p-Laplacen operaattorin ominaisarvo-ongelmasta

Jarkko Siltakoski

Pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016

Merkintöjä

$\mathbb{R}^N$	N-ulotteinen euklidinen avaruus
$\lvert x\rvert$	pisteen $x \in \mathbb{R}^N$ euklidinen normi
alue	avoin, yhtenäinen ja rajoitettu avaruuden $\mathbb{R}^N$ osajoukko
$B(x_0, r)$	$\{x \in \mathbb{R}^N : \lvert x_0 - x\rvert < r\}$
$\overline{E}$	joukon E sulkeuma
∂E	joukon E reunapisteiden joukko
$\complement E$	joukon E komplementti
$\operatorname{int} E$	joukon E sisäpisteiden joukko
$\lvert E\rvert$	joukon $E \subset \mathbb{R}^N$ N-ulotteinen Lebesgue'in mitta
$U \Subset E$	$\overline{U}$ on kompakti ja $\overline{U} \subset E$
$\{u > \lambda\}$	$\{x : u(x) > \lambda\}$
$\operatorname{supp} u$	$\Omega \setminus \bigcup \{A \subset \Omega : A \text{ on avoin ja } u(x) = 0 \text{ m.k. } x \in A\}$.
$C^k(\Omega)$	$\{u : \text{funktio } u : \Omega \to \mathbb{R}^N \text{ on } k\text{-kertaa jatkuvasti differentioituva}\}$
$C_c^k(\Omega)$	$\{u \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp} u \Subset \Omega\}$
$u_{\mid E}$	funktion u rajoittuma joukkoon E
p'	$\frac{p}{p-1}$

Tiivistelmä: Jarkko Siltakoski, *p-Laplacen operaattorin ominaisarvo-ongelmasta* (engl. *On the eigenvalue problem of the p-Laplace operator*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 47 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2016.

Tämän tutkielman tarkoitus on tutustua epälineaarisiin ominaisarvo-ongelmiin p-Laplacen operaattorin ominaisarvo-ongelman kautta. p-Laplacen operaattori $\Delta_p = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ on Laplacen operaattorin eräs yleistys ja tarkastelun kohteena oleva ominaisarvo-ongelma $\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$ on Dirichletin ominaisarvo-ongelman yleistys.

Tutkielmassa kerrataan ensin tarvittavia taustatietoja Sobolevin avaruuksista ja funktionaalianalyysistä, ja keskitytään sitten itse ongelmaan. Päätulokset koskevat ensimmäistä ominaisarvoa, ja ne ovat ensimmäisen ominaisarvon olemassaolo, ensimmäisen ominaisarvon karakterisointi Rayleighin osamäärän avulla, ensimmäisen ominaisfunktion yksinkertaisuus, ja se, että ensimmäinen ominaisfunktio on ainoa ominaisfunktio, joka ei vaihda merkkiä. Muita tuloksia ovat ominaisfunktioiden jatkuvuus ja rajoittuneisuus sekä se, että ominaisarvojen joukko on suljettu. Lisäksi tutkielmassa käydään läpi lineaarista erikoistapausta $p = 2$, jossa p-Laplacen operaattori on tavallinen Laplacen operaattori.

Avainsanat: Laplace, harmoninen, osittaisdifferentiaaliyhtälöt, Sobolevin avaruus, ominaisarvo

Sisältö

1 Johdanto

Jos $1 < p < \infty$, niin p-harmoninen (tai p-Laplacen) operaattori

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

on harmonisen operaattorin eräs yleistys: Sobolevin funktio $u \in W^{1,p}(\Omega)$ minimoi Dirichletin integraalia $\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ joukossa $\left\{v : u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$ tasan silloin, kun $\Delta_p u = 0$ heikossa mielessä (ks. [19, lause 2.7]). Siis kun $p = 2$, on Δ_p tavallinen Laplacen operaattori.

Tutkielmassa tarkastelemme p-harmoniseen operaattoriin liittyvää epälineaarista ominaisarvo-ongelmaa

$$\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0, \tag{1.1}$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on rajoitettu ja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Arvoja λ, joilla yhtälöllä (1.1) on ratkaisuja, kutsumme ominaisarvoiksi ja niitä vastaavia funktioita ominaisfunktioiksi. Näistä arvoista pienintä kutsumme ensimmäiseksi ominaisarvoksi ja sitä vastaavia ominaisfunktioita ensimmäisiksi ominaisfunktioiksi.

Ominaisarvo-ongelma (1.1) on Dirichletin ominaisarvo-ongleman yleistys, ja palautuu siihen, kun $p = 2$. Analogisesti Dirichletin ominaisarvo-ongelman kanssa, voidaan ongelman (1.1) ensimmäinen ominaisfunktio karakterisoida Rayleighin osamäärän $J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx / \int_\Omega |u|^p \, dx$ minimoijana. Ongelma (1.1) ei kuitenkaan ole lineaarinen eikä sen tutkiminen siksi ole yhtä helppoa. Tästä on esimerkkinä se, että lineaaritilanteessa kaikki ominaisarvot voidaan karakterisoida suoraan Rayleighin osamäärän avulla, mutta yleisessä tilanteessa tämä onnistuu vain ensimmäiselle ominaisarvolle.

Tutkielman päätuloksia ovat ensimmäisen ominaisarvon olemassaolo ja sen karakterisointi Rayleighin osamäärän avulla, sekä ensimmäisen ominaisfunktion yksinkertaisuus. Osoitamme myös, että ominaisfunktiot ovat rajoitettuja ja että vain ensimmäinen ominaisfunktio on positiivinen. Kappaleessa 7 käymme läpi lineaaritilannetta $p = 2$. Lisäksi käsittelemme tarkemmin joitakin p-harmonisen operaattorin kannalta oleellisia taustatietoja: todistamme Rellicin ja Kondrachovin lauseen, osoitamme Alaoglun lauseen avulla, että L^p-avaruudet ovat heikosti kompakteja, ja esittelemme p-ohuuden käsitteen.

Tutkielman tärkeimmät lähteet ovat Lindqvistin p-Laplacen operaattorista ja sen ominaisarvo-ongelmasta kertovat tekstit [19] ja [18], sekä Lindqvistin ja Kawohlin artikkeli [15], jossa on todistettu ensimmäisen ominaisfunktion yksinkertaisuus ja se, että vain ensimmäinen ominaisarvo on yksimerkkinen. Tärkeitä funktionaalianalyysiin ja Sobolevin avaruuksiin liittyviä lähteitä ovat [4], [21], [12] ja [10].

2 Esitietoja ja lauseita

Ellemme toisin mainitse, oletamme tässä kappaleessa, että $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on avoin ja $N \geq 1$.

Määritelmä 2.1 (Konveksit ja konkaavit funktiot)**.** Olkoon V vektoriavaruus ja $E \subset V$ *konveksi*, eli sellainen, että $\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\} \subset E$ kaikilla $x, y \in E$. Funktio $f : E \to \mathbb{R}$ on *konveksi*, jos kaikille $x \neq y \in E$ ja $t \in (0,1)$ pätee

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Jos yllä oleva epäyhtälö on aito, sanomme että f on *aidosti konveksi*. Sanomme, että f on (*aidosti*) *konkaavi*, mikäli $-f$ on (aidosti) konveksi.

Huomautus. Jos I on väli ja $f \in C^1(I)$ sellainen, että f' on kasvava, niin f on konveksi. Tämän perustelemiseksi olkoon $a < b$ välin I pisteitä ja $t \in (0,1)$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa pisteet $c \in (a, ta + (1-t)b)$ ja $d \in (ta + (1-t)b, b)$ siten, että

$$f'(c) = \frac{f(ta + (1-t)b) - f(a)}{ta + (1-t)b - a} \text{ ja } f'(d) = \frac{f(b) - f(ta + (1-t)b)}{b - (ta + (1-t)b)}.$$

Koska $f'(c) \leq f'(d)$, saamme yllä olevasta

$$\frac{f(ta + (1-t)b) - f(a)}{(1-t)(b-a)} \leq \frac{f(b) - f(ta + (1-t)b)}{t(b-a)},$$

mistä edelleen $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$. Epäyhtälöt ovat aitoja, jos f' on aidosti kasvava, joten tällöin f on myös aidosti konveksi.

Esimerkki. Edellisen huomautuksen mukaan kuvaus $[0, \infty) \to \mathbb{R}^N : x \mapsto x^p$ on aidosti konveksi, kun $p > 1$. Tästä seuraa, että myös kuvaus $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|^p$ on aidosti konveksi: jos $a \neq b \in \mathbb{R}^N$ ja $t \in (0,1)$, niin

$$|ta + (1-t)b|^p \leq (t\,|a| + (1-t)\,|b|)^p < t\,|a|^p + (1-t)\,|b|^p.$$

Määritelmä 2.2 (Hölder-jatkuvuus)**.** Olkoon $D \subset \mathbb{R}^N$ ja $0 < \alpha \leq 1$. Sanomme, että funktio $f : D \to \mathbb{R}$ on *Hölder-jatkuva eksponentilla α joukossa D*, jos on $C > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^\alpha \quad \forall\, x, y \in D.$$

Käytämme lisäksi merkintää

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) : f \text{ on Hölder-jatkuva eksponentilla } \alpha \text{ joukossa } \Omega \right\}.$$

Oletamme, että lukijalla on perustiedot Lebesgue'in avaruuksista, eli L^p-avaruuksista. Seuraavassa esitämme joitakin niihin liittyviä, tutkielmassa tarvittavia tuloksia.

Määritelmä 2.3 (Funktion kantaja)**.** Jos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ on mitallinen, niin sen *oleellinen kantaja*, tai vain *kantaja*, on

$$\operatorname{supp} u := \Omega \setminus \bigcup \{A \subset \Omega : A \text{ on avoin ja } u(x) = 0 \text{ m.k. } x \in A\} .$$

Jos $E \subset \mathbb{R}^N$ ja $\operatorname{supp} u \Subset E$, niin sanomme, että u on *kompaktisti kannettu joukossa E*. Huomaa, että jos u on jatkuva, niin sen oleellinen kantaja on sama kuin sen suljettu kantaja, ts. $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Määritelmä 2.4 (Lebesgue'in avaruudet)**.** Olkoon $p \geq 1$. Tällöin Lebesgue-mitallisen funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *L^p-normi* on

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup} |u| , & p = \infty. \end{cases}$$

Lebesgue'in avaruus on

$$L^p(\Omega) := \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{funktio } u \text{ on Lebesgue-mitallinen ja } \|u\|_p < \infty \Big\} ,$$

missä samaistamme funktiot, jotka eroavat vain nollamittaisessa joukossa. Kun sanomme, että funktiolla $u \in L^p(\Omega)$ on jokin ominaisuus (esim. jatkuvuus), niin tarkoitamme, että on olemassa funktio u', jolla on tämä ominaisuus, ja jolle pätee

$$u'(x) = u(x) \text{ m.k. } x \in \Omega.$$

Lisäksi, jos on olemassa nollamittainen joukko E ja piste $x_0 \in \partial\Omega$ siten, että

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega \setminus E}} u(x) = a,$$

niin merkitsemme $u(x_0) = a$.

Hölderin epäyhtälö on aivan keskeinen osa L^p-avaruuksien teoriaa. Viittaamme sitä varten teokseen [13, lause 15.8].

Lause 2.5 (Hölderin epäyhtälö)**.** *Olkoon $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ ja $v \in L^{p'}(\Omega)$, missä $p' = \frac{p}{p-1}$ on luvun p duaalieksponentti. Tällöin*

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_{p'} .$$

Seuraus 2.6 (Yleistetty Hölderin epäyhtälö)**.** *Olkoot* $u_1, \ldots, u_n \in L^{p_i}(\Omega)$, *missä* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$. *Tällöin*

$$\|u_1 u_2 \cdots u_n\|_1 \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_2\|_{p_2} \cdots \|u_n\|_{p_n}.$$

Todistus induktiolla. Oletamme, että väite pätee, kun funktioita u_i on $n-1$ kappaletta. Tällöin, jos $u_1, \ldots, u_n$ ovat kuten yllä, saamme

$$\|u_1 u_2 \cdots u_n\|_1 \leq \|u_1 u_2\|_{\frac{p_1 p_2}{p_1+p_2}} \|u_3\|_{p_3} \cdots \|u_n\|_{p_n}.$$

Toisaalta, koska $\frac{p_1}{p_1+p_2} + \frac{p_2}{p_1+p_2} = 1$, pätee Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\|u_1 u_2\|_{\frac{p_1 p_2}{p_1+p_2}} = \left(\left\| (u_1 u_2)^{\frac{p_1 p_2}{p_1+p_2}} \right\|_1 \right)^{\frac{p_1+p_2}{p_1 p_2}} \leq \|u_1\|_{p_1} \|u_1\|_{p_2}.$$

Näin on nähty, että väite pätee myös, kun funktioita on n kappaletta. □

L^p-normi on nimensä mukaisesti normi joukossa $L^p(\Omega)$, joka L^p-normilla varustettuna onkin täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus. L^p-normin kolmioepäyhtälöä kutsutaan Minkowskin epäyhtälöksi ja avaruuden $L^p(\Omega)$ täydellisyys tunnetaan toisinaan Rieszin ja Fischerin lauseena. Näitä tuloksia varten viittaamme teokseen [13, lauseet 15.9 ja 15.14].

Lebesgue'in avaruuksien rakenteeseen liittyen mainitsemme vielä, että ne ovat separoituvia, kun $1 \leq p < \infty$, ja refleksiivisiä, kun $1 < p < \infty$ (ks. [13] tai [4]). Lisäksi $L^2(\Omega)$ on Hilbertin avaruus, kun se varustetaan sisätulolla

$$(u|v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv \, dx.$$

Seuraavat epäyhtälöt ovat usein hyödyllisiä L^p-normien yhteydessä.

Lemma 2.7. *Olkoon* $p > 0$. *Tällöin on olemassa* $C = C(p) > 0$ *siten, että*

$$C^{-1} (a+b)^p \leq a^p + b^p \leq C (a+b)^p.$$

kaikilla $a, b \geq 0$.

Todistus. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voimme olettaa, että $a \geq b$. Tällöin

$$(a+b)^p \leq 2^p a^p \leq 2^p (a^p + b^p) \leq 2^{p+1} a^p \leq 2^{p+1} (a+b)^p,$$

joten väite pätee vakiolla $C = \max(2^p, 2)$. □

Lemma 2.8. *Olkoot $a, b \geq 0$. Tällöin*

$$|a^p - b^p| \leq |a - b|^p\,, \ \textit{kun}\ 0 < p \leq 1,$$

ja

$$|a - b|^p \leq |a^p - b^p|\,, \ \textit{kun}\ p > 1.$$

Todistus. Merkintöjä tarvittaessa vaihtamalla voimme olettaa, että $a < b$. Jos $p > 1$, niin

$$|a - b|^p = \int_0^{b-a} pt^{p-1}\,dt \leq \int_0^{b-a} p(t+a)^{p-1}\,dt = \int_a^b pt^{p-1}\,dt = |a^p - b^p|\,.$$

Tilanne $0 < p \leq 1$ menee vastaavasti. □

Lemma 2.9. *Olkoon $|\Omega| < \infty$, $0 \leq q < p < \infty$ ja $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio, jolle $\int_\Omega |u|^p\,dx < \infty$. Tällöin*

$$\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Erityisesti siis $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, kun $1 \leq q \leq p < \infty$ ja $|\Omega| < \infty$.

Todistus. Koska $\frac{p-q}{p} + \frac{q}{p} = 1$, saamme Hölderin epäyhtälöstä

$$\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_\Omega 1\,dx\right)^{\frac{p-q}{pq}} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{pq}{q}}\,dx\right)^{\frac{q}{pq}} = |\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

3 L^p-avaruuksien heikko kompaktius

Todistamme, että L^p-avaruudet ovat heikosti kompakteja, sillä todistus ensimmäisen ominaisarvon olemassaololle (lause 6.11) nojaa oleellisesti tähän tietoon. Tässä kappaleessa E on mielivaltainen normiavaruus.

Määritelmä 3.1 (heikko topologia)**.**

1. Olkoon E normiavaruus, I kokoelma sen lineaarimuotoja ja $\mathcal{N}$ kaikkien muotoa

$$p_f(\cdot) = |\langle f, \cdot \rangle|\,, f \in I$$

olevien seminormien joukko. Tällöin pariin (E, I) liittyvä *heikko topologia* on karkein sellainen topologia, jonka suhteen kaikki semipallot $B_{p_f}(x, r)$ ovat avoimia, ts.

$$\left\{ A \subset E : \forall x \in A \exists r > 0 \text{ ja äärellinen } \mathcal{B} \subset \mathcal{N} \text{ s.e. } \bigcap_{p_f \in \mathcal{B}} B_{p_f}(x, r) \subset A \right\}.$$

Käytämme tälle topologialle merkintää $\sigma(E, I)$.

2. Topologiaa $\sigma(E, E^*)$ kutsumme avaruuden E *heikoksi topologiaksi* eli *w-topologiaksi.*

3. Kun samaistamme normiavaruuden E sen biduaalinsa E^{**} aliavaruudeksi käyttäen luonnollista upotusta $x \mapsto (f \mapsto f(x))$ (ks. esim. [13, huomautus 22.7]), antaa kohdan 1. mukainen määrittely topologian $\sigma(E^*, E)$. Tätä topologiaa kutsumme duaalin E^* *heikoksi tähtitopologiaksi* eli *w^*-topologiaksi.*

Merkintä 3.2. Jos jono $(x_n) \subset E$ suppenee kohti pistettä $x \in E$ topologiassa $\sigma(E, E^*)$, sanomme, että (x_n) *suppenee heikosti kohti pistettä x avaruudessa* E, ja merkitsemme $x_n \rightharpoonup x$.

Seuraava on yksinkertainen, mutta oleellinen heikon suppenemisen karakterisointi.

Lause 3.3. *Jono $(x_n) \subset E$ suppenee heikosti kohti pistettä $x \in E$ jos ja vain jos*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \forall\, f \in E^*.$$

Todistus. Ehdon välttämättömyyttä varten, olkoot $f \in E^*$ ja $\varepsilon > 0$ annettuina. Koska $x_n \rightharpoonup x$, on topologian $\sigma(E, E^*)$ avoimelle joukolle $B_{p_f}(x, \varepsilon)$ olemassa N siten, että

$$x_n \in B_{p_f}(x, \varepsilon) = \{y \in E : |\langle f, x - y \rangle| < \varepsilon\} \quad \forall\, n > N.$$

Siis $|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| < \varepsilon$ suurilla n.

Ehdon riittävyyttä varten oletamme, että A on pisteen x mielivaltainen ympäristö topologiassa $\sigma(E, E^*)$. Tällöin on olemassa $r > 0$ ja äärellinen $B \subset E^*$ siten, että $\bigcap_{f \in B} B_{p_f}(x, r) \subset A$. Koska B on äärellinen, voimme oletuksen nojalla valita luvun N siten, että $|\langle f, x_n - x \rangle| < r$ kaikilla $f \in B$ ja $n > N$. Siispä $x_n \in \bigcap_{f \in B} B_{p_f}(x, r) \subset A$ suurilla n. $\square$

Huomautus 3.4 (Heikko L^p-suppeneminen). Kun $1 < p < \infty$, avaruuden $L^p(\Omega)$ duaali on $L^q(\Omega)$, missä q on p:n duaalieksponentti, ts. jokainen avaruuden $L^p(\Omega)$ lineaarinen funktionaali on muotoa

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f g \, dx \quad \forall \, g \in L^p(\Omega),$$

missä $f \in L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$ (ks. esim. [13], seuraus 24.20). Soveltamalla tähän tietoon lausetta 3.3, saamme heikolle L^p-suppenemiselle seuraavan esityksen: jono $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ suppenee heikosti kohti funktiota $u \in L^p(\Omega)$ jos ja vain jos

$$\int_\Omega u_n v \, dx \to \int_\Omega uv \, dx \quad \forall \, v \in L^q(\Omega).$$

Alaoglun lause

Johdamme L^p-avaruuksien heikon kompaktiuden Alaoglun lauseen avulla, jonka mukaan duaalin E^* suljettu yksikköpallo on w^*-topologiassa kompakti. Alaoglun lause perustuu ideaan siitä, että w^*-topologialla varustettu duaali E^* on itse asiassa tuloavaruuden $\mathbb{R}^E$ topologinen aliavaruus. Tällöin kompaktius seuraa Tihonovin lauseesta.

Määrittelemme tulotopologian ja muotoilemme Tihonovin lauseen, mutta emme käsittele niitä sen tarkemmin. Tulotopologian ominaisuuksia voi kerrata kirjasta [25]. Tihonovin lauseen todistus löytyy mm. lähteistä [25] ja [13]. Esittämämme Alaoglun lauseen todistus on otettu teoksesta [13].

Määritelmä 3.5 (Topologian kanta ja alkukanta)**.** Topologian $\mathcal{T}$ osajoukko $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ on topologian $\mathcal{T}$ *kanta*, jos mikä tahansa joukon $\mathcal{T}$ alkio voidaan esittää yhdisteenä joukon $\mathcal{K}$ alkioista.

Topologian $\mathcal{T}$ osajoukko $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ on topologian $\mathcal{T}$ *alkukanta*, jos sen alkioiden äärelliset leikkaukset muodostavat jonkin $\mathcal{T}$:n kannan.

Määritelmä 3.6 (Topologinen aliavaruus)**.** Olkoon X topologinen avaruus varustettuna topologialla $\mathcal{T}$ ja olkoon $A \subset X$. Tällöin topologian $\mathcal{T}$ joukkoon A *indusoima aliavaruustopologia* on $\mathcal{T}_{|A} = \{V \cap A : V \in \mathcal{T}\}$.

Huomautus 3.7. Jos topologisella avaruudella X on alkukanta $\mathcal{A}$, niin aliavaruustopologian $\mathcal{T}_{|A}$ eräs alkukanta on muotoa $\{V \cap A : V \in \mathcal{A}\}$.

Määritelmä 3.8 (Tulotopologia)**.** Olkoon J jokin indeksijoukko ja $X_j, j \in J$ kokoelma topologisia avaruuksia. Tällöin tulojoukon $X = \prod_{j \in J} X_j$ alkioita ovat sellaiset kuvaukset $x : J \to X$, joilla $x(j) \in X_j$ kaikilla $j \in J$. Tulojoukkoon määritellään projektiokuvausten $\pi_j : X \to X_j, \pi_j x = x(j), j \in J$

indusoima topologia, eli suppein sellainen topologia, jonka suhteen kaikki kyseiset projektiokuvaukset ovat jatkuvia. Kutsumme tätä topologiaa *tulotopologiaksi*. Jos $X_j = Y$ kaikilla j, niin käytämme tulojoukolle merkintää Y^J.

Huomautus 3.9. Tulotopologian alkukannan muodostaa avoimien joukkojen alkukuvat projektiokuvauksissa, ts. joukot $\pi_j^{-1}V$, missä $j \in J$ ja $V \subset X_j$ on avoin.

Lause 3.10 (Tihonovin lause)**.** *Jos $X_j, j \in J$ ovat kompakteja topologisia avaruuksia, niin myös tulo $\prod_{j\in J} X_j$ on kompakti.*

Lemma 3.11. *Normiavaruuden E duaali E^* varustettuna topologialla $\sigma(E^*, E)$ on tuloavaruuden $\mathbb{R}^E$ topologinen aliavaruus.*

Todistus. Ainakin $E^* \subset \mathbb{R}^E$. Tehtäväksi jää osoittaa, että topologia $\sigma(E^*, E)$ on sama kuin tuloavaruuden $\mathbb{R}^E$ osajoukkoonsa E^* indusoima aliavaruustopologia, jota merkitsemme symbolilla $\mathcal{T}$.

Todistamme ensin, että $\sigma(E^*, E) \subset \mathcal{T}$. Tulotopologian määritelmän nojalla projektiokuvaukset $\pi_x : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}, \pi_x(f) = f(x)$ ovat jatkuvia ja siten joukot

$$\pi_x^{-1}B(f(x), r) = \left\{g \in \mathbb{R}^E : |g(x) - f(x)| < r\right\}$$

ovat tuloavaruudessa $\mathbb{R}^E$ avoimia kaikille $x \in E$ ja $f \in \mathbb{R}^E$. Näin ollen semipallot

$$B_{p_x}(f, r) = \{g \in E^* : |g(x) - f(x)| < r\}$$

ovat avoimia joukkoon E^* indusoidussa aliavaruustopologiassa $\mathcal{T}$. Koska kyseiset semipallot muodostavat topologian $\sigma(E^*, E)$ alkukannan, ovat kaikki topologian $\sigma(E^*, E)$ avoimet joukot avoimia myös $\mathcal{T}$:ssä.

Siirrymme osoittamaan, että $\mathcal{T} \subset \sigma(E^*, E)$. Jos A on topologian $\mathcal{T}$ alkukantajoukko, on se muotoa $A = E^* \cap \pi_x^{-1}V$, missä $V \subset \mathbb{R}$ on avoin ja $x \in E$. Koska avoimet pallot muodostavat $\mathbb{R}$:n kannan, saa A esityksen

$$A = E^* \cap \pi_x^{-1} \bigcup_{B\subset V} B = \bigcup_{B\subset V} E^* \cap \pi_x^{-1}B.$$

Riittää siis todeta, että joukko $E^* \cap \pi_x^{-1}B$ on avoin topologiassa $\sigma(E, E^*)$, kun $B = B(a, r) \subset \mathbb{R}$ on mielivaltainen avoin pallo. Tätä varten valitsemme sellaisen funktionaalin $g \in E^*$, jolle $g(x) = a$. Tällöin

$$\begin{aligned} E^* \cap \pi_x^{-1}B(a, r) &= \{f \in E^* : |f(x) - a| < r\} \\ &= \{f \in E^* : |f(x) - g(x)| < r\} = B_{p_x}(g, r). \end{aligned}$$

Joukko $E^* \cap \pi_x^{-1}B$ on siis itse asiassa semipallo, ja siten avoin topologiassa $\sigma(E^*, E)$. $\square$

Lause 3.12 (Alaoglun lause). *Normiavaruuden E duaalin E^* suljettu yksikköpallo*

$$\overline{B}_{E^*} = \{f \in E^* : \|f\|_{E^*} \leq 1\}$$

on kompakti topologiassa $\sigma(E^*, E)$.

Todistus. Lemman 3.11 nojalla riittää osoittaa, että $\overline{B}_{E^*}$ on kompakti tuloavaruudessa $\mathbb{R}^E$. Huomaamme, että joukko-opillisesti

$$\overline{B}_{E^*} = \{f \in E^* : |f(x)| \leq \|x\| \ \forall x \in E\} \subset \prod_{x \in E} \overline{B}_{\mathbb{R}}(0, \|x\|) \subset \mathbb{R}^E.$$

Tihonovin lauseen nojalla tuloavaruus $\prod_{x \in E} \overline{B}_{\mathbb{R}}(0, \|x\|)$ on kompakti, joten $\overline{B}_{E^*}$ on kompaktin avaruuden aliavaruus. Siten sen kompaktiuteen riittää osoittaa, että se on suljettu. Oletamme tätä varten, että $f \in \mathbb{R}^E$ on yksikköpallon $\overline{B}_{E^*}$ sulkeumassa. Tällöin f on lineaarinen: jos $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, niin huomautuksen 3.9 nojalla on olemassa $f_\varepsilon \in \overline{B}_{E^*}$, jolle $|f(z) - f_\varepsilon(z)| < \varepsilon$, kun $z \in \{x, y, \alpha x + \beta y\}$. Koska f_ε on lineaarinen, seuraa kolmioepäyhtälöstä

$$\begin{aligned} |f(\alpha x + \beta y) - (\alpha f(x) + \beta f(y))| \leq & |f(\alpha x + \beta y) - f_\varepsilon(\alpha x + \beta y)| + \varepsilon(|\alpha| + |\beta|) \\ \leq & \varepsilon(1 + |\alpha| + |\beta|). \end{aligned}$$

Aivan vastaavasti näemme, että $\|f\|_{E^*} \leq 1$. Siispä $f \in \overline{B}_{E^*}$. □

Seuraus 3.13. *Olkoon E refleksiivinen normiavaruus. Tällöin duaalin E^* suljettu yksikköpallo on kompakti E^*:n heikossa w-topologiassa.*
Erityisesti Lebesgue'in avaruuden $L^p(\Omega)$ yksikköpallo on heikosti kompakti.

Todistus. Koska E on refleksiivinen, topologiat $\sigma(E^*, E^{**})$ ja $\sigma(E^*, E)$ yhtyvät. Ensimmäinen väite seuraa tällöin Alaoglun lauseesta.

Toista väitettä varten olkoon q p:n duaalieksponentti. Koska $L^q(\Omega)$ on refleksiivinen, sen duaalin yksikköpallo on edellisen nojalla heikosti kompakti. Toisaalta tämä duaali on juuri $L^p(\Omega)$. □

4 Sobolevin avaruudet

Esittelemme Sobolevin avaruudet ja niihin liittyviä perustuloksia, jotka ovat tutkielman kannalta oleellisia. Oletamme, että lukijalla on perustiedot Sobolevin avaruuksista emmekä käy niiden teoriaa tarkasti läpi. Annamme kuitenkin viitteet niihin todistuksiin, jotka sivuutamme. Sobolevin avaruuksien teoriaa voi lukea esim. teoksista [4], [12] ja [7].

Ellemme toisin mainitse, oletamme tässä kappaleessa, että $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ on alue, eli avoin ja yhtenäinen joukko, $N \geq 2$ ja $1 \leq p \leq \infty$.

Merkinnällä $L^p(\Omega)^N$ tarkoitamme normiavaruuden $L^p(\Omega)$ N-kertaista tuloa itsensä kanssa, eli joukkoa

$$\{(f_1, \ldots, f_N) : f_i \in L^p(\Omega), i = 1, \ldots, N\}$$

varustettuna komponenttaisilla vektoriavaruuslaskutoimituksilla ja sopivalla tulonormilla. Kun $p < \infty$ ja $f \in L^p(\Omega)^N$, valitsemme normiksi

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

joka on ekvivalentti normin $\|f\| = \sum_{i=1}^N \|f_i\|_p$ kanssa. Kun $p = \infty$, käytämme jälkimmäistä normia. Huomaa, että avaruuden $L^p(\Omega)^N$ jono $((f_1^n, \ldots f_N^n))_n$ suppenee (heikosti) kohti pistettä $(f_1, \ldots, f_N)$ jos ja vain jos f_i^n suppenee (heikosti) kohti funktiota f_i avaruudessa $L^p(\Omega)$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Määritelmä 4.1 (Heikko osittaisderivaatta)**.** Olkoot $u, v \in L^p(\Omega)$, $k \in 1, ..., N$. Sanomme, että v on funktion u *k:nnes heikko osittaisderivaatta*, jos

$$\int_\Omega u \partial_k \varphi \, dx = -\int_\Omega v\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Tällöin merkitsemme $v = \partial_k u$.

Huomautus 4.2. Variaatiolaskennan peruslauseesta, eli tiedosta

$$\left[\Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ avoin, } u \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ ja } \int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \right] \implies u \equiv 0,$$

seuraa välittömästi, että jos heikko osittaisderivaatta on olemassa, niin se on yksikäsitteinen (ks. [7, sivu 243]). Näin ollen, jos $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ ja tavallinen osittaisderivaatta $\partial_k u$ on avaruudessa $L^p(\Omega)$, niin funktion u k:nnes heikko osittaisderivaatta on $\partial_k u$.

Variaatiolaskennan peruslauseesta seuraa myös, että jos $u \in L^p(\Omega)$ ja sen heikko osittaisderivaatta $\partial_k u \in L^p(\Omega)$ on olemassa, niin $\operatorname{supp} \partial_k u \subset \operatorname{supp} u$.

Määritelmä 4.3 (Sobolevin avaruus)**.** *Sobolevin avaruus* $W^{1,p}(\Omega)$ on niiden $L^p(\Omega)$-funktioiden joukko, joilla jokainen heikko osittaisderivaatta on olemassa, eli

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega) \quad \forall i \in \{1, ..., N\}\}.$$

Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *heikko gradientti* on

$$\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_N u) \in L^p(\Omega)^N.$$

Varustamme avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ normilla

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \|u\|_p + \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_p .$$

Avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ on joukon $C_c^\infty(\Omega)$ sulkeuma avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$.

Sobolevin avaruus on Banachin avaruus kaikilla $1 \leq p \leq \infty$ [4, lause 9.1]. Jos $p = 2$, on se erityisesti Hilbertin avaruus, kun se varustetaan sisätulolla

$$(u|v)_{W^{1,p}} = (u|v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (\partial_i u|\partial_i v)_{L^2}.$$

Tällöin merkitsemme $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$ sekä sen aliavaruutta $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

Jos $1 \leq p < \infty$, niin avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ funktioita voi arvioida sileillä funktioilla Sobolev-normin mielessä, ts. joukko $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ on tiheä avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Tämä tunnetaan Meyersin ja Serrinin lauseena (ks. [1, lause 3.17]). Jos $\partial\Omega$ on C^∞, niin jopa joukko $\left\{u_{|\Omega} : u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)\right\}$ on tiheä avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$ (ks. [4, lause 9.8]).

Lähestymällä Sobolevin funktioita sileillä funktioilla voi johtaa tavallisten derivointisääntöjen kaltaisia tuloksia myös Sobolevin funktioille. Viittamme alla olevien sääntöjen todistuksia varten teokseen [4, propositiot 9.4 ja 9.5].

Lause 4.4 (Tulon differentiointi). *Olkoon $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Tällöin $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ ja*

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u.$$

Lause 4.5 (Yhdistetyn kuvauksen differentiointi). *Olkoon $G \in C^1(\mathbb{R})$ siten, että $G(0) = 0$ ja $|G'| \leq M$. Tällöin jokaiselle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pätee*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ ja } \nabla (G \circ u) = (G' \circ u) \nabla u.$$

Sobolevin ja Morreyn epäyhtälöiden todistukset löytyvät esim. teoksesta [7, kohdat 5.6.1 ja 5.6.2].

Lause 4.6 (Sobolevin epäyhtälö)**.** *Jos $1 \leq p < N$, niin on olemassa $C = C(N,p)$ siten, että jokaiselle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pätee*

$$\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

missä $p^* := \frac{pn}{n-p}$ on luvun p Sobolev-konjugaatti.
Jos $p = N$, on olemassa $C = C(N,q)$ siten, että

$$\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^N\,dx\right)^{\frac{1}{N}}$$

kaikilla $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ ja $q \in [N,\infty)$.

Lause 4.7 (Morreyn epäyhtälö)**.** *Jos $p > N$, niin $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, missä $\alpha = 1 - N/p$. Lisäksi jokaiselle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja pallolle B_r pätee*

$$\sup_{x,y\in B_r\cap\Omega} |u(x)-u(y)| \leq Cr^\alpha\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

missä $C = C(N,p)$.

Seuraavan tuloksen todistus perustuu teoksen [21] lauseen 1.62 todistuksen loppuosaan.

Seuraus 4.8. *Olkoon Ω rajoitettu, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja $p > N$. Tällöin $u \equiv 0$ joukossa $\partial\Omega$.*

Todistus. Jos jono $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ suppenee L^p-mielessä kohti funktiota $g \in L^p(\Omega)$, niin sillä on osajono, joka suppenee pisteittäin kohti funktiota g m.k. joukossa Ω (ks. [4, lause 4.9]). Tämän nojalla voimme valita jonon $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ siten, että se suppenee pisteittäin kohti funktiota u m.k. joukossa Ω. Jos nyt $x \in \Omega$, niin valitsemme sellaisen pisteen $y \in \partial\Omega$, että $|x-y| = \operatorname{dist}(x, \complement\Omega)$. Tällöin funktioiden (u_n) Hölder-jatkuvuus antaa arvion

$$|u_n(x)| = |u_n(x) - u_n(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha = C\operatorname{dist}(x,\complement\Omega)^\alpha.$$

Näin ollen m.k. $x \in \Omega$ on voimassa

$$|u(x)| \leq |u(x)-u_n(x)| + |u_n(x)| \leq \underbrace{|u(x)-u_n(x)|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + C\operatorname{dist}(x,\complement\Omega)^\alpha,$$

mistä seuraa, että $u \equiv 0$ joukossa $\partial\Omega$. □

Sobolevin ja Morreyn epäyhtälöistä seuraa melko suoraan Poincarén epäyhtälö.

Seuraus 4.9 (Poincarén epäyhtälö)**.** *Jos Ω on rajoitettu alue ja $p < \infty$, niin on olemassa $C = C(n,p)$ siten, että*

$$\|u\|_p \leq C \, |\Omega|^{\frac{1}{n}} \, \|\nabla u\|_p$$

kaikille $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Osittain järjestettyä joukkoa $(A, \leq)$, jossa jokaisella kaksiolla $\{a,b\} \subset A$ on olemassa suurin ja pienin yläraja, kutsutaan *hilaksi*. On hyödyllistä tietää, että Sobolevin avaruudet $W^{1,p}(\Omega)$ ja $W_0^{1,p}(\Omega)$ ovat hiloja, kun ne varustetaan relaatiolla $u \leq v \iff u(x) \leq v(x)$ m.k. $x \in \Omega$. Seuraava lause sanoo tämän lisäksi muutakin. Viittaamme sitä varten teokseen [12, lauseet 1.20 ja 1.23].

Lause 4.10. *Funktiot $(u,v) \mapsto \min(u,v)$ ja $(u,v) \mapsto \max(u,v)$ ovat jatkuvia kuvauksia avaruudesta $W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ avaruuteen $W^{1,p}(\Omega)$. Niille pätee*

$$\nabla \min(u,v)(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & u(x) \leq v(x) \\ \nabla v(x), & v(x) < u(x) \end{cases},$$

$$\nabla \max(u,v)(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & u(x) \geq v(x) \\ \nabla v(x), & v(x) > u(x) \end{cases}.$$

Lisäksi, jos $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin $\min(u,v)$,$\max(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Erityisesti siis funktion u positiivi- ja negatiiviosat $u^+ = \max(u,0)$ ja $u^- = \min(u,0)$ ovat Sobolevin funktioita.

Seuraavassa on vielä lemmoja, joiden avulla voi päätellä avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ funktion kuuluvuuden joukkoon $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lemma 4.11. *Jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on kompaktisti kannettu joukossa Ω, niin $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Todistus. Olkoon $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ jono, joka suppenee funktioon u avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Koska $\operatorname{supp} u$ on kompakti, voimme esim. ykkösenosituksen (ks. [1, lause 1.44]) nojalla valita funktion $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ siten, että $0 \leq \phi \leq 1$ ja $\phi \equiv 1$ joukossa $\operatorname{supp} u$. Tällöin $\phi u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ ja

$$\int_\Omega |u - \phi u_n|^p \, dx = \int_{\operatorname{supp} u} |u - u_n|^p \, dx + \int_{\Omega \setminus \operatorname{supp} u} |\phi u_n|^p \, dx \to 0$$

sekä

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla(\phi u_n)\|_p &\le \|\nabla u - \phi \nabla u_n\|_p + \|u_n \nabla \phi\|_p \\ &\le \left(\int_{\operatorname{supp} u} |\nabla u - \nabla u_n|^p \, dx + \int_{\Omega \setminus \operatorname{supp} u} |\nabla u_n|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega \setminus \operatorname{supp} u} |u_n \nabla \phi|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0,\end{aligned}$$

joten $\phi u_n \to u$ avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. □

Lemma 4.12. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ siten, että $0 \le u \le v$. Tällöin $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Todistus. Perustelu on helppo, jos jo tiedämme, että lause 4.10 pätee. Olkoon $v_n \in C_c^\infty(\Omega)$ s.e. $v_n \to v$ avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$. Tällöin $w_n = \min(u, v_n) \in W^{1,p}(\Omega)$ on kompaktisti kannettu ja siis kuuluu joukkoon $W_0^{1,p}(\Omega)$. Koska toisaalta $\min(u, v_n) \to \min(u, v) = u$, niin $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Lemma 4.13. *Olkoon Ω rajoitettu, $1 \le p < \infty$ ja $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sellainen, että $u \equiv 0$ joukossa $\partial\Omega$. Tällöin $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Todistus. Olkoon $u_n = \max(u - \frac{1}{n}, 0) + \min(u + \frac{1}{n}, 0)$. Lauseen 4.10 nojalla $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $u_n \to u$ avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Koska $u \in C(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega$ on kompakti ja $u \equiv 0$ joukossa $\partial\Omega$, niin jokaiselle n on olemassa avoin joukko $A_n \supset \partial\Omega$ siten, että $|u| < \frac{1}{n}$ joukossa A_n. Tällöin $\operatorname{supp} u_n \subset \Omega \setminus A_n$, eli u_n kompaktisti kannettu ja siis kuuluu joukkoon $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

5 Rellicin ja Kondrachovin lause

Todistamme Rellicin ja Kondrachovin lauseen käyttämällä Kolmogorovin ja Rieszin lausetta, joka on eräänlainen "L^p-versio" Ascolin lauseesta. Erikoistapauksessa $p > N$, jossa avaruuden $W_0^{1,p}(\Omega)$ funktiot ovat jatkuvia, Rellicin ja Kondrachovin lause seuraakin helposti Ascolin lauseesta. Kolmogorovin ja Rieszin sekä Ascolin lause on todistettu artikkelissa [11], jossa molemmat johdetaan erään yksinkertaisen topologisen lemman avulla.

Esittämämme todistus Rellicin ja Kondrachovin lauseelle tilanteessa $p \le N$ on otettu kirjasta [4].

Määritelmä 5.1. Sanomme, että joukko U on *suhteellisen kompakti* topologisessa avaruudessa E, jos $U \subset E$ ja $\overline{U}$ on kompakti.

Lause 5.2 (Ascolin ja Arzelan lause)**.** *Olkoon* $\mathcal{F} \subset C(\overline{\Omega})$ *pisteittäin rajoitettu joukko, joka on yhtäjatkuva, eli kaikille* $x_0 \in \overline{\Omega}$ *ja* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $r > 0$ *siten, että*

$$\sup_{\substack{x \in B(x_0, r) \cap \overline{\Omega} \\ f \in \mathcal{F}}} |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Tällöin $\mathcal{F}$ *suhteellisen kompakti avaruudessa* $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$.

Merkintä. Asetamme $\tau_h f(x) = f(x+h)$, missä $x, h \in \mathbb{R}^N$.

Lause 5.3 (Kolmogorovin, Rieszin ja Fréchetin lause)**.** *Olkoon* $1 \leq p < \infty$ *ja olkoon* $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ *rajoitettu joukko siten, että*

$$\lim_{|h| \to 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Tällöin, jos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *on mitallinen ja äärellismittainen, niin* $\mathcal{F}_{|\Omega}$ *on suhteellisen kompakti avaruudessa* $L^p(\Omega)$.

Lemma 5.4. *Olkoon* $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *ja* $1 < p < \infty$*. Tällöin kaikille* $h \in \mathbb{R}^N$ *pätee*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq |h| \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Todistus. Olkoon $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Määrittelemme

$$v(t) = u(x + th),$$

jolloin $v'(t) = h \cdot \nabla u(x + th)$ ja siten

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th) \, dt.$$

Tällöin Hölderin epäyhtälön nojalla

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p \, dt,$$

joten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_h u(x) - u(x)|^p \, dx &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p \, dt \, dx \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p \, dx \, dt \\
&= |h|^p \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.
\end{aligned}$$

Olkoon sitten $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ja $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sitä Sobolev-normin mielessä lähestyvä jono. Tällöin kolmioepäyhtälön ja todistuksen alun nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|\tau_h u - \tau_h u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|u - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau_h u_n - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq 2\|u - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + |h| \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\to |h| \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 5.5. Banachin avaruuksien välinen lineaarinen operaattori $T : X \to Y$ on *kompakti*, jos se kuvaa X:n yksikköpallon avaruuden Y suhteellisen kompaktiksi osajoukoksi.

Lause 5.6 (Rellicin ja Kondrachovin lause)**.** *Seuraavat upotukset, jotka Sobolevin ja Morreyn lauseiden nojalla ovat jatkuvina olemassa, ovat kompakteja:*

1. $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [1, p^*)$, *missä* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, *kun* $p < N$,
2. $W_0^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [N, \infty)$,
3. $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, *kun* $p > N$.

Erityisesti siis upotus $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *on kompakti.*

Todistus. Todistamme aluksi kohdan 1, jossa $p < N$ ja $q \in [1, p^*)$. Olkoon $P : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ operaattori, joka nollajatkaa funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ joukkoon $\mathbb{R}^N$. Merkitsemme avaruuden $W_0^{1,p}(\Omega)$ yksikköpalloa symbolilla $\mathcal{H}$ ja sen kuvaa operaattorissa P symbolilla $\mathcal{F}$. Tällöin $\mathcal{F}_{|\Omega} = \mathcal{H}$, joten väite seuraa lauseesta 5.3, jos osoitamme, että $\mathcal{F}$ on rajoitettu avaruuden $L^q(\mathbb{R}^N)$ osajoukko, ja että pätee

$$\lim_{|h|\to 0} \sup_{u \in \mathcal{F}} \|\tau_h u - u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0. \tag{5.1}$$

Olkoon $u \in \mathcal{F}$ mielivaltainen. Koska $q < p^*$, pätee lemman 2.9 ja Sobolevin epäyhtälön nojalla

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot 1,$$

joten ainakin $\mathcal{F}$ on rajoitettu. Jos $q < p$, niin ehto (5.1) seuraa suoraan lemmoista 2.9 ja 5.4, sillä tällöin

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C|h| \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C|h| .$$

Jos $q \geq p$, niin $\frac{1}{p^*} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$, ja siten on olemassa $\alpha \in (0,1]$, jolle

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}.$$

Tällöin Hölderin epäyhtälön, lemman 5.4 sekä Sobolevin epäyhtälön avulla saamme

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u - u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_h u - u|^{\alpha q} \, |\tau_h u - u|^{q(1-\alpha)} \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_h u - u|^p \, dx \right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_h u - u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{1-\alpha}{p^*}} \\
&\leq |h|^\alpha \, \|\nabla u\|^\alpha_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(2 \, \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \right)^{1-\alpha} \\
&\leq C \, |h|^\alpha \, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq C \, |h|^\alpha .
\end{aligned}$$

Ehto (5.1) seuraa tästä.

Siirrymme tarkastelemaan kohtaa 2. Jos $q \in [N, \infty)$, niin on olemassa $p < N$ siten, että $q < \frac{pN}{N-p} = p^*$. Koska $p < N$ ja Ω on rajoitettu, niin $W_0^{1,N}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Toisaalta kohdan 1 nojalla avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ uppoaa kompaktisti avaruuteen $L^q(\Omega)$.

Jäljellä on todistaa kohta 3. Olkoon $\mathcal{H}$ avaruuden $W_0^{1,p}(\Omega)$ yksikköpallo. Ainakin $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva, sillä Morreyn lauseen nojalla $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, kun $p > N$. Toisaalta, Morreyn lause antaa myös arvion

$$\sup_{x,y \in Br \cap \overline{\Omega}} |u(x) - u(y)| \leq C r^\alpha \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

missä $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja B_r on mikä tahansa pallo. Koska Ω on rajoitettu ja $u \equiv 0$ joukon Ω reunalla, saamme yllä olevasta

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq C \mathrm{diam}(\Omega)^\alpha$$

kaikille $u \in \mathcal{H}$, joten perhe $\mathcal{H}$ on pisteittäin rajoitettu. Näin se on Ascolin ja Arzelan lauseen nojalla suhteellisen kompakti avaruudessa $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$. $\square$

Kirjaamme kaksi tulosta, jotka ovat hyödyllisiä tutkittaessa Sobolevin avaruuksien jonoja ja niiden raja-arvoja. Ensimmäinen on seuraus Lebesgue'in avaruuksien heikosta kompaktiudesta, ja toinen on tämä yhdistettynä Rellicin ja Kondrachovin lauseeseen.

Seuraus 5.7. *Olkoon* $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ *ja* $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ *jono siten, että* $u_n \to u$ *avaruudessa* $L^p(\Omega)$ *ja* $\sup_n \|\nabla u_n\|_p < \infty$. *Tällöin* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *ja on olemassa jonon* (u_n) *osajono* (u_{n_k}), *jolle* $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u$ *heikosti avaruudessa* $L^p(\Omega)^N$.

Todistus. Koska $\|\nabla u_n\|_p$ on rajoitettu ja $L^p(\Omega)$ on heikosti kompakti, on olemassa osajono (u_{n_k}) ja funktio $v \in L^p(\Omega)^N$ siten, että $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla v$ heikosti avaruudessa $L^p(\Omega)^N$. Tästä seuraa, että $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $\nabla u = v$, sillä heikon L^p-suppenemisen nojalla jokaiselle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ pätee

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx = \lim_k \int_\Omega u_{n_k} \partial_i \varphi \, dx = -\lim_k \int_\Omega \varphi \partial_i u_{n_k} \, dx = -\int_\Omega \varphi v_i \, dx.$$

□

Seuraus 5.8. *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *jono siten, että* $\|\nabla u_n\|_p$ *on rajoitettu. Tällöin on olemassa* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *ja jonon* (u_n) *osajono* (u_{n_k}) *siten, että* $u_{n_k} \to u$ *avaruudessa* $L^p(\Omega)$ *ja* $\nabla u_{n_k} \rightharpoonup \nabla u$ *heikosti avaruudessa* $L^p(\Omega)^N$.

Todistus. Poincarén epäyhtälön nojalla (u_n) on rajoitettu avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$. Siten Rellichin ja Kondrachovin upotuslauseen nojalla on olemassa jonon (u_n) osajono (u_{n_k}) ja funktio $u \in L^p(\Omega)$, jolle $u_{n_k} \to u$ avaruudessa $L^p(\Omega)$. Väite seuraa tällöin soveltamalla seurausta 5.7 jonoon (u_{n_k}). □

6 p-Laplacen ominaisarvo-ongelma

Tutkimme p-harmoniseen operaattoriin liittyvää ominaisarvo-ongelmaa

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0, \tag{6.1}$$

missä $u \equiv 0$ rajoitetun alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ reunalla ja $1 < p < \infty$. Tulkitsemme yhtälön heikossa mielessä ja kutsumme sen ratkaisuja ominaisfunktioiksi. Tarkemmin:

Määritelmä 6.1. Sanomme, että $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, on *ominaisfunktio*, jos on $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \eta \, dx \tag{6.2}$$

jokaiselle $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$. Lukua λ sanomme *ominaisarvoksi.* Pienintä ominaisarvoa kutsumme *ensimmäiseksi ominaisarvoksi* ja merkitsemme symbolilla $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$. Sitä vastaavia ominaisfunktioita sanomme *ensimmäisiksi ominaisfunktioiksi.* Kaikkien ominaisarvojen joukkoa kutsumme *spektriksi.*

Huomautus 6.2. Tiheyden nojalla voimme edellisessä määritelmässä yhtä hyvin olettaa, että testifunktioiden joukko on avaruuden $C_c^\infty(\Omega)$ sijasta $W_0^{1,p}(\Omega)$ ja että $\lambda > 0$ (ks. lauseen 6.4 todistus ja sitä seuraava huomautus).

Ensimmäisen ominaisarvon olemassaolo ja Rayleighin osamäärä

Kuten lähteen [18] kappaleessa 4 on todettu, ensimmäisen ominaisarvon olemassaolo voidaan todistaa alla määritellyn Rayleighin osamäärän avulla. Todistamme tämän toteamalla ensin, että Rayleighin osamäärän minimoija, jos olemassa, on aina ensimmäinen ominaisfunktio. Osoitamme sitten, että Rellichin ja Kondrachovin lauseen nojalla on aina olemassa funktio, joka minimoi Rayleighin osamäärää.

Määritelmä 6.3 (Rayleighin osamäärä)**.** Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, *Rayleighin osamäärä* on suhde

$$J(u) := \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}.$$

Lause 6.4. *Olkoon u ominaisfunktio ja λ sitä vastaava ominaisarvo. Tällöin λ on u:n Rayleighin osamäärä, ts. $\lambda = J(u)$.*

Todistus. Koska $C_c^\infty(\Omega)$ on tiheä avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$, voimme valita jonon $\eta_n \in C_c^\infty(\Omega)$ siten, että $\eta_n \rightharpoonup u$ ja $\nabla\eta_n \rightharpoonup \nabla u$ heikosti avaruudessa $L^p(\Omega)^N$. Tällöin

$$\int_\Omega \underbrace{|\nabla u|^{p-2} \nabla u}_{\in L^{p'}(\Omega)^N} \cdot \nabla \eta_n \, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

ja vastaavasti

$$\int_\Omega |u|^{p-2} u\eta_n \, dx \to \int_\Omega |u|^{p-2} uu \, dx = \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

□

Huomautus 6.5. Lauseesta 6.4 seuraa, että ominaisarvot ovat aidosti positiivisia, sillä Poincarén epäyhtälön nojalla funktion $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$, Rayleighin osamäärä on aidosti positiivinen:

$$J(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \geq \frac{C\,|\Omega|^{\frac{n}{p}} \int_\Omega |u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} > 0.$$

Lemma 6.6. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli ja $u : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, sellainen, että*

1. *kuvaus $x \mapsto u(x,t)$ on integroituva joukossa Ω kaikilla $t \in I$,*

2. *kuvaus $t \mapsto u(x,t)$ on derivoituva joukossa I kaikilla $x \in \Omega$,*

3. *on $g \in L^1(\Omega)$ s.e. $\left|\frac{d}{dt}u(x,t)\right| < g(x)$ kaikilla $(x,t) \in \Omega \times I$.*

Tällöin kuvaus $t \mapsto \int_\Omega u(x,t)\,dx$ on derivoituva ja kaikilla $t \in I$ pätee

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\,dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}u(x,t)\,dx.$$

Todistus. Olkoon $u_h(x,t) := \frac{u(x,t+h)-u(x)}{h}$ ja $t \in I$. Koska $\lim_{h\to 0} u_h(x,t) = \frac{d}{dt}u(x,t)$, seuraa ehdosta 3, että $|u_h(x,t)| < g(x) + \epsilon$, kun h on pieni. Siten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\,dx = \lim_{h\to 0}\int_\Omega u_h(x,t)\,dx = \int_\Omega \lim_{h\to 0} u_h(x,t)\,dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}u(x,t)\,dx.$$

□

Lemma 6.7. *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}^M, M \geq 1$. Tällöin kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto |a+tb|^p$ on derivoituva ja*

$$\frac{d}{dt}\,|a+tb|^p = p\,|a+tb|^{p-2}\,b\cdot(a+tb).$$

Todistus. Jos $a + tb \neq 0$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,|a+tb|^p &= p\,|a+tb|^{p-1}\,\frac{d}{dt}\,|a+tb| \\
&= p\,|a+tb|^{p-1}\,\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{M}(a_i+tb_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= p\,|a+tb|^{p-1}\,\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{M}(a_i+tb_i)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\sum_{i=1}^{M} a_ib_i + tb_i^2\right) \\
&= p\,|a+tb|^{p-2}\,b\cdot(a+tb).
\end{aligned}$$

Jos $a + tb = 0$, niin

$$\frac{d}{dt}\,|a+tb|^p = \lim_{h\to 0}\frac{|a+(t+h)b|^p - |a+tb|^p}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|hb|^p}{h} = 0.$$

□

Lause 6.8. *Jos* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *minimoi Rayleighin osamäärää joukossa* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *niin se on ominaisfunktio ja sitä vastaava ominaisarvo on* λ_1.

Todistus. Jälkimmäinen väite seuraa heti lauseesta 6.4, jos osoitamme ensimmäisen väitteen oikeaksi. Olkoon siis $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ mielivaltainen testifunktio. Määrittelemme apufunktion

$$i(\epsilon) = \frac{\int_\Omega |\nabla u + \epsilon \nabla \eta|^p \, dx}{\int_\Omega |u + \epsilon \eta|^p \, dx},$$

missä ϵ on niin pieni, että jakaja ei häviä. Lemmojen 6.6 ja 6.7 nojalla i on derivoituva ja

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon} i(\epsilon) &= \frac{\frac{d}{d\epsilon}\int_\Omega |\nabla u + \epsilon \nabla \eta|^p \, dx}{\int_\Omega |u + \epsilon \eta|^p \, dx} - \left(\frac{d}{d\epsilon} \int_\Omega |u + \epsilon \eta|^p \, dx \right) \frac{\int_\Omega |\nabla u + \epsilon \nabla \eta|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u + \epsilon \eta|^p \, dx\right)^2} \\
&= \frac{p \int_\Omega |\nabla u + \epsilon \nabla \eta|^{p-2} \nabla \eta \cdot (\nabla u + \epsilon \nabla \eta) \, dx}{\int_\Omega |u + \epsilon \eta|^p \, dx} \\
&\quad - p \int_\Omega |u + \epsilon \eta|^{p-2} \eta (u + \epsilon \eta) \, dx \frac{\int_\Omega |\nabla u + \epsilon \nabla \eta|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u + \epsilon \eta|^p \, dx\right)^2}.
\end{aligned}$$

Koska u minimoi Rayleighin osamäärää, saavuttaa i lokaalin minimin nollassa, ja siten on oltava $i'(\epsilon) = 0$. Yhdistämällä tämä tieto i:n derivaatan lausekkeeseen, saamme

$$\frac{p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla \eta \cdot \nabla u \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} - p \int_\Omega |u|^{p-2} \eta u \, dx \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^2} = 0,$$

mistä edelleen

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla \eta \cdot \nabla u \, dx = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \int_\Omega |u|^{p-2} \eta u \, dx.$$

□

Seuraavaksi osoitamme, että ensimmäinen ominaisarvo on olemassa. Teemme tämän todistamalla, että on olemassa u, joka minimoi Rayleighin osamäärää. Tällöin olemassaolo seuraa edellisestä lauseesta. Tarvitsemme kahta lemmaa, joista ensimmäisen muotoilimme jo Rellichin ja Kondrachovin upotuslauseen yhteydessä, ja toinen on yksinkertainen Banachin avaruuksien ominaisuus.

Lemma 6.9 (Normin heikko puolijatkuvuus). *Olkoon E Banachin avaruus ja olkoot $x, x_n \in E$ siten, että $x_n \rightharpoonup x$ heikosti avaruudessa E. Tällöin*

$$\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\| .$$

Todistus. (Teoksesta [4]). Epäyhtälöstä

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \, \|x_n\| \quad \forall\, f \in E^*$$

seuraa rajalla, että

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \liminf_n \|x_n\| \quad \forall\, f \in E^*.$$

Näin ollen

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf_n \|x_n\| .$$

$\square$

Lause 6.10. *Rayleighin osamäärällä on minimoija joukossa $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Todistus. Pitää osoittaa, että infimum

$$\inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v) = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx}{\int_\Omega |v|^p \, dx}$$

saavutetaan. Olkoon $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ yllä olevaa Rayleighin osamäärää minimoiva jono, joka on normitettu ehdolla $\|v_n\|_p = 1$. Tällöin lemman 5.8 nojalla on olemassa osajono (merk. edelleen v_n) ja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, siten, että

$$v_n \to u \text{ avaruudessa } L^p(\Omega) \tag{6.3}$$

ja

$$\nabla v_n \rightharpoonup \nabla u \text{ heikosti avaruudessa } L^p(\Omega)^N. \tag{6.4}$$

Ehdosta (6.3) ja tiedosta $\|v_n\|_p = 1$ seuraa, että $\|u\|_p = 1$. Ehdosta (6.4) ja lemmasta 6.9 seuraa, että $\|\nabla u\|_p \leq \liminf_n \|\nabla v_n\|_p$.
Näin saamme

$$\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq \liminf_n \int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx = \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx}{\int_\Omega |v|^p \, dx},$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että v_n on Rayleighin osamäärää minimoiva jono, joka on normitettu ehdolla $\|v_n\|_p = 1$. Siis $J(u) \leq \inf_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v)$, eli u minimoi J:n joukossa $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Nyt olemme siis osoittaneet, että λ_1 on olemassa ja että se voidaan karakterisoida Rayleighin osamäärän avulla. Muotoilemme tämän vielä lauseeksi.

Lause 6.11. *Ensimmäinen ominaisarvo on olemassa, ja se on muotoa*

$$\lambda_1 = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx}{\int_\Omega |v|^p \, dx}.$$

Vastaavat ominaisfunktiot ovat tasan ne, jotka minimoivat Rayleighin osamäärää, ts. toteuttavat ehdon

$$J(u) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v).$$

Todistus. Lauseiden 6.8 ja 6.10 nojalla λ_1 on olemassa ja sillä on haluttu esitys. Jos u on sitä vastaava ominaisfunktio, niin lauseen 6.4 nojalla $J(u) = \lambda_1 = \min_v J(v)$. □

Huomautus 6.12. Edellisestä lauseesta saadaan jatkossakin hyödyllinen tieto: jos $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ovat alueita, niin $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2)$. Epäyhtälö on aito, jos inkluusio on aito. Jos nimittäin $\lambda_1(\Omega_1) = \lambda_1(\Omega_2)$, niin ominaisarvoa $\lambda_1(\Omega_1)$ vastaavan ominaisfunktion nollajatko on ominaisarvoa $\lambda_1(\Omega_2)$ vastaava ominaisfunktio. Tämä ei ole mahdollista, jos $\Omega_1 \subset \Omega_2$ aidosti, sillä toteamme myöhemmin, että ensimmäiset ominaisfunktiot ovat joko aidosti positiivisia tai aidosti negatiivisia (ks. lause 6.26).

Huomautus 6.13. *Poincarén vakio* on on pienin luku $C = C(\Omega, p)$, jolla Poincarén epäyhtälö

$$\int_\Omega |u|^p \, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

on voimassa. Lauseesta 6.11 seuraa, että jos Ω on rajoitettu alue ja $1 < p < \infty$, niin Poincarén vakio on λ_1^{-1}.

Ominaisfunktioiden säännöllisyydestä

Ominaisfunktiot ovat jatkuvia joukossa Ω. Tätä varten vetoamme Ladyzhenskayan ja Ural'tsevan teokseen [16]. Kyseisessä kirjassa on sivulla 251 osoitettu, että jokainen tietynlaisen kvasilineaarisen yhtälön ratkaisu on Hölder-jatkuva sillä ehdolla, että se on rajoitettu. Erityisesti 6.1 on tämänlainen yhtälö ja ominaisfunktioiden rajoittuneisuuden todistamme lauseessa 6.18. Lauseen 6.18 todistus on otettu tekstistä [18], ja se perustuu oleellisesti samoihin ideoihin kuin kirjan [16] lause 7.1 sivulla 286.

Lemma 6.14. *Vähenevällä funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voi olla korkeintaan numeroituvan monta epäjatkuvuuspistettä.*

Todistus antiteesillä. Jos funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko D on ylinumeroituva, niin on olemassa väli $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$ siten, että $I \cap D$ on ylinumeroituva. Olkoon

$$\alpha(x) = \lim_{r \to 0} \sup_{y \in B(x,r)} |f(x) - f(y)| .$$

Tällöin

$$D \cap I = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in I : \alpha(x) > \frac{1}{k} \right\},$$

joten joukon $D \cap I$ ylinumeroituvuudesta seuraa, että on olemassa olemassa $k \in \mathbb{N}$, jolle $A := \left\{ x \in I : \alpha(x) > \frac{1}{k} \right\}$ on ääretön.

Olkoon sitten $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ joukon A pisteitä ja olkoon $z_j \in (x_j, x_{j+1})$. Jos $1 \leq j \leq n-2$, niin joukon A määritelmän nojalla voimme valita pisteen $y_j \in (z_j, z_{j+1})$ siten, että $|f(x_{j+1}) - f(y_j)| \geq \frac{1}{k}$. Tällöin funktion f vähenevyydestä seuraa, että

$$\begin{aligned} f(z_j) - f(z_{j+1}) \geq & \begin{cases} f(x_{j+1}) - f(y_j), & \text{jos } x_{j+1} < y_j \\ f(y_j) - f(x_{j+1}), & \text{jos } y_j < x_{j+1} \end{cases} \\ \geq & \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Ketjuttamalla yllä olevaa arviota, saamme

$$f(a) \geq f(z_1) \geq f(z_2) + \frac{1}{k} \geq \ldots \geq f(z_{n-1}) + \frac{n-2}{k} \geq f(b) + \frac{n-2}{k}.$$

Koska joukko A on ääretön, voimme antaa yllä $n \to \infty$. Tämä johtaa ristiriitaan. □

Lemma 6.15. *Olkoon $a \geq k \geq 0$ ja $1 < p < \infty$. Tällöin*

$$a^{p-1} \leq 2^{p-1}(a-k)^{p-1} + 2^{p-1}k^{p-1}.$$

Todistus. Voimme kirjoittaa

$$a^{p-1} = ((a-k) + k)^{p-1} \leq \begin{cases} 2^{p-1}(a-k)^{p-1}, & \text{jos } k \leq (a-k) \\ 2^{p-1}k^{p-1}, & \text{jos } k > (a-k) \end{cases}.$$

Haluttu epäyhtälö seuraa tästä, koska $(a-k), k \geq 0$. □

Seuraava lemma on hieman yksinkertaistettu versio kirjan [16] lemmasta 5.1 sivulla 71.

Lemma 6.16. *Olkoon $u \in L^1(\Omega)$. Jos on olemassa $k_0 > 0$ siten, että*

$$\int_{A_k} (u-k)\,dx \le \gamma k \, |A_k|^{1+\varepsilon} \quad \forall\, k \ge k_0, \tag{6.5}$$

missä $A_k = \{u > k\}$ ja $\gamma, \varepsilon > 0$ ovat vakioita, niin

$$\operatorname{ess\,sup} u \le 2\left(\gamma^{\frac{1}{\varepsilon}} \|u\|_1 + k_0\right).$$

Todistus. Määrittelemme funktion

$$f(k) := \int_{A_k} (u-k)\,dx = \int_k^{\infty} |A_t| \; dt.$$

Kuvaus $t \mapsto |A_t|$ on vähenevä, joten lemman 6.14 nojalla sillä voi olla vain numeroituvan monta epäjatkuvuuspistettä. Siten m.k. k pätee $f'(k) = -|A_t|$. Näin voimme kirjoittaa epäyhtälön (6.5) muodossa

$$-f'(k)\,(f(k))^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} \ge \gamma^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} k^{-\frac{1}{1+\varepsilon}}, \text{ m.k. } k_0 \le k < \operatorname{ess\,sup} u.$$

Integroimalla tämä yli välin $[k_0, k]$, $k < \operatorname{ess\,sup} u$, saamme

$$\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\left(-f(k)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} + f(k_0)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) \ge \gamma^{-\frac{1}{1+\varepsilon}} \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\left(k^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} - k_0^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right),$$

mistä edelleen käyttäen lemmaa 2.7

$$k \le \left(\gamma^{\frac{1}{1+\varepsilon}} f(k_0)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} + k_0^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}} \le 2\left(\gamma^{\frac{1}{\varepsilon}} f(k_0) + k_0\right).$$

Väite seuraa nyt antamalla $k \to \operatorname{ess\,sup} u$, sillä $f(k_0) \le f(0) \le \|u\|_1$. $\square$

Lemma 6.17. *Olkoon $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Jos $E \subset \Omega$ on mitallinen ja $u, \nabla u = 0$ m.k. joukossa $\Omega \setminus E$, niin*

$$\int_{\Omega} |v|^p \; dx \le C(N,p)\,|E|^{\frac{p}{N}} \int_E |\nabla v|^p \; dx.$$

Todistus. Jos $p < N$, niin saamme Hölderin ja Sobolevin epäyhtälöiden avulla (huomaa, että $1 = \frac{p}{N} + \frac{p}{p^*}$)

$$\int_{\Omega} |v|^p \; dx \le |E|^{\frac{p}{N}} \left(\int_E |v|^{p^*} \; dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \le C\,|E|^{\frac{p}{N}} \int_E |\nabla v|^p \; dx.$$

Jos $p \geq N$, niin luvulle $s := \frac{Np}{N+p} < N$ pätee $s^* = p$ ja siten Sobolevin epäyhtälön nojalla

$$\left(\int_\Omega |v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |v|^{s^*} \, dx\right)^{\frac{1}{s^*}} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla v|^s \, dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä eksponentein $\frac{N}{s}$ ja $\frac{p}{s}$ saamme edelleen

$$\left(\int_\Omega |\nabla v|^s \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \leq |E|^{\frac{1}{N}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ja väitteen epäyhtälö seuraa. □

Lause 6.18. *Ominaisfunktiot ovat oleellisesti rajoitettuja. Erityisesti pätee arvio*

$$\|u\|_\infty \leq C(N,p)\lambda^{\frac{N}{p}} \|u\|_1,$$

kun u on ominaisfunktio ja λ sitä vastaava ominaisarvo.

Todistus. Tarkoituksena on johtaa funktiolle u epäyhtälön (6.5) kaltainen arvio ja vedota sitten kyseiseen lemmaan. Voimme olettaa, että u on positiivinen jossakin positiivimittaisessa joukossa. Määrittelemme funktion

$$v(x) = \max\{u(x) - k, 0\}.$$

Tällöin $|v(x)| \leq |u(x)|$ kaikilla $x \in \Omega$, joten lemman 4.12 nojalla $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Lauseen 4.10 mukaan pätee lisäksi,

$$\nabla v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in A_k \\ 0, & x \in \Omega \setminus A_k \end{cases},$$

missä $A_k := \{u > k\}$. Käyttämällä lemmaa 6.17 funktioon v, saamme

$$\int_{A_k} (u-k)^p \, dx = \int_\Omega |v|^p \, dx \leq C\,|A_k|^{\frac{p}{N}} \int_{A_k} |\nabla u|^p \, dx. \tag{6.6}$$

Koska $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, voimme käyttää sitä testifunktiona ominaisarvo-ongelman määrittelevässä yhtälössä 6.2. Tämä johtaa yhtälöön

$$\int_{A_k} |\nabla u|^p \, dx = \lambda \int_{A_k} u^{p-1}(u-k) \, dx. \tag{6.7}$$

Lemman 6.15 avulla voimme vielä hajottaa yhtälön (6.7) oikeanpuolisen integraalin seuraavasti:

$$\int_{A_k} u^{p-1}(u-k)\, dx \leq 2^{p-1} \int_{A_k} (u-k)^p \, dx + 2^{p-1}k^{p-1} \int_{A_k} (u-k)\, dx. \tag{6.8}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (6.6), (6.7) ja (6.8) päädymme arvioon

$$\int_{A_k} (u-k)^p \, dx \le C\lambda \left|A_k\right|^{\frac{p}{N}} \left(2^{p-1} \int_{A_k} (u-k)^p \, dx + 2^{p-1} k^{p-1} \int_{A_k} (u-k) \, dx\right),$$

mikä tulee muotoon

$$\left(1 - 2^{p-1} C\lambda \left|A_k\right|^{\frac{p}{N}}\right) \int_{A_k} (u-k)^p \, dx \le C 2^{p-1} k^{p-1} \lambda \left|A_k\right|^{\frac{p}{N}} \int_{A_k} (u-k) \, dx. \quad (6.9)$$

Jos $k > k_0 := (2^p C\lambda)^{N/p} \left\|u\right\|_1$, niin

$$2^{p-1} C\lambda \left|A_k\right|^{\frac{p}{N}} \le 2^{p-1} C\lambda \left(\frac{\left\|u\right\|_1}{k}\right)^{\frac{p}{N}} \le 2^{p-1} C\lambda \left(\frac{\left\|u\right\|_1}{(2^p C\lambda)^{N/p} \left\|u\right\|_1}\right)^{\frac{p}{N}} = 2^{-1},$$

joten epäyhtälö (6.9) voidaan kirjoittaa edelleen muodossa

$$\int_{A_k} (u-k)^p \, dx \le C 2^p k^{p-1} \lambda \left|A_k\right|^{\frac{p}{N}} \int_{A_k} (u-k) \, dx, \text{ kun } k \ge k_0.$$

Käyttämällä tähän Hölderin epäyhtälöstä saatavaa tietoa

$$\left(\int_{A_k} (u-k) \, dx\right)^p \le \left|A_k\right|^{p-1} \int_{A_k} (u-k)^p \, dx$$

päädymme lopulta lemmassa 6.16 tarvittavaan epäyhtälöön

$$\int_{A_k} (u-k) \, dx \le C 2^{\frac{p}{p-1}} \lambda^{\frac{1}{p-1}} k \left|A_k\right|^{1+\frac{p}{N(p-1)}}, \text{ kun } k \ge k_0, \quad (6.10)$$

Tällöin kyseinen lemma antaa halutun rajan $\operatorname{ess\,sup} u$:lle. Menettelemällä vastaavasti funktiolle $-u$, saamme rajan myös $\operatorname{ess\,inf} u$:lle. □

Lause 6.19. *Ominaisfunktiot ovat Hölder-jatkuvia joukossa Ω.*

Todistus. Jos $p \le N$, niin Hölder-jatkuvuus seuraa edellisestä lauseesta ja kirjan [16] tuloksesta 1.1 sivulla 251. Jos $p > N$, niin kaikki Sobolevin funktiot ovat Morreyn lauseen 4.7 nojalla Hölder-jatkuvia joukossa Ω. □

Määritelmä 6.20. Sanomme, että $z \in \partial\Omega$ on *säännöllinen*, jos jokaiselle ominaisfunktiolle u pätee $\lim_{x \to z} u(x) = 0$. Joukkoa Ω kutsumme *säännölliseksi* jos jokainen $z \in \partial\Omega$ on säännöllinen.

Jos $p > N$, niin lauseen 4.8 nojalla kaikki rajoitetut alueet ovat säännöllisiä. Tilanne $p \leq N$ vaatii joukon Ω komplementilta lisäoletuksen, jota kutsumme *Wienerin kriteeriksi* Norbert Wienerin mukaan, joka vuoden 1924 paperissaan [26] karakterisoi harmonisten funktioiden säännölliset reunapisteet. Wienerin alkuperäinen idea on sittemmin jalostettu varsin yleisille elliptisille yhtälöille. Voidaan osoittaa, että piste $x \in \partial\Omega$ on säännöllinen, jos ja vain jos $\complement\Omega$ ei ole *p-ohut* tässä pisteessä, eli pätee

$$\int_0^1 \left(\frac{C_p\left(\complement\Omega \cap B(x,t)\right)}{t^{N-p}} \right)^{1/(p-1)} \frac{dt}{t} = \infty,$$

missä $C_p(\cdot)$ on *Sobolevin p-kapasiteetti* (ks. liite). Tätä varten viittaamme ensinnäkin artikkeliin [9], jossa on todistettu, että yllä mainittu Wienerin kriteeri on riittävä ehto eräiden muotoa $\operatorname{div} A(x,u,\nabla u) = B(x, u\nabla u)$ olevien ratkaisujen reunasäännöllisyydelle. Toisekseen viittaamme julkaisuun [20], jossa on osoitettu, että Wienerin kriteeri on myös välttämätön. Kattava esitys asiasta ja siihen liittyvistä käsitteistä, kuten kapasiteetista, on luettavissa teoksesta [21].

Olemme liitteessä p-kapasiteetin määrittelyn lisäksi käsitelleet hieman p-ohuita joukkoja. Toteamme, että ainakin mikä tahansa ns. ulkokartioehdon toteuttava rajoitettu alue on säännöllinen: jos $x \in \partial\Omega$ ja on olemassa x-kärkinen kartio $K \subset \complement\Omega$, niin $\complement\Omega$ ei ole p-ohut pisteessä x. Tämän lisäksi osoitamme, että mikä tahansa rajoitettu alue voidaan tyhjentää alueilla, jotka toteuttavat Wienerin kriteerin reunapisteissään. Siis vaikka Ω itsessään ei olisikaan säännöllinen, niin on olemassa säännölliset joukot $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \cdots \Omega$ siten, että $\Omega = \cup_k \Omega_k$.

Ominaisfunktioiden säännöllisyyteen liittyen mainitsemme vielä seuraavan Harnack-tyyppisen epäyhtälön, jota varten viittaamme Trudingerin artikkeliin [24].

Lause 6.21 (Harnackin epäyhtälö)**.** *Jos u on ei-negatiivinen ominaisfunktio, niin*

$$\max_{B_r} u \leq C(N,p) \min_{B_r} u$$

kaikilla $B_{2r} \subset \Omega$.

p-Laplacen operaattorin spektristä

Artikkelissa [8] on osoitettu, että ominaisarvojen joukko eli *spektri* on ainakin numeroituvasti ääretön kaikille $1 < p < \infty$. Tämä on lineaaritapausta $p = 2$ lukuun ottamatta vaikeahkoa ja vaatii työkaluja, joita emme tässä työssä käsittele. Osoitamme kuitenkin, että spektri on suljettu. Todistus on lähteestä [18] ja se on melko suoraviivainen, kunhan ensin esittelemme joitakin epäyhtälöitä.

Lemma 6.22. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^N$ ja $a \neq 0 \neq b$. Tällöin*

$$\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right) \cdot (a-b) \geq (p-1) |a-b|^2 \left(1 + |a|^2 + |b|^2\right)^{\frac{p-2}{2}},$$

kun $1 \leq p \leq 2$, ja

$$\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right) \cdot (a-b) \geq 2^{2-p} |a-b|^p,$$

kun $p \geq 2$.

Todistus. Suoraviivahko johto on esitetty lähteen [19] kappaleessa 10. □

Lemma 6.23. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$. Tällöin*

$$\left||a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right| \leq \begin{cases} C |a-b|^{p-1}, & \text{kun } 1 < p \leq 2 \\ C \left(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}\right) |a-b|, & \text{kun } p > 2 \end{cases}.$$

Todistus. Todistamme ensin tilanteen $1 < p \leq 2$ käyttäen samoja argumentteja, kuin mitä on esitetty julkaisun [5] huomautuksessa 2.3. Voimme yleisyyttä menettämättä olettaa, että $0 < |b| < |a|$. Koska $0 < p-1 \leq 1$, saamme lemman 2.8 avulla

$$\begin{aligned} \left||a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right| &= \left| |a|^{p-1} \left(\frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|} \right) + \frac{b}{|b|} \left(|b|^{p-1} - |a|^{p-1}\right) \right| \\ &\leq |a|^{p-1} \left| \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|} \right| + \left||b|^{p-1} - |a|^{p-1}\right| \\ &\leq |a|^{p-1} \left| \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|} \right| + |a-b|^{p-1}. \end{aligned}$$

Edelleen

$$|a|^{p-1} \left| \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|} \right| = |a|^{p-2} \left| a - b + \frac{b}{|b|} (|a| - |b|) \right| \leq 2 |a|^{p-2} |a-b| \tag{6.11}$$

Oletuksesta $0 < |b| < |a|$ seuraa, että $|a| \geq 2 |a-b|$, joten tiedon $p - 2 \leq 0$ nojalla $|a|^{p-2} \leq 2^{p-2} |a-b|^{p-2}$. Tämä yhdessä edellisten arvioiden kanssa todistaa väitteen tilanteessa $1 < p \leq 2$.

Olkoon sitten $p > 2$. Menettelemme kuten lähteen [19] kappaleessa 10. Koska $p > 2$, kuvaus $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N : x \mapsto |x|^{p-2} x$ on differentioituva ja siten voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\left||b|^{p-2} b - |a|^{p-2} a\right| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} |a + t(b-a)|^{p-2} (a + t(b-a))\, dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 (b-a)(p-1) |a + t(b-a)|^{p-3} (a + t(b-a))\, dt\right| \\
&\leq (p-1) |b-a| \int_0^1 |a + t(b-a)|^{p-2}\, dt \\
&\leq C |b-a| \left(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}\right).
\end{aligned}$$

□

Lause 6.24. *Olkoon* (λ_k) *ominaisarvojen jono siten, että* $\lambda_k \to \lambda \neq \infty$. *Tällöin* λ *on ominaisarvo.*

Todistus. Merkitsemme symbolilla u_k ominaisarvoa λ_k vastaavaa ominaisarvoa, joka on normitettu ehdolla $\|u_k\|_p = 1$. Tällöin

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \cdot \nabla \eta \, dx = \lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2} u_k \eta \, dx \tag{6.12}$$

kaikilla $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Normitusehdon ja lauseen 6.4 nojalla pätee lisäksi

$$\lambda_k = \int_\Omega |\nabla u_k|^p \, dx,$$

eli $\|\nabla u_k\|_p$ on rajoitettu. Siten seurauksen 5.8 nojalla on olemassa jonon (u_k) osajono (merk. edelleen (u_k)) ja sellainen funktio $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, että

$$u_k \to u \text{ avaruudessa } L^p(\Omega), \tag{6.13}$$

$$\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \text{ heikosti avaruudessa } L^p(\Omega)^N. \tag{6.14}$$

Haluamme osoittaa, että u on ominaisfunktio, jota vastaava ominaisarvo on λ. Käyttämällä yhtälössä (6.12) testifunktiota $u_k - u$ ja lisäämällä termi $-\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot (\nabla u_k - \nabla u)\, dx$ yhtälön molemmille puolille, saamme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \cdot (\nabla u_k - \nabla u)\, dx \\
&\qquad = \lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2} u_k (u_k - u)\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot (\nabla u_k - \nabla u)\, dx,
\end{aligned}$$

mikä ehtojen (6.13) ja (6.14) nojalla johtaa raja-arvoon

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \left(|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\cdot(\nabla u_k - \nabla u)\,dx = 0. \tag{6.15}$$

Jos $p \leq 2$, on olemassa $C > 0$ siten, että $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Lemman 6.22 nojalla pätee tällöin

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq & C\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^2\,dx \\ \leq & C\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^2\left(1 + |\nabla u_k|^2 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\,dx \\ \leq & C\int_\Omega \left(|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\cdot(\nabla u_k - \nabla u)\,dx.\end{aligned}$$

Jos $p > 2$, pätee suoraan lemman 6.22 nojalla

$$\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^p\,dx \leq C\int_\Omega \left(|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\cdot(\nabla u_k - \nabla u)\,dx.$$

Yllä olevat kaksi arviota yhdessä raja-arvon (6.15) kanssa antavat vahvan suppenemisen

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^p\,dx = 0. \tag{6.16}$$

Tämä yhdessä lemman 6.23 kanssa mahdollistaa rajankäynnin yhtälössä (6.12). Jos nimittäin $1 < p \leq 2$, niin kyseisen lemman nojalla pätee

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left||\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|\,dx \leq & C\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^{p-1}\,dx \\ \leq & C\left(\int_\Omega |\nabla u_k - \nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \to 0.\end{aligned} \tag{6.17}$$

Toisaalta, jos $p > 2$, niin käyttämällä edellä mainitun lemman 6.23 lisäksi Hölderin epäyhtälöä, saamme

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left||\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|dx \\ &\quad\leq C\int_\Omega \left(|\nabla u_k|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2}\right)|\nabla u_k - \nabla u|\,dx \\ &\quad\leq C\left(\|\nabla u_k\|_{p'(p-2)}^{p-2} + \|\nabla u\|_{p'(p-2)}^{p-2}\right)\|\nabla u_k - \nabla u\|_p \to 0.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Raja-arvot (6.17) ja (6.18) osoittavat, että

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \cdot \nabla \eta \, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx,$$

kun $k \to \infty$. Käyttämällä ehtoa (6.13) ja lemmaa 6.23 vastaavasti kuin edellä voimme todeta myös, että

$$\lambda_k \int_\Omega |u_k|^{p-2} u_k \eta \, dx \to \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u \eta \, dx.$$

Näin on nähty, että u on ominaisfunktio, jota vastaa ominaisarvo λ. □

Vain ensimmäinen ominaisfunktio on yksimerkkinen

Esitämme P.Lindqvistin ja B.Kawohlin artikkelista [15] peräisin olevan todistuksen sille, että ensimmäiset ominaisfunktiot ovat ainoita ominaisfunktioita, jotka eivät vaihda merkkiä. Todistus perustuu samoihin argumentteihin kuin vastaava tulos julkaisussa [23], mutta vetoamatta ominaisfunktion normaaliderivaattoihin. Etuna on tällöin, että meidän ei tarvitse olettaa joukon $\partial\Omega$ olevan tyyppiä C^∞ kuten julkaisun [23] tuloksessa.

Harnackin epäyhtälöstä seuraa, että ensimmäinen ominaisarvo ei vaihda merkkiä. Tämä mahdollistaa sen, että voimme usein olettaa, että tarkastelemamme ensimmäinen ominaisfunktio on aidosti positiivinen.

Lemma 6.25. *Olkoon u ei-negatiivinen ominaisfunktio. Tällöin $u > 0$.*

Todistus antiteesillä. Oletamme, että on olemassa $x_0 \in \Omega$, jolle $u(x_0) = 0$. Olkoon $y_0 \in \Omega$ mielivaltainen. Koska Ω on polkuyhtenäinen, on olemassa yhtenäinen kompakti joukko $K \subset \Omega$, joka sisältää pisteet x_0 ja y_0. Voimme valita joukolle K äärellisen peitteen $B_1, \dots, B_n$ perheestä $\{B(x, r) : x \in K\}$, missä $r = \frac{1}{2}\mathrm{dist}\,(K, \partial\Omega)$. Joukon K yhtenevyyden nojalla voimme olettaa, että $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$. Voimme myös olettaa, että $x_0 \in B_1$. Tällöin Harnackin epäyhtälön ja tiedon $u(x_0) = 0$ nojalla pätee $u \equiv 0$ joukossa B_1. Toisaalta, koska $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, pätee myös $u \equiv 0$ joukossa B_2. Induktiivisesti jatkamalla tämä johtaa päätelmään $u \equiv 0$ joukossa K, ja siis $u(y_0) = 0$. Koska y_0 on mielivaltainen, seuraa $u \equiv 0$ joukossa Ω, mutta tämä on vastoin ominaisfunktion määritelmää. □

Lause 6.26. *Ensimmäinen ominaisfunktio ei vaihda merkkiä.*

Todistus. Olkoon u ensimmäinen ominaisfunktio. Lauseen 6.11 nojalla u on Rayleighin osamäärän minimoija. Tällöin myös $|u|$ on minimoija, ja siis ei-negatiivinen ominaisfunktio. Siten edellisen lemman nojalla $|u| > 0$. Koska u on jatkuva, ei se näin ollen voi vaihtaa merkkiä. □

Lemma 6.27. *Olkoon $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset ... \Subset \Omega$ joukon Ω tyhjennys, ts. $\Omega = \cup \Omega_j$. Tällöin*

$$\lim_j \lambda_1(\Omega_j) = \lambda_1(\Omega).$$

Todistus. Huomautuksen 6.12 nojalla $\lambda_1(\Omega_1) \geq \lambda_1(\Omega_2) \geq ... \geq \lambda_1(\Omega)$, joten ainakin raja-arvo on olemassa. Koska lauseen 6.11 mukaan $\lambda_1(\Omega) = \inf_v J(v)$, voimme tiheyden nojalla valita funktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että

$$J(\varphi) \leq \lambda_1(\Omega) + \varepsilon.$$

Koska $\operatorname{supp} \varphi$ on kompakti, pätee $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_j)$ riittävän suurille j. Siten

$$\lambda_1(\Omega_j) \leq J(\varphi) \leq \lambda_1(\Omega) + \varepsilon$$

kaikille suurille j. □

Lemma 6.28. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^N, a \neq 0 \neq b, a \neq b$. Tällöin*

$$\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right) \cdot (a - b) > 0.$$

Todistus. Tämä toki seuraa heti lemmasta 6.22, mutta myös suora johto on helppo. Voimme olettaa, että $|a| < |b|$. Tällöin

$$\begin{aligned}\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right) \cdot (a - b) &= |a|^{p-2} \left(|a|^2 - a \cdot b\right) + |b|^{p-2} \left(|b|^2 - a \cdot b\right) \\ &> |a|^{p-2} \left(|a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b\right) \\ &= |a|^{p-2} |a - b|^2 > 0.\end{aligned}$$

□

Lause 6.29. *Positiivista ominaisfunktiota vastaava ominaisarvo on aina λ_1. Toisin sanoen, ensimmäinen ominaisfunktio on ainoa ominaisfunktio, joka ei vaihda merkkiä.*

Todistus antiteesillä. Oletamme, että on olemassa positiivinen ominaisfunktio $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, jota vastaa jokin ominaisarvo $\lambda > \lambda_1(\Omega)$. Säännöllisen joukon määritelmän yhteydessä totesimme, että rajoitettu alue voidaan tyhjentää säännöllisillä joukoilla. Tämä tieto yhdessä lemman 6.27 kanssa takaa, että voimme valita säännöllisen joukon $\omega \Subset \Omega$ siten, että

$$\lambda_1(\omega) < \lambda.$$

Olkoon $v \in W_0^{1,p}(\omega)$ ominaisarvoa $\lambda_1(\omega)$ vastaava ominaisfunktio. Koska ω on säännöllinen, pätee $v \in C(\overline{\omega})$ ja $v = 0$ joukon ω reunalla. Näin ollen, koska v on lauseen 6.26 nojalla yksimerkkinen ja $u \in C(\Omega)$ on positiivinen, voimme (tarvittaessa kertomalla v sopivalla vakiolla) olettaa, että

$$v \leq u \text{ joukossa } \overline{\omega}. \tag{6.19}$$

Merkitsemme

$$\kappa := \left(\frac{\lambda_1(\omega)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Tällöin ei-negatiiviselle testifunktiolle $\varphi \in W_0^{1,p}(\omega)$ pätee

$$\begin{aligned}
\int_\omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx =& \lambda_1(\omega) \int_\omega v^{p-1} \varphi \, dx \\
\leq& \lambda_1(\omega) \int_\omega u^{p-1} \varphi \, dx \\
=& \lambda \int_\omega (\kappa u)^{p-1} \varphi \, dx \\
=& \int_\omega |\nabla(\kappa u)|^{p-2} \nabla(\kappa u) \cdot \nabla \varphi \, dx,
\end{aligned} \tag{6.20}$$

missä (epä)yhtälöistä 1. seuraa siitä, että v on positiivinen ominaisfunktio, 2. ehdosta (6.19), 3. vakion κ valinnasta ja 4. siitä, että u on ominaisarvoa λ vastaava ominaisfunktio. Asetamme nyt $\varphi := \max(v - \kappa u, 0)$. Koska $\varphi \in C(\overline{\omega}) \cap W^{1,p}(\omega)$ ja $\varphi \equiv 0$ joukossa $\partial\omega$, niin lemman 4.13 nojalla $\varphi \in W_0^{1,p}(\omega)$. Kun sijoitamme tämän testifunktion epäyhtälöön (6.20), saamme arvion

$$\int_{\{v \geq \kappa u\}} (|\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla(\kappa u)|^{p-2} \nabla(\kappa u)) \cdot (\nabla v - \nabla (\kappa u)) \, dx \leq 0,$$

mistä lemman 6.28 avulla seuraa, että $\nabla v - \kappa \nabla u = 0$ joukossa $\{v \geq \kappa u\}$. Poincarén epäyhtälöstä saamme tällöin

$$\|\max(v - \kappa u, 0)\|_{L^p(\omega)}^p \leq C \int_{\{v \geq \kappa u\}} |\nabla v - \kappa \nabla u|^p \, dx = 0,$$

eli on oltava $v \leq \kappa u$ joukossa $\overline{\omega}$. Voimme nyt korvata ehdon (6.19) epäyhtälöllä $v \leq \kappa u$ ja toistaa edellisen prosessin. Tämä johtaa epäyhtälöön $v \leq \kappa^2 u$. Näin jatkamalla saamme

$$v \leq \lim_{n \to \infty} \kappa^n u.$$

Koska $\kappa < 1$, seuraa tästä $v = 0$, mikä on mahdotonta. □

Kuten lähteessä [18] on tehty, toteamme edellisen seurauksena, että jos ominaisfunktio rajoitetaan sen johonkin noodlialueeseen, tulee siitä ensimmäinen ominaisfunktio kyseisessä noodlialueessa.

Määritelmä 6.30. Funktion $u \in C(\Omega)$ *noodlialue* on joukon $\{u > 0\}$ tai $\{u < 0\}$ yhtenäisyyskomponentti.

Lemma 6.31. *Olkoon $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ ja N funktion u noodlialue. Tällöin $u_{|N} \in W_0^{1,p}(N)$.*

Todistus. Voimme olettaa, että $u > 0$ joukossa N. Asetamme $\psi_n = \left(u^+ - \frac{1}{n}\right)$, missä u^+ on funktion u positiiviosa, eli $u^+ = \max(u, 0)$. Koska u on jatkuva ja $u \equiv 0$ joukossa $\partial N \cap \Omega$, on olemassa alueen Ω avoin osajoukko $A_n \supset \partial N \cap \Omega$, jossa $\psi_n \equiv 0$. Toisaalta, koska $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, voimme valita jonon funktioita $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ siten, että ne approksimoivat funktiota u avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Tällöin lauseen 4.10 nojalla $\varphi_n^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja $\varphi_n^+ \to u^+$ avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Määrittelemme nyt

$$u_n := \min(\psi_n, \varphi_n^+),$$

jolloin ainakin $u_n \to u^+$ avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Lisäksi $\operatorname{supp} u_n \subset \operatorname{supp} \varphi_n^+ \setminus A_n$. Funktio $u_{n|N}$ on siten kompaktisti kannettu joukossa N, ja näin ollen kuuluu avaruuteen $W_0^{1,p}(N)$. $\square$

Lause 6.32. *Olkoon u ominaisfunktio joukossa Ω ja E funktion u noodlialue. Tällöin $u_{|E}$ on ensimmäinen ominaisfunktio joukon E suhteen, ts. se ratkaisee yhtälön (6.2) kaikilla $\varphi \in C_c^\infty(E)$ ominaisarvolla $\lambda = \lambda_1(E)$.*

Todistus. Lemman 6.31 nojalla $u_{|E} \in W_0^{1,p}(E)$. Lisäksi on selvää, että $u_{|E}$ toteuttaa yhtälön 6.2 kaikilla $\eta \in C_c^\infty(E)$, joten $u_{|E}$ on ominaisfunktio. Koska se on positiivinen joukossa E, on sen lauseen 6.29 nojalla oltava juuri ensimmäinen ominaisfunktio. Huomaa, että lauseen 6.29 pätevyys mielivaltaisissa alueissa on oleellista, sillä meillä ei ole tietoa noodlialueen E mahdollisesta sileydestä. $\square$

Huomautus 6.33. Ominaisfunktiolla voi olla vain äärellisen monta noodlialuetta. Perustelemme tämän kuten lähteessä [18]. Olkoon u ominaisfunktio, λ sitä vastaava ominaisarvo ja $N_j, j \in J$, funktion u eri noodlialueita. Tällöin lemman 6.31 mukaan $u_{|N_j} \in W_0^{1,p}(N_j)$ ja siten Poincarén epäyhtälön nojalla

$$|N_j|^{\frac{1}{N}} \geq C(N,p) \frac{\|u\|_{L^p(N_j)}}{\|\nabla u\|_{L^p(N_j)}}.$$

Koska u on ominaisfunktio joukossa Ω, on $u_{|N_j}$ ominaisfunktio joukossa N_j. Lauseesta 6.4 seuraa siten yhtälö

$$\frac{\|u\|_{L^p(N_j)}}{\|\nabla u\|_{L^p(N_j)}} = \lambda^{-\frac{1}{p}}.$$

Päädymme arvioon

$$|\Omega| \geq \sum_{j \in J} |N_j| \geq C(N,p) \sum_{j \in J} \lambda^{-\frac{N}{p}},$$

joten indeksijoukon J on oltava äärellinen.

Ensimmäisen ominaisfunktion yksinkertaisuus

Esitämme M.Bellonin ja B.Kawohlin artikkelin [2] todistuksen ensimmäisen ominaisfunktion yksinkertaisuudelle, eli sille, että $u = Cv$, jos u ja v ovat ensimmäisiä ominaisfunktioita. Todistus pohjaa artikkelin [14] huomioon siitä, että positiivisille funktioille funktionaali $u \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ on konveksi "muuttujan u^p -suhteen", eli tarkemmin sanottuna avaruuden $L^p(\Omega)$ osajoukossa $\{u^p : u > 0, u \in W^{1,p}(\Omega)\}$ määritelty kuvaus $u^p \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ on konveksi. Tämä idea on peräisin R.Bengurialta, ks. esim. [3], jossa kyseisen funktionaalin konveksius on todettu, kun $p = 2$.

Huomautus. Jos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on ei-negatiivinen, niin voimme valita sitä approksimoivan jonon $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ ei-negatiiviseksi. Tämän voi perustella kiinnittämällä jonon $(u_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$, joka lähestyy funktiota u avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$ ja sitten silottamalla funktioita $u_n^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Silotuksen avulla (ks. esim. [1, kohdat 2.28 ja 3.16]) voimme nimittäin valita jokaiselle n sellaisen ei-negatiivisen funktion $(u_n^+)_{\varepsilon_n} \in C_c^\infty(\Omega)$, että $\left\|(u_n^+)_{\varepsilon_n} - u_n^+\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \frac{1}{n}$. Tällöin $\left\|u - (u_n^+)_{\varepsilon_n}\right\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u - u_n^+\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{n} \to 0$, sillä lauseen 4.10 nojalla $u_n^+ \to u^+ = u$.

Tarvittaessa voimme lähestyä ei-negatiivista funktiota $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ myös positiivisilla C^∞-funktioilla: tällaisiksi käy $u_n + \frac{1}{n} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, missä $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ on ei-negatiivinen ja $\|u - u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$.

Lemma 6.34. *Jos funktiot u ja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ovat positiivisia, niin $w := (u^p + v^p)^{\frac{1}{p}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja*

$$\nabla w = (u^{p-1} \nabla u + v^{p-1} \nabla v)(u^p + v^p)^{\frac{1}{p}-1}. \tag{6.21}$$

Todistus. Koska $u, v > 0$, on olemassa positiivisista funktioista koostuvat jonot $(u_n), (v_n) \subset C^\infty(\Omega)$ siten, että $u_n \to u$ ja $v_n \to v$ avaruudessa $W^{1,p}(\Omega)$. Koska L^p-suppenevalla jonolla on pisteittäin samaan rajafunktioon suppeneva osajono (ks. [4, lause 4.9]), voimme olettaa, että

$$u_n \to u, \nabla u_n \to \nabla u, v_n \to v \text{ ja } \nabla v_n \to \nabla v \text{ pisteittäin m.k. } x \in \Omega. \tag{6.22}$$

Asetamme

$$w_n := (u_n^p + v_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Tällöin $w_n \in C^\infty(\Omega)$ ja

$$\nabla w_n = \left(u_n^{p-1}\nabla u_n + v_n^{p-1}\nabla v_n\right)(u_n^p + v_n^p)^{\frac{1}{p}-1}. \tag{6.23}$$

Jono $\|\nabla w_n\|_p$ on rajoitettu, sillä käyttäen lemmaa 2.7 saamme

$$\begin{aligned}
|\nabla w_n|^p &= \frac{|u_n^{p-1}\nabla u_n + v_n^{p-1}\nabla v_n|^p}{(u_n^p + v_n^p)^{p-1}} \\
&\le \frac{(u_n^{p-1}|\nabla u_n| + v_n^{p-1}|\nabla v_n|)^p}{(u_n^p + v_n^p)^{p-1}} \\
&\le \frac{C\left(u_n^{p(p-1)}|\nabla u_n|^p + v_n^{p(p-1)}|\nabla v_n|^p\right)}{(u_n^p + v_n^p)^{p-1}} \\
&\le C\left(|\nabla u_n|^p + |\nabla v_n|^p\right).
\end{aligned}$$

Toisaalta, lemman 2.8 avulla saamme

$$\int_\Omega \left|(u_n^p + v_n^p)^{\frac{1}{p}} - (u^p + v^p)^{\frac{1}{p}}\right|^p dx \le \int_\Omega |u_n^p - u^p|\,dx + \int_\Omega |v_n^p - v^p|\,dx.$$

Käyttämällä lemmaa 6.23 ja Hölderin epäyhtälöä, saamme edelleen

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_n^p - u^p|\,dx &\le C\int_\Omega \left(|u_n|^{p-1} + |u|^{p-1}\right)|u_n - u|\,dx \\
&\le C\left(\|u_n\|_p^{p-1} + \|u\|_p^{p-1}\right)\|u_n - u\|_p \to 0.
\end{aligned}$$

Vastaavasti $\int_\Omega |v_n^p - v^p|\,dx \to 0$, ja siis $\|w_n - w\|_p^p \to 0$. Seurauksesta 5.7 saamme nyt, että $w \in W^{1,p}(\Omega)$ ja että on olemassa jonon (w_n) osajono (w_{n_k}), jolle $\nabla w_{n_k} \rightharpoonup \nabla w$ heikosti avaruudessa $L^p(\Omega)^N$. Toisaalta, ehdoista (6.22) ja (6.23) seuraa, että $\nabla w_{n_k} \to (u^{p-1}\nabla u + v^{p-1}\nabla v)(u^p + v^p)^{\frac{1}{p}-1}$ pisteittäin m.k. joukossa Ω. Koska Ω on rajoitettu, ei jono (∇w_{n_k}) voi supeta pisteittäin m.k. eri funktioon, kuin mihin se suppenee heikosti avaruudessa $L^p(\Omega)^N$ (ks. [6, propositio 9.1c]). Siten on oltava $\nabla w = (u^{p-1}\nabla u + v^{p-1}\nabla v)(u^p + v^p)^{\frac{1}{p}-1}$. Ehto $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ seuraa epäyhtälöstä $(a^p + b^p)^{1/p} \le C(a + b)$ ja lemmasta 4.12. □

Lemma 6.35. *Olkoot $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ positiivisia ja $\omega \Subset \Omega$ alue. Tällöin $h := u/v \in W^{1,p}(\omega)$ ja $\nabla h = (v\nabla u - u\nabla v)/v^2$. Jos lisäksi $\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla v}{v}$ m.k. joukossa Ω, niin $u = Cv$.*

Todistus. Koska $\overline{\omega}$ on kompakti ja v on jatkuva ja positiivinen, on kuvajoukko $v(\overline{\omega})$ joukon $(0,\infty)$ kompakti osajoukko. Näin ollen esimerkiksi ykkösenosituksen (ks. [1, lause 1.44]) nojalla on olemassa $\xi \in C_c^1(\mathbb{R})$ siten, että $\xi \equiv 1$ joukossa $v(\omega)$ ja $\operatorname{supp}\xi \subset (0,\infty)$. Määrittelemme

$$G(x) = \begin{cases} x^{-1}\xi(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

jolloin lauseen 4.5 nojalla $G \circ v \in W^{1,p}(\omega)$ ja $\nabla(G \circ v) = -\nabla v / v^2$. Ensimmäinen väite seuraa nyt soveltamalla lausetta 4.4 funktioilla $G \circ v$ ja u.

Toista väitettä varten huomaamme, että ehdosta $\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla v}{v}$ m.k. joukossa Ω seuraa, että funktion $h = u/v \in W^{1,p}(\omega)$ gradientti $\nabla h = (v\nabla u - u\nabla v)/v^2$ häviää m.k. joukossa ω jokaisella $\omega \Subset \Omega$. Funktion h on siten oltava vakio, eli $u = Cv$. $\square$

Lause 6.36. *Avaruuden $L^1(\Omega)$ konveksissa osajoukossa*

$$K = \left\{ u^p : u > 0, \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1 \text{ ja } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega) \right\}$$

määritelty kuvaus $u^p \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ on aidosti konveksi.

Todistus. Olkoot $t \in (0,1)$, $u \neq v \in K$ ja $w := (tu^p + (1-t)v^p)^{\frac{1}{p}}$. Lemman 6.34 mukaan $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Koska lisäksi $w > 0$ ja

$$\|w\|_p = \left(\int_\Omega tu^p + (1-t)v^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(t\int_\Omega u^p \, dx + (1-t)\int_\Omega v^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

niin $tu^p + (1-t)v^p \in K$. Siis ainakin K on konveksi.

Koska $\frac{tu^p}{tu^p+(1-t)v^p} + \frac{(1-t)v^p}{tu^p+(1-t)v^p} = 1$ ja funktio $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|^p$ on aidosti konveksi, saamme

$$\begin{aligned} |\nabla w|^p &= (tu^p + (1-t)v^p)^{1-p} \left| tu^{p-1}\nabla u + (1-t)v^{p-1}\nabla v \right|^p \\ &= (tu^p + (1-t)v^p) \left| \frac{tu^p}{tu^p + (1-t)v^p} \frac{\nabla u}{u} + \frac{(1-t)v^p}{tu^p + (1-t)v^p} \frac{\nabla v}{v} \right|^p \\ &\leq (tu^p + (1-t)v^p) \left(\frac{tu^p}{tu^p + (1-t)v^p} \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^p + \frac{(1-t)v^p}{tu^p + (1-t)v^p} \left| \frac{\nabla v}{v} \right|^p \right) \\ &= tu^p \left| \frac{\nabla u}{u} \right|^p + (1-t)v^p \left| \frac{\nabla v}{v} \right|^p \\ &= t\,|\nabla u|^p + (1-t)\,|\nabla v|^p, \end{aligned} \tag{6.24}$$

missä epäyhtälö on aito, kun $\frac{\nabla u}{u} \neq \frac{\nabla v}{v}$. Lemmasta 6.35 ja ehdoista $\|u\|_p = \|v\|_p$, $u \neq v$, seuraa, että ei voi olla $\frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla v}{v}$ m.k. joukossa Ω. Arvion (6.24) epäyhtälö on näin ollen aito jossakin positiivimittaisessa joukossa, ja siten

$$\int_\Omega |\nabla w|^p < t \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + (1-t) \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx,$$

eli väitteen kuvaus on aidosti konveksi. □

Huomautus 6.37. Edellisen lauseen todistuksesta näemme, että funktionaali $u^p \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$ on konveksi joukossa $\left\{u^p : u > 0, u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$.

Lause 6.38. *Ensimmäinen ominaisfunktio on yksinkertainen, ts. jos u ja v ovat ominaisarvoa $\lambda_1(\Omega)$ vastaavia ominaisfunktioita, niin $u = Cv$.*

Todistus. Riittää osoittaa väite tilanteessa $\|u\|_p = \|v\|_p = 1$. Lauseen 6.26 mukaan ensimmäinen ominaisfunktio ei vaihda merkkiä, joten voimme olettaa, että $u, v > 0$. Lauseen 6.19 nojalla tiedämme, että u ja v ovat jatkuvia. Näin ollen $u^p, v^p \in K$, missä K on kuten lauseessa 6.36. Koska K on konveksi, on funktio

$$w := \left(\frac{1}{2}u^p + \frac{1}{2}v^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

joukossa $W_0^{1,p}(\Omega)$ ja $\int_\Omega |w|^p \, dx = 1$. Jos nyt olisi $u \neq v$, niin käyttäen lauseen 6.36 funktionaalin aitoa konveksiutta ja tietoa siitä, että u ja v minimoivat Rayleighin osamäärää, saisimme

$$\int_\Omega |\nabla w|^p \, dx < \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx},$$

mikä on mahdotonta. On siis oltava $u = v$. □

7 Lineaarinen tapaus $p = 2$

Tässä osassa tutkimme p-Laplacen ominaisarvo-ongelman 6.1 erikoistapausta $p = 2$, eli tilannetta, jossa Δ_p on tavallinen lineaarinen Laplacen operaattori. Lineaaritilanteessa ominaisarvoja on numeroituvasti äärettömän monta ja voimme karakterisoida ne kaikki Rayleighin osamäärän avulla.

Kun tässä kappaleessa puhumme ominaisfunktiosta $u \in H_0^1(\Omega)$, tarkoitamme, että se on ongelman 6.1 ratkaisu, missä $p = 2$. Eli siis sitä, että se toteuttaa yhtälön

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, dx = \lambda \int_\Omega u\eta \, dx \tag{7.1}$$

jokaisella $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Kirjassa [10] on kappaleessa 8.12 käsitelty yleisempää lineaarista ominaisarvo-ongelmaa, jossa Laplacen operaattorin sijasta esiintyy elliptisyysehdot toteuttava itseadjungoituva differentiaalioperaattori. Yleisen Hilbertin avaruuden itseadjungoituvista operaattoreista ja niiden ominaisarvoista voi lukea teoksesta [4]. Artikkelissa [22] on yksityiskohtainen esitys liittyen tavallisen Laplacen operaattorin ominaisarvoihin.

Lause 7.1. *Olkoot u_1 ja u_2 ominaisfunktioita sekä $\lambda \neq \lambda'$ niitä vastaavat ominaisarvot. Tällöin u_1 ja u_2 ovat ortogonaalisia toistensa suhteen Hilbertin avaruudessa $H_0^1(\Omega)$, ts. $(u_1|u_2)_{H^1} = 0$.*

Todistus. Käyttämällä funktioita u_1 ja u_2 toistensa testifunktioina yhtälössä (7.1), saamme

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \, dx = \lambda \int_\Omega u_1 u_2 \, dx \tag{7.2}$$

ja

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 \, dx = \lambda' \int_\Omega u_2 u_1 \, dx. \tag{7.3}$$

Näiden erotus antaa yhtälön

$$(\lambda - \lambda') \int_\Omega u_1 u_2 \, dx = 0.$$

Koska $\lambda \neq \lambda'$, seuraa tästä $(u_1|u_2)_{L^2} = 0$ ja tällöin edelleen yhtälön (7.2) nojalla $(\nabla u_1|\nabla u_2)_{L^2} = 0$. □

Huomautus 7.2. Avaruus $L^2(\Omega)$ on separoituva ja siten sillä on numeroituva Hilbertin kanta. Edellisen lauseen nojalla ominaisarvoja on näin ollen korkeintaan numeroituvasti. Koska lauseen 6.24 mukaan spektri on suljettu, voimme järjestää ominaisarvot aidosti kasvavaan jonoon $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.

Lemma 7.3. *Olkoot $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ n pienintä ominaisarvoa, $u_1, ..., u_n$ näitä vastaavat ominaisfunktiot ja $V = \operatorname{span}\{u_1, ..., u_n\}$. Tällöin on olemassa funktio $u \in H_0^1(\Omega)$, joka minimoi Rayleighin osamäärää joukon V ortogonaalikomplementissa, ts. pätee*

$$J(u) = \inf_{v \in V^\perp \setminus \{0\}} J(v). \tag{7.4}$$

Tämä funktio on ominaisfunktio, ja sitä vastaava ominaisarvo $\lambda = J(u)$ on pienin ominaisarvo λ_n:n jälkeen, ts. $\lambda = \lambda_{n+1}$.

Todistus. Ortogonaalikomplementti $V^\perp$ on Hilbertin avaruuden $H_0^1(\Omega)$ suljettu aliavaruus, ja siis erityisesti Banachin avaruus. Siten ehdon (7.4) mukaisen funktion u olemassaolo seuraa samasta päättelystä kuin lause 6.10, kunhan kyseisessä todistuksessa esiintyvä avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ korvataan avaruudella $V^\perp$.

Osoittaaksemme, että u on ominaisfunktio, olkoon $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ kiinnitetty. Koska H_0^1 on avaruuksien V ja $V^\perp$ suora summa, funktiolla η on esitys

$$\eta = v + w,$$

missä $v \in V$ ja $w \in V^\perp$. Koska $u \in V^\perp$, funktio v häviää yhtälössä (7.1). Siten riittää osoittaa, että

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \lambda \int_\Omega uw \, dx \tag{7.5}$$

jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$. Jatkamme nyt samaan tapaan kuin lauseen 6.8 todistuksessa. Määrittelemme apufunktion

$$i(\epsilon) := J(u + \epsilon w) = \frac{\int_\Omega (\nabla u + \epsilon \nabla w)^2 \, dx}{\int_\Omega (u + \epsilon w)^2 \, dx},$$

missä $\epsilon > 0$ on niin pieni, että jakaja ei häviä. Koska $u + \epsilon w \in V^\perp$, ja u minimoi Rayleighin osamäärää joukossa $V^\perp$, saavuttaa funktio i lokaalin minimin pisteessä $\epsilon = 0$, ja siten $i'(\epsilon) = 0$. Laskemalla auki i:n derivaatan lauseke kuten lauseen 6.10 todistuksessa, päädymme sijoituksen $\epsilon = 0$ jälkeen yhtälöön

$$\int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx \int_\Omega uw \, dx - \int_\Omega \nabla u \nabla w \, dx \int_\Omega u^2 \, dx = 0,$$

mistä ehto (7.5) seuraa ominaisarvolla $\lambda = J(u)$.

Ominaisarvo λ on todellakin λ_n:stä seuraava: jos $\lambda_n < \lambda' \leq \lambda$ on ominaisarvo, on lauseen 6.4 mukaan olemassa ominaisfunktio u' siten, että $\lambda' = J(u')$. Lauseen 7.1 nojalla on oltava $u' \in V^\perp$. Siten ehdosta (7.4) seuraa, että $\lambda' = \lambda$. □

Lause 7.4. *Lineaaritilanteessa $p = 2$ spektri on numeroituvasti ääretön ja ominaisarvot ovat muotoa*

$$\lambda_n = J(u_n) = \min_{v \in V^\perp \setminus \{0\}} J(v), \tag{7.6}$$

missä $V = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Ominaisarvoa λ_n vastaavan ominaisfunktion u_n karakterisoi ehto (7.6).

Todistus. Ensimmäisen ominaisarvon olemassaolo on todettu jo lauseessa 6.11. Väite seuraa tällöin induktiivisesti lemmasta 7.3. □

Lause 7.5. *Spektri on rajoittamaton, ts.* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Todistus. Ominaisarvojen jono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ on aidosti kasvava, joten joko väitteen ehto pätee tai kyseinen jono suppenee kohti jotakin lukua λ. Jälkimmäinen ei kuitenkaan tule kysymykseen, sillä spektri on lauseen 6.24 nojalla suljettu. □

Lause 7.6. *Ehdolla* $\|u_n\|_{H_0^1} = 1$ *normitetut ominaisfunktiot muodostavat avaruuden* H_0^1 *Hilbertin kannan.*

Todistus. Olkoon $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots\}$, missä u_n on ominaisarvoa λ_n vastaava normitettu ominaisfunktio. Väitteeseen riittää osoittaa, että $U^\perp = \{0\}$, joten tehdään antiteesi: on olemassa $u \in U^\perp \setminus \{0\}$. Koska spektri on rajoittamaton, on olemassa ominaisarvo λ_n siten, että $J(u) < \lambda_n$. Lauseen 6.4 nojalla tämä ominaisarvo on ominaisfunktion u_n Rayleighin osamäärä, joten pätee $J(u) < J(u_n)$. Lauseen 7.4 mukaan u_n toteuttaa ehdon

$$J(u_n) = \min_{v \in V^\perp \setminus \{0\}} J(v),$$

missä $V = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$. Funktion u valinnan nojalla pätee erityisesti $u \in V^\perp$ ja siten yllä olevasta yhdessä tiedon $J(u) < J(u_n)$ kanssa seuraa, että $u = 0$, mikä on mahdotonta. □

8 Liite: Sobolevin kapasiteetti ja p-ohuus

Ominaisfunktioiden reunakäyttäytymisen yhteydessä tarvitsemme p-ohuuden käsitettä. Ominaisfunktio nimittäin käyttäytyy säännöllisesti joukon Ω reunapisteessä, jos $\complement\Omega$ ei ole siinä p-ohut. Toisaalta jokainen rajoitettu alue voidaan tyhjentää alueilla, joiden komplementti ei ole missään p-ohut, eli alueilla, joiden reunalla ominaisfunktio käyttäytyy hyvin. Tämä tieto on oleellisessa osassa lauseen 6.29 todistuksessa ja siksi esitämme p-ohuuden ja Sobolevin kapasiteetin käsitteet, sekä todistamme kyseisen väitteen. Tämän kappaleen pääasiallisena lähteenä on teos [12], mutta lisää kapasiteetista voi lukea myös kirjasta [21].

Määritelmä 8.1 (Sobolevin kapasiteetti)**.** Joukon $E \subset \mathbb{R}^N$ *Sobolevin p-kapasiteetiksi* kutsumme arvoa

$$C_p(E) = \inf_{u \in S(E)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx,$$

missä

$$S(E) = \left\{u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) : E \subset \operatorname{int}\{u = 1\}\right\}.$$

Määritelmä 8.2 (p-ohuus)**.** Sanomme, että joukko $E \subset \mathbb{R}^N$ on *p-ohut* pisteessä $x_0 \in E$, jos

$$\int_0^1 \left(\frac{C_p(E \cap B(x,t))}{t^{N-p}} \right)^{1/(p-1)} \frac{dt}{t} < \infty.$$

Lemma 8.3. *Kompaktille $K \subset \mathbb{R}^N$ pätee*

$$C_p(K) = \inf_{S_0(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx,$$

missä

$$S_0(K) = S(E) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Todistus. Olkoon $u \in S(K)$ annettuna ja $U := \operatorname{int}\{u = 1\}$. Tällöin on olemassa jono $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, siten, että $u_n \to u$ avaruudessa $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Koska K on kompakti, voimme valita funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ siten, että $\psi \equiv 1$ joukossa $\complement U$ ja $\psi \equiv 0$ jossakin joukon K avoimessa ympäristössä. Tällöin $\psi_n := 1 - (1 - u_n)\psi \in S_0(K)$ ja on helppo tarkistaa, että $\psi_n \to u$ avaruudessa $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Lemma 8.4. *On olemassa $C = (N,p)$ siten, että*

$$C_p(\overline{B}(x,r)) \geq \begin{cases} Cr^{N-p}, & \text{kun } p < N \\ C\left(\log \frac{1}{r}\right)^{1-N}, & \text{kun } p = N \end{cases}$$

kaikilla $r \leq 1$.

Todistus. Voimme olettaa, että $x = 0$. Lemma 8.3 mielessä, olkoon $u \in S(\overline{B}(0,r)) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mielivaltainen. Valitsemme leikkausfunktion $\eta \in C_c^\infty(B(0,2))$ siten, että

$$0 \leq \eta \leq 1, \eta \equiv 1 \text{ joukossa } \overline{B}(0,1) \text{ ja } |\nabla \eta| \leq 3.$$

Merkitsemme $v := \eta u$. Tällöin epäyhtälön 2.7 nojalla

$$\begin{aligned} \int_{B(0,2)} |\nabla v|^p \, dx \leq & C \int_{B(0,2)} |u|^p |\nabla \eta|^p + |\eta|^p |\nabla u|^p \, dx \qquad (8.1) \\ \leq & 3^p C \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx. \end{aligned}$$

Toisaalta, jos $y \in \partial B(0,1)$, niin funktion v määritelmän ja Hölderin epäyhtälön nojalla pätee

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_r^2 \left| \frac{d}{dt} v(ty) \right| dt \leq \int_r^2 t^{\frac{1-N}{p}} t^{\frac{N-1}{p}} \left| \nabla v(ty) \right| dt \\ &\leq \left(\int_r^2 t^{\frac{1-N}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_r^2 t^{N-1} \left| \nabla v(ty) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Kun korotamme edellisen epäyhtälön puolittain potenssiin p, laskemme auki termin $\left(\int_r^2 t^{\frac{1-N}{p-1}} dt \right)^{p-1}$ sekä jaamme sen vasemmalle puolelle, päädymme arvioon

$$CA \leq \int_r^2 t^{N-1} \left| \nabla v(ty) \right|^p dt, \tag{8.2}$$

missä $C = C(N,p)$ ja

$$A = \begin{cases} r^{N-p}, & p < N \\ \left(\log \frac{1}{r} \right)^{1-N}, & p = N \end{cases}.$$

Integroimalla yhtälö 8.2 muuttujan y suhteen yli joukon $\partial B(0,1)$, saamme

$$\omega_{N-1} CA \leq \int_{\partial B(0,1)} \int_r^2 t^{N-1} \left| \nabla v(ty) \right|^p dt\, dy = \int_{B(0,2)} \left| \nabla v \right|^p dx,$$

mikä yhdessä arvion (8.1) kanssa todistaa väitteen. □

Seuraavassa esittelemme konkreettisen ehdon jonka avulla voi päätellä, että joukko ei ole p-ohut jossakin pisteessä.

Määritelmä 8.5 (korkkiruuviehto)**.** Sanomme, että joukko $E \subset \mathbb{R}^N$ toteuttaa *korkkiruuviehdon* (engl. corkscrew condition) *pisteessä* $x \in \partial E$, jos on olemassa $c \geq 1$ ja $r_0 > 0$ siten, että jokaiselle $0 < r < r_0$ löytyy y, jolle $B(y, r/c) \subset E \cap B(x,r)$. Mikäli tämä ehto pätee kaikille $x \in \partial E$, niin sanomme, että E *toteuttaa korkkiruuviehdon.*

Huomaa, että korkkiruuviehdon toteuttavassa alueessa ei voi olla jyrkästi kapenevia piikkejä. Korkkiruuviehtoa hieman vahvempi ehto on ns. *kartioehto* (engl. cone condition): on helppo todeta, että mikäli joukon $E \subset \mathbb{R}^N$ sisälle voidaan piirtää kartio siten, että sen kärki on pisteessä $x \in \partial E$, niin tällöin E toteuttaa korkkiruuviehdon pisteessä x.

Lause 8.6. *Jos $\complement\Omega$ toteuttaa korkkiruuviehdon pisteessä $x \in \partial\Omega$, niin se ei ole p-ohut tässä pisteessä.*

Todistus. Korkkiruuviehdon nojalla on $c \geq 1$ ja $0 < r_0 < 1$ siten, että jokaiselle $0 < r < r_0$ on olemassa y, jolle $\overline{B}(y, r/c) \subset \complement\Omega \cap B(x, r)$. Tällöin lemman 8.4 nojalla

$$C_p(\complement\Omega \cap B(x,r)) \geq C_p(\overline{B}(y,r/c)) \geq \begin{cases} C r^{N-p}, & \text{kun } p < N \\ C\left(\log \frac{1}{r}\right)^{1-N}, & \text{kun } p = N \end{cases},$$

missä C riippuu vain vakioista c, N ja p. Siis

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{C_p(\complement\Omega \cap B(x,t))}{t^{N-p}}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} &\geq \begin{cases} C\int_0^{r_0} \frac{1}{t}\, dt, & \text{kun } p < N \\ C\int_0^{r_0} \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}\, dt, & \text{kun } p = N \end{cases} \\ &\geq C \int_0^{r_0} \frac{dt}{t \log \frac{1}{t}} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

eli $\complement\Omega$ ei ole p-ohut pisteessä x. □

Lause 8.7. *Jos Ω on rajoitettu alue, niin on olemassa alueet $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \cdots$ siten, että $\cup\Omega_i = \Omega$ ja $\complement\Omega_i$ ei ole missään pisteessään p-ohut.*

Todistus. Olkoot $E_i = \left\{x \in \Omega : \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\right\}$. Koska $\text{dist}\,(E_i, \complement E_{i+1}) > 0$, on kompaktille joukolle $\overline{E_i}$ olemassa sellainen avoimista kuutioista koostuva äärellinen peite $\mathcal{Q}_i$, että $Q \Subset E_{i+1}$ kaikilla $Q \in \mathcal{Q}_i$. Määrittelemme $\Omega_i = \cup_{Q \in \mathcal{Q}_i} Q$, jolloin joukot Ω_i ainakin muodostavat Ω:n tyhjennyksen. Toisaalta, koska Ω_i on kuutioiden äärellinen yhdiste, on geometrisesti ilmeistä, että $\complement\Omega_i$ toteuttaa edellä mainitsemamme kartioehdon ja siten myös korkkiruuviehdon. Näin se ei lauseen 8.6 nojalla ole p-ohut. □

Viitteet

[1] R. Adams and J. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.

[2] M. Belloni and B. Kawohl. A direct uniqueness proof for equations involving the p-laplace operator. *manuscripta mathematica*, 109(2):229–231, 2002.

[3] R. Benguria, H. Brezis, and E.H. Lieb. The Thomas-Fermi-von Weizsäcker theory of atoms and molecules. *Comm. Math. Phys.*, 79:167–180, 1981.

[4] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, November 2010.

[5] T. Cazenave, D. Fang, and Z. Han. Continuous dependence for NLS in fractional order spaces. *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, 28(1):135 – 147, 2011.

[6] E. DiBenedetto. *Real Analysis.* Birkhäuser Basel, 2002.

[7] L. Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1997.

[8] J.P. García Azorero and I. Peral Alonso. Existence and nonuniqueness for the p-laplacian. *Communications in Partial Differential Equations*, 12(12):126–202, 1987.

[9] R. Gariepy and W. P. Ziemer. A regularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 67(1):25–39, 1977.

[10] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 1977.

[11] H. Hance-Olsen and H. Holden. The kolmogorov-riesz compactness theorem. *Expositiones Mathematicae*, 28:385–394, 2010.

[12] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio. *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations.* Oxford University Press Inc, New York, 1993.

[13] L. Kahanpää. *Funktionaalianalyysi, Suoraviivaista ajattelua, Osa II.* Jyväskylän Yliopisto, 2006.

[14] B. Kawohl. Symmetry results for functions yielding best constants in Sobolev-type inequalities. *Discrete and Cont. Dyn. Systems*, 6:683–690, 2000.

[15] B. Kawohl and P. Lindqvist. Positive eigenfunctions for the p-laplace operator revisited. *Analysis*, 26(4), January 2007.

[16] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* Academic Press, New York, 1968.

[17] P. Lindqvist. On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda\,|u|^{p-2}\,u = 0$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 109:157–164, 1990.

[18] P. Lindqvist. *A Nonlinear Eigenvalue Problem.* Minicorsi di Analisi Matematica, Padova, 2000.

[19] P. Lindqvist. *Notes on the p-Laplace equation*, volume 102. University of Jyväskylä, Department of Mathematics and Statistics, 2006.

[20] J. Malý. Pointwise estimates of nonnegative subsolutions of quasilinear elliptic equations at irregular boundary points. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 37(1):23–42, 1996.

[21] J. Maly and W. P. Ziemer. *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 1997.

[22] M. Nica. Eigenvalues and eigenfunctions of the laplacian. *The Waterloo Mathematics Review*, 1(2):23–34, 2011.

[23] M. Ôtani and T. Teshima. On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 64(1):8–10, 1988.

[24] N. Trudinger. On harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(4):721–747, 1967.

[25] J. Väisälä. *Topologia II.* Limes ry, 2005.

[26] N. Wiener. The dirichlet problem. *J. Math. Phys.*, 3:127–146, 1924.