovat eri pisteitä.

Olkoon $P \in \measuredangle(EAB)$. Tutkitaan mahdolliset tapaukset $A * C * E$, $A * E * C$ tai $C * A * E$.

Tapaus 1: $A{*}C{*}E$. Osoitetaan ensin, että suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ ovat yhdensuuntaiset. Nyt kaikille pisteille $H \neq A$ suoralla $\overleftrightarrow{AB}$ pätee, että $HA\overleftrightarrow{CD}$, sillä suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ ovat yhdensuuntaiset asymptoottisen yhdensuuntaisuuden määritelmän nojalla.



KUVA 2.13. Lause 2.11: $A = E$. a) $FC\overleftrightarrow{AB}$. b) $F\overleftrightarrow{AB}C$.

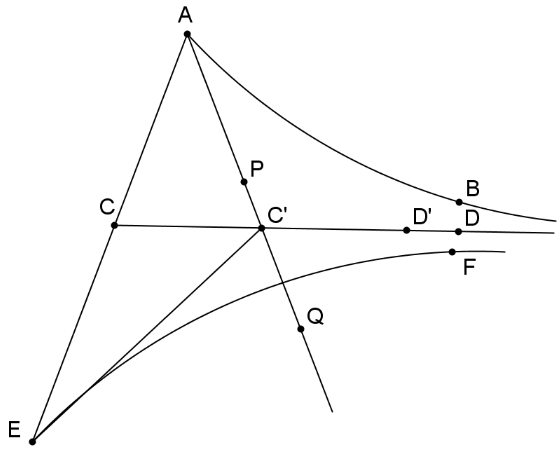
Vastaavasti $IE\overleftrightarrow{CD}$ kaikille pisteille $I \in \overleftrightarrow{EF}$, $I \neq E$. Jos on olemassa suorien $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ leikkauspiste J, niin $AJ\overleftrightarrow{CD}$. Koska lisäksi $A\overleftrightarrow{CD}E$ $(A*C*E)$, niin $E\overleftrightarrow{CD}J$. Tämä on ristiriita, koska piste J on myös suoralla $\overleftrightarrow{EF}$. Siis leikkauspistettä ei voi olla, joten suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ ovat yhdensuuntaiset.

Koska puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset ja $P \in \measuredangle(EAB) = \measuredangle(CAB)$, niin puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, olkoon leikkauspiste C'. Lemman 2.3 mukaan on olemassa puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$, joka on samansuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa. Näin ollen se on myös asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{EF}$ kanssa lauseen 2.9 nojalla, sillä puolisuorat $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Olkoon piste Q siten, että $A * C' * Q$. Tällöin $A\overleftrightarrow{C'D'}Q$, ja koska $A*C*E$, niin $A\overleftrightarrow{C'D'}E$. Näistä saadaan, että $EQ\overleftrightarrow{C'D'}$. Tiedoista $A*C'*Q$ ja $A * C * E$ saadaan myös, että $A\overleftrightarrow{C'E}Q$ ja $AC\overleftrightarrow{C'E}$, joista edelleen saadaan, että $C\overleftrightarrow{C'E}Q$. Nyt piste C' on puolisuoralla $\overrightarrow{CD}$ ja puolisuorat $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{C'D'}$ ovat samansuuntaiset, joten lemman 2.4 mukaan $\overrightarrow{C'D'} \subset \overrightarrow{CD}$. Tästä saadaan, että $C * C' * D'$ lemman 2.2 perusteella. Näin ollen $C\overleftrightarrow{C'E}D'$, ja koska myös $C\overleftrightarrow{C'E}Q$, niin $QD'\overleftrightarrow{C'E}$. Tämä yhdessä tiedon $EQ\overleftrightarrow{C'D'}$ kanssa antaa, että piste Q on kulman $\measuredangle EC'D'$ sisällä. Nyt puolisuora $\overrightarrow{C'Q}$ siis leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{EF}$, sillä $\overrightarrow{C'D'}$ ja $\overrightarrow{EF}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Siis myös puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{EF}$.

Tapaus 2: $A * E * C$. Suorien $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ yhdensuuntaisuuden todistamiseksi tehdään vastaväite ja oletetaan, että on olemassa leikkauspiste E'.

Oletetaan, että $E' \in \overrightarrow{EF} \setminus \{E\}$. Nyt on olemassa piste F' siten, että puolisuorat $\overrightarrow{E'F'}$ ja $\overrightarrow{EF}$ ovat samansuuntaiset (lemma 2.3). Tällöin puolisuora $\overrightarrow{E'F'}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa lauseiden 2.9 ja 2.10 nojalla. Olkoon R piste siten, että $A * E' * R$.

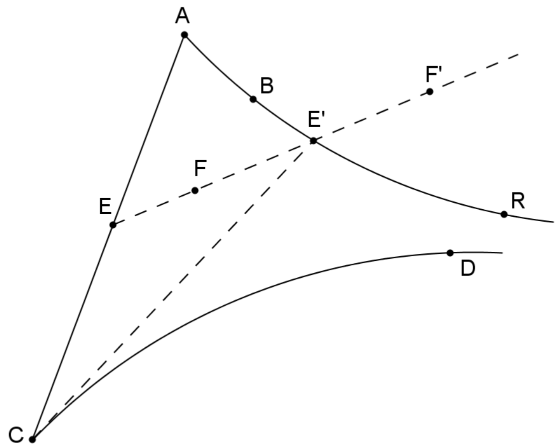
Osoitetaan seuraavaksi, että $R \in \measuredangle(CE'F')$. Koska $A * E * C$ ja $A * E' * R$, niin $A\overleftrightarrow{EF}C$ eli $A\overleftrightarrow{E'F'}C$ ja $A\overleftrightarrow{E'F'}R$, joten $RC\overleftrightarrow{E'F'}$. Tiedoista $A * E * C$ ja $A * E' * R$ saadaan myös, että $AE\overleftrightarrow{E'C}$ ja $A\overleftrightarrow{E'C}R$, joista edelleen saadaan, että $R\overleftrightarrow{E'C}E$. Koska $E' \in \overrightarrow{EF} \setminus \{E\}$ ja puolisuorat $\overrightarrow{E'F'}$ ja $\overrightarrow{EF}$ ovat samansuuntaiset, niin lemman 2.2



KUVA 2.14. Lause 2.11: Tapaus 1, $A * C * E$.

nojalla $E * E' * F'$, joten $E\overleftrightarrow{E'C}F'$. Koska lisäksi $R\overleftrightarrow{E'C}E$, niin $RF'\overleftrightarrow{E'C}$. Aiemmin todettiin, että myös $RC\overleftrightarrow{E'F'}$, joten piste R on kulman $\measuredangle CE'F'$ sisällä.

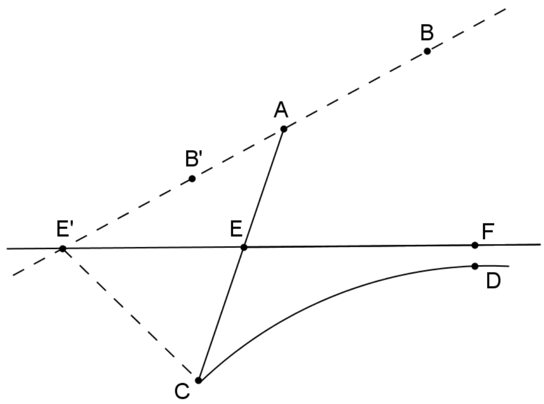
Näin ollen puolisuora $\overrightarrow{E'R}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{CD}$, eli suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ leikkaavat, mikä on ristiriita. Jos $E' = E$, niin $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AE'} = \overleftrightarrow{AE} = \overleftrightarrow{AC}$, joten suorat $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ leikkaavat. Tämä on ristiriita, joten $E' \notin \overrightarrow{EF}$.



KUVA 2.15. Lause 2.11: Tapaus 2, $A * E * C$; suorien $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ leikkauspiste $E' \in \overrightarrow{EF} \setminus \{E\}$.

Oletetaan sitten, että $E' \notin \overrightarrow{EF}$ eli $E' * E * F$. Koska $E' \in \overleftrightarrow{AB}$, niin lemman 2.3 perusteella on olemassa piste B' siten, että puolisuorat $\overrightarrow{E'B'}$ ja $\overrightarrow{AB}$ ovat samansuuntaiset. Kuten edellä, puolisuorat $\overrightarrow{E'B'}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Osoitetaan vielä, että piste E on kulman $\measuredangle CE'B'$ sisällä, jolloin saadaan ristiriita samaan tapaan kuin edellä siitä, että tällöin puolisuoran $\overrightarrow{E'E} \subset \overleftrightarrow{EF}$ pitäisi leikata puolisuoraa $\overrightarrow{CD} \subset \overleftrightarrow{CD}$.

Nyt $A*E*C$, joten $E \in \measuredangle(CE'A)$. Täytyy osoittaa vielä, että $\measuredangle CE'A = \measuredangle CE'B'$, eli että $A \in \overrightarrow{E'B'}$. Koska $E' * E * F$, niin $E'\overleftrightarrow{AE}F$ eli $E'\overleftrightarrow{AC}F$. Lisäksi aiemmin on todettu, että $BF\overleftrightarrow{AC}$, joten $E'\overleftrightarrow{AE}B$, mistä saadaan, että $E' * A * B$. Näin ollen $E' \notin \overrightarrow{AB}$, eli puolisuora $\overrightarrow{E'B'}$ ei ole puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ osajoukko. Koska puolisuorat ovat kuitenkin samansuuntaiset, niin $\overrightarrow{AB} \subset \overrightarrow{E'B'}$, joten $A \in \overrightarrow{E'B'}$.



Kuva 2.16. Lause 2.11: Tapaus 2, $A * E * C$; suorien $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ leikkauspiste $E' \notin \overrightarrow{EF}$.

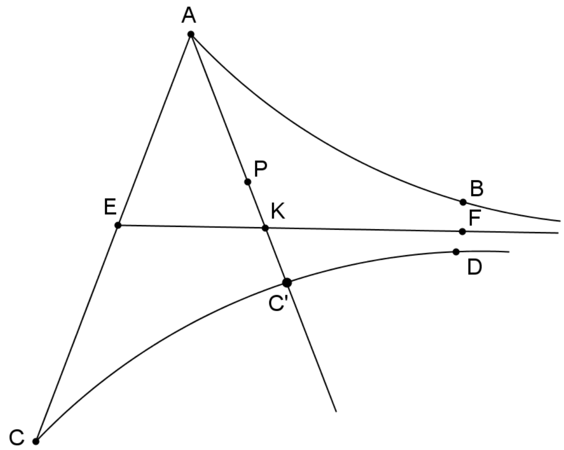
Suorien $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ yhdensuuntaisuus on siis osoitettu. Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan asymptoottisen yhdensuuntaisuuden toista ehtoa.

Kuten edellisessä kohdassa, on olemassa puolisuorien $\overrightarrow{AP}$ ja $\overrightarrow{CD}$ leikkauspiste C'. Nyt suora $\overleftrightarrow{EF}$ leikkaa kolmion $\triangle ACC'$ sivua AC, joten se leikkaa Paschin lauseen mukaan myös ainakin toista sivua. Koska suorat $\overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{EF}$ ovat yhdensuuntaiset, suoran $\overleftrightarrow{EF}$ täytyy leikata sivua AC', olkoon leikkauspiste K. Nyt $A \neq K \neq C'$, koska $\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{EF}$ ja $\overleftrightarrow{CD}||\overleftrightarrow{EF}$. Näin ollen $A * K * C'$, joten $KC'\overleftrightarrow{AC}$. Nyt $C' \neq C$ (muuten olisi $P \in \overleftrightarrow{AC}$ eli $P \notin \measuredangle(CAB)$), joten $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'}$. Nyt puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CC'}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset, joten lauseen 2.7 nojalla $BC'\overleftrightarrow{AC}$. Koska myös $KC'\overleftrightarrow{AC}$, niin $KB\overleftrightarrow{AC}$. Lisäksi aiemmin todettiin, että $BF\overleftrightarrow{AC}$, joten $KF\overleftrightarrow{AC}$ eli $KF\overleftrightarrow{AE}$. Siis $K \in \overrightarrow{EF}$, eli puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{EF}$.

Tapaus 3: $C * A * E$. Lauseen 2.10 mukaan nyt $\overrightarrow{EF}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa ja $\overrightarrow{CD}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa, joten tämä tapaus voidaan käsitellä samoin kuin tapaus (2).

Saatiin siis, että puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{EF}$ ja että $\overleftrightarrow{AB}||\overleftrightarrow{EF}$, joten puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{EF}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset.

Alussa oletettiin, että pisteet A, C ja E ovat samalla suoralla. Jos näin ei ole, niin toimitaan seuraavasti. Nyt joko $A\overleftrightarrow{CD}E$ tai $AE\overleftrightarrow{CD}$. Jos $A\overleftrightarrow{CD}E$, niin on olemassa



Kuva 2.17. Lause 2.11: Tapaus 2, $A * E * C$; puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{EF}$.

piste $C' \in \overleftrightarrow{CD}$, jolle pätee, että $A * C' * E$. Tällöin lemman 2.3 mukaan on olemassa puolisuora $\overrightarrow{C'D'}$, joka on samansuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa. Nyt puolisuora $\overrightarrow{CD}$ voidaan korvata puolisuoralla $\overrightarrow{C'D'}$ ja tehdä sama päättely kuin edellä, sillä lauseen 2.9 nojalla $\overrightarrow{C'D'}$ on myös asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuorien $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{EF}$ kanssa.

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa $AE\overleftrightarrow{CD}$. Jos kulmat $\measuredangle ACD$ ja $\measuredangle ECD$ olisivat yhtenevät, niin pisteet A, C ja E olisivat samalla suoralla, joten kulmat ovat eri kokoiset. Voidaan olettaa, että $\measuredangle ECD < \measuredangle ACD$, jolloin $E \in \measuredangle(ACD)$. Koska $\overrightarrow{CD}$ on asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ kanssa, niin puolisuora $\overrightarrow{CE}$ leikkaa puolisuoraa $\overrightarrow{AB}$. Tällöin on olemassa leikkauspiste A', ja puolisuora $\overrightarrow{AB}$ voidaan korvata samansuuntaisella puolisuoralla $\overrightarrow{A'B'}$ samaan tapaan kuten edellä. □

2.3. Rajayhdensuuntaisuus

Kootaan lopuksi yhteen edellä osoitetut tiedot. Määritellään *rajayhdensuuntaisiksi* sellaiset puolisuorat, jotka ovat joko samansuuntaisia tai asymptoottisesti yhdensuuntaisia, ja osoitetaan aiempien tulosten avulla, että rajayhdensuuntaisuus on ekvivalenssirelaatio.

Määritelmä 2.12. Puolisuora $\overrightarrow{AB}$ on *rajayhdensuuntainen* puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa eli puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ *rajapuolisuora* (merkitään $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{CD}$), jos se on samansuuntainen tai asymptoottisesti yhdensuuntainen puolisuoran $\overrightarrow{CD}$ kanssa.

Lause 2.13. *Rajayhdensuuntaisuus on ekvivalenssirelaatio.*

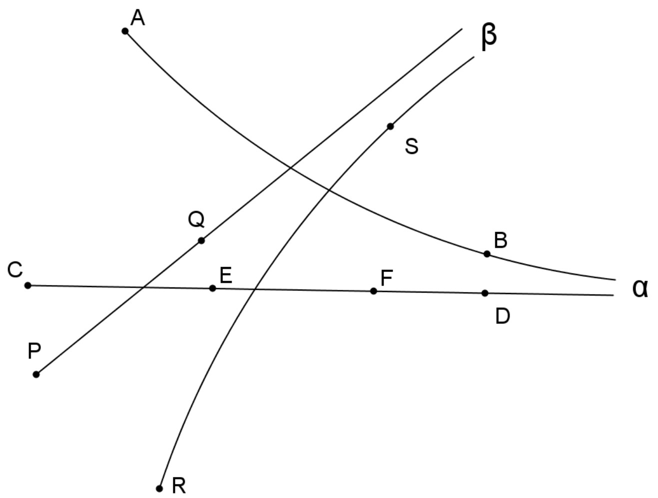
Todistus. Samansuuntaisille puolisuorille tämä on osoitettu lauseessa 2.5. Erityisesti samansuuntaisuuden refleksiivisyydestä seuraa myös rajayhdensuuntaisuuden refleksiivisyys. Asymptoottisisille puolisuorille symmetrisyys on osoitettu lauseessa

2.10 ja transitiivisuus lauseessa 2.11. Riittää siis osoittaa transitiivisuus siinä tapauksessa, että kaikki puolisuorat eivät ole samansuuntaisia tai asymptoottisia. Jos $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat samansuuntaiset ja $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ asymptoottiset, niin $\overrightarrow{AB}|||\overrightarrow{EF}$ lauseen 2.9 perusteella, samoin, jos $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat asymptoottiset ja $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ samansuuntaiset. □

Nyt kun rajayhdensuuntaisuus on osoitettu ekvivalenssirelaatioksi, puolisuorat voidaan jakaa sen avulla ekvivalenssiluokkiin.

MÄÄRITELMÄ 2.14. Puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ *pääty* on $\alpha = [\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{CD} \in \mathcal{A} : \overrightarrow{CD}|||\overrightarrow{AB}\}$, missä $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{PQ} : \overrightarrow{PQ}$ on puolisuora$\}$.

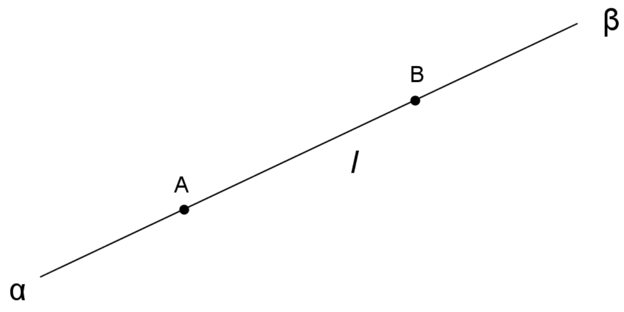
HUOMAUTUS 2.15. Puolisuoran pääty kertoo yksikäsitteisesti puolisuoran suunnan, joten sen avulla voidaan ottaa käyttöön uusi merkintä. Olkoon $\overrightarrow{AB}$ puolisuora ja α sen pääty. Tällöin voidaan merkitä $\overrightarrow{AB} = A\alpha$.



KUVA 2.18. Puolisuorilla $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{EF}$ on yhteinen pääty α eli $\overrightarrow{AB} = A\alpha$, $\overrightarrow{CD} = C\alpha$ ja $\overrightarrow{EF} = E\alpha$. Puolisuorilla $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{RS}$ on yhteinen pääty β.

Yleistetään seuraavaksi päädyn käsite koskemaan myös suoria.

MÄÄRITELMÄ 2.16. Olkoon l suora ja $A\alpha$ ja $B\beta$ puolisuorat suoralla l siten, että $\alpha \neq \beta$. Tällöin α ja β ovat *suoran l päädyt*, ja voidaan merkitä $l = \alpha\beta$.



Kuva 2.19. Suoralla l on päädyt α ja β.

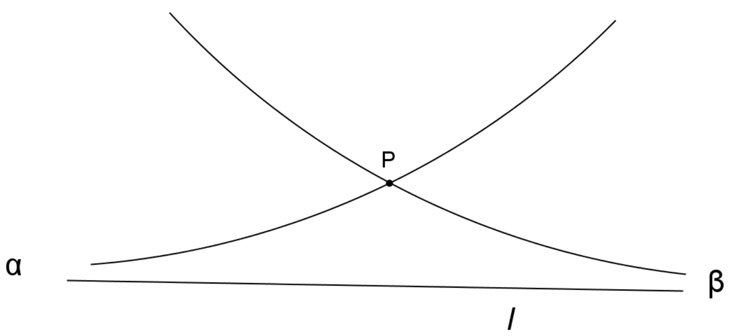
LUKU 3

Asymptoottiset kolmiot

Tämän luvun Lauseiden 3.5 ja 3.14 todistukset on otettu Hartshornen kirjasta, samoin käyttämäni hyperbolinen aksiooma. Lauseiden 3.6 ja 3.7 todistukset ovat Trudeaun kirjasta, ja seuraus 3.12, lauseet 3.15 ja 3.18 sekä lemma 3.26 ovat omia aputuloksiani. Muut todistukset ovat ratkaisujani Hartshornen tehtäviin.

Tähän mennessä kaikki esitetyt tulokset ovat olleet neutraalin geometrian tuloksia. Seuraavan *hyperbolisen aksiooman* käyttöön ottaminen tekee tarkasteltavasta geometriasta hyperbolista.

(HYP) Olkoon $l = \alpha\beta$ ja piste $P \notin l$. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset puolisuorat $P\alpha$ ja $P\beta$ siten, että ne eivät ole samalla suoralla.



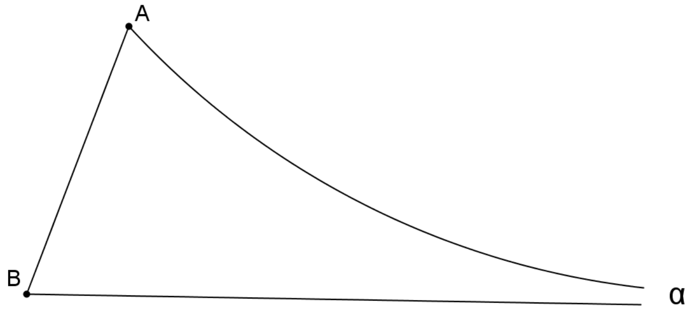
KUVA 3.1. Hyperbolinen aksiooma: Pisteen P kautta kulkee ainakin kaksi suoran l kanssa yhdensuuntaista suoraa.

HUOMAUTUS 3.1. Hyperbolisessa geometriassa, jossa suoran l kanssa yhdensuuntaisia ja tietyn pisteen kautta kulkevia suoria on useampia kuin yksi, asymptoottiset puolisuorat ovat näistä suorista lähimpänä suoraa l ja lähestyvät sitä nimensä mukaisesti asymptoottisesti. Euklidisessa geometriassa kaikki suoran l kanssa yhdensuuntaiset suorat ovat asymptoottisia määritelmien 2.6 ja 2.16 mukaan. Ne eivät kuitenkaan lähesty suoraa l asymptoottisesti, kuten nimestä voisi päätellä. Siksi on kyseenalaista puhua asymptoottisista suorista tai puolisuorista euklidisessa geometriassa.

3.1. Yksinkertaiset asymptoottiset kolmiot

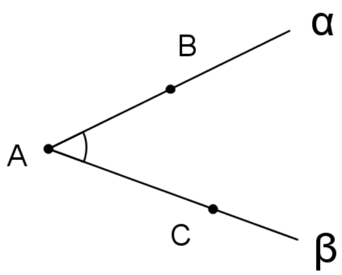
Määritellään aluksi yksinkertainen asymptoottinen kolmio, joka muodostuu asymptoottisista puolisuorista.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Olkoon $A\alpha$ ja $B\alpha$ puolisuoria siten, että piste B ei ole samalla suoralla kuin $A\alpha$. Tällöin jana AB ja puolisuorat $A\alpha$ ja $B\alpha$ muodostavat *(yksinkertaisen) asymptoottisen kolmion* $\triangle AB\alpha$. Puolisuoria $A\alpha$ ja $B\alpha$ sanotaan asymptoottisen kolmion *sivuiksi*, ja janaa AB sanotaan *sivuksi* tai *kannaksi*.



KUVA 3.2. Asymptoottinen kolmio $\triangle AB\alpha$.

HUOMAUTUS 3.3. Samaan tapaan kuin aiemmin puolisuoralle otettiin käyttöön uusi merkintä, voidaan myös kulmalle ottaa uusia merkintätapoja päädyn avulla. Olkoon $\measuredangle BAC$ kulma ja α puolisuoran $\overrightarrow{AB}$ pääty ja β puolisuoran $\overrightarrow{AC}$ pääty. Nyt voidaan merkitä $\measuredangle BAC = \measuredangle \alpha AC = \measuredangle BA\beta = \measuredangle \alpha A\beta$. Näin ollen asymptoottisen kolmion $\triangle AB\alpha$ kaksi kulmaa ovat $\measuredangle BA\alpha$ ja $\measuredangle AB\alpha$.



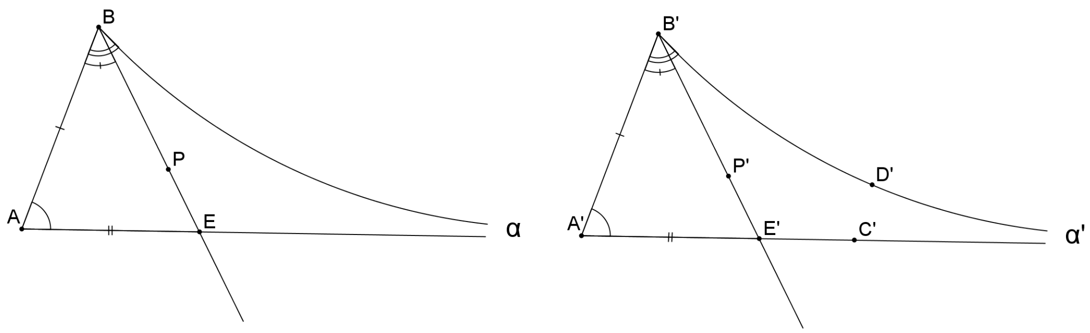
KUVA 3.3. Kulma $\measuredangle \alpha A\beta$.

Todistetaan seuraavaksi eräitä asymptoottisia kolmioita koskevia tuloksia, muun muassa ulkokulmaepäyhtälön vastine asymptoottiselle kolmiolle ja kaksi yhtenevyyslausetta.

LAUSE 3.4. *Olkoon $\triangle AB\alpha$ asymptoottinen kolmio ja puolisuorat $\overrightarrow{A'C'} = A'\alpha'$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ siten, että $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle B'A'\alpha'$, $\measuredangle AB\alpha \cong \measuredangle A'B'D'$ ja $AB \cong A'B'$. Jos lisäksi $C'D'\overleftrightarrow{A'B'}$, niin $\overrightarrow{B'D'} = B'\alpha'$.*

TODISTUS. Olkoon piste P' kulman $\measuredangle A'B'D'$ sisällä, jolloin $\measuredangle A'B'P' < \measuredangle A'B'D' \cong \measuredangle AB\alpha$. Näin ollen on olemassa piste $P \in \measuredangle(AB\alpha)$ siten, että $\measuredangle ABP \cong \measuredangle A'B'P'$.

Asymptoottisen yhdensuuntaisuuden määritelmän mukaan tällöin puolisuora $\overrightarrow{BP}$ leikkaa puolisuoraa $A\alpha$. Merkitään leikkauspistettä kirjaimella E ja valitaan puolisuoralta $A'\alpha'$ piste E' siten, että $A'E' \cong AE$. Lisäksi oletusten mukaan $\measuredangle BAE = \measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle B'A'\alpha' = \measuredangle B'A'E'$ ja $AB \cong A'B'$, joten SKS-säännön nojalla kolmiot $\triangle ABE$ ja $\triangle A'B'E'$ ovat yhtenevät. Tästä saadaan, että $\measuredangle A'B'E' \cong \measuredangle ABE = \measuredangle ABP \cong \measuredangle A'B'P'$. Koska $E' \in A'\alpha' = \overrightarrow{A'C'}$, niin $C'E'\overleftrightarrow{A'B'}$, ja oletuksen perusteella $C'D'\overleftrightarrow{A'B'}$, joten $D'E'\overleftrightarrow{A'B'}$. Nyt piste P' on kulman $\measuredangle A'B'D'$ sisällä, joten $D'P'\overleftrightarrow{A'B'}$. Lisäksi $D'E'\overleftrightarrow{A'B'}$, jolloin $E'P'\overleftrightarrow{A'B'}$. Koska $\measuredangle A'B'E' \cong \measuredangle A'B'P'$ ja $E'P'\overleftrightarrow{A'B'}$, niin piste E' on puolisuoralla $\overrightarrow{B'P'}$, jolloin puolisuorat $\overrightarrow{B'P'}$ ja $A'\alpha'$ siis leikkaavat.



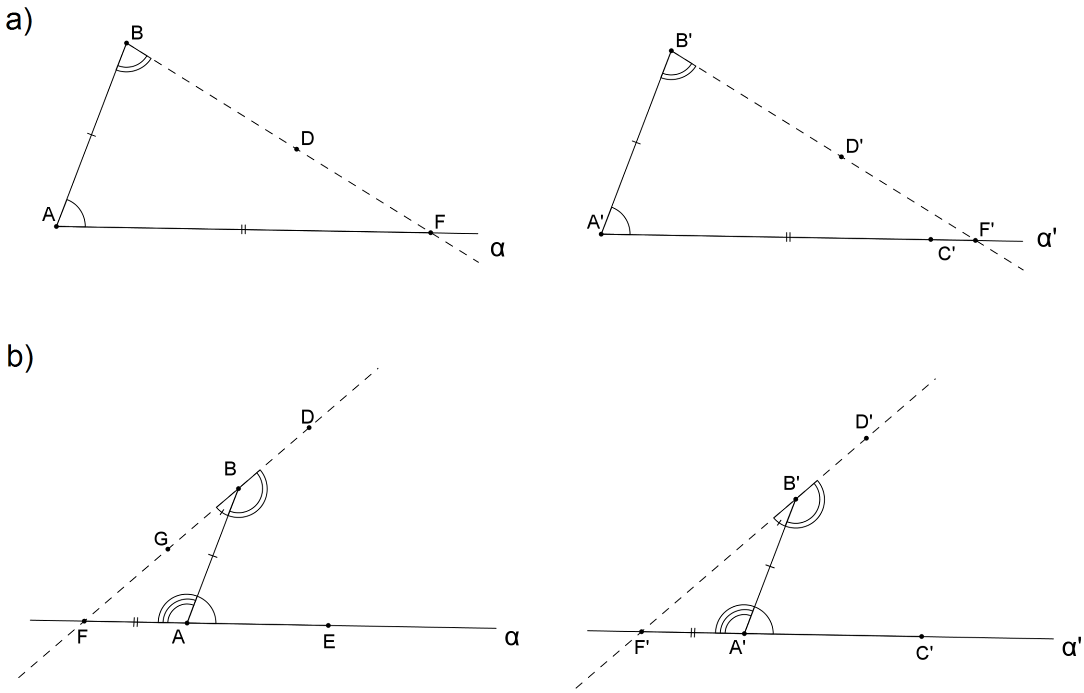
Kuva 3.4. Lause 3.4: puolisuora $\overrightarrow{B'P'}$ leikkaa puolisuoraa $A'\alpha'$.

Osoitetaan vielä, että suorat $\overleftrightarrow{B'D'}$ ja $\overleftrightarrow{A'C'}$ ovat yhdensuuntaiset. Tehdään vastaväite ja oletetaan, että on olemassa leikkauspiste F'. Oletetaan aluksi, että $F' \in \overrightarrow{A'\alpha'}$. Olkoon nyt piste $F \in A\alpha$ siten, että $A'F' \cong AF$. Tällöin kuten edellä SKS-säännön nojalla $\triangle ABF \cong \triangle A'B'F'$, josta saadaan, että $\measuredangle ABF \cong \measuredangle A'B'F' = \measuredangle A'B'D' \cong \measuredangle AB\alpha$. Olkoon piste D puolisuoralla $B\alpha$, jolloin lauseen 2.7 perusteella $DF\overleftrightarrow{AB}$. Nyt siis $\measuredangle ABF \cong \measuredangle AB\alpha = \measuredangle ABD$ ja $DF\overleftrightarrow{AB}$, joten $F \in \overleftrightarrow{BD}$, mikä on ristiriita.

Jos $F' \notin \overrightarrow{A'\alpha'}$, niin valitaan piste F siten, että $F * A * E$ ja $AF \cong A'F'$. Olkoon lisäksi piste G siten, että $G * B * D$. Nyt kulmat $\measuredangle BAF$ ja $\measuredangle B'A'F'$ ovat yhtenevien kulmien $\measuredangle BA\alpha$ ja $\measuredangle B'A'\alpha'$ vieruskulmina yhtenevät. Vastaavasti $\measuredangle ABG \cong \measuredangle A'B'F'$, sillä $\measuredangle ABD \cong \measuredangle A'B'D'$. Kuten aiemmin, SKS-lauseen mukaan kolmiot $\triangle ABF$ ja $\triangle A'B'F'$ ovat yhtenevät, jolloin $\measuredangle ABF \cong \measuredangle A'B'F' \cong \measuredangle ABG$. Koska $F * A * E$, niin $F\overleftrightarrow{AB}E$. Lisäksi $DE\overleftrightarrow{AB}$ (lause 2.7), joten $F\overleftrightarrow{AB}D$. Tiedosta $G * B * D$ saadaan, että $G\overleftrightarrow{AB}D$, jolloin $FG\overleftrightarrow{AB}$. Nyt siis $\measuredangle ABF \cong \measuredangle ABG$ ja $FG\overleftrightarrow{AB}$, joten $F \in \overleftrightarrow{BD}$, mikä on ristiriita.

Puolisuorat $A'\alpha'$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ ovat siis asymptoottisesti yhdensuuntaiset, eli $\overrightarrow{B'D'} = B'\alpha'$. □

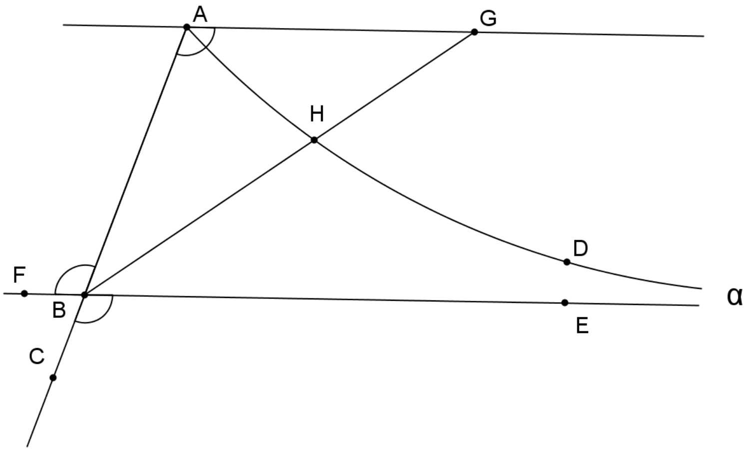
Lause 3.5. *(Ulkokulmaepäyhtälö) Olkoon $\triangle AB\alpha$ asymptoottinen kolmio ja piste C siten, että $A * B * C$. Tällöin kulma $\measuredangle CB\alpha$ on aidosti suurempi kuin kulma $\measuredangle BA\alpha$.*



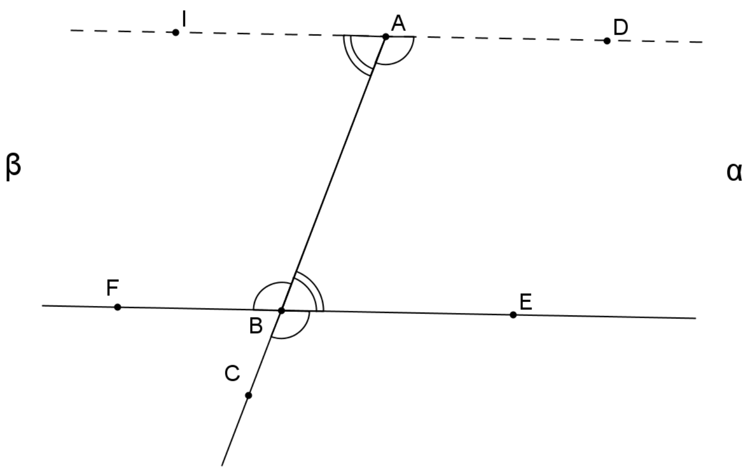
Kuva 3.5. Lause 3.4: suorat $\overleftrightarrow{B'D'}$ ja $\overleftrightarrow{A'C'}$ ovat yhdensuuntaiset. a) $F' \in \overrightarrow{A'\alpha'}$. b) $F' \notin \overrightarrow{A'\alpha'}$.

Todistus. Olkoon pisteet $D \in A\alpha$, $E \in B\alpha$ ja F siten, että $F * B * E$. Tällöin kulmat $\measuredangle CBE = \measuredangle CB\alpha$ ja $\measuredangle ABF$ ovat ristikulmina yhtenevät. Olkoon lisäksi $\overrightarrow{AG}$ puolisuora siten, että $\measuredangle BAG \cong \measuredangle ABF$ ja $DG\overleftrightarrow{AB}$. Tällöin vuorokulmalauseen mukaan suorat $\overleftrightarrow{AG}$ ja $\overleftrightarrow{BE}$ ovat yhdensuuntaiset. Näin ollen piste G ei voi olla kulman $\measuredangle BA\alpha = \measuredangle BAD$ sisällä, koska tällöin asymptoottisen yhdensuuntaisuuden määritelmän mukaan puolisuora $\overrightarrow{AG}$ leikkaisi puolisuoraa $\overrightarrow{BE}$. Koska kuitenkin $DG\overleftrightarrow{AB}$, täytyy olla $G\overleftrightarrow{AD}B$ tai $G \in \overrightarrow{AD}$. Jos $G\overleftrightarrow{AD}B$, niin on olemassa piste $H \in \overleftrightarrow{AD}$ siten, että $B * H * G$. Tällöin $HG\overleftrightarrow{AB}$, ja koska myös $DG\overleftrightarrow{AB}$, niin $DH\overleftrightarrow{AB}$ eli piste H on puolisuoralla $\overrightarrow{AD}$. Tiedosta $B * H * G$ saadaan myös, että $H \in \measuredangle(BAG)$, jolloin $\measuredangle BAD = \measuredangle BAH < \measuredangle BAG$. Jos $G \in \overrightarrow{AD}$, niin $\measuredangle BAD = \measuredangle BAG$. Saatiin siis, että $(\measuredangle BA\alpha)^\circ = (\measuredangle BAD)^\circ \leq (\measuredangle BAG)^\circ = (\measuredangle ABF)^\circ = (\measuredangle CBE)^\circ = (\measuredangle CB\alpha)^\circ$.

Oletetaan, että $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle CB\alpha$. Olkoon piste I siten, että $I * A * D$. Osoitetaan seuraavaksi lauseen 3.4 avulla, että puolisuorat $\overrightarrow{AI}$ ja $\overrightarrow{BF}$ sekä jana AB muodostavat asymptoottisen kolmion. Olkoon β puolisuoran $\overrightarrow{BF}$ pääty. Nyt $\measuredangle BAD = \measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle CB\alpha = \measuredangle CBE \cong \measuredangle ABF$, jolloin myös $\measuredangle BAI \cong \measuredangle ABE$. Lisäksi $AB = BA$. Koska $F * B * E$ ja $I * A * D$ ja, niin $F\overleftrightarrow{AB}E$ ja $I\overleftrightarrow{AB}D$. Lauseen 2.7 nojalla $DE\overleftrightarrow{AB}$, mistä yhdessä tiedon $F\overleftrightarrow{AB}E$ kanssa saadaan, että $F\overleftrightarrow{AB}D$. Lisäksi $I\overleftrightarrow{AB}D$, joten $FI\overleftrightarrow{AB}$. Lauseen 3.4 ehdot siis täyttyvät, joten $\overrightarrow{AI} = A\beta$. Tämä on kuitenkin ristiriita hyperbolisen aksiooman kanssa, sillä puolisuorat $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{AI}$ ovat samalla suoralla ja $\overleftrightarrow{BE} = \overleftrightarrow{BF}$. $\square$



Kuva 3.6. Lause 3.5: $(\measuredangle BA\alpha)^\circ \leq (\measuredangle CB\alpha)^\circ$.

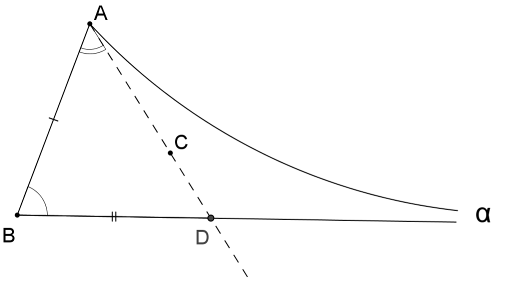


Kuva 3.7. Lause 3.5: $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle CB\alpha$.

Lause 3.6. *(Kulma-sivu, KS) Olkoon $\triangle AB\alpha$ ja $\triangle A'B'\alpha'$ asymptoottisia kolmioita siten, että $\measuredangle AB\alpha \cong \measuredangle A'B'\alpha'$ ja $AB \cong A'B'$. Tällöin $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle B'A'\alpha'$.*

Todistus. Tehdään vastaväite ja oletetaan, että kulmat $\measuredangle BA\alpha$ ja $\measuredangle B'A'\alpha'$ eivät ole yhtenevät. Voidaan olettaa, että $\measuredangle BA\alpha > \measuredangle B'A'\alpha'$. Tällöin on olemassa piste $C \in \measuredangle(BA\alpha)$ siten, että $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'\alpha'$. Koska puolisuorat $A\alpha$ ja $B\alpha$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset, puolisuora $\overrightarrow{AC}$ leikkaa puolisuoraa $B\alpha$. Olkoon leikkauspiste D ja piste $D' \in B'\alpha'$ siten, että $BD \cong B'D'$. Nyt $AB \cong A'B'$, $\measuredangle ABD = \measuredangle AB\alpha \cong \measuredangle A'B'\alpha' = \measuredangle A'B'D'$ ja $BD \cong B'D'$, joten kolmiot $\triangle ABD$ ja $\triangle A'B'D'$ ovat yhtenevät (SKS). Näin ollen $\measuredangle B'A'D' \cong \measuredangle BAD = \measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'\alpha'$. Olkoon $E' \in A'\alpha'$, jolloin siis $A'\alpha' = \overrightarrow{A'E'}$. Koska $D' \in B'\alpha'$, niin $B'\alpha' = \overrightarrow{B'D'}$. Nyt puolisuorat $\overrightarrow{A'E'}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset, joten lauseen 2.7

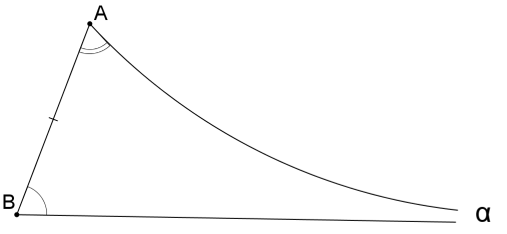
mukaan $D'E'\overleftrightarrow{A'B'}$. Lisäksi $\measuredangle B'A'D' \cong \measuredangle B'A'\alpha' = \measuredangle B'A'E'$, joten $\overrightarrow{A'E'} = \overrightarrow{A'D'}$. Tämä on ristiriita, sillä puolisuora $\overrightarrow{A'E'} = A'\alpha'$ ei leikkaa puolisuoraa $B'\alpha'$, kun taas puolisuora $\overrightarrow{A'D'}$ leikkaa. Näin ollen kulmat $\measuredangle BA\alpha$ ja $\measuredangle B'A'\alpha'$ ovat yhtenevät. □



Kuva 3.8. Lause 3.6: Kulma-sivu-sääntö (KS).

Lause 3.7. *(Kulma-kulma, KK) Olkoon $\triangle AB\alpha$ ja $\triangle A'B'\alpha'$ asymptoottisia kolmioita siten, että $\measuredangle AB\alpha \cong \measuredangle A'B'\alpha'$ ja $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle B'A'\alpha'$. Tällöin $AB \cong A'B'$.*

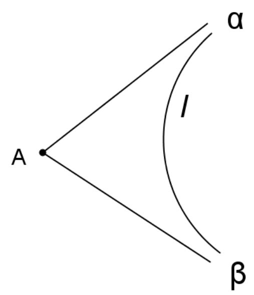
Todistus. Tehdään vastaväite ja oletetaan, että janat AB ja $A'B'$ eivät ole yhtenevät. Voidaan olettaa, että $AB < A'B'$. Tälloin on olemassa piste C' siten, että $A' * C' * B'$ ja $A'C' \cong AB$. Edelleen on olemassa puolisuora $C'\alpha'$, jolloin $\triangle A'C'\alpha'$ on asymptoottinen kolmio. Kolmioissa $\triangle AB\alpha$ ja $\triangle A'C'\alpha'$ on $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle B'A'\alpha' = \measuredangle C'A'\alpha'$ ja $A'C' \cong AB$, joten KS-lauseen mukaan $\measuredangle A'C'\alpha' \cong \measuredangle AB\alpha \cong \measuredangle A'B'\alpha'$. Toisaalta myös $\triangle B'C'\alpha'$ on asymptoottinen kolmio, joten lauseen 3.5 perusteella $\measuredangle A'C'\alpha' > \measuredangle A'B'\alpha'$, mikä on ristiriita. Siis janat AB ja $A'B'$ ovat yhtenevät. □



Kuva 3.9. Lause 3.7: Kulma-kulma-sääntö (KK).

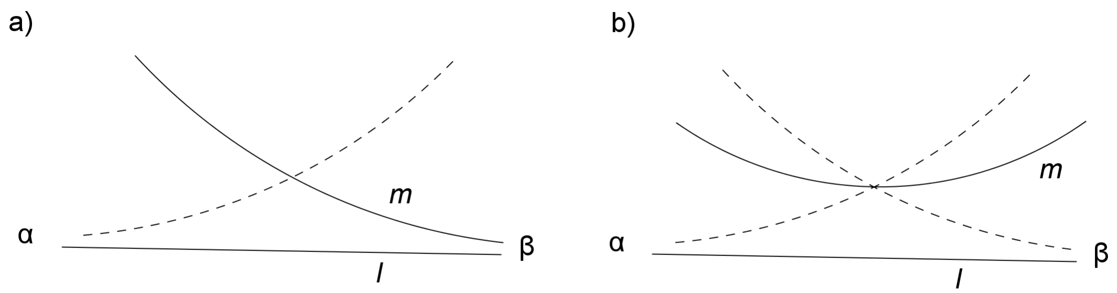
3.2. Kaksinkertaiset asymptoottiset kolmiot

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan kolmioita, joiden kärkipisteistä kaksi on äärettömyyspisteitä, eli *kaksinkertaisia asymptoottisia kolmioita.*Tällaiset kolmiot muodostuvat kulmasta ja suorasta, joka lähestyy kulman molempia kylkiä asymptoottisesti. Tällaisen niin sanotun *kulman sulkevan suoran* olemassaolon todistusta varten tarvitaan muutamia määritelmiä ja aputuloksia.



Kuva 3.10. Kaksinkertainen asymptoottinen kolmio $\triangle A\alpha\beta$ ja kulman $\measuredangle \alpha A\beta$ sulkeva suora l.

Määritelmä 3.8. Olkoon $l = \alpha\beta$ ja m yhdensuuntaisia suoria. Jos suoralla m on pääty α tai β, suorat l ja m ovat *asymptoottisesti yhdensuuntaiset*. Muuten ne ovat *normaalisti yhdensuuntaiset*.



Kuva 3.11. a) Asymptoottisesti yhdensuuntaiset suorat l ja m. b) Normaalisti yhdensuuntaiset suorat l ja m.

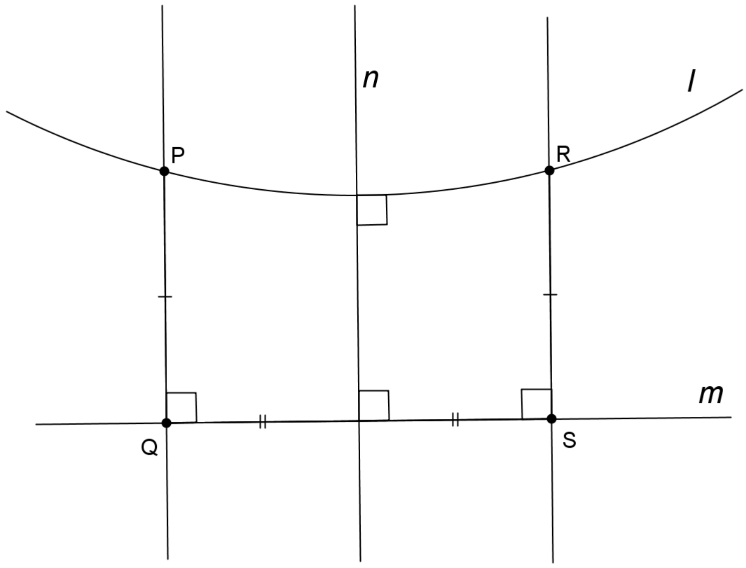
Huomautus 3.9. Määritelmä 3.8 siis yleistää asymptoottisen yhdensuuntaisuuden koskemaan suoria. Huomaa myös, että suoralla m ei voi olla molempia päätyjä α ja β: Jos piste $P \in m$ ja $m = \alpha\beta$, niin $P \notin l$ $(l||m)$ ja puolisuorat $P\alpha$ ja $P\beta$ ovat samalla suoralla m. Tämä ei kuitenkaan hyperbolisen aksiooman mukaan ole mahdollista.

Lemma 3.10. *Olkoon l ja m normaalisti yhdensuuntaiset suorat. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi suora n, joka on normaali molemmille suorille l ja m.*

Todistus. Todistuksessa hyödynnetään niin sanottuja Saccherin nelikulmioita ja niihin liittyvää tulosta. Olkoon $\square ABCD$ nelikulmio. Jos kulmat $\measuredangle BAD$ ja $\measuredangle ABC$ ovat suoria kulmia ja $AD \cong BC$, niin $\square ABCD$ on *Saccherin nelikulmio*. Tällaiselle nelikulmiolle pätee, että janojen AB ja CD keskipisteet yhdistävä suora on normaali molemmille suorille $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$.

Valitaan nyt pisteet P, Q, R ja S siten, että pisteet P ja R ovat suoralla l, pisteet Q ja S ovat suoralla m, $\overleftrightarrow{PQ} \perp m$ ja $\overleftrightarrow{RS} \perp m$. Jos $PQ \cong RS$, niin $\square PQSR$ on Saccherin nelikulmio, jolloin janojen PR ja QS keskipisteet yhdistävä suora on normaali n.

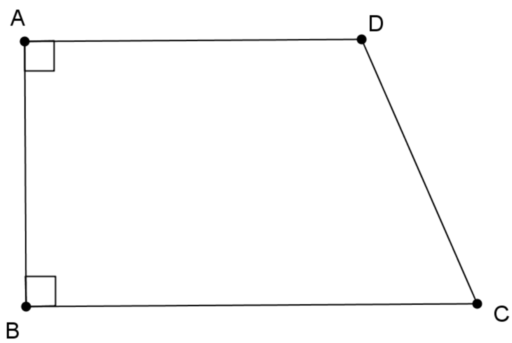
Jos janat PQ ja RS eivät ole yhtenevät, niin todistuksessa konstruoidaan yhtenevät janat EF ja HG siten, että muodostuu Saccherin nelikulmio, johon edellä mainittua tulosta voidaan käyttää. Yksikäsitteisyys perustuu siihen, että jos olisi kaksi yhteistä normaalia, niin muodostuisi suorakulmio, mikä ei ole mahdollista hyperbolisessa geometriassa. Katso yksityiskohdat [**1**, s. 377-378], [**3**, s. 215-217]. □



KUVA 3.12. Lemma 3.10: normaalisti yhdensuuntaisilla suorilla on täsmälleen yksi yhteinen normaali.

LEMMA 3.11. *Olkoon* $\square ABCD$ *nelikulmio, jossa kulmat* $\measuredangle BAD$ *ja* $\measuredangle ABC$ *ovat suoria kulmia. Tällöin* $\measuredangle BCD < \measuredangle ADC$ *jos ja vain jos* $AD < BC$.

TODISTUS. Sivuutetaan, ks. [**1**, s. 307]. □



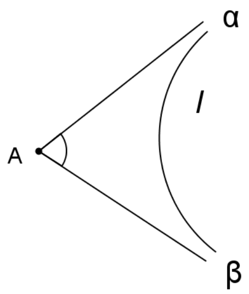
KUVA 3.13. Lemma 3.11: $\measuredangle BCD < \measuredangle ADC$ jos ja vain jos $AD < BC$.

SEURAUS 3.12. *Olkoon* $\square ABCD$ *nelikulmio, jossa kulmat* $\measuredangle BAD$ *ja* $\measuredangle ABC$ *ovat suoria kulmia. Jos* $\measuredangle BCD \cong \measuredangle ADC$*, niin* $AD \cong BC$*.*

TODISTUS. Tehdään vastaväite ja oletetaan, että $AD < BC$. Tällöin lemman 3.11 mukaan $\measuredangle BCD < \measuredangle ADC$, mikä on ristiriita. Jos $BC < AD$, niin $\measuredangle ADC < \measuredangle BCD$, mikä on myös ristiriita, joten $AD \cong BC$. $\square$

Nyt voidaan määritellä kulman sulkeva suora ja todistaa sen olemassaolo ja yksikäsitteisyys.

MÄÄRITELMÄ 3.13. Suora $l = \alpha\beta$ on *kulman* $\measuredangle \alpha A\beta$ *sulkeva suora.*

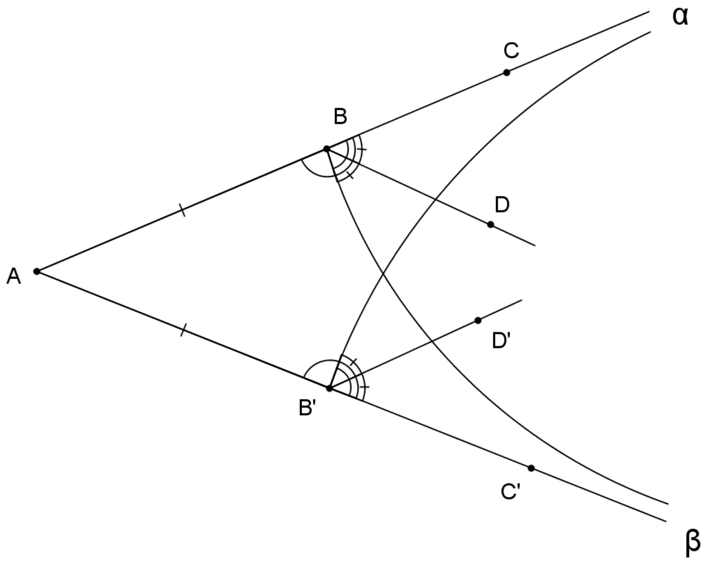


KUVA 3.14. Kulman $\measuredangle \alpha A\beta$ sulkeva suora l.

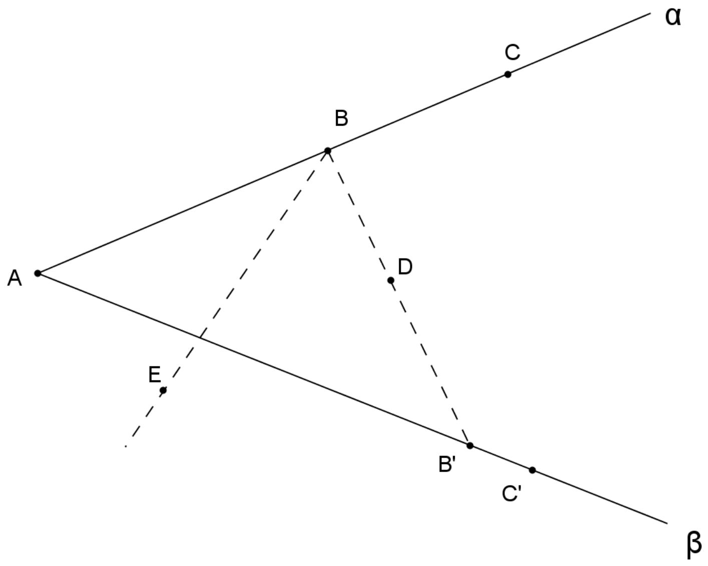
LAUSE 3.14. *On olemassa täsmälleen yksi kulman* $\measuredangle \alpha A\beta$ *sulkeva suora.*

TODISTUS. Olkoon $B \in A\alpha$ ja $B' \in A\beta$ siten, että $AB \cong AB'$, ja pisteet C ja C' siten, että $A * B * C$ ja $A * B' * C'$. Nyt hyperbolisen aksiooman mukaan on olemassa puolisuorat $B\beta$ ja $B'\alpha$, jolloin muodostuvat kulmat $\measuredangle CB\beta$ ja $\measuredangle C'B'\alpha$. Olkoon puolisuora $\overrightarrow{BD}$ kulman $\measuredangle CB\beta$ puolittaja ja puolisuora $\overrightarrow{B'D'}$ kulman $\measuredangle C'B'\alpha$ puolittaja. Aymptoottisissa kolmioissa $\triangle AB\beta$ ja $\triangle AB'\alpha$ on $\measuredangle BA\beta = \measuredangle B'A\alpha$ ja $AB \cong AB'$, joten KS-yhtenevyyslauseen perusteella kulmat $\measuredangle AB\beta$ ja $\measuredangle AB'\alpha$ ovat yhtenevät. Näin ollen myös niiden vieruskulmat $\measuredangle CB\beta$ ja $C'B'\alpha$ ovat yhtenevät. Edelleen puolisuorat $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ ovat näiden yhtenevien kulmien puolittajat, joten kaikki neljä kulmaa $\measuredangle CBD$, $\measuredangle DB\beta$, $\measuredangle C'B'D'$ ja $\measuredangle D'B'\alpha$ ovat yhtenevät. Nyt on neljä vaihtoehtoa: $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{B'D'}$, suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ leikkaavat yhdessä pisteessä, ne ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset tai ne ovat normaalisti yhdensuuntaiset. Tutkitaan kaikki neljä tapausta.

Tapaus 1: $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{B'D'}$. Olkoon piste $E \in B\beta$. Nyt puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on kulman $\measuredangle CB\beta = \measuredangle CBE$ puolittaja, joten se on kyseisen kulman sisällä. Näin ollen $DE\overleftrightarrow{BC}$ eli $DE\overleftrightarrow{AB}$. Lisäksi lauseen 2.7 nojalla $C'E\overleftrightarrow{AB}$, joten $C'D\overleftrightarrow{AB}$. Koska $B'C'\overleftrightarrow{AB}$ $(A * B' * C')$, niin $B'D\overleftrightarrow{AB}$, joten piste B' on puolisuoralla $\overrightarrow{BD}$. Nyt siis myös piste B' on kulman $\measuredangle CBE$ sisällä. Lisäksi $A * B * C$, joten $E \in \measuredangle(ABB')$. Puomilauseen mukaan tällöin puolisuora $\overrightarrow{BE}$ leikkaa janaa $AB' \subset \overrightarrow{AB'}$, mikä on ristiriita, sillä puolisuorat $\overrightarrow{AB'} = A\beta$ ja $\overrightarrow{BE} = B\beta$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Tapaus 1 ei siis ole mahdollinen.



KUVA 3.15. Lause 3.14: kulmat $\measuredangle CBD$, $\measuredangle DB\beta$, $\measuredangle C'B'D'$ ja $\measuredangle D'B'\alpha$ ovat yhtenevät.



KUVA 3.16. Lause 3.14: Tapaus 1, $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{B'D'}$.

Tapaus 2: Suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ leikkaavat yhdessä pisteessä. Olkoon leikkauspiste P, ja oletetaan, että se on puolisuoralla $\overrightarrow{BD}$. Osoitetaan, että se on tällöin myös puolisuoralla $\overrightarrow{B'D'}$. Koska $P \in \overrightarrow{BD}$, niin $DP\overleftrightarrow{BB'}$. Nyt $A * B * C$, joten $A\overleftrightarrow{BB'}C$, ja vastaavasti $A\overleftrightarrow{BB'}C'$. Näistä saadaan, että $CC'\overleftrightarrow{BB'}$. Koska $A{*}B'{*}C'$, niin lemman 2.2 perusteella $\overrightarrow{B'C'} \subset \overrightarrow{AB'}$, joten puolisuorat $\overrightarrow{AB'} = A\beta$ ja $\overrightarrow{B'C'}$ ovat samansuuntaiset. Näin ollen $\overrightarrow{B'C'} = B'\beta$. Nyt $C' \in B'\beta$ ja $E \in B\beta$, joten lauseen 2.7 mukaan $C'E\overleftrightarrow{BB'}$. Tämä yhdessä tiedon $CC'\overleftrightarrow{BB'}$ kanssa antaa, että $CE\overleftrightarrow{BB'}$. Aiemmin todettiin, että puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on kulman $\measuredangle CBE$ sisällä. Tällöin puomilauseen mukaan on olemassa piste $F \in \overrightarrow{BD}$ siten, että $C * F * E$. Jos $C\overleftrightarrow{BB'}F$, niin on olemassa piste $G \in \overleftrightarrow{BB'}$ siten, että $C * G * F$. Koska lisäksi $C * F * E$, niin $C * G * E$. Tällöin $C\overleftrightarrow{BB'}E$, mikä on ristiriita, sillä edellä näytettiin, että $CE\overleftrightarrow{BB'}$. Näin ollen $CF\overleftrightarrow{BB'}$. Koska piste F on puolisuoralla $\overrightarrow{BD}$, niin lisäksi $DF\overleftrightarrow{BB'}$, joten $CD\overleftrightarrow{BB'}$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $C'D'\overleftrightarrow{BB'}$. Koska $CC'\overleftrightarrow{BB'}$ ja $CD\overleftrightarrow{BB'}$, niin $C'D\overleftrightarrow{BB'}$. Lisäksi $C'D'\overleftrightarrow{BB'}$, joten $DD'\overleftrightarrow{BB'}$. Edelleen, koska $DP\overleftrightarrow{BB'}$, niin $D'P\overleftrightarrow{BB'}$. Siis piste P on myös puolisuoralla $\overrightarrow{B'D'}$.

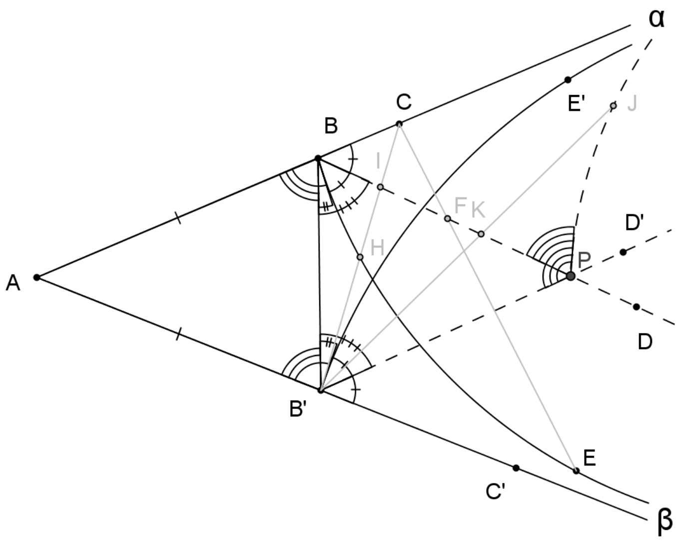
Kolmio $\triangle ABB'$ on tasakylkinen, joten $\measuredangle ABB' \cong \measuredangle AB'B$, ja aiemmin todettiin, että $\measuredangle AB\beta \cong \measuredangle AB'\alpha$. Koska piste $B' \neq A$ on puolisuoralla $A\beta$, niin lauseen 2.8 nojalla $B' \in \measuredangle(AB\beta)$. Vastaavasti $B \in \measuredangle(AB'\alpha)$. Nyt siis $\measuredangle ABB' \cong \measuredangle AB'B$, $\measuredangle AB\beta \cong \measuredangle AB'\alpha$, $B' \in \measuredangle(AB\beta)$ ja $B \in \measuredangle(AB'\alpha)$, joten $\measuredangle B'B\beta \cong \measuredangle BB'\alpha$.

Osoitetaan, että piste E on kulman $\measuredangle B'BD$ sisällä. Edellä näytettiin, että $CD\overleftrightarrow{BB'}$ ja $CE\overleftrightarrow{BB'}$, jolloin $ED\overleftrightarrow{BB'}$. Koska puolisuorat $\overrightarrow{AB'}$ ja $\overrightarrow{BE}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset, $\overleftrightarrow{AB'}||\overleftrightarrow{BE}$. Näin ollen $AB'\overleftrightarrow{BE}$. Lisäksi $A * B * C$, jolloin $A\overleftrightarrow{BE}C$. Näistä saadaan, että $B'\overleftrightarrow{BE}C$, joten on olemassa piste $H \in \overleftrightarrow{BE}$ siten, että $B' * H * C$. Nyt $H \in \overrightarrow{BE} \setminus \{B\}$, mikä nähdään seuraavasti: Jos $H * B * E$, niin $E\overleftrightarrow{BB'}H$. Lisäksi $B' * H * C$, joten $CH\overleftrightarrow{BB'}$. Näin ollen $C\overleftrightarrow{BB'}E$, mikä on ristiriita. Siis $H \in \overrightarrow{BE}$. Lisäksi $H \neq B$, koska muuten $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AH} = \overleftrightarrow{CH} = \overleftrightarrow{B'C} = \overleftrightarrow{AB'}$. Koska $H \in \overrightarrow{BE} \setminus \{B\}$ ja puolisuora $\overrightarrow{BD}$ on kulman $\measuredangle CBE = \measuredangle CBH$ puolittaja, on puomilauseen perusteella olemassa piste $I \in \overrightarrow{BD}$ siten, että $H * I * C$. Lisäksi $B' * H * C$, joten $B' * I * C$, jolloin $B'\overleftrightarrow{BD}C$. Piste $F \in \overrightarrow{BD}$ valittiin siten, että $C * F * E$, joten $C\overleftrightarrow{BD}E$. Tästä ja siitä, että $B'\overleftrightarrow{BD}C$ saadaan, että $EB'\overleftrightarrow{BD}$.Koska $ED\overleftrightarrow{BB'}$ ja $EB'\overleftrightarrow{BD}$, niin $E \in \measuredangle(B'BD)$.

Olkoon piste $E' \in B'\alpha$. Tällöin voidaan vastaavasti osoittaa, että $E' \in \measuredangle(BB'D')$. Nyt $\measuredangle DBE = \measuredangle DB\beta \cong \measuredangle D'B'\alpha = \measuredangle D'B'E'$, $\measuredangle B'BE = \measuredangle B'B\beta \cong \measuredangle BB'\alpha = \measuredangle BB'E'$, $E \in \measuredangle(B'BD)$ ja $E' \in \measuredangle(BB'D')$. Näistä saadaan, että $\measuredangle B'BP = \measuredangle B'BD \cong \measuredangle BB'D' = \measuredangle BB'P$. Nyt siis $\measuredangle B'BP \cong \measuredangle BB'P$, $BB' = B'B$ ja $\measuredangle BB'P \cong \measuredangle B'BP$, joten KSK-lauseen nojalla $\triangle BB'P \cong \triangle B'BP$. Tällöin $BP \cong B'P$. Koska lisäksi $\measuredangle PB\alpha \cong \measuredangle PB'\alpha$, niin asymptoottisissa kolmioissa $\triangle BP\alpha$ ja $\triangle B'P\alpha$ kulmat $\measuredangle BP\alpha$ ja $\measuredangle B'P\alpha$ ovat yhtenevät KS-lauseen perusteella.

Olkoon $J \in P\alpha$. Osoitetaan seuraavaksi, että $BB'\overleftrightarrow{JP}$. Koska $A*B*C$, niin lemman 2.2 perusteella $\overrightarrow{BC} \subset \overrightarrow{AB}$, joten puolisuorat $\overrightarrow{AB} = A\alpha$ ja $\overrightarrow{BC}$ ovat samansuuntaiset. Tällöin $\overrightarrow{BC} = B\alpha$. Nyt $C \in B\alpha$ ja $J \in P\alpha$, joten $CJ\overleftrightarrow{BP}$ eli $CJ\overleftrightarrow{BD}$ lauseen 2.7 perusteella. Lisäksi $B'\overleftrightarrow{BD}C$, joten $B'\overleftrightarrow{BD}J$. Näin ollen on olemassa piste $K \in \overleftrightarrow{BD}$ siten, että $B' * K * J$, jolloin $B'K\overleftrightarrow{JP}$ ja $JK\overleftrightarrow{B'P}$. Jos $B\overleftrightarrow{JP}K$, niin $B * P * K$, jolloin $B\overleftrightarrow{B'P}K$. Lisäksi $JK\overleftrightarrow{B'P}$, joten $B\overleftrightarrow{B'P}J$. Toisaalta $E' \in B'\alpha$ ja $J \in P\alpha$, joten $E'J\overleftrightarrow{B'P}$ (lause 2.7). Edelleen, piste E' on kulman $\measuredangle BB'D'$ sisällä, jolloin $BE'\overleftrightarrow{B'D'}$ eli $BE'\overleftrightarrow{B'P}$. Näistä saadaan, että $BJ\overleftrightarrow{B'P}$, mikä on ristiriita. Siis $BK\overleftrightarrow{JP}$, ja lisäksi $B'K\overleftrightarrow{JP}$, joten $BB'\overleftrightarrow{JP}$.

Nyt $\measuredangle BPJ = \measuredangle BP\alpha \cong \measuredangle B'P\alpha = \measuredangle B'PJ$ ja $BB'\overleftrightarrow{JP}$, joten $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB'}$. Näin ollen $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{B'D'}$, mikä on ristiriita. Siis leikkauspiste P ei voi olla puolisuorilla $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$.



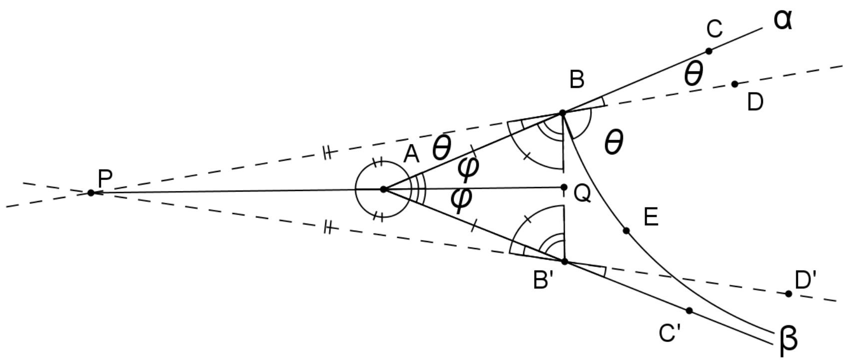
Kuva 3.17. Lause 3.14: Tapaus 2; suorien $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ leikkauspiste P on puolisuorilla $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$.

Tutkitaan vielä tapaus, jossa piste P ei ole puolisuoralla $\overrightarrow{BD}$. Tällöin $D\overleftrightarrow{BB'}P$, ja lisäksi $DD'\overleftrightarrow{BB'}$, joten $D'\overleftrightarrow{BB'}P$. Siis piste P ei ole myöskään puolisuoralla $\overrightarrow{B'D'}$. Nyt $A\overleftrightarrow{BD}C$ $(A * B * C)$ ja $B'\overleftrightarrow{BD}C$ (tähän ei tarvittu oletusta $P \in \overrightarrow{BD}$), joten $AB'\overleftrightarrow{BD}$ eli $AB'\overleftrightarrow{BP}$. Koska tilanne on symmetrinen, myös $AB\overleftrightarrow{B'P}$, joten piste A on kulman $\measuredangle BPB'$ sisällä. Tällöin puomilauseen perusteella on olemassa piste $Q \in \overrightarrow{PA}$ siten, että $B * Q * B'$ (jolloin $Q \in \measuredangle(BAB')$).

Osoitetaan seuraavaksi, että puolisuora $\overrightarrow{AQ}$ on kulman $\measuredangle BAB'$ puolittaja. Nyt $A*B*C$ ja $P*B*D$, joten kulmat $\measuredangle ABP$ ja $\measuredangle CBD$ ovat ristikulmina yhtenevät. Vastaavasti $\measuredangle AB'P \cong \measuredangle C'B'D'$, ja lisäksi $\measuredangle CBD \cong \measuredangle C'B'D'$, joten $\measuredangle ABP \cong \measuredangle AB'P$. Osoitetaan sitten, että $A \in \measuredangle(B'BP)$. Edellä on osoitettu, että $CD\overleftrightarrow{BB'}$ ja $A\overleftrightarrow{BB'}C$, joten $A\overleftrightarrow{BB'}D$. Lisäksi $P \notin \overrightarrow{BD}$, joten $P\overleftrightarrow{BB'}D$. Tämä yhdessä tiedon $A\overleftrightarrow{BB'}D$ kanssa antaa, että $AP\overleftrightarrow{BB'}$. Piste A on siis kulman $\measuredangle B'BP$ sisällä, koska $AB'\overleftrightarrow{BP}$ on osoitettu jo aiemmin. Vastaavasti voidaan näyttää, että $A \in \measuredangle(BB'P)$. Nyt siis $\measuredangle ABP \cong \measuredangle AB'P$, $\measuredangle ABB' \cong \measuredangle AB'B$, $A \in \measuredangle(B'BP)$ ja $A \in \measuredangle(BB'P)$, joten $\measuredangle B'BP \cong \measuredangle BB'P$. Tästä seuraa, että $BP \cong B'P$. Lisäksi $\measuredangle ABP \cong \measuredangle AB'P$ ja $AB \cong AB'$, joten SKS-säännön nojalla kolmiot $\triangle ABP$ ja $\triangle AB'P$ ovat yhtenevät. Näin ollen $\measuredangle BAP \cong \measuredangle B'AP$. Osoitetaan sitten, että $P * A * Q$. Koska P ei ole puolisuoralla $\overrightarrow{BD}$, niin $P\overleftrightarrow{AB}D$. Lisäksi aiemmin on osoitettu, että $B'D\overleftrightarrow{AB}$, joten $B'\overleftrightarrow{AB}P$. Koska $B * Q * B'$, niin $B'Q\overleftrightarrow{AB}$, joten $P\overleftrightarrow{AB}Q$. Siis $P * A * Q$ ja $\measuredangle BAP \cong \measuredangle B'AP$, joten $\measuredangle BAQ \cong \measuredangle B'AQ$. Saatiin siis, että puolisuora $\overrightarrow{AQ}$ puolittaa kulman $\measuredangle BAB'$.

Merkitään $(\measuredangle CBD)^\circ = (\measuredangle ABP)^\circ = \theta$ ja $(\measuredangle BAQ)^\circ = \varphi$. Nyt $P * A * Q$, joten ulkokulmaepäyhtälö sovellettuna kolmioon $\triangle ABP$ antaa, että $\theta = (\measuredangle ABP)^\circ < (\measuredangle BAQ)^\circ = \varphi$. Näin ollen $(\measuredangle CBE)^\circ = 2\theta < 2\varphi = (\measuredangle BAB')^\circ$. Tämä on kuitenkin ristiriita asymptoottisen ulkokulmaepäyhtälön kanssa, jonka mukaan $\measuredangle BAB' = \measuredangle BA\beta < \measuredangle CB\beta = \measuredangle CBE$ (sovellettuna asymptoottiseen kolmioon $\triangle AB\beta$).

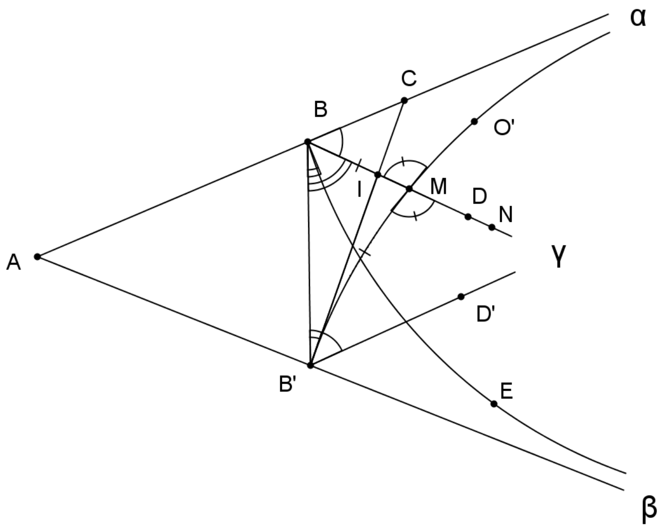
Suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat siis yhdensuuntaiset.



Kuva 3.18. Lause 3.14: Tapaus 2; suorien $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ leikkauspiste P on puolisuorien $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ vastakkaisilla puolisuorilla.

Tapaus 3: Suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Olkoon piste L' siten, että $L' * B' * D'$, ja oletetaan, että puolisuorat $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'L'}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Tällöin $DL'\overleftrightarrow{BB'}$ lauseen 2.7 nojalla. Lisäksi $D'\overleftrightarrow{BB'}L'$ $(L' * B' * D')$, joten $D\overleftrightarrow{BB'}D'$. Tämä on ristiriita, sillä aiemmin on osoitettu, että $DD'\overleftrightarrow{BB'}$. Näin ollen puolisuora $\overrightarrow{BD}$ ja puolisuoran $\overrightarrow{B'D'}$ vastakkainen puolisuora eivät voi olla asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Vastaavasti voidaan näyttää, että puolisuora $\overrightarrow{B'D'}$ ja puolisuoran $\overrightarrow{BD}$ vastakkainen puolisuora eivät ole asymptoottisesti yhdensuuntaiset.

Oletetaan sitten, että puolisuorat $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset ja olkoon γ niiden yhteinen pääty. Aiemmin todettiin, että on olemassa piste $I \in \overrightarrow{BD}$ siten, että $B' * I * C$, mistä seuraa, että piste I on kulman $\measuredangle B'BC = \measuredangle B'B\alpha$ sisällä, joten $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BD}$ leikkaa puolisuoraa $B'\alpha$. Olkoon leikkauspiste M, ja olkoon N ja O' pisteet siten, että $B * M * N$ ja $B' * M * O'$, jolloin $\overrightarrow{MO'} = M\alpha$ ja $\overrightarrow{MN} = M\gamma$. Nyt $\measuredangle MB\alpha = \measuredangle DBC \cong \measuredangle D'B'\alpha = \measuredangle D'B'M$ ja ristikulmina $\measuredangle BM\alpha = \measuredangle BMO' \cong \measuredangle B'MN = \measuredangle B'M\gamma$. Näin ollen $BM \cong B'M$ KK-lauseen nojalla sovellettuna asymptoottisiin kolmioihin $\triangle BM\alpha$ ja $\triangle B'M\gamma$. Nyt siis kolmio $\triangle BB'M$ on tasakylkinen, joten $\measuredangle B'BM \cong \measuredangle BB'M = \measuredangle BB'\alpha \cong \measuredangle B'B\beta$. Toisaalta $\measuredangle B'B\beta = \measuredangle B'BE < \measuredangle B'BD = \measuredangle B'BM$, koska $E \in \measuredangle(B'BD)$. Saatiin siis ristiriita, joten puolisuorat $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ eivät ole asymptoottisesti yhdensuuntaiset.

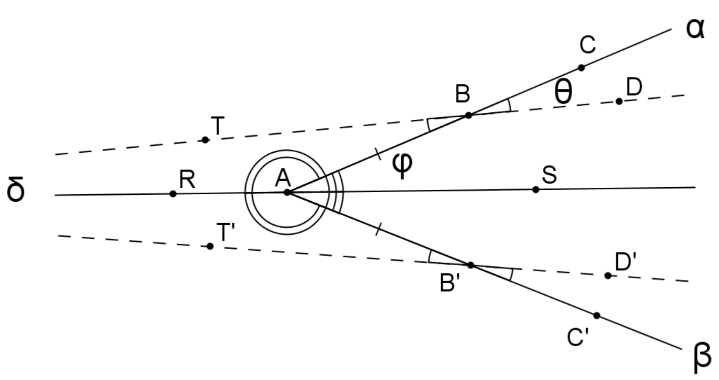


Kuva 3.19. Lause 3.14: Tapaus 3, puolisuorat $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset.

Oletetaan vielä, että puolisuorien $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ vastakkaiset puolisuorat ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset ja että niiden yhteinen pääty on δ. Hyperbolisen aksiooman mukaan on olemassa puolisuora $\overrightarrow{AR} = A\delta$. Nyt $A * B * C$, joten ulkokulmaepäyhtälö sovellettuna kolmioon $\triangle AB\delta$ antaa, että $\measuredangle BA\delta < \measuredangle CB\delta$. Olkoon S, T ja T' pisteitä siten, että $R * A * S$, $T * B * D$ ja $T' * B' * D'$.

Osoitetaan, että puolisuora $\overrightarrow{AS}$ on kulman $\measuredangle BAB'$ puolittaja. Ensinnäkin $S \in \measuredangle(BAB')$: Symmetrian perusteella riittää osoittaa, että $B'S\overleftrightarrow{AB}$. Lauseen 2.7 mukaan $RT\overleftrightarrow{AB}$, ja lisäksi $R\overleftrightarrow{AB}S$ ($R*A*S$), joten $S\overleftrightarrow{AB}T$. Koska $T*B*D$, niin $D\overleftrightarrow{AB}T$. Näin ollen $DS\overleftrightarrow{AB}$. Lisäksi aiemmin on osoitettu, että $B'D\overleftrightarrow{AB}$, joten $B'S\overleftrightarrow{AB}$. Nyt $A*B*C$ ja $T*B*D$, joten kulmat $\measuredangle ABT$ ja $\measuredangle CBD$ ovat ristikulmina yhtenevät. Vastaavasti $\measuredangle AB'T' \cong \measuredangle C'B'D'$. Näistä saadaan, että $\measuredangle AB\delta = \measuredangle ABT \cong \measuredangle CBD \cong \measuredangle C'B'D' \cong \measuredangle AB'T' = \measuredangle AB'\delta$. Lisäksi $AB \cong AB'$, joten KS-lauseen perusteella asymptoottiset kolmiot $\triangle AB\delta$ ja $\triangle AB'\delta$ ovat yhtenevät. Näin ollen $\measuredangle BAR = \measuredangle BA\delta \cong \measuredangle B'A\delta = \measuredangle B'AR$, jolloin myös $\measuredangle BAS \cong \measuredangle B'AS$ ($R*A*S$). Puolisuora $\overrightarrow{AS}$ siis puolittaa kulman $\measuredangle BAB'$. Nyt $\measuredangle BAR = \measuredangle BA\delta < \measuredangle CB\delta = \measuredangle CBT$, $R * A * S$ ja $T * B * D$, joten $\varphi = \measuredangle BAS > \measuredangle CBD = \theta$. Tästä seuraa ristiriita asymptoottisen ulkokulmaepäyhtälön kanssa kuten edellä.

Tapaus 4: Suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat normaalisti yhdensuuntaiset. Nyt lemman 3.10 mukaan on olemassa yksikäsitteinen suora l siten, että se on normaali molemmille suorille $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$. Olkoon U suorien $\overleftrightarrow{BD}$ ja l leikkauspiste ja U' suorien $\overleftrightarrow{B'D'}$ ja l leikkauspiste. Osoitetaan, että l on kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sulkeva suora. Riittää osoittaa, että puolisuora $U\alpha$ on suoralla l, sillä symmetrian vuoksi vastaavasti voidaan osoittaa, että myös puolisuora $U'\beta$ on suoralla l. Tehdään vastaväite ja oletetaan, että puolisuora $U\alpha$ ei ole suoralla l. Jos puolisuorat $U\alpha$ ja $U'\alpha$ olisivat samansuuntaiset, niin ne olisivat samalla suoralla l, joten ne ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset.



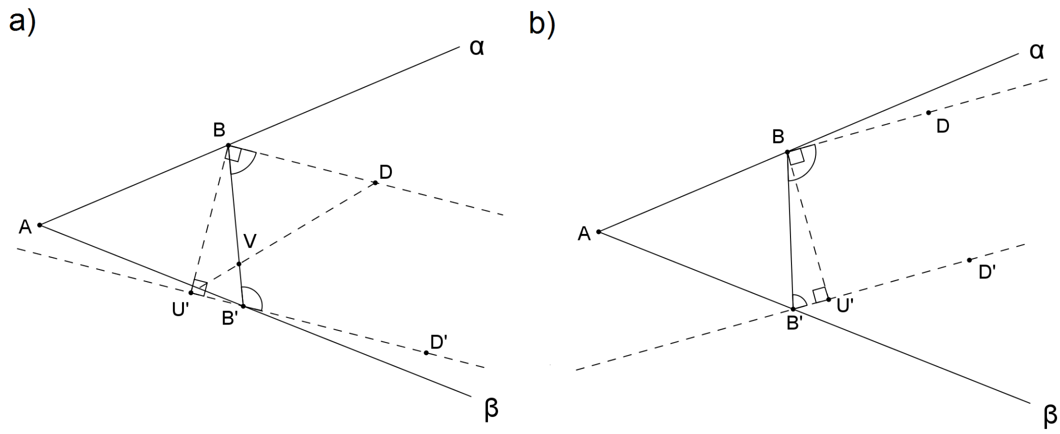
KUVA 3.20. Lause 3.14: Tapaus 3, puolisuorien $\overrightarrow{BD}$ ja $\overrightarrow{B'D'}$ vastakkaiset puolisuorat ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset.

Koska määritelmän mukaan puolisuorat $U\alpha$ ja $U'\alpha$ ovat yhdensuuntaisilla suorilla, puolisuora $U'\alpha$ ei voi olla suoralla l, koska $U \in l$. Siis kumpikaan puolisuorista $U\alpha$ ja $U'\alpha$ ei ole suoralla l.

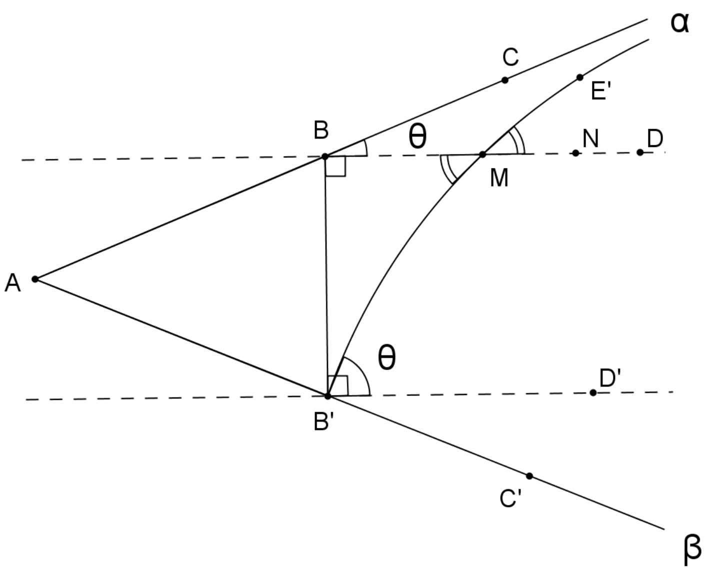
Oletetaan, että $U = B$ ja $U' \neq B'$. Koska suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat yhdensuuntaiset, niin $B'U'\overleftrightarrow{BD}$. Jos $(\measuredangle B'BD)^\circ < 90$, niin $\measuredangle B'BD < \measuredangle U'BD$, joten $B' \in \measuredangle(U'BD)$. Tällöin puomilauseen mukaan on olemassa piste $V \in \overrightarrow{BB'}$ siten, että $D * V * U'$, eli $D\overleftrightarrow{BB'}U'$. Lisäksi $DD'\overleftrightarrow{BB'}$, joten $D'\overleftrightarrow{BB'}U'$ eli $U' * B' * D'$. Koska kolmio $\triangle BB'U'$ on suorakulmainen, niin $(\measuredangle BB'U')^\circ < 90$, jolloin $(\measuredangle BB'D')^\circ > 90$ (vieruskulmat). Aiemmin on osoitettu, että kulmat $\measuredangle B'BD$ ja $\measuredangle BB'D'$ ovat yhtenevät, joten $(\measuredangle B'BD)^\circ = (\measuredangle BB'D')^\circ > 90$, mikä on ristiriita. Jos $(\measuredangle B'BD)^\circ > 90$, niin piste U' on kulman $\measuredangle B'BD$ sisällä. Tällöin $U'D\overleftrightarrow{BB'}$, ja lisäksi $DD'\overleftrightarrow{BB'}$, joten $D'U'\overleftrightarrow{BB'}$. Näin ollen piste U' on puolisuoralla $\overrightarrow{B'D'}$. Kuten edellä, suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle BB'U$ on $(\measuredangle BB'U)^\circ < 90$, joten $(\measuredangle BB'D')^\circ = (\measuredangle BB'U)^\circ < 90$. Toisaalta $(\measuredangle BB'D')^\circ = (\measuredangle B'BD)^\circ > 90$. Saatiin siis jälleen ristiriita.

Oletetaan seuraavaksi, että $U' = B'$. Aiemmin on osoitettu, että puolisuorilla $\overrightarrow{BD}$ ja $B'\alpha = \overrightarrow{B'E'}$ on leikkauspiste M, ja valittu piste N siten, että $B * M * N$. Nyt suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle BB'M$ on $(\measuredangle BB'M)^\circ + (\measuredangle BMB')^\circ \leq 90$. Piste M on kulman $\measuredangle BB'D'$ sisällä, koska $E' \in \measuredangle(BB'D')$ ja $M \in \overrightarrow{B'E'}$. Näin ollen $(\measuredangle BB'M)^\circ + (\measuredangle D'B'M)^\circ = 90$. Tästä saadaan, että $(\measuredangle BMB')^\circ \leq 90 - (\measuredangle BB'M)^\circ = 90 - (90 - (\measuredangle D'B'M)^\circ) = (\measuredangle D'B'M)^\circ = (\measuredangle D'B'\alpha)^\circ = \theta$. Nyt kulmat $\measuredangle BMB'$ ja $\measuredangle NM\alpha$ ovat ristikulmina yhtenevät. Toisaalta $\measuredangle NM\alpha$ on asymptoottisen kolmion $\triangle BM\alpha$ ulkokulma, joten lauseen 3.5 nojalla $(\measuredangle BMB')^\circ = (\measuredangle NM\alpha)^\circ > (\measuredangle MB\alpha) = \theta$, mikä on ristiriita.

Siis $U \neq B$ ja $U' \neq B'$. Oletetaan ensin, että $U \in \overrightarrow{BD}$ ja $U' \notin \overrightarrow{B'D'}$. Tapaus $U' \in \overrightarrow{B'D'}$ ja $U \notin \overrightarrow{BD}$ käsitellään vastaavasti. Nyt siis $D'\overleftrightarrow{BB'}U'$, ja aiemmin osoitettiin, että $DD'\overleftrightarrow{BB'}$, joten $D\overleftrightarrow{BB'}U'$. Lisäksi $DU\overleftrightarrow{BB'}$, joten $U\overleftrightarrow{BB'}U'$. Näin ollen on olemassa piste $X \in \overleftrightarrow{BB'}$ siten, että $U * X * U'$. Koska $U \neq B$ ja $U' \neq B'$, niin $B \neq X \neq B'$,

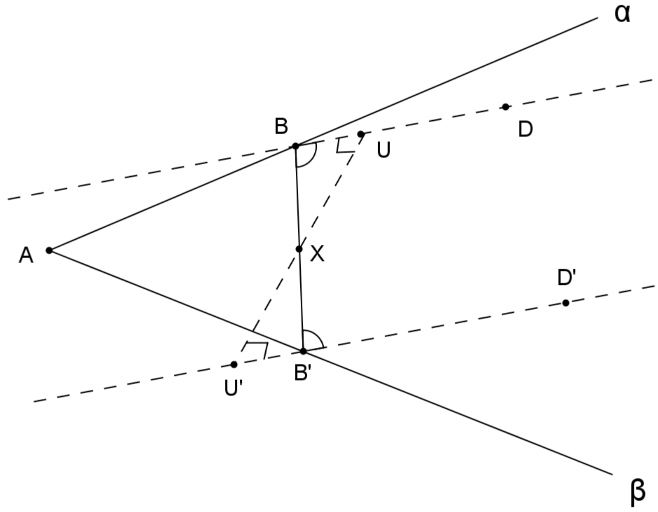


Kuva 3.21. Lause 3.14: Tapaus 4, suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat normaalisti yhdensuuntaiset; $U = B$ ja $U' \neq B'$. a) $(\measuredangle B'BD)^\circ < 90$. b) $(\measuredangle B'BD)^\circ > 90$.



Kuva 3.22. Lause 3.14: Tapaus 4, suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat normaalisti yhdensuuntaiset; $U = B$ ja $U' = B'$.

joten $X * B * B'$, $B * X * B'$ tai $B * B' * X$. Jos $X * B * B'$, niin $B'\overleftrightarrow{BD}X$. Lisäksi $U * X * U'$, joten $U'X\overleftrightarrow{BD}$. Näistä saadaan, että $B'\overleftrightarrow{BD}U'$, mikä on ristiriita, sillä suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'U'}$ ovat yhdensuuntaiset. Tapauksessa $B * B' * X$ saadaan vastaava ristiriita. Tutkitaan sitten tapausta $B * X * B'$. Nyt $\measuredangle BUX$ on suora kulma, joten kolmiossa $\triangle BUX$ on $(\measuredangle UBX)^\circ < 90$. Toisaalta myös kolmiossa $\triangle B'U'X$ on $(\measuredangle U'B'X)^\circ < 90$. Lisäksi $U' * B' * D'$, joten kulmat $\measuredangle U'B'X$ ja $\measuredangle D'B'X$ ovat vieruskulmat. Tällöin $(\measuredangle UBX)^\circ = (\measuredangle DBB')^\circ = (\measuredangle D'B'B)^\circ = (\measuredangle D'B'X)^\circ > 90$, mikä on ristiriita.

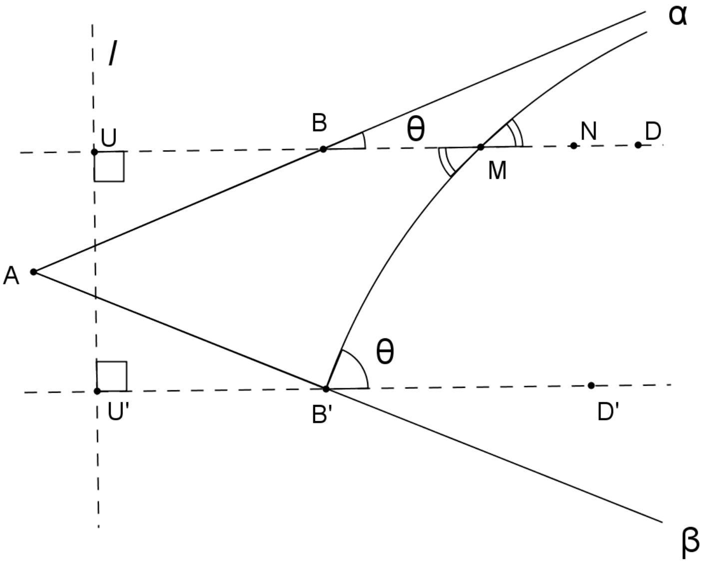


KUVA 3.23. Lause 3.14: Tapaus 4, suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat normaalisti yhdensuuntaiset; $U \in \overrightarrow{BD}$ ja $U' \notin \overrightarrow{B'D'}$.

Näin ollen joko $U \in \overrightarrow{BD}$ ja $U' \in \overrightarrow{B'D'}$ tai $U \notin \overrightarrow{BD}$ ja $U' \notin \overrightarrow{B'D'}$. Tutkitaan ensin vaihtoehto $U \notin \overrightarrow{BD}$ ja $U' \notin \overrightarrow{B'D'}$. Nyt on olemassa konveksi nelikulmio $\square B'U'UM$, jolle pätee, että $(\measuredangle MB'U')^\circ + (\measuredangle B'U'U)^\circ + (\measuredangle MUU')^\circ + (\measuredangle B'MU)^\circ \leq 360$ eli $(\measuredangle B'MU)^\circ \leq 180 - (\measuredangle MB'U')^\circ$, sillä kulmat $\measuredangle B'U'U$ ja $\measuredangle MUU'$ ovat suoria kulmia. Koska $U' * B' * D'$, niin $(\measuredangle MB'U')^\circ + (\measuredangle D'B'M)^\circ = 180$, jolloin $(\measuredangle B'MU)^\circ \leq 180 - (\measuredangle MB'U')^\circ = 180 - (180 - (\measuredangle D'B'M)^\circ) = (\measuredangle D'B'M)^\circ = \theta$. Toisaalta kulma $\measuredangle NM\alpha$ on asymptoottisen kolmion $\triangle BM\alpha$ ulkokulma, joten $\theta = (\measuredangle MB\alpha)^\circ < (\measuredangle NM\alpha)^\circ = (\measuredangle B'MU)^\circ$ ($\measuredangle NM\alpha$ ja $\measuredangle B'MU$ ristikulmat). Saatiin siis ristiriita, joten $U \in \overrightarrow{BD}$ ja $U' \in \overrightarrow{B'D'}$.

Koska $\measuredangle B'BD \cong \measuredangle BB'D'$, niin seurauksen 3.12 perusteella nelikulmion $\square BB'U'U$ sivut BU ja $B'U'$ ovat yhtenevät. Nyt siis $BU \cong B'U'$ ja $\measuredangle UB\alpha = \measuredangle DBC \cong \measuredangle D'B'\alpha = \measuredangle U'B'\alpha$, joten KS-yhtenevyyslauseen nojalla $\measuredangle BU\alpha \cong \measuredangle B'U'\alpha$. Olkoon $Y \in U\alpha$ ja $Z' \in U'\alpha$, jolloin $CY\overleftrightarrow{BU}$ ja $E'Z'\overleftrightarrow{B'U'}$ lauseen 2.7 mukaan. Olkoon A_1 piste siten, että $U' * U * A_1$. Osoitetaan seuraavaksi, että $YA_1\overleftrightarrow{BU}$ ja että $Z'A_1\overleftrightarrow{B'U'}$. Aiemmin on osoitettu, että $B'\overleftrightarrow{BD}C$ ja $B'U'\overleftrightarrow{BD}$, joten $C\overleftrightarrow{BD}U'$ eli $C\overleftrightarrow{BU}U'$. Koska $U' * U * A_1$, niin $U'\overleftrightarrow{BU}A_1$. Näistä saadaan, että $CA_1\overleftrightarrow{BU}$. Lisäksi $CY\overleftrightarrow{BU}$, joten $YA_1\overleftrightarrow{BU}$. Tiedosta $U' * U * A_1$ saadaan myös, että $UA_1\overleftrightarrow{B'U'}$. Lisäksi $\overleftrightarrow{BU}||\overleftrightarrow{B'U'}$, joten $BU\overleftrightarrow{B'U'}$. Näistä saadaan edelleen, että $BA_1\overleftrightarrow{B'U'}$. Aiemmin on näytetty, että piste E' on kulman $\measuredangle BB'D'$ sisällä, joten $BE'\overleftrightarrow{B'D'}$ eli $BE'\overleftrightarrow{B'U'}$. Lisäksi $E'Z'\overleftrightarrow{B'U'}$, joten $BZ'\overleftrightarrow{B'U'}$. Tämä yhdessä tiedon $BA_1\overleftrightarrow{B'U'}$ kanssa antaa, että $Z'A_1\overleftrightarrow{B'U'}$.

Koska puolisuora $U\alpha$ ei ole suoralla l, joko $\measuredangle BUY < \measuredangle BUA_1$ tai $\measuredangle BUY > \measuredangle BUA_1$. Oletetaan, että $\measuredangle BUY < \measuredangle BUA_1$. Lisäksi $YA_1\overleftrightarrow{BU}$, joten piste Y on kulman $\measuredangle BUA_1$ sisällä. Koska kulmat $\measuredangle BUA_1$ ja $\measuredangle B'U'A_1$ ovat suoria kulmia, $(\measuredangle BUA_1)^\circ = (\measuredangle B'U'A_1)^\circ$. Lisäksi $\measuredangle BU\alpha \cong \measuredangle B'U'\alpha$, joten $(\measuredangle BUY)^\circ = (\measuredangle BU\alpha)^\circ = (\measuredangle B'U'\alpha)^\circ =$



KUVA 3.24. Lause 3.14: Tapaus 4, suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat normaalisti yhdensuuntaiset; $U \notin \overrightarrow{BD}$ ja $U' \notin \overrightarrow{B'D'}$.

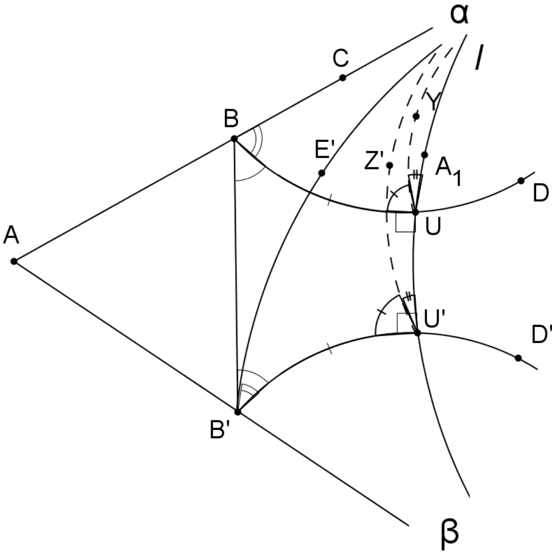
$(\measuredangle B'U'Z')^\circ$. Näin ollen myös $(\measuredangle B'U'Z')^\circ < (\measuredangle BUA_1)^\circ = (\measuredangle B'U'A_1)^\circ$. Lisäksi on $Z'A_1\overleftrightarrow{B'U'}$, joten piste Z' on kulman $\measuredangle B'U'A_1$ sisällä. Siis $Y \in \measuredangle(BUA_1)$, $Z' \in \measuredangle(B'U'A_1)$, $\measuredangle BUY \cong \measuredangle B'U'Z'$ ja $\measuredangle BUA_1 \cong \measuredangle B'U'A_1$, joten kulmat $\measuredangle A_1UY$ ja $\measuredangle A_1U'Z'$ ovat yhtenevät. Tämä on kuitenkin ristiriita ulkokulmaepäyhtälön kanssa, joka sovellettuna asymptoottiseen kolmioon $\triangle UU'\alpha$ antaa, että $\measuredangle A_1UY = \measuredangle A_1U\alpha > \measuredangle UU'\alpha = \measuredangle A_1U'Z'$. Jos $\measuredangle BUY > \measuredangle BUA_1$, niin vastaavalla päättelyllä kuin edellä saadaan, että kulmat $\measuredangle A_1UY$ ja $\measuredangle A_1U'Z'$ ovat yhtenevät, mikä on jälleen ristiriita ulkokulmaepäyhtälön kanssa.

Todetaan vielä lopuksi, että l on yksikäsitteinen. Jos olisi toinenkin kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sulkeva suora $m \neq l$, niin suoralla m olisi vastakkaiset puolisuorat $A'\alpha$ ja $A'\beta$. Hyperbolinen aksiooma kuitenkin sanoo, että puolisuorat $A'\alpha$ ja $A'\beta$ ovat yksikäsitteiset eivätkä ne voi olla samalla suoralla. Näin ollen l on ainoa kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sulkeva suora. □

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen kulman sulkevan suoran piste on sen kulman sisällä, jonka se sulkee. Tätä tulosta tullaan tarvitsemaan kaksinkertaisten asymptoottisten kolmioiden yhtenevyyslauseen todistuksessa.

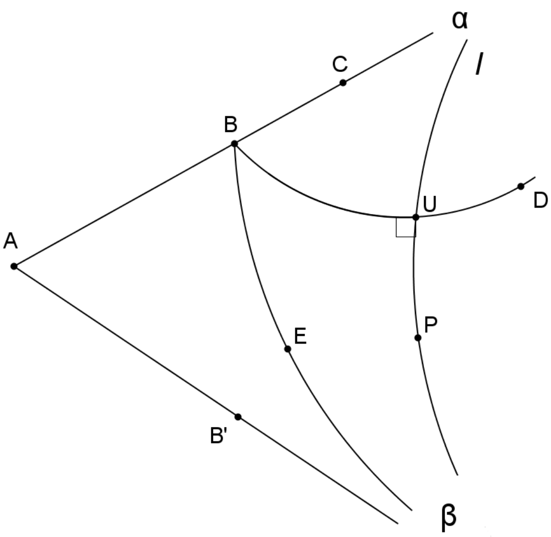
LAUSE 3.15. *Kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sulkevan suoran jokainen piste on kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sisällä.*

TODISTUS. Olkoot pisteet B, B', C, D, E ja U kuten lauseen 3.14 todistuksessa. Todistuksesta nähdään, että piste D on kulman $\measuredangle CBE$ sisällä, ja että $U \in \overrightarrow{BD}$, joten myös piste U on kyseisen kulman sisällä. Näin ollen $EU\overleftrightarrow{BC}$ eli $EU\overleftrightarrow{AB}$. Lauseen 2.7 nojalla lisäksi $B'E\overleftrightarrow{AB}$, joten $B'U\overleftrightarrow{AB}$. Olkoon piste $P \in \alpha\beta$ siten, että $P \neq U$. Koska suorat $\overleftrightarrow{PU}$ ja $\overleftrightarrow{AB}$ ovat yhdensuuntaiset, $PU\overleftrightarrow{AB}$. Tämä yhdessä tiedon $B'U\overleftrightarrow{AB}$ kanssa antaa, että $B'P\overleftrightarrow{AB}$. Siis kaikki suoran $\alpha\beta$ pisteet ovat samalla puolella suoraa $\overleftrightarrow{AB}$



KUVA 3.25. Lause 3.14: Tapaus 4, suorat $\overleftrightarrow{BD}$ ja $\overleftrightarrow{B'D'}$ ovat normaalisti yhdensuuntaiset; $U \in \overrightarrow{BD}$ ja $U' \in \overrightarrow{B'D'}$.

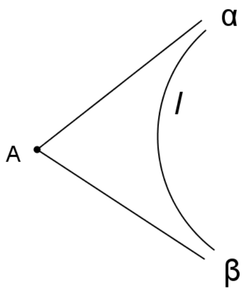
kuin piste B'. Symmetrian vuoksi vastaavasti voidaan osoittaa, että $BP\overleftrightarrow{AB'}$ kaikilla $P \in \alpha\beta$. $\square$



KUVA 3.26. Lause 3.15: Jokainen kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sulkevan suoran piste on kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sisällä.

Määritellään sitten kaksinkertainen asymptoottinen kolmio ja todistetaan yhtenevyyslause tällaisille kolmioille sekä puomilauseen vastine kulmalle ja sen sulkevalle suoralle.

Määritelmä 3.16. Kulma $\measuredangle\alpha A\beta$ ja sen sulkeva suora l muodostavat *(kaksinkertaisen) asymptoottisen kolmion* $\triangle A\alpha\beta$, jonka *sivut* ovat puolisuorat $A\alpha$ ja $A\beta$ sekä suora $l = \alpha\beta$ ja *kärki* piste A. Suoraa $l = \alpha\beta$ sanotaan myös *kannaksi.*



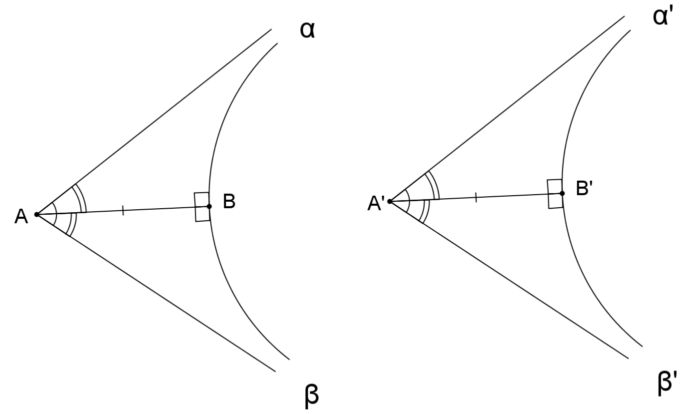
Kuva 3.27. Kaksinkertainen asymptoottinen kolmio $\triangle A\alpha\beta$.

Lause 3.17. *Olkoon $\triangle A\alpha\beta$ ja $\triangle A'\alpha'\beta'$ kaksinkertaisia asymptoottisia kolmioita ja pisteet $B \in \alpha\beta$ ja $B' \in \alpha'\beta'$ siten, että $AB\perp\alpha\beta$ ja $A'B'\perp\alpha'\beta'$. Kulmat $\measuredangle\alpha A\beta$ ja $\measuredangle\alpha'A'\beta'$ ovat yhtenevät jos ja vain jos $AB \cong A'B'$.*

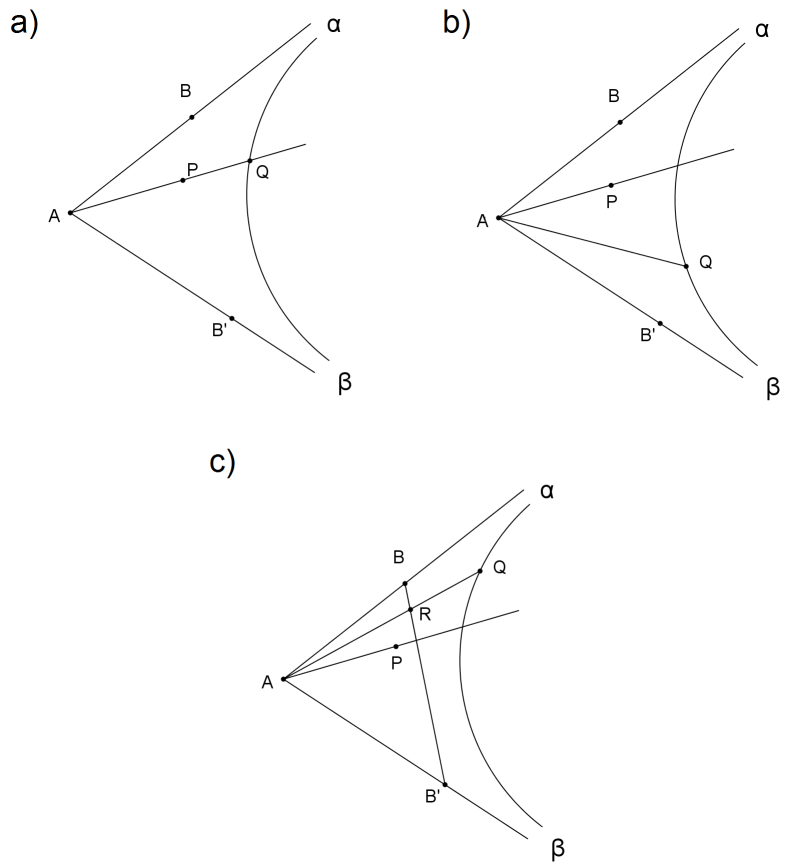
Todistus. Tarkastellaan yksinkertaisia asymptoottisia kolmioita $\triangle AB\alpha$ ja $\triangle AB\beta$. Koska $AB\perp\alpha\beta$, niin kulmat $\measuredangle AB\alpha$ ja $\measuredangle AB\beta$ ovat suoria kulmia, joten $\measuredangle AB\alpha \cong \measuredangle AB\beta$. Lisäksi $AB = AB$, joten KS-lauseen mukaan kolmiot $\triangle AB\alpha$ ja $\triangle AB\beta$ ovat yhtenevät eli $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle BA\beta$. Vastaavasti $\measuredangle B'A'\alpha' \cong \measuredangle B'A'\beta'$, ja oletuksen nojalla $\measuredangle\alpha A\beta \cong \measuredangle\alpha'A'\beta'$. Koska lauseen 3.15 mukaan $B \in \measuredangle(\alpha A\beta)$ ja $B' \in \measuredangle(\alpha'A'\beta')$, niin $2(\measuredangle BA\alpha)^\circ = (\measuredangle BA\alpha)^\circ + (\measuredangle BA\beta)^\circ = (\measuredangle\alpha A\beta)^\circ = (\measuredangle\alpha'A'\beta')^\circ = (\measuredangle B'A'\alpha')^\circ + (\measuredangle B'A'\beta')^\circ = 2(\measuredangle B'A'\alpha')^\circ$. Saadaan siis, että $(\measuredangle BA\alpha)^\circ = (\measuredangle B'A'\alpha')^\circ$ eli $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle B'A'\alpha'$. Suorina kulmina myös kulmat $\measuredangle AB\alpha$ ja $\measuredangle A'B'\alpha'$ ovat yhtenevät, joten KK-lauseen perusteella $AB \cong A'B'$. Vastaavasti, jos $AB \cong A'B'$, niin KS-lauseen mukaan $\measuredangle BA\alpha \cong \measuredangle B'A'\alpha'$. Tällöin $(\measuredangle\alpha A\beta)^\circ = (\measuredangle BA\alpha)^\circ + (\measuredangle BA\beta)^\circ = 2(\measuredangle BA\alpha)^\circ = 2(\measuredangle B'A'\alpha')^\circ = (\measuredangle B'A'\alpha')^\circ + (\measuredangle B'A'\beta')^\circ = (\measuredangle\alpha'A'\beta')^\circ$. Kulmat $\measuredangle\alpha A\beta$ ja $\measuredangle\alpha'A'\beta'$ ovat siis yhtenevät. □

Lause 3.18. *Olkoon piste P kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sisällä. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa suoraa $\alpha\beta$.*

Todistus. Olkoon piste $Q \in \alpha\beta$, jolloin $Q \in \measuredangle(\alpha A\beta)$ lauseen 3.15 nojalla. Olkoon lisäksi pisteet $B \in A\alpha$ ja $B' \in A\beta$. Nyt pisteet P ja Q ovat kulman $\measuredangle\alpha A\beta$ sisällä, joten $B'P\overleftrightarrow{AB}$ ja $B'Q\overleftrightarrow{AB}$, jolloin $PQ\overleftrightarrow{AB}$. Vastaavasti saadaan, että $PQ\overleftrightarrow{AB'}$. Jos $Q \in \overleftrightarrow{AP}$, niin Q on puolisuoralla $\overrightarrow{AP}$. Jos Q ei ole suoralla $\overleftrightarrow{AP}$, niin $P \notin \overleftrightarrow{AQ}$. Tällöin $BP\overleftrightarrow{AQ}$ tai $B\overleftrightarrow{AQ}P$. Jos $BP\overleftrightarrow{AQ}$, niin piste P on kulman $\measuredangle QAB = \measuredangle QA\alpha$ sisällä, sillä lisäksi $PQ\overleftrightarrow{AB}$. Täten asymptoottisen yhdensuuntaisuuden määritelmän mukaan puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $Q\alpha \subset \alpha\beta$. Jos $B\overleftrightarrow{AQ}P$, niin $P \in \measuredangle(QAB')$, mikä nähdään seuraavasti: piste Q on kulman $\measuredangle BAB'$ sisällä, joten puomilauseen mukaan on olemassa piste $R \in \overrightarrow{AQ}$ siten, että $B * R * B'$. Näin ollen $B\overleftrightarrow{AQ}B'$, ja lisäksi oletettiin, että $B\overleftrightarrow{AQ}P$, jolloin $B'P\overleftrightarrow{AQ}$. Nyt siis $B'P\overleftrightarrow{AQ}$ ja $PQ\overleftrightarrow{AB'}$, joten piste P on kulman$\measuredangle QAB' = \measuredangle QA\beta$ sisällä. Tällöin puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa puolisuoraa $Q\beta \subset \alpha\beta$. □



KUVA 3.28. Lause 3.17: kolmiot $\triangle A\alpha\beta$ ja $\triangle A'\alpha'\beta'$ ovat yhtenevät.

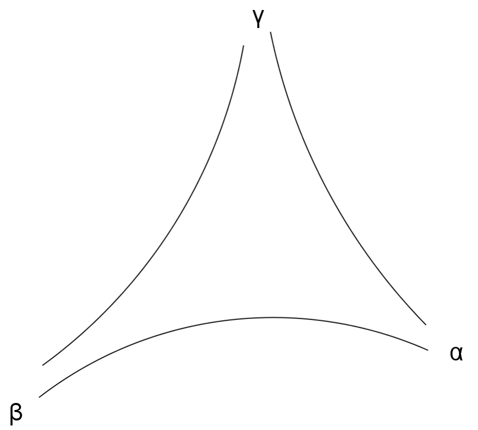


KUVA 3.29. Lause 3.18: puolisuora $\overrightarrow{AP}$ leikkaa suoraa $\alpha\beta$. a) $Q \in \overleftrightarrow{AP}$. b) $BP\overleftrightarrow{AQ}$. c) $B\overleftrightarrow{AQ}P$.

3.3. Kolminkertaiset asymptoottiset kolmiot

Kulman sulkevan suoran olemassaolosta seuraa suoraan, että on olemassa myös kolminkertaisia asymptoottisia kolmioita. Seuraavaksi määritellään kolminkertainen asymptoottinen kolmio ja todistetaan sellaisten olemassaolo.

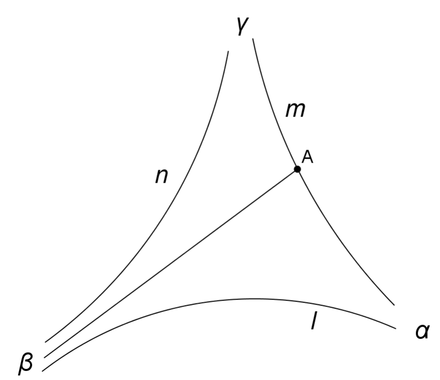
MÄÄRITELMÄ 3.19. Suorat $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ja $\beta\gamma$ muodostavat *kolminkertaisen asymptoottisen kolmion* $\triangle\alpha\beta\gamma$. Suoria $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ja $\beta\gamma$ sanotaan tällöin kolmion $\triangle\alpha\beta\gamma$ *sivuiksi.*



KUVA 3.30. Kolminkertainen asymptoottinen kolmio $\triangle\alpha\beta\gamma$.

LAUSE 3.20. *Olkoon $l = \alpha\beta$ ja $m = \alpha\gamma$ eri suoria. Tällöin on olemassa suora $n = \beta\gamma$.*

TODISTUS. Olkoon piste $A \in m$, jolloin hyperbolisen aksiooman nojalla on olemassa puolisuora $A\beta$. Lauseen 3.14 mukaan on olemassa kulman $\measuredangle\beta A\gamma$ sulkeva suora $n = \beta\gamma$. $\square$



KUVA 3.31. Lause 3.20: Kolminkertaisen asymptoottisen kolmion olemassaolo.

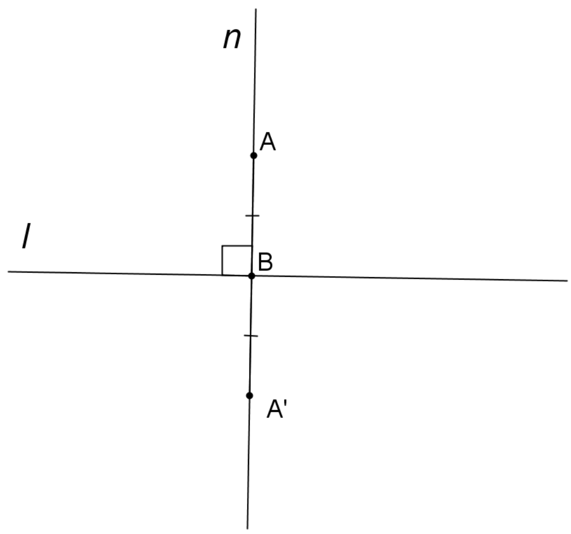
Kolminkertaisten asymptoottisten kolmioiden yhtenevyyden tutkimiseksi määritellään seuraavaksi yleistetty kulma ja sille yleistetty kulmanpuolittaja. Tällaisilla kolmioilla ei ole aitoja kulmia tai sivujanoja, joita voisi verrata keskenään, mutta voidaan osoittaa, että niiden yleistetyt kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä ja että tämä piste on yhtä etäällä kolmion kaikista sivuista. Tätä etäisyyttä voidaan käyttää yhtenevyyden määrittämiseen.

Yleistetty kulma on asymptoottisen kolmion kulma, jonka kärkipiste on äärettömyydessä. Kulmanpuolittajan ominaisuuksia ovat, että se on yksikäsitteinen ja peilaa kulman kyljen toiseksi kyljeksi. Yleistetty kulmanpuolittaja tekee samoin: se peilaa asymptoottisesti yhdensuuntaiset suorat toisikseen ja on yksikäsitteinen. Näitä asioita ja yleistetyn kulmanpuolittajan olemassaoloa tarkastellaan seuraavaksi.

MÄÄRITELMÄ 3.21. Suorat $\alpha\beta$ ja $\alpha\gamma$ muodostavat *yleistetyn kulman* $\measuredangle\beta\alpha\gamma$.

HUOMAUTUS 3.22. Yleistetty kulma voidaan merkitä myös pisteiden avulla: jos $A \in \alpha\beta$ ja $B \in \alpha\gamma$, niin $\measuredangle\beta\alpha\gamma = \measuredangle A\alpha B = \measuredangle A\alpha\gamma = \measuredangle\beta\alpha B$.

MÄÄRITELMÄ 3.23. Olkoon suora l ja piste $A \notin l$. Olkoon lisäksi n suoran l normaali, joka kulkee pisteen A kautta, ja piste B näiden suorien leikkauspiste. Jos $A' \in n$ on piste siten, että $A'B \cong AB$ ja $A' * B * A$, niin A' on pisteen A *peilaus* suoran l suhteen.

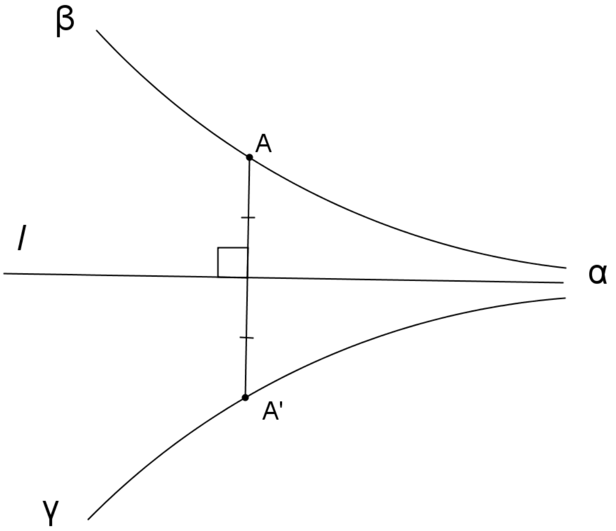


KUVA 3.32. Pisteen A peilaus A' suoran l suhteen.

MÄÄRITELMÄ 3.24. Olkoon $\measuredangle\beta\alpha\gamma$ yleistetty kulma ja suora $l \neq \alpha\beta$, jolla on pääty α. Olkoon piste $A \in \alpha\beta$. Jos pisteen A peilaus A' suoran l suhteen on suoralla $\alpha\gamma$, niin suora l on kulman $\measuredangle\beta\alpha\gamma$ *yleistetty kulmanpuolittaja.*

Seuraava tulos osoittaa, että määritelmä 3.24 ei riipu pisteen A valinnasta.

LEMMA 3.25. *Olkoon $\measuredangle\beta\alpha\gamma$ yleistetty kulma ja suora $l \neq \alpha\beta$, jolla on pääty α. Olkoon lisäksi pisteet $A \in \alpha\beta$ ja $B \in \alpha\beta$ siten, että $A \neq B$. Jos pisteen A peilaus A' suoran l suhteen on suoralla $\alpha\gamma$, niin myös pisteen B peilaus suoran l suhteen on suoralla $\alpha\gamma$.*

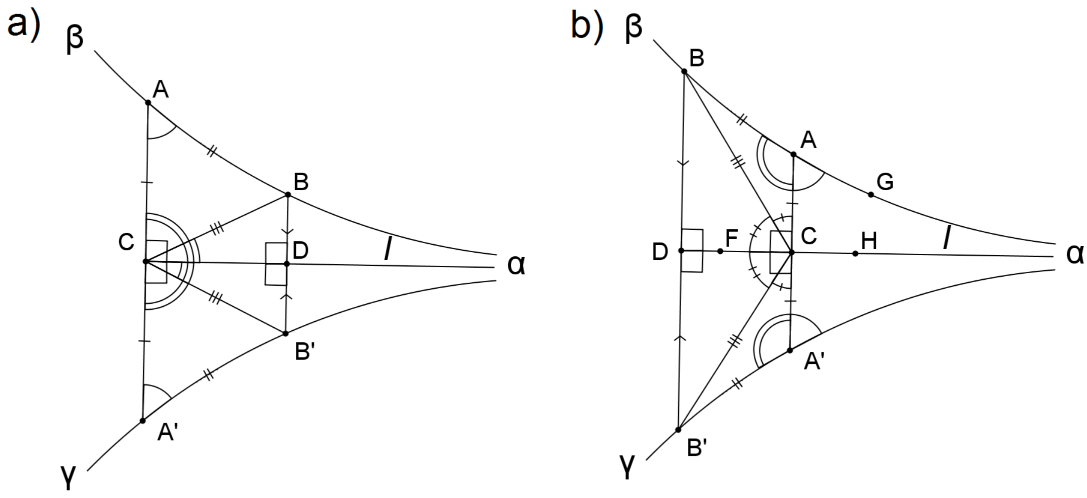


KUVA 3.33. Yleistetty kulma $\measuredangle\beta\alpha\gamma$ ja sen kulmanpuolittaja l.

TODISTUS. Olkoon C suorien $\overleftrightarrow{AA'}$ ja l leikkauspiste. Nyt asymptoottisissa kolmioissa $\triangle AC\alpha$ ja $\triangle A'C\alpha$ on $\measuredangle AC\alpha \cong \measuredangle A'C\alpha$ ja $AC \cong A'C$, joten KS-lauseen mukaan $\measuredangle CA\alpha \cong \measuredangle CA'\alpha$. Olkoon piste $D \in l$ siten, että $\overleftrightarrow{BD} \perp l$. Koska $A \neq B$, niin $D \neq C$. Oletetaan aluksi, että $B \in A\alpha$ ja osoitetaan, että tällöin $D \in C\alpha$ tekemällä vastaväite. Olkoon piste $E \in C\alpha$ ja oletetaan, että $D * C * E$. Koska $B \in A\alpha$, niin lauseen 2.8 perusteella piste B on kulman $\measuredangle AC\alpha$ sisällä, joten kulma $\measuredangle BC\alpha$ on pienempi kuin kulma $\measuredangle AC\alpha$. Näin ollen $(\measuredangle BC\alpha)^\circ < 90$, jolloin $(\measuredangle BCD)^\circ > 90$. Koska $\measuredangle BDC$ on suora kulma, kolmiossa $\triangle BCD$ on nyt $(\measuredangle BCD)^\circ + (\measuredangle BDC)^\circ > 180$, mikä on ristiriita. Siis $D \in C\alpha$.

Valitaan piste $B' \in A'\alpha$ siten, että $AB \cong A'B'$. Lisäksi $\measuredangle CAB = \measuredangle CA\alpha \cong \measuredangle CA'B'\alpha = \measuredangle CA'B'$ ja $AC \cong A'C$, joten SKS-säännön nojalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C$ ovat yhtenevät. Näin ollen $\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'CB'$ ja $BC \cong B'C$. Vastaavasti kuin piste B on kulman $\measuredangle AC\alpha$ sisällä, myös piste B' on kulman $\measuredangle A'C\alpha$ sisällä. Lisäksi $\measuredangle ACD = \measuredangle AC\alpha \cong \measuredangle A'C\alpha = \measuredangle A'CD$ ja $\measuredangle ACB \cong \measuredangle A'CB'$, joten $\measuredangle BCD \cong \measuredangle B'CD$. Lisäksi $BC \cong B'C$ ja $CD = CD$, joten SKS-lauseen nojalla $\triangle BCD \cong \triangle B'CD$. Täten $BD \cong B'D$ ja kulma $\measuredangle BDC$ on suora kulma, joten piste $B' \in \alpha\gamma$ on pisteen B peilaus.

Tapaus $B \notin A\alpha$ voidaan käsitellä vastaavasti. Nyt kulmien $\measuredangle CA\alpha$ ja $\measuredangle CA'\alpha$ vieruskulmat ovat yhtenevät. Valitaan piste B' tällä kertaa siten, että se ei ole puolisuoralla $A'\alpha$. Kuten edellä SKS-lausetta kahteen kertaan käyttämällä saadaan, että piste $B' \in \alpha\gamma$ on pisteen B peilaus. Pisteen B oleminen kulman $\measuredangle ACD$ sisällä täytyy kuitenkin perustella toisin, sillä lausetta 2.8 ei voida käyttää. Valitaan piste $F \in l$ siten, että $F \notin A\alpha$, ja osoitetaan, että piste B on kulman $\measuredangle ACF$ sisällä: koska suorat $l = \overleftrightarrow{CF}$ ja $\overleftrightarrow{AB}$ ovat yhdensuuntaiset, niin $AB\overleftrightarrow{CF}$. Olkoot pisteet G ja H siten, että $B * A * G$ ja $F * C * H$. Tällöin $G \in A\alpha$ ja $H \in C\alpha$, joten lauseen 2.7 nojalla $GH\overleftrightarrow{AC}$. Tiedoista $B * A * G$ ja $F * C * H$ saadaan, että $B\overleftrightarrow{AC}G$ ja $F\overleftrightarrow{AC}H$. Koska $GH\overleftrightarrow{AC}$ ja $B\overleftrightarrow{AC}G$, niin $B\overleftrightarrow{AC}H$. Lisäksi $F\overleftrightarrow{AC}H$, joten $BF\overleftrightarrow{AC}$. Siis $AB\overleftrightarrow{CF}$ ja $BF\overleftrightarrow{AC}$, joten piste B on kulman $\measuredangle ACF$ sisällä. Tällöin vastaavasti kuin edellä voidaan näyttää, että $D \notin C\alpha$, joten $\measuredangle ACF = \measuredangle ACD$. $\square$



Kuva 3.34. Lemma 3.25: määritelmä 3.24 ei riipu pisteen A valinnasta. a) $B \in A\alpha$. b) $B \notin A\alpha$.

Seuraavaa aputulosta tarvitaan lauseiden 3.27 ja 3.31 todistuksissa.

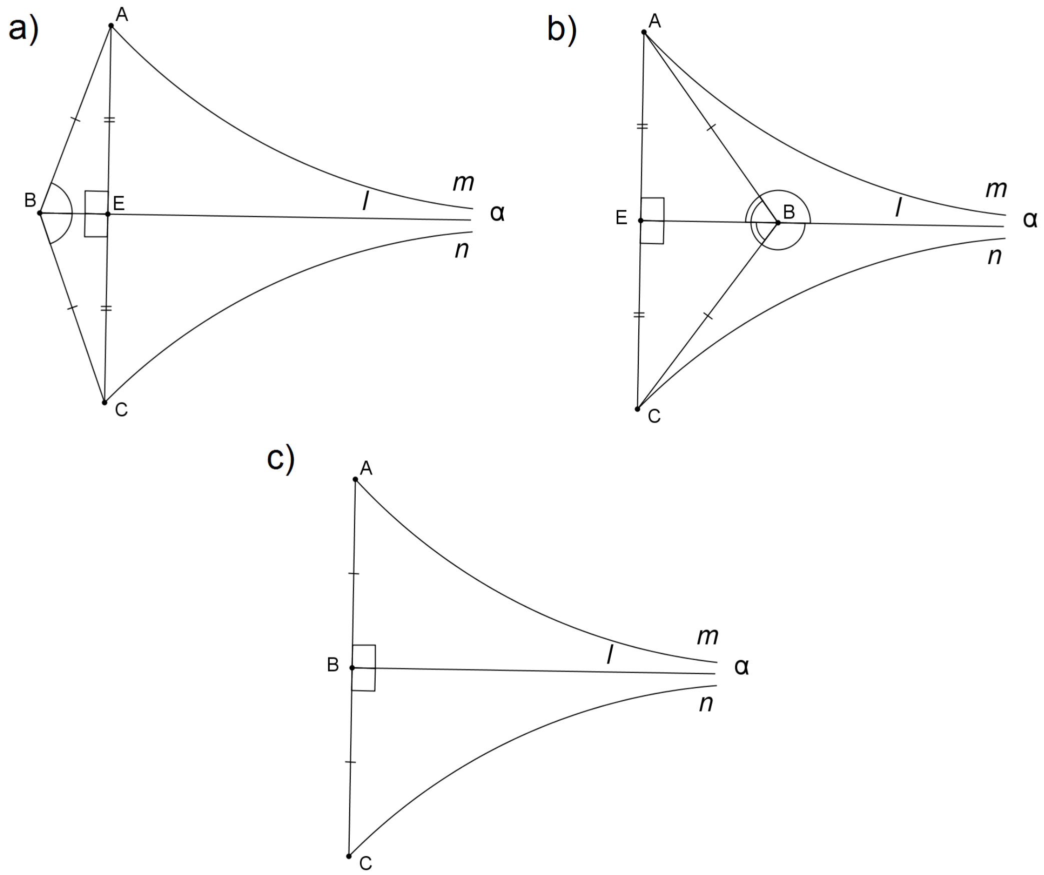
Lemma 3.26. *Olkoon yhtenevät asymptoottiset kolmiot $\triangle AB\alpha$ ja $\triangle CB\alpha$ ja suora l siten, että $B\alpha \subset l$. Oletetaan lisäksi, että AlC. Tällöin suora l on yleistetyn kulman $\measuredangle A\alpha C$ puolittaja.*

Todistus. Lemman 3.25 perusteella riittää osoittaa, että piste C on pisteen A peilaus suoran l suhteen. Olkoon piste $E \in l$ siten, että $\overleftrightarrow{AE} \perp l$. Todistus jakaantuu eri tapauksiin sen mukaan, onko piste E puolisuoralla $B\alpha$ vai ei.

Oletetaan, että $E \in B\alpha \setminus \{B\}$. Tällöin $\measuredangle ABE = \measuredangle AB\alpha \cong \measuredangle CB\alpha = \measuredangle CBE$. Lisäksi $BE = BE$ ja $AB \cong CB$, joten kolmiot $\triangle ABE$ ja $\triangle CBE$ ovat SKS-säännön perusteella yhtenevät. Näin ollen $AE \cong CE$ ja $\measuredangle BEC$ on suora kulma, joten piste C on pisteen A peilaus. Jos $E \notin B\alpha$, niin kulmat $\measuredangle ABE$ ja $\measuredangle CBE$ ovat kuitenkin kulmien $\measuredangle AB\alpha$ ja $\measuredangle CB\alpha$ vieruskulmina yhtenevät. Tällöin $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ kuten edellä. Tapauksessa $E = B$ väite seuraa suoraan oletuksesta, että asymptoottiset kolmiot $\triangle AB\alpha$ ja $\triangle CB\alpha$ ovat yhtenevät. $\square$

Lause 3.27. *Yleistetylle kulmalle $\measuredangle A\alpha B$ on olemassa yksikäsitteinen yleistetty kulmanpuolittaja l.*

Todistus. Olkoon puolisuora $\overrightarrow{AC}$ kulman $\measuredangle BA\alpha$ ja $\overrightarrow{BD}$ kulman $\measuredangle AB\alpha$ puolittaja. Koska piste C on kulman $\measuredangle BA\alpha$ sisällä, asymptoottisen yhdensuuntaisuuden määritelmän mukaan puolisuora $\overrightarrow{AC}$ leikkaa puolisuoraa $B\alpha$. Olkoon leikkauspiste E. Nyt piste D on kulman $\measuredangle AB\alpha = \measuredangle ABE$ sisällä, joten puomilauseen nojalla on olemassa piste $F \in \overrightarrow{BD}$ siten, että $A * F * E$. Olkoon lisäksi pisteet $G \in A\alpha$, $H \in \overleftrightarrow{AG}$ siten, että $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{FH}$, ja $I \in \overrightarrow{AB}$ siten, että $AI \cong AH$. Osoitetaan, että piste H kuuluu puolisuoralle $A\alpha$ tekemällä vastaväite eli oletetaan, että $H * A * G$.

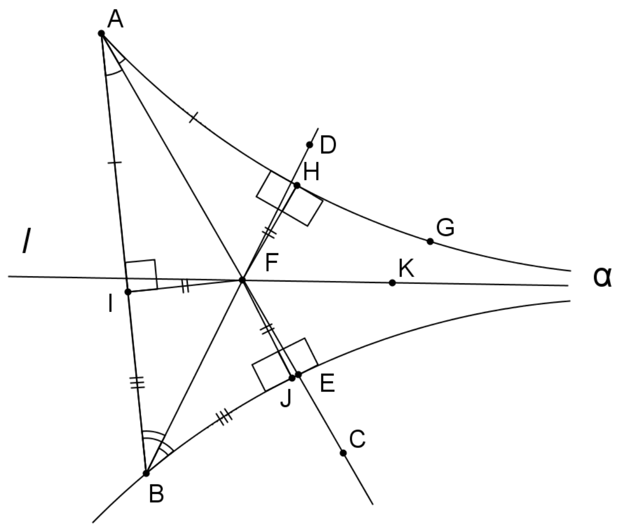


KUVA 3.35. Lemma 3.26: suora l on yleistetyn kulman $\measuredangle A\alpha C$ puolittaja. a) $E \in B\alpha \setminus \{B\}$. b) $E \notin B\alpha$. c) $E = B$.

Nyt kolmiossa $\triangle AFH$ on $(\measuredangle FAH)^\circ < 90$, jolloin $(\measuredangle FA\alpha)^\circ = (\measuredangle FAG)^\circ > 90$. Tämä on ristiriita, sillä tällöin $(\measuredangle BAG)^\circ = 2(\measuredangle FAG)^\circ > 180$. Nyt siis $AH \cong AI$, $\measuredangle FAH = \measuredangle FA\alpha \cong \measuredangle FAB = \measuredangle FAI$ ja $AF = AF$, joten SKS-säännön mukaan kolmiot $\triangle AFH$ ja $\triangle AFI$ ovat yhtenevät. Näin ollen $FH \cong FI$ ja $\measuredangle AIF$ on suora kulma.

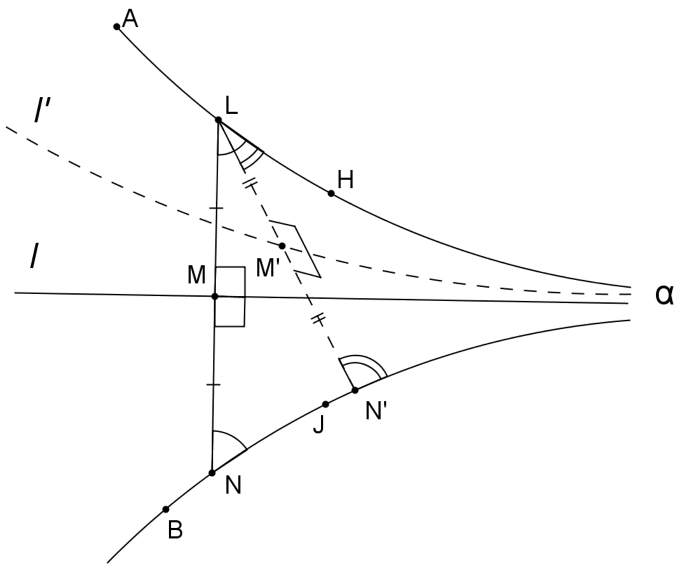
Tehdään vastaava konstruktio myös kulmalle $\measuredangle AB\alpha$. Olkoon $J \in B\alpha$ siten, että $BJ \cong BI$. Näytetään, että $I \in \overrightarrow{BA} \setminus \{B\}$. Piste I ei voi olla B koska kulman $\measuredangle ABF$ täytyy olla terävä. Jos $I * B * A$, niin $(\measuredangle FBI)^\circ < 90$, joten $(\measuredangle FBA)^\circ > 90$, mikä on ristiriita. Koska $I \in \overrightarrow{BA} \setminus \{B\}$, niin vastaavasti kuin edellä saadaan, että $\triangle BFI \cong \triangle BFJ$, jolloin $FJ \cong FI \cong FH$ ja suorina kulmina kulmat $\measuredangle FH\alpha$ ja $\measuredangle FJ\alpha$ ovat yhtenevät. Näin ollen $\triangle FH\alpha \cong \triangle FJ\alpha$. Kun valitaan piste $K \in F\alpha \setminus \{F\}$, niin lemman 3.26 nojalla suora $l = \overleftrightarrow{FK}$ on kulman $\measuredangle A\alpha B$ yleistetty kulmanpuolittaja.

Osoitetaan vielä yleistetyn kulmanpuolittajan yksikäsitteisyys. Tehdään vastaväite ja oletetaan, että on olemassa toinenkin kulman $\measuredangle A\alpha B$ yleistetty kulmanpuolittaja $l' \neq l$. Olkoon pisteet $L \in \overleftrightarrow{AH}$ ja $M \in l$ siten, että $\overleftrightarrow{LM} \perp l$. Tällöin on olemassa suorien $\overleftrightarrow{BJ}$ ja $\overleftrightarrow{LM}$ leikkauspiste N siten, että $LM \cong NM$. Olkoon vastaavasti pisteet $M' \in l'$ siten, että $\overleftrightarrow{LM'} \perp l'$, ja suorien $\overleftrightarrow{BJ}$ ja $\overleftrightarrow{LM'}$ leikkauspiste N' siten, että $LM' \cong N'M'$. Jos $N = N'$, niin $M = M'$, koska M on janan LN keskipiste ja M'



KUVA 3.36. Lause 3.27: yleistetyn kulmanpuolittajan olemassaolo.

janan LN' keskipiste. Tämä on kuitenkin ristiriita, koska suorat l ja l' ovat asymptoottisesti yhdensuuntaiset. Oletetaan sitten, että $N' \in N\alpha$. Nyt $\measuredangle LM\alpha \cong \measuredangle NM\alpha$ ja $LM \cong NM$, joten KS-lauseen perusteella $\measuredangle NL\alpha = \measuredangle ML\alpha \cong \measuredangle MN\alpha = \measuredangle LN\alpha$. Vastaavasti $\measuredangle N'L\alpha \cong \measuredangle LN'\alpha$. Nyt $\measuredangle LN'\alpha$ on kolmion $\triangle LNN'$ ulkokulma, joten $\measuredangle LN'\alpha > \measuredangle LNN' = \measuredangle LN\alpha$. Toisaalta, koska $N' \in N\alpha$, niin lauseen 2.8 mukaan piste N' on kulman $\measuredangle NL\alpha$ sisällä, joten $\measuredangle LN\alpha \cong \measuredangle NL\alpha > \measuredangle N'L\alpha \cong \measuredangle LN'\alpha$. Saatiin siis ristiriita. Jos $N' \notin N\alpha$, niin $\measuredangle LN\alpha$ on kolmion $\triangle LNN'$ ulkokulma, jolloin saadaan vastaava ristiriita. Yleistetty kulmanpuolittaja on siis yksikäsitteinen. $\square$



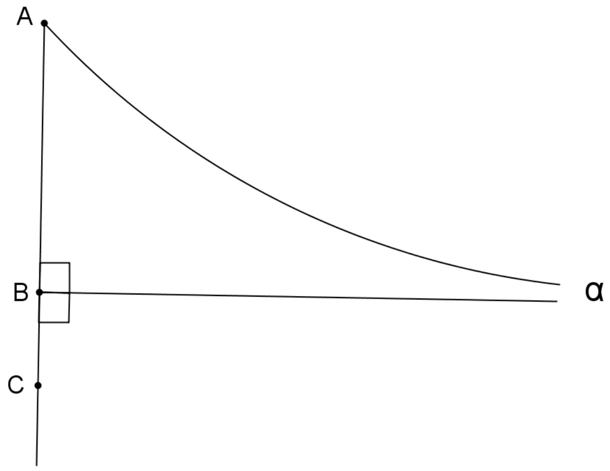
KUVA 3.37. Lause 3.27: yleistetyn kulmanpuolittajan yksikäsitteisyys.

Huomautus 3.28. Lauseen 3.27 todistuksesta nähdään, että yksinkertaisen asymptoottisen kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä.

Seuraava lemma on lauseen 3.30 aputulos.

Lemma 3.29. *Olkoon $\triangle AB\alpha$ asymptoottinen kolmio. Jos $\measuredangle AB\alpha$ on suora kulma, niin kulma $\measuredangle BA\alpha$ on terävä.*

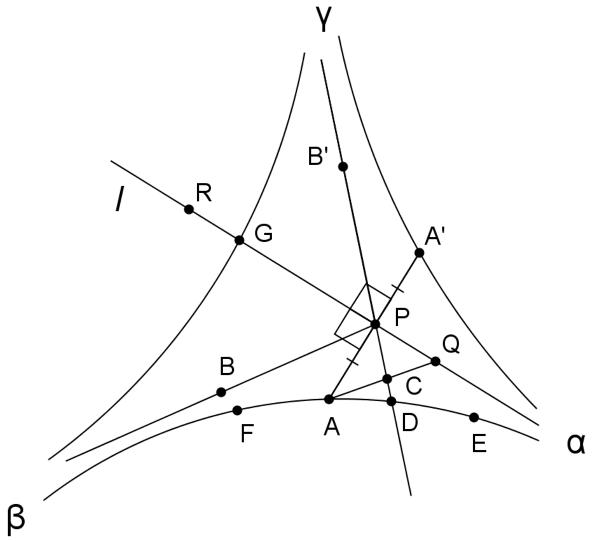
Todistus. Olkoon piste C siten, että $A * B * C$. Tällöin $(\measuredangle CB\alpha)^\circ = 90$, joten asymptoottisen ulkokulmaepäyhtälön mukaan $(\measuredangle BA\alpha)^\circ < 90$. $\square$



Kuva 3.38. Lemma 3.29: kulma $\measuredangle BA\alpha$ on terävä, jos $\measuredangle AB\alpha$ on suora kulma.

Lause 3.30. *Olkoon $\triangle\alpha\beta\gamma$ kolminkertainen asymptoottinen kolmio ja suora l kulman $\measuredangle\beta\alpha\gamma$ yleistetty kulmanpuolittaja. Tällöin $l \perp \beta\gamma$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että suora l leikkaa suoraa $\beta\gamma$. Olkoon piste $A \in \alpha\beta$, A' sen peilaus suoran l suhteen, ja P suorien $\overleftrightarrow{AA'}$ ja l leikkauspiste. Olkoon lisäksi pisteet $Q \in P\alpha$ ja R siten, että $Q * P * R$. Osoitetaan, että piste R on kulman $\measuredangle\beta P\gamma$ sisällä. Olkoon pisteet $B \in P\beta$ ja $B' \in P\gamma$. Symmetrian vuoksi riittää osoittaa, että $BR\overleftrightarrow{B'P}$. Koska l on yleistetty kulmanpuolittaja, piste P on janan AA' keskipiste, jolloin $A * P * A'$. Näin ollen $A\overleftrightarrow{B'P}A'$. Lauseen 3.15 perusteella piste $A' \in \alpha\gamma$ on kulman $\measuredangle\alpha P\gamma$ sisällä, joten $A'Q\overleftrightarrow{B'P}$. Lisäksi $A\overleftrightarrow{B'P}A'$, joten $A\overleftrightarrow{B'P}Q$. Täten on olemassa piste $C \in \overleftrightarrow{B'P}$ siten, että $A * C * Q$. Tällöin $C \in \measuredangle(APQ)$. Asymptoottisen yhdensuuntaisuuden nojalla puolisuora $\overrightarrow{PC}$ leikkaa siis puolisuoraa $A\alpha$; olkoon leikkauspiste D. Olkoon lisäksi pisteet $E \in D\alpha$ ja $F \in D\beta$, jolloin $E\overleftrightarrow{B'P}F$. Lisäksi lauseen 2.7 nojalla $EQ\overleftrightarrow{B'D}$ eli $EQ\overleftrightarrow{B'P}$, joten $F\overleftrightarrow{B'P}Q$. Edelleen saman lauseen mukaan $BF\overleftrightarrow{B'P}$, jolloin saadaan, että $B\overleftrightarrow{B'P}Q$. Koska lisäksi $Q\overleftrightarrow{B'P}R$ ($Q * P * R$), niin $BR\overleftrightarrow{B'P}$. Piste R on siis kulman $\measuredangle\beta P\gamma$ sisällä, joten lauseen 3.18 perusteella puolisuora $\overrightarrow{PR}$ leikkaa suoraa $\beta\gamma$. Olkoon leikkauspiste G.



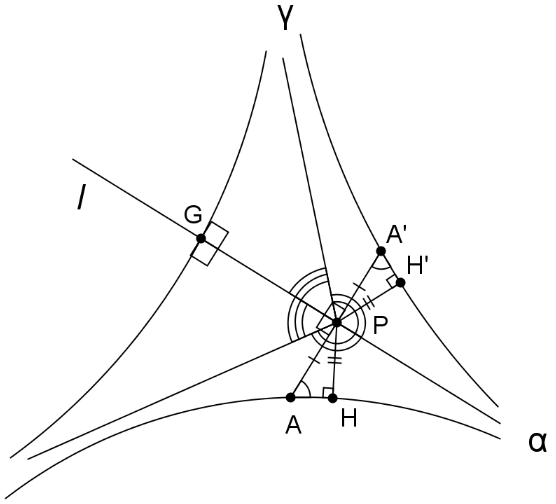
KUVA 3.39. Lause 3.30: yleistetty kulmanpuolittaja l leikkaa suoraa $\beta\gamma$.

Osoitetaan sitten, että suora l on kohtisuorassa suoraa $\beta\gamma$ vastaan. Olkoot pisteet $H \in \alpha\beta$ ja $H' \in \alpha\gamma$ siten, että $\overleftrightarrow{HP} \perp \alpha\beta$ ja $\overleftrightarrow{H'P} \perp \alpha\gamma$. Nyt kulma $\measuredangle PA\alpha$ on lemman 3.29 mukaan terävä, joten $H \neq A$. Oletetaan, että $H \notin A\alpha$. Tällöin kulma $\measuredangle PA\alpha$ on kolmion $\triangle AHP$ ulkokulma, joten se on suurempi kuin suora kulma $\measuredangle AHP$. Tämä on ristiriita, joten $H \in A\alpha$. Vastaavasti $H' \in A'\alpha$. Suorina kulmina kulmat $\measuredangle AP\alpha$ ja $\measuredangle A'P\alpha$ ovat yhtenevät ja $AP \cong A'P$, joten KS-lauseen nojalla $\measuredangle PA\alpha \cong \measuredangle PA'\alpha$. Tällöin $AP \cong A'P$, $\measuredangle PAH = \measuredangle PA\alpha \cong \measuredangle PA'\alpha = \measuredangle PA'H'$ ja $\measuredangle AHP \cong \measuredangle A'H'P$, joten SKK-säännön perusteella kolmiot $\triangle AHP$ ja $\triangle A'H'P$ ovat yhtenevät. Täten $HP \cong H'P$, mistä seuraa lauseen 3.17 mukaan, että $\measuredangle \alpha P\beta \cong \measuredangle \alpha P\gamma$. Tällöin myös näiden kulmien vieruskulmat $\measuredangle GP\beta$ ja $\measuredangle GP\gamma$ ovat yhtenevät. Lisäksi $GP = GP$, joten KS-yhtenevyyslauseen nojalla $\measuredangle PG\beta \cong \measuredangle PG\gamma$, jolloin suora l on kohtisuorassa suoraa $\beta\gamma$ vastaan. □

LAUSE 3.31. *Olkoon $\triangle\alpha\beta\gamma$ kolminkertainen asymptoottinen kolmio ja l, m ja n sen yleistetyt kulmanpuolittajat siten, että suoralla l on pääty α, suoralla m pääty β ja suoralla n pääty γ. Olkoon lisäksi pisteet A, B ja C siten, että $l \cap \beta\gamma = \{A\}$, $m \cap \alpha\gamma = \{B\}$ ja $n \cap \alpha\beta = \{C\}$. Tällöin yleistetyt kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä P ja $AP \cong BP \cong CP$.*

TODISTUS. Olkoot pisteet $D \in B\beta$, $E \in A\beta$, $F \in A\gamma$, $G \in B\gamma$ ja $H \in B\alpha$. Osoitetaan, että piste D on kulman $\measuredangle AB\alpha$ sisällä. Koska piste E on puolisuoralla $A\beta$ ja F on puolisuoralla $A\gamma$, niin $E\overleftrightarrow{AB}F$. Lisäksi lauseen 2.7 mukaan $DE\overleftrightarrow{AB}$, joten $D\overleftrightarrow{AB}F$. Saman lauseen perusteella myös $FG\overleftrightarrow{AB}$, mistä saadaan edelleen, että $D\overleftrightarrow{AB}G$. Lisäksi $G\overleftrightarrow{AB}H$, joten $DH\overleftrightarrow{AB}$. Koska lauseen 3.15 nojalla piste A on kulman $\measuredangle\beta B\gamma$ sisällä, niin $AD\overleftrightarrow{BG}$ eli $AD\overleftrightarrow{BH}$. Saatiin siis, että $DH\overleftrightarrow{AB}$ ja $AD\overleftrightarrow{BH}$, joten $D \in \measuredangle(AB\alpha)$. Näin ollen puolisuora $\overrightarrow{BD}$ leikkaa puolisuoraa $A\alpha$; olkoon leikkauspiste P.

Osoitetaan, että myös kolmas yleistetty kulmanpuolittaja n kulkee pisteen P kautta. Olkoon piste $I \in P\alpha$, jolloin $HI\overleftrightarrow{BP}$. Lisäksi $G\overleftrightarrow{BP}H$, joten $G\overleftrightarrow{BP}I$. Koska piste A

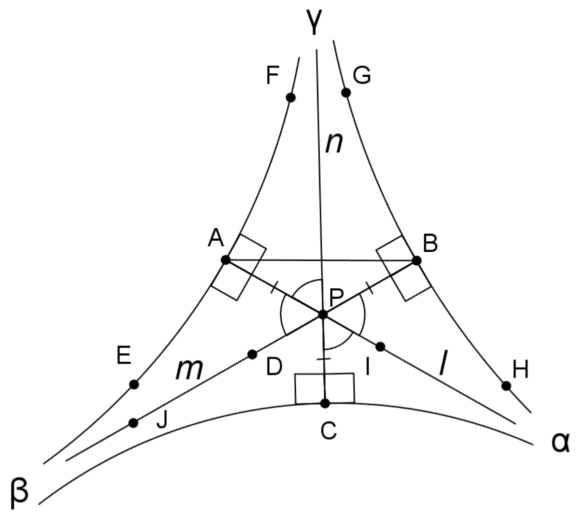


Kuva 3.40. Lause 3.30: yleistetty kulmanpuolittaja l on kohtisuorassa suoraa $\beta\gamma$ vastaan.

on kulman $\measuredangle DBG$ sisällä, niin $AG\overleftrightarrow{BD}$ eli $AG\overleftrightarrow{BP}$. Tästä ja tiedosta $G\overleftrightarrow{BP}I$ saadaan, että $A\overleftrightarrow{BP}I$, jolloin $A * P * I$. Vastaavasti, jos valitaan piste $J \in P\beta$, niin $B * P * J$. Tällöin kulmat $\measuredangle APJ = \measuredangle AP\beta$ ja $\measuredangle BPI = \measuredangle BP\alpha$ ovat ristikulmina yhtenevät. Myös kulmat $\measuredangle PA\beta$ ja $\measuredangle PB\alpha$ ovat yhtenevät (suorat kulmat, lause 3.30), joten KK-lauseen nojalla $AP \cong BP$. Tästä seuraa, että asymptoottiset kolmiot $AP\gamma$ ja $BP\gamma$ ovat yhtenevät KS-säännön mukaan, sillä $\measuredangle PA\gamma \cong \measuredangle PB\gamma$. Täten lemman 3.26 perusteella yleistetty kulmanpuolittaja n kulkee pisteen P kautta. Lisäksi $\measuredangle AP\gamma \cong \measuredangle CP\alpha$ (ristikulmat) ja $\measuredangle PA\gamma \cong \measuredangle PC\alpha$, joten KK-lauseen mukaan $CP \cong AP \cong BP$. $\square$

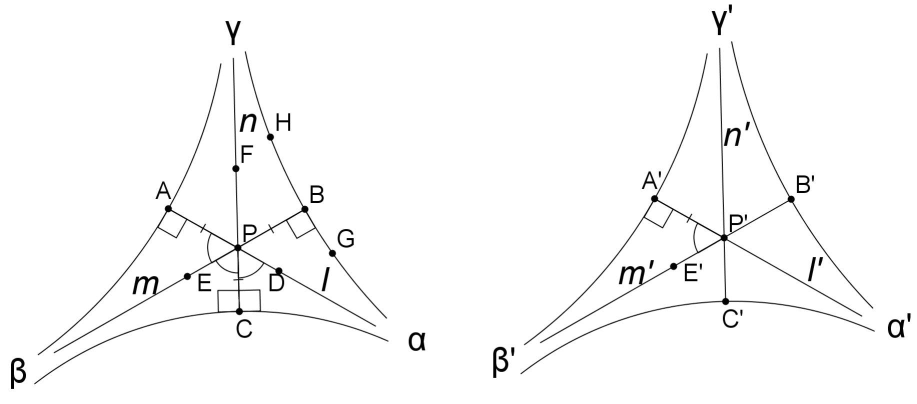
Lause 3.32. *Olkoon $\triangle\alpha\beta\gamma$ kolminkertainen asymptoottinen kolmio, l, m ja n yleistetyt kulmanpuolittajat ja pisteet A, B, C ja P kuten lauseessa 3.31. Olkoon vastaavasti kolminkertainen asymptoottinen kolmio $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$, l', m' ja n' sen yleistetyt kulmanpuolittajat sekä pisteet A', B', C' ja P' vastaavalla tavalla. Tällöin $AP \cong A'P'$.*

Todistus. Olkoot pisteet $D \in P\alpha$, $E \in P\beta$ ja $F \in P\gamma$. Nyt lauseen 3.30 perusteella kulmat $\measuredangle PA\beta$ ja $\measuredangle PC\beta$ ovat suoria kulmia ja niin ollen myös yhtenevät. Lisäksi lauseen 3.31 mukaan $AP \cong CP$, joten KS- lauseen nojalla $\measuredangle APE = \measuredangle AP\beta \cong \measuredangle CP\beta = \measuredangle CPE$. Vastaavasti myös kulmat $\measuredangle APE$ ja $\measuredangle CPD$ ovat yhtenevät. Näin ollen $\measuredangle CPE \cong \measuredangle APE \cong \measuredangle CPD$. Lisäksi piste E on kulman $\measuredangle APC$ sisällä, mikä nähdään seuraavasti: symmetrian vuoksi riittää osoittaa, että $AE\overleftrightarrow{CP}$. Lauseen 3.15 mukaan $A \in \measuredangle(EPF)$, joten $AE\overleftrightarrow{FP}$ eli $AE\overleftrightarrow{CP}$. Näin ollen $(\measuredangle APC)^\circ = (\measuredangle APE)^\circ + (\measuredangle CPE)^\circ$. Osoitetaan, että $A * P * D$, jolloin kulmat $\measuredangle APC$ ja $\measuredangle CPD$ ovat vieruskulmia. Olkoot pisteet $G \in B\alpha$ ja H siten, että $G * B * H$, jolloin $DG\overleftrightarrow{BP}$ ja $G\overleftrightarrow{BP}H$. Täten $D\overleftrightarrow{BP}H$. Koska piste A on kulman $\measuredangle EBH$ sisällä, niin $AH\overleftrightarrow{BE}$ eli $AH\overleftrightarrow{BP}$. Tästä ja tiedosta $D\overleftrightarrow{BP}H$ saadaan, että $A\overleftrightarrow{BP}D$, jolloin $A * P * D$. Saadaan siis, että $(\measuredangle APE)^\circ + (\measuredangle CPE)^\circ + (\measuredangle CPD)^\circ = (\measuredangle APC)^\circ + (\measuredangle CPD)^\circ = 180.$



Kuva 3.41. Lause 3.31: yleistetyt kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä, joka on yhtä etäällä kaikista kolmion $\triangle\alpha\beta\gamma$ sivuista.

Koska kulmat $\measuredangle APE$, $\measuredangle CPE$ ja $\measuredangle CPD$ ovat yhteneviä, niin $3(\measuredangle APE)^\circ = 180$, joten $(\measuredangle APE)^\circ = 60$. Vastaavasti voidaan osoittaa, että $(\measuredangle A'P'E')^\circ = 60$. Tällöin $\measuredangle AP\beta = \measuredangle APE \cong \measuredangle A'P'E' = \measuredangle A'P'\beta'$ ja $\measuredangle PA\beta \cong \measuredangle P'A'\beta'$ (suorat kulmat, lause 3.30), joten KK-lauseen nojalla $AP \cong A'P'$. □



Kuva 3.42. Lause 3.32: kolmiot $\triangle\alpha\beta\gamma$ ja $\triangle\alpha'\beta'\gamma'$ ovat yhtenevät.

Huomautus 3.33. Lauseen 3.32 perusteella voidaan siis sanoa, että kaikki kolminkertaiset asymptoottiset kolmiot ovat yhteneviä.

LUKU 4

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$A * B * C$	Piste B on pisteiden A ja C välissä
ABl	Pisteet A ja B ovat samalla puolella suoraa l
AlB	Pisteet A ja B ovat eri puolilla suoraa l
$P \in \measuredangle(ABC)$	Piste P on kulman $\measuredangle ABC$ sisällä
$\overrightarrow{AB}\|\|\|\overrightarrow{CD}$	Puolisuorat $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{CD}$ ovat rajayhdensuuntaiset
$A\alpha$	Puolisuora $\overrightarrow{AB}$, jonka pääty on α
$\alpha\beta$	Suora, jonka päädyt ovat α ja β
$\triangle AB\alpha$	Asymptoottinen kolmio, jonka sivut ovat AB, $A\alpha$ ja $B\alpha$
$\measuredangle\alpha A\beta$	Kulma, jonka kyljet ovat $A\alpha$ ja $A\beta$
$\triangle A\alpha\beta$	Kaksinkertainen asymptoottinen kolmio, jonka sivut ovat $A\alpha$ ja $A\beta$ ja $\alpha\beta$
$\triangle\alpha\beta\gamma$	Kolminkertainen asymptoottinen kolmio, jonka sivut ovat $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ ja $\beta\gamma$
$\measuredangle\alpha\beta\gamma$	Yleistetty kulma, joka muodostuu suorista $\alpha\beta$ ja $\beta\gamma$

Kirjallisuutta

[1] Robin Hartshorne: *Geometry: Euclid & beyond.* Springer, 2000.

[2] Lassi Kurittu, Veli-Matti Hokkanen, Lauri Kahanpää: *Geometria.* Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2008.

[3] Richard J. Trudeau: *The Non-Euclidean Revolution.* Birkhäuser, 1987.