

# Pyörimisliikkeen käsittely lukion oppikirjoissa

*LuK-tutkielma, 30.6.2014*

*Tekijä:*

PAULI HYTÖLÄ

*Ohjaaja:*

JUHA MERIKOSKI



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO  
FYSIKAN LAITOS

# Tiivistelmä

Hytölä, Pauli

Pyörimisliikkeen käsittely lukion oppikirjoissa

LuK-tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2014, 36 sivua

Tässä tutkielmassa käydään läpi lukion fysiikan FY5-kurssin (pyöriminen ja gravitaatio) neljän eri oppikirjan pyörimisliikettä käsittelevät osiot. Oppikirjoja vertaillaan aiheiden käsittelyjärjestyksen ja korostusten sekä aiheisiin johdattelun yhtenevyyksien ja eroavaisuuksien suhteen. Tutkielman toisessa osiossa tarkastellaan tutkimuksissa havaittuja, pyörimisliikkeeseen liittyviä harhakäsityksiä. Tutkimusten perusteella nämä yleisimmät harhakäsitykset liittyvät pyörimismäärään suoraviivaisessa liikkeessä ja törmäyksissä sekä kitkavoiman luonteeseen ja vaikutuksiin vierimisessä. Lopuksi tarkastellaan oppikirjoja uudelleen sen perusteella, miten niissä käsitellään näihin harhakäsityksiin liittyviä aiheita. Havaitaan, että keskimäärin niitä käsitellään selvästi muita aiheita vähemmän.

Avainsanat: Pyörimisliike, mekaniikka, harhakäsitykset, oppikirjat, lukio

# Abstract

Hytölä, Pauli

Rotational motion in upper secondary school textbooks

Bachelor's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2014, 36 pages

In this thesis, the rotational motion concepts in four Finnish upper secondary school physics textbooks are being studied. These textbooks are compared by the congruences and differences of the order of handling, highlighting, and introduction of concepts. In the second part of the thesis we view misconceptions pertaining to the rotational motion found in studies. On the basis of studies, the most common misconceptions are about the angular momentum in rectilinear motion and collisions and the nature and effects of frictional force on rolling motion. Lastly we survey how these misconceptions are considered in textbooks. The observation that on the average these concepts are being handled much less than other rotational motion concepts is obtained.

Keywords: Rotational motion, mechanics, misconceptions, textbooks, upper secondary school

# Sisältö

<b>Tiivistelmä</b>	<b>2</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Sisältö</b>	<b>4</b>
<b>1 Johdanto</b>	<b>5</b>
<b>2 Lukion opetussuunnitelman perusteista</b>	<b>6</b>
<b>3 Pyörimisliikkeen suureiden käsittely eri oppikirjoissa</b>	<b>8</b>
3.1 Kiertokulma . . . . .	9
3.2 Pyörimisnopeus . . . . .	10
3.3 Kulmanopeus . . . . .	11
3.4 Kulmakiihtyvyys . . . . .	13
3.5 Hitausmomentti . . . . .	15
3.6 Pyörimisen liikeyhtälö . . . . .	17
3.7 Pyörimismäärä . . . . .	17
3.8 Pyörimisenergia . . . . .	19
3.9 Vieriminen . . . . .	20
<b>4 Oppilaiden harhakäsitykset ja oppikirjojen ratkaisut niihin</b>	<b>23</b>
4.1 Tutkimuksissa ilmenneitä harhakäsityksiä . . . . .	24
4.2 Miten harhakäsitykset on otettu huomioon oppikirjoissa? . . .	30
<b>5 Johtopäätökset</b>	<b>33</b>
<b>Viitteet</b>	<b>36</b>

# 1 Johdanto

Suomen lukioiden fysiikan opetuksessa mekaniikka on jaettu kahteen kurssiin: FY4 (liikkeen lait) ja FY5 (pyöriminen ja gravitaatio). Näistä jälkimmäinen pitää nimensä mukaisesti sisällään pyörimisliikkeen mekaniikan. Kursilla FY4 rakennettuja suoraviivaisen liikkeen malleja ja laskennallisia taitoja syvennetään pyörimisliikkeen kuvaamiseen kurssilla FY5.

Pyörimisliikkeestä mekaniikassa mielenkiintoisen tekee juuri se, että aiemmin opittujen mekaniikan mallien soveltaminen siihen on etenemis- ja pyörimisliikkeen samankaltaisuuksien ansiosta helppoa. Nämä analogiat tuovat omat helpotuksensa, mutta myös haasteensa mekaniikan taitojen syventämiseen. Epätäydelliset ja vajavaiset tiedot pyörimisliikkeestä yhdistettynä aiempaan mekaniikan tuntemukseen luovat hedelmällisen pohjan lukuisille harhakäsityksille, kun havaintoja selitetään sokeasti vain niiden avulla. Usein havainnot tukevat virheellisiä selityksiä ja harhakäsityksiä, koska ns. ideaalisten systeemien kokeellinen havainnointi on mahdotonta luokkahuoneympäristössä.

Motivaationa tälle tutkielmalle toimi halu tarkastella pyörimisliikkeen mallien ja lakien käsittelyä lukion oppikirjoissa sekä kartoittaa tutkimuksissa havaittuja yleisimpiä harhakäsityksiä pyörimisliikkeeseen liittyen. Samalla tarjoutui oiva mahdollisuus tutkia, ottavatko oppikirjat kantaa näihin harhakäsityksiin. Lisämotivaationa toimi mahdollisuus laajentaa tutkimusta myöhemmin samasta aiheesta Pro Gradu -tutkielmaan.

Tutkielma koottiin käymällä läpi neljän eri lukiofysiikan oppikirjasarjan FY5-kurssin oppikirjan pyörimisliikettä käsittelevät osuudet sekä etsimällä tutkimusjulkaisuja, jotka liittyvät pyörimisliikkeessä ilmenneisiin vaikeuksiin ja harhakäsityksiin. Oppikirjoista tehtiin jokaisen pyörimisliikkeen suureen tai aiheen osalta tiivis koonti, jossa tarkastellaan, miten mikäkin oppikirja niitä käsittelee. Tutkimuksista poimittiin yleisimmät ja toistuvimmat harhakäsitykset ja lopuksi tutkittiin, miten eri oppikirjoissa tartutaan harhakäsityksiä tuottaviin aiheisiin.

## 2 Lukion opetussuunnitelman perusteista

Velvoittavat määräykset nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen fysiikan opetuksen perusteista on Suomessa antanut Opetushallitus. Vuonna 2003 annetut lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet ovat olleet voimassa syyslukukaudesta 2005 alkaen [1]. Niissä annetaan suuntalinjat, joiden mukaan koulutuksen järjestäjät (lukiot) laativat omat, yksityiskohtaisemmat opetussuunnitelmansa.

Lienee selvää, että tietyn oppikirjan tai -kirjasarjan valitseminen lukion opetusvälineeksi vaatii sen, että se mukailee sekä Opetushallituksen säädöksiä että koulukohtaisia painotuksia. Tämän vuoksi oppikirjojen tekijöiden tulee olla selvillä ainakin opetussuunnitelman perusteista.

Kuten sanottu, lukion opetussuunnitelman perusteet antavat vain suuntalinjoja koulutuksen järjestämiselle ja näin ollen myös oppikirjoille. Lukion fysiikan viidennen kurssin pyörimisliikkeeseen liittyvistä tavoitteista ja keskeisistä sisällöistä Opetushallitus on päättänyt seuraavasti [1]:

”TAVOITTEET:

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- syventää osaamistaan mekaniikassa sekä statiikkaan ja pyörimiseen liittyvien ilmiöiden laskennallista hallintaa
- syventää tuntemustaan mekaniikan maailmankuvasta.

KESKEISET SISÄLLÖT:

- momentti ja tasapaino pyörimisen suhteen
- pyörimisliikkeen mallit, tasainen ja tasaisesti kiihtyvä pyörimisliike
- pyörimisen liikeyhtälö
- pyörimismäärän säilyminen
- pyörimisliikkeen energia
- \_”

Yleisesti lukion fysiikan opetuksen tavoitteista todetaan mm. näin [1]:

”Opiskelija oppii tarkastelemaan luonnon rakenteita ja ilmiöitä omien aikaisempien tietojensa ja käsitystensä valossa. Hän oppii tiedostamaan ja kyseenalaistamaan ennakkokäsityksiään ja tarkentamaan maailmankuvaansa hankkimansa uuden tiedon perusteella.”

Osittain tämän vuoksi tässä tutkielmassa käsitellään oppikirjojen lisäksi myös tutkimusaineistoa, joka perustuu lukiotason ja sitä vanhempien opiskelijoiden ennakko- ja harhakäsityksiin pyörimisliikkeeseen liittyvissä ongelmissa.

### 3 Pyörimisliikkeen suureiden käsittely eri oppikirjoissa

Tässä luvussa vertaillaan lukiofysiikan viidennen kurssin oppikirjojen tapoja käsitellä pyörimisliikkeen keskeisimpiä käsitteitä ja suureita. Tarkasteluun on valittu neljän suomalaisen oppikirjasarjan edustajat:

- Lehto, Havukainen, Maalampi, Leskinen, *Fysiikka 5* [2]
- Hatakka, Saari, Sirviö, Viiri, Yrjänäinen, *Physica 5* [3]
- Hämeri, Jokinen, Ketolainen, Sallinen, Sloan, *Empiria 5* [4]
- Eskola, Ketolainen, Stenman, *Fotoni 5* [5]

Oppikirjojen vertailuissa ei pyritä asettamaan yksittäisiä kirjoja paremmuusjärjestykseen; järjestys on lukio- ja henkilökohtaisten mielipiteiden ja painotusten perusteella tehtävä asia. Tätä lukua ei ole tarkoitettu referaatiksi edellä mainituista oppikirjoista, sillä läheskään koko kurssin FY5 aiheita ei käsitellä tutkielmassa. Luvun tavoitteena ei myöskään ole ottaa pedagogista kantaa kirjasarjojen edustajien sisältöön. Vertailu tehdään puhtaasti fysiikan kannalta pitäen kuitenkin taustalla selkeänä Opetushallituksen velvoitteet (Luku 2). Luvussa pyritään kuvaamaan objektiivisesti eri kirjoissa ilmeneviä suurimpia eroavaisuuksia aiheiden käsittelyn ja ilmaisutavan suhteen.

Eri aiheiden käsittelyn vertailu toteutetaan tässä siten, että jokaisen aihealueen alussa esitellään kaikkien kirjasarjojen edustajien suurin piirtein yhteinen osuus aiheesta ja sen jälkeen pureudutaan tarkemmin suurimpiin eroavaisuuksiin. Suurimpina tekijöinä tässä pidetään asioiden käsittelyjärjestystä, johdattelua aiheeseen sekä tekstin tukena olevien korostusten ja kuvioiden sisältöä. Itse leipätekstien eroavaisuuksiin ei keskitytä, ellei erikseen jotain huomautettavaa löydy.

Tästä eteenpäin termillä **korostettu pohja** tarkoitetaan oppikirjan sivuilla selkeästi rajattua, väriltään muusta sivusta eroavaa laatikkoa, jonka tavoitteena on korostaa sisältöään lukijalle. Termillä **johdettu tekstissä** tarkoitetaan sitä, että kyseinen aihe tai suure on *välivaiheineen* johdettu aiemmin (myös aiemmilla fysiikan kursseilla) opituista suureista. Termillä **selitetty tekstissä** puolestaan viitataan siihen, että kyseisen aiheen käsittely löytyy kokonaan leipätekstistä.



### 3.1 Kiertokulma

Kiertokulman käsitteeseen päästään jokaisessa kirjasarjassa tarkastelemalla jotain jäykkää kappaletta (ympyrälevy, polkupyörän vanne tai kiertyvä sauva), joka pyörii tietyn kiinteän akselin ympäri. Esimerkkitapauksen yhteydessä on selitetty tekstissä, että jokainen kappaleen piste kiertyy yhtä suuren kulman. Kiertokulman määritelmä on kaikissa kirjoissa esitetty korostetulla pohjalla, jossa on vähintään kaava

$$\varphi = \frac{s}{r}, \quad (1)$$

missä kirjasarjasta riippuen  $s$  on ”kaaren pituus” tai ”kappaleen jonkin pisteen kulkeman kaaren pituus” ja  $r$  on ”säde” tai ”pisteen rataympyrän säde”. Lisäksi jokaisessa kirjassa yhtälön (1) yhteydessä on kuva, johon nämä suureet on merkitty.

Kiertokulman lisäksi kaikki kirjasarjat selittävät teksteissään **kiertymän** kiertokulman muutokseksi  $\Delta\varphi$ . Termien suhteen ero muihin kirjoihin on *Empiria 5*:ssä, jossa kiertokulma tarkoittaa kiertymää ja kulma tarkoittaa kiertokulmaa.

Kiertymän merkkisopimus on kaikissa kirjasarjoissa sama: positiivinen kiertosuunta on sovittu vastapäivään. *Fotoni 5*:ssä tämä seikka on jätetty hyvin vähälle huomiolle; se käy ilmi vain pienenä yksityiskohtana kiertokulmaa selittävässä kuvassa. Muissa kirjoissa merkkisopimus on selitetty tekstissä ja lisäksi kuvan tai kuvien avulla.

Korostettujen pohjien sisällöissä on kirjakohtaisia eroja: *Fysiikka 5* ja *Physica 5* selittävät suureet  $s$  ja  $r$  yhtälön (1) kanssa samalla pohjalla ja jälkimmäisessä kirjassa myös kuvio on asetettu samalle pohjalle. *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä korostetulla pohjalla on pelkkä yhtälö.

Käsittelyjärjestyksen suhteen *Fysiikka 5* eroaa muista kirjoista siten, että siinä pyörimisnopeus (luku 3.2) käsitellään ennen kiertokulmaa. *Empiria 5*:ssä käsitellään ennen kiertokulmaa pyörimisen mallit, mutta kiertokulma on kirjan ensimmäinen varsinainen suure.

#### Radiaanit

Kaikki kirjat käyvät perusteellisesti läpi radiaanin käsitteen välittömästi kiertokulman jälkeen. Jokaisessa kirjassa radiaanin määritelmä on selitetty tekstissä yksikkötarkastelun yhteydessä. Myös se, että radiaani on varsinaisesti

dimensioton yksikkö, on mainittu kaikissa kirjoissa.

Radiaanien ja asteiden yhteys täyden kulman avulla, asteiden muuttaminen radiaaneiksi sekä radiaanien muuttaminen asteiksi on *Fysiikka 5*:ssä, *Physica 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä sijoitettu korostetulle pohjalle. *Empiria 5*:ssä nämä on johdettu ja selitetty tekstissä sekä kolmessa esimerkissä.

## 3.2 Pyörimisnopeus

Pyörimisnopeudesta käytetään *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä nimitystä **kierrostaajuus**. *Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä molemmat vaihtoehdot on myös mainittu tekstissä. Itse suure on näissä kahdessa kirjassa selitetty tekstissä, kun taas *Empiria 5* ja *Fotoni 5* johdattelevat suureeseen sen yksikön kautta. Pyörimisnopeuden (tai kierrostaajuuden) määritelmä on kaikissa kirjoissa likimain sama. *Fysiikka 5*:ssä, *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä löytyy korostetulta pohjalta ainakin seuraavanlainen määritelmä:

$$n = \frac{\text{kierrosten lukumäärä}}{\text{kulunut aika}} = \frac{1}{T}, \quad (2)$$

missä  $T$  on yhteen kierrokseen kulunut aika. *Physica 5*:ssä korostettu pohja on sisällöltään hieman erilainen, mutta määritelmä on kuitenkin aivan sama:

$$n = \frac{N}{\Delta t}, \quad (3)$$

missä " $N$  on kierrosten lukumäärä" ja " $\Delta t$  on pyörimiseen käytetty aika". *Physica 5*:n määritelmä on näin ollen astetta matemaattisempi. Lisäksi *Physica 5*:ssä on johdettu tekstissä yhden kierrosajan avulla laskettava  $n = \frac{1}{T}$ .

Korostetuissa pohjissa *Fotoni 5*:ssä on vain yhtälö (2). Muissa kirjoissa korostettuun pohjaan on asetettu oman yhtälöversionsa lisäksi myös selitykset siitä, mitä suureita kirjaintunnukset tarkoittavat.

Pyörimisnopeuden perusyksikkö  $1 \frac{1}{s}$  on kaikissa kirjoissa selitetty tekstissä. Näiden lisäksi löytyy vaihtoehdot: *Fysiikka 5*:ssä " $1 \frac{r}{s}$ " ja " $1 \frac{r}{\text{min}} = 1 \text{ rpm}$ ", *Physica 5*:ssä " $1/\text{min} = \text{RPM}$ " sekä *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä " $1/s$  (rps)" ja " $1/\text{min}$  (rpm)".

Käsittelyjärjestys on hyvin erilainen kirjojen kesken. *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä pyörimisnopeus käsitellään tasaisen pyörimisliikkeen jälkeen samassa luvussa. *Fysiikka 5*:ssä pyörimisnopeus on ensimmäinen käsiteltävä suure ja

*Physica 5*:ssä se käsitellään ennen kulmanopeuteen siirtymistä, mutta samassa luvussa kulmanopeuden ja -kiihtyvyyden kanssa.

### 3.3 Kulmanopeus

*Empiria 5* ja *Fotoni 5* aloittavat kulmanopeuden käsittelyn  $(t, \varphi)$ -kuvaajien avulla ja johtavat (tasaisen) kulmanopeuden  $(t, \varphi)$ -suorien kulmakertoimesta. *Fysiikka 5* lähtee myös liikkeelle koordinaatistoon piirretyistä suorista, mutta, kuten myös *Physica 5*, korostaa kyseessä olevan keskimääräinen kulmanopeus  $\omega_k$ . *Fysiikka 5* ja *Physica 5* eivät siis käsittele kulmanopeutta yleisenä suurena. *Fysiikka 5* mainitsee yleisen kulmanopeuden ohimennen, käsittelee vain keskimääräisen kulmanopeuden ja siirtyy sen jälkeen tasaiseen kulmanopeuteen jättäen hetkellisen kulmanopeuden myöhemmäksi, kun taas *Physica 5* käsittelee hetkellisen kulmanopeuden yhdessä näiden muiden suureiden kanssa.

*Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä kulmanopeus on korostetulla pohjalla

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad (4)$$

jonka yhteydessä on  $(t, \varphi)$ -kuvaaja (suora), josta nämä suureet käyvät ilmi.

Vaikka kaikki kirjat eivät käsittelekään yleisesti kulmanopeutta samalla tarkkuudella ja samassa järjestyksessä, on kaikissa kulmanopeuden perusyksiköksi ilmoitettu  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Lisäksi *Physica 5*:n ja *Empiria 5*:n teksteissä selitetään, että yksikkö voi olla radiaanin dimensiottomuuden takia myös  $1 \frac{1}{\text{s}}$ .

**Kulmanopeuden ja pyörimisnopeuden yhdistäminen** on johdettu jokaisen oppikirjan tekstissä. Jokaisessa kirjassa on korostettu pohja, jossa on vähintään kaava

$$\omega = 2\pi n. \quad (5)$$

Ainoastaan *Physica 5* korostaa, että tässä  $\omega$  on hetkellinen kulmanopeus ja  $n$  on hetkellinen pyörimisnopeus, mutta tekstissä on selitetty, että sama pätee myös keskisuureille, koska yhtälö (5) on johdettu niistä.

#### Keskikulmanopeus

Keskimääräinen kulmanopeus eli keskikulmanopeus löytyy jokaisesta oppikirjasta. Kaikissa on likimain samanlainen korostettu pohja, jossa määritel-

lään keskikulmanopeus:

$$\omega_k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}. \quad (6)$$

Suureet on *Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä selvyiden vuoksi merkitty kuvioon, joka kuvaa kiertyvää kappaletta ja sen kiertokulmaa. *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä käytetään  $(t, \varphi)$ -kuvaajaa, joka korostaa keskikulmanopeuden graafista määrittämistä. Myös *Physica 5*:stä löytyy vastaavanlainen kuvaaja. Keskikulmanopeudelle on *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä annettu vielä yksi laskutapa, molemmissa korostetulla pohjalla, joka on alku- ja loppukulmanopeuksien ( $\omega_0$  ja  $\omega$ ) keskiarvo:

$$\omega_k = \frac{\omega_0 + \omega}{2} \quad (7)$$

Käsittelyjärjestys vaihtelee vain vähän. *Empiria 5* ja *Fotoni 5* käsittelevät keski- ja hetkellisen kulmanopeuden välittömästi ennen siirtymistä muuttuvaan pyörimisliikkeeseen ja *Physica 5*:ssä näiden välissä on vain pyörimisnopeuden ja kulmanopeuden yhdistäminen. *Fysiikka 5*:ssä keskikulmanopeus kuuluu tasaisen pyörimisliikkeen lukuun.

### Hetkellinen kulmanopeus

Hetkellisen kulmanopeuden määrittäminen tapahtuu kaikissa kirjoissa tekstissä selitettynä graafisesti  $(t, \varphi)$ -kuvaajasta käyrän haluttuun pisteeseen sovitun tangentin kulmakertoimen ja yhtälön (4) avulla. *Physica 5*:ssä on lisäksi korostettu pohja, jossa sama asia kerrotaan uudelleen.

*Fysiikka 5*:ssä hetkellinen kulmanopeus on kokonaan irrotettu muista kulmanopeuksista, sillä se on osa muuttuvaa pyörimisliikettä. Muissa kirjoissa hetkellinen kulmanopeus käsitellään välittömästi keskikulmanopeuden jälkeen.

### Tasainen pyörimisliike

Pyörimisliikkeen erikoistapaus, jossa kulmanopeus on ajallisesti muuttumaton, käsitellään hyvin eri järjestyksessä eri kirjoissa. Eniten samaa on *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä, joissa tasainen pyörimisliike on yhdistetty yleisen kulmanopeuden käsittelyn kanssa. *Fysiikka 5*:ssä tasainen pyörimisliike käsitellään keskikulmanopeuden sekä kulmanopeuden ja pyörimisnopeuden yhdistämisen kanssa samassa luvussa. *Physica 5* puolestaan käy läpi tasaisen pyörimisliikkeen vasta kulmakiikthyvyyden (luku 3.4) jälkeen.

Kaikissa kirjoissa on korostettu pohja, jossa on kiertokulmalle tasaisesti muut-

tuvassa pyörimisliikkeessä vähintään kaava

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (8)$$

missä  $\varphi_0$  on kiertokulma hetkellä  $t = 0$  s ja  $\omega$  on kulmanopeus. *Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä kirjaintunnusten selitykset sijaitsevat yhtälön (8) kanssa samalla korostetulla pohjalla. *Physica 5* on ainoa kirja, jossa yhtälö (8) on johdettu tekstissä. Muut kirjat perustelevat yhtälön  $(t, \varphi)$ -tasossa olevan suoran yhtälön avulla.

### 3.4 Kulmakiihtyvyys

Kulmakiihtyvyyttä käsitellään kaikissa oppikirjoissa hyvin samankaltaisesti kuin kulmanopeutta. *Fysiikka 5* ja *Physica 5* jättävät kulmakiihtyvyyden yleisenä suureena väliin ja käsittelevät sen sijaan keskikulmakiihtyvyyden, hetkellisen kulmakiihtyvyyden ja pyörimisliikkeen, jonka kiihtyvyys on tasaista. *Empiria 5* ja *Fotoni 5* käyttävät samaa käsittelyjärjestystä: ensin käydään läpi kulmanopeuden määritelmä tasaisesti kiihtyvän pyörimisliikkeen avulla, sen jälkeen on vuorossa kulmanopeus samassa tilanteessa, sitten keski- ja hetkellinen kulmakiihtyvyys sekä viimeisenä kiertokulma tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä.

*Empiria 5* ja *Fotoni 5* määrittelevät yleisesti kulmakiihtyvyyden korostetulla pohjalla:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (9)$$

Molemmissa kirjoissa tämän yhteydessä on  $(t, \omega)$ -kuvaaja (suora), johon kulmanopeuden ja ajan muutokset on merkitty havainnollistamaan kaavan käyttöä.

Kaikissa kirjoissa kulmanopeuden yksiköksi on ilmoitettu ainoastaan  $1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ . Tosin *Empiria 5*:een on lipsahtanut virhe yksikön johtamisessa: sen mukaan kulmakiihtyvyyden yksikkö on  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Virheellisen tiedon ohella kuitenkin on mainittu oikea yksikkö ja lisämainintana, että yksikkö voi olla myös muodossa  $1 \frac{1}{\text{s}^2}$ , kuten myös *Physica 5*:ssä.

#### Keskikulmakiihtyvyys

Sekä *Fysiikka 5* että *Physica 5* aloittavat kulmakiihtyvyyden käsittelyn keskimääräisestä kulmakiihtyvyydestä eli keskikulmakiihtyvyydestä. *Empiria*

5:ssä puhutaan ”muuttuvasta pyörimisestä”, jonka jälkeen käsitellään keskimääräinen ja hetkellinen kulmanopeus ja näiden jälkeen keskimääräinen kulmakiihtyvyys. *Fotoni 5*:ssä viitataan ”yleiseen pyörimiseen” ja siinä itse leipätekstiä aiheesta on kaikkein vähiten.

Kaikissa kirjoissa, *Fotoni 5*:ttä lukuunottamatta, keskikulmanopeuden kaava on korostetulla pohjalla seuraava:

$$\alpha_k = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}. \quad (10)$$

Yhtälön lisäksi jokaisessa kirjassa on  $(t, \omega)$ -kuvaaja, johon nämä suureet on merkitty.

### Hetkellinen kulmakiihtyvyys

Jokaisessa oppikirjassa on jokin mielivaltainen  $(t, \omega)$ -kuvaaja, johon on piirretty tangentti sekä merkitty suureet  $\Delta\omega$  ja  $\Delta t$ . *Fysiikka 5* käsittelee hetkelistä kulmakiihtyvyyttä kaikkein vähiten, sillä siinä ei edellämainitun kuvaajan ja kuvatekstin lisäksi ole leipätekstiä, joka selittäisi hetkellisen kulmakiihtyvyyden määrittämistä. Esimerkkitehtävässä kuitenkin näytetään tämä käytännössä. Muissa kirjoissa hetkellisen kulmakiihtyvyyden selvittäminen graafisesti on selitetty myös tekstissä. *Fotoni 5*:ssä puhutaan lisäksi jopa raja-arvosta, kun yhtälössä (9)  $\Delta t$  lähestyy nollaa.

### Tasaisesti kiihtyvä pyörimisliike

Vakiokulmakiihtyvyys on pyörimisliikkeen erikoistapaus, jota käsitellään kaikissa oppikirjoissa hyvin samankaltaisesti. Kulmanopeus tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä on jokaisessa kirjassa korostetulla pohjalla ilmaistu seuraavasti:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad (11)$$

missä  $\omega_0$  on kulmanopeus hetkellä  $t = 0$  s. *Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä yhtälö (11) on johdettu tekstissä. *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä yhtälö on perusteltu geometrisesti  $(t, \omega)$ -tasossa olevan suoran avulla.

Kulmanopeuden jälkeen käsitellään kaikissa kirjoissa kiertokulma tasaisesti kiihtyvässä pyörimisliikkeessä. Jokaisesta kirjasta löytyy korostetulta pohjalta sama kaava, jonka avulla saadaan selville kiertokulma:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (12)$$

missä  $\varphi_0$  on kiertokulma ja  $\omega_0$  on kulmanopeus hetkellä  $t = 0$  s. Yhtälö (12) on kaikissa kirjoissa johdettu geometrisesti  $(t, \omega)$ -tasossa olevan suoran ja

$t$ -akselin väliin jäävän puolisuunnikkaan pinta-alana. Lisäksi kaikissa oppikirjoissa on  $(t, \varphi)$ -kuvaaja, jossa yhtälöä kuvaava paraabelinpuolikas osuu  $\varphi$ -akseliin kohdassa  $\varphi_0$ .

*Physica 5*:ssä yhtälöt (11) ja (12) suureiden selityksineen ovat samalla korostetulla pohjalla. Muissa kirjoissa nämä yhtälöt ovat eri pohjilla, mutta samassa järjestyksessä.

### 3.5 Hitausmomentti

Ennen kuin suoraviivaisen liikkeen suureiden analogioissa voidaan siirtyä etenemisliikettä kuvaavaan luonnonlakiin, on määriteltävä massaa pyörimisliikkeessä vastaava suure. Kaikki oppikirjat käsittelevätkin hitausmomentin välittömästi ennen pyörimisliikkeen liikeyhtälöä (luku 3.6). Tämän tutkielman alueen ulkopuolelle jäävä momentti ( $M$ ) on kaikissa oppikirjoissa käsitelty jo ennen hitausmomenttia.

Lähtökohtaisesti hitausmomentin käsittely eroaa eri oppikirjoissa paljon. *Fysiikka 5* ja *Empiria 5* lähtevät liikkeelle kokeellisilla menetelmillä, joiden tuloksina saadaan  $(\alpha, M)$ -koordinaatistoon suora. Molemmissa kirjoissa selitetään tekstissä, että hitausmomentti on tuon  $(\alpha, M)$ -kuvaajan fysikaalinen kulmakerroin. Myös *Fotoni 5*:ssä tehdään sama tutkimus. Johtopäätöksenä nämä kolme kirjaa esittävät hitausmomentin  $J$  seuraavasti:

$$J = \frac{\Delta M}{\Delta \alpha}. \quad (13)$$

*Physica 5*:ssä, *Fotoni 5*:ssä ja edellisen johdon lisäksi myös *Empiria 5*:ssä hitausmomentti johdetaan tekstissä lähtien liikkeelle pistemäisestä massasta  $m$ , jonka etäisyys  $r$  pyörimisakselista on vakio ja johon kohdistuu ympyräradan tangentin suuntainen vakiovoima. Tässä johdossa käytetään myös ympyräliikkeeseen liittyvää tangenttikiihtyvyyttä. Nämä kolme oppikirjaa päätyvät samaan lopputulokseen, jossa massapisteeseen kohdistuvan voiman momentti on

$$M = mr^2\alpha. \quad (14)$$

*Physica 5*, *Empiria 5* ja *Fotoni 5* näin ollen määrittelevät hitausmomentin pistemäisen massan avulla, eli käyttävät yleisen tapauksen sijaan erikoistapausta:

$$J = mr^2. \quad (15)$$

Yhtälö (13) on *Empiria 5*:ssä ja yhtälö (15) on *Fotoni 5*:ssä korostetulla pohjalla. *Fysiikka 5*:n ja *Physica 5*:n korostetuilla pohjilla kuvataan sanallisesti hitausmomenttia suureena ja sen vaikutusta kappaleen liiketilaan.

*Fysiikka 5* ja *Fotoni 5* eroavat muista kirjoista siten, että niissä hitausmomentille on annettu myös matemaattisempi, yleinen määritelmä, jonka avulla pystyy laskemaan periaatteessa minkä tahansa jäykän kappaleen hitausmomentin. Massapisteistä koostuvan kappaleen hitausmomentti johdetaan tekstissä pyörimisliikkeen energian (luku 3.8) yhteydessä pyörimisliikkeen liikeyhtälön käsittelyn jälkeen. *Fotoni 5*:ssä tämä selitetään tekstissä ja *Fysiikka 5*:ssä on lisäksi korostetulla pohjalla seuraava kaava:

$$J = \sum m_i r_i^2. \quad (16)$$

Hitausmomentin yksikkö  $1 \text{ kgm}^2$  on kaikissa kirjoissa selitetty tekstissä. *Fysiikka 5*:ssä on lisäksi annettu vaihtoehdoksi  $1 \text{ Nms}^2$ .

### Hitausmomentti ja kappaleen muoto

Hitausmomentin riippuvuus kappaleen massasta ja sen jakautumisesta pyörimisakselin ympäri selitetään tekstissä kaikissa kirjoissa. Yksikään oppikirja ei rajoitu tarkastelemaan vain pistemäisen kappaleen hitausmomenttia. Tarkasteltavana on erilaisia, jonkin symmetrian omaavia, homogeenisiä, jäykkiä kappaleita. *Fysiikka 5* ja *Fotoni 5* perustelevat näiden kappaleiden hitausmomentin määrittämisen yhtälöllä (16). *Physica 5*:ssä on korostettu pohja, jossa todetaan kappaleen hitausmomentin olevan saman pyörimisakselin suhteen olevien hitausmomenttien summa. Pyörimisakselin valintaa korostetaankin eniten juuri tässä kirjassa. *Empiria 5*:ssä todetaan vain, että ”tietyissä symmetrisissä tapauksissa matematiikan avulla hitausmomenteille voidaan johtaa lausekkeet.”

*Fysiikka 5*:ssä on kuusi, *Physica 5*:ssä yhdeksän sekä *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä 11 erilaista kappaletta tai systeemiä, joiden hitausmomentit on annettu kuvien kera.

*Fotoni 5* eroaa muista kirjoista siten, että siinä käsitellään myös **Steinerin sääntö**. Se on selitetty tekstissä ja korostetulta pohjalta löytyy yhtälö

$$J = J_0 + mr^2, \quad (17)$$

missä  $J_0$  on hitausmomentti massakeskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen ja  $r$  on tarkasteltavan, samansuuntaisen akselin etäisyys massakeskipisteestä.



### 3.6 Pyörimisen liikeyhtälö

Yhtälö (14) on jo hyvin lähellä pyörimisen liikeyhtälön lopullista muotoa. *Physica 5*:ssä, *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä pyörimisen liikeyhtälö johdetaankin tekstissä sijoittamalla hitausmomentti  $J$  yhtälöstä (15) yhtälöön (14). *Fysiikka 5* ja *Empiria 5* edellisen johdon lisäksi perustelevat liikeyhtälön  $(\alpha, M)$ -tason suoran yhtälönä. Itse pyörimisliikkeen liikeyhtälöstä on kirjojen kesken kahdenlaista versiota. *Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä on korostetulla pohjalla yhtälö

$$\sum M = J\alpha, \quad (18)$$

joka tuo esiin yleisen tilanteen, jossa kappaleeseen vaikuttaa useita momentteja. Lisäksi *Physica 5*:ssä on yhtälön (18) momenttiin ja hitausmomenttiin lisätty alaindeksi A, joka painottaa, että momenttien summaa ja hitausmomenttia on tarkasteltava saman akselin suhteen. *Fysiikka 5*:ssä tätä ei korosteta. *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä vastaava yhtälö on korostetulla pohjalla

$$M = J\alpha, \quad (19)$$

jonka ohessa on  $(\alpha, M)$ -kuvaaja (suora).

Pyörimis- ja etenemisliikkeen liikeyhtälöiden analogiaa käsitellään kaikissa kirjoissa jossain määrin. *Fysiikka 5*:ssä yhtälöä (18) verrataan Newtonin II lakiin ja korostetulla pohjalla verrataan toisiinsa tähän aiheeseen liittyviä pyörimis- ja etenemisliikkeen suureita. *Physica 5*:ssä, *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä pyörimisen liikeyhtälö johdetaan juuri Newtonin II laista tangenttikiihtyvyyden sekä yhtälöiden (14) ja (15) avulla.

### 3.7 Pyörimismäärä

Vaikka pyörimismäärä on jokaisessa kirjassa ansainnut oman lukunsa, ainostaan *Fotoni 5*:ssä se johdetaan perusteellisesti. Muut oppikirjat määrittelevät pyörimismäärän joko liikemäärän analogiana itsestäänselvytenä, jonkin erikoistapauksen kautta tai pyörimismäärän säilymislaista.

*Fysiikka 5* aloittaa pyörimismäärän johtamisen liikemäärän muutoksesta " $F\Delta t = \Delta p = \Delta(mv) = mv_2 - mv_1$ ", jonka jälkeen sovelletaan pyörimisen liikeyhtälöä tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen, jolloin saadaan " $\sum M\Delta t = J\omega_2 - J\omega_1$ ". Tästä vedetään johtopäätös, että pyörimismäärä  $J\omega$  on liikemäärän vastine pyörimisliikkeessä. *Physica 5* ei johda pyörimismäärää erikseen, vaan se

määritellään tekstissä pyörivälle kappaleelle liikemäärää vastaavaksi suureeksi. *Empiria 5* käyttää kokeellista lähestymistapaa, joka enemmänkin osoittaa pyörimismäärän säilymislain kuin määrittelee itse pyörimismäärää. Johdospäätöksenä on, että hitausmomentin ja kulmanopeuden tulo  $J\omega$  on vakio, jota sanotaan pyörimismääräksi. *Fotoni 5*:ssä pyörimismäärän kerrotaan olevan liikemäärää vastaava suure pyörimisliikkeessä, jonka jälkeen pyörimismäärän lauseke määritellään ympyräradalla olevan massapisteen (massa  $m$ , vauhti  $v$  ja ratasäde  $r$ ) avulla: ” $L = mvr = mr^2\omega = J\omega$ .” Toisaalta sitä, että  $J = mr^2$  on tässä vain pistemäisen massan, ei kokonaisen kappaleen, hitausmomentti, ei mainita. Tämän jälkeen sama johdetaan yleiselle jäykälle kappaleelle, joka voidaan ajatella koostuvan massapisteistä. Näin ollen *Fotoni 5*:n pyörimismäärätarkastelu on yleistävämpi kuin muiden.

Johdon eroista huolimatta kaikki kirjat päätyvät samaan lopputulokseen: korostetulla pohjalla on yhtälö

$$L = J\omega. \quad (20)$$

Pyörimismäärän yksikköä ei *Fysiikka 5*:ssä mainita ollenkaan. Muissa kirjoissa se on  $1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$ . *Physica 5*:ssä on lisäksi annettu vaihtoehdoksi  $1 \text{ Nms}$ .

Vain *Fotoni 5*:ssä käsitellään tekstissä voiman impulssiperiaatteen analoginen käsite, **impulssimomenttiperiaate**. *Physica 5*:ssä tämä vain mainitaan etenemis- ja pyörimisliikkeen suureita vertailevassa koontitaulukossa. Impulssimomenttiperiaate käsitellään *Fotoni 5*:ssä pyörimismäärän säilymislain jälkeen ja se on johdettu tekstissä. Korostetulla pohjalla se on seuraavassa muodossaan:

$$\begin{aligned} M\Delta t &= J\alpha\Delta t = J\Delta\omega = \Delta(J\omega) \\ I_M &= \Delta L. \end{aligned} \quad (21)$$

## Pyörimismäärän säilymlaki

Tämä säilymlaki on selitetty ja määritelty eri oppikirjoissa hyvinkin monin eri sanoin. Samankaltaisimmat ovat *Fysiikka 5*:n ja *Physica 5*:n määritelmät. Kummassakin on korostettu pohja, jonka sisältö on likimain ”Jos systeemiin vaikuttava ulkoinen kokonaismomentti on nolla, systeemin pyörimismäärä säilyy.” *Empiria 5*:n korostetulle pohjalle on lipsahtanut virheelistä tietoa: ”Jos kappaleeseen tai systeemiin ei vaikuta ulkoisia *voimia*, sen pyörimismäärä säilyy.” Tekijät lienevät tässä haeskelleet momenttia voiman

tilalle. *Fotoni 5* kuittaa pyörimismäärän säilymislain sanallisesti korostetulla pohjalla: ”Pyörimismäärän säilymislaki: Vapaan systeemin pyörimismäärä säilyy.” Tosin ”vapaata systeemiä” ei ole määritelty tässä yhteydessä Näiden määritelmien lisäksi kaikissa kirjoissa säilymislain sisältö esimerkkeineen selitetään tekstissä.

Myös jompikumpi tai kummatkin seuraavista pyörimismäärän säilymislain määrittelevistä yhtälöistä esiintyvät kaikissa kirjoissa joko korostettuina tai ei:

$$L = J\omega = \text{vakio} \quad (22)$$

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2. \quad (23)$$

### 3.8 Pyörimisenergia

Pyörimisliikkeen energia, eli pyörimisenergia on kaikissa kirjoissa johdettu tekstissä lähtien liikkeelle ympyräradalla olevan massapisteen liike-energiasta  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ . Liike-energian lausekkeeseen sijoitetaan tämän jälkeen ratanopeus  $v = \omega r$  ja termi  $mr^2$  voidaan korvata pistemäisellä hitausmomentilla (15). Sama tehdään myös yleiselle jäykälle kappaleelle, jonka voidaan ajatella koostuvan useasta pistemäisestä massasta. Viimeisessä välivaiheessa sijoitetaan lausekkeeseen hitausmomentti yhtälön (16) mukaisesti. Näin ollen saadaan pyörimisenergialle kaava, joka on  $E$ :n alaindeksiä lukuunottamatta – kaikissa kirjoissa korostetulla pohjalla seuraava:

$$E_r = \frac{1}{2}J\omega^2. \quad (24)$$

Edellä kuvaillun johdon lisäksi *Empiria 5*:ssä pyörimisenergiaa tutkitaan kokeellisesti ja päädytään havaintoon, jonka mukaan pyörimisenergia on verrannollinen kulmanopeuden neliöön. Tämän havainnon jälkeen yhtälö (24) johdetaan tekstissä.

Pyörimisenergian käsittelyjärjestys eroaa aiheessa eniten eri kirjojen osalta. *Fysiikka 5*:ssä pyörimisenergia käsitellään hitausmomentin yhteydessä heti pyörimisen liikeyhtälön jälkeen. *Physica 5*:ssä aiheeseen edetään pyörimismäärän jälkeen uudessa luvussa. *Empiria 5*:ssä pyörimisenergialla on oma lukunsa, mutta hitausmomentin ja sen välissä käsitellään statiikkaa ja tasapainoehjoja. *Fotoni 5*:n käsittelyjärjestys muistuttaa *Fysiikka 5*:n vastaavaa, sillä siinä pyörimisenergia käydään läpi heti pyörimisen liikeyhtälön jälkeen ja

hitausmomentin yhteydessä, kuitenkin ennen hitausmomentin laskennallista määrittystä ja Steinerin sääntöä (luku 3.5).

### Momentin tekemä työ

Pyörimisliikkeessä momentin tekemä työ on *Physica 5*:ssä, *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä johdettu etenemisliikkeen työstä käyttämällä kiertokulmaa apuna: ” $W = F\Delta s = Fr\Delta\varphi = M\Delta\varphi$ .” *Fysiikka 5*:ssä tyydytään toteamaan pyörimis- ja etenemisliikkeen suureiden vastaavuus ja päädytään edellä olevaan tulokseen ilman välivaiheita. Kaikista kirjoista löytyykin likimain samanlainen korostettu pohja, jossa on momentin tekemän työn kaava

$$W = M\Delta\varphi. \quad (25)$$

Myös **pyörimisen työperiaate** on otettu huomioon kaikissa kirjoissa. *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä on johdettu, alkaen tasaisesti kiihtyvän pyörimisliikkeen yhtälöstä (12), jossa pyöriminen lähtee levosta ( $\varphi_0 = 0$  ja  $\omega_0 = 0$ ), energiaperiaate

$$W = M\Delta\varphi = \frac{1}{2}J\omega^2. \quad (26)$$

*Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä keskitytään yleisempään tapaukseen, jossa momentin tekemä työ voidaan laskea pyörimisenergian muutoksena: *Fysiikka 5*:ssä on tekstissä mainittu, että ” $W_r = \Delta E_r$ ”, kun taas *Physica 5*:ssä on kokonaisella korostetulla pohjalla:

$$W = \sum M \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2, \quad (27)$$

missä  $\omega_0$  on kappaleen kulmanopeus alussa ja  $\omega$  kulmanopeus lopussa.

Momentin tekemän työn lisäksi *Empiria 5* ja *Fotoni 5* käsittelevät **momentin tehon**. Tämä käydään kuitenkin läpi vain ohimennen, eikä siihen uhrata tekstiä paria riviä enempää. Momentin teholle löytyy seuraava kaava *Empiria 5*:ssä tekstissä ja *Fotoni 5*:ssä korostetulla pohjalla:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{M\Delta\varphi}{\Delta t} = M\omega. \quad (28)$$

## 3.9 Vieriminen

Pyörimis- ja etenemisliikkeen yhdistäminen on kaikissa kirjoissa viimeinen käsiteltävä pyörimisliikkeen aihealue. Näiden kahden liikkeen riippumatto-

muutta toisistaan käsitellään ja korostetaan selkeästi *Fysiikka 5*:ttä lukuunottamatta kaikissa kirjoissa. Pyörimis- ja etenemisliikkeen riippumattomuuden tarkastelussa painotetaan sitä, että kappaleen liike voidaan aina jakaa massakeskipisteen kautta kulkevan akselin ympäri tapahtuvaksi pyörimiseksi ja massakeskipisteen etenemiseksi. *Physica 5*:ssä, *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä on jokaisessa korostettu pohja, jossa tähdennetään kappaleen liiketilän kuvaamista pyörimis- ja etenemisliikkeen liikeyhtälöillä.

Vierivän kappaleen energia on toinen tärkeä aihe, jota kaikki oppikirjat käsittelevät. Kuten pyörimisen ja etenemisen liikeyhtälöt, myös vastaavat liikeenergiat ovat toisistaan riippumattomia, mikä kaikissa kirjoissa selitetään tekstissä. Samoin kaikista löytyy korostettu pohja, jossa vierivän kappaleen liike-energian kaava – pieniä eroavaisuuksia, mm. alaindeksien suhteen, lukuunottamatta – on seuraava:

$$E_k = E_t + E_r = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2. \quad (29)$$

Toinen vierimisen energiataarkasteluun vahvasti linkittyvä aihe on mekaanisen energian säilyminen. Tämän suhteen *Physica 5* ja *Fotoni 5* jäävät muista kirjoista, sillä niissä energian säilymlakia sovelletaan vain esimerkeissä, eikä käsitellä tekstissä ollenkaan. *Fysiikka 5* ja erityisesti *Empiria 5* käyttävät sivutilaa tähän aiheeseen. Käytännössä molempien kirjojen versiot säilymlaista ovat samat, mutta niiden muotoilu yhtälöksi eroaa hieman sisällöltään. Esitetään tässä vain *Fysiikka 5*:n versio korostetulla pohjalla olevasta laista

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}J\omega_a^2 = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}J\omega_l^2, \quad (30)$$

missä alaindeksi *a* viittaa alkutilaan ja *l* lopputilaan. *Empiria 5* käsittelee kuitenkin energian säilymlakia kaikista laajimmin, sillä siinä on myös selitetty, miten kappaleeseen vaikuttavat voimat, kuten vastusvoimat, ja niiden momentit muuttavat tilannetta. Korostetulla pohjalla on vierivään kappaleeseen vaikuttavien voimien ja momenttien tekemä työ energiaperiaatteen avulla ilmaistuna:

$$W = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}J\omega_l^2 - mgh_a - \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{1}{2}J\omega_a^2. \quad (31)$$

## Kitka ja vierimisvastus

Vierivään kappaleeseen kohdistuvien voimien vaikutuksista kappaleen liiketilään tehdään *Fysiikka 5*:ssä, *Empiria 5*:ssä ja *Fotoni 5*:ssä runsaasti kvalitatiivista analyysiä. Näissä kirjoissa on jokaisessa keskimäärin sivun verran

tekstiä, jossa selitetään kappaleen ja alustan välisen kitkavoiman vaikutusta vierimiseen. *Fysiikka 5*:ssä ja *Empiria 5*:ssä käsitellään tekstissä myös vierimisvastus ja sen vaikutus energian muodonmuutoksiin.

Kitkavoimaa käsittelevät laajimmin *Empiria 5* ja *Fotoni 5*, sillä niissä on tekstissä johdettu matemaattisesti selkeät perusteet kitkavoiman ja -momentin vaikutukselle vierimiseen. *Fysiikka 5*:ssä pitäydytään puhtaasti laadullisessa tarkastelussa. *Physica 5*:ssä ei kitkaa tai vastusvoimia käsitellä ollenkaan.

### Vierimisehto

Kappaleen yleisen liikkeen ja vierimisen toisistaan erottava vierimisehto (tai -ehdot) käsitellään kaikissa kirjoissa. *Fysiikka 5*:ssä ja *Empiria 5*:ssä vierimisehdot käsitellään ennen vierimisen energiataarkastelua. *Physica 5* ja *Fotoni 5* puolestaan käyvät läpi vierimisehdot tämän jälkeen. Vierimisen määritelmälliset edellytykset on selitetty ja osin myös johdettu kaikissa kirjoissa. Kirjasta riippuen korostetulla pohjalla olevat kappaleen vierimisehdot ovat seuraavat:

$$s = \varphi r \quad (32)$$

$$v = \omega r \quad (33)$$

$$a = \alpha r, \quad (34)$$

missä  $s$ ,  $v$  ja  $a$  ovat kappaleen painopisteen liikettä kuvaavia suureita, eivät ratasuureita. Näistä yhtälöistä *Fysiikka 5*:n ja *Fotoni 5*:n korostetuilla pohjilla ovat kaikki. *Physica 5*:n ja *Empiria 5*:n korostetuilla pohjilla ovat yhtälöt (33) ja (34). *Fysiikka 5*:ssä yhtälö (33) on lisäksi erillisellä korostetulla pohjalla.

## 4 Oppilaiden harhakäsitykset ja oppikirjojen ratkaisut niihin

Huolimatta oppikirjojen sisällöistä – tai osittain juuri niiden takia – fysiikan opiskelussa syntyy väistämättä käsityksiä, joiden totuuspohja on hatara tai olematon. Näin käy usein silloin, kun uutena opittava asia on näennäisessä ristiriidassa aiemmin opitun tai omakohtaisten kokemusten ja havaintojen kanssa. Sitkeään juurtuneet harhakäsitykset myös ruokkivat itseään: niiden tueksi voidaan asettaa juuri omista havainnoista tehtyjä johtopäätöksiä sen sijaan, että hyväksyttäisiin vaikeaksi mielletävä, eroava tai täysin vastakkainen käsitys.

Lukiofysiikan kurssi FY5 on suoraa jatkoa mekaniikan kurssille FY4, mikä on harhakäsitysten synnyn kannalta ’kaksiteräinen miekka’. Positiivisena oppimisen kannalta voidaan pitää sitä, että oppilas voi tukeutua uudessa asiassa hyvin vankkaan pohjaan, sillä pyörimisliikkeen ja etenemisliikkeen kuvaamiseen käytettyjen suureiden välillä vallitsee vahva analogia. Toisaalta tämä voi olla myös harhakäsitysten ja ongelmien juuri. Viimeistään siinä vaiheessa, kun nämä kaksi liikkumisen muotoa yhdistetään vierimiseksi, syntyy ongelmia liikeyhtälöiden ja säilymlakien kanssa: mitä luonnonlakia käyttää missäkin vaiheessa?

Tätä tutkielmaa varten etsittiin julkaisuja tutkimuksista, jotka käsittelevät pyörimisliikkeeseen liittyviä harhakäsityksiä fysiikkaa opiskelevien keskuudessa. Yksikään tutkimuksista ei ollut tehty Suomessa, mutta tähän valittujen tutkimusten kohdehenkilöiden koulutustaso vastasi Suomen lukioden tai sitä edistyneempien opiskelijoiden tasoa. Osassa tutkimuksista oli koehenkilöinä ollut myös fysiikan opettajia, mikä tekee virhekäsitysten tarkkailusta entistä tärkeämpää. Aineista alkoi nousta eri tutkimuksissa toistuvia harhakäsityksiä, jotka on helppo ymmärtää, jos on joskus itse kamppailut samankaltaisten ongelmien parissa.

Luvussa 4.1 tarkastellaan tutkimusten perusteella eniten ilmenneitä harhakäsityksiä. Kaikki tutkimukset perustuvat oppilailla teetettyihin kyselyihin tai oppilastöihin. Harhakäsitysten yhteydessä kerrotaan julkaisujen perusteella löydettyjä syitä niiden syntyyn sekä fysikaalisesti oikeiksi korjatut ”vastaukset”.

Jäljempänä, luvussa 4.2, siirretään huomio takaisin luvussa 3 avattuihin oppikirjoihin ja pohditaan, yrittävätkö ne ratkaista näitä harhakäsityksiä, jos

yrittävät, niin kuinka laajasti ja perusteellisesti, vai aiheuttavatko ne pikeminkin syvempiä sudenkuoppia.

## 4.1 Tutkimuksissa ilmenneitä harhakäsityksiä

Tutkielmaa varten valittiin kuusi kappaletta artikkeleita, joissa oppilaiden harhakäsityksiä tutkittiin. Näiden tutkimusten perusteella löydettiin kolme eniten esiintyvää virheellistä käsitystä tai runsaita ongelmia tuottavaa aihetta. Yllättävää (tai ei), kaksi näistä aiheista liittyvät vierimiseen ja kitkaan. Eri tutkimusten antia yhdistellen nämä aiheet ovat:

I Pyörimismäärä suoraviivaisessa liikkeessä ja törmäyksissä

II Kitkavoima vierimisessä: onko sitä?

III Kitkavoiman suunta vierimisessä

Seuraavaksi avataan tarkemmin kaikkien kolmen aiheen sisältöä ja niitä käsitteleviä tutkimuksia. Lisäksi esitetään tutkimusartikkeleissa perustellut oikeat käsittelymallit ja ongelmien ratkaisut, jotta mahdollisille harhakäsityksille ei tässäkin tutkielmassa syntyisi otollista maaperää.

### I Pyörimismäärä suoraviivaisessa liikkeessä ja törmäyksissä

Suoraviivaisessa liikkeessä, jossa kappaleen nopeus on vakio, ei aivan ensimmäisenä tulisi mieleen tarkastella kappaleen liikettä pyörimissuureiden avulla. Jos kappale ei pyöri edes itsensä ympäri, on ulkopuolisen tarkastelijan helppo todeta, että kappaleen ja systeemin pyörimismäärä on nolla.

Tämä on kuitenkin vain erikoistapaus, joka juontaa juurensa tarkastelukoordinaatiston valinnasta. Jos koordinaatiston origo valitaan siten, että se ei sijaitse kappaleen liikeradalla, on tilanne muuttunut täysin. Liikkuvan kappaleen paikkavektori origon suhteen muuttuu tällöin koko ajan pituuden lisäksi suunnaltaan, eli pyörii origon suhteen. Koska paikkavektorin kiertokulma muuttuu ajan suhteen, on sillä kulmanopeus (ei kuitenkaan tasainen) ja siten systeemissä on oltava nollasta eroava pyörimismäärä. Tämä pätee sillä oletuksella, että systeemin hitausmomentti on nollasta eroava, eli että käytännössä kappaleella on massa.

Williamson, Torres-Isea ja Kletzing toteavat tutkimuksessaan [6]:



”Oppilaat törmäävät harvoin tilanteeseen, jossa systeemin kokonaispyörimismäärä on nolosta eroava, vaikka systeemissä ei ole pyöriviä kappaleita. Tämä aiheuttaa vaikeuksia, sillä oppilaat olettavat, että pelkkää translaatioenergiaa omaavan systeemin pyörimismäärä on nolla.”

Tässä tutkimuksessa pyörimismäärän säilymistä tutkittiin kokeella, jossa kaksi ei-pistemäistä kappaletta törmäytettiin toisiinsa ilmaradalla. Ensimmäinen kappale osuu toisen, levossa olevan kappaleen massakeskipisteen ulkopuolelle, jolloin jälkimmäinen kappale alkaa pyöriä massakeskipisteensä ympäri ja kummallakin kappaleella on lisäksi lineaarinen liikemäärä. Sitten onkin paikallaan esittää kysymys, mistä toinen kappale sai pyörimismääränsä, jos se oli ennen törmäystä koko systeemissä nolla.

Close ja Heron raportoivat samankaltaisista ongelmista oppilaiden keskuudessa [7]:

”Tavallisimmat virheet paljastavat taipumusta sekoittaa pyörimismäärä kulmanopeuteen ja liikemäärään. Monet oppilaat otaksuvat, että liikemäärän ja pyörimismäärän säilyminen ovat kytköksissä toisiinsa, mikä vaikuttaa johtuvan heidän käsityksistään energiasta.”

Mashood ja Singh tutkivat vastaavia harhakäsityksiä teoreettisen tilanteen avulla. Mallissa pistemäinen kappale liikkuu vapaasti vakionopeudella pitkin suoraa ja tarkastelupiste ei sijaitse tällä suoralla. Tutkimuksessa pyydettiin oppilaita mm. vastaamaan tähän liittyviin monivalintakysymyksiin ja perustelemaan vastauksensa [8].

Kun oppilailta kysyttiin, mikä olisi kappaleen kulmanopeuksien suuruusjärjestys kahdessa liikeradalta valitussa eri pisteessä ja perustelut valinnalle, suurin osa oli sitä mieltä, että kulmanopeus on kummassakin pisteessä sama, koska kulmakiihtyvyyttä ei ole, tai nolla, koska liike on lineaarista. Näistä kahdesta vastauksesta ensimmäiseen palaamme piakkoin toisen tähän liittyvän harhakäsityksen yhteydessä. Niistäkin oppilaista, jotka asettivat suuruusjärjestyksen oikein, suurin osa perusteli sen väärin [8]:

”Huomasimme, että moni oppilaista valitsi oikean vastauksen, mutta käyttivät väärää perustelua; he käyttivät relaatiota  $v = \omega r$ , joka pätee vain ympyräliikkeelle.”

Tässä  $v$  on kappaleen lineaarinen vauhti ja  $r$  on kappaleen etäisyys origosta. Koska  $v$  pysyy vakiona ja  $r$  kasvaa kappaleen etääntyessä lähtöpisteestään, voi edellä mainitusta relaatiosta vetää oikean johtopäätöksen kulmanopeuden muutoksesta, mutta valitettavasti väärin perustein. Oikea perustelu on se, että kappaleen paikkavektorin kiertymä (luku 3.1) origon suhteen on erisuuri eri pisteissä samassa ajassa [8]. Tällöin kulmanopeus kuuluu laskea yhtälöä (4) käyttäen.

Väite, että kulmakiihtyvyys tapauksessa olisi nolla, on siis perätön, koska kappaleen kulmanopeus muuttuu. Mistä tämä virhekäsitys sitten johtui? Kun kysyttiin, kuinka suuri on kappaleeseen kohdistuva momentti, suurin osa oppilaista vastasi ”nolla” ja käytti perusteluun pyörimisen liikeyhtälöä (19) ja virheellistä olettamusta, että kulmakiihtyvyyttä ei olisi [8]. Oikea vastaus on nolla, mutta vain sen perusteella, koska kappaleeseen ei yksinkertaisesti kohdistu voimia, eikä näin ollen momenttiakaan.

Momentti on siis nolla, joten jos kulmakiihtyvyys on nolosta eroava, niin yhtälössä (19) on jokin pielessä ja pahasti! Mashood ja Singh esittävät ratkaisun tähän näennäiseen paradoksiin: tässä muodossaan pyörimisen liikeyhtälö ei ota huomioon systeemin hitausmomentin muutosta. Pyörimisen liikeyhtälö voidaan johtaa yleisessä muodossaan seuraavasti:

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = J\alpha + \omega \frac{dJ}{dt}. \quad (35)$$

Yhtälö (35) on analoginen Newtonin II lain yleisen muodon kanssa (muuttuva massa) ja tapaus, jossa hitausmomentti on vakio, supistuu yhtälöksi (19). Yhtälöstä (35) voidaan ratkaista kulmakiihtyvyys  $\alpha$  ja havaita, että se on nolosta eroava, vaikka momentti onkin nolla.

## II Kitkavoima vierimisessä: onko sitä?

Seuraava harhakäsitys on peräisin, edellisen tavoin, hyvin yksinkertaisesta tilanteesta: jäykkä sylinteri vierii liukumatta pitkin vaakasuoraa alustaa. Ilmanvastus ja vierimisvastus jätetään yksinkertaisuuden nimissä huomioimatta. Harhakäsityksen mukaan sylinterin ja alustan välillä on oltava kitkavoima, joka aiheuttaa sylinteriä pyörittävän momentin. Tätä harhakäsitystä kuvaa parhaiten lainaus Hierrezuelon ja Carneron tutkimuksen oppilailta [9]:

”Jos kitkavoima häviää, mikä aiheuttaa momentin, joka pyörittää sylinteriä?”

Tämän harhakäsityksen kumoamiseen riittää hyvin artikkelissa korostettu lause [9]:

”Kappaleeseen vaikuttava momentti aiheuttaa sen kulmanopeuden *muutoksen*.”

Koska sylinteri vierii hidastumatta, on sen kulmanopeus vakio ja koska muut sylinteriin vaikuttavat voimat kohdistuvat suoraan massakeskipisteeseen, voidaan päätellä, ettei sylinteriin vaikuta kitkavoiman momenttia. Samassa tutkimuksessa todetaan harhakäsityksen johtuvan Newtonin II lakia koskevasta harhakäsityksestä: liikkeen ylläpitämiseksi on oltava olemassa voima.

Carvalhon ja Sousan tutkimuksessa ilmenee vastaava, sylinterin hidastumiseen liittyvä harhakäsitys oppilaiden keskuudessa sekä selitys tämän syntyyn [10]:

”On yleinen käsitys, että liikkeen olemassaolo vaatii myös kitkavoiman olemassaoloa. Kitkavoiman poissaoloa on myös vaikea ymmärtää, koska ei tiedetä tilanteita, joissa kappaleet liikkuisivat ikuisesti. Ei tajuta sitä, että tämä johtuu pintojen epätasaisuudesta johtuvasta vastuksesta, jota ei ideaalisilla kappaleilla ole.”

Rimoldini ja Singh teettivät opiskelijoilla monivalintatestejä, joissa esitettiin vastaavia teoreettisia tilanteita. Kitkaan liittyvät harhakäsitykset paistavat tässäkin tutkimuksessa kirkkaasti. Eräässä ongelmassa esitettiin tilanne, jossa kaksi identtistä marmorikuulaa vierii liukumatta vaakasuorilla alustoilla. Alustat ovat eri materiaalia ja niiden lepokitkakertoimet ovat erisuuret. Kysyttiin, kumpi kuulusta vierii pidemmälle, jos ilmanvastusta ei huomioida. Merkittävä osa vastaajista oli sitä mieltä, että suuremman lepokitkakertoimen omaavalla alustalla vierivä kuula vierii lyhyemmän matkan, koska siihen kohdistuu suurempi hidastava kitkavoima. Tutkimuksessa todetaan [11]:

”Se [kysymys] osoitti, että oppilailla oli ongelmia määrittää kitkan rooli vaakasuoralla alustalla liukumatta etevän jäykän kappaleen vierimisessä.”

Suurin osa tähän kysymykseen vastanneista opiskelijoista oli virheellisesti sitä mieltä, että lepokitka vaikuttaa hidastavasti vierivien kuulien liiketilaan, vaikeivät kaikki heistä valinneetkaan juuri edellä mainittua vaihtoehtoa [11].

Oikea vastaus paljastaa, että tämä oli oikeasti kompakysymys: kumpikin kuula vierii hidastumatta ja näin ollen yhtä kauas, eli äärettömiin, koska kumpikin vierii liukumatta. Pinnan lepokitkakerroimen tai edes liukukitkakerroimen suuruudella ei ole mitään merkitystä tässä tilanteessa. Koska kuulan ja alustan kosketuspisteessä pintojen nopeus toistensa suhteen on nolla, ei liukukitkaa ole. Lisäksi kuulaan kohdistuu vain painovoima ja alustan tukivoima, jotka ovat kumpikin kohtisuorassa liikkeen suuntaan nähden. Näin ollen mikään voima ei yritä saattaa kuulaa liukumaan pitkin alustaa, joten lepokitkaakaan ei ole.

### III Kitkavoiman suunta vierimisessä

Jotta kitkatarkastelu vierimisessä ei menisi liian helpoksi, on olemassa ideaalisiakin tilanteita, joissa kitkavoima vaikuttaa vierivään kappaleeseen. Yksinkertaisia esimerkkejä ovat kaltevalla tasolla vierivä sylinteri ja renkailla kulkevat ajoneuvot. Carvalhon ja Sousan tutkimuksessa koehenkilöille esitettiin mm. näihin tilanteisiin liittyviä pohdintatehtäviä.

Ensimmäinen tässä käsiteltävistä on tilanne, jossa sylinteri vierii liukumatta kaltevaa tasoa ylös, kunnes sen suunta muuttuu. Kysymys kuului: ”Kumpaan suuntaan vierissä sylinterin kiihtyvyys on suurempi?” Ilmennyt harhakäsitys ei aivan liittynyt kysymykseen, mutta on joka tapauksessa huomionarvoinen: ylämäkeen mentäessä kitkavoiman suunta on alamäen suuntaan ja päinvastoin [10].

Carvalhon ja Sousan mukaan tämä harhakäsitys johtui siitä, että oppilaat käyttivät sylinterin liikkeen kuvaamiseen etenemisliikkeen liikeyhtälöitä pyörimisliikkeen sijaan. Jos sylinteri korvattaisiin esimerkiksi laatikolla, joka ei pyöri, olisi tilanne täsmälleen edellisen mielipiteen mukainen.

Harhakäsitys kumotaan tutkimuksessa piirtämällä perusteltu vapaakappalekuva tilanteista, joissa sylinteri vierii ylös ja alas. Kitkavoima on ainoa sylinteriin vaikuttava voima, jonka momentti on nollassa eroava. Näin ollen vain kitkavoima aiheuttaa sylinterin kulmakiihtyvyyden ja on suunnaltaan ylämäkeen, koska kulmakiihtyvyyden suunnan on vastattava sylinterin kiihtyvyyden suuntaa vierimisehdon mukaisesti. Koska sylinterin kiihtyvyys on vakiosuuruinen, on myös sen kulmakiihtyvyys vakio riippumatta, mennäänkö ylä- vai alamäkeen. Vapaakappalekuvat ovat siis identtiset kummassakin tilanteessa [10].

Toinen Carvalhon ja Sousan tutkimuksen ongelmia aiheuttava pohdintatehtävä oli perustella, mihin suuntiin vaakasuoralla alustalla liukumatta etene-

vän, nopeuttaan kiihdyttävän polkupyörän renkaiden kitkavoimat osoittavat ja ovatko ne pyörän liikettä avustavia vai vastustavia. Harhakäsitys oli, että molempien renkaiden kitkavoimat osoittavat liikesuuntaa vastaan ja näin ollen pyrkivät hidastamaan polkupyörää. Syyksi todetaan [10]

”Kitka nähdään aina liikkeelle ’pahana’ asiana, joten oppilaiden mielestä molemmat kitkavoimat osoittavat liikkeen suuntaa vastaan tajuamatta, että juuri kitkavoima aiheuttaa ajoneuvon kiihtyvyyden.”

Mutta jos kitkavoima kerran vastustaa polkupyörän liikettä, niin mikä voima sitten oppilaiden mielestä kasvattaa polkupyörän vauhtia? Tähän Carvalho ja Sousa ehdottavat osaltaan oppikirjoistakin johtuvaa harhakäsitystä [10]:

”He ajattelevat, että pyörä liikkuu, koska on olemassa jokin moottorin (tai jalkojen) aiheuttama liikuttava voima, joka vetää ajoneuvoa eteenpäin. Joskus tätä käsitystä tukevat oppikirjat, joissa esitetään [esim. vapaakappalekuvioissa] voima, joka vaikuttaa suoraan ajoneuvoon.”

Todellisuudessa polkupyörän ja tienpinnan välinen lepokitka osoittaa eturenkaassa taaksepäin ja takarenkaassa eteenpäin ja kitkavoimat ovat liikettä kiihdyttävät voimat. Polkupyörän runko työntää etupyörän keskipistettä eteenpäin, jolloin renkaan ja tienpinnan välinen lepokitka pyrkii estämään renkaan liukumisen tien suhteen. Näin ollen etupyörään kohdistuvan kitkavoiman täytyy osoittaa taaksepäin. Takapyörään kohdistuu rungon taaksepäin työntävän voiman lisäksi polkijan tuottama momentti. Jälleen renkaan ja tienpinnan välissä on lepokitka, joka estää rengasta liukumasta. Polkijan tuottama momentti aiheuttaa tiehen kitkavoiman, joka osoittaa momentin suunnan perusteella taaksepäin. Newtonin III lain mukaan tienpinta aiheuttaa tällöin renkaaseen kitkavoiman, jonka suunta on vastakkainen, eli polkupyörän liikkeen suuntainen.

## 4.2 Miten harhakäsitykset on otettu huomioon oppikirjoissa?

**Taulukko 1:** Harhakäsityksiä aiheuttavien aiheiden (luku 4.1) käsittely eri oppikirjoissa. Lyhennysmerkintöjä käyttäen käsittelyn tasot ovat 'ei käsitellä ollenkaan' (–), 'mainitaan tekstissä' (+) ja 'käsitellään laajemmin' (++).

Harhakäsitys	Oppikirja			
	<i>Fysiikka 5</i>	<i>Physica 5</i>	<i>Empiria 5</i>	<i>Fotoni 5</i>
I	–	–	–	–
II	–	–	–	++
III	+	–	++	+

Tässä luvussa tarkastellaan, miten luvussa 3 esitellyt oppikirjat käsittelevät, ratkaisevat ja ehkäisevät luvussa 4.1 eriteltyjä harhakäsityksiä. Oppikirjojen käsittelyn tasoille laaditaan kolmeportainen asteikko sen perusteella, miten perusteellisesti mikäkin aihe kirjassa käsitellään ja miten harhakäsityksen synty pyritään välttämään. Analyysin tulokset on esitetty taulukossa 1.

Kuten luvussa 3, tässäkin ei ole tavoitteena asettaa eri oppikirjoja paremmuusjärjestykseen. Jokaisessa kirjassa on omat vahvuutensa ja heikkoutensa myös harhakäsityksien näkökulmasta. Tässä tutkielmassa näitä piirteitä arvioidaan puhtaasti fysiikan kannalta ja pedagogisen näkökulman arviointi jätetään sivuun.

### I Pyörimismäärä suoraviivaisessa liikkeessä ja törmäyksissä

Tämä aihe ei kirjoista päätellen kuulu lukiofysiikkaan ollenkaan. Yksikään oppikirja ei käsittele tilannetta, jossa suoraviivaiseen etenemiseen liitettäisiin pyörimismäärä jonkin tarkastelupisteen suhteen. Syy on helppo arvata: pistemäisen kappaleen liikkuminen suoraviivaisesti on tapaus, jossa pyörimissuureet saadaan nollattua valitsemalla tarkastelupiste järkevästi kappaleen reitille. Tällöin se ei oikeastaan ole edes kurssin FY5 sisältöä, sillä liike on puhtaasti etenemisliikettä. Kaikissa kirjoissa pyritäänkin aina tarkastelemaan systeemiä siten, että sen kuvaamiseen riittää mahdollisimman pieni määrä suureita.

## II Kitkavoima tasaisella alustalla

Tasaisella alustalla liukumatta tai liukuen vierivän kappaleen ja alustan välisen kitkavoiman tapauksessa käsittelytilanne ei ole yhtä toivoton kuin edellisessä aiheessa.

Eniten ja selkeimmin asiaa käsitellään *Fotoni 5*:ssä: vierimistä käsittelevän luvun alussa olevassa johdattelussa tarkastellaan esimerkkejä, joissa vaakasuoralla alustalla liukuen etenevän kappaleen liike muuttuu liukukitkan vaikutuksesta vierimisehdon toteuttavaksi liikkeeksi. Tekstissä mainitaan asiaan liittyen termit lepokitka ja liukukitka, niiden vaikutukset kappaleen liikkeeseen sekä missä vaiheessa ne häviävät tai muuttuvat toisikseen. Johdattelun lisäksi tekstissä on luetteloitu tilanteet, joissa vierimisehto tasaisella alustalla ei toteudu ja miten eri kitkavoimat vaikuttavat näissä tilanteissa. Tekstin tukena on vapaakappalekuvioita, joissa näitä tilanteita kuvataan. Aihetta ei kuitenkaan erikseen korosteta tekstissä.

Muissa oppikirjoissa jäädään huomattavasti *Fotoni 5*:n käsittelyn laajuudesta. *Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä mainitaan ohimennen, miten renkaan ”sutiminen” ja vieriminen poikkeavat toisistaan, mutta kitkaa ei mainita nimeltä. *Physica 5*:ssä on oppilastyö, jossa havainnoidaan sellaisen kappaleen liikettä, jonka pyörimisen ja etenemisen suunnat ovat vastakkaiset. Tekstissä ei kuitenkaan kerrota, mistä havainnot johtuvat, joten ymmärtämisen vastuu jää pysyvästi lukijalle. *Empiria 5*:ssä tasaisella alustalla vierivää kappaletta käytetään vain vierimisehtojen johtamisessa, eikä kitkasta puhuta tässä yhteydessä lainkaan.

## III Kitkavoima kaltevalla alustalla

Tässä tarkastellaan kaltevalla tasolla liukumatta tai liukuen etenevän kappaleen ja alustan välisen kitkan käsittelyä oppikirjoissa.

Käsittelyn laajuudessa *Empiria 5* jättää muut jälkeensä. Vaikka tekstissä ei mainita vaakasuoran tason kitkavoimista mitään, käytetään sekin tila kaltevalla tasolla vierivään kappaleeseen. Tekstissä selvitetään perusteellisesti, mikä aiheuttaa kappaleen vierimisen, mistä kitkan tyypistä on kyse, kun kappale vierii liukumatta, mitkä ehdot lepokitkakertoimen pitää täyttää, jotta vierimisehdot toteutuisivat ja mikä on kitkavoiman momentin tekemä työ. Kuvituksissa käytetään paljon kaltevaa tasoa pitkin vierivän kappaleen vapaakappalekuvia. Aihetta käsitellään ainakin neljällä sivulla.

*Fysiikka 5*:ssä käydään yhdellä sivulla liukumatta vierivän kappaleen ja le-

pokitkan välistä yhteyttä. Tekstissä selitetään, että lepokitka on voima, joka aiheuttaa kappaleen vierimisen, mihin suuntaan se osoittaa ja että sen tekemä työ muuttaa osan kappaleen potentiaalienergiasta pyörimisenergiaksi. Lisäksi tässä yhteydessä on vapaakappalekuva, josta kitkavoiman suunta käy ilmi.

*Fotoni 5*:ssä aihetta käsitellään hieman enemmän kuin *Fysiikka 5*:ssä. Siinä käydään läpi tekstissä kitkavoiman momentin vaikutus kappaleen vierimiseen. Tämän lisäksi löytyy esimerkkitehtävä (Helsingin yliopiston valintakokeesta 1993), jossa vierimistä ja liukumista kaltevalla tasolla vertaillaan liuku- ja lepokitkan kannalta.

*Physica 5* ei käsittele tätä aihetta. Siinä kaltevalla tasolla vierivää kappaletta tarkastellaan vain yhdessä esimerkissä, eikä siinäkään puhuta kitkavoimista.



## 5 Johtopäätökset

### Lukion oppikirjojen sisällöt

Koska Opetushallitus ei aseta säädöksissään [1] luvussa 2 esitetyistä lukiofysiikan keskeisistä sisällöistä sen tarkempia velvoitteita, ei ole mielekästä asettaa tässä tutkielmassa tarkasteltuja oppikirjoja paremmuusjärjestykseen niiden perusteella. Sisällöllisesti kaikki oppikirjat käsittelevät täysin samat aiheet lukuunottamatta muutamaa poikkeusta, joissa käsitellään yhteisten aiheiden lisäksi jotain ”ylimääräistä”. Keskitymme siis suureiden ja aiheiden korostamisessa ja käsittelyjärjestyksessä ilmenneisiin eroavaisuuksiin ja erityispiirteisiin eri kirjoissa.

Sisällöllisesti nämä neljä oppikirjaa voidaan jakaa karkeasti kahteen ryhmään: *Fysiikka 5* ja *Physica 5* ovat yleisasun suhteen keskenään samankaltaiset, kuten ovat keskenään myös *Empiria 5* ja *Fotoni 5*.

Korostaminen ja korostettu pohja ovat oppikirjoissa keinoja, joilla lukijan huomio saadaan keskittymään tarkasti rajatulla alueella olevaan sisältöön. Suurimmat eroavaisuudet korostettujen pohjien osalta eivät koske korostettujen aiheiden tai suureiden lukumäärää, vaan mitä ja miten paljon oppikirjat korostavat sisältöjään. *Fysiikka 5*, *Physica 5* ja *Empiria 5* käyttävät samankaltaista taktiikkaa korostaessaan yhtälöitä: yhtälön lisäksi korostetulla pohjalla on yleensä selitetty kaikkien käytettyjen symbolien merkitys. *Fotoni 5*:ssä symbolit on toki selitetty, mutta yleensä varsinaisen korostetun pohjan ulkopuolella joko luettelona tai tekstin seassa. *Fysiikka 5*:ssä ja *Physica 5*:ssä korostetaan lisäksi selvästi eniten pelkkiä sanallisia ilmaisuja. Esimerkiksi hitausmomenttia käsiteltäessä kummassakin kirjassa on korostettu pohja, jossa kuvaillaan hitausmomenttia suureena. Suhteellisesti vähiten korostusta käyttää *Fotoni 5*.

Käsittelyjärjestykseltään yksikään oppikirja ei ole samanlainen kuin toinen. Yhteiset piirteet ovat, että ensimmäisenä kaikissa kirjoissa käsitellään aivan aluksi kulmasuureet (kiertokulma, kierrosnopeus, kulmanopeus ja kulmakiihtyvyyt) ja että kurssin FY5 toinen pääaihe, gravitaatio, käsitellään jälkimmäisenä. Käytettävyyden kannalta jokainen oppikirja myös käsittelee staattikkaan ja ympyräliikkeeseen liittyvät aiheet ennen siirtymistä pyörimisliikkeen dynamiikkaan. Esimerkiksi momentti on opetettava ennen kuin voidaan käsitellä pyörimisen liikeyhtälöä, jossa sitä tarvitaan. Yksikään oppikirja ei näin ollen sorru virheisiin, joissa jotain asiaa käytettäisiin laajasti ennen sen varsinaista läpikäyntiä. *Fotoni 5* nousee esiin muihin kirjoihin verrattuna si-

ten, että siinä käydään erikseen läpi lisäelementtejä, joita ei muissa kirjoissa ole. Esimerkiksi Steinerin sääntö (luku 3.5) ja impulssimomenttiperiaate (luku 3.7) ovat tällaisia aiheita. *Fotoni 5*:ssä on myös joidenkin lukujen lopussa lisätietoa tarjoavia, erillisiä kappaleita.

Käsittelyjärjestyksen merkitys oppikirjan käytettävyyteen on melko pieni, sillä järjestyksen, jossa asiat kurssin aikana käydään, laatii viime kädessä opettaja.

### **Harhakäsityksiin vastaaminen oppikirjoissa**

Luvussa 4.2 tehdyn analyysin perusteella Suomessakin oppikirjat käsittelevät luvussa 4.1 esiteltyihin yleisiin harhakäsityksiin johtavia aiheita keskimäärin niukasti. Eniten näiden harhakäsitysten kitkemiseen ja ennaltaehkäisyyn osallistuu *Fotoni 5* ja vähiten *Physica 5* (taulukko 1).

Vähimmälle käsittelylle oppikirjoissa jää systeemin pyörimismäärän tarkastelu yleisessä tilanteessa ja varsinkin törmäyksissä, joissa sen soveltaminen olisi jopa välttämätöntä, kuten Williamsonin, Torres-Isean ja Kletzingin tutkimuksessa kokeellisesti havainnoitiin [6]. Kyseisen tutkimuksen kokeelliset menetelmät olivat täysin Opetushallituksen linjaamien perusteiden mukaiset ja ilmiöön liittyvä matematiikka on keskitasoa haastavampaa, mutta kuitenkin lukiotasoista. Näin ollen myös oppikirjoissa olisi täysin mahdollista käsitellä tätä aihetta.

Lukion oppikirjojen toivoisi pureutuvan tällaisiin tilanteisiin edes ohimennen, sillä niitä ei pysty väistämään origon siirtelyllä ja koska pyörimismäärän säilyminen on yksi opetussuunnitelman perusteiden velvoittamista sisälöistä [1]. Luonnossa ja arkielämässä on useita tilanteita, joissa suoraviivainen törmäys saa aikaan kappaleiden pyörimistä. Koska ”tavoitteena on, että opiskelija syventää tuntemustaan mekaniikan maailmankuvasta”, olisi tämän aiheen lisääminen oppikirjoihin perusteltua.

Vierimisessä lepo- ja liukukitkan olemassaolo ja suunta aiheuttavat harhakäsityksiä ja ongelmia, jotka voitaisiin kenties välttää perusteellisemmalla käsittelyllä. Erityisesti kitkavoiman olemassaolo tai olemattomuus tuntuu tutkimusten valossa olevan vaikea ongelma, sillä pyörimisen ja etenemisen matemaattiset mallit menevät vierimisessä sekaisin [9, 10, 11].

*Fotoni 5*:n esimerkkiä seuraten oppikirjoissa voisi olla selkeästi jaotellut tilanteet, joissa kitkaa tarkastellaan liukumatta ja liukuen vierimisessä sekä tasaisilla, että kaltevilla pinnoilla. Matematiikka ilmiöiden takana ei ole lu-

kiotasolla ongelma, sillä noin puolet siitä on käsitelty jo aiemmalla mekaniikan kurssilla ja loput pyörimisliikkeen yhteydessä.

Opetussuunnitelman perusteissa kitkaa ei erikseen mainita, kuten ei vierimistäkään. Kuitenkin, koska vieriminen on oppikirjoissa yleisesti otettu kurssin FY5 aiheeksi ja se on tärkeä pyörimisliikkeen malli, tulisi sen kitkatarkasteluun kiinnittää enemmän huomiota.

## Viitteet

- [1] Opetushallitus, Määräys 33/011/2003: *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*
- [2] Heikki Lehto, Raimo Havukainen, Jukka Maalampi, Janna Leskinen, *Fysiikka 5*, Sanoma Pro, 1. – 2. painos, 2012
- [3] Jukka Hatakka, Heikki Saari, Jarmo Sirviö, Jouni Viiri, Sari Yrjänäinen, *Physica 5*, Sanoma Pro, 1. – 3. painos, 2012
- [4] Kaarle Hämeri, Risto Jokinen, Pasi Ketolainen, Matti Sallinen, Martti Sloan, *Empiria 5*, Otava, 1. painos, 2011
- [5] Sisko Maria Eskola, Pasi Ketolainen, Folke Stenman, *Fotoni 5*, Otava, 1. painos, 2006
- [6] J. Charles Williamson, Ramon O. Torres-Isea, Craig A. Kletzing, *Analyzing linear and angular momentum conservation in digital videos of puck collisions*, American Journal of Physics, Vol. 68, Issue 9, 2000
- [7] Hunter G. Close, Paula R. L. Heron, *Student understanding of the angular momentum of classical particles*, American Journal of Physics, Vol. 79, Issue 10, 2011
- [8] K. K. Mashood, Vijay A. Singh, *Rotational kinematics of a particle in rectilinear motion: Perceptions and pitfalls*, American Journal of Physics, Vol. 80, Issue 8, 2012
- [9] J. Hierrezuelo, C. Carnero, *Sliding and rolling: the physics of a rolling ball*, Physics Education, Vol. 30, Number 3, 1995
- [10] Paulo Simeão Carvalho, Adriano Sampaio e Sousa, *Rotation in secondary school: teaching the effects of frictional force*, Physics Education, Vol. 40, Number 3, 2005
- [11] Lorenzo G. Rimoldini, Chandralekha Singh, *Student understanding of rotational and rolling motion concepts*, Physical Review ST Physics Education Research, Vol. 1, Issue 1, 2005