Joukon koon arviointi numeroituvuuden, Bairen kategorian, Lebesguen mitan ja Hausdorff-dimension kautta

Camilla Martikainen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2016

Tiivistelmä: Camilla Martikainen, *Joukon koon arviointi numeroituvuuden, Bairen kategorian, Lebesguen mitan ja Hausdorff-dimension kautta* (engl. *Evaluation of the size of a set using countability, Baire category, Lebesgue measure and Hausdorff dimension*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 46 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2016.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua neljään eri tapaan arvioida avaruuden $\mathbb{R}^n$ Borel-joukkoihin kuuluvien osajoukkojen kokoja ja ymmärtää näiden eri tapojen välisiä yhteyksiä. Aluksi tutustutaan numeroituvuuteen ja ylinumeroituvuuteen, joihin liittyen ideana on arvioida joukon alkioiden lukumäärää. Numeroituvissa joukoissa on vähemmän alkioita kuin ylinumeroituvissa, joten numeroituvat joukot ovat ylinumeroituvia pienempiä.

Tutkielmassa esitellään lisäksi numeroituvuutta hyödyntävä tapa arvioida joukon kokoa, mihin liittyen määritetään, mitä Bairen kategoriaa tarkasteltava joukko on avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Bairen kategorioita on kaksi, joista ensimmäistä oleva joukko voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä joukoista, joiden alkiot ovat tarpeeksi harvassa toisiinsa nähden eli joukoista, jotka ovat ei-missään tiheitä. Toisen kategorian joukko on ensimmäisen kategorian joukon komplementti eli residuaalijoukko ja sitä kuvastaa tiheys, jolloin ideana on, että joukon alkiot ovat erittäin lähellä toisiaan. Toisen kategorian joukot voidaankin tulkita suuriksi joukoiksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja näin ensimmäisen kategorian joukot ovat kooltaan pieniä.

Joukon kokoa tarkastellaan myös mittateorian kautta. Tällöin tuodaan esille Lebesguen mitta, joka yksinkertaisessa tilanteessa kertoo mitan ulottuvuudesta riippuen joukosta sen pituuden, pinta-alan tai tilavuuden. Lisäksi tutustutaan monipuolisempaan Hausdorff-dimensioon, joka arvioi joukon ulottuvuutta. Toisin kuin Lebesguen mitta, se voidaan määrittää kaikille joukoille. Lisäksi se pystyy erottelemaan toisistaan joukkoja, joiden Lebesguen mitaksi saadaan nolla.

Esille tuotavat tavat arvioida joukon kokoa liittyvät keskeisesti toisiinsa, mutta eivät aina anna samansuuntaisia arvioita joukon koosta. Tutkielmassa tarkastellaankin esille nostettujen käsitteiden välisiä yhteyksiä ja huomataan, että aina käsitteiden väliltä ei tällaisia ole löydettävissä. Keskeisin tulos liittyy Bairen kategoriaan, Lebesguen mittaan ja niin sanottuun duaalisuusperiaatteeseen. Duaalisuusperiaatteen mukaan lause, jossa esiintyy Bairen kategoriaan liittyvä käsite, pätee myös tapauksessa, jossa Baire kategorian käsite korvataan vastaavalla Lebesguen mittaan liittyvällä käsitteellä. Sama pätee myös toisin päin.

Avainsanat: metrinen avaruus, Borel-joukko, numeroituvuus, Baire kategoria, Lebesguen mitta, Hausdorff-dimensio, duaalisuusperiaate.

Sisältö

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutustua neljään 1800- ja 1900-lukujen taitteessa kehitettyyn tapaan mitata joukon kokoa. Tavoitteena on huomata, että joukon kokoa voidaan arvioida usealla tavalla, joista toiset ovat keskenään samankaltaisempia kuin toiset ja jotkut saattavat olla jopa täysin vastakkaisia. Tarkasteltava joukko itsessään vaikuttaa siihen, mikä arviointitapa on missäkin tilanteessa mielekkäin.

Ensimmäisessä luvussa tehdään lyhyt kertaus, jossa keskitytään tutkielmassa oleellisiin metrisiin avaruuksiin sekä käsitteisiin Borel-joukko, perfekti joukko ja itsesimilaari joukko. Luvussa esitellään myös Cantorin 1/3-joukko, jota tarkastellaan sen mielenkiintoisten ominaisuuksien vuoksi läpi tutkielman.

Seuraavien lukujen alussa tutustutaan aina lyhyesti luvun käsitteitä kehittäneeseen matemaatikkoon. Tarkoituksena on johdatella lukijaa aiheeseen ja tarkastella tutkielman kannalta keskeisiä asioita, joten kyseessä eivät ole täydelliset henkilöhistoriat. Halutessaan voi lisätietoa hakea esimerkiksi Boyerin Tieteiden kuningatar II-teoksesta [8] ja O'Connorin ja Robertsonin kirjoittamilta sivustoilta [26], [27].

Historiaosuuden jälkeen jokaisessa luvussa tutustutaan yhteen tai kahteen tapaan mitata joukon kokoa. Aiheista nostetaan esille vain tutkielman kannalta oleelliset asiat, joten niihin voi halutessaan tutustua tarkemmin luvuissa mainittujen lähdemateriaalien kautta. Ensimmäisenä tutkielmassa tarkastellaan saksalaisen Georg Cantorin (1845-1918) kehittämää teoriaa joukon numeroituvuudesta, joka liittyy joukon alkioiden lukumäärään. [6] Tätä aihetta lähestytään Cantorin luoman käsitteen mahtavuus kautta ja täydennetään lopuksi tutkimalla numeroituvuuteen liittyviä ominaisuuksia, kuten perfektien joukkojen ylinumeroituvuutta. Keskeistä luvussa on havaita, että numeroituvasta joukosta löytyy injektio luonnollisten lukujen joukkoon $\mathbb{N}$, kun ylinumeroituvasta joukosta ei tällaista ole löydettävissä. Numeroituva joukko on siis pienempi kuin joukko, joka on ylinumeroituva. Luvussa tuodaan esille muun muassa pieneltä vaikuttavan Cantorin 1/3-joukon ylinumeroituvuus.

Kolmannessa luvussa tarkastellaan Cantorin joukko-oppiin tutustunutta ranskalaista René-Louis Bairea (1874-1932) ja hänen teoriaansa Bairen kategorioista. [26] Kyseiseen teoriaan liittyvät keskeisesti käsitteet ei-missään tiheä joukko ja tiheä joukko, joiden tarkasteluista lähdetään liikkeelle. Tähän liittyen ei-missään tiheä joukko on joukko, joka on täynnä reikiä, kun taas tiheässä joukossa tällaisia reikiä ei ole. Varsinaisesti Bairen kategoriaa koskevassa alaluvussa esitellään ensimmäisen ja toisen kategorian joukot sekä residuaalijoukot. Ensimmäisen kategorian joukot voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä ei-missään tiheistä joukoista, kun toisen kategorian joukot ovat joukkoja, jotka eivät ole ensimmäistä kategoriaa. Residuaalijoukot taas ovat ensimmäistä kategoriaa olevien joukkojen komplementteja. Keskeinen lause kyseisessä luvussa on Bairen kategoria-lause, joka liittyy residuaalijoukkojen tiheyteen.

Sen pohjalta saadaan, että ensimmäisen kategorian joukot ovat kooltaan pieniä ja toisen kategorian joukot suuria. Luvussa tullaan muun muassa perustelemaan, kuinka Cantorin 1/3-joukko on ensimmäisen kategorian joukkona pieni.

Tutkielman neljännessä luvussa siirrytään mittateoriaan. Ensimmäisenä luvussa tutustutaan Bairen kanssa yhteydessä olleeseen ranskalaiseen Henri Lebesgueen (1875-1941), joka Cantorin joukko-opin pohjalta kehitti vähitellen teorian Lebesguen mitasta. [27] Kyseisessä mitassa avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukon kokoa arvioidaan peittämällä joukko mahdollisimman yksinkertaisilla joukoilla. Näin Lebesguen mitta vastaa yksinkertaisissa tapauksissa joukon geometrista mittaa. Tässä luvussa esitellään muutamia Lebesguen mittaan liittyviä ominaisuuksia ja huomataan, että Cantorin 1/3-joukon Lebesguen mitta on nolla eli kyseessä on nollamittainen joukko. Kuten tässä luvussa huomataan, arvioi Lebesguen mitta monen joukon mitaksi nollan. Tämä motivoi tarkastelemaan vielä Hausdorff-dimensiota, joka kykenee selittämään, miksi näin tapahtuu.

Neljännen luvun lopussa tarkastellaankin Cantoria suuresti ihannoinutta saksalaista Felix Hausdorffia (1862-1942) ja Hausdorff-dimensiota. [28] Aiheen ymmärtämiseksi tutustutaan ensin Hausdorff-mittaan, joka on yleistys Lebesguen mitasta. Siinä tarkasteltava joukko peitetään mielivaltaisella joukolla ja arvioidaan näin joukon kokoa. Hausdorff-mitasta esitellään muutamia ominaisuuksia ja kiinnitetään huomio siihen, kuinka tietyllä arvolla s Hausdorff-mitan arvo hyppää nollasta äärettömään. Tämä kyseinen arvo s on nimittäin joukon Hausdorff-dimensio. Kyseiseen käsitteeseen liittyen tutkitaan muutamia sen ominaisuuksia ja havaitaan, että itsesimilaarille joukolle sen määrittäminen on yksinkertaista. Lisäksi huomataan, kuinka Cantorin 1/3-joukon Hausdorff-dimensio on $\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$ eli Hausdorff-dimensio voi olla desimaaliluku. Tämän ominaisuutensa vuoksi Hausdorff-dimensio kykeneenkin erottelemaan nollamittaiset joukot toisistaan toisin kuin Lebesguen mitta.

Viimeisessä luvussa tuodaan esille, miksi jotkut tavat arvioida joukkojen kokoja antavat joskus samansuuntaisia vastauksia ja jotkut eivät. Tähän liittyen tarkastellaan, löytyykö eri käsitteiden väliltä yhteyksiä. Aluksi tarkastellaan Lebesguen mitan ja Hausdorff-dimension yhteyttä, joka on helposti löydettävissä tutkimalla, mikä yhdistää Hausdorff-mittaa ja Lebesguen mittaa. Tämän jälkeen nostetaan lyhyesti esille, kuinka numeroituvuus liittyy toisaalta Hausdorff-dimensioon ja toisaalta sekä Bairen kategoriaan että Lebesguen mittaan. Löydettävät yhteydet esimerkiksi numeroituvan joukon nollamittaisuudesta ja kuulumisesta ensimmäiseen kategoriaan ovat suoraviivaisia ja seuraavat tutkielmassa aiemmin esitellyistä tuloksista. Tutkielman lopuksi perehdytään vielä Lebesguen mittaan ja Bairen kategoriaan ja kyseisten käsitteiden mahdolliseen yhteyteen. Yhteyttä ei ole löydettävissä, vaan Bairen ensimmäinen kategoria ja nollamittaisuus voivat joissain tapauksissa olla täysin vastakkaisia käsitteitä. Aihetta vielä tarkemmin tarkastellessa huomataan, kuinka käsitteiden väliltä löytyy yhteyksien sijaan yhdenmukaisuuksia, joita selittää duaalisuusperiaate. Kyseisen periaatteen mukaan lause, jossa on käsite ensimmäisen kategorian joukko tai nollamittaisuus, pätee, vaikka ensimmäisen kategorian joukon käsitteen tilalle kirjoitetaan käsite nollamittaisuus ja päin vastoin. Tähän keskeiseen havaintoon tutkielma päätetään.

LUKU 1

Kertausta

Tutkielman alkuun muistellaan metriseen avaruuteen liittyviä asioita sekä palautetaan mieliin Borel-joukkojen käsite, koska tässä työssä tarkasteltavat joukot ovat Borel-joukkoja. Tämän jälkeen tarkastellaan, mitä ovat perfektit ja mitä toisaalta itsesimilaarit joukot. Osa tutkielman Borel-joukoista on nimittäin tällaisia.

1.1. Metrinen avaruus

Tämän tutkielman kannalta on riittävää muistaa kaksi metriseen avaruuteen liittyvää määritelmää.

MÄÄRITELMÄ 1.1. *Metrinen avaruus* on pari (X, d), missä X on joukko ja $d\colon X \times X \to X$ kuvaus, joka täyttää kaikille $x, y, z \in X$ seuraavat ehdot:

(i) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (kolmioepäyhtälö),

(iv) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Metrinen avaruus on *täydellinen*, jos jokainen Cauchy jono suppenee.

ESIMERKKI 1.3. Avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna normaalilla euklidisella metriikalla on (täydellinen) metrinen avaruus.

Tässä tutkielmassa ollaankin kiinnostuttu monille tutusta metrisestä avaruudesta $\mathbb{R}^n$. Tämän vuoksi myöhemmät lauseet on muotoiltu avaruuteen $\mathbb{R}^n$ sopiviksi, vaikka moni pätisi yleisestikin metrisissä avaruuksissa.

1.2. Borel-joukot

Tutkielman kiinnostuksen kohteena olevat joukot ovat Borel-joukkoja, joiden määritelmää lähestytään σ-algebran määritelmän kautta.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Kokoelma Γ joukon X osajoukkoja muodostaa avaruuden X *σ-algebran*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

(i) $\emptyset \in \Gamma$,

(ii) Jos $A \in \Gamma$, niin $X \backslash A \in \Gamma$,

(iii) Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$, niin $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$.

Näin saadaan määriteltyä Borel-joukot.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Joukkokokoelmaa

$$\mathcal{B} = \bigcap \{\Gamma : \Gamma \text{ on } \sigma \text{ -algebra, joka sisältää avaruuden } \mathbb{R}^n \text{ avoimet joukot}\}$$

sanotaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ *Borel-joukkojen σ-algebraksi* ja sen joukkoja *Borel-joukoiksi.*

Joukkokokoelma $\mathcal{B}$ on siis suppein avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimet joukot sisältävä σ-algebra. Yksinkertaistettuna Borel-joukot ovat pienin kokoelma avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja, johon kuuluvat kaikki avoimet ja suljetut joukot sekä Borel-joukkojen äärelliset ja numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset. Tällaisia joukkoja on siis hyvin paljon.

ESIMERKKI 1.6. Joukot $\mathbb{Q}^n$ ja $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Q}^n$ ovat Borel-joukkoja.

1.3. Perfektit joukot

Osa tutkielman Borel-joukoista on perfektejä joukkoja, mikä vaikuttaa muun muassa joukon numeroituvuuteen. Perfektien joukkojen käsitteen ymmärtämiseen liittyy keskeisesti kasautumispisteen käsite, jonka määritelmän kautta päästään lopulta itse perfektien joukkojen määritelmään.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Piste $p \in \mathbb{R}^n$ on osajoukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *kasautumispiste*, jos kaikille $r > 0$ on olemassa piste $q \in A$ siten, että $0 < d(p, q) < r$.

Kasautumispisteen käsitettä avaavat seuraavat havainnot.

LAUSE 1.8. *Jos piste $p \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kasautumispiste, jokainen avoin pallo $B(p, r)$, missä $r > 0$, sisältää äärettömän monta joukon A pistettä.*

TODISTUS. Oletetaan, että on olemassa avoin pallo $B(p, r)$, joka sisältää vain äärellisen määrän joukon A pisteitä. Olkoot nyt pisteet $q_1, q_2, \dots, q_m$ ne leikkauksen $B(p, r) \cap A$ pisteet, joille $q_m \neq p$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ ja merkitään $s = \min_{1 \leq k \leq m} d(p, q_k)$. Selvästi $s > 0$. Avoin pallo $B(p, r)$ ei sisällä pisteitä $q \in A$, joille $0 < d(p, q) < s$, joten piste p ei ole joukon A kasautumispiste. Tämä on ristiriidassa lauseen oletuksen kanssa, joten jokainen avoin pallo $B(p, r)$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä. □

SEURAUS 1.9. *Äärellisellä joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ ei ole kasautumispisteitä.*

LAUSE 1.10. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kasautumispisteensä.*

TODISTUS. Oletetaan, että joukko A on suljettu eli että sen komplementtijoukko A^c on avoin joukko. Oletetaan lisäksi, että piste p on joukon A kasautumispiste siten, että $p \notin A$. Koska joukko A^c on avoin, on nyt olemassa $r > 0$ siten, että $B(p, r) \subset A^c$.

Tällöin ei siis ole olemassa pistettä $q \in A$, jolle $0 < d(p,q) < r$. Tämä on ristiriidassa Määritelmän 1.7 kanssa, joten suljettu joukko A sisältää kasautumispisteensä.

Oletetaan nyt, että joukko A sisältää kaikki kasautumispisteensä. Tällöin mikään piste $p \notin A$ ei ole joukon A kasautumispiste. Näin ollen on olemassa $r > 0$ siten, että joukko $B(p,r)$ ei sisällä joukon A pisteitä, joten joukko $B(p,r) \subset A^c$ kaikilla pisteillä $p \notin A$ ja jollain $r > 0$. Näin ollen joukko A^c on avoin ja joukko A sen komplementtina suljettu. □

Näin päästään määrittelemään perfektien joukkojen käsite.

MÄÄRITELMÄ 1.11. Joukko $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on *perfekti*, jos se on epätyhjä, suljettu ja sen jokainen piste on kasautumispiste.

ESIMERKKI 1.12. (a) Joukot $\emptyset$, $[0,1]^n$ ja $\mathbb{R}^n$ ovat perfektejä joukkoja.

(b) Joukko $[0,1] \cup \{2\}$ on selvästi suljettu, mutta piste $\{2\}$ ei ole sen kasautumispiste. Kyseessä ei siis ole perfekti joukko.

Lisäksi tämän tutkielman kannalta keskeinen Cantorin 1/3-joukko on perfekti joukko. Tarkastellaan nyt kyseisen joukon määrittelemiseksi reaaliakselin väliä $C_0 = [0,1]$. Poistetaan kyseisestä välistä keskimmäinen kolmannes, jolloin saadaan joukko

$$C_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1].$$

Jatketaan vastaavasti poistamalla jäljelle jääneestä joukosta C_1 sen sisältämien välien keskimmäiset kolmannekset, joiden pituudet ovat siis $\frac{1}{9}$. Näin saadaan joukko

$$C_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

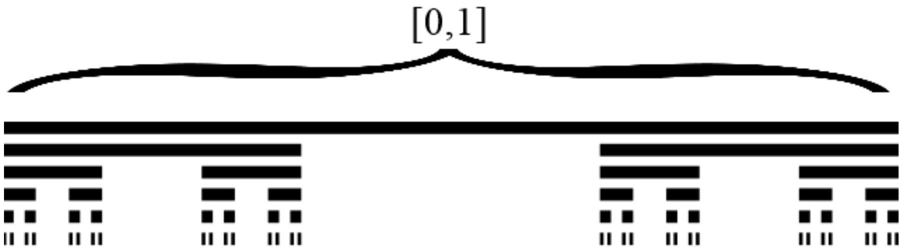
Jatketaan tätä periaatetta induktiivisesti poistamalla joukon C_{n-1} sisältämästä 2^{n-1} suljetusta välistä avoimia keskikolmanneksia, jolloin joukko C_n koostuu 2^n kappaleesta erillisiä suljettuja välejä, joiden pituudet ovat $\frac{1}{3^n}$. Tällöin

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_{n-1} \supseteq C_n \supseteq \cdots .$$

Cantorin 1/3-joukoksi sanotaan joukkoa

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n,$$

mitä havainnollistetaan Kuvassa 1.1.



KUVA 1.1. Cantorin 1/3-joukko muokattuna lähteestä [29].

LAUSE 1.13. *Cantorin 1/3 -joukko on perfekti joukko.*

TODISTUS. Merkitään Cantorin 1/3-joukon C kasautumispisteitä joukolla C''. Osoitetaan, että $C'' = C$.

Joukko C on nyt selvästi suljettu joukko muodostuessaan suljettujen joukkojen leikkauksena. Näin ollen $C'' \subseteq C$.

Osoitetaan, että $C \subseteq C''$ valitsemalla aluksi mikä tahansa piste $x \in C$. Olkoon lisäksi $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{3^n} < \epsilon$ ja joukon C määritelmän mukaisesti piste $x \in C_n$. Piste x kuuluu tällöin täsmälleen yhteen 2^n erillisestä suljetusta välistä pituudeltaan $\frac{1}{3^n}$. Olkoon tämä väli $I_n = [a_n, b_n]$. Koska $\frac{1}{3^n} < \epsilon$, pisteelle a_n pätee $0 < d(x, a_n) < \epsilon$ tai vastaava pätee pisteelle b_n. Sekä piste a_n että b_n kuuluvat joukkoon C, joten kaikille $\epsilon > 0$ on siis olemassa piste $q \in C$ siten, että $0 < d(x, q) < \epsilon$. Näin ollen piste x on joukon C kasautumispiste eli $x \in C''$ ja siten $C \subseteq C''$. □

1.4. Itsesimilaarit joukot

Osaa tutkielman Borel-joukoista kuvaa myös itsesimilaarien joukkojen käsite, johon päästään yksinkertaisimmin kiinni tutkimalla Cantorin 1/3-joukkoa vielä aiempaa tarkemmin.

Tarkastelemalla Cantorin 1/3-joukon määritelmää huomataan, että mikä tahansa koko Cantorin 1/3-joukon osa on geometrisesti samanlainen kuin koko joukko. Cantorin 1/3-joukko on siis selvästi yhdiste pienemmistä itsensä kopioista. Tämä havainto on tärkeä, koska kyseinen ominaisuus kuvaa itseasiassa kaikkia itsesimilaareja joukkoja.

Lähdetäänkin seuraavaksi määrittelemään itsesimilaarin joukon käsitettä, johon liittyen tulee ensin ymmärtää käsitteet similaari kuvaus ja muuttumattomuus.

MÄÄRITELMÄ 1.14. Olkoon A avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätyhjä ja suljettu osajoukko.

(a) Kuvausta $S\colon A \to A$ sanotaan *piennennökseksi joukolla* A, jos on olemassa suhdeluku c siten, että $0 < c < 1$ ja $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$ kaikilla $x, y \in A$.

(b) Jos $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$, missä $0 < c < 1$, ovat joukot A ja $S(A)$ geometrisesti samanlaisia ja kuvausta S sanotaan *similaariksi kuvaukseksi.*

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoot kuvaukset $S_1, \ldots, S_m$ pienennöksiä. Joukon A osajoukkoa B sanotaan *muuttumattomaksi*, jos $B = \bigcup_{j=1}^{m} S_j(B)$.

Näin päästään itsesimilaarin joukon käsitteeseen.

MÄÄRITELMÄ 1.16. Olkoot kuvaukset $S_1, \ldots, S_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ similaareja. Joukkoa, joka on muuttumaton näiden similaarien kuvausten kokoelmalle, sanotaan *itsesimilaariksi joukoksi.*

Similaareihin joukkoihin liittyy seuraava tärkeä ominaisuus, jota hyödynnetään myöhemmin luvussa 4.

MÄÄRITELMÄ 1.17. (Avoimen joukon ehto) Olkoot kuvaukset $S_1, \ldots, S_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ similaareja. Sanotaan, että kuvaukset S_i toteuttavat *avoimen joukon ehdon*, jos on olemassa epätyhjä, rajoitettu ja avoin joukko A, jolle $A \supset \bigcup_{j=1}^{m} S_j(A)$, kun yhdisteen joukot ovat erillisiä.

Esimerkki 1.18. Cantorin 1/3-joukko on itsesimilaari joukko, jolle pätee avoimen joukon ehto. Itsesimilaarius seuraa tarkastelemalla kuvauksia $S_1, S_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille pätee

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \text{ ja } S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ja joiden suhdeluku on 1/3. Kuvauksille S_1 ja S_2 nimittäin pätee $S_1([0,1]) = [0, \frac{1}{3}]$ ja $S_2([0,1]) = [\frac{2}{3}, 1]$, jolloin

$$S_1([0,1]) \cup S_2([0,1]) = C_1.$$

Lisäksi kuvauksille S_1 ja S_2 pätee $S_1(C_1) = S_1([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ ja $S_2(C_1) = S_2([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]) = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, joten

$$S_1(C_1) \cup S_2(C_1) = C_2.$$

Näin jatkamalla saadaan lopulta, että koko joukolle C pätee

$$C = S_1(C) \cup S_2(C)$$

ja kyseessä on siten itsesimilaari joukko.

Avoimen joukon ehto puolestaan pätee, kun valitaan joukko $A = (0,1)$. Tällöin nimittäin pätee $S_1(A) = (0, \frac{1}{3})$ ja $S_2(A) = (\frac{2}{3}, 1)$, joten selvästi $A \supset \bigcup_{j=1}^{2} S_j(A)$.

LUKU 2

Numeroituvuus ja ylinumeroituvuus

Tässä luvussa tutustutaan siihen, miten joukon kokoa voidaan arvioida numeroituvuuden ja ylinumeroituvuuden käsitteiden kautta. Kyseiset käsitteet ovat matemaatikko Georg Cantorin (1845-1918) kehittämiä ja vaikuttivat oleellisesti joukko-opin kehittymiseen. Historiallisen näkökulman jälkeen tutkielmassa esitellään varsinaisesti tarkasteltavaan aiheeseen liittyvät matemaattiset käsitteet aloittaen joukkojen mahtavuudesta ja siirtyen joukkojen numeroituvuuteen ja ylinumeroituvuuteen ja näihin liittyviin ominaisuuksiin.

Lauseiden todistukset jätetään pääosin esittämättä, koska kyse on jokaiselle matematiikkaa opiskelleelle tutusta aiheesta. Todistuksiin voi kuitenkin halutessaan tutustua muun muassa Rudinin Principles of Mathematical Analysis [2], Denlingerin Elements of Real Analysis [22] ja Simovicin ja Tenneyn Theory of Formal Language with Applications [13] teosten kautta.

2.1. Georg Cantor (1845-1918)

Yksi nykyisen joukko-opin kehittäjistä on Venäjällä syntynyt, mutta suurimman osan elämästään Saksassa vaikuttanut Georg Cantor (1845-1918). Hän oli aikansa taitavimpia ja omaperäisimpiä matemaatikkoja, jonka keskeisimmät saavutukset liittyivät äärettömien joukkojen tutkimiseen. Cantorin innostukseen joukko-opista vaikuttivat osaltaan hänen tutkimuksensa koskien päättymättömiä trigonometrisia sarjoja, kontinuumia ja reaalilukuja. [6], [8], [9]

Cantor aloitti joukko-oppia koskevien kirjoitustensa sarjan vuonna 1874 julkaisten Crellen Journalissa yhden merkittävimmistä artikkeleistaan *On a Property of the Collection of All Real Algebraic Numbers* liittyen äärettömiin joukkoihin. Kyseisessä artikkelissa hän nosti esille keskeisen havaintonsa siitä, kuinka kaikki äärettömät joukot eivät olekaan samanlaisia. Esimerkiksi rationaaliluvut ja reaaliluvut oli huomattu erilaisiksi äärettömiksi joukoiksi. Tähän havaintoon Cantor päätyi joukon mahtavuuteen eli kardinaliteettiin liittyvien käsitteiden numeroituvuus ja ylinumeroituvuus kautta, jotka hän itse määritteli. Nämä merkittävät havainnot reaali- ja rationaalilukujen joukkojen erilaisuudesta toimivat pohjana Cantorin tuleville tutkimuksille, joiden kautta hän lähti kehittämään joukko-oppia. [6], [8]

Cantor julkaisikin vuosien 1874 ja 1897 välisenä aikana useita artikkeleita joukko-oppiin liittyen. Näiden artikkelien kautta hän vakiinnutti asemansa joukko-opin luojana ja huomasi, että äärettömät joukot voidaan laittaa täsmälliseen järjestykseen, kuten äärellisetkin joukot. Lisäksi Cantor muun muassa määritteli joukko-opin kehittymisen kannalta oleelliset transfiniitti luvut eli luvut, jotka eivät ole äärellisiä. Tällaisia lukuja olivat järjestystä ilmaisevat ordinaaliluvut ja kokoa ilmaisevat kardinaaliluvut. Kardinaalilukuihin liittyen Cantor muun muassa määritteli kontinuumin eli reaalilukujen joukon kardinaaliluvun. Hän ei harmikseen päässyt missään vaiheessa elämäänsä kuitenkaan lopputulemaan siitä, voiko kaikkia kardinaaliteetteja vertailla vai ei. Hänen olettamuksensa mukaan kaikki joukot olivat hyvin järjestettyjä, mistä seuraisi väitteen paikkansapitävyys. Mitään todisteita asian puolesta ei kuitenkaan esitetty. [6], [8]

Cantor esitteli myös muun muassa käsitteet perfekti joukko, tiheä joukko ja Cantorin joukko, joihin palataan tutkielman muissa osissa. Samalla hän yritti kuumeisesti ratkaista nykyisin kuuluisaa kontinuumihypoteesia. Kontinuumihypoteesin mukaan ei ole olemassa joukkoa, joka olisi mahtavuudeltaan kokonaislukujen joukkoa suurempi ja samalla pienempi kuin reaalilukujen joukon mahtavuus. Kyseistä kontinuumihypoteesiä ei ole vieläkään todistettu tai kumottu ja se kuuluukin Hilbertin 23 ratkaisemattoman matemaattisen ongelman listaan. [6], [25]

Elämänsä aikana Cantor ei saanut haluaamansa tunnustusta ansioistaan, vaan sai osakseen pikemminkin vastustusta. Yksi hänen vastustajistaan oli Leopold Kronecker. Osalla Cantorin vastustajista oli puhtaasti ennakkoluuloja uutta teoriaa kohtaan, mutta joukon käsitteen epämääräisyys oli osaltaan aiheellinen syy epäluuloisuuteen. Cantorin näkökulmasta joukko oli yksinkertaisesti vain ”mikä tahansa ajateltu objektien kokoelma”. Lopulta Cantor ei enää kestänyt saamaansa kritiikkiä ja erinäisten hermoromahdusten ja depressiokausien jälkeen hän kuoli Hallen mielisairaalassa vuonna 1918. [6], [8], [25]

Nykyisin Cantor on kuitenkin saavuttanut aseman yhtenä matematiikan historian keskeisimmistä henkilöistä. Loihanhan hän joukko-opista matemaattisesti täyspainotteisen teorian, jolla oli lisäksi myöhemmin suuri vaikutus matematiikan opetukseen. [8], [24]

2.2. Äärellisten ja tiettyjen äärettömien joukkojen mahtavuus

Seuraavaksi tarkastellaan niin äärellisten kuin muutamien äärettömien joukkojen mahtavuutta. Tätä kautta päästään käsiksi luvun keskeisiin mahtavuuteen liittyviin käsitteisiin numeroituvuus ja ylinumeroituvuus.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on äärellinen ja sen *kardinaliteetti* eli *mahtavuus* on m, jos on olemassa bijektio $f\colon A \to \{1, 2, 3, 4, ..., m\} \subset \mathbb{N}$.

Toisin sanoen joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ mahtavuus on m, jos joukon A alkiot voidaan järjestää yksi yhteen -vastaavasti joukon $\{1, 2, 3, 4, ..., m\} \subset \mathbb{N}$ alkioiden kanssa. Näin ollen äärellisen joukon mahtavuus vastaa siis joukon alkioiden lukumäärää.

ESIMERKKI 2.2. Joukon $A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subset \mathbb{R}$ mahtavuus eli alkioiden lukumäärä on 5, koska on olemassa bijektio $f\colon A \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f(x) = x/2$.

Ei ole kuitenkaan mielekästä tarkastella pelkästään äärellisiä joukkoja, joten siirrytään seuraavaksi äärettömiin joukkoihin ja niiden mahtavuuteen.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Jos joukko ei ole äärellinen, se on silloin ääretön.

Kuten äärellisillekin joukoille, osalle äärettömistä joukoista voidaan määrittää mahtavuus.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Äärettömän joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ mahtavuus on $\aleph_0$ (luetaan: alephnolla), jos on olemassa bijektio $f\colon A \to \mathbb{N}$.

Äärettömän joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ mahtavuus on siis $\aleph_0$, jos joukon A alkiot voidaan luetella siten, että $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Kyseiseen määritelmään palataan vielä seuraavassa luvussa. Myöhemmin tullaan muun muassa osoittamaan, kuinka rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q}$ mahtavuus on $\aleph_0$.

Muut kuin yllä esitellyt mahtavuudet eivät ole tämän tutkielman kannalta oleellisia, mutta niihin voi tutustua esimerkiksi Simmonsin teoksen Introduction to Topology and Modern Analysis [1] avulla.

Käydään nyt lyhyesti läpi, milloin joukot ovat yhtä mahtavat.

MÄÄRITELMÄ 2.5. Kaksi epätyhjää joukkoa $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ovat keskenään *yhtä mahtavat*, merkitään $A \simeq B$, jos on olemassa bijektio $f\colon A \to B$.

Kahden yhtä mahtavan, epätyhjän joukon alkiot voidaan siis järjestää keskenään yksi yhteen-vastaavasti.

ESIMERKKI 2.6. (a) Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ on yhtä mahtava osajoukkonsa $A = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ kanssa, $A \simeq \mathbb{N}$, koska joukkojen välillä on olemassa bijektio $f\colon \mathbb{N} \to A$, $f(x) = 2x$. Itseasiassa jokaiselle äärettömälle luonnollisten lukujen osajoukolle A pätee $A \simeq \mathbb{N}$.

(b) Joukoille $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{N}^2$ pätee $\mathbb{N} \simeq \mathbb{N}^2$. Joukkojen välillä on nimittäin olemassa bijektio $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$ [13, Esimerkki 1.6.22, s. 43].

Tilanteessa, jossa ei löydy bijektiota $f\colon A \to B$ ja on löydettävissä ainakin yksi injektio $f\colon A \to B$, sanotaan, että joukko B on *mahtavampi kuin* joukko A.

2.3. Joukkojen numeroituvuus ja ylinumeroituvuus

Seuraavaksi määritellään, milloin joukon voidaan sanoa olevan numeroituva tai vastaavasti ylinumeroituva. Määrittämällä kumpi käsite kuvaa tarkasteltavaa joukkoa, saadaan käsitys siitä, onko tarkasteltava joukko tietyllä tapaa pieni vai suuri. Numeroituvat joukot voidaan nimittäin tulkita kooltaan ylinumeroituvia joukkoja pienemmiksi.

MÄÄRITELMÄ 2.7. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *numeroituva*, jos sen mahtavuus on äärellinen tai $\aleph_0$.

Itseasiassa epätyhjän joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sanotaan olevan numeroituvasti ääretön, jos sen mahtavuus on $\aleph_0$. Näin ollen joukko on siis numeroituva, jos se on äärellinen tai numeroituvasti ääretön.

ESIMERKKI 2.8. (a) Luvun $\aleph_0$ määritelmästä seuraa suoraan, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön ja siten myös numeroituva. Sama pätee myös joukolle $\mathbb{N}^2$ Esimerkin 2.6b nojalla.

(b) Positiivisten rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}_+$ on numeroituvasti ääretön ja siten numeroituva. Tämä perustuu siihen, että joukko $\mathbb{Q}_+$, jossa nyt jokainen mahdollisimman yksinkertaiseksi sievennetty luku huomioidaan vain kerran, on yhtä mahtava joukon $\mathbb{N}^2$ kanssa eli muotoa (m, n) olevien luonnollisten lukujen järjestettyjen parien joukon kanssa. Näin on, koska kaikki positiiviset rationaaliluvut ovat muotoa $\frac{m}{n}$, missä n, m

$\in \mathbb{N}$. Joukosta $\mathbb{N}^2$ tiedetään Esimerkin 2.6b perusteella, että se on yhtä mahtava joukon $\mathbb{N}$ kanssa. Näin ollen voidaan päätellä, että joukot $\mathbb{Q}_+$ ja $\mathbb{N}$ ovat yhtä mahtavat, kuten haluttiinkin.

Myös koko rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva, koska $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^-\cup\{0\}\cup\mathbb{Q}^+$. Lisäksi joukko $\mathbb{Q}^n$ on numeroituva, mihin palataan seuraavassa alaluvussa.

Näin on saatu käsiteltyä numeroituvat joukot ja voidaan siirtyä ylinumeroituvuuteen.

MÄÄRITELMÄ 2.9. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *ylinumeroituva*, jos se on ääretön ja sen mahtavuus ei ole $\aleph_0$.

Voidaan siis sanoa, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on ylinumeroituva, jos se ei ole numeroituva. Tähän liittyen Cantor toi aikanaan esille muun muassa reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ja sen ylinumeroituvuuden. Väitteen perusteleminen tapahtuu vastaavasti kuin joukon $\mathbb{R}^n$ kohdalla. Tähän perehdytään seuraavassa alaluvussa.

2.3.1. Numeroituvuuteen ja ylinumeroituvuuteen liittyviä ominaisuuksia. Seuraavaksi tarkastellaan numeroituvuuteen ja ylinumeroituvuuteen liittyviä ominaisuuksia, jotta käsitteet ymmärrettäisiin syvällisemmin. Suurin osa luvussa esitettävistä lauseista on tuttuja matematiikan aineopinnoista, joten todistuksiin voi halutessaan tutustua lähdemateriaalien avulla.

Aloitetaan aiemmista Määritelmistä 2.1 ja 2.4 seuraavasta havainnosta.

SEURAUS 2.10. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, jos ja vain jos on olemassa injektio $f\colon A \to \mathbb{N}$.*

TODISTUS. [13, Lause 1.6.9, s. 40] □

Kyseisen seurauksen kohdalla on oltava tarkkana, koska siinä EI voida olettaa, että olisi olemassa bijektio $f\colon A \to \mathbb{N}$. Bijektiota ei nimittäin ole olemassa, jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on äärellinen.

Edellisen seurauksen lisäksi seuraava lause on hyödyllinen joukon numeroituvuuden kannalta.

LAUSE 2.11. *Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^n$ joukkoja siten, että joukko A on numeroituva. Jos on olemassa surjektio $f\colon A \to B$, niin joukko B on numeroituva.*

TODISTUS. [13, Lause 1.6.12i, s. 40-41] □

Kyseistä lausetta päästään vielä myöhemmin hyödyntämään Lauseen 2.16 todistuksessa.

Tarkastellaan nyt kuitenkin lausetta numeroituvien joukkojen osajoukoista.

LAUSE 2.12. *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva. Tällöin joukko $B \subseteq A$ on numeroituva.*

TODISTUS. [2, Lause 2.10, s. 23] □

Näin ollen ylinumeroituva joukko $B \subset \mathbb{R}^n$ ei voi olla numeroituvan joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ osajoukko.

Lisäksi äärettömien joukkojen osajoukoista osataan sanoa seuraavaa:

LAUSE 2.13. *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ääretön. Tällöin on olemassa joukko $B \subseteq A$ siten, että joukko B on numeroituvasti ääretön.*

TODISTUS. [22, Lause 2.8.4, s. 126] □

Tästä seuraa itseasiassa se, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on "pienin" ääretön joukko. Jokaisella äärettömällä joukolla täytyy nimittäin olla osajoukko, joka on yksi yhteen-vastaava luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ kanssa.

Osajoukkojen tarkastelusta siirrytään vielä joukkojen yhdisteen ja karteesisen tulon tarkasteluun.

LAUSE 2.14. *Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^n$ äärellinen määrä numeroituvia joukkoja. Tällöin karteesinen tulo $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ on numeroituva.*

TODISTUS. [13, Lause 1.6.16, s. 41] □

ESIMERKKI 2.15. Joukot $\mathbb{N}^n = \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{n}$ ja $\mathbb{Q}^n = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{n}$ ovat numeroituvia.

On tärkeä huomata, että karteesisen tulon numeroituvuus pätee vain äärelliselle määrälle joukkoja. Seuraava lause pätee puolestaan numeroituvan monelle joukolle.

LAUSE 2.16. *Olkoon joukko $A_j \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin yhdiste $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ on numeroituva.*

TODISTUS.

(1) Oletetaan aluksi, että joukot $A_j \subset \mathbb{R}^n$ ovat pareittain pistevieraita kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Jotta yhdiste $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ saadaan nyt osoitettua numeroituvaksi, yritetään Seurauksen 2.10 mukaisesti muodostaa injektiivinen funktio $f\colon \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \to \mathbb{N}$.

Koska joukko A_j on numeroituva, on olemassa injektiivinen funktio $f_j\colon A_j \to \mathbb{N}$. Luetteloidaan nyt alkuluvut, joita on äärettömän monta, siten, että $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ ja määritellään funktio $f\colon \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \to \mathbb{N}$ siten, että $f(x) = p_j^{f_j(x)} \in \mathbb{N}$. Riittää osoittaa, että funktio f on injektiivinen.

Olkoot pisteet $x, y \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ siten, että $x \neq y$.

(i) jos $x \in A_j$ ja $y \in A_k$, siten, että $k \neq j$, niin tällöin
$f(x) = p_j^{f_j(x)} \neq p_k^{f_k(x)} = f(y)$, koska $p_j \neq p_k$ ja voidaan hyödyntää aritmetiikan peruslausetta.

(ii) jos x ja y kuuluvat samaan joukkoon A_j, niin tällöin
$f_j(x) \neq f_j(y)$, koska funktio $f_j\colon A_j \to \mathbb{N}$ on injektiivinen. Tämän ja aritmetiikan peruslauseen vuoksi pätee
$f(x) = p_j^{f_j(x)} \neq p_j^{f_j(x)} = f(y)$.

Näin ollen funktio f on injektiivinen ja siten myös yhdiste $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ on osoitettu numeroituvaksi, kun joukot $A_j \subset \mathbb{R}^n$ ovat pareittain pistevieraita.

(2) Oletetaan nyt, että joukot $A_j \subset \mathbb{R}^n$ eivät ole pareittain pistevieraita kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja määritetään joukot A'_j siten, että $A'_j = A_j \times \{j\}$. Kyseiset joukot ovat selvästi pareittain pistevieraita, joten joukko $A' = \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j$ on numeroituva. Merkitään nyt $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Tällöin projektio $P_0^2 \colon A' \to A$ on surjektio ja siten joukko A on Lauseen 2.11 nojalla numeroituva. □

Näin ollen siis numeroituvan monen numeroituvan joukon yhdiste on numeroituva riippumatta siitä, ovatko joukot pareittain pistevieraita vai eivät.

Tarkastellaan seuraavaksi vielä perfektejä joukkoja ja niiden numeroituvuutta.

LAUSE 2.17. *Jokainen epätyhjä, perfekti joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on ylinumeroituva.*

TODISTUS. Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä ja perfekti. Koska joukolla A on tällöin kasautumispisteitä, joukon täytyy olla ääretön.

Oletetaan nyt, että joukko A on numeroituvasti ääretön ja merkitään $A = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Olkoon joukko V_1 avoin ja rajoitettu joukko siten, että $a_1 \in V_1$. Tällöin pätee $V_1 \cap A \neq \emptyset$. Jatkamalla tätä induktiivisesti saadaan joukot V_j, $j \in \mathbb{N}$, joille pätee siis $V_j \cap A \neq \emptyset$. Koska jokainen joukon A piste a_j on joukon A kasautumispiste, on nyt olemassa avoin joukko V_{j+1} siten, että

(i) $\overline{V}_{j+1} \subset V_j$,

(ii) $a_j \notin \overline{V}_{j+1}$,

(iii) $V_{j+1} \cap A \neq \emptyset$.

Olkoon nyt $K_j = \overline{V}_j \cap A$. Joukko K_j on suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti. Lisäksi leikkaukseen $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ ei sisälly joukon A pisteitä, koska $a_j \notin K_{j+1}$. Koska $K_j \subset A$, seuraa tästä, että $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j = \emptyset$. Kuitenkin jokaiselle K_j pätee, että $K_j \neq \emptyset$ (iii) ja $K_j \supset K_{j+1}$ (i). Näistä havainnoista seuraa ristiriita, koska tiedetään, että epätyhjille, kompakteille joukoille, joille $K_j \supset K_{j+1}$, pätee $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset$ [2, s. 33]. Näin ollen joukko A on ylinumeroituva.

□

ESIMERKKI 2.18. Cantorin 1/3-joukko ja reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ovat ylinumeroituvia, koska kyseiset joukot ovat perfektejä joukkoja.

Vastoin mahdollista alkuvaikutelmaa Cantorin 1/3-joukko ei siis koostu pelkästään poistettujen välien päätepisteistä, joita on numeroituva määrä, vaan sen sisältämien pisteiden lukumäärä on suuri. Cantorin 1/3-joukko voidaankin tulkita numeroituvuuden kannalta suureksi joukoksi siinä missä esimerkiksi joukko $\mathbb{R}$ ja vastaavasti joukko $\mathbb{R}^n$.

Nyt saadaan perusteltua myös irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ylinumeroituvaksi.

Esimerkki 2.19. Todetaan joukko $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ylinumeroituvaksi huomaamalla aluksi, että joukko $\mathbb{R}$ voidaan esittää yhdisteenä $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Lisäksi tiedetään, että joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva ja joukko $\mathbb{R}$ ylinumeroituvia. Jos joukko $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ olisi numeroituva, seuraisi tästä, että myös joukko $\mathbb{R}$ olisi numeroituva kahden numeroituvan joukon yhdisteenä. Näin ollen joukko $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ on välttämättä ylinumeroituva.

On hyvä huomata, että kyseinen esimerkki ei suoraan yleisty joukkoon $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^n$, vaan joukkoon $\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{Q}^n$. On kuitenkin selvää, että myös joukko $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^n$ on ylinumeroituva, koska kyseinen joukko muodostuu ylinumeroituvien joukkojen $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ karteesisena tulona, jolle pätee $\underbrace{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}_{n} \supset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \times \underbrace{\{0\} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}}_{n-1} \simeq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Näin on viimein saatu tutkittua esimerkiksi joukkojen $\mathbb{Q}^n$ ja $\mathbb{R}^n$ kokoja ja todettua odotusten mukaisesti, että joukko $\mathbb{Q}^n$ on numeroituvana joukkona pienempi ylinumeroituvaa joukkoa $\mathbb{R}^n$. Lisäksi vastaavasti on havaittu joukon $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^n$ olevan joukkoa $\mathbb{Q}^n$ suurempi.

Mielenkiintoisena tuloksena reaaliavaruudesta $\mathbb{R}$ on myös havaittu, kuinka pieneltä vaikuttava Cantorin 1/3-joukko on ylinumeroituvana joukkona rationaalilukujen joukkoa $\mathbb{Q}$ suurempi.

Ylinumeroituvien joukkojen kokojen vertailuun ei tässä työssä ole tarkemmin perehdytty, koska on riittävää ymmärtää ylinumeroituvat joukot suuriksi. Aiheeseen voi halutessaan tutustua esimerkiksi Brucknerin, Brucknerin ja Thomsonin teoksesta Real Analysis [11].

LUKU 3

Bairen kategoria

Cantorin numeroituvuuteen liittyvästä teoriasta siirrytään seuraavaksi osittain kyseiseen aiheeseen liittyvään Bairen kategoriaan. Kyseinen käsite on René-Louis Bairen (1874-1932) kehittämä, joten sitä lähdetään lähestymään Bairen henkilöhistorian ja siihen liittyvien ei-missään tiheiden joukkojen kautta.

3.1. René-Louis Baire (1874-1932)

René-Louis Baire (1874-1932) on erityisesti Bairen kategoria-lauseesta tunnettu ranskalainen matemaatikko. Hän oli opinnoissaan erittäin menestyksekäs ja pääsi professoriksi muun muassa Bar-le-Ducin lycéehen, jossa hän työskenteli funktioteorian parissa. [26]

Baire vaikutti elämänsä aikana Ranskan lisäksi Italiassa, jossa ollessaan hän aloitti vuonna 1898 kirjeiden kirjoittamisen Émile Borelin kanssa. Viiden vuoden kirjeenvaihdon aikana Baire keskusteli Cantorin joukko-opista ja toi esille muun muassa ensimmäisen ja toisen kategorian joukot, joista ollaan seuraavaksi kiinnostuneita.Tänä aikana Baire myös väitteli tohtoriksi epäjatkuvista funktioista. Vuonna 1899 hyväksytyssä väitöskirjassaan Baire todisti ensimmäistä kertaa Bairen kategoria-lauseen ja esitteli ei-missään tiheät joukot. [10], [26]

Tämän jälkeen Bairen heikko terveys vaikutti hänen elämäänsä niin, ettei hän pystynyt edistämään matematiikka kuin lyhyissä jaksoissa. Hän oli myös tyytymätön matala tasoiseen työhönsä lycéissa. Onnekseen hän kuitenkin pääsi työskentelmään Montpellierin yliopistoon vuonna 1901 ja tänä aikana hän keskittyi muun muassa irrationaalilukuihin. Heikon terveytensä vuoksi Baire kuitenkin luopui töistään vuonna 1914. [26]

Yhdeksi syyksi Bairen heikkoon terveyteen epäiltiin opiskeluaikaista ylirasitusta. Toiseksi syyksi esitettiin suurta turhautumista, jonka oli aiheuttanut se, että akateemiset auktoriteetit eivät olleet tunnustaneet hänen saavutuksiaan. Baire oli kokenut itsensä kaltoinkohdelluksi muun muassa, koska ei saanut professuuria Pariisissa. Tämän vuoksi hän lopulta masentui. Lisäksi Baire koki, että hänen kanssaan kokonaisluvuista kirjeenvaihtoa käynyttä, häntä nuorempaa Lebesgueta suosittiin epäreilusti. He kiistelivät esimerkiksi vuonna 1904 oikeudesta erään kurssin opettamiseen. [9], [26]

Vuoden 1918 jälkeen matemaattinen yhteisö havahtui Bairen kohteluun ja yritti hyvittää hänen ansioidensa tunnustumattomuuden. Hänelle suunniteltiin oppituolia Collége de Franceen, mutta suunnitelmat eivät koskaan toteutuneet. Hän sai kuitenkin arvostetun kunniamerkin Chevalier de la Legion d'Honneur ja lisäksi hänet valittiin vuonna 1922 vaikuttavan Academy of Sciencen jäseneksi. [26]

Elämänsä aikana Baire otti ratkaisevia askelia siirtyessään pois funktioiden ja jatkuvuuden intuitiivisesta ideasta ja nähdessään äärettömät joukot oleellisena osana täsmällistä reaalianalyysia. [26]

3.2. Ei-missään tiheät joukot

Seuraavaksi tutustutaan Bairen kehittämään teoriaan ei-missään tiheistä joukoista, joka on keskeisessä osassa myöhemmin esiteltävässä Bairen kategoria -teoriassa.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *ei-missään tiheä* avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jos jokaiselle avoimelle pallolle $B(x,r)$ joukossa $\mathbb{R}^n$ on olemassa avoin pallo $B(z,\delta) \subset B(x,r)$ siten, että $A \cap B(z,\delta) = \emptyset$.

Ei-missään tiheän joukon määritelmää kannattaa verrata määritelmään tiheästä joukosta. Kyseisen määritelmän mukaan joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{R}^n$, jos $\overline{A} = \mathbb{R}^n$ tai yhtä pitävästi, jos jokaiselle avoimelle pallolle $B(x,r)$, missä $x \in \mathbb{R}^n$, pätee $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Tässä vaiheessa on tärkeä huomata, että jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ei ole ei-missään tiheä, se ei tarkoita, että joukko olisi tiheä. Myöskään siitä, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ei ole tiheä, ei seuraa, että se olisi ei-missään tiheä. Tätä havainnollistetaan vielä myöhemmin Esimerkissä 3.3c.

Tarkastellaan nyt, miten ei-missään tiheän joukon voi tunnistaa suhteellisen yksinkertaisesti.

LAUSE 3.2. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on ei-missään tiheä, jos ja vain jos $int(\overline{A}) = \emptyset$.*

TODISTUS. Oletetaan aluksi, että $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$. Tällöin joukolla $\overline{A}$ ei ole sisäpisteitä x eli ei ole olemassa sädettä $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset \overline{A}$. On siis olemassa piste $z \in B(x,r)$ siten, että $z \notin \overline{A}$. Koska piste $z \in \overline{A}^c$, missä joukko $\overline{A}^c$ on suljetun joukon $\overline{A}$ komplementtina avoin joukko, on olemassa $\delta > 0$ siten, että $B(z,\delta) \subset B(x,r)$ ja $B(z,\delta) \cap \overline{A} = \emptyset$. Koska $A \subset \overline{A}$, seuraa tästä, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että $B(z,\delta) \subset B(x,r)$ ja $B(z,\delta) \cap A = \emptyset$. Näin ollen joukko A on ei-missään tiheä.

Oletetaan sitten, että joukko A on ei-missään tiheä ja tehdään antiteesi, jonka mukaan $\mathrm{int}(\overline{A}) \neq \emptyset$. Tällöin joukolla $\overline{A}$ on ainakin yksi sisäpiste eli on olemassa piste x ja säde $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset \overline{A}$. Tällöin kaikille pisteille z ja säteille $\delta > 0$, joille $B(z,\delta) \subset B(x,r)$, pätee $\overline{A} \cap B(z,\delta) \neq \emptyset$. Koska $\delta > 0$, seuraa tästä välttämättä, että kaikille pisteille z ja säteille $\delta > 0$, joille $B(z,\delta) \subset B(x,r)$, pätee $A \cap B(z,\delta) \neq \emptyset$. Tämä on vastoin joukon A ei-missään tiheyttä, joten antiteesi on väärin ja siten pätee $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$. □

Edellisestä lauseesta seuraa, että jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on ei-missään tiheä, niin myös joukko $\overline{A}$ on ei-missään tiheä. Tätä tietoa hyödynnetään myöhemmin esiteltäessä Bairen kategoria-lause.

On myös hyvä havaita, että avaruudessa $\mathbb{R}$ Lause 3.2 on selvästi yhtäpitävä lauseen kanssa, jonka mukaan joukko $A \subset \mathbb{R}$ on ei-missään tiheä, jos ja vain jos sen sulkeuma $\overline{A}$ ei sisällä epätyhjiä, avoimia välejä. Tätä tietoa hyödynnetään seuraavassa esimerkissä tarkasteltaessa Cantorin 1/3-joukon ei-missään tiheyttä.

ESIMERKKI 3.3. (a) Joukko $\mathbb{N}^n$ on ei-missään tiheä avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(b) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ jokainen yksittäinen piste $\{x\}$ on ei-missään tiheä avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(c) Joukko $A =]0,1[^n$ ei ole ei-missään tiheä avaruudessa $\mathbb{R}^n$, koska $\mathrm{int}(\overline{A}) = \mathrm{int}([0,1]^n) =]0,1[^n \neq \emptyset$. Kyseinen joukko ei ole myöskään tiheä, koska $\overline{A} = [0,1]^n \neq \mathbb{R}^n$.

(d) Cantorin 1/3-joukko $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ on ei-missään tiheä reaaliavaruudessa $\mathbb{R}$. Koska Cantorin joukko C on suljettu, tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että kyseinen joukko ei sisällä avoimia välejä. Olkoon siis J avoin väli välillä $[0,1]$ ja olkoon sen pituus λ. Valitaan nyt luku $n \in \mathbb{N}$ siten, että $1/3^n < \lambda$. Jokaisen joukon C_n sisältämän välin pituus on Cantorin joukon määritelmän pohjalta $1/3^n < \lambda$. Lisäksi kyseisen määritelmän perusteella tiedetään, että joukon C_n sisältämät välit ovat pareittain pistevieraita. Näin ollen joukko C_n ei voi sisältää väliä J ja siten ei myöskään Cantorin joukko $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Cantorin joukko ei siis sisällä avoimia välejä ja on siten ei-missään tiheä.

Seuraavan lauseen kautta on joskus helppo lähestyä tarkasteltavan joukon mahdollista ei-missään tiheyttä.

Lause 3.4. *Olkoot A_1, A_2, ..., $A_m \subset \mathbb{R}^n$ ei-missään tiheitä joukkoja. Tällöin $\bigcup_{j=1}^{m} A_j$ on ei-missään tiheä.*

Todistus. Olkoot joukot A_1 ja A_2 ei-missään tiheitä joukkoja. Osoitetaan, että $A_1 \cup A_2$ on ei-missään tiheä. Tätä kautta väite saadaan pätemään kaikille äärellisille yhdisteille ei-missään tiheitä joukkoja.

Olkoot siis joukot A_1 ja A_2 ei-missään tiheitä joukkoja ja olkoon joukko $A = A_1 \cup A_2$. Tällöin $\overline{A} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$, joten täytyy osoittaa, että $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$, kun tiedetään, että $\operatorname{int}(\overline{A_1}) = \operatorname{int}(\overline{A_2}) = \emptyset$. Olkoon nyt B avoin joukko siten, että $B \subseteq \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Jos piste $x \in B$, niin mikä tahansa pisteen x ympäröivä pallo joukossa B sisältää pisteitä joukoista $\overline{A_1}$ ja $\overline{A_2}$. Jos näin ei olisi ja pallo ei sisältäisi esimerkiksi joukon $\overline{A_1}$ pisteitä, pallo sisältyisi joukkoon $\overline{A_2}$, mikä on vastoin oletusta $\operatorname{int}(\overline{A_2}) = \emptyset$. Näin ollen mikä tahansa avoin joukko B joukossa $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ sisältyy joukkoon $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ ja siten pätee $B = \emptyset$. □

On tärkeää huomata, että Lauseessa 3.4 puhutaan vain äärellisestä yhdisteestä. Kyseinen väite ei nimittäin päde numeroituvalle yhdisteelle, kuten nähdään seuraavasta esimerkistä.

Esimerkki 3.5. Joukko $\mathbb{Q}^n$ on numeroituva yhdiste ei-missään tiheitä joukkoja, koska jokainen yksittäinen piste $\{q\} \in \mathbb{Q}^n$ on ei-missään tiheä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja toisaalta $\mathbb{Q}^n = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^n} \{\mathrm{q}\}$. Kuitenkin pätee $\operatorname{int}(\overline{\mathbb{Q}^n}) = \operatorname{int}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \neq \emptyset$. Näin ollen joukko $\mathbb{Q}^n$ ei ole ei-missään tiheä joukossa $\mathbb{R}^n$. Itse asiassa kyseinen joukko on nyt tiheä avaruudessa $\mathbb{R}^n$, koska $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

3.3. Bairen kategoria

Seuraavaksi päästään hyödyntämään tietoa ei-missään tiheistä joukoista tutustuttaessa Bairen kehittelemään teoriaan, jonka mukaan joukot voidaan jakaa kahteen erilaiseen kategoriaan.

Määritelmä 3.6. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *ensimmäistä kategoriaa*, jos on olemassa ei-missään tiheät joukot $A_j \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$.

Jos joukko A ei ole ensimmäistä kategoriaa, se on *toista kategoriaa.* Lisäksi ensimmäistä kategoriaa olevan joukon A komplementtia $\mathbb{R}^n \setminus A$ sanotaan *residuaalijoukoksi.*

Esimerkki 3.7. (a) Cantorin 1/3-joukko on ei-missään tiheänä joukkona ensimmäistä kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}$.

(b) Joukko $\mathbb{N}^n$ on ei-missään tiheänä joukkona ensimmäistä kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(c) Joukko $\mathbb{Q}^n$ on ei-missään tiheiden joukkojen numeroituvana yhdisteenä ensimmäistä kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

(d) Reaaliavaruudessa $\mathbb{R}$ rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on ensimmäistä kategoriaa, joten irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on residuaalijoukko.

On kuitenkin tärkeä huomata, että joukon kategoria voi vaihdella valitun metrisen avaruuden mukaan [ks. 20, s. 619]. Näin ollen tässä luvussa esiteltäviä esimerkkejä ei tule suoraan yleistää muihin avaruuksiin.

Seuraavaksi esitellään vielä muutama lause, joita voi hyödyntää luokiteltaessa joukkoja eri kategorioihin. Näistä lauseista jälkimmäinen on Bairen kategoria-lause avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Lause 3.8. *Jos joukot $A_j \subset \mathbb{R}^n$ ovat ensimmäistä kategoriaa kaikilla $j \in \mathbb{N}$, on joukko $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ensimmäistä kategoriaa.*

Todistus. Koska jokainen joukko A_j on ensimmäisen kategorian joukkona numeroituva yhdiste ei-missään tiheistä joukoista, on myös joukko $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ numeroituva yhdiste ei-missään tiheitä avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja. Näin ollen joukko $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ on ensimmäistä kategoriaa. □

Lause 3.9. *(Bairen kategoria-lause avaruudessa $\mathbb{R}^n$)*
Olkoon A numeroituva yhdiste ei-missään tiheitä joukkoja avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin joukko $\mathbb{R}^n \setminus A$ on tiheä avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Todistus. Olkoon $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, missä joukko A_j on ei-missään tiheä kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja olkoon B_0 epätyhjä, avoin pallo avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Osoitetaan, että $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B_0 \neq \emptyset$.

Koska joukko A_1 on ei-missään tiheä, on olemassa piste $x_1 \in B_0$ ja säde $r_1 < 1$ siten, että $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B_0$ ja $B(x_1, r_1) \cap A_1 = \emptyset$. Vastaavasti, koska joukko A_2 on ei-missään tiheä, on olemassa piste $x_2 \in B(x_1, r_1)$ ja säde $r_2 < 1/2$ siten, että $\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$ ja $B(x_2, r_2) \cap A_2 = \emptyset$. Näin jatkamalla ja merkitsemällä, että $B(x_j, r_j) = B_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, saadaan pallot $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ siten, että $r_j < 1/j$ ja että pätee $B_j \cap A_j = \emptyset$.

Jono $\{x_j\}$ on nyt Cauchy-jono, koska $d(x_j, x_k) \leq d(x_j, x_N) + d(x_N, x_k) < 2N^{-1}$, kun $j, k \geq N$. Koska avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen, on olemassa piste $x \in \mathbb{R}^n$ siten, että

$x_j \to x$. Nyt piste $x_{j+1} \in \overline{B}_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, joten $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{B}_j \subset B_0$ ja siten $x \in \overline{B}_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Jos nyt $x \in A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, niin välttämättä $x \in A_j$ jollain $j \in \mathbb{N}$. Olkoon tämä joukko nyt A_k, jolloin $x \in A_k$. Koska $x \in \overline{B}_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, voidaan valita k siten, että $x \in \overline{B}_{k+1}$, jolloin siitä, että $\overline{B}_{k+1} \subset B_k$ seuraa, että $x \in B_k$. Tällöin olisi siis olemassa piste x siten, että $x \in A_k$ ja $x \in B_k$. Tämä on vastoin sitä, että aiemmin todettiin kaikille $j \in \mathbb{N}$ pätevän $B_j \cap A_j = \emptyset$. Ei siis voi olla olemassa indeksiä $j \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in A_j$. Näin ollen on olemassa piste x siten, että $x \in (\mathbb{R}^n \backslash A) \cap B_0$ ja siten $(\mathbb{R}^n \backslash A) \cap B_0 \neq \emptyset$. $\square$

Bairen kategoria-lauseesta seuraa siis, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ residuaalijoukot ovat tiheitä. Lisäksi kyseisestä lauseesta saadaan pääteltyä avaruuden $\mathbb{R}^n$ kategoria, kuten seuraavasta esimerkistä nähdään.

Esimerkki 3.10. Joukko $\mathbb{R}^n$ on toista kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Jos näin ei olisi, joukko $\mathbb{R}^n$ olisi ensimmäistä kategoriaa ja sen komplementtijoukko $\emptyset$ olisi residuaalijoukko. Tällöin Bairen kategoria-lauseesta seuraisi, että joukko $\emptyset$ olisi tiheä, mikä ei ole totta. Näin ollen joukon $\mathbb{R}^n$ on oltava toista kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Kun tiedetään joukon $\mathbb{R}^n$ kategoria, saadaan Bairen kategoria-lauseen avulla vielä pääteltyä, että residuaalijoukot ovat paitsi tiheitä, myös toista kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Jos jokin residuaalijoukko olisikin nimittäin ensimmäistä kategoriaa, voitaisiin joukko $\mathbb{R}^n$ esittää yhdisteenä ensimmäisen kategorian joukoista A ja $\mathbb{R} \backslash A$. Tällöin Lauseesta 3.8 seuraisi, että myös joukko $\mathbb{R}^n$ olisi ensimmäistä kategoriaa, mikä on vastoin Esimerkkiä 3.10. Näin ollen avaruuden $\mathbb{R}^n$ residuaalijoukot ovat välttämättä toista kategoriaa.

Esimerkki 3.11. Joukko $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ on avaruuden $\mathbb{R}$ residuaalijoukkona toista kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}$.

Vaikka edellinen esimerkki yleistyykin vain joukkoon $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Q}^n$, on toisaalta myös joukko $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^n$ toisen kategorian joukko. On nimittäin uskottavaa, että jos joukkoa $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ei voida esittää yhdisteenä ei-missään tiheistä joukoista, ei näin voida tehdä myöskään joukon karteesiselle tulolle $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})^n$ [ks. tarkemmin 3, Lause 15.3, s. 57].

Näin on esimerkkien kautta tutustuttu Bairen kategorioihin ja voidaan nostaa esille tähän työhön keskeisesti liittyvä aihe joukon koosta. Täydellisissä metrisissä avaruuksissa ensimmäisen kategorian joukot voidaan tulkita kategoriamielessä ”pieniksi”, kun taas residuaalijoukot ovat tässä mielessä ”suuria”. Residuaalijoukot ovat nyt ”suuria”, koska ne ovat tiheitä ja jokainen residuaalijoukkojen jonojen leikkaus on edelleen tiheä. Näin ollen ensimmäisen kategorian joukot ovat ”pieniä”, koska niiden komplementtijoukot ovat aina tiheitä ja millä tahansa ensimmäisen kategorian joukkojen yhdisteellä on tiheä komplementti. Tällä periaatteella aiempien esimerkkien pohjalta voidaan todeta, että esimerkiksi rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ja Cantorin 1/3-joukko ovat kategoriamielessä ”pieniä” ja vastaavasti joukko $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ”suuri” avaruudessa $\mathbb{R}$.

Itse asiassa täydellisissä metrisissä avaruuksissa myös toisen kategorian joukot ovat ”suuria”, koska ne ovat residuaalijoukkoja. Näin on esimerkiksi joukon $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ suhteen.

Vastaava ei kuitenkaan päde, jos liikutaan epätäydellisessä metrisessä avaruudessa. Tämän vuoksi tulee aina olla tarkkana sen suhteen, mikä avaruus on kyseessä.

LUKU 4

Joukon mitta

Cantorin pohdinnat liittyen joukon kokoon eivät vaikuttaneet vain Baireen, vaan myöhemmin muun muassa myös Henri Lebesgueen (1875-1941) ja Felix Hausdorffiin (1862-1942). Seuraavaksi tarkastellaankin tähän liittyen joukon kokoa mitan käsitteen kautta. Tarkoituksena on tutustua Lebesguen ja Hausdorffin henkilötarinoiden kautta siihen, miten joukon kokoa voidaan arvioida Lebesguen mitan ja Hausdorff-mittaan liittyvän Hausdorff-dimension avulla.

Lebesguen mitta on lähellä monille tuttua Jordan mittaa, joten siihen liittyvät todistukset jätetään tässä esittämättä. Todistuksiin voi kuitenkin halutessaan tutustua muun muassa Burken teoksen Lebesgue Measure and Integration - An Introduction [12] kautta. Hausdorff-dimensio ja siihen liittyvä Hausdorff-mitta ovat monille puolestaan hieman tuntemattomampia käsitteitä, joihin pyritään tutustumaan paremmin muutamien todistuksien kautta.

4.1. Henri Lebesgue (1875-1941)

Cantorin kehittämä joukko-oppi johti vähitellen uusiin teorioihin liittyen mitallisuuteen ja integroimiseen. Muun muassa näitä aiheita tutki ranskalainen Henri Lebesgue (1875-1941), jota on tituleerattu jopa "jatkoajan Arkhimedeeksi". Hän oli niin opettajana kuin tutkimustöissä toiminut etevä matemaatikko, joka ehti elämänsä aikana kirjoittaa monta kirjaa ja artikkelia mittateorian lisäksi muun muassa joukko-opista. [8], [27]

Teorian mitasta Lebesgue muotoili vuonna 1901 artikkelissaan *Sur une généralisation de l'intégrale définie* ja sitä seuraavana vuonna väitöskirjassaan tähän liittyen määritelmän Lebesguen integraalista mullistaen integraalilaskennan. Osaltaan tähän olivat vaikuttaneet Lebesguen vuosien 1898-1899 tutkimukset Bairen töistä liittyen epäjatkuviin funktioihin. Hän oli nimittäin havahtunut siihen, kuinka paljon tähän aiheeseen liittyen voisi vielä saada aikaiseksi. Lebesguen työ kuitenkin erosi yleisesti hyväksytyistä näkemyksistä niin paljon, että hän sai Cantorin tapaan osakseen laajasti niin ulkoista kritiikkiä kuin sisäistä epäilyä. [27]

Lebesguen taitavuudesta matemaatikkona kertovat kuitenkin muun muassa hänen saavutuksensa liittyen Fourier analyysiin, josta hän kirjoitti väitöstyössään integraalin lisäksi. Lebesgue myös kutsuttiin jo nuoressa iässä ja vieläpä kahdesti pitämään Cours Peccot Collége de Franceen. Kyseessä oli lyhyen luentosarjan pitäminen omista tutkimusaiheista. Kunnian tähän saivat kuitenkin vuosittain vain muutama edistynyt matemaatikko. [27]

Itseasiassa juuri Cours Peccotin aikana Lebesgue tutustui Baireen henkilönä ja ajautui tämän kanssa riitoihin liittyen siihen, kenellä oli suurin oikeus opettaa kyseistä kurssia. Kurssien pohjalta Lebesgue kirjoitti vielä muun muassa primitiivisten funktioiden integroinnista ja trigonometrisistä sarjoista, mutta sai jälleen osakseen vastustusta, kuten moni muukin matemaatikko aikanaan. [27]

Ajoittaisesta vastustuksesta huolimatta Lebesguen näkemyksiä alettiin vähitellen hyväksyä vuoden 1910 tienoilla. Hänet valittiinkin elämänsä aikana moniin arvostettuihin akatemioihin, kuten Academy of Scienceen. Lisäksi hän sai useita kunniatohtorin arvoja ja voitti lukuisia palkintoja. [27]

4.2. Lebesguen mitta

Lebesguen kehittämän Lebesguen mitan avulla saadaan määriteltyä avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukon A mitta, joka yksinkertaisissa tapauksissa vastaa geometrista mittaa. Näin ollen avaruuden $\mathbb{R}^1$ janan Lebesguen mitta vastaa janan pituutta, avaruuden $\mathbb{R}^2$ suorakaiteen mitta sen pinta-alaa, avaruuden $\mathbb{R}^3$ suorakulmaisen laatikon mitta sen tilavuutta ja niin edelleen. Tapauksessa n puhutaan yleensä n-ulotteisesta tilavuudesta.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Jos joukko $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suuntaissärmiö, niin

$$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

määritellään joukon A *n-ulotteiseksi tilavuudeksi.*

Näin päästään Lebesguen mitan käsitteeseen.

MÄÄRITELMÄ 4.2. Olkoon A avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja olkoot joukot A_j avaruuden $\mathbb{R}^n$ suuntaissärmiöitä. Lukua

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} vol^n(A_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\}$$

sanotaan joukon A n-ulotteiseksi *Lebesguen (ulko)mitaksi.*

Lebesguen mitalla pyritään siis määrittämään joukon koko peittämällä tarkasteltava joukko ulkoapäin yksinkertaisilla joukoilla, kuten suorakulmioilla, joiden mitta tiedetään ja tehden siten mahdollisimman hyvä arvio.

Lebesguen mitta ei voi saada negatiivisia arvoja, joten $0 \leq \mathcal{L}^n(A) \leq \infty$. Kyseessä onkin joukkofunktio $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, missä $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{A : A \subset \mathbb{R}^n\}$ on joukon $\mathbb{R}^n$ potenssijoukko.

ESIMERKKI 4.3. Jokaiselle pisteelle $\{p\} \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\mathcal{L}^n(\{p\}) = 0$. Tämä nähdään valitsemalla $\epsilon > 0$ ja joukot $A_1 =]p_1 - \epsilon, p_1 + \epsilon[\times]p_2 - \epsilon, p_2 + \epsilon[\times \cdots \times]p_n - \epsilon, p_n + \epsilon[$ ja $A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$. Tällöin $\{p\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ja Määritelmän 4.2 perusteella

$$\mathcal{L}^n(\{p\}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} vol^n(A_j) = vol^n(A_1) = 2^n \epsilon^n \to 0,$$

kun $\epsilon \to 0$. Näin ollen $\mathcal{L}^n(\{p\}) = 0$.

Kun joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\mathcal{L}^n(A) = 0$, sanotaan, että joukko A on *nollamittainen.* Kaikki tällaiset joukot voidaan ymmärtää hyvin pieniksi.

Esimerkki 4.4. Cantorin 1/3-joukolle C pätee $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, missä jokainen joukko C_n sisältää 2^n kappaletta välejä, joiden pituudet ovat $1/3^n$. Kun $n \to \infty$, pätee $2^n \cdot \frac{1}{3^n} \to 0$, joten $\mathcal{L}^1(C) = 0$ [ks. tarkemmin 22, lause 3.4.21, s. 170-171]. Kyse on siis Lebesguen mitan kannalta pienestä joukosta.

Lebesguen mitalle pätee seuraava tärkeä ominaisuus, jota hyödynnetään muun muassa Esimerkissä 4.6.

Lause 4.5. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ n-väli. Tällöin $\mathcal{L}^n(I) = vol^n(I)$.*

Todistus. [12, Lause 3.1, s. 95-96] □

Esimerkki 4.6. Olkoon $n = 2$. Tarkastellaan janaa tasossa eli joukkoa $A = \{(x, 0) : a \le x \le b\} \subset \mathbb{R}^2$. Olkoon nyt $\epsilon > 0$ ja $A_1 =]a - \epsilon, b + \epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbb{R}^2$ avoin 2-väli ja $A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$. Näin ollen joukko $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ ja Määritelmän 4.2 nojalla

$$\mathcal{L}^2(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} vol^2(A_j) = vol^2(A_1) = 2\epsilon(b - a + 2\epsilon) \to 0,$$

kun $\epsilon \to 0$. Tällöin $\mathcal{L}^2(A) = 0$. Sama pätee kaikille Lebesguen mitoille $\mathcal{L}^n(A)$, kun $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Jos taas joukko A ajatellaan reaaliakselin $\mathbb{R}$ osajoukoksi, se on muotoa $[a, b]$ ja tällöin Lauseen 4.5 perusteella $\mathcal{L}^1(A) = b - a \neq 0$.

Kuten edellisestä esimerkistä nähdään, Lebesguen mitta on siis äärellinen, positiivinen luku korkeintaan yhdellä arvolla n.

Kyseiseen mittaan liittyy lisäksi vielä muutama tämän tutkielman kannalta oleellinen ominaisuus, joita tarkastellaan ennen viimeisiä esimerkkejä.

Lause 4.7. *Joukkofunktiolla $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ on ominaisuudet:*

(i) $\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$.

(ii) Jos $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, niin $\mathcal{L}^n(A) \le \mathcal{L}^n(B)$. (monotonisuus)

(iii) Jos $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$, niin $\mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_j)$. (subadditiivisuus)

Todistus. [12, Lause 3.1, s. 95-99] □

Lauseen 4.7 ominaisuudet pätevät kaikille avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukoille ja osoittavat, että Lebesguen mitta on mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Kun rajoitutaan tutkielmassa keskeisiin Borel-joukkoihin, saadaan pätemään myös seuraava tärkeä ominaisuus:

Lause 4.8. *Jos joukot A_j ovat erillisiä Borel-joukkoja, niin*

$$\mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_j). \textit{ (täysadditiivisuus)}$$

Todistus. [17, Lause 3.2, s. 19-20] □

Täysadditiivisuus pätee muillekin joukoille kuin Borel-joukoille, mutta tässä tutkielmassa riittää keskittyä Borel-joukkoihin.

Näin päästään tarkemmin tutkimaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ ja muutamien sen osajoukkojen Lebesguen mittaa.

Esimerkki 4.9. (a) Joukolle $\mathbb{R}^n$ pätee $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n) = \infty$. Tämä nähdään valitsemalla jono sisäkkäisiä avoimia n-välejä $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, joille $A_j = (-j, j)^n$, kun $j = 1, 2, \ldots$ Tällöin nimittäin Lauseesta 4.7ii ja 4.5 seuraa, että

$$\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{L}^n(A_j) = \lim_{j\to\infty} vol^n(A_j) = \lim_{j\to\infty} (2j)^n = \infty.$$

(b) Joukolle $\mathbb{N}^n$ ja joukolle $\mathbb{Q}^n$ pätee $\mathcal{L}^n(\mathbb{N}^n) = \mathcal{L}^n(\mathbb{Q}^n) = 0$. Tähän palataan tarkemmin luvussa 5.3.

(c) Ratinaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ ja irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sen komplementtina ovat erillisiä Borel-joukkoja, jolloin Lauseen 4.8 ja tämän esimerkin a ja b -kohtien mukaan

$$\infty = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1(\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) + \mathcal{L}^1(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}).$$

Esimerkin 4.9 c-kohta yleistyy joukkoon $\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{Q}^n$, joten kyseiselle joukolle pätee $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{Q}^n) = \infty$. Myös joukolle $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^n$ pätee $\mathcal{L}^n((\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^n) = \infty$, mutta tämä perustuu siihen, kuinka Lebesguen mitta käsittelee karteesista tuloa [ks. tarkemmin 15, Lause 14, s. 375-376].

Lebesguen mitan perusteella on näin saatu, että esimerkiksi Cantorin 1/3-joukko sekä joukot $\mathbb{N}^n$ ja $\mathbb{Q}^n$ ovat nollamittaisina joukkoina pieniä, kun taas joukot $\mathbb{R}^n$ ja $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^n$ ovat suuria niiden mitan ollessa ääretön. Seuraavaksi voidaankin siirtyä Felix Hausdorffin elämään ja siihen, mitä uutta Hausdorff-mitta ja -dimensio tuovat Lebesguen mittaan verrattuna.

4.3. Felix Hausdorff (1862-1942)

Saksalaista Felix Hausdorffia (1862-1942) pidettiin aikansa Cantorilaisena numero 1 ja hän olikin yksi joukko-opin jatkajista Cantorin jättäytyessä eläkkeelle. Cantorin joukko-opista kiinnostuneena hän jatkoikin Cantorin jalanjäljissä kehittäen joukko-opista matematiikan oman haaran, joka tuki niin yleistä topologiaa kuin mittateoriaakin. Lisäksi hän aloitti yleisen topologian muotoilun siihen muotoon, missä se nykyään ymmärretään ja myötävaikutti merkittävästi mittateorian kehitykseen. [9], [19]

Hausdorff olikin yksi 1900-luvun alun etevimpiä saksalaismatemaatikkoja, vaikka hän olikin etenkin nuorempana kiinnostuneempi kirjallisuudesta kuin matematiikasta. Kirjallisuuden kiinnostuksen ohella hän kuitenkin väitteli tohtoriksi matematiikan astronomiaan soveltuvista sovelluksista ja vuonna 1904 hän aloitti työskentelemään topologian ja joukko-opin parissa, mitä kautta hänestä tuli kuuluisa. Hän esitteli muun muassa osittain järjestetyt joukot. Hän toimi myös professorina ja julkaisi vuonna 1914 kuuluisan teoksensa *Grundzüge der Mengenlehre*, jossa luotiin teoriaa topologiasta ja metrisistä avaruuksista. Kyseinen teos toimi perustana modernille joukko-opille. Vuonna 1919 Hausdorff lisäksi esitteli artikkelissa *Dimension und äusseres Mass* Hausdorff -mitan ja Hausdorff -dimension, joka oli yleistys Carathéodoryn aiemmin kehittelemästä teoriasta ja Lebesguen teoriaa monipuolisempi. Kyseisessä artikkelissa Hausdorff esitteli kuuluisan tuloksen Cantorin joukon dimensiosta, johon palataan tämän tutkielman viimeisessä luvussa. [19], [28]

Hausdorff jatkoi tutkimuksiaan matematiikan parissa elämänsä loppuun asti ja tutki monipuolisesti niin mittateoriaa, topologiaa kuin esimerkiksi todennäköisyysteoriaakin. Juutalaisen taustansa vuoksi hän kuitenkin päätyi lopulta itsemurhaan välttääkseen natsien ylläpitämän keskitysleirin. [19], [28]

Hausdorffista ehti ansioidensa vuoksi kuitenkin tulla tärkeä matemaatikko, jonka työt ovat säilyneet nykypäivään asti relevantteina ja vaikutusvaltaisina. [28]

4.4. Hausdorff -mitta ja -dimensio

Hausdorffin kehittelemä Hausdorff-mitta on yleistys aiemmin esitellystä Lebesguen mitasta. Se on siitä merkittävä, että se on määritettävissä kaikille joukoille. Toisin kuin Lebesguen mitassa, jossa joukko peitetään esimerkiksi suorakulmioilla, Hausdorff-mitassa joukko peitetään mielivaltaisella joukolla, kuten esimerkiksi palloilla.

Hausdorff-mitan käsitteen avulla päästään käsiksi luvun keskeisimpään asiaan eli Hausdorff -dimensioon. Kyseinen käsite on tärkeä, koska toisin kuin Lebesguen mitta, se pystyy erottelemaan nollamittaisia joukkoja toisistaan.

Määritellään kuitenkin aluksi Hausdorff-mitta, joka on tämän tutkielman kannalta riittävä määritellä vain avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

MÄÄRITELMÄ 4.10. (a) Olkoon E epätyhjä avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Tällöin

$$|E| = \sup\{|x-y| : x, y \in E\}$$

on joukon E *halkaisija.*

(b) Olkoon $\{E_j\}$ numeroituva kokoelma joukkoja, joille $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ja $0 < |E_j| \leq \delta$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $\{E_j\}$ on joukon A *δ-peite.*

MÄÄRITELMÄ 4.11. Olkoon A avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja $s > 0$. Määritellään kaikille $\delta > 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} |E_j|^s : \{E_j\} \text{ on joukon A } \delta-\text{peite}\}.$$

Tällöin *Hausdorff -mitta* on raja-arvo $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.

HUOMAUTUS 4.12. Sovitaan jatkoa varten, että $|\emptyset|^s = 0$ ja $|\{x\}|^0 = 0^0 = 1$ kaikilla $0 \leq s < \infty$ ja $x \subset \mathbb{R}^n$.

Ajatuksena Hausdorff-mitassa on siis minimoida halkaisijoiden s:nsistä potensseista saatu summa, kun tarkastellaan sellaisia joukon A peittäviä joukkoja, joiden halkaisija on korkeintaan δ. Luvun δ pienetessä joukon A mahdollisten peitteiden lukumäärä vähenee, joten $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ kasvaa saavuttaen raja-arvon, kun $\delta \to 0$.

ESIMERKKI 4.13. Yksittäiselle pisteelle $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\mathcal{H}^0(\{x\}) = 1$, koska piste $\{x\}$ voidaan peittää yhdellä δ-peitteellä E_1, jolle $|E_1|^0 = 1$. Joukoiksi E_j, missä $j = 2, 3, \ldots$, valitaan $E_j = \emptyset$, jolloin Huomautuksen 4.12 nojalla $|E_2| = \cdots = |E_n| = 0$.

Esimerkki 4.14. Similaarikuvaukselle S, jolla on skaalauskerroin $\lambda > 0$ ja joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\mathcal{H}^s(S(A)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$. Jos nimittäin $\{E_j\}$ on joukon A δ-peite, niin vastaavasti $\{S(E_j)\}$ on kuvauksen $S(A)$ $\lambda\delta$-peite. Tällöin

$$\sum_j |S(E_j)|^s = \lambda^s \sum_j |E_j|^s,$$

joten ottamalla infimum saadaan $\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(S(A)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A)$. Kun $\delta \to 0$, niin $\mathcal{H}^s(S(A)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$. Käänteinen epäyhtälö saadaan muuttamalla $S = S^{-1}$, jolloin $\lambda = \lambda^{-1}$ ja $A = S(A)$.

Hausdorff-mitalle pätevät Lebesguen mitan tapaan Lauseen 4.7 vaatimukset mukaan lukien erillisten Borel-joukkojen täysadditiivisuuden.

Lause 4.15. *Hausdorff-mitta $\mathcal{H}^s(A)$ on mitta.*

Todistus. [11, s. 326-327] □

Jatkon kannalta on tärkeää huomata, että Hausdorff-mitta on positiivinen ja äärellinen korkeintaan yhdellä eksponentin s arvolla:

Lause 4.16. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$.*

(a) Jos $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $\mathcal{H}^\beta(A) = 0$ kaikilla $\beta > s$.

(b) Jos $\mathcal{H}^s(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^\alpha(A) = \infty$ kaikilla $0 < \alpha < s$.

Todistus. Todistetaan kohta a. Olkoon joukot E_j siten, että $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, missä $|E_j| \leq \delta$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} |E_j|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^\beta_\delta(A) &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_j|^\beta \leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_j|^{\beta-s}|E_j|^s \\ &\leq \delta^{\beta-s} \sum_{j=1}^{\infty} |E_j|^s \leq \delta^{\beta-s}(\mathcal{H}^s_\delta(A) + 1).\end{aligned}$$

Väite seuraa, kun $\delta \to 0$, koska $\beta - s > 0$. □

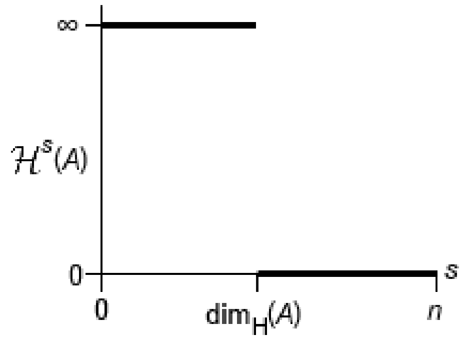
Lauseen 4.16 kohta b seuraa kohdasta a, eikä sitä siten todisteta tässä erikseen. Kyseinen kohta on tässä tuotu erikseen esille, koska sitä kautta päästään keskeiseen aiheeseen, Hausdorff-dimensioon.

Tarkastellessa Hausdorff-mittaa $\mathcal{H}^s(A)$ kuvaajana, jonka muuttuja on s, voidaan kuvaajasta nimittäin huomata kriittinen arvo s, jonka kohdalla $\mathcal{H}^s(A)$ hyppää arvosta ∞ arvoon 0 (Kuva 4.1).

Seuraavaksi keskitytään tähän kriittiseen arvoon s, joka tunnetaan Hausdorff-dimensiona. Se kuvaa, kuinka paljon tilaa tarkasteltava joukko vie ja sisältää paljon tärkeää tietoa joukon geometrisista ominaisuuksista.

Määritelmä 4.17. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Hausdorff-dimensio on

$$\dim_H(A) = \sup\{\alpha \geq 0 : H^\alpha(A) = \infty\} = \inf\{\beta \geq 0 : H^\beta(A) = 0\}.$$



KUVA 4.1. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Hausdorff-mitan kuvaaja.

Jos siis $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $s = dim_H(A)$. Jos taas ei ole olemassa sellaista arvoa $s > 0$, jolle $\mathcal{H}^s(A) = \infty$, niin tällöin $dim_H(A) = 0$.

ESIMERKKI 4.18. Yhden pisteen joukolle $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\dim_H(\{x\}) = 0$.

Hausdorff-dimensioon liittyy seuraavia hyödyllisiä ominaisuuksia.

LAUSE 4.19. *Olkoot A ja $B \subset \mathbb{R}^n$ joukkoja siten, että $A \subset B$. Tällöin*

$$dim_H(A) \leq dim_H(B). \text{ (monotonisuus)}$$

TODISTUS. [18, s. 32] □

LAUSE 4.20. *Numeroituvalle yhdisteelle joukkoja $A_j \subset \mathbb{R}^n$ pätee*

$$dim_H(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = sup\ dim_H(A_j).$$

TODISTUS. [18, s. 32] □

ESIMERKKI 4.21. (a) Joukolle $\mathbb{R}^n$ pätee $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$.

(b) Jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$, niin $\dim_H(A) \in [0, n]$ kohdan a ja monotonisuuden perusteella.

(c) Lauseesta 4.20 seuraa, että joukolle $\mathbb{Q}^n$ pätee $\dim_H(\mathbb{Q}^n) = 0$. Tähän palataan tarkemmin alaluvussa 5.2.

Seuraavaksi tutustutaan Cantorin 1/3-joukon Hausdorff-dimensioon, joka on poikkeuksellisen yksinkertainen määrittää. Tämä liittyy lukuun 1.4, jossa todettiin, kuinka Cantorin 1/3-joukko on itsesimilaari ja toteuttaa avoimen joukon ehdon.

LAUSE 4.22. *Olkoot kuvaukset S_j sellaisia similaareja kuvauksia avaruudessa $\mathbb{R}^n$, joiden suhdeluvut ovat c_j, missä $1 \leq j \leq m$, ja joille pätee avoimen joukon ehto. Jos joukko A on muuttumaton eli toisin sanoen $A = \bigcup_{j=1}^{m} S_j(A)$, niin $dim_H(A) = s$, missä luku s saadaan yhtälöstä*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j^s = 1.$$

Todistus. Todistus on monimutkainen, joten tässä riittää ymmärtää todistuksen idea. Tarkemmat yksityiskohdat voi katsoa Falconerin teoksesta Fractal Geometry [18, Lause 9.3, s. 130-132].

Ideana on siis, että joukko A voidaan esittää muodossa $A = \bigcup_{j=1}^{m} S_j(A)$, missä kuvaukset S_j ovat lähes erillisiä (avoimen joukon ehto). Tällöin nimittäin Hausdorff-mitan skaalausominaisuudesta (Esimerkki 4.14) ja similaarin kuvauksen määritelmästä 1.14b seuraa, että

$$\mathcal{H}^s(A) = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{H}^s(S_j(A)) = \sum_{j=1}^{m} c_j^s \mathcal{H}^s(A).$$

Olettamalla nyt, että arvolla $s = \dim_H(A)$ pätee $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, saadaan luvulle s pätemään $\sum_{j=1}^{m} c_j^s = 1$. Todistus siitä, että $s = dim_H(A)$ seuraa ylä- ja alarajojen tarkastelun kautta, mihin voi tutustua lähdekirjallisuudesta. □

Esimerkki 4.23. Cantorin 1/3-joukon Hausdorff-dimensio saadaan Lauseen 4.22 avulla, koska kyseinen joukko on todettu jo aiemmin itsesimilaariksi ja avoimen joukon ehdon täyttäväksi. Näiden aiempien havaintojen perusteella tiedetään, että similaareja kuvauksia on kaksi, S_1 ja S_2 ja suhdeluku $c = 1/3$. Näin ollen

$$\sum_{j=1}^{2} c_j^s = 1 \Leftrightarrow (\tfrac{1}{3})^s + (\tfrac{1}{3})^s = 1 \Leftrightarrow (\tfrac{1}{3})^s = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow s = \tfrac{\log 1/2}{\log 1/3} = \tfrac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63.$$

Siispä $\dim_H(C) \approx 0,63$.

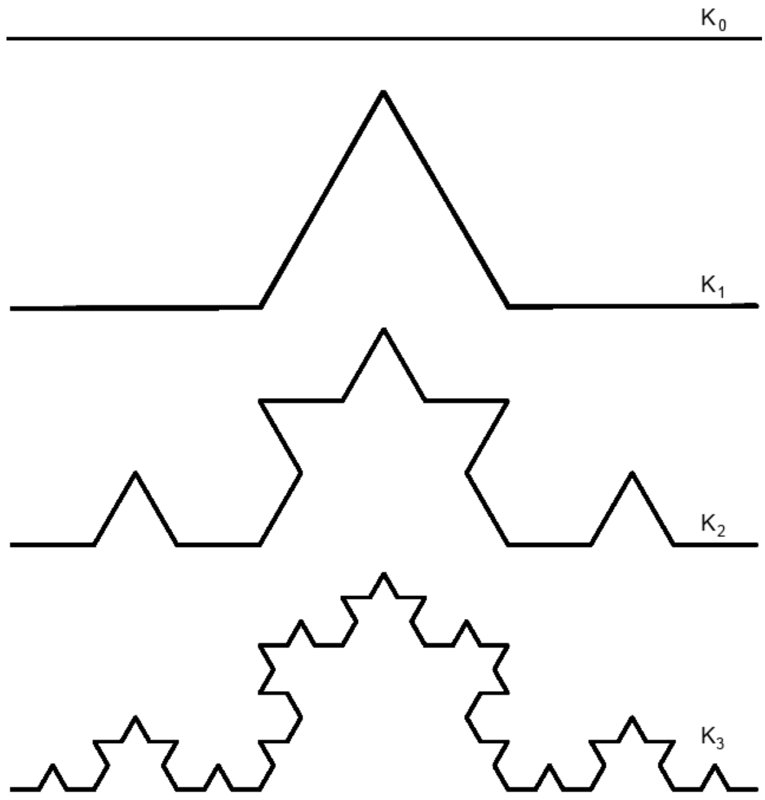
Näin ollen Cantorin 1/3-joukon dimensioksi saadaan desimaaliluku, joka on alle yksi. Tämä osaltaan selittää, miksi sen Lebesguen yksiulotteiseksi mitaksi saatiin aiemmin nolla ja minkä vuoksi joissain tilanteissa Hausdorff-dimensio pystyy kuvaamaan joukon kokoa paremmin kuin Lebesguen mitta. Hausdorff-dimensio voi nimittäin olla muutakin kuin vain kokonaisluku.

Määritetään vielä lopuksi vastaavalla idealla hieman monimutkaisemman joukon, Von Kochin käyrän (Kuva 4.2), Hausdorff-dimensio.

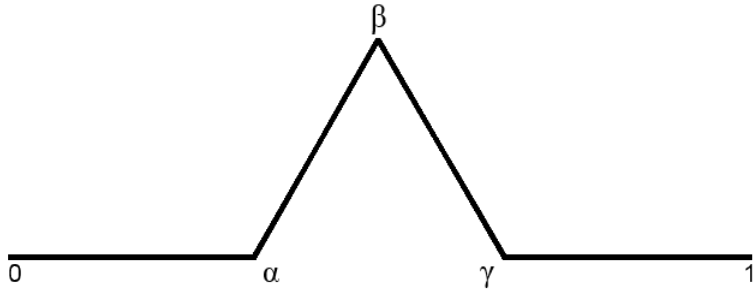
Aloitetaan tarkastelemalla janaa $K_0 = [0, 1]$, jonka pituus on yksi. Poistetaan tältä janalta keskimmäinen kolmannes ja korvataan se tasasivuisen kolmion kahdella sivulla, joiden pituudet määräytyvät poistetun kolmanneksen mukaan. Näin saadaan joukko K_1, joka muodostuu neljästä yhtäpitkästä janasta, joiden pituudet ovat 1/3. Toistamalla sama menettely kaikille joukon K_1 janoille saadaan vastaavasti muodostettua joukko K_2, joka muodostuu $4^2 = 16$ janasta, joiden pituudet ovat $3^{-2} = 1/9$. Näin jatkamalla saadaan joukko K_k korvaamalla joukon K_{k-1} jokaisen janan keskimmäinen kolmannes tasasivuisen kolmion kahdella sivulla. Tällöin joukko K_k sisältää 4^k janaa, joiden pituudet ovat $(1/3)^k$. Kun iteraatiota jatketaan äärettömiin, joukko K_k lähestyy joukkoa, jota kutsutaan *Von Kochin käyräksi.*

Esimerkki 4.24. Von Kochin käyrä voidaan siis esittää muodossa

$$K = S_1(K) \cup S_2(K) \cup S_3(K) \cup S_4(K),$$



Kuva 4.2. Von Kochin käyrän neljä ensimmäistä vaihetta lähteestä [30] yhdisteltynä.



Kuva 4.3. Von Kochin käyrän similariteetit muokattuna lähteestä [30].

missä kuvauksille $S_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pätee

$$S_1(x) = \frac{x}{3},\ S_2(x) = \rho\frac{x}{3} + \alpha,\ S_3(x) = \rho^{-1}\frac{x}{3} + \beta \text{ ja } S_4(x) = \frac{x}{3} + \gamma,$$

kun ρ on origosta lähtevä kulman $\pi/3$ -suuruinen kierto ja pisteet α, β ja γ näkyvät Kuvassa 4.3. Kyseessä on siis itsesimilaari joukko.

Lisäksi Von Kochin käyrälle pätee avoimen joukon ehto, kun valitaan avoimeksi, rajoitetuksi joukoksi A kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0), (1/2, \sqrt{3}/2)$ ja $(1,0)$. Kyseiselle joukolle A nimittäin pätee $A \supset \bigcup_{j=1}^{4} S_j(A)$.

Näin ollen Von Kochin käyrän dimensio saadaan siis hyödyntämällä Lausetta 4.22. Von Kochin käyrän kuvausten suhdeluku c_j on $1/3$ ja, koska $K = \bigcup_{j=1}^{4} S_j(K)$, on $m = 4$. Näin ollen

$$\sum_{j=1}^{4} (\tfrac{1}{3})^s = 1 \Leftrightarrow (\tfrac{1}{3})^s = \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow s = \tfrac{\log 1/4}{\log 1/3} = \tfrac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$$

ja $\dim_H(K) \approx 1,26$.

Von Kochin käyrä on siis Hausdorff-dimension mukaan yli yksiulotteinen (onhan sen pituus $\lim_{k\to\infty} (4/3)^k = \infty$), mutta toisaalta alle kaksiulotteinen ollessaan vain käyrä, jolla ei ole pinta-alaa.

Näin voidaan yhteenvetona todeta, kuinka Hausdorff-dimension mukaan esimerkiksi joukko $\mathbb{R}^n$ on suhteellisen iso ja vastaavasti joukko $\mathbb{Q}^n$, Cantorin 1/3-joukko ja Von Kochin käyrä pieniä. Lisäksi on hyvä muistaa, että näistä joukoista kaksi jälkimmäistä ovat siitä erikoisia, että niiden dimensiot eivät ole kokonaislukuja.

LUKU 5

Käsitteiden väliset yhteydet

Näin on tutustuttu neljään eri tapaan arvioida joukon kokoa perustuen pohjimmiltaan Cantorin innostukseen aihetta kohtaan. On huomattavaa, että eri tavat mitata joukon kokoa eivät aina anna keskenään samankaltaisia tai yhtä tarkkoja vastauksia. Esimerkiksi Cantorin 1/3-joukko on numeroituvuuden kannalta suuri, Bairen kategorian näkökulmasta pieni, Hausdorff-dimension mukaan suhteellisen pieni ja Lebesguen mitan näkökulmasta erittäin pieni.

Seuraavaksi tarkastellaankin esille nostettujen käsitteiden välisiä yhteyksiä, jotta saataisiin käsitys siitä, mikä näitä eri käsitteitä yhdistää ja mikä toisaalta erottaa toisistaan. Tarkastelu aloitetaan jatkamalla edelliseen lukuun liittyen mittateoriasta ja siihen liittyen Lebesguen mitan yhteydestä Hausdorff-mittaan ja -dimensioon. Tämän jälkeen tarkastellaan vielä lyhyesti, miten mittateoriaan liittyvä käsite Hausdorff-dimensio liittyy numeroituvuuteen. Loppuhuipentumana päästään mielenkiintoisimpaan kokonaisuuteen, jossa tarkastellaan ensin numeroituvuuden yhteyttä Bairen kategoriaan sekä Lebesguen mittaan ja lopulta verrataan näitä kahta jälkimmäistä käsitettä. Lopputulemana huomataan, kuinka yhteyksien sijaan näiden kahden käsitteen väliltä löytyykin yhdenmukaisuuksia, joihin liittyy duaalisuusperiaate.

Luvussa liikutaan pääasiallisesti avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mutta aivan työn lopussa siirrytään avaruuteen $\mathbb{R}$ haastavan asian yksinkertaistamiseksi.

5.1. Lebesguen mitta sekä Hausdorff -mitta ja dimensio

Lebesguen mitan yhteys Hausdorff-mittaan voidaan joissain tapauksissa määrittää hyvinkin tarkasti kaavan avulla, kun taas Lebesguen mitan ja Hausdorff dimension yhteys seuraa kyseisten käsitteiden määritelmistä.

Seuraavaksi tarkastellaan lyhyesti Hausdorff-mitan ja Lebesguen mitan yhteyttä, koska tätä kautta voidaan ymmärtää paremmin myös tässä tutkielmassa tärkeämpi Hausdorff-dimension ja Lebesguen mitan välinen yhteys.

LAUSE 5.1. *Borel-joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee*

$$\mathcal{H}^n(A) = c_n^{-1}\mathcal{L}^n(A),$$

missä $c_n = \frac{\alpha(n)}{2^n}$ on n -ulotteisen pallon, jonka halkaisija 1, tilavuus ja edelleen $\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$, missä $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ on tavallinen gammafunktio, kun $0 < n < \infty$.

TODISTUS. [7, Lause 2, s. 70-71] □

Hausdorff-mitta $\mathcal{H}^0(A)$ määrittää siis joukon A sisältämien pisteiden lukumäärän, $\mathcal{H}^1(A)$ joukon A pituuden, $\mathcal{H}^2(A) = \frac{4}{\pi} \times \mathcal{L}^2(A)$ ja vastaavasti $\mathcal{H}^3(A) = \frac{6}{\pi} \times \mathcal{L}^3(A)$. Näin ollen, kun n on positiivinen kokonaisluku, Hausdorffin n-ulotteinen mitta ja vastaava Lebesguen n-ulotteinen mitta eroavat siis toisistaan vain vakion verran.

Esimerkki 5.2. Tarkastellaan yksikkökiekkoa A. Määritetään $\mathcal{H}^2(A)$ Lauseen 5.1 tiedolla siitä, että joukon $\mathbb{R}^n$ Borel-osajoukoille se saadaan kaavasta $(4/\pi) \times \mathcal{L}^2(A)$. Nyt yksikkökiekon pinta-ala on πr^2, joten $\mathcal{H}^2(A) = \frac{4}{\pi} \times \pi = 4$.

Näin päästään myös Hausdorff -dimension ja Lebesguen mitan väliseen yhteyteen, jossa tämän tutkielman riittää tarkastella Borel-joukkoja. Väitteet pätevät kuitenkin kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$.

Lause 5.3. *Jos Borel-joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ on äärellinen, positiivinen d-ulotteinen Lebesguen mitta, niin $dim_H(A) = d$.*

Todistus. Väite seuraa Lauseesta 5.1 ja Hausdorff-dimension Määritelmästä 4.17. □

Lisäksi seuraava lause on ilmeinen seuraus edellisestä lauseesta.

Seuraus 5.4. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel-joukko. Jos dimensio $dim_H(A) < n$, niin Lebesguen mitta $\mathcal{L}^n(A) = 0$.*

Esimerkki 5.5. (a) Yksikkökiekolle A pätee $\mathcal{L}^2(A) = \pi$ ja $dim_H(A) = 2$, kuten alunperin saattoi kiekosta olettaakin.

(b) Cantorin 1/3-joukolle pätee $\dim_H(C) < 1$ ja $\mathcal{L}^1(C) = 0$.

5.2. Hausdorff-dimensio ja numeroituvuus

Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti, kuinka Hausdorff-dimensiolla on Lebesguen mitan lisäksi yhteys numeroituvuuteen.

Lause 5.6. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva joukko. Tällöin $dim_H(A) = 0$.*

Todistus. Väite seuraa suoraan Esimerkistä 4.18 ja Lauseesta 4.20. □

Esimerkki 5.7. Joukolle $\mathbb{Q}^n$ pätee $\dim_H(\mathbb{Q}^n) = 0$.

Seuraus 5.8. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko. Jos $dim_H(A) \neq 0$, niin joukko A on ylinumeroituva.*

On kuitenkin hyvä huomata, että seurauksen käänteinen väite ei päde. Tähän liittyen kannattaa tutustua viitteen [3] lukuun 2.

5.3. Numeroituvuuden yhteys Bairen kategoriaan ja Lebesguen mittaan

Jatketaan numeroituvuuteen liittyen tarkastelemalla nyt numeroituvuuden yhteyttä Bairen kategoriaan ja Lebesguen mittaan. Yhteys selviää vähitellen tarkastelemalla numeroituvien ja ylinumeroituvien joukkojen kategorioita ja mittoja.

Aloitetaan suoraviivaisesta havainnosta liittyen Bairen kategoriaan:

Lause 5.9. *Jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, niin se on Bairen ensimmäistä kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$.*

Todistus. Väite seuraa suoraan ensimmäisen kategorian joukon määritelmästä, koska numeroituvalle joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x_j\}$, missä yksittäiset pisteet $\{x_j\}$ ovat ei-missään tiheitä. □

On tärkeä kuitenkin huomata, että lauseen käänteinen väite ei päde.

LAUSE 5.10. *Kaikki ensimmäistä kategoriaa olevat joukot eivät ole numeroituvia.*

Tähän liittyen esimerkiksi Cantorin 1/3-joukko on jo aiemmin todettu ensimmäisen kategorian joukoksi avaruudessa $\mathbb{R}$ ja lisäksi ylinumeroituvaksi.

Näin on löydetty selkeitä yhteyksiä numeroituvuuden ja Bairen ensimmäisen kategorian välille. Myös ylinumeroituvuuden ja Bairen toisen kategorian välille on helposti löydettävissä yhteys, joka itseasiassa seuraa suoraan Lauseesta 5.9.

SEURAUS 5.11. *Jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on toista kategoriaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin joukko A on ylinumeroituva.*

Vastaavat yhteydet on löydettävissä Lebesguen mitan ja numeroituvuuden väliltä. Nämä yhteydet saadaan Lauseista 5.9-5.11 korvaamalla nyt ensimmäisen kategorian käsite nollamittaisuudella.

LAUSE 5.12. *Jos joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, niin $\mathcal{L}^n(A) = 0$.*

TODISTUS. Väite seuraa suoraan subadditiivisuudesta ja yksittäisen pisteen $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguen mitasta, koska

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{x_j\}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\{x_j\}) = 0.$$

□

Vieläkään ei käänteinen väite päde.

LAUSE 5.13. *Kaikki nollamittaiset joukot eivät ole numeroituvia.*

Tähän liittyen jälleen hyvänä esimerkkinä toimii Cantorin 1/3-joukko, joka on nollamittainen, mutta silti ylinumeroituva joukko.

Lisäksi positiivimittaisuuden ja ylinumeroituvuuden väliltä löytyy seuraava yhteys:

SEURAUS 5.14. *Jos $\mathcal{L}^n(A) > 0$, missä $A \subset \mathbb{R}^n$, on joukko A ylinumeroituva.*

Jatkoa varten on tärkeä muistaa, että numeroituvat joukot siis sisältyvät sekä Bairen ensimmäisen kategorian joukkoihin että nollamittaisiin joukkoihin ollen siten jossain mielessä pieniä. Bairen ensimmäistä kategoriaahan voidaan arvioida ei-missään tiheillä joukoilla, jotka ovat geometrisessa mielessä pieniä ollessaan reikien ympäröimiä. Nollamittaiset joukot ovat taas metrisessä mielessä pieniä, koska ne voidaan peittää mielivaltaisen pienillä väleillä.

5.4. Lebesguen mitta ja Bairen kategoria

Seuraavaksi tutustutaan σ-ideaalin käsitteen kautta siihen, ovatko Bairen ensimmäinen kategoria ja Lebesguen nollamittainen joukko yhteydessä toisiinsa. Tätä kautta päästään lopulta myös duaalisuuden käsitteeseen ja Bairen toisen kategorian ja positiivimittaisen joukon mahdolliseen yhteyteen.

Luvun ideaan päästään kätevimmin kiinni avaruuden $\mathbb{R}$ kautta, joten seuraavassa luvussa pysytään avaruudessa $\mathbb{R}$ yksinkertaisuuden vuoksi. Yleistyksistä voi lukea Morganin teoksesta Point Set Theory [5].

MÄÄRITELMÄ 5.15. Joukkojen kokoelma on σ-ideaali, jos se sisältää jäseniensä numeroituvat yhdisteet ja mielivaltaiset osajoukot.

Aiemmin esitellyn Lauseen 3.8 perusteella numeroituva yhdiste ensimmäisen kategorian joukkoja on ensimmäistä kategoriaa ja lisäksi selvästi ensimmäisen kategorian joukon osajoukko on ensimmäistä kategoriaa, joten Bairen ensimmäisen kategorian joukot muodostavat σ-ideaalin. Lisäksi Lauseen 4.7 pohjalta vastaavat ominaisuudet pätevät Lebesguen nollamittaisille joukoille. Näin ollen myös nollamittaiset joukot muodostavat siis oman σ-ideaalinsa.

Bairen ensimmäistä kategoriaa ja nollamittaisuutta yhdistävät siis muun muassa σ-ideaalin käsite sekä se, että molemmat σ-ideaalit sisältävät numeroituvat joukot [ks. lisää 3, s. 74].

Koska Bairen ensimmäisen kategorian ja nollamittaisuuden väliltä löytyy tällaisia pieniä samankaltaisuuksia, herää kysymys, millaisia yhteyksiä näillä kahdella käsitteellä on. Sisältyykö esimerkiksi toinen luokitteluista toiseen?

Näin ei ole, mikä nähdään muun muassa seuraavasta esimerkistä.

ESIMERKKI 5.16. (a) Olkoon $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$. Määritellään joukko U_1 siten, että

$$U_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty}(r_j - 2^{-j}, r_j + 2^{-j}).$$

Tällöin joukko U_1 on avoin ja tiheä, joten sen komplementti on ei-missään tiheä. Kyseinen komplementti ei kuitenkaan ole nollamittainen. Oletetaan nimittäin, että se voitaisiin peittää väleillä $I_1, I_2, \dots,$ joiden pituuksien summa on ≤ 1. Lisäksi tiedetään, että joukko U_1 voidaan määritelmänsä mukaisesti peittää väleillä, joiden pituuksien summa on 2. Näin ollen joukko $\mathbb{R}$ voitaisiin peittää numeroituvan monella välillä, joiden pituuksien summa on ≤ 3. Tämä on vastoin sitä, että joukolle $\mathbb{R}$ pätee $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \infty$. Näin ollen tarkasteltava komplementti on ei-missään tiheä, eikä kuitenkaan ole nollamittainen.

(b) Olkoon $\mathbb{Q} = (r_1, r_2, \dots)$ ja olkoon joukko U_1, kuten edellisessä kohdassa. Määritellään joukot $U_2, \dots, U_n \dots$ siten, että

$$U_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty}(r_j - 2^{-2j}, r_j + 2^{-2j})$$

$$\vdots$$

$$U_n = \bigcup_{j=1}^{\infty}(r_j - 2^{-nj}, r_j + 2^{-nj})$$

$$\vdots$$

Tällöin $U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset \mathbb{Q}$ ja tarkasteltavat joukot ovat avoimia ja tiheitä. Joukko $U = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} U_j$ on nyt nollamittainen, koska joukko U_n on yhdiste väleistä, joiden pituuksien summa on $\leq 2^{-n+2}$. Lisäksi joukolle $\mathbb{R} \backslash U$ pätee deMorganin lauseen perusteella

$$\mathbb{R} \backslash U = \mathbb{R} \backslash \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathbb{R} \backslash U_j),$$

joten $\mathbb{R} \backslash U$ on ensimmäistä kategoriaa ei-missään tiheiden joukkojen yhdisteenä ja siten joukko U on toista kategoriaa.

Itseasiassa Bairen ensimmäinen kategoria ja nollamittaisuus voivat joskus olla täysin vastakkaisia.

Lause 5.17. *Suora voidaan jakaa kahteen komplementtijoukkoon A ja B siten, että joukko A on ensimmäistä kategoriaa ja joukko B on nollamittainen.*

Lauseen todistus vastaa esimerkkiä 5.16b, koska kyseisen esimerkin joukolle U pätee $\mathbb{R} = U \cup (\mathbb{R} \backslash U)$, missä joukko U on nollamittainen ja joukko $\mathbb{R} \backslash U$ ensimmäistä kategoriaa. Näin ollen todistusta ei esitetä tässä uudestaan.

Kyseisen lauseen perusteella jokainen suoran osajoukko voidaan esittää yhdisteenä nollamittaisesta joukosta ja ensimmäisen kategorian joukosta.

Ensimmäisen kategorian ja nollamittaisuuden käsitteiden väliltä ei siis näytä löytyvän suoria yhteyksiä, mutta muutamia yhdenmukaisuuksia on, joita selittää duaalisuusperiaate.

Lause 5.18. *(Sierpinski-Erdös duaalisuusperiaate)*
Olkoon P mikä tahansa lause, joka sisältää ainoastaan käsitteet nollamittaisuudesta, ensimmäisestä kategoriasta ja liittyen puhtaaseen joukko-oppiin. Olkoon P^* lause, joka saadaan lauseesta P vaihtamalla termit "nollamittaisuus"ja "ensimmäisen kategorian joukko". Tällöin jokaisesta lauseesta P ja P^* seuraa toisensa, jos oletetaan, että kontinuumihypoteesi pätee.

Esimerkkeinä duaalisuudesta toimivat Bairen ensimmäisen kategorian ja nollamittaisuuden kohdalla muun muassa Lauseet 5.9 ja 5.12 sekä Lauseet 5.10 ja 5.13. Itseasiassa duaalisuusperiaate pätee myös Bairen toiselle kategorialle ja positiivimittaisuudelle. Tähän liittyen kannattaa tutustua tarkemmin viitteen [3] lukuun 3.

Kirjallisuutta

[1] GEORGE F. SIMMONS: *Introduction to Topology and Modern Analysis.* McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.

[2] WALTER RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis.* Toinen painos, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1964.

[3] JOHN C. OXTOBY: *Measure and Category: a Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces.* Toinen painos, Springer-Verlag, 1980.

[4] A. C. M. VAN ROOIJ JA W. H. SHIKHOF: *A Second Course on Real Functions.* Cambridge University Press, 1982.

[5] JOHN C. MORGAN II: *Point Set Theory.* Marcel Dekker, Inc., 1990.

[6] JOSEPH WARREN DAUBEN: *GEORG CANTOR His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Uusintapainos, Princeton University Press, 1990.

[7] LAWRENCE C. EVANS JA RONALD F. GARIEPY: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press LLC, 1992.

[8] CARL BOYER: *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa II.* WSOY:n graafiset laitokset, 1994.

[9] NICOLAS BOURBAKI: *Elements of the History of Mathematics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[10] AKIHIRO KANAMORI: *The Emergence of Descriptive Set Theory.* Teoksessa Jaakko Hintikka (toim.) From Dedekind to Gödel. Synthese Library vol. 251. Springer Science+Business Media, B.V. 1995.

[11] ANDREW M. BRUCKNER, JUDITH B. BRUCKNER JA BRIAN S. THOMSON: *Real Analysis.* Prentice -Hall, Inc., 1997.

[12] FRANK BURK: *Lebesgue Measure and Integration - An Introduction.* John Wiley & Sons, Inc., 1998.

[13] DAN A. SIMOVICI JA RICHARD L. TENNEY: *Theory of Formal Languages with Applications.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999.

[14] CARLOS S. KUBRUSLY: *Elements of Operator Theory.* Springer Science+Business Media, LLC 2001.

[15] CHARLES CHAPMAN PUGH: *Real Mathematical Analysis.* Springer-Verlag New York, Inc 2002.

[16] K. J. FALCONER: *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge tracts in mathematics, 85. Cambridge University Press, 2002.

[17] ELIAS M. STEIN JA RAMI SHAKARCHI: *Real Analysis -Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces.* Princeton Lectures in Analysis III. Princeton University Press, 2005.

[18] KENNETH FALCONER: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* Toinen painos, John Wiley & Sons Ltd, 2005.

[19] J. M. PLOTKIN: *Preface.* Teoksessa J. M. Plotkin (toim.) History of Mathematics sources Vol. 25, Hausdorff on Ordered Sets, ix-xviii, American Mathematical Society, 2005.

[20] BRIAN S. THOMSON, JUDITH B. BRUCKNER JA ANDREW M. BRUCKNER: *Elementary Real Analysis.* Toinen, korjattu painos, ClassicalRealAnalysis.com, 2008.

[21] BARBARA D. MACCLUER: *Elementary Functional Analysis.* Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[22] CHARLES G. DENLINGER: *Elements of Real Analysis.* Jones and Bartlett Publisher, 2011.

[23] VEIKKO T. PURMONEN: *Euklidiset avaruudet* 4. tarkistettu painos, Jyväskylän yliopistopaino, 2011.

[24] Ari Koistinen: *Joukkojen mahtavuudesta*. Matematiikkalehti Solmu 3/2005. http://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/3/jouma.pdf (luettu 20.9.2015).
[25] Matti Lehtinen: *Matematiikan historian luentoja 2014*. http://www.elisanet.fi/matti.t.Lehtinen/histluennot.pdf (luettu 1.10.2015).
[26] J.J. O'Connor ja E. F. Robertson: *René Louis Baire*. University of St Andrews, Scotland, 2000. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Baire.html (luettu 3.10.2015).
[27] J.J. O'Connor ja E. F. Robertson: *Henri Léon Lebesgue*. University of St Andrews, Scotland, 2004. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lebesgue.html (luettu 10.12.2015).
[28] *Felix Hausdorff Paul Mongré*. Hausdorff Center for Mathematics internetsivusto. https://www.hcm.uni-bonn.de/uploads/media/Felix-Hausdorff_en.pdf (luettu 5.1.2016).
[29] *Cantor set in seven iterations.svg*. Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cantor_set_in_seven_iterations.svg (luettu 15.1.2016).
[30] *Koch curve*. Wikipedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/Koch_curve (luettu 28.1.2016).