

**This is an electronic reprint of the original article.
This reprint *may differ* from the original in pagination and typographic detail.**

Author(s): Karvanen, Juha; Luoto, Antti

Title: Odottelua pysäkillä

Year: 2015

Version:

Please cite the original version:

Karvanen, J., & Luoto, A. (2015). Odottelua pysäkillä. *Matematiikkalehti Solmu*, 2015(3), 11-15. <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/3/odottelua.pdf>

All material supplied via JYX is protected by copyright and other intellectual property rights, and duplication or sale of all or part of any of the repository collections is not permitted, except that material may be duplicated by you for your research use or educational purposes in electronic or print form. You must obtain permission for any other use. Electronic or print copies may not be offered, whether for sale or otherwise to anyone who is not an authorised user.

Odottelua pysäkillä

Juha Karvanen ja Antti Luoto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto
9. syyskuuta 2015



Kiirehdit bussipysäkille. Saapuessasi paikalle kello on 8.04. Arvelet, että bussi ei ole vielä mennyt, mutta et ole täysin varma asiasta. Bussi lähtee päätepysäkiltään klo 8.00 ja tälle pysäkillä matka kestää yleensä noin kahdeksan minuuttia. Jäät odottelemaan bussia, jonka uskot saapuvan pian. Kymmenen minuutin odottelun jälkeen mieleesi nousee aavistus siitä, että bussi on sittenkin ehtinyt jo ohittaa pysäkin ennen kuin tulit paikalle. Odoteltuasi vielä viisi minuuttia olet hyvin varma siitä, että olet myöhästynyt bussista. Seuraava bussi lähtee klo 8.30 ja siihen ainakin ehdit hyvin.

Odottelu pysäkillä jatkuu.

Edellä esitettyä arkipäivän tilannetta voi tarkastella todennäköisyyslaskennan keinoin. Tiedämme siis, että bussi lähtee klo 8.00, matkustaja saapuu pysäkillä klo 8.04 ja seuraava bussi lähtee klo 8.30. Kiinnostuksen kohteena oleva kysymys kuuluu: "Mikä on jäljellä oleva keskimääräinen odottelu-aika, jos matkustaja on odottanut pysäkillä jo s minuuttia?" Täsmällisempi todennäköisyyslaskennan termi keskimääräiselle odotteluajalle on odotteluajan odotusarvo.

Jotta tehtävän voisi ratkaista, tarvitsemme tiedon ajasta T , joka bussilla kuluu pääte-pysäkillä odottelupysäkillä. Tämä aika ei ole vakio, vaan se vaihtelee riippuen mm. matkustajien ja muun liikenteen määrästä. Keräämällä systemaattisesti havainnot bussin saapumisajoista saamme tietoa satunnaismuuttujan T jakaumasta. Havaintoaineiston perusteella matka-ajan jakaumalle voi sovittaa jonkin sopivan mallin, kuten esimerkiksi gamma-jakauman tai log-normaalijakauman.

Oletamme nyt, että tiedämme tämän matka-ajan jakauman olevan log-normaalijakauma. Sanotaan, että T on log-normaalijakautunut parametrein μ ja $\sigma > 0$, $T \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, mikäli tiheysfunktio on

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & t > 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja kertymäfunktio on

$$F_T(t) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{\log t - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy, & t > 0 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (1)$$

missä Φ on standardinormaalijakauman $\mathcal{N}(0, 1)$ kertymäfunktio. Tyypillinen tapa johtaa log-normaalijakauma on tarkastella muunnosta $T = g(X) = e^X$, missä satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, jolloin tiheysfunktio f_T ratkeaa muuttujanvaihdon avulla. Siis $T \sim \log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ mikäli $\log T \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Parametri μ kuvaa jakauman sijaintia ja $\sigma > 0$ on skaalaparametri. Jatkuvan, vain positiivisia arvoja saavan satunnaismuuttujan odotusarvo ja varianssi määritellään kaavoilla

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty t f_T(t) dt \quad \text{ja} \quad \mathbf{Var}[T] = \int_0^\infty (t - \mathbb{E}[T])^2 f_T(t) dt.$$

Log-normaalijakauman $\log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ tapauksessa odotusarvoksi ja varianssiksi saadaan

$$\mathbb{E}[T] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{ja} \quad \mathbf{Var}[T] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}.$$

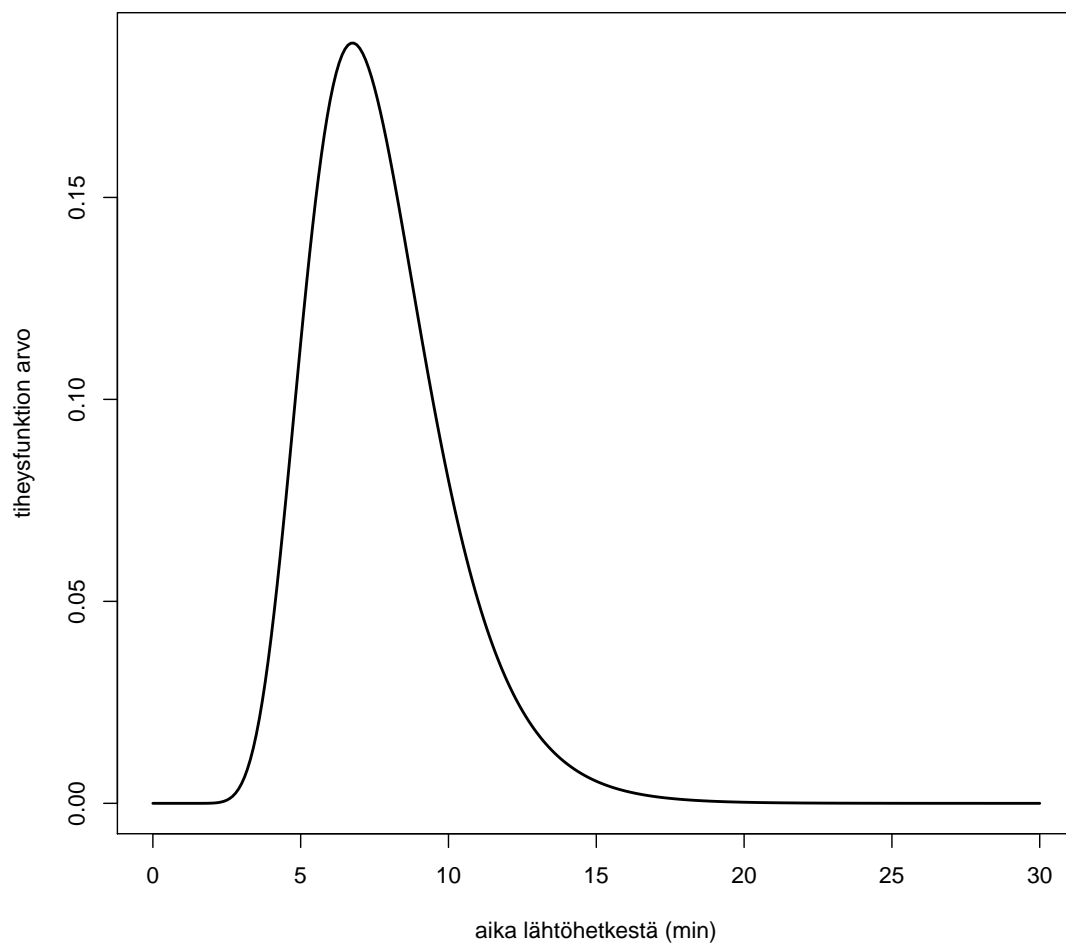
Kun parametrien arvoiksi kiinnitetään $\mu = 2$ ja $\sigma = 0.3$, saadaan bussin matka-ajan odotusarvoksi $e^{2 + \frac{1}{2} \cdot 0.3^2} \approx 7.73$ minuuttia, joka pyöristettynä on edellä mainittu kahdeksan minuuttia. Jakauman tiheysfunktion kuvaaja on esitetty kuvassa 1. Kuvasta nähdään, että matka-ajan jakauma on vino. Jakauman moodi eli tiheysfunktion huippukohta on $e^{2 - 0.3^2} \approx 6.75$ minuuttia. Kolmas jakauman sijaintia kuvaava tunnusluku on mediaani, jonka arvo $e^2 \approx 7.39$ minuuttia. Mediaanin kohdalla kertymäfunktio saa arvon 0.5. Yksihiippuisen symmetrisen jakauman tapauksessa näiden kolmen tunnusluvun arvot olisivat samat, mutta koska log-normaalijakauma on vino jakauma, kaikki kolme tunnuslukua eroavat toisistaan.

Bussin matka-ajan jakaumamallin ollessa selvillä voimme laskea sen perusteella meitä kiinnostavia todennäköisyyksiä. Numeerisiin laskutoimituksiin voi käyttää esimerkiksi avoimen lähdekoodin R-ohjelmistoa, joka on saatavilla osoitteesta www.r-project.org. Todennäköisyys sille, että bussi ohittaa pysäkin ennen kuin kello on 8.04 vastaa todennäköisyyttä, että matka-aika on alle neljä minuuttia. Tämä lasketaan R-ohjelman komennolla `plnorm(4,meanlog=2,sdlog=0.3)` ja tulokseksi saadaan $\mathbb{P}(T < 4) \approx 0.02$. Bussista myöhästyminen on siis mahdollista, mutta ei kovin todennäköistä, kun pysäkille saavutaan klo 8.04.

Vastaavalla tavalla voidaan laskea todennäköisyys sille, että matka-aika on enemmän kuin $4+s$ minuuttia. Tämän voi tehdä R-komennolla `1-plnorm(4+s,meanlog=2,sdlog=0.3)`. Koska tehtävän tilanteessa tiedämme, että bussi ei ole saapunut sinä aikana, kun matkustaja odottelee pysäkillä, täytyy päteä joko $T < 4$ tai $T > 4+s$. Näistä jälkimmäisen mahdollisuuden todennäköisyys pienenee, kun odottelu-aika s kasvaa.

Jos klo 8.00 lähtenyt bussi on jo mennyt, pysäkillä odottelua kestää siihen saakka kunnes klo 8.30 lähtevä bussi saapuu. Odotteluajan $W^{(s)}$ odotusarvoksi saadaan tällöin $\mathbb{E}(W^{(s)}) = 30 - (4 + s) + \mathbb{E}(T) \approx 33.8 - s$. Tarkastelussa rajoitutaan tapauksiin, joissa pysäkillä on odoteltu korkeintaan klo 8.30 asti eli $s \leq 26$.

Jos klo 8.00 lähtenyt bussi ei ole vielä mennyt, jäljellä olevan odotteluajan odotusarvo on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}[T \mid T > s + 4]$. Tämä odotusarvo voidaan laskea analyttisesti tai simuloimalla. Analyttinen ratkaisu edellyttää integrointia, sopi-



Kuva 1: Bussin saapumisaikaa kuvaavan log-normaalijakauman tiheysfunktio.

van muuttujanvaihdon ja neliöksi täydentämistä. Lopuksi päädytään tulokseen, joka on ilmaistavissa normaalijakauman kertymäfunktion avulla. Simulointiratkaisu taas edellyttää, että klo 8.00 ja klo 8.30 lähtevien bussien saapumisaikoja generoidaan esimerkiksi R-ohjelmiston avulla suuri joukko, jonka avulla odotteluajan odotusarvo voidaan määrittää likimääräisesti. Tulos on sitä tarkempi, mitä enemmän saapumisaikoja on generoitu.

Ongelman ratkaiseminen analyyttisesti

Ongelma keskimääräisen odotteluajan ratkaisemiseksi voidaan muotoilla matemaattisesti todennäköisyyslaskennan käsitteiden avulla. Täsmällisyyden vuoksi esityksessä käytetään todennäköisyysavaruuden ja Borel-mitallisuuden käsitteitä, joiden syvällinen ymmärtäminen ei kuitenkaan ole välttämätöntä esityksen seuraamiseksi. Aiheesta kiinnostunut lukija voi tutustua todennäköisyyslaskennan teoreettisiin perusteisiin tarkemmin esimerkiksi Wikipedia-sivulla ”Todennäköisyysteoria”.

Olkoot T_1, T_2 riippumattomia $\log \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ -jakautuneita satunnaismuuttujia abstraktilla todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Satunnaismuuttujat T_1 ja T_2 tulkitaan klo 8.00 (bussi 1) ja klo 8.30 (bussi 2) lähtevien bussien matka-ajoiksi, ja nämä oletetaan siis toisistaan riippumattomiksi. Tiedämme, että matka-ajalle T_1 pätee joko $T_1 < 4$ tai $T_1 > 4 + s$. Mikäli $T_1 > 4 + s$, seuraavaksi pysäkillä saapuu bussi 1. Tässä tapauksessa joudutaan odottelemaan vielä $T_1 - (4 + s)$ minuuttia. Mikäli puolestaan $T_1 < 4$, pysäkillä saapuu seuraavaksi bussi numero 2, joka saapuu paikalle $T_2 + 30$ minuuttia yli kahdeksan. Odoteltavaa jää siten $T_2 + 30 - (4 + s) = T_2 + 26 - s$ minuuttia. On täten luontevaa määritellä jäljellä oleva odotusaika $W^{(s)}$ deterministisen ajan s ja satunnaisten aikojen T_1 ja T_2 funktiona seuraavalla tavalla: annetulle $s \in [0, 26]$ asetetaan

$$W^{(s)}(\omega) := f(s, T_1(\omega), T_2(\omega)) := \begin{cases} T_2(\omega) + 30 - (4 + s), & \text{jos } T_1(\omega) < 4 \\ 0, & \text{jos } 4 \leq T_1(\omega) \leq 4 + s \\ T_1(\omega) - (4 + s), & \text{jos } T_1(\omega) > 4 + s. \end{cases}$$

Näin määriteltynä $W^{(s)}$ on satunnaismuuttuja avauudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, mikä seuraa kuvauksen $(t_1, t_2) \mapsto f(s, t_1, t_2)$ Borel-mitallisuudesta. Koska ongelman kannalta on merkityksentöntä, mitä arvoja $W^{(s)}$ saa joukossa $\{4 \leq T_1 \leq 4 + s\}$, valittiin yksinkertai-

suuden vuoksi vakioarvo 0.

Näillä merkinnöin keskimääräinen odottelu-aika, josta käytetään merkintää $e(s)$, on tarkalleen ottaen muuttujan $W^{(s)}$ ehdollinen odotusarvo ehdolla tapahtuma $\{T_1 \notin [4, 4 + s]\}$. Koska $\mathbb{P}(T_1 \notin [4, 4 + s]) > 0$, edellä mainittu ehdollinen odotusarvo määritellään klas-sista ehdollista todennäköisyyttä muistuttavalla kaavalla

$$e(s) = \mathbb{E}[W^{(s)} | T_1 \notin [4, 4 + s]] := \frac{\mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 \notin [4, 4 + s]\}}]}{\mathbb{P}(T_1 \notin [4, 4 + s])},$$

missä $\mathbf{1}_A$ tarkoittaa indikaattorifunktiota,

$$\mathbf{1}_{\{t_1 \in A\}} = \begin{cases} 1, & \text{jos } t_1 \text{ kuuluu joukkoon } A \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Todennäköisyytlaskennan laskusääntöjä noudattaen voidaan kirjoittaa

$$\mathbb{P}(T_1 \notin [4, 4 + s]) = \mathbb{P}(T_1 \leq 4) + \mathbb{P}(T_1 > 4 + s) = F_T(4) + 1 - F_T(4 + s)$$

missä F_T on kaavassa (1) määritelty log-normaalijakauman kertymäfunktio. Edelleen, odotusarvon lineaarisuuden ja muuttujien T_1 ja T_2 riippumattomuuden nojalla pätee toinen yhtäsuuruus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 \notin [4, 4 + s]\}}] &= \mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 < 4\}}] + \mathbb{E}[W^{(s)} \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] \\ &= \mathbb{E}[(T_2 + 30 - (4 + s)) \mathbf{1}_{\{T_1 < 4\}}] + \mathbb{E}[(T_1 - (4 + s)) \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] \\ &= \mathbb{E}[T_2 + 30 - (4 + s)] \mathbb{P}(T_1 < 4) + \mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] - (4 + s) \mathbb{P}(T_1 > 4 + s) \\ &= (\mathbb{E}[T_2] + 26 - s) F_T(4) + \mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] - (4 + s)(1 - F_T(4 + s)). \end{aligned}$$

Näin ollen

$$e(s) = \frac{(\mathbb{E}[T_2] + 26 - s) F_T(4) + \mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] - (4 + s)(1 - F_T(4 + s))}{F_T(4) + 1 - F_T(4 + s)}. \quad (2)$$

Tekemällä muuttujanvaihto $t = e^y$ nähdään, että

$$\mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4 + s\}}] = \int_{4+s}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2 + 2\sigma^2 y}{2\sigma^2}} dy. \quad (3)$$

Neliöontäydennys muuttujan y suhteen puolestaan antaa

$$-(y - \mu)^2 + 2\sigma^2 y = -(y - (\mu + \sigma^2))^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4,$$

joten kaavan (3) oikea puoli yksinkertaistuu lopulta muuttujanvaihtoa $x = \frac{y}{\sigma} - \frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}$ ja symmetriaa $\Phi(x) = \Phi(-x)$ soveltaen muotoon

$$\begin{aligned} & \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2+2\sigma^2y}{2\sigma^2}} dy = e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-(\mu+\sigma))^2}{2\sigma^2}} dy \\ & = e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\log(4+s)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y/\sigma-(\mu+\sigma^2)/\sigma)^2}{2}} dy = e^{\mu+\sigma^2/2} \int_{\frac{\log(4+s)-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ & = e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\left(\frac{-\log(4+s) + \mu + \sigma^2}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Siis $\mathbb{E}[T_1 \mathbf{1}_{\{T_1 > 4+s\}}] = e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\left(\frac{-\log(4+s)+\mu+\sigma^2}{\sigma}\right)$. Koska lisäksi $\mathbb{E}[T_2] = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, kaavaan (2) sijoittamalla saadaan lopulta

$$e(s) = \frac{[e^{\mu+\sigma^2/2} + 26 - s] F_T(4) + e^{\mu+\sigma^2/2} \Phi\left(\frac{-\log(4+s)+\mu+\sigma^2}{\sigma}\right) - (4+s)(1 - F_T(4+s))}{F_T(4) + 1 - F_T(4+s)}.$$

Annetuilla parametrien arvoilla $\mu = 2$ ja $\sigma = 0.3$ keskimääräiseksi odotusajaksi saadaan siten esimerkiksi

$$e(s) = \begin{cases} 3.24, & s = 3 \\ 6.27, & s = 7 \\ 18.07, & s = 15 \\ 8.73, & s = 25. \end{cases}$$

Ongelman ratkaiseminen simuloimalla

Samaan tulokseen voidaan päästä myös simuloimalla. Tällöin log-normaalijakaumasta generoidaan suuri määrä saapumisaikoja klo 8.00 ja 8.30 lähteille busseille. Olkoon T_1 ensimmäisen ja T_2 toisen bussin matka-aika pysäkille. Tarkastelusta poistetaan ne tapaukset, joissa ensimmäinen bussi saapuu aikavälillä $[4, 4+s]$. Jokaiselle jäljelle jääneelle n tapaukselle lasketaan odottelu-aika generoitujen saapumisaikojen perusteella. Jos $T_1 > 4+s$ eli ensimmäinen bussi ei ole vielä mennyt, jäljellä oleva odottelu-aika on $W^{(s)} = T_1 - 4 - s$. Jos taas $T_1 < 4$ eli ensimmäinen bussi on jo mennyt, jäljellä oleva odottelu-aika on $W^{(s)} = 30 + T_2 - 4 - s$. Simuloiduista tapauksista laskettu muuttujan $W^{(s)}$ keskiarvo estimoii odotteluajan odotusarvoa. Tuloksen numeerinen tarkkuus riippuu tapausten lukumäärästä n , joka puolestaan riippuu simuloinnissa käytettyjen toistojen lukumäärästä.

Simuloinnin voi toteuttaa esimerkiksi alla olevalla R-koodilla:


```

n <- 100000 #toistojen lkm
mu <- 2
sigma <- 0.3
r <- 4
interval <- 30
T1 <- rlnorm(n,mu,sigma)
T2 <- interval + rlnorm(n,mu,sigma)
svec <- 0:30 #odotteluaikojen vektori
wn <- rep(NA,length(svec)) #tarkasteltavien tapausten lkm
wmean <- rep(NA,length(svec)) #odotteluaajan odotusarvo
wmedian <- rep(NA,length(svec)) #odotteluaajan mediaani
wq10 <- rep(NA,length(svec)) #odotteluaajan 10 % kvantiili
wq90 <- rep(NA,length(svec)) #odotteluaajan 90 % kvantiili
for(i in 1:length(svec)) #tehdään laskenta erikseen jokaiselle s:n arvolle
{
  s <- svec[i]
  valid <- (T1>(s+r) | T1<r) #indikaattori: kuuluuko tarkastelujoukkoon
  wn[i] <- sum(valid)
  intime <- (r < T1[valid]) #indikaattori: bussi ei ole vielä mennyt
  wtime <- intime*(T1[valid]-r-s)+(!intime)*(T2[valid]-r-s)
  wmean[i] <- mean(wtime)
  wmedian[i] <- median(wtime)
  wq10[i] <- quantile(wtime,0.1)
  wq90[i] <- quantile(wtime,0.9)
}

#Vertaillaan analyytisesti johdettuun odotusarvoon, jonka
#arvoja voi laskea seuraavalla funktiolla
waitingtime <- function(s,alpha=2,sigma=0.3,r=4,interval=30)
{
  sr <- 1-plnorm(s+r,alpha,sigma)
  fr <- plnorm(r,alpha,sigma)

```

```

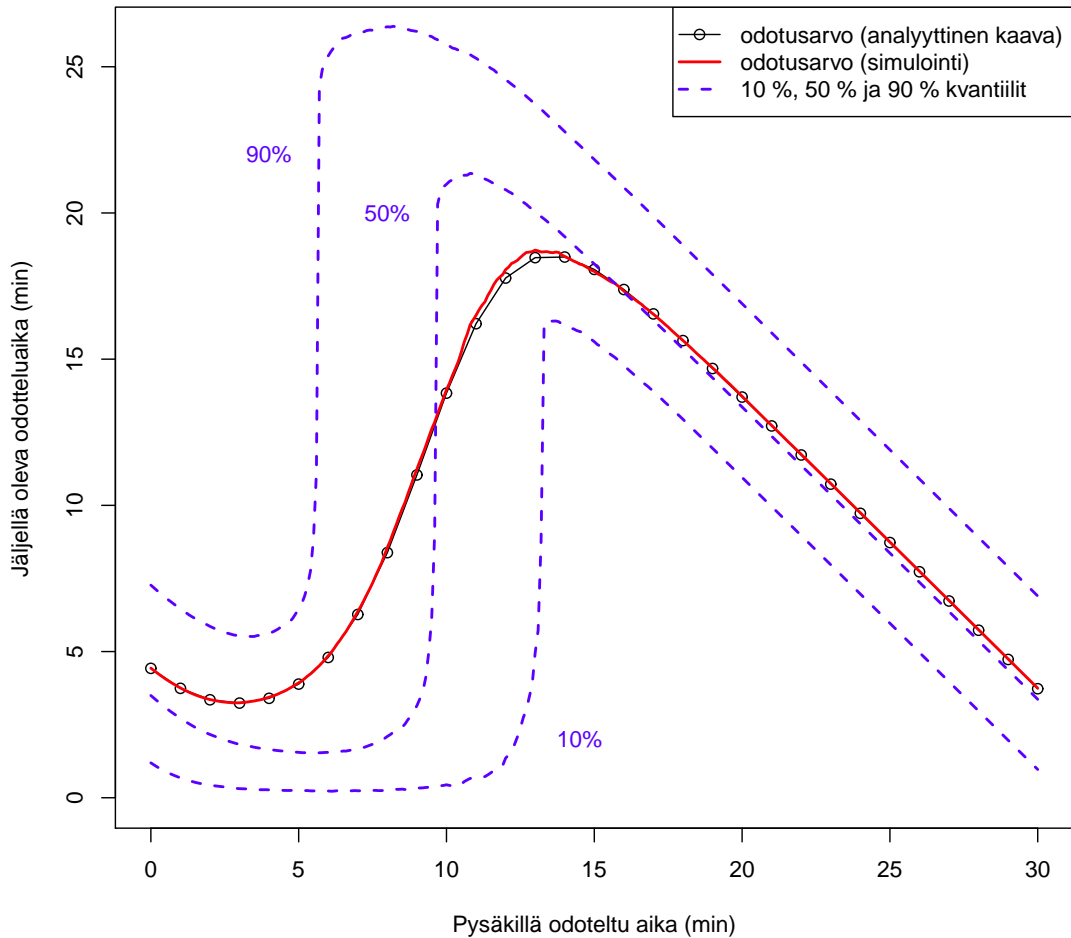
E1 <- exp(alpha+sigma^2/2)/sr*pnorm((-log(s+r)+alpha+sigma^2)/sigma)-(s+r)
E2 <- interval-r-s+exp(alpha+sigma^2/2)
E <- sr/(sr+fr)*E1+fr/(sr+fr)*E2
return(E)
}

#Piiirretään tuloksista kuva
s <- 0:30
plot(s,waitingtime(s,r=4),type="o",ylim=c(0,26),
      xlab="Pysäkillä odoteltu aika (min)",
      ylab="Jäljellä oleva odottelu-aika (min)")
lines(svec,wmean,col="red",lwd=2)
lines(svec,wmedian,col="blue",lty=2,lwd=2)
lines(svec,wq10,col="blue",lty=2,lwd=2)
lines(svec,wq90,col="blue",lty=2,lwd=2)
legend("topright",legend=c("odotusarvo (analyttinen kaava)",
                           "odotusarvo (simulointi)","10 %, 50 % ja 90 % kvantiilit"),
       lty=c(1,1,2),lwd=c(1,2,2),pch=c(1,NA,NA),col=c("black","red","blue"))
text(4,22,"90%",col="blue")
text(8,20,"50%",col="blue")
text(14.5,2,"10%",col="blue")

```

Odotteluajan odotusarvon lisäksi R-koodissa estimoidaan myös odotteluajan mediaani, 10 % ja 90 % kvantiilit. Mediaani eli 50 % kvantiili tarkoittaa havaintoa, jota pienempiä on 50 % havainnoista. Vastaavasti 10 % ja 90 % kvantiilit tarkoittavat havaintoja, joita pienempiä on 10 % ja 90 % havainnoista. Kvantiilien ratkaiseminen ei onnistu helposti analyttisesti, mutta simuloinnissa ne saadaan laskettua yhden koodirivin lisäyksellä.

Tulokset on esitetty graafisesti kuvassa 2, joka on luotu edellä esitetyllä R-koodilla. Kuvasta nähdään, että analyttisesti laskettu odotusarvo ja simuloimalla laskettu odotusarvo ovat hyvin lähellä toisiaan. Aluksi odotteluajan odotusarvo pienenee, kun s kasvaa, mutta kolmen minuutin odottelun jälkeen (klo 8.07) odotusarvo alkaa kasvaa. Maksimi saavutetaan 14 minuutin odottelun jälkeen (klo 8.18), jonka jälkeen



Kuva 2: Jäljellä olevan odotteluajan odotusarvo, mediaani sekä 10 % ja 90 % kvanttiilit pysäkillä odotellun ajan funktiona.

odotusarvo alkaa pienentyä lähes lineaarisena funktiona. Mediaanin ja muiden kvanttiilien hyppäykset ovat seurausta jakauman kaksihuippuisuudesta. Todennäköisyys, että ensimmäinen bussi on jo mennyt ylittää 10 % noin kuuden minuutin odottelun jälkeen (klo 8.10), 50 % noin kymmenen minuutin odottelun jälkeen (klo 8.14) klo ja 90 % noin 13 minuutin odottelun jälkeen (klo 8.17).

Esimerkin tarkoituksena on ollut havainnollistaa sitä, kuinka läheisesti todennäköisyyslaskenta liittyy arkipäivän tapahtumiin. Lisäksi tavoitteena on ollut esittää, kuinka jakaumiin liittyviä tehtäviä voidaan ratkaista sekä analyttisesti että simuloimalla. Analyttinen ratkaiseminen ja simulointi täydentävät toinen toistaan. Ratkaisu, joka saadaan kahdella toisistaan riippumattomalla tavalla, on todennäköisemmin

oikein kuin vain yhdellä tavalla saatu ratkaisu.

(Esimerkkiä on käytetty harjoitustehtävänä Jyväskylän yliopiston kurssilla Elinaikamallit.)