Ympyrän homeomorfismien dynamiikkaa

Annamari Kekäläinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2015

Tiivistelmä: Annamari Kekäläinen, *Ympyrän homeomorfismien dynamiikkaa* (engl. *The dynamics of circle homeomorphisms*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 49 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2015.

Tässä tutkielmassa perehdytään ympyrädynamiikkaan, jota tutkitaan kiertojen avulla. Kiertojen analysointiin käytetään pisteiden ratoja ja jaksollisia pisteitä. Tutkielmassa tutustutaan myös nostoihin ja kiertolukuihin. Homeomorfismien käyttäytymistä tutkitaan kiertoluvun avulla. Jos kiertoluku on rationaalinen, radan käyttäytyminen on jaksollista. Jos taas kiertoluku on irrationaalinen, niin pisteen rata on tiheä tai Cantorin joukko.

Tutkielmassa todistetaan Poincarèn luokittelulause, joka kuvailee ympyrähomeomorfismien ratojen käyttäytymistä. Poincarén luokittelulauseen mukaan homeomorfismi f, jonka kiertoluku ρ on irrationaalinen, on topologinen konjugaatti kierron R_ρ kanssa, jos homeomorfismi on transitiivinen. Jos homeomorfismi ei ole transitiivinen, niin kierto ja homeomorfismi ovat topologisia tekijöitä. Toisessa luvussa tutustutaan Denjoyn esimerkkiin ja lauseeseen. Denjoyn lause liittyy diffeomorfismeihin. Sen mukaan diffeomorfismi on transitiivinen, jos sen kiertoluku on irrationaalinen ja derivaatta on rajoitetusti heilahteleva. Denjoyn esimerkissä näytetään, kuinka modostetaan ilman jaksollisia pisteitä ympyrädiffeomorfismi, joka ei ole transitiivinen. Kolmannessa luvussa tutustutaan Cantorin joukkoon, pirunporrasfunktioon ja Arnoldin kieliin ympyrädiffeomorfismiperheiden kautta.

Avainsanoja: kierto, nosto, kiertoluku, jaksollinen piste, rata, homeomorfismi, diffeomorfismi, Cantorin joukko, pirunporrasfunktio, Arnoldin kielet

Sisältö

Johdanto

Tässä kirjoitelmassa tutkitaan ympyrädynamiikkaa. Dynamiikkaa tutkitaan kiertojen R_α avulla, joiden analysoimiseksi tarkastellaan ratojen käyttäytymistä. Ympyrähomeomorfismin ratojen rakennetta tarkastellaan jaksollisten pisteiden avulla. Pisteiden järjestysten tutkiminen on myös tarpeellista. Tutkielmassa tarkastellaan lisäksi nostoja ja kiertolukuja.

Tutkielmassa käytetään kierrolle ja yksikköympyrälle sekä additiivista että multiplikatiivista ajattelutapaa. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Kierto on multiplikatiivisesti merkittynä muotoa

$$R_\alpha x = xe^{2\pi i\alpha}$$

ja additiivisesti merkittynä muotoa

$$R_\alpha x = x + \alpha \pmod 1.$$

Yksikköympyrä taas on multiplikatiivisessa tapauksessa

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$$

ja additiivisessa tapauksessa

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1]/\sim, \qquad \text{missä } 0 \sim 1.$$

Pisteen x rata on kokoelma kuvauksen $f\colon S^1 \to S^1$ iteraatteja $\{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}$. Kiertoluku $\rho(f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mittaa keskimääräisen kiertokulman suuruutta funktion f radalla. Kiertoluvun määrittelemiseen tarvitaan nostoa, joka on jatkuva kuvaus $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kuvaus F on homeomorfismin $f\colon S^1 \to S^1$ nosto, jos on olemassa peitekuvaus $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$, joka vie noston reaaliakselilta ympyrälle S^1 eli $f \circ \pi = \pi \circ F$.

Kirjoitelmassa tutkitaan miten homeomorfismit käyttäytyvät, kun kiertoluku on rationaalinen tai irrationaalinen. Irrationaalisen ja rationaalisen kiertoluvun omaavien kuvausten ratojen käyttäytymiset eroavat toisistaan. Rationaalisen kiertoluvun tapauksessa kaikki radat ovat joko jaksollisia tai asymptoottisia jaksollisen radan kanssa. Irrationaalisen kiertoluvun tapauksessa kaikki radat ovat joko tiheitä tai asymptoottisia Cantorin joukon kanssa. Kun kiertoluku on irrationaalinen, niin ympyräkuvauksen f rata on samassa järjestyksessä, kuin kierron $R_{\rho(f)}$ rata. Tämän avulla tutkitaan homeomorfismeja joilla ei ole jaksollisia pisteitä.

Ensimmäisessä luvussa tutkitaan Poincarén luokittelulausetta, joka kuvailee ympyrähomeomorfismien ratojen käyttäytymistä. Poincarén luokittelulauseen mukaan homeomorfismi $f\colon S^1 \to S^1$, jonka kiertoluku ρ on irrationaalinen, on topologinen konjugaatti kierron R_ρ kanssa, jos homeomorfismi on transitiivinen. Homeomorfismin f transitiivisuus tarkoittaa, että on olemassa piste $x \in S^1$, jonka rata $\{f^k(x)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ on tiheä joukossa S^1. Jos homeomorfismi ei ole transitiivinen, kierto ja homeomorfismi ovat topologisia tekijöitä. Tämä siis tarkoittaa, että on olemassa jatkuva monotoninen kuvaus $h\colon S^1 \to S^1$ siten, että $h \circ f = R_\rho \circ h$. Ympyrällä järjestys "<" määritellään siten, että

$$\pi(x) < \pi(y) \iff y - x \in (0, 1/2) \pmod 1,$$

missä $x, y \in \mathbb{R}$. Siis kuvauksen $h\colon S^1 \to S^1$ monotonisuudessa käytetään edellä esiteltyä järjestystä. Transitiivisessa tapauksessa h on homeomorfismi, mutta kun kuvaus f ei ole transitiivinen, niin h ei ole kääntyvä. Jälkimmäisessä tapauksessa kuvaus h on esimerkki pirunporrasfunktiosta eli Cantorin funktiosta, johon perehdytään kolmannessa luvussa.

Toisessa luvussa tutkitaan diffeomorfismeja. Denjoyn lauseen mukaan diffeomorfismi $f\colon S^1 \to S^1$ on transitiivinen, kunhan sen kiertoluku on irrationaalinen ja derivaatta on rajoitetusti heilahteleva. Denjoyn esimerkissä näytetään, kuinka muodostetaan ilman jaksollisia pisteitä ympyrädiffeomorfismi, joka ei ole transitiivinen. Kyseisen esimerkin todisti ranskalainen matemaatikko Arnaud Denjoy 1900-luvun alkupuolella.

Kolmannessa luvussa tutkitaan ympyrädiffeomorfismiperheitä esimerkin avulla. Tarkastelussa on ympyräkuvausperhe $f_{\omega,\epsilon}(\theta) = \theta + 2\pi\omega + \epsilon\sin(\theta)$. Kiinnitetyllä ϵ-arvolla tämän kuvausperheen kiertoluku on Cantorin funktio. Esimerkissä tutkitaan, mitä tapahtuu kiinnitetyllä rationaaliarvoisella kiertoluvulla, kun ω- ja ϵ-arvot muuttuvat. Kun kiertoluku $\rho(f_\omega)$ kuvataan $\epsilon - \omega$ tasoon, syntyy bifurkaatiodiagrammi, joka tuottaa Arnoldin kielen. Tämä ilmiö tapahtuu kaikilla kiinnitetyillä rationaalisilla kiertoluvun arvoilla. Näin syntyvät Arnoldin kielet on nimetty venäläisen matemaatikon Vladimir Igorevich Arnoldin mukaan.

Kirjoitelmassa esiintyvät kuvat on piirretty joko GeoGebra-ohjelmalla tai käsin.

LUKU 1

Ympyrän homeomorfismit

Tässä luvussa tärkeimpiä lähteitä ovat [**1**], [**2**] ja [**5**]. Luvun 1.1 määritelmät ja peruskäsitteet ovat pääasiassa lähteestä [**2**]. Luvun 1.2 tulokset on koottu teosten [**1**], [**2**] ja [**5**] avulla. Luvussa 1.3 on lähteen [**5**] tukena käytetty lähdettä [**3**]. Pääsääntöisesti tulosten todistusten rungot on esitelty lähdekirjoissa. Olen lisännyt välivaiheita ja johtopäätöksiä todistuksiin. Lauseiden 1.17-1.21 välisten tulosten todistukset olen muotoillut itse. Olen muotoillut myös esimerkin 1.35 ja esimerkin 1.36 ilman lähdekirjallisuutta.

1.1. Määritelmiä ja peruskäsitteitä

Diskreetti dynaaminen systeemi muodostuu epätyhjästä joukosta X ja kuvauksesta $f\colon X \to X$. Diskreetillä dynaamisella systeemillä tarkoitetaan kuvauksen f iteraattien f^n ja eri pisteiden $x \in X$ ratojen tarkastelua, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $n \to \infty$. (Jos f on bijektio, niin $n \in \mathbb{Z}$.)

Määritelmä 1.1. Pisteen x positiivinen rata on jono pisteitä $x, f(x), f^2(x), \ldots,$ josta käytetään merkintää

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Jos funktio f on homeomorfismi, voidaan määritellä pisteen x täysi rata

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\},$$

joka sisältää positiivisen radan lisäksi negatiivisen radan

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-k}(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Negatiivinen rata on siis muotoa $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \ldots.$

Määritelmä 1.2. Pistettä x sanotaan funktion f *kiintopisteeksi*, jos $f(x) = x$. Piste x on *jaksollinen piste* jaksolla n, jos $f^n(x) = x$. Pienintä positiivista lukua n, jolle $f^n(x) = x$ kutsutaan pisteen x jaksoksi.

Määritelmä 1.3. Funktio $f\colon X \to Y$ on jaksollinen, jos ja vain jos on olemassa reaaliluku $a \neq 0$ siten, että $f(x) = f(x + a)$ kaikilla $x \in X$. Tällöin funktion f jakso on a.

Esimerkki 1.4. Kuvauksilla voi olla useampi kiintopiste. Esimerkiksi identtisellä kuvauksella $\mathrm{Id}(x) = x$ kiintopisteitä ovat kaikki reaaliluvut $\mathbb{R}$. Toisaalta taas kuvauksella $f(x) = -x$ on vain yksi kiintopiste, origo, ja kaikki muut pisteet ovat jaksollisia jaksolla 2.

1.2. Kiertoluku

Tässä luvussa tutkitaan kiertolukua ja sen ominaisuuksia. Kiertoluvun määrittelemiseksi tarvitaan noston käsite. Lisäksi tutkitaan kiertoja ja niiden ominaisuuksia.

Yksikköympyrälle käytetään multiplikatiivista merkintää

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$$

tai additiivista merkintätapaa

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1]/\sim,$$

missä $x \sim y$, jos ja vain jos $x - y \in \mathbb{Z}$. Tämä tarkoittaa, että $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on reaalilukujen tekijäjoukko. Edellä $\sim$ siis samaistaa arvot 0 ja 1. Luonnollinen etäisyysmitta välillä [0,1] indusoi etäisyyden joukkoon S^1, siis

$$d(x,y) = \min(|x-y|, 1-|x-y|).$$

Kahden edeltävän merkintätavan yhdistävä tekijä on kuvaus

$$\varphi \mapsto e^{2\pi i\varphi} = z,$$

avaruudelta $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avaruudelle $S^1 \subset \mathbb{C}$. Tämä kuvaus on isometria, jos multiplikatiivisen ympyrän kaarenpituus jaetaan luvulla 2π. Siis, kun ympyrää S^1 ajatellaan additiivisesti, sen kehän pituus on yksi ja multiplikatiivisesti ajateltuna kehän pituus on 2π.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Käytetään merkintää R_α tarkoittamaan *kiertoa* kulman $2\pi\alpha$ verran. Multiplikatiivisesti merkittynä,

$$R_\alpha x = xe^{2\pi i\alpha}$$

ja additiivisesti merkittynä kierto on

$$R_\alpha x = x + \alpha \pmod 1.$$

Kokoelma $\{R_\alpha : \alpha \in [0,1)\}$ on kommutatiivinen ryhmä kuvausten yhdistämisen suhteen eli $R_\alpha \circ R_\beta = R_\gamma$, missä $\gamma = \alpha + \beta \mod 1$. Huomataan myös, että R_α on isometria. Se siis säilyttää etäisyyden d.

Jos $\alpha = \frac{p}{q}$ on rationaaliluku, niin $R_\alpha^q = \mathrm{Id}$, sillä

$$\begin{aligned} R_\alpha^q(x) &= R_\alpha^{q-1}(x+\alpha) = R_\alpha^{q-2}(x+\alpha+\alpha) = \cdots = x + q\cdot\alpha \\ &= x + q \cdot \frac{p}{q} = x + p = x \pmod 1 \end{aligned}$$

Toisaalta jos α on irrationaalinen, niin jokainen positiivinen rata on tiheä joukossa S^1. Tämä tulos on muotoiltu lauseeksi 1.9. Ennen tämän tuloksen todistamista esitellään muutama määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Topologinen dynaaminen systeemi $f\colon X \to X$ on *topologisesti transitiivinen*, jos on olemassa piste $x \in X$, jonka rata $\mathcal{O}_f(x) = \{f^k(x) : k \in \mathbb{Z}\}$ on tiheä joukossa X.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Topologinen dynaaminen systeemi $f\colon X \to X$ on *minimaalinen*, jos jokaisen pisteen $x \in X$ rata on tiheä joukossa X.

Määritelmä 1.8. Olkoon $A \subset X$ ja $t \in \mathbb{Z}$. Olkoon $f^t(A)$ joukon A kuvajoukko kuvauksella f^t ja

$$f^{-t}(A) = \{x \in X : f^t(x) \in A\}$$

joukon A alkukuva. Osajoukko $A \subset X$ on *f-invariantti*, jos $f^t(A) \subset A$ kaikilla $t \in \mathbb{Z}$; *positiivisesti f-invariantti*, jos $f^t(A) \subset A$ kaikilla $t \geq 0$ ja *negatiivisesti f-invariantti*, jos $f^{-t}(A) \subset A$ kaikilla $t \geq 0$.

Huomaa, että $A \subset f^{-t}(f^t(A))$, mutta yleisesti dynaamiselle systeemille, joka ei ole invariantti, $f^{-t}(f^t(A))$ ei ole yhtäsuuri kuin A.

Käytetään jatkossa merkintää $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ reaaliluvun kokonaisosalle.

Lause 1.9. *Kierto R_α on minimaalinen eli kierron R_α kaikki radat ovat tiheässä joukossa S^1, jos α on irrationaalinen.*

Todistus. Olkoon $x, z \in S^1$. Osoitetaan, että z on pisteen x positiivisen radan sulkeumassa. Pisteen x radan alkiot ovat erillisiä, koska ehdosta $R_\alpha^n(x) = R_\alpha^m(x)$ saadaan, että $(n-m)\alpha \in \mathbb{Z}$ vain silloin, kun $n = m$.
Jokaisella äärettömällä joukolla ympyrän pisteitä on kasautumispiste.
Olkoon $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt koska kasautumispiste on olemassa, niin on olemassa myös kokonaisluvut m ja n siten, että $|R_\alpha^n(x) - R_\alpha^m(x)| < \epsilon$. Olkoon $k = n-m$. Tällöin $|R_\alpha^k(x) - x| < \epsilon$, koska R_α on isometria. Etäisyys $d\left(R_\alpha^k(x), x\right) = |R_\alpha^k(x) - x|$ ei riipu pisteen x valinnasta ja tämä nähdään seuraavasti: Olkoon $y \in S^1$. Tällöin $y = R_{y-x}(x)$ ja

$$\begin{aligned} d\left(R_\alpha^k(y), y\right) &= d\left(R_\alpha^k(R_{y-x}(x)), R_{y-x}(x)\right) = d\left(R_{k\alpha+y-x}(x), R_{y-x}(x)\right) \\ &= d\left(R_{y-x}(R_\alpha^k(x)), R_{y-x}(x)\right) \overset{(i)}{=} d\left(R_\alpha^k(x), x\right), \end{aligned}$$

missä kohdassa (i) käytetään tietoa R_{y-x} on isometria eli säilyttää etäisyydet. Näin on näytetty että m ja n voidaan valita riippumatta pisteen x valinnasta.

Olkoon $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ siten, että $\theta = (n-m)\alpha \pmod 1$. Tällöin $R_\alpha^{n-m} = R_\theta$ ja

$$\varphi := |\theta| = |(n-m)\alpha| = |x + (n-m)\alpha - x| = |R_\alpha^{n-m}(x) - x| < \epsilon \qquad \pmod 1.$$

Olkoon $N = \lfloor 1/\varphi \rfloor + 1$. Nyt pisteen x positiivisen radan osajoukko $\{R_\theta^i(x) : i = 0, 1, \ldots, N\}$ jakaa ympyrän väleihin, joiden pituudet ovat pienempää tai yhtäsuurta kuin $\varphi < \epsilon$. Jos z on jokin pisteen x radan pisteistä, niin väite on selvä. Oletetaan siis, että z ei ole radan piste eli se on radan pisteiden välissä. Tällöin on olemassa indeksi $s \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ siten, että $z \in \left(R_\theta^s(x), R_\theta^{s+1}(x)\right)$. Nyt

$$|R_\theta^s(x) - R_\theta^{s+1}(x)| = |\theta| < \epsilon,$$

joten $|R_\theta^s(x) - z| < \epsilon$. Nyt koska $R_\theta^s(x) = R_\alpha^{(n-m)s}(x)$, niin $|R_\alpha^{(n-m)s}(x) - z| < \epsilon$. Siis z on pisteen x radan sulkeumassa kierrolla R_α. Näin väite on saatu osoitettua. □

Tässä luvussa tarkastellaan suunnansäilyttäviä homeomorfismeja joukossa S^1 eli homeomorfismeja $f\colon S^1 \to S^1$, jotka säilyttävät pisteiden järjestyksen ympyrällä. Ympyrän dynamiikkaa tutkiessa noston käsite on keskeisessä osassa. Seuraavaksi määritellään peitekuvaus, jota tarvitaan nostoa määriteltäessä.

Määritelmä 1.10. Olkoon kuvaus $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ siten, että

$$\pi(x) = \exp(2\pi i x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$$

tai additiivisesti ajateltuna

$$\pi(x) = x + \mathbb{Z}.$$

Siis $\pi(x)$ on pisteen x ekvivalenssiluokka. Käytetään jatkossa pääasiassa additiivista ajattelutapaa.

Olkoot $x, y \in S^1$ kaksi eri pistettä. Tällöin välillä $[x, y] \subset S^1$ tarkoitetaan joukkoa $\pi([\tilde{x}, \tilde{y}])$, missä $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ ja $\tilde{y} = \pi^{-1}(y) \cap [\tilde{x}, \tilde{x} + 1)$.

Kuvaus π on peitekuvaus, nimittäin se kietoo joukon $\mathbb{R}$ ympyräkaarelle S^1 taittamatta sitä. Jokaiselle pisteelle $x \in S^1$ on olemassa ympäristö

$$U_x =]x - \epsilon, x + \epsilon[,$$

missä $\epsilon > 0$. Olkoon $x_0 \in \pi^{-1}(x)$. Pisteellä x_0 on nyt olemassa ympäristö

$$V =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[,$$

joka kuvautuu kuvauksella $\pi|_V$homeomorfisesti joukkoon U_x. Jokaisella joukon

$$\pi^{-1}(x) = \{x_0 + i \colon i \in \mathbb{Z}\}$$

pisteellä on olemassa ympäristö, joka kuvautuu homeomorfisesti joukkoon U_x. Jatkossa, kun puhutaan peitekuvauksesta, tarkoitetaan nimen omaan kuvausta π.

Määritelmä 1.11. Jatkuva kuvaus $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on homeomorfismin $f\colon S^1 \to S^1$ nosto, jos

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

Funktion f aste on $\deg(f) := F(x + 1) - F(x)$. Jos f on homeomorfismi, niin $|\deg(f)| = 1$.

Määritelmä 1.12. Oletetaan, että funktio f on kääntyvä. Jos $\deg(f) = 1$, niin kuvausta f kutsutaan suunnansäilyttäväksi. Jos taas $\deg(f) = -1$, niin kuvausta f kutsutaan suunnankääntäväksi.

Lause 1.13. *Homeomorfismin $f\colon S^1 \to S^1$ nosto $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on yksikäsitteinen lukuunottamatta nostoon lisättävää kokonaislukuvakiota ($\pi(F(x)) = F(x) + \mathbb{Z}$).*

Todistus. Olkoon $\overline{F}$ kuvauksen f toinen nosto. Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$\pi\left(\overline{F}(x)\right) = f(\pi(x)) = \pi\left(F(x)\right).$$

Siispä $\overline{F} - F$ on aina kokonaisluku. Nyt koska F ja $\overline{F}$ ovat nostoina jatkuvia, niin $\overline{F} - F$ on myös jatkuva. Näin ollen funktion $\overline{F} - F$ on oltava vakio. Siis on osoitettu, että kuvauksen f nosto on yksikäsitteinen lukuunottamatta nostoon lisättävää kokonaislukuvakiota. □

Huomautus 1.14. Edeltävän lauseen nojalla homeomorfismin $f\colon S^1 \to S^1$ nostot eroavat toisistaan kokonaisluvulla.

Esimerkki 1.15. Käydään läpi esimerkkejä kiertojen nostoista.

(1) Olkoon $R_\omega\colon S^1 \to S^1; R_\omega(\theta) = \theta + \omega$ kierto. Osoitetaan, että jokaiselle $k \in \mathbb{Z}$ kuvaus $T_{\omega,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; T_{\omega,k}(x) = x + \omega + k$ on kierron R_ω nosto. Oletetaan, että $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$\pi(T_{\omega,k}(x)) = \pi(x + \omega + k) = \pi(x + \omega) = x + \omega + \mathbb{Z}$$

ja

$$R_\omega(\pi(x)) = \pi(x) + \omega = x + \mathbb{Z} + \omega,$$

joten $\pi \circ T_{\omega,k} = R_\omega \circ \pi$.

(2) Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ siten, että $f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(\theta)$. Tämän kuvauksen nosto on $F_{k,\epsilon}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$F_{k,\epsilon}(x) = x + \frac{\epsilon}{2\pi}\sin(2\pi x) + k,$$

missä $k \in \mathbb{Z}$. Palataan tähän esimerkkiin myöhemmin tarkemmin.

Huomautus 1.16. (1) Edellä olevassa esimerkissä on samankaltaisuutta kuvausten ja niiden nostojen välillä. On kuitenkin tärkeää huomata, että nämä kuvaukset on määritelty eri joukoissa ja siten niillä on erilaiset dynamiikat. Jos ω on rationaalinen, niin kaikki joukon S^1 pisteet ovat jaksollisia kierrolla R_ω, mutta mikään joukon $\mathbb{R}$ piste ei ole jaksollinen nostolla T_ω (paitsi kun $\omega = 0$).

(2) Oletetaan, että F on funktion f nosto. Tässä luvussa oletetaan, että suunta säilyy nostossa. Siispä noston F on oltava kasvava, että reaaliakseli kierrettynä yksikkökiekolle säilyttää kulkusuuntansa.

(3) Jokaiselle $x_0 \in \pi^{-1}(f(0))$ on olemassa *yksikäsitteinen nosto* F siten, että $F(0) = x_0$.

Lause 1.17. *Olkoon $F(x)$ nosto. Nostolle pätee, että $F(x+k) = F(x)+k$ kaikilla kokonaisluvuilla k.*

Todistus. Funktion asteen määritelmästä saadaan homeomorfismille f, että

$$F(x + 1) = F(x) + 1. \tag{1.1}$$

Todistetaan väite induktiolla. Tapaus $k = 2$

$$F(x + 2) = F(x + 1 + 1) \overset{(1.1)}{=} F(x + 1) + 1 \overset{(1.1)}{=} F(x) + 2.$$

Oletetaan, että väite pätee tapauksessa $k-1$ eli $F(x+(k-1)) = F(x)+(k-1)$. Nyt

$$F(x + k) = F(x + (k - 1) + 1) \overset{(1.1)}{=} F(x + (k - 1)) + 1 \overset{ind.ol.}{=} F(x) + k. \qquad \square$$

Homeomorfismilla $f\colon S^1 \to S^1$ on olemassa aina äärettömän monta nostoa.

Lause 1.18. *Jos kuvaus $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kuvauksen $f\colon S^1 \to S^1$ nosto, niin myös kuvaus $F_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_k(x) = F(x) + k$ on kuvauksen f nosto, kun $k \in \mathbb{Z}$.*

Todistus. Olkoon $F_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $F_k(x) = F(x) + k$. Osoitetaan, että

$$F_k(x + l) = F_k(x) + l$$

kaikilla $l \in \mathbb{Z}$. Nyt

$$F_k(x + l) = F(x + l) + k \overset{(i)}{=} F(x) + l + k \overset{(ii)}{=} F_k(x) + l,$$

missä kohdassa (i) käytetään lausetta 1.17 ja kohdassa (ii) käytetään määritelmää. Nyt halutaan osoittaa, että $\pi(F_k(x)) = f(\pi(x))$. Oletetaan, että $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$\pi(F_k(x)) = \pi(F(x)+k) \overset{(iii)}{=} \pi(F(x+k)) \overset{(iv)}{=} f(\pi(x+k)) = f(\pi(x)),$$

missä (iii) seuraa lauseesta 1.17 ja (iv) oletuksesta F on funktion f nosto eli $\pi \circ F = f \circ \pi$. Siis annetulla funktiolla f on olemassa äärettömän monta nostoa. $\square$

LAUSE 1.19. *Kuvaus F^n on funktion f^n nosto, kun F on funktion f nosto.*

TODISTUS. Pitää siis näyttää, että $f^n \circ \pi = \pi \circ F^n$. Nyt koska F on funktion f nosto, niin $f \circ \pi = \pi \circ F$. Siis saadaan, että

$$\begin{aligned}\pi \circ F^n(x) &= \pi(F \underbrace{\circ \cdots \circ}_{n-1\text{kpl}} F(x)) = \pi \circ F(F \underbrace{\circ \cdots \circ}_{n-2\text{kpl}} F(x)) = f \circ \pi(F \underbrace{\circ \cdots \circ}_{n-2\text{kpl}} (F(x))) \\ &= \cdots = f \underbrace{\circ \cdots \circ}_{n-2\text{kpl}} f \circ \pi(F(x)) = f^n \circ \pi(x).\end{aligned}$$

$\square$

SEURAUS 1.20. *Olkoon* Id *identtinen kuvaus. Kuvaukset* $F - \mathrm{Id}$ *ja* $F^n - \mathrm{Id}$ *ovat jaksollisia jaksolla 1.*

TODISTUS. Lauseesta 1.17 saadaan, että

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) + 1 - (x+1) = F(x) - x.$$

Tämä siis tarkoittaa, että kuvaus $F - \mathrm{Id}$ on jaksollinen jaksolla 1. Osoitetaan vielä, että $F^n - \mathrm{Id}$ on jaksollinen jaksolla 1. Nyt koska F^n on funktion f^n nosto, niin lause 1.17 nojalla $F^n(x+k) = F^n(x) + k$, joten

$$F^n(x+1) - (x+1) = F^n(x) + 1 - (x+1) = F^n(x) - x.$$

Siis myös $F^n - \mathrm{Id}$ on jaksollinen jaksolla 1. $\square$

LAUSE 1.21. *Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ ja F nosto. Jos $|x-y| < 1$, niin*

$$|F^n(x) - F^n(y)| < 1.$$

TODISTUS. Olkoon $y > x$. Oletuksen $|x - y| < 1$ nojalla $y < x + 1$. Seuraus 1.20 antaa, että $F^n - \mathrm{Id}$ on jaksollinen jaksolla yksi eli

$$F^n(x+1) - (x+1) = F^n(x) - x \iff F^n(x+1) - F^n(x) = 1.$$

Nyt koska nosto on kasvava, niin $F^n(x) < F^n(y) < F^n(x+1)$. Tästä saadaan

$$|F^n(x) - F^n(y)| < |F^n(x) - F^n(x+1)| = 1.$$

$\square$

PROPOSITIO 1.22. *Jos jono $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toteuttaa ehdon $a_{m+n} \le a_n + a_{m+k} + L$ kaikille $m, n \in \mathbb{N}$ ja joillekin k ja L, niin $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ on olemassa.*

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**5**] sivulta 374. $\square$

LAUSE 1.23. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi ja olkoon funktion f nosto $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nyt kaikilla $x \in \mathbb{R}$ raja-arvo*

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

on olemassa ja riippumaton pisteestä x. Kutsutaan lukua $\rho(F)$ noston kiertoluvuksi.

Määritelmä 1.24. Lukua $\rho(f) := \pi(\rho(F))$ kutsutaan funktion f *kiertoluvuksi.*

Kiertoluku on tärkeä käsite, joka liittyy ympyräkuvauksiin. Kiertoluku $\rho(f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mittaa intuitiivisesti keskimääräisen kiertokulman suuruutta pitkin funktion f rataa. Koska $S^1 = [0,1] \mod 1$, usein käytetään harhaanjohtavaa merkintää $\rho(f) = x$ jollakin $x \in [0,1]$. Kuvauksen f kiertoluku on riippumaton nostosta, koska lauseen 1.13 nojalla nostot eroavat toisistaan kokonaisluvulla.

Todistetaan nyt edellä esitelty lause 1.23.

Todistus. (Lause 1.23) Osoitetaan aluksi, että $\rho(F)$ on riippumaton pisteestä x. Oletuksen mukaan f on suunnansäilyttävä homeomorfismi, joten $F(x+1) = F(x)+1$. Olkoot $x, y \in [0,1)$. Tällöin lauseen 1.21 mukaan $|F^n(y) - F^n(x)| < 1$. Nyt edeltävän huomion ja kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}|F^n(x) - x| - \frac{1}{n}|F^n(y) - y|\right| &\leq \frac{1}{n}\left(|F^n(x) - F^n(y) - x + y|\right)\\ &\leq \frac{1}{n}\left(\underbrace{|F^n(x) - F^n(y)|}_{<1} + \underbrace{|x-y|}_{<1}\right)\\ &\leq \frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Tällöin

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)}{n}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$$

ja edelleen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F^n(y) - y}{n}.$$

Näin ollen kiertoluku on riippumaton pisteen valinnasta.

Osoitetaan seuraavaksi, että kiertoluku on olemassa. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $x_n = F^n(x)$. Merkitään $a_n := x_n - x$ ja $k := \lfloor a_n \rfloor$ eli kokonaislukuosa. Nyt

$$\begin{aligned}a_{m+n} &= F^{m+n}(x) - x = F^m(F^n(x)) - x = F^m(x_n) - x_n + x_n - x\\ &= F^m(x_n) - x_n + x_n - x + F^m(x+k) - F^m(x+k) + (x+k) - (x+k)\\ &= \underbrace{(F^m(x+k) - (x+k))}_{=F^m(x)-x=a_m} + \underbrace{(x_n - x)}_{=a_n} + \underbrace{(F^m(x_n) - F^m(x+k))}_{\leq 1} - \underbrace{(x_n - (x+k))}_{\geq 0}\\ &\overset{(i)}{\leq} a_m + a_n + 1\end{aligned}$$

Kohta (i) saadaan tiedosta $F^m(y) - F^m(z) \leq 1$, kun $y - z \leq 1$. Edellä siis $y := x_n$ ja $z := x + k$ jolloin

$$y - z = x_n - x - k = F^n(x) - x - \lfloor F^n(x) - x \rfloor \leq 1$$

ja

$$x_n - x - k = a_n - \lfloor a_n \rfloor \geq 0.$$

Nyt koska

$$\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F^{i+1}(x) - F^i(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F(x_i) - x_i) \geq \min_{0\leq y\leq 1} F(y) - y,$$

niin $\frac{a_n}{n}$ on alhaalta rajoitettu. Lauseen 1.22 nojalla raja $\frac{a_n}{n}$ on olemassa, joten raja-arvo on reaaliluku $\rho(F)$.
Osoitetaan vielä, että $\rho(F+k) = \rho(F) + k$, kun $k \in \mathbb{Z}$. Tämän osoittamiseksi määritellään apufunktio $F_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; F_k(x) = F(x) + k$, jolle osoitetaan aputulos $F_k^n(x) = F^n(x) + nk$. Todistetaan tämä induktiolla. Tapaus $n = 1$ on selvä apufunktion määritelmän nojalla. Oletetaan, että väite toimii tapauksessa $n-1$ siis $F_k^{n-1}(x) = F^{n-1}(x) + (n-1)k$. Nyt

$$\begin{aligned} F_k^n(x) &= F_k(F_k^{n-1}(x)) \\ &\overset{(i)}{=} F_k(F^{n-1}(x) + (n-1)k) \\ &\overset{(ii)}{=} F(F^{n-1}(x) + (n-1)k) + k \\ &\overset{(iii)}{=} F(F^{n-1}(x)) + (n-1)k + k \\ &= F^n(x) + nk, \end{aligned}$$

missä kohta (i) seuraa induktio-oletuksesta, (ii) apufunktion määritelmästä ja (iii) Lauseesta 1.17. Tämän avulla saadaan

$$\begin{aligned} \rho(F_k(x)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_k^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) + nk - x}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} + k = \rho(F) + k \end{aligned}$$

Näin ollen $\rho(F)$ on hyvin määritelty $\pmod 1$. □

Propositio 1.25. *Olkoon $f \colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi. Tällöin kiertoluku $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ jos ja vain jos funktiolla f on jaksollinen piste.*

Todistus. Oletetaan ensin, että funktiolla f on jaksollinen piste. Osoitetaan, että noston kiertoluku $\rho(F)$ on rationaalinen. Jos funktiolla f on jaksollinen piste jaksolla q, niin $F^q(x) = x + p$ jollakin $x \in [0,1)$ ja jollakin $p \in \mathbb{Z}$. Näin on, sillä $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on funktion $f \colon S^1 \to S^1$ nosto kuvauksella $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$ (additiivinen ajattelutapa). Tällöinhän siis ympyräkaaren pituudeksi on määritelty yksi. Jos nimetään jaksolliseksi pisteeksi $\pi(x)$, niin $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$ ja tällöin kuvaus f on kiertänyt ykkösenmittaista ympyräkehää $p \in \mathbb{Z}$ kertaa ympäri. Siis tällöin realiakselilla F on liikuttanut pistettä x kokonaisluvun p verran eteenpäin. Nyt kun $F^q(x) = x + p$ ja $k \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\frac{F^{kq}(x) - x}{kq} = \frac{1}{kq} \sum_{i=0}^{k-1} F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x) = \frac{kp}{kq} = \frac{p}{q}.$$

Tämä pätee, koska $F^{kq}(x) = x + kp$, sillä

$$\begin{aligned} F^{kq}(x) &= \underbrace{F^q \circ \cdots \circ F^q}_{k \text{ kpl}}(x) = \underbrace{F^q \circ \cdots \circ F^q}_{k-1 \text{ kpl}}(x+p) \\ &= \underbrace{F^q \circ \cdots \circ F^q}_{k-2 \text{ kpl}}((x+p)+p) = \cdots = x + kp. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Näin ollen

$$\rho(F) = \lim_{kq\to\infty} \frac{F^{kq}(x) - x}{kq} = \lim_{k\to\infty} \frac{F^{kq}(x) - x}{kq} = \frac{p}{q}.$$

Siis noston kiertoluku $\rho(F)$ on olemassa ja on rationaalinen, kun funktiolla f on jaksollinen piste.

Osoitetaan sitten käänteinen tulos. Oletetaan, että $\rho(F)$ on rationaalinen ja osoitetaan, että tällöin funktiolla f on jaksollinen piste. Lauseesta 1.23 nostolle F saadaan

$$\rho(F^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^m)^n(x) - x}{n} = m \lim_{n\to\infty} \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} = m\rho(F). \tag{1.3}$$

Nyt jos $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}$, niin

$$\rho(f^q) = \pi(\rho(F^q)) \overset{(1.3)}{=} \pi(q\rho(F)) = 0,$$

koska $q\rho(F) \in \mathbb{Z}$. Nyt väite saadaan osoittamalla seuraava tulos: Jos $\rho(f) = 0$, niin funktiolla f on kiintopiste. Oletetaan, että funktiolla f ei ole kiintopistettä eli $f(x) \neq x$ kaikilla x. Olkoon F nosto siten, että $F(0) \in [0, 1)$. Nyt $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos näin ei olisi, niin $F(x) - x = s$, missä $s \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$f(\pi(x)) = \pi(F(x)) \overset{(i)}{=} \pi(x),$$

missä kohdassa (i) käytetään tietoa $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$ ja oletusta $F(x) = x + s$, joiden nojalla $F(x) + \mathbb{Z} = x + s + \mathbb{Z} = x + \mathbb{Z}$. Näin ollen $\pi(x)$ olisi kiintopiste funktiolle f. Siis $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jolloin $0 < F(x) - x < 1$. Koska $F - \mathrm{Id}$ on jatkuva ja jaksollinen (seuraus 1.20), se saavuttaa maksiminsa ja miniminsä. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1$$

kaikille $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti voidaan valita $x = F^i(0)$, missä $i = 0, \ldots, n-1$ ja näin muodostuu epäyhtälöt

$$\begin{gathered} \delta < F(0) - 0 < 1 - \delta \\ \delta < F^2(0) - F^1(0) < 1 - \delta \\ \vdots \\ \delta < F^n(0) - F^{n-1}(0) < 1 - \delta. \end{gathered}$$

Laskemalla nämä epäyhtälöt yhteen saadaan

$$n\delta < \sum_{i=0}^{n-1} F^{i+1}(0) - F^i(0) = F^n(0) - 0 < n(1 - \delta).$$

Siis

$$n\delta \leq F^n(0) \leq (1 - \delta)n$$

tai

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta.$$

Nyt $\rho(F) \neq 0$, kun $n \to \infty$, sillä

$$1 > \rho(F(0)) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(0) - 0}{n} \geq \delta > 0.$$

Tämä on vastoin oletusta $\rho(f) = 0$, koska $0 = \rho(f) = \pi(\rho(F))$ jos ja vain jos $\rho(F) \in \mathbb{Z}$. Näin on päädytty ristiriitaan. Siis jos $\rho(f) = 0$, niin funktiolla f on kiintopiste. Soveltamalla tätä tietoa funktioon f^q ja käyttämällä aikaisemmin osoitettua tietoa $\rho(f^q) = 0$, saadaan, että funktiolla f^q on kiintopiste eli $f^q(x) = x$. Tämä tarkoittaa myös sitä, että kiintopiste x on funktion f jaksollinen piste jaksolla q. Siis funktiolla f on jaksollinen piste, kun $\rho(F)$ on rationaalinen. □

PROPOSITIO 1.26. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi jonka kiertoluku on rationaalinen. Tällöin kaikilla jaksollisilla radoilla on sama jakso. Itse asiassa, jos $\rho(f) = \frac{p}{q}$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$, niin kuvauksen f nostolle F pätee, että $\rho(F) = \frac{p}{q}$ ja $F^q(x) = x + p$.*

TODISTUS. Olkoon kiertoluku $\rho(f) = \frac{p}{q} \pmod 1$, missä $p, q \in \mathbb{Z}$ ovat keskenään jaottomia. Olkoon F nosto ja $\pi(x) \in [0, 1)$ jaksollinen piste funktiolle f. Tällöin on olemassa $r, s \in \mathbb{Z}$, joille $F^r(x) = x + s$. Nyt

$$\frac{p}{q} = \rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nr}(x) - x}{nr} = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{nr} = \frac{s}{r},$$

koska $\rho(f) = \pi(\rho(F))$ ja $F^{nr}(x) = x+ns$ (lauseen 1.25 todistuksessa perusteltiin tämä yhtälöllä (1.2)). Olkoon m pisteiden s ja r suurin yhteinen tekijä. Tällöin $s = mp$ ja $r = mq$. Joten $F^{mq}(x) = x + mp$.

Halutaan osoittaa, että $F^q(x) - p = x$. Tämän takia tarkastellaan mitä tapahtuu, jos $F^q(x) - p > x$ tai $F^q(x) - p < x$. Jos $F^q(x) - p > x$ niin monotonisuuden nojalla

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x)) - p - p \overset{(i)}{=} F^q(\underbrace{F^q(x) - p}_{>x}) - p \geq F^q(x) - p > x,$$

missä kohdassa (i) käytetään tietoa $F^q(x + k) = F^q(x) + k$. Induktiivisesti edellisen nojalla saadaan, että

$$F^r(x) - s = F^{mq}(x) - mp > x,$$

joka on vastoin oletusta $F^r(x) = x + s$. Näin ollen $F^{mq}(x) - mp \leq x$ ja vastaavasti tapauksesta $F^q(x) - p < x$ saadaan, että $F^{mq}(x) - mp \geq x$. Nämä yhtälöt yhdistämällä saadaan, että $F^{mq}(x) - mp = x$, mikä todistaa väitteen. □

PROPOSITIO 1.27. *Jos $f, h\colon S^1 \to S^1$ ovat suunnansäilyttäviä homeomorfismeja, niin $\rho(h^{-1}fh) = \rho(f)$.*

TODISTUS. Olkoot funktioiden f ja h nostot F ja H eli $\pi \circ F = f \circ \pi$ ja $\pi \circ H = h \circ \pi$. Tätä tietoa käyttämällä saadaan, että H^{-1} on funktion h^{-1} nosto, sillä

$$\pi H^{-1} = \underbrace{h^{-1}h}_{=I} \pi H^{-1} = h^{-1}\pi \underbrace{HH^{-1}}_{=I} = h^{-1}\pi.$$

Myös $H^{-1}FH$ on funktion $h^{-1}fh$ nosto, sillä

$$\pi H^{-1}FH = h^{-1}\pi FH = h^{-1}f\pi H = h^{-1}fh\pi.$$

Oletetaan, että nostolle H pätee $H(0) \in [0, 1)$. Arvioidaan lauseketta

$$|H^{-1}F^n H(x) - F^n(x)| = |(H^{-1}FH)^n(x) - F^n(x)|.$$

(1) Kun $x \in [0, 1)$ ja H on nostona kasvava, niin saadaan

$$H(x) - x \overset{(a)}{\geq} H(0) - x \overset{(b)}{>} H(0) - 1 \overset{(c)}{\geq} 0 - 1$$

ja

$$H(x) - x < H(x) \overset{(d)}{<} H(1) \overset{(e)}{<} 2.$$

Yllä kohta (a) seuraa oletuksista $H(0) \in [0,1)$, $x \in [0,1)$ ja noston H kasvavuudesta, jonka nojalla $H(0) \leq H(x)$, kun $0 \leq x$. Kohdassa (b) käytetään oletuksia $x < 1$ ja $H(0) \geq 0$. Epäyhtälö (c) toteutuu, koska $H(0) \in [0,1)$. Toisen suunnan epäyhtälö (d) saadaan tiedon $x \in [0,1)$ ja noston H kasvavuuden nojalla, sillä $H(x) < H(1)$, kun $x < 1$. Viimeinen kohta (e) seuraa lauseesta 1.17, jonka mukaan $H(x+k) = H(x) + k$. Tämähän sanoo, että pisteiden etäisyys säilyy nostolla kuvattaessa. Toisin sanoen nollan ja ykkösen välinen etäisyys on sama kuin pisteiden $H(0)$ ja $H(1)$ eli yksi. Lisäksi kun tiedetään, että $H(0) \in [0,1)$ niin suurimmillaan $H(1) < 2$. Edeltävän tarkastelun nojalla saadaan, että

$$|H(x) - x| < 2, \qquad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Samaan tapaan saadaan, että

$$|H^{-1}(x) - x| < 2, \qquad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

(2) Jos $|y - x| < 2$, niin $|F^n(y) - F^n(x)| < 3$, koska$|\lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor| \leq 2$ ja tällöin

$$\begin{aligned}
-3 &\leq \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = F^n(0) + \lfloor y \rfloor - F^n(0) - \lfloor x \rfloor - 1 \\
&= F^n(0) + \underbrace{\lfloor y \rfloor}_{\in\mathbb{Z}} - (F^n(0) + \underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\in\mathbb{Z}}) \overset{(f)}{=} F^n(\lfloor y \rfloor) - F^n(\lfloor x \rfloor + 1) \\
&< F^n(y) - F^n(x) < F^n(\underbrace{\lfloor y \rfloor + 1}_{\in\mathbb{Z}}) - F^n(\underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in\mathbb{Z}}) \\
&\overset{(g)}{=} F^n(0) + \lfloor y \rfloor + 1 - F^n(0) - \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor \leq 3,
\end{aligned}$$

missä kohdissa (f) ja (g) käytetään lausetta 1.17.

Näiden kahden kohdan nojalla

$$|H^{-1}F^nH(x) - F^n(x)| \leq |H^{-1}F^nH(x) - F^nH(x)| + |F^nH(x) - F^n(x)| < 2 + 3,$$

joten

$$|(H^{-1}FH)^n(x) - F^n(x)|/n < 5/n.$$

Lauseen 1.23 mukaan tästä saadaan, että $\rho(H^{-1}FH) = \rho(F)$, sillä

$$\begin{aligned}
\big|\rho(H^{-1}FH) - \rho(F)\big| &= \left|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big((H^{-1}FH)^n(x) - x\big) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,(F^n(x) - x)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\big((H^{-1}FH)^n(x) - F^n(x)\big)\right| < \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0.
\end{aligned}$$

Tästä päästään väitteeseen $\rho(h^{-1}fh) = \rho(f)$, sillä

$$\rho(f) = \pi(\rho(F))$$

ja

$$\rho(h^{-1}fh) = \pi(\rho(H^{-1}FH)).$$

□

Määritelmä 1.28. (C^0-*topologia*) Olkoon (X,τ) kompakti ja metrinen avaruus. Olkoon

$$C(X,X) = \{f\colon X \to X : f \text{ jatkuva}\}.$$

Määritetään etäisyys d kuvausten $f, g \in C(X, X)$ välille asettamalla

$$d(f, g) := \max_{x \in X} \tau(f(x), g(x)).$$

Metriikan d määräämä topologia on C^0- topologia.

PROPOSITIO 1.29. *Kiertoluku $\rho(\cdot)$ on jatkuva C^0-topologiassa.*

TODISTUS. Olkoon $\rho(f) = \rho$ ja olkoot $\frac{p'}{q'}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ siten, että $\frac{p'}{q'} < \rho < \frac{p}{q}$. Valitaan funktiolle f nosto F siten, että

$$x + p - 1 < F^q(x) \leq x + p.$$

Siis $-1 < F^q(x) - x - p \leq 0$, jollekin $x \in \mathbb{R}$. Nyt $F^q(x) < x + p$ kaikille $x \in \mathbb{R}$, sillä muuten $F^q(x) = x + p$ jollekin $x \in \mathbb{R}$ ja tällöin $\rho = \frac{p}{q}$. Koska funktio $F^q - \mathrm{Id}$ on jaksollinen ja jatkuva, niin se saavuttaa maksiminsa. Täten on olemassa $\delta > 0$ siten, että $F^q(x) - x < p - \delta$ kaikille $x \in \mathbb{R}$. Jos $\overline{f}$ on toinen ympyrähomeomorfismi riittävän lähellä homeomorfismia f ja kuvauksen $\overline{f}$ nosto $\overline{F}$ on riittävän lähellä nostoa F, niin myös epäyhtälö $\overline{F}^q(x) < x + p$ pätee kaikille $x \in \mathbb{R}$. Siis

$$|F^q(x) - \overline{F}^q(x)| < |x + p - \delta - (x + p)| = \delta.$$

Näin ollen $\rho(\overline{f}) < \frac{p}{q}$.
Vastaavanlaisilla perusteluilla saadaan, että $\frac{p'}{q'} < \rho(\overline{f})$. Tällöin siis $\frac{p'}{q'} < \rho(\overline{f}) < \frac{p}{q}$, kun f ja $\overline{f}$ ovat riittävän lähellä toisiaan. $\square$

Kiertoluvun määritelmästä seuraa, että se on monotoninen toisin sanoen, jos $F_1 > F_2$, niin $\rho(F_1) \geq \rho(F_2)$. Tämä johtaa seuraavanlaisten termien käyttöön:

MÄÄRITELMÄ 1.30. Määritellään järjestys "$<$ " ympyrälle S^1 siten, että

$$\pi(x) < \pi(y) \iff y - x \in (0, 1/2) \pmod 1.$$

Osittainen järjestys "$\prec$" suunnansäilyttäville homeomorfismeille määritellään siten, että

$$f_0 \prec f_1 \iff f_0(x) < f_1(x)$$

kaikilla $x \in S^1$.

Kumpikaan näistä järjestyksistä ei ole transitiivinen, sillä esimerkiksi ympyrällä S^1 $\pi(0) < \pi(1/3)$ ja $\pi(1/3) < \pi(2/3)$, mutta $\pi(2/3) < \pi(0)$. Myöskään osittainen järjestys ei ole transitiivinen, sillä kierrolle R_α pätee $R_0 \prec R_{1/3}$ ja $R_{1/3} \prec R_{2/3}$, mutta $R_{2/3} \prec R_0$.

PROPOSITIO 1.31. *$\rho(\cdot)$ on monotoninen, mikä tarkoittaa seuraavaa: Jos $f_0 \prec f_1$, niin $\rho(f_0) \leq \rho(f_1)$.*

Todistus seuraa kiertoluvun määritelmästä.
Seuraavan lauseen mukaan irrationaalisia arvoja saava kiertoluku on aidosti kasvava kuvaus.

PROPOSITIO 1.32. *Jos $f_0 \prec f_1$ ja $\rho(f_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin $\rho(f_0) < \rho(f_1)$.*

Todistus. Koska $f_0 \prec f_1$, niin on olemassa nostot F_0 ja F_1 siten, että

$$0 < F_1(x) - F_0(x) < 1/2$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Nyt jatkuvuuden ja jaksollisuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että $F_1(x) - F_0(x) > \delta$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska oletettiin, että $\rho(f_0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin voidaan tehdä seuraavanlainen arvio luvulle $\rho(F_0)$. Valitaan $p/q \in \mathbb{Q}$ siten, että

$$p/q - \delta/q < \rho(F_0) < p/q.$$

Tällöin on olemassa $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $F_0^q(x_0) - x_0 > p - \delta$, sillä muuten

$$\begin{aligned}
\rho(F_0) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_0^{nq}(x) - x}{nq}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_0^{(n-1)q}\left(F_0^q(x)\right) - x}{nq}\right)\\
&\le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_0^{(n-1)q}(x+p-\delta) - x}{nq}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_0^{(n-1)q}(x)+p-\delta-x}{nq}\right)\\
&\le \cdots \le \lim_{n\to\infty}\frac{x+p-\delta+(n-1)(p-\delta)-x}{nq} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(p-\delta)}{nq}\\
&= p/q - \delta/q,
\end{aligned}$$

joka on vastoin edeltävää arviota luvulle $\rho(F_0)$. Nyt koska

$$\begin{aligned}
F_1^q(x_0) &= F_1(F_1^{q-1}(x_0)) > F_0(F_1^{q-1}(x_0)) + \delta > F_0(F_0^{q-1}(x_0)) + \delta\\
&= F_0^q(x_0) + \delta > x_0 + p,
\end{aligned}$$

niin saadaan, että $F_1^q(x) > x + p$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ tai $F_1^q(x_1) > x_1 + p$ vain joillakin $x_1 \in \mathbb{R}$. Jos $F_1^q(x) > x + p$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\rho(F_1) = \lim_{|n|\to\infty}\frac{F_1^{nq}(x) - x}{nq} > \frac{np}{nq} = \frac{p}{q}.$$

Jos taas $F_1^q(x_1) > x_1 + p$ vain joillakin $x_1 \in \mathbb{R}$, niin $\rho(F_1) \ge \frac{p}{q}$. Huomataan, että $F_1^q(x_1) < x_1 + p$ ei voi päteä, koska tällöin

$$x_1 + p > F_1^q(x_1) > F_0^q(x_1) + \delta > x_1 + p.$$

Siis kun $F_1^q(x) > x + p$, niin $\rho(F_0) < p/q \le \rho(F_1)$. Ja näin on saatu osoitettua väite $\rho(f_0) < \rho(f_1)$. □

1.3. Poincarén luokittelulause

Tässä luvussa kuvaillaan ympyrähomeomorfismin ratojen mahdollista käyttäytymistä. Tämä mahdollistaa ympyrähomeomorfismin kuvailun jopa kierron monotonisena semikonjugaattina.

Määritelmä 1.33. Kuvaus $g\colon Y \to Y$ on kuvauksen $f\colon X \to X$ *topologinen tekijä*, jos on olemassa jatkuva surjektio $h\colon X \to Y$ siten, että $g \circ h = h \circ f$. Kuvausta h kutsutaan *semikonjugoivaksi kuvaukseksi*. Tämä formulointi ilmaistaan yleensä sanomalla, että seuraava diagrammi kommutoi.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Jos kuvaus h on homeomorfismi, niin kuvaukset f ja g ovat *konjugaatteja* ja h on *konjugoiva kuvaus.*

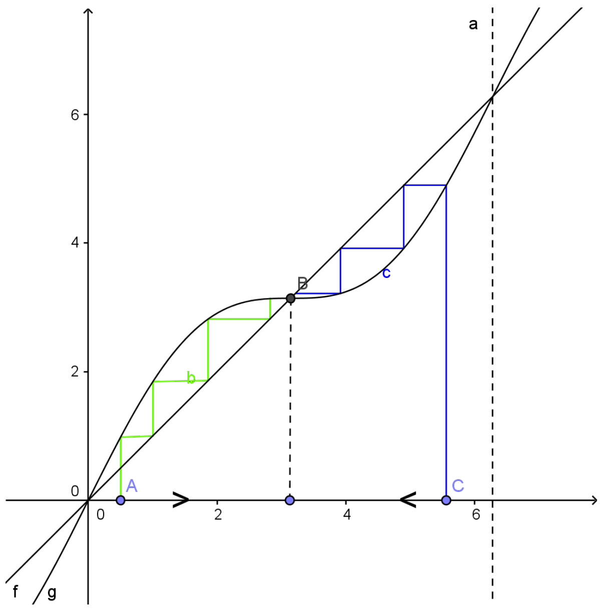
MÄÄRITELMÄ 1.34. Olkoon $f\colon X \to X$ topologinen dynaaminen systeemi. Olkoon $x \in X$. Piste $y \in X$ on pisteen x *ω-rajapiste*, jos on olemassa jono luonnollisia lukuja $n_k \to \infty$ (kun $k \to \infty$) siten, että $f^{n_k}(x) \to y$. Pisteen x *ω-rajajoukko* on joukko $\omega(x) = \omega_f(x)$, joka on pisteen x kaikkien *ω-rajapisteiden* joukko. Yhtäpitävästi voidaan kirjoittaa

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}.$$

Jos f on kääntyvä, niin pisteen x *α-rajajoukko* on $\alpha(x) = \alpha_f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^{-i}(x)}$. Joukon $\alpha(x)$ pistettä kutsutaan *α-rajapisteeksi.* Sekä α- että *ω-rajajoukot* ovat suljettuja ja f-invariantteja.

Seuraavaksi esimerkki ω-rajapisteisiin liittyen.

ESIMERKKI 1.35. Olkoon kuvaus $g\colon S^1 \to S^1$ siten, että $g(x) = x+\sin(x)$. Kuvasta 1.1 nähdään graafisella analyysillä, että pisteiden A ja C ω-rajapiste on piste π.



KUVA 1.1. Kuvassa on pisteet $A = (\frac{1}{2}, 0)$ ja $C = (5\frac{1}{2}, 0)$ sekä funktiot $f(x) = x$ ja $g(x) = x + \sin(x)$. Kuvassa piste $B = (\pi, \pi)$, joten π on ω-rajapiste.

Tutkitaan seuraavaksi kiertoja esimerkein. Kierto multiplikatiivisesti merkittynä tarkoitti seuraavaa

$$R_\alpha x = xe^{2\pi i\alpha}$$

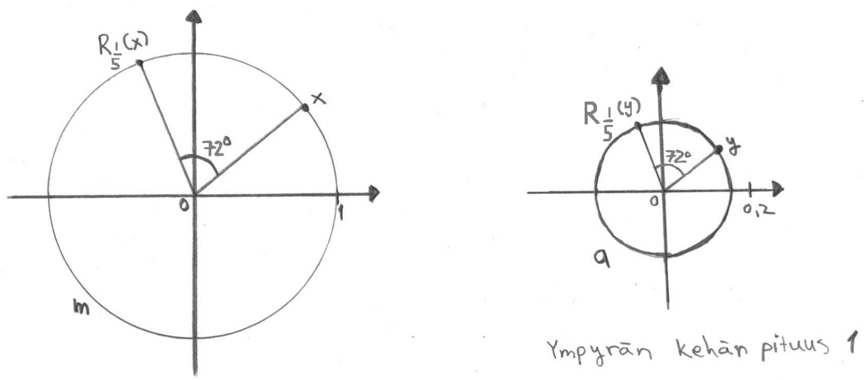
ja additiivisesti merkittynä

$$R_\alpha x = x + \alpha \pmod 1.$$

Multiplikatiivisessa tapauksessa ajatellaan, että ympyräkaaren pituus on 2π, kun taas additiivisessa tapauksessa kaarenpituus on yksi.

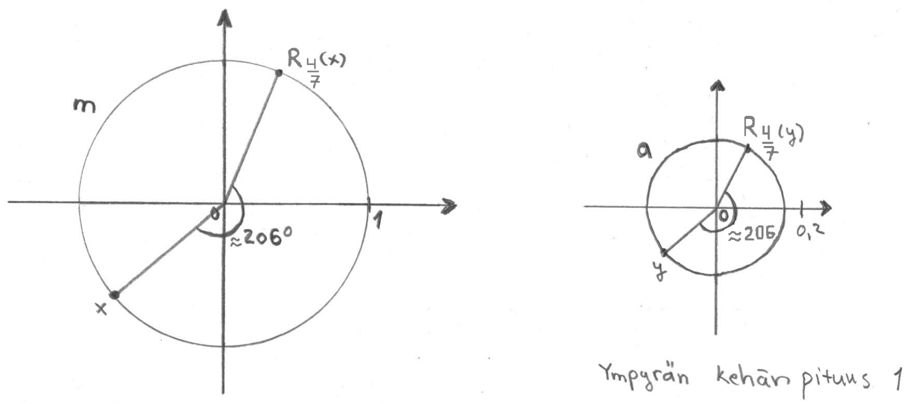
Esimerkki 1.36. Tutkitaan millaisia ovat kierrot pisteestä $x \in S^1$ multiplikatiivisessa ja pisteestä $y \in S^1$ additiivisessa tapauksessa.

(1) Kierto kulman $\alpha = \frac{1}{5}$ verran on $R_{\frac{1}{5}}x = xe^{2\pi i\frac{1}{5}}$ tai $R_{\frac{1}{5}}y = y + \frac{1}{5}$. Kuva 1.2 havainnollistaa tätä tilannetta.



Kuva 1.2. Kierto kulman $\alpha = \frac{1}{5}$ verran additiivisessa ympyrässä a ja multiplikatiivisessa ympyrässä m.

(2) Kierto kulman $\alpha = \frac{4}{7}$ verran on $R_{\frac{4}{7}}x = xe^{2\pi i\frac{4}{7}}$ tai $R_{\frac{4}{7}}y = y + \frac{4}{7}$. Kuva 1.3 havainnollistaa tätä tilannetta.



Kuva 1.3. Kierto kulman $\alpha = \frac{4}{7}$ verran additiivisessa ympyrässä a ja multiplikatiivisessa ympyrässä m.

MÄÄRITELMÄ 1.37. Olkoon $\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_{n-1} \in S^1$. Valitaan pisteet $x_0, \ldots, x_{n-1} \in [x_0, x_0+1) \subset \mathbb{R}$ siten, että $\pi(x_i) = \overline{x}_i$. Tällöin ympyrän S^1 pisteiden $(\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_{n-1})$ järjestys on joukon $\{1, \ldots, n-1\}$ permutaatio σ siten, että $x_0 < x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n-1)} < x_0 + 1$

Seuraava tulos osoittaa, että suunnansäilyttävällä ympyrähomeomorfismilla jaksolliset radat käyttäytyvät kuten ne kierrot ympyrällä, joilla on sama kiertoluku.

PROPOSITIO 1.38. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi jonka kiertoluku on $\rho(f) = \frac{p}{q}$. Oletetaan, että p ja q ovat keskenään jaottomia ja $\overline{x} \in S^1$ siten, että $f^q(\overline{x}) = \overline{x}$. Tällöin joukossa S^1 radan $\{\overline{x}, f(\overline{x}), f^2(\overline{x}), \ldots, f^{q-1}(\overline{x})\}$ järjestys on sama kuin joukon $\left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \ldots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}$järjestys, joka on pisteen 0 rata kierrolla R_ρ.*

TODISTUS. Olkoon $\overline{x}$ jaksollinen piste funktiolle f siten, että $f^q(\overline{x}) = \overline{x}$. Valitaan luku $k \in \{0, \ldots, q-1\}$ siten, että pisteen $\overline{x}$ radalla piste $f^k(\overline{x})$ on pisteen $\overline{x}$ oikeanpuoleinen naapuri. Tällöin $f^{2k}(\overline{x})$ on pisteen $f^k(\overline{x})$ oikeanpuoleinen naapuri. Näin todella on oltava, sillä muutoin olisi olemassa piste $f^l(\overline{x}) \in (f^k(\overline{x}), f^{2k}(\overline{x}))$, jolle siis $l > k$ ja tällöin $f^{l-k}(\overline{x}) \in (\overline{x}, f^k(\overline{x}))$. Tämä tarkoittaisi, että $f^{l-k}(\overline{x})$ olisi pisteen $\overline{x}$ oikeanpuoleinen naapuri ja tämä on ristiriita. Näin ollen pisteen $\overline{x}$ radan järjestys on

$$\left\{\overline{x}, f^k(\overline{x}), f^{2k}(\overline{x}), \ldots, f^{(q-1)k}(\overline{x})\right\}.$$

Olkoon $\overline{x} = \pi(x)$. Alussa oletettiin, että $f^q(\overline{x}) = \overline{x}$, tällöin välejä

$$I_t = [f^{tk}(\overline{x}), f^{(t+1)k}(\overline{x})]$$

on q kappaletta. Nyt f^k kuvaa bijektiivisesti jokaisen joukon I_t joukoksi I_{t+1}. Kuvaukselle f^k on olemassa nosto $\overline{F}$ siten, että $\overline{F}^q(x) = x + 1$. Olkoon F nosto kuvaukselle f, jolloin proposition 1.26 nojalla $F^q(x) = x + p$. Lauseen 1.19 nojalla F^k on nosto kuvaukselle f^k. Nyt kuvaukselle f^k on siis kaksi nostoa F^k ja $\overline{F}$. Koska tiedetään, että kaikki nostot eroavat kokonaislukuosalla toisistaan, niin $F^k = \overline{F} + s$ jollakin s. Tämän tiedon nojalla saadaan, että

$$x + kp \overset{(i)}{=} F^{kq}(x) = (\overline{F} + s)^q(x) \overset{(ii)}{=} \overline{F}^q(x) + qs = x + 1 + qs,$$

missä kohta (i) tulee proposition 1.25 todistuksessa osoitetusta tuloksesta $F^{kq}(x) = x+kp$ ja (ii) lauseen 1.23 todistuksessa osoitetusta aputuloksesta $F_k^n(x) = F^n(x)+nk$, missä $F_k(x) = F(x) + k$.
Tällöin $kp = 1 + qs$ ja koska $0 < k < q$, niin $kp = 1 \mod q$. Nyt siis radan

$$\left\{\overline{x}, f^1(\overline{x}), f^2(\overline{x}), \ldots, f^{(q-1)}(\overline{x})\right\}$$

järjestys on $ik \equiv \sigma(i) \pmod q$. Olkoon $f(\overline{x}) = R_\rho(\overline{x})$ ja valitaan $\overline{x} = 0$. Tällöin saadaan, että joukon $\left\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \ldots, \frac{(q-1)p}{q}\right\}$ järjestys on

$$\left(0, \frac{kp}{q}, \frac{2kp}{q}, \ldots, \frac{(q-1)kp}{q}\right).$$

$\square$

Proposition 1.40 mukaan rationaalisen kiertoluvun omaavan ympyrähomeomorfismin kaikki radat, jotka eivät ole jaksollisia, ovat asymptoottisia jaksollisen radan kanssa.

MÄÄRITELMÄ 1.39. Olkoon kuvaus $f\colon X \to X$ kääntyvä ja $x \in X$ siten, että $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x) = a$ ja $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = b$. Tällöin piste x on *heterokliininen* pisteiden a ja b kanssa. Jos $a = b$, niin piste x on pisteen a *heterokliininen* piste.

PROPOSITIO 1.40. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi, jonka kiertoluku on rationaalinen eli $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Tällöin kuvauksella f on kahdenlaisia ratoja, jotka eivät ole jaksollisia.*

(1) *Jos kuvauksella f on täsmälleen yksi jaksollinen rata, niin kaikki muut pisteet ovat kuvauksella f^q heterokliinisiä kyseisen jaksollisen radan kahden pisteen kanssa. Nämä jaksollisen radan pisteet eivät ole samoja, jos jakso on enemmän kuin yksi.*
(2) *Jos kuvauksella f on enemmän kuin yksi jaksollinen rata, niin kuvauksella f^q jokainen piste, joka ei ole jaksollinen, on heterokliininen kaden pisteen kanssa. Nämä pisteet ovat eri jaksollisista radoista.*

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**3**] sivulta 129 ja lähteestä [**5**] sivulta 394. □

Nyt aletaan tarkastella tapauksia, joissa kiertoluku on irrationaalinen. Seuraava lause osoittaa, että ympyräkuvauksen f, jonka kiertoluku on irrationaalinen, rata on samassa järjestyksessä kuin kierron $R_{\rho(f)}$ rata.

LEMMA 1.41. *Oletetaan, että kiertoluku $\rho(f)$ on irrationaalinen. Olkoon kuvauksen f nosto F ja $\rho = \rho(F)$. Tällöin mille tahansa $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ja $x \in \mathbb{R}$,*

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \qquad \textit{jos ja vain jos} \qquad F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2.$$

TODISTUS. Huomataan aluksi, että annetuille $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ lauseke

$$p(x) := F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) - m_2$$

ei vaihda merkkiään. Polynomin $p(x)$ jatkuvuuden nojalla merkin muutos tarkoittaisi, että olisi olemassa $z \in \mathbb{R}$ siten, että $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) + m_1 - m_2 = 0$. Tällöin z olisi jaksollinen piste, koska $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) \in \mathbb{Z}$. Jos funktiolla f olisi jaksollinen piste, niin proposition 1.25 mukaan funktion kiertoluku olisi tällöin rationaalinen. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska oletuksen nojalla kiertoluku on irrationaalinen. Näin ollen polynomin $p(x)$ merkki ei muutu.

Oletetaan nyt, että $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ kaikilla x. Merkitään $y := F^{n_2}(x)$. Tällöin $F^{n_1-n_2}(y) - y < m_2 - m_1$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$, sillä seuraavat epäyhtälöt ovat ekvivalentteja

$$\begin{aligned}
F^{n_1}(x) + m_1 &< F^{n_2}(x) + m_2 \\
F^{n_1}(x) - F^{n_2}(x) &< m_2 - m_1 \\
F^{n_1-n_2}(F^{n_2}(x)) - F^{n_2}(x) &< m_2 - m_1 \\
F^{n_1-n_2}(y) - y &< m_2 - m_1.
\end{aligned}$$

Erityisesti epäyhtälö pätee kun $y = 0$, mistä saadaan

$$F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1 \tag{1.4}$$

ja

$$\begin{aligned} F^{2(n_1-n_2)}(0) &= F^{(n_1-n_2)}\left(F^{(n_1-n_2)}(0)\right) \overset{(1.4)}{<} F^{(n_1-n_2)}(m_2-m_1) \\ &\overset{(i)}{=} (m_2-m_1) + F^{n_1-n_2}(0) \overset{(1.4)}{<} 2(m_2-m_1). \end{aligned}$$

Kohdassa (i) käytetään lausetta 1.17, joka antaa nostolle ominaisuuden

$$F^{n_1-n_2}(0 + (m_2-m_1)) = F^{n_1-n_2}(0) + (m_2-m_1).$$

Induktiivisesti saadaan $F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2-m_1)$ ja tästä edelleen saadaan, että

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{n(n_1-n_2)} < \lim_{n\to\infty} \frac{n(m_2-m_1)}{n(n_1-n_2)} = \frac{m_2-m_1}{n_1-n_2}.$$

Tämä on yhtäpitävää seuraavan epäyhtälön kanssa

$$\rho \cdot (n_1 - n_2) < m_2 - m_1,$$

joka edelleen on yhtäpitävää epäyhtälön

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2$$

kanssa. Näin ollaan todistettu suunta " $\Leftarrow$ ". Osoitetaan nyt toinen suunta väitteestä. Oletetaan siis, että $n_1\rho+m_1 < n_2\rho+m_2$. Jos pätisi, että $F^{n_1}(x)+m_1 > F^{n_2}(x)+m_2$, niin vastaavalla päättelyllä kuin toisessa suunnassa saadaan, että $n_1\rho+m_1 > n_2\rho+m_2$. Tämä on vastoin oletusta, joten päädytään ristiriitaan ja näin väite on todistettu molempiin suuntiin. □

Seuraavissa tuloksissa tarkastellaan välejä joukossa S^1, joten muistutetaan nyt mitä tällä tarkoitetaan. Olkoon $x, y \in S^1$ kaksi eri pistettä. Tällöin välillä $[x, y] \subset S^1$ tarkoitetaan joukkoa $\pi([\tilde{x}, \tilde{y}])$, missä $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ ja $\tilde{y} = \pi^{-1}(y) \cap [\tilde{x}, \tilde{x} + 1)$.

Lemma 1.42. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi ja olkoon kiertoluku $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$ ja $x \in S^1$. Olkoon $I \subset S^1$ suljettu väli, jonka päätepisteet ovat $f^m(x)$ ja $f^n(x)$. Tällöin jokainen funktion f positiivinen ja negatiivinen rata leikkaa väliä $I = [f^m(x), f^n(x)]$.*

Todistus. Tarkastellaan positiivista rataa $\{f^n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Negatiivisen radan todistus on vastaava. Väitteen todistamiseen rittää osoittaa, että $S^1 \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-k}(I)$, eli välin I alkukuvat peittävät joukon S^1.

Olkoon $I_k := f^{-k(n-m)}(I)$, missä $k \in \mathbb{N}$. Nyt väleillä I_k ja I_{k-1} on yhteinen päätepiste kaikilla k, sillä

$$I_k = f^{-k(n-m)}(I) = f^{-kn+km}([f^m(x), f^n(x)]) = [f^{-kn+(k+1)m}(x), f^{(1-k)n+km}(x)]$$

ja

$$\begin{aligned} I_{k-1} &= f^{-(k-1)(n-m)}(I) = f^{(1-k)n+(k-1)m}([f^m(x), f^n(x)]) \\ &= [f^{(1-k)n+km}(x), f^{(2-n)k+(k-1)m}(x)]. \end{aligned}$$

Jos oletettaisiin, että $S^1 \not\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_k$, niin päätepisteiden muodostama jono suppenisi johonkin pisteeseen $z \in S^1$. Tällöin

$$\begin{aligned} z &= \lim_{k\to\infty} f^{-k(n-m)}\left(f^m(x)\right) = \lim_{k\to\infty} f^{(-k+1)(n-m)}\left(f^m(x)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} f^{(n-m)}\left(f^{-k(n-m)}\left(f^m(x)\right)\right) = f^{(n-m)}\left(\lim_{k\to\infty} f^{-k(n-m)}\left(f^m(x)\right)\right) = f^{(n-m)}(z) \end{aligned}$$

olisi jaksollinen, joka on ristiriita oletuksen $\rho(f) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ kanssa proposition 1.25 perusteella. □

PROPOSITIO 1.43. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi, jonka kiertoluku $\rho(f)$ on irrationaalinen. Tällöin $E := \omega(x)$ on riippumaton pisteestä x ja perfekti. Lisäksi joukon E on oltava joko S^1 tai harva.*

Koska perfektit harvat välin $[0,1]$ osajoukot ovat Cantorin joukkoja (seuraus 3.7), niin ne ovat homeomorfisia Cantorin 1/3-joukon kanssa. Tämän tiedon nojalla lause kertoo, että ympyräkuvauksen dynamiikka tuottaa suoraan Cantorin joukon. Cantorin joukosta tarkemmin luvussa 3.1.

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että $\omega(x)$ on riippumaton pisteen x valinnasta. Täytyy siis näyttää, että $\omega(x) = \omega(y)$ kaikilla $x, y \in S^1$. Olkoon $z \in \omega(x)$. Tällöin määritelmän 1.34 mukaan on olemassa jono luonnollisia lukuja $l_n \to \infty$ siten, että $f^{l_n}(x) \to z$. Siis $\left\{f^{l_n}(x)\right\}$ on pisteen x radan osajoukko ja indeksi n viittaa pisteen paikkaan jonossa, joka suppenee pisteeseen z. Muodostetaan nyt joukko välejä $\{I_n\}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$I_n := [f^{l_n}(x), f^{l_{n+1}}(x)],$$

missä päätepisteet ovat peräkkäiset osajonon $\left(f^{l_n}(x)\right)_n$ pisteet. Lemman 1.42 nojalla jokainen funktion f positiivinen rata leikkaa jokaista väliä I_n, joten myös pisteen y positiivinen rata leikkaa jokaista väliä I_n. Nyt siis on olemassa $k_n \in \mathbb{N}$ siten, että $f^{k_n}(y) \in I_n$. Nyt koska $f^{k_n}(y) \in I_n = [f^{l_n}(x), f^{l_{n+1}}(x)]$, niin

$$|f^{k_n}(y) - z| < |f^{l_n}(x) - z|.$$

Kun $l_n \to \infty$, niin myös $n \to \infty$. Tällöin $f^{k_n}(y) \to z$, kun $n \to \infty$. Tämä johtuu siitä, että $f^{l_n}(x) \to z$, kun $l_n \to \infty$. Siis $\lim_{n\to\infty} f^{k_n}(y) = z$ ja $z \in \omega(y)$. Näin ollen $\omega(x) \subset \omega(y)$ kaikilla $x, y \in S^1$. Vastaavalla päättelyllä saadaan, että $\omega(x) \supset \omega(y)$ kaikilla $x, y \in S^1$, kun vain alussa oletetaan, että $z \in \omega(y)$. Näin on siis osoitettu, että $\omega(x) = \omega(y)$ eli $\omega(\cdot)$ on riippumaton pisteen valinnasta.

Näytetään seuraavaksi, että $E := \omega(x)$ on S^1 tai harva. Osoitetaan aluksi, että E on pienin suljettu epätyhjä f-invariantti joukko. Joukko E on suljettu, koska $E = \omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}$ on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu eli sisältää reunansa.
Olkoon $A \subset S^1$ epätyhjä suljettu f-invariantti joukko. Jos $x \in A$, niin invarianttiuden nojalla saadaan $\{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset A$. Nyt koska A on invariantti ja suljettu, niin $E = \omega(x) \subset \overline{\{f^k(x)\}_{\{k\in\mathbb{Z}\}}} \subset A$. Siis jokainen suljettu invariantti joukko A on joko tyhjä tai sisältää joukon E. Erityisesti huomataan, että $\varnothing$ ja E ovat ainoat joukon E suljetut invariantit osajoukot. Aiemmin osoitettiin, että joukko E on suljettu eli sisältää reunansa $\partial E \subset E$.
Joukon E reuna ∂E on invariantti, koska kaikille reunapisteille $x \in \partial E$ on aina olemassa ympäristö U siten, että $U \cap E \neq \varnothing$ ja $U \setminus E \neq \varnothing$. Tämä on ominaisuus joka

säilyy, kun reunapisteitä kuvataan homeomorfismilla f. Siis reuna on invariantti. Täten ∂E on joukon E suljettu invariantti osajoukko, joten $\partial E = \varnothing$ tai $\partial E = E$. Jos $\partial E = \varnothing$, niin $E = S^1$. Jos taas $\partial E = E$, niin $\operatorname{int}(\overline{E}) = \operatorname{int}(\partial E) = \varnothing$ eli E on harva.

Osoitetaan lopuksi, että E on perfekti. Olkoon $x \in E$. Koska $E = \omega(x)$, niin on olemassa jono k_n siten, että $\lim_{n\to\infty} f^{k_n}(x) = x$. Koska $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin proposition 1.25 nojalla kuvauksella f ei ole jaksollisia ratoja. Näin ollen

$$f^{k_n}(x) \neq x$$

kaikilla n. Tästä saadaan, että x on joukon E kasautumispiste, koska invarianttiuden nojalla $f^{k_n}(x) \in E$. Joukko E sisältää kasautumispisteensä ja on näin perfekti. $\square$

Irrationaalisen ja rationaalisen kiertoluvun omaavien kuvausten ratojen käyttäytymiset eroavat toisistaan. Rationaalisen kiertoluvun tapauksessa kaikki radat ovat joko jaksollisia tai asymptoottisia jaksollisen radan kanssa. Irrationaalisen kiertoluvun tapauksessa kaikki radat ovat joko tiheitä tai asymptoottisia Cantorin joukon kanssa.

Lause 1.44. *(Poincarén luokittelulause) Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi, jonka kiertoluku ρ on irrationaalinen. Tällöin on olemassa jatkuva ja monotoninen kuvaus $h\colon S^1 \to S^1$ siten, että $h \circ f = R_\rho \circ h$.*

(1) *Jos f on transitiivinen, niin h on homeomorfismi.*
(2) *Jos f ei ole transitiivinen, niin h ei ole kääntyvä.*

Ensimmäisessä kohdassa kuvauksen h homeomorfisuus tarkoittaa, että kuvaus f ja kierto R_ρ ovat topologisia konjugaatteja eli h on konjugoiva kuvaus. Toisessa tapauksessa sanotaan, että h on semikonjugoiva kuvaus eli R_ρ on funktion f topologinen tekijä.

Todistus. Konstruoidaan aluksi kuvauksen h nosto H pisteen $\pi(x) \in S^1$ radalle. Tämä nosto osoitetaan monotoniseksi. Sitten laajennetaan nosto H pisteen $\pi(x)$ radan alkukuvan sulkeumaan ja monotonisuutta käyttäen täytetään jäljelle jääneet osat. Lopuksi määritellään h peitekuvauksen π avulla.

Valitaan nosto $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktiolle f ja kiinnitetään $x \in \mathbb{R}$. Merkitään noston kiertolukua $\rho := \rho(F)$. Olkoon

$$B := \{F^n(x) + m \colon n, m \in \mathbb{Z}\}$$

pisteen $\pi(x)$ radan koko alkukuva. Määritellään $H\colon B \to \mathbb{R}$ siten, että $F^n(x) + m \mapsto n\rho + m$. Lemman 1.41 nojalla

$$H(F^{n_1}(x) + m_1) = n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 = H(F^{n_2}(x) + m_2),$$

jos ja vain jos

$$F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2.$$

Tämä tarkoittaa, että H on monotoninen. Osoitetaan, että $H(B)$ on tiheä joukossa $\mathbb{R}$. Nyt koska ρ on irrationaalinen, niin lauseen 1.9 nojalla R_ρ on minimaalinen. Tämä tarkoittaa, että jokaiselle pisteelle kierron R_ρ rata on tiheä. Nyt

$$R_\rho^n(m) = R_\rho^{n-1}(m + \rho) = \cdots = m + n\rho = H(F^n(x) + m)$$

eli $H(B) = \{R_\rho^n(m) : \text{kaikilla } m, n \in \mathbb{Z}\}$ on kokoelma pisteiden m ratoja kierrolla R_ρ ja näin ollen tiheä.

Jos kirjoitetaan kierto R_ρ kuvausmuodossa $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \rho$, niin $H \circ F = R_\rho \circ H$ joukossa B, koska

$$\begin{aligned} H \circ F(F^n(x) + m) &= H \circ F(F^n(x+m)) = H(F^{n+1}(x+m)) \\ &= H(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\rho + m \end{aligned}$$

ja

$$R_\rho \circ H(F^n(x) + m) = R_\rho(n\rho + m) = (n+1)\rho + m.$$

Todistetaan seuraavaksi aputulos jota tarvitaan todistuksen loppuosassa.

Lemma 1.45. *Kuvauksella H on jatko joukon B sulkeumassa $\overline{B}$.*

Todistus. Halutaan siis laajentaa H joukkoon

$$\overline{B} = B \cup \{x \in \mathbb{R} : x \text{ on joukon } B \text{ kasautumispiste}\}.$$

Olkoon $x \in \overline{B}$. Tällöin on olemassa jono $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ siten, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tällainen jono löytyy, sillä $B = \{F^n(x) + m \colon n, m \in \mathbb{Z}\}$ ja ottamalla sulkeuma saadaan rajapisteiden joukon sisältävä joukko. Halutaan osoittaa, että $H(x) := \lim_{n\to\infty} H(x_n)$ on olemassa ja on riippumaton jonon valinnasta. Tämä määrittelee jatkon $H \colon \overline{B} \to \mathbb{R}$. Osoitetaan, että $\lim_{n\to\infty} H(x_n)$ on olemassa ja $H(x)$ ei riipu käytetystä jonosta (x_n).

Osoitetaan ensin, että raja-arvo on olemassa. Monotonisilla funktioilla on ominaisuus, että niiden vasen ja oikea raja-arvo on olemassa jokaisessa pisteessä, jossa kuvaus on määritelty. Näin ollen, koska H on monotoninen, oikea ja vasen raja-arvo ovat olemassa ja riippumattomia jonosta (x_n). Jos vasen ja oikea raja-arvo eroaisivat toisistaan, niin $\mathbb{R} \setminus H(B)$ sisältäisi jonkin välin. Joukko $H(B)$ on tiheä joukossa $\mathbb{R}$ eli $\overline{H(B)} = \mathbb{R}$. Tämä tarkoittaa, että joukko $\mathbb{R}$ muodostuu joukon $H(B)$ sisä- ja kasautumispisteistä. Siis kaikkien komplementin $H^c(B)$ pisteiden on oltava joukon $H(B)$ kasautumispisteitä. Jos $H^c(B)$ sisältäisi jonkin välin, tällöin se sisältäisi joukon $H(B)$ ulkopisteitä. Tämä on kuitenkin mahdotonta edeltävän tarkastelun nojalla. Näin ollen vasen ja oikea raja-arvo ovat samat ja raja-arvo on olemassa. Tällöin H on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in \overline{B}$, koska jokaiselle x on olemassa jono (x_n) ja $H(x) := \lim_{n\to\infty} H(x_n)$.

Näytetään seuraavaksi, että $H(x) := \lim_{n\to\infty} H(x_n)$ on riippumaton jonon (x_n) valinnasta. Todistuksen alussa valittiin jono (x_n) siten, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Valitaan nyt toinen jono (y_n) joukosta B siten, että $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = x - x = 0.$$

Siis on olemassa $\delta, N > 0$ siten, että $|x_n - y_n| < \delta$, kun $n \geq N$. Olkoon $\epsilon > 0$. Nyt koska kuvaus H on jatkuva joukossa $\overline{B}$, niin

$$|H(x_n) - H(y_n)| < \epsilon, \qquad \text{kun } n \geq N.$$

Tällöin siis

$$\lim_{n\to\infty} (H(x_n) - H(y_n)) = 0$$

mistä saadaan, että

$$\lim_{n\to\infty} H(x_n) = \lim_{n\to\infty} H(y_n).$$

Siis $H(x)$ on riippumaton jonon valinnasta.

Osoitetaan lopuksi, että jatko H on yksikäsitteinen. Olkoot $G, F\colon \overline{B} \to \mathbb{R}$ jatkuvia laajennoksia kuvaukselle $H\colon B \to \mathbb{R}$. Jos $x \in \overline{B}$, niin on olemassa jono (x_n) joukosta B siten, että $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Tällöin

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} G(x_n) = \lim_{n\to\infty} H(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x).$$

Nyt koska tämä pätee kaikille $x \in \overline{B}$, niin $G = F$ ja jatko on yksikäsitteinen. $\square$

Jatketaan päätuloksen todistusta. Nyt tavoitteena on laajentaa H koko avaruuteen $\mathbb{R}$. Osoitetaan, että $H\colon \overline{B} \to \mathbb{R}$ on monotoninen ja surjektiivinen.
Osoitetaan ensin surjektiivisuus. Tehdään antiteesi eli oletetaan, että on olemassa $y \in \mathbb{R}$ siten, että $y \notin H(\overline{B})$. Siis oletetaan, että $H(x) \neq y$ kaikilla $x \in \overline{B}$. Koska $H(B)$ on tiheä joukossa $\mathbb{R}$, niin $\overline{H(B)} = \mathbb{R}$. Nyt $y \in \overline{H(B)} \setminus H(\overline{B})$ ja näin y on joukon $H(B)$ kasautumispiste. Koska y on kasautumispiste, niin on olemassa jono $(y_n) \in H(B)$ siten, että $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Toisaalta on olemassa myös jono $(x_n) \in B$ siten, että $y_n = H(x_n)$, joten $\lim_{n\to\infty} H(x_n) = y$. Jono (y_n) voidaan valita monotoniseksi, koska H on monotoninen joukossa B. Oletetaan nyt, että (y_n) on kasvava jono. (Vähenevä tapaus vastaavasti.) Tällöin jono $(x_n) \in B$ on myös kasvava monotonisuuden nojalla. Osoitetaan seuraavaksi, että jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu. Olkoon $N \in \mathbb{Z}$ sellainen indeksi, että

$$|y - y_N| < \frac{1}{2}.$$

Tällöin pisteelle $y_N + 1 \in H(B)$ pätee $y_N + 1 > y$. Koska H on monotoninen joukossa B, niin $x_n < H^{-1}(y_N + 1)$ kaikilla n. Tällöin (x_n) on ylhäältä rajoitettu kasvava jono, joten se suppenee. Näin on olemassa $x \in \overline{B}$ siten, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tällöin siis $\lim_{n\to\infty} H(x_n) = H(x)$ ja siten $y = H(x)$, mikä on ristiriidassa antiteesin kanssa. On siis osoitettu, että $H\colon \overline{B} \to \mathbb{R}$ on surjektiivinen.

Osoitetaan seuraavaksi monotonisuus. Olkoot $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{B}$, tällöin on olemassa joukon B jonot (x_n) ja (y_n) siten, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$. Oletetaan, että $\overline{x} < \overline{y}$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n$ ja koska $H(B)$ on monotoninen, niin

$$\lim_{n\to\infty} H(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} H(y_n).$$

Tästä seuraa, että $H(\overline{B})$ monotoninen, sillä $H(\overline{x}) := \lim_{n\to\infty} H(x_n)$ ja $H(\overline{y}) := \lim_{n\to\infty} H(y_n)$.

Nyt siis H on monotoninen ja surjektiivinen. Kun laajennetaan joukko $\overline{B}$ koko avaruuteen $\mathbb{R}$, niin määritellään H joukkoon $\mathbb{R} \setminus \overline{B}$ seuraavalla tavalla: Joukko $\mathbb{R} \setminus \overline{B}$ on kokoelma välejä. Näille komplementtiväleille määritellään vakio-arvo, joka valitaan samaksi kuin välin oikeassa päätepisteessä. Kuvaus $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva komplementtivälien oikeissa päätepisteissä seuraavin perusteluin: $H(\overline{B}) = \mathbb{R}$ ja $\overline{B}$ on suljettu, niin H saa saman arvon komplementtivälien molemmissa päätepisteissä. Tämä antaa kuvauksen $H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $H \circ F = R_\rho \circ H$. Nyt koska

$$\pi \circ H(F(x)) = h \circ \pi(F(x)) = h \circ f(\pi(x))$$

ja

$$\pi \circ R_\rho(H(x)) = \pi(H(x) + \rho) = h(\pi(x)) + \rho = \overline{R}_\rho(h(\pi(x))),$$

niin $h \circ f = \overline{R}_\rho \circ h$. Edellä $\overline{R}_\rho \colon S^1 \to S^1$ siten, että $\pi(x) \mapsto \pi(x) + \rho$. Lisäksi pisteelle $z \in B$ pätee

$$H(z+1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(z) + 1$$

ja tämä ominaisuus säilyy jatkuvassa laajennoksessa. Siis H täyttää nyt noston ominaisuudet. Haluttu kuvaus $h \colon S^1 \to S^1$ on edellä saatu peitekuvauksen π avulla siten, että $h \circ f = \overline{R}_\rho \circ h$.

Tarkastetaan lopuksi kääntyvyys. Kun kuvaus f on transitiivinen, niin joukko

$$B = \{F^n(x) + m \colon n, m \in \mathbb{Z}\}$$

on tiheä joukossa $\mathbb{R}$ eli $\overline{B} = \mathbb{R}$. Kuvaus $H \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määriteltiin siten, että se on vakio millä tahansa joukon $\mathbb{R} \setminus \overline{B}$ välillä. Tällöin H on injektio, jos $\{F^n(x) + m \colon n, m \in \mathbb{Z}\}$ on tiheässä. Tästä edelleen saadaan, että $h \colon S^1 \to S^1$ on injektio, jos f on transitiivinen. Siis h on bijektiivinen, kun f on transitiivinen. Kun f ei ole transitiivinen, niin kuvaus H saa vakioarvon kaikilla komplementin $\mathbb{R} \setminus \overline{B}$ väleillä. Näin saadaan, että h ei ole kääntyvä, kun f ei ole transitiivinen. $\square$

LUKU 2

Ympyrädiffeomorfismit

Tässä luvussa tarkastellaan ympyrädiffeomorfismeja, joiden kiertoluku on irrationaalinen. Lähteinä luvussa 2.1 on käytetty teoksia [**1**] ja [**5**]. Luvussa 2.2 päälähteenä on käytetty teosta [**3**]. Tulosten todistukset on kirjoitettu lähteistä löytyvien runkojen ympärille perusteluja ja laskuja lisäämällä. Olen lisännyt tähän lukuun kuvia havainnollistamaan tutkittavia tilanteita.

2.1. Denjoyn lause

Funktion $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ *kokonaisheilahtelu* on

$$\mathrm{Var}(f) := \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k+1})|,$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$. Edellä supremum käy läpi osituksen $0 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq 1$ kaikki arvot. Kuvausta g kutsutaan *rajoitetusti heilahtelevaksi*, jos sen kokonaisheilahtelu $\mathrm{Var}(g)$ on äärellinen.

Kaikkien Lipschitz-funktioiden heilahtelu on rajoitettua ja erityisesti kaikkien C^1-funktioiden heilahtelu on rajoitettua.

Käydään seuraavaksi läpi aputuloksia, jotka johdattavat Denjoyn lauseen 2.4 todistamiseen. Denjoyn lauseen mukaan irrationaalisen kiertoluvun omaava suunnansäilyttävä C^1-diffeomorfismi on transitiivinen, kunhan vain sen derivaatta on rajoitetusti heilahteleva.

LEMMA 2.1. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ homeomorfismi, jonka kiertoluku on irrationaalinen. Nyt pisteelle $x_0 \in S^1$ on äärettömän monta $n \in \mathbb{N}$ siten, että välit $f^k((x_0, f^{-n}(x_0)))$ ovat erillisiä, kun $0 \leq k < n$.*

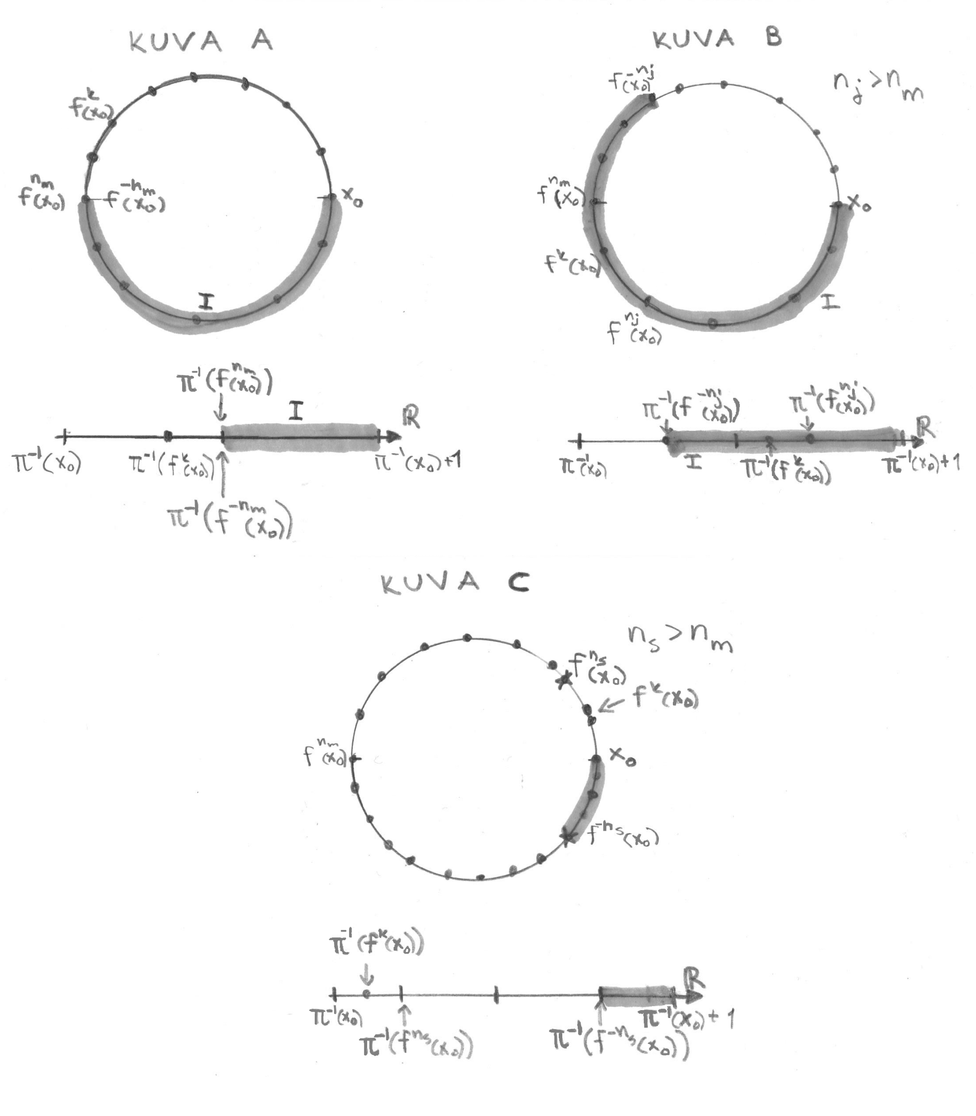
TODISTUS. Kiinnitetään $x_0 \in S^1$. Väitetään, että on olemassa äärettömän monta $n \in \mathbb{N}$ siten, että välit $(x_0, f^{-n}(x_0)), (f(x_0), f^{1-n}(x_0)), \ldots, (f^{n-1}(x_0), f^{-1}(x_0))$ ovat erillisiä. Riittää osoittaa, että on olemassa äärettömän monta n siten, että $f^k(x_0)$ ei ole välillä $(x_0, f^{-n}(x_0))$, kun $0 \leq k < n$. Väite siis koskee pisteen x_0 radan järjestystä. Kirjoitetaan $x_k = f^k(x_0)$ ja $I = (x_0, x_{-n})$. Poincarén luokittelulauseen nojalla f ja irrationaalinen kierto ovat joko konjugaatteja tai semikonjugaatteja, riippuen siitä onko f transitiivinen vai ei. Nyt voidaan olettaa, että f on irrationaalinen kierto, sillä lemman 1.41 mukaan

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \qquad \text{jos ja vain jos} \qquad F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2.$$

Nyt koska $f^n(x_0) = f^n(\pi(x)) = \pi(F^n(x))$ ja $\rho(f) = \pi(\rho(F))$, niin pisteen x_0 rata on järjestetty kuten kierron $R_{\rho(f)}$ rata. Ja koska oletettiin, että ρ on irrationaalinen, niin lauseen 1.9 nojalla R_ρ on minimaalinen eli kaikki radat ovat tiheässä.

Halutaan siis osoittaa, että x_k ei kuulu välille I, kun $0 \leq k < n$ äärettömän monella $n \in \mathbb{N}$. Tässä siis $f^k(x_0)$ on kiertänyt positiiviseen kiertosuuntaan k kertaa kiertoluvun verran ja I on pisteestä x_0 negatiiviseen kiertosuuntaan n kertaa kiertoluvun verran kiertynyt väli.

Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että on olemassa vain äärellisen monta $n \in \mathbb{N}$, joille $f^k(x_0) \notin (x_0, f^{-n}(x_0)) = I$, kun $0 \leq k < n$. Tällöin on olemassa $n_m \in \mathbb{N}$, joka on suurin indeksi, jolla $f^k(x_0) \notin I$, kun $0 \leq k < n$. Siis kaikille $n > n_m$ pätee vastaoletuksen nojalla, että $f^k(x_0) \in I$, jollain $k \in [0, n-1]$. Katso kuvasta 2.1 kohdat A ja B. Nyt kuitenkin $f^n(x_0)$ on kierto, jonka rata on tiheässä. Tämän vuoksi tarpeeksi monesti iteroitaessa piste x_0 kiertyy uudelle kierrokselle ja näin kuvapiste $f^k(x_0)$ osuu välille $(x_0, f^{n_m}(x_0))$. Siispä on olemassa $n_s > n_m$, jolle $f^k(x_0) \notin (x_0, f^{-n_s}(x_0))$. Katso kuvan 2.1 kohta C. Vastaavalla tavalla löytyy äärettömän monta $n \in \mathbb{N}$, joille väite pätee. Huomataan kuitenkin, että väite ei päde kaikille $n \in \mathbb{N}$. $\square$



KUVA 2.1. Havainnollistava kuva lemman 2.1 tilanteesta.

LEMMA 2.2. *Olkoon $X = S^1$ tai $X = [0,1]$ ja $Y \subset X$. Oletetaan, että kuvauksen $f\colon X \to X$ rajoittuma $f|_Y$ on C^1 -kuvaus ja derivaatta f' on rajoitetusti heilahteleva. Oletetaan lisäksi, että on olemassa $c > 0$ siten, että $|f'(y)| \geq c$ kaikilla $y \in Y$. Olkoon $V < \infty$ kuvauksen $\varphi\colon x \mapsto \log|f'(x)|$ heilahtelu. Jos $I \subset Y$ on sellainen väli, että $I, f(I), \dots, f^n(I)$ ovat pareittain pistevieraita eli erillisiä välejä joukossa Y ja $x, y \in I$, niin*

$$\exp(-V) \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp(V).$$

TODISTUS. Koska välit $I, f(I), \dots, f^n(I)$ ovat pareittain pistevieraita, niin kokonaisheilahtelun määritelmästä saadaan, että

$$\begin{aligned}
V &\geq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y))| \geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \log|f'(f^k(x))| - \sum_{k=0}^{n-1} \log|f'(f^k(y))| \right| \\
&\overset{(i)}{=} \left| \log(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))|) - \log(\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(y))|) \right| \\
&\overset{(ii)}{=} \left| \log\left(\frac{\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))|}{\prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(y))|} \right) \right| \\
&\overset{(iii)}{=} \left| \log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \right|.
\end{aligned}$$

Edeltävässä yhtälössä kohta (i) tulee logaritmin laskusäännöstä $\log(x) + \log(y) = \log(xy)$ ja kohta (ii) tulee laskusäännöstä $\log(x) - \log(y) = \log \frac{x}{y}$. Kohta (iii) saadaan ketjusäännöllä seuraavasti:

$$\begin{aligned}
|(f^n)'(x)| &= |(f \circ f^{n-1})'(x)| = |f'(f^{n-1}(x))(f^{n-1}(x))'| = |f'(f^{n-1}(x))(f \circ f^{n-2}(x))'| \\
&= |f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x))(f^{n-2}(x))'| = \dots \\
&= |f'(f^{n-1}(x))f'(f^{n-2}(x))f'(f^{n-3}(x)) \cdots f'(f(x))f'(x)| \\
&= |f'(f^{n-1}(x))||f'(f^{n-2}(x))||f'(f^{n-3}(x))| \cdots |f'(f(x))||f'(x)| \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))|.
\end{aligned}$$

Nyt siis

$$-V \leq \log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq V$$

eli

$$\exp(-V) \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp(V).$$

Väite on siis saatu osoitettua. □

LEMMA 2.3. *Olkoon I väli joukon $E = \omega(x)$ komplementissa ja $x_0 \in I$. Lisäksi olkoon n kuten Lemmassa 2.1. Jos funktio f ja kierto eivät ole konjugaatteja, niin* $\exp(-V) \leq (f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x) \leq \exp(V)$ *kaikilla $x \in I$.*

TODISTUS. Poincarén luokittelulauseen nojalla funktio f ja kierto ovat konjugaatteja tai kierto on funktion f topologinen tekijä. Nyt oletettiin, että f ja kierto eivät ole konjugaatteja, joten on olemassa semikonjugoiva kuvaus h kierron ja funktion f välillä. Erityisesti $f(x) = f(x_0)$ kaikilla $x \in I$, joten lemmassa 2.1 valittava n ei riipu pisteestä x.

Valitaan $n \in \mathbb{N}$ kuten lemmassa 2.1. Tällöin lemmasta 2.2 saadaan, että

$$V \geq \left| \log \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| \overset{(i)}{=} \left| \log((f^n)'(x)(f^{-n})'(x)) \right|,$$

kun valitaan $y = f^{-n}(x)$. Tällöin kohta (i) seuraa käänteisfunktion derivaatasta (lause A.11), sillä $f^n(y) = x$, jolloin $\frac{d}{dx} f^{-n}(x) = \frac{1}{(f^n)'(y)}$. Siis on saatu osoitettua väite

$$\exp(-V) \leq (f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x) \leq \exp(V)$$

kaikilla $x \in I$. □

LAUSE 2.4. *(Denjoyn lause) Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä C^1-diffeomorfismi siten, että f' on rajoitetusti heilahteleva. Oletetaan lisäksi, että kiertoluku $\rho = \rho(f)$ on irrationaalinen. Tällöin f on transitiivinen ja erityisesti se ja kierto $R_\rho(f)$ ovat konjugaatteja.*

TODISTUS. Poincarén luokittelulauseen nojalla tiedetään, että jos f on transitiivinen, niin se ja kierto R_ρ ovat konjugaatteja. Oletetaan nyt, että f ei ole transitiivinen. Proposition 1.43 nojalla voidaan olettaa, että $\omega(0)$ on perfekti ja harva joukko. Siten $S^1 \setminus \omega(0)$ on yhdiste erillisistä avoimista väleistä. Olkoon $I = (a, b)$ yksi tällaisista väleistä. Tällöin välit $\{f^n(I)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ovat pareittain erillisiä, koska muuten

$$f^n(I) \cap f^k(I) \neq \emptyset,$$

joillakin $k, n \in \mathbb{Z}$. Tällöin olisi olemassa piste $x \in I$ siten, että $f^n(x) = f^k(x)$, jolloin piste x olisi jaksollinen piste. Tällöin kiertoluvun ρ tulisi olla rationaalinen, mutta oletuksen nojalla kiertoluku on irrationaalinen. Siis välit $\{f^n(I)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ovat pareittain erillisiä.

Välin $f^n(I)$ pituuden $l(f^n(I)) = \int_a^b (f^n)'(t)\,dt$ avulla saadaan $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l(f^n(I)) \leq 1$, koska ympyrän S^1 kehän pituus on yksi ja $I \subset S^1 \setminus \omega(0)$. Nyt Lemman 2.3 sekä arvion

$$a + b \geq \max(a, b) \geq \sqrt{a \cdot b}, \tag{2.1}$$

missä $a, b \geq 0$, avulla saadaan äärettömän monelle $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
l(f^n(I)) + l(f^{-n}(I)) &= \int_I (f^n)'(x)\,dx + \int_I \left(f^{-n}\right)'(x)\,dx \\
&= \int_I \left[(f^n)'(x) + \left(f^{-n}\right)'(x)\right]\,dx \\
&\overset{(2.1)}{\geq} \int_I \sqrt{(f^n)'(x)\,(f^{-n})'(x)}\,dx \\
&\overset{\text{lemma 2.3}}{\geq} \int_I \sqrt{\exp(-V)}\,dx \\
&= \int_I \exp(-\frac{V}{2})\,dx \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}V\right) l(I) \\
&= M > 0.
\end{aligned}
$$

Perustellaan seuraavaksi miksi alaraja $M > 0$ on olemassa. Lemman 2.2 merkinnöin kuvaus $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto \log|f'(x)|$ on jatkuvasti derivoituva joukossa $Y \subset [0,1]$. Tällöin väliarvolauseen nojalla on olemassa ainakin yksi $\xi \in Y$ siten, että

$$
\begin{aligned}
|\log(|f'(x)|) - \log(|f'(y)|)| &= |\log'(f'(\xi))|\,||f'(x)| - |f'(y)|| \\
&= \frac{1}{|f'(\xi)|}\,||f'(x)| - |f'(y)|| \\
&\overset{(i)}{\leq} c\,||f'(x)| - |f'(y)||\,.
\end{aligned}
$$

Edellä kohta (i) pätee seuraavin perusteluin: Kuvaus f on diffeomorfismi, jolloin $f'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in S^1$ ja f' on jatkuva, joten $|f'(y)| \geq c$ kaikilla $y \in Y$. Siis φ on Lipschitz- jatkuva kuvauksen $|f'|$ arvojoukossa Y. Tällöin

$$
\begin{aligned}
V(\varphi) &= \sup \sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| \\
&= \sup \sum_{k=1}^{n} |\log|f'(x_k)| - \log|f'(x_{k+1})|| \\
&\overset{(ii)}{\leq} \sup \sum_{k=1}^{n} c\,||f'(x_k)| - |f'(x_{k+1})|| \\
&= c \cdot \sup \sum_{k=1}^{n} ||f'(x_k)| - |f'(x_{k+1})|| \\
&\overset{\triangle-ey}{\leq} c \cdot \sup \sum_{k=1}^{n} |f'(x_k) - f'(x_{k+1})| \\
&= c \cdot V(f') \\
&\overset{(iii)}{<} \infty,
\end{aligned}
$$

missä kohta (ii) seuraa edellä osoitetusta Lipschitz-jatkuvuudesta ja (iii) seuraa oletuksesta f' on rajoitetusti heilahteleva.
Nyt siis tiedetään, että kokonaisvaihtelu $V(\varphi)$ on äärellistä. Tällöin $\exp\left(-\frac{1}{2}V\right) > 0$, jolloin on olemassa jokin alaraja $M > 0$ siten, että

$$l(f^n(I)) + l(f^{-n}(I)) \geq M.$$

Tällöin $\sum_{n\in\mathbb{Z}} l(f^n(I)) = \infty$, joten välit $\{f^i(I)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ eivät voi olla erillisiä ja päädytään ristiriitaan. Funktion f on siis oltava transitiivinen ja siten se ja kierto R_ρ ovat konjugaatteja. □

2.2. Denjoyn esimerkki

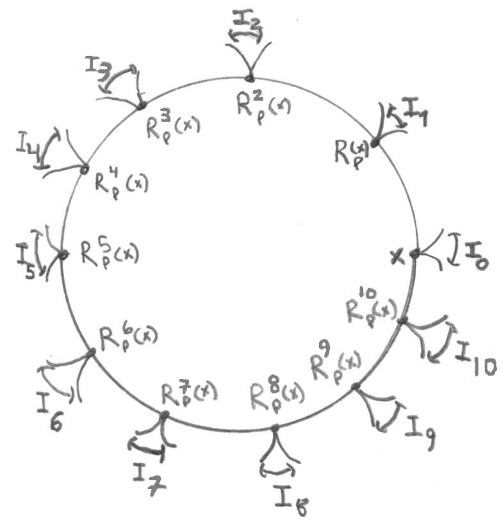
Tutkitaan yksityiskohtaisemmin kuvauksia joiden kiertoluvut ovat irrationaalisia. Edeltävien tulosten nojalla tiedetään, että näillä kuvauksilla ei ole jaksollisia pisteitä. Yksi tällainen kuvaus on kiertokuvaus $R_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega$, missä ω on irrationaalinen. Esimerkki Denjoyn kuvauksesta näyttää, kuinka muodostetaan ilman jaksollisia pisteitä ympyrädiffeomorfismi, joka ei ole transitiivinen.

Määritelmä 2.5. Kuvausta $f\colon X \to Y$ kutsutaan *Hölder -jatkuvaksi* eksponentilla α, tai *α-Hölderiksi*, jos on olemassa vakiot $C, \alpha > 0$ siten, että

$$d(f(x), f(y)) \leq C(d(x,y))^\alpha, \qquad \text{kun } x, y \in X.$$

Propositio 2.6. *(Denjoyn esimerkki) Jokaiselle irrationaaliluvulle ρ ja jokaiselle $\alpha \in (0,1)$ on olemassa C^1-diffeomorfismi $f\colon S^1 \to S^1$, joka ei ole transitiivinen ja jonka derivaatta on α-Hölder sekä kiertoluku on $\rho(f) = \rho$.*

Todistus. Tavoitteena on laajentaa S^1 siten, että syntyy jatkuva diffeomorfismi. Tämä tapahtuu seuraavasti. Kiinnitetään piste $x \in S^1$ ja muodostetaan tälle rata. Katkaistaan ympyrä jokaisen radan pisteen kohdalta ja lisätään jokaiseen tälläiseen kohtaan pieni väli I_n (katso kuva 2.2). Valitaan nämä välit siten, että niiden pituus



Kuva 2.2. Denjoyn esimerkki, välien lisääminen pisteen x radan alkioihin.

$l(I_n) = l_n$ on tarpeeksi pieni eli $\sum_{n=-\infty}^{\infty} l(I_n) < \infty$. Tämä operaatio tuottaa eräänlaisen ”ympyrän”. Syntynyt ympyrä on alkuperäistä ympyrää suurempi. Sitten voidaan muodostaa kuvaus, joka laajentaa ympyrän S^1 välien I_n yhdisteen sisältäväksi ympyräksi, valitsemalla mikä tahansa suunnansäilyttävä diffeomorfismi h_n, joka kuvaa välin I_n väliksi I_{n+1}. Tämä laajentaa alkuperäisen kuvauksen uuden ympyrän homeomorfismiksi. Tehdään tämä nyt tarkasti.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$, $\alpha = k/(k+1)$, $l_n = (|n|+(2k)^k+1)^{-(1+1/k)}$ ja $c_n = 2((l_{n+1}/l_n)-1) \geq -1$ ja huomataan aluksi, että

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n < 2\sum_{n=0}^{\infty} l_n = 2\sum_{n=(2k)^k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/k}} < 2\int_{(2k)^k}^{\infty} \frac{1}{x^{1+1/k}}\,dx \\ = 2\int_{(2k)^k}^{\infty} x^{-1-1/k}\,dx = 2\Big|_{(2k)^k}^{\infty} \frac{x^{-1/k}}{-1/k} = 2\left(0 - \frac{(2k)^{-1}}{-1/k}\right) = \frac{2k}{2k} = 1.\end{aligned}$$

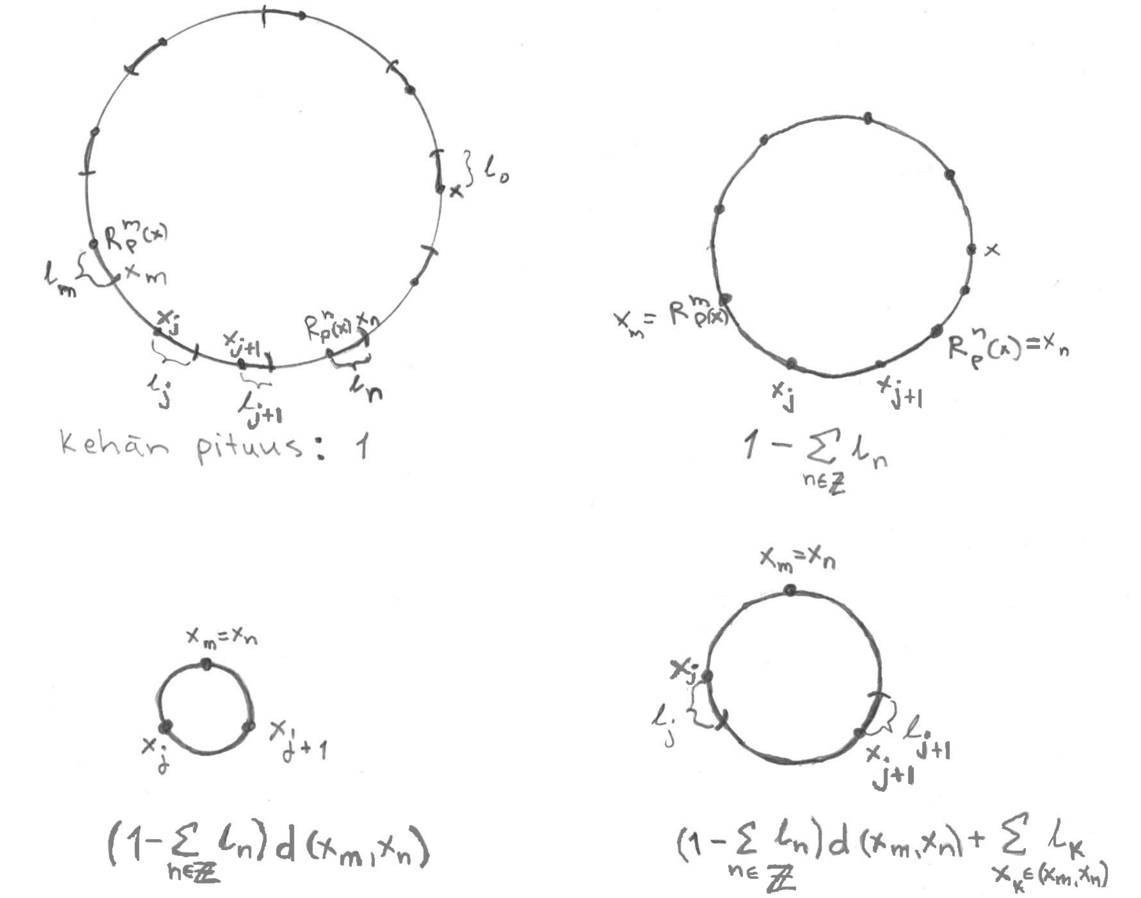
Laajennetaan irrationaalisen kierron R_ρ radan pisteet $x_n = (R_\rho)^n(x)$ nyt väleiksi I_n, joiden pituus on l_n. Välit I_n liitetään ympyräkehään S^1 samassa järjestyksessä, kuin pisteen x radan pisteet x_n. Lisäksi minkä tahansa kahden välin I_m ja I_n etäisyys tulee olla täsmälleen

$$\left(1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n\right) d(x_m, x_n) + \sum_{x_k\in(x_m,x_n)} l_k.$$

Tämä on siis välien I_k pituuksien summan (missä $x_k \in (x_m, x_n)$) ja pisteiden x_m ja x_n välisen ympyräkaaren pituus. Tämä on oikein mitoitettu vastaamaan sitä, että joukon $S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ kokonaispituus on $1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} l_n$. (Katso kuva 2.3.) Seuraavaksi halutaan määritellä ympyrähomeomorfismi f siten, että $f(I_n) = I_{n+1}$ ja rajoittuma $f|_{S^1\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n}$ siten, että se on semikonjugaatti kierron kanssa. Nyt riittää määritellä derivaatta $f'(x)$, koska f saadaan siitä integroimalla.

Määritellään välille $[a, a + l]$ telttakuvaus

$$h(a, l, x) := 1 - \frac{1}{l}|2(x - a) - l|.$$



KUVA 2.3. Denjoyn esimerkki, kahden lisätyn välin etäisyyden määrittäminen.

Huomataan, että $h(a, l, a + l/2) = 1$ ja $\int_a^{a+l} h(a, l, x)\, dx = l/2$. Näin todella on, sillä

$$
\begin{aligned}
\int_a^{a+l} h(a, l, x)\, dx &= \int_a^{a+l} 1 - \frac{1}{l}|2(x-a) - l|\, dx \\
&\overset{(i)}{=} \int_a^{a+l/2} 1 - \frac{-1}{l}(2(x-a) - l)\, dx + \int_{a+l/2}^{a+l} 1 - \frac{1}{l}(2(x-a) - l)\, dx \\
&= \int_a^{a+l/2} \frac{1}{l}(2x - 2a)\, dx + \int_{a+l/2}^{a+l} 2 - \frac{1}{l}(2x - 2a)\, dx \\
&= \Big|_a^{a+l/2} \left(\frac{x^2}{l} - \frac{2ax}{l}\right) + \Big|_{a+l/2}^{a+l} \left(2x - \frac{x^2}{l} + \frac{2ax}{l}\right) \\
&= \frac{(a+l/2)^2}{l} - \frac{2a^2}{l} - a - \left(\frac{a^2}{l} - \frac{2a^2}{l}\right) + 2a + 2l - \frac{(a+l)^2}{l} + \frac{2a^2}{l} + 2a \\
&- \left(2a + l - \frac{(a+l/2)^2}{l} + \frac{2a^2}{l} + a\right) \\
&= \frac{2}{l}(a + l/2)^2 - \frac{a^2}{l} + l - \frac{(a+l)^2}{l} \\
&= \frac{2}{l}(a^2 + al + \frac{1}{4}l^2) - \frac{a^2}{l} + l - \frac{a^2 + 2al + l^2}{l} \\
&= \frac{l}{2},
\end{aligned}
$$

missä kohdassa (i) $2(x-a)-l<0 \iff x<a+l/2$.
Merkitään välin I_n vasenta päätepistettä symbolilla a_n ja olkoon

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad x \in S^1 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n \\ 1 + c_n h(a_n, l_n, x), & \text{kun} \quad x \in I_n. \end{cases}$$

Oletetaan lisäksi, että välin I_n keskipiste $a_n + \frac{l_n}{2}$ kuvautuu välin I_{n+1} keskipisteeksi $a_{n+1} + \frac{l_{n+1}}{2}$. Nyt koska $c_n = 2((l_{n+1}/l_n) - 1) = 2(l_{n+1} - l_n)/l_n$, saadaan

$$\begin{aligned} \int_{I_n} f'(x)\,dx &= \int_{I_n} 1 + c_n h(a_n, l_n, x)\,dx = \int_{I_n} 1\,dx + \int_{I_n} c_n h(a_n, l_n, x))\,dx \\ &= l_n + \frac{l_n}{2} c_n = l_n + \frac{l_n}{2} \cdot \frac{2(l_{n+1} - l_n)}{l_n} = l_{n+1}. \end{aligned}$$

Yleisesti tiedetään, että polun f pituus välillä I_n on $l(f) := \int_{I_n} |f'(x)|\,dx$. Oletusten $0 \le h(a_n, l_n, x) \le 1$ ja $c_n \ge -1$ nojalla $f'(x) \ge 0$. Nyt siis $l(f(I_n)) = l_{n+1}$ ja väli siirretään oikeaan kohtaan oletuksen $f(a_n + \frac{l_n}{2}) = a_{n+1} + \frac{l_{n+1}}{2}$ avulla, joten $f(I_n) = I_{n+1}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että derivaatta f' on Hölder -jatkuva eksponentilla α. Todistetaan tämä etsimällä ensin M_α siten, että $|c_n| \le M_\alpha \cdot (l_n/2)^\alpha$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Sitten osoitetaan, että $|f'(x) - f'(y)| \le Md(x,y)^\alpha$ joukossa $I_n (n \in \mathbb{Z})$ ja siten myös joukossa S^1. Tämän väitteen todistamiseksi, tutkitaan ensin tapaus $n \ge 0$. Merkitään $m = 1 + n + (2k)^k$. Kun $(1+x)^{-\beta} = 1 - \beta \cdot x + O(x^2)$ (Taylorin kehitelmästä), niin saadaan

$$\left| \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-\beta} - 1 \right| < 2\beta \cdot \frac{1}{m} \tag{2.2}$$

kaikille paitsi äärellisen monelle $m \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |c_n|\, l_n^{-\alpha} &= l_n^{-k/(k+1)} \left| \frac{l_{n+1}}{l_n} - 1 \right| \\ &= \left(m^{\frac{-(k+1)}{k}} \right)^{\frac{-k}{k+1}} \left| \left(\frac{m+1}{m} \right)^{-(k+1)/k} - 1 \right| \\ &= m \cdot \left| \left(\frac{m+1}{m} \right)^{-(k+1)/k} - 1 \right| \\ &= m \left| \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{-(k+1)/k} - 1 \right| \\ &\overset{(2.2)}{<} 2\frac{k+1}{k} \\ &= \frac{2}{\alpha}, \end{aligned}$$

joten $|c_n|(l_n/2)^{-\alpha} < 2^{\alpha+2}/\alpha$ kaikille paitsi äärellisen monelle $n \in \mathbb{N}$. Tapaus $n < 0$ tehdään vastaavasti ja saadaan johtopäätös

$$|c_n| \le M_\alpha \left(\frac{l_n}{2}\right)^\alpha . \tag{2.3}$$

Tarkistetaan vielä lopuksi, että f' on α-Hölder jatkuva.

$$\begin{aligned}
|f'(x) - f'(y)| &= |1 + c_n h(a_n, l_n, x) - (1 + c_n h(a_n, l_n, y))| \\
&= \left| c_n \left(1 - \frac{1}{l_n}|2(x - a_n) - l_n| - 1 + \frac{1}{l_n}|2(y - a_n) - l_n| \right) \right| \\
&= |c_n| \left| \frac{1}{l_n} \right| \big| |2y - 2a_n - l_n| - |2x - 2a_n - l_n| \big| \\
&\overset{\triangle-ey}{\le} |c_n| \left| \frac{1}{l_n} \right| |2y - 2a_n - l_n - (2x - 2a_n - l_n)| \\
&= |c_n| \left| \frac{1}{l_n} \right| |2(y - x)| \\
&= |c_n| \left| \frac{2}{l_n} \right| |y - x| \\
&\overset{(2.3)}{\le} \frac{M_\alpha}{2^{\alpha-1}} \frac{l_n^\alpha}{l_n} |y - x| \\
&= \frac{M_\alpha}{2^{\alpha-1}} \frac{1}{l_n^{1-\alpha}} |y - x|^\alpha |y - x|^{1-\alpha} \\
&= \frac{M_\alpha}{2^{\alpha-1}} |y - x|^\alpha \underbrace{\frac{|y - x|^{1-\alpha}}{l_n^{1-\alpha}}}_{\le 1} \\
&\le \frac{M_\alpha}{2^{\alpha-1}} |y - x|^\alpha = M|y - x|^\alpha .
\end{aligned}$$

Näin ollen f' todella on Hölder-jatkuva. Huomataan vielä lopuksi, että kuvauksen f kiertoluku on irrationaalinen, koska kuvauksen konstruoinnin nojalla ei ole olemassa jaksollisia ratoja. Lisäksi lauseen 1.41 nojalla saadaan, että $\rho(f) = \rho$. Lopuksi vielä todetaan, että kuvaus f ei ole transitiivinen, koska $\omega(x)$ ei sisällä lisättyjen välien sisäpisteitä ja koska $\omega(x)$ on riippumatona käytetyistä pisteistä. Tällöin siis tiheää rataa ei ole. $\square$

LUKU 3

Ympyrädiffeomorfismiperheet

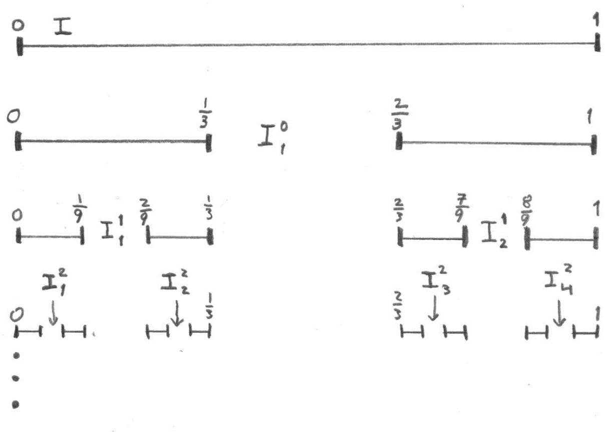
Tässä luvussa on käytetty pääasiassa lähteenä teosta [**3**]. Kappaleen 3.2 lopussa olevan esimerkin 3.15 lähteenä on ollut teos [**2**]. Esimerkkiin 3.15 olen lisännyt kuvia, joita lähdeteos ei esittele. Lisäksi olen pyrkinyt selventämään ja laajentamaan esimerkin perusteluja.

3.1. Cantorin funktio

Poincarén luokittelulauseessa (lause 1.44) esiintyy kuvaukset f ja h. Kun kuvaus f ei ole transitiivinen, niin kuvaus h on esimerkki pirunporrasfunktiosta (devil's staircase). Tarkastellaan tätä mielenkiintoista ilmiötä seuraavaksi.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Monotoninen jatkuva kuvaus $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ (tai $\phi\colon [0,1] \to S^1$) on pirunporrasfunktio, jos on olemassa perhe $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ välin $[0,1]$ erillisiä suljettuja osavälejä, joiden pituudet ovat positiivisia ja välien yhdiste on tiheä siten, että ϕ saa vakioarvon jokaisella osavälillä.

ESIMERKKI 3.2. (Cantorin 1/3 -joukko) Olkoon $I = [0,1]$. Jaetaan väli I kolmeen osaan ja poistetaan keskimmäinen väli, jota merkitään $I_1^0 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Joukon I_1^0 komplementti koostuu väleistä $[0, \frac{1}{3}]$ ja $[\frac{2}{3}, 1]$. Jaetaan nämä välit kolmeen yhtäsuureen osaan ja poistetaan taas keskimmäiset välit I_1^1 ja I_2^1. Näin jatkamalla jaetaan taas jäljellä olevat komponenttivälit kolmeen yhtäsuureen osaan ja poistetaan keskimmäiset. Tätä jatkamalla saadaan jono avoimia välejä $(I_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$, missä $n = 1, \ldots, 2^k$. Joukkoa $C_{1/3} := I \setminus \bigcup_{n,k} I_n^k$ kutsutaan Cantorin 1/3-joukoksi. Katso kuva 3.1.



KUVA 3.1. Cantorin 1/3 -joukko on täysin epäyhtenäinen, kompakti ja epätyhjä sekä perfekti joukko.

MÄÄRITELMÄ 3.3. *Cantorin joukko* on metrinen avaruus, joka on homeomorfinen Cantorin 1/3-joukon kanssa.

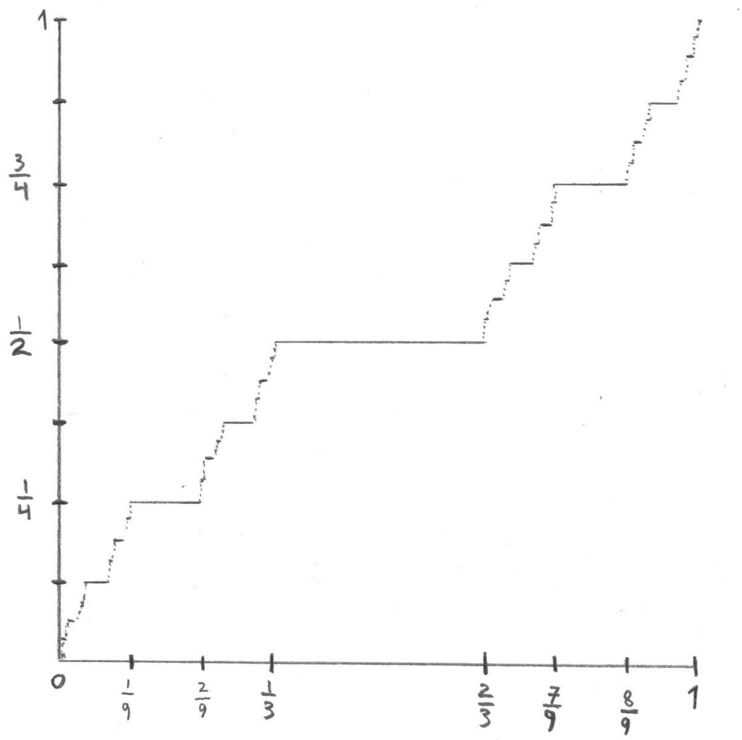
ESIMERKKI 3.4. Pirunporrasfunktio, joka tunnetaan Cantorin 1/3 -funktiona, voidaan konstruoida tarkasti. Cantorin joukon $C_{1/3}$ pisteet ovat muotoa

$$x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 3^{-i},$$

missä $\alpha_i \in \{0, 2\}$. Arvot α_i kertovat kummalle puolelle poistettua väliä piste jää. Vasenta puolta merkitään numerolla 0 ja oikeaa puolta numerolla 2. Siis esimerkiksi välin $[0, \frac{1}{3}]$ pisteille $\alpha_1 = 0$ ja vastaavasti välin $[\frac{2}{3}, 1]$ pisteille $\alpha_1 = 2$. Määritellään funktio

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2} \cdot 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 2^{-i-1} \in [0, 1].$$

Funktio f siis muuttaa Cantorin 1/3- joukon pisteet kaksikantaiseen muotoon. Funktio f on surjektiivinen ja kasvava. Lisäksi poistettujen välien päätepisteet kuvautuvat samaksi pisteeksi. Kuvaus f voidaan laajentaa jatkuvaksi välillä $[0, 1]$ määrittelemällä se olemaan vakio jokaisella poistetulla välillä. Vakioarvoksi valitaan sama arvo, jonka päätepisteet saavat. Näin muodostettu kuvaus f on tunnettu Cantorin funktiona. Katso kuva 3.2.



KUVA 3.2. Cantorin funktio eli pirunporrasfunktio

MÄÄRITELMÄ 3.5. Joukon X yhtenäisyyskomponentti on suurin joukon X yhtenäinen osajoukko. Joukko X on *täysin epäyhtenäinen*, jos sen jokainen piste on yhtenäisyyskomponentti.

Reaaliakselilla täysin epäyhtenäinen joukko ei sisällä välejä. Siis täysin epäyhtenäisen joukon pisteiden väliin jää aina jokin komplementin väli. Seuraavat kolme tulosta löytyvät lähteestä [**4**] sivuilta 97-100.

LAUSE 3.6. *Mitkä tahansa kaksi kompaktia, täysin epäyhtenäistä ja perfektiä metristä avaruutta ovat homeomorfisia.*

TODISTUS. Tuloksen todistus on esitetty lähteessä [**4**] sivuilla 99-100. □

Seurauksena edeltävästä lauseesta saadaan kaksi seuraavanlaista tulosta.

SEURAUS 3.7. *Mikä tahansa kompakti, täysin epäyhtenäinen ja perfekti metrinen avaruus on homeomorfinen Cantorin joukon kanssa.*

SEURAUS 3.8. *Mikä tahansa kompakti, täysin epäyhtenäinen metrinen avaruus on homeomorfinen Cantorin joukon osajoukon kanssa.*

HUOMAUTUS 3.9. Proposition 1.43 yhteydessä todettiin, että perfektit harvat välin $[0, 1]$ osajoukot ovat Cantorin joukkoja. Joissakin lähteissä Cantorin joukko on määritelty näin, mutta tämä tieto saadaan myös seuraavasti: Reaaliakselin suljettu ja rajoitettu joukko on kompakti. Nyt perfektin joukon määritelmän A.6 mukaan se on suljettu joukko. Lisäksi väli [0,1] on rajoitettu. Siis tarkasteltava joukko on kompakti. Harvan joukon sulkeumalla ei ole sisäpisteitä eli harva joukko ei sisällä välejä. Siis suljettu ja harva joukko on täysin epäyhtenäinen reaaliakselilla. Näin ollen perfektit harvat välin $[0, 1]$ osajoukot ovat todella Cantorin joukkoja.

Kappaleen lopuksi tutkitaan vielä hieman Poincarén luokittelulausetta.

HUOMAUTUS 3.10. Tarkastellaan Poincarén luokittelulauseen eli lauseen 1.44 tilannetta tarkemmin. Käytetään samoja merkintöjä, kuin lauseen 1.44 todistuksessa. Siis olkoon $B := \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ sekä $H : B \to \mathbb{R}$ siten, että $F^n(x) + m \mapsto n\rho + m$. Poincarén luokittelulauseen todistuksen nojalla $\pi \circ H(\overline{B}) = h \circ \pi(\overline{B})$. Joukko $\overline{B}$ projisoituu pisteen $\pi(x)$ radan sulkeumaan, joka sisältää ω-rajajoukon $E = \omega(\pi(x))$. Kun $x \in \pi^{-1}(E)$, niin saadaan $\pi(\overline{B}) = E$. Transitiivisessa tapauksessa $\overline{B} = \mathbb{R}$, joten $E = S^1$. Jos taas kuvaus f ei ole transitiivinen ja jos $x \in \pi^{-1}(E)$, niin $\pi(\overline{B}) = E$ on Cantorin joukko eli harva. Tässä tapauksessa Cantorin joukon dynamiikka ja irrationaalinen kierto $R_{\rho(f)}$ ovat melkein konjugaatteja. Jos ympyrälle S^1 Cantorin joukon komplementtiin muodostuvien välien päätepisteet samaistetaan, niin h on bijektio tekijäjoukolta $E/\sim$ ympyrälle S^1. Tällöin h on konjugoiva kuvaus eli $h \circ f|_{E/\sim} = R_{\rho(f)} \circ h$. Joukko E määriteltiin siten, että $E = \pi(\overline{B})$. Tällöin kaikkien pisteiden $\pi(x) \in E$ radat ovat tiheässä funktiolla f joukossa E, sillä $h \circ f|_{E/\sim} = R_{\rho(f)} \circ h$ ja irrationaalisen kierron $R_\rho(f)$ kaikki radat ovat tiheässä. Toisaalta joukon $E = \omega(\pi(x))$ konstruoinnin nojalla joukko E vetää puoleensa kaikkia sen komplementin pisteitä. Tämä johtuu siitä, että komplementin pisteiden iteraatit pysyvät erillisissä joukon E komplementtiväleissä ja näiden välien pituudet menevät nollaan. Erityisesti siis h on esimerkki pirunporrasfunktiosta. (Katso kuva 3.2.)

3.2. Arnoldin kielet

Tämä luku käsittelee ympyrädiffeomorfismiperheitä. Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ homeomorfismi.

PROPOSITIO 3.11. *Olkoon $f\colon S^1 \to S^1$ suunnansäilyttävä homeomorfismi, jonka kiertoluku on rationaalinen $\rho(f) = p/q$. Oletetaan, että kaikki pisteet eivät ole jaksollisia. Tällöin riittävän pienen häiriön $\overline{f}$, jolle $\overline{f} \prec f$ tai $f \prec \overline{f}$, kiertoluku on p/q.*

TODISTUS. Olkoon x funktion f ei jaksollinen piste. Nyt koska $\rho(f) = p/q$, niin kaikille jaksollisille pisteille y pätee $F^q(y) = y + p$. Tällöin $F^q(x) - \mathrm{Id}(x) - p \neq 0$ funktion f kaikilla nostoilla F. Jos on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle $F^q(x) - x - p > 0$, niin tällöin pienellä häiriöllä $\overline{f} \prec f$ vastaavalle nostolle $\overline{F}$ pätee, $\overline{F}^q(x) - x - p > 0$ ja siten $\rho(\overline{f}) \geq p/q$. Nyt kuitenkin proposition 1.31 nojalla $\rho(\overline{f}) \leq \rho(f)$. Näin ollen $\rho(\overline{f}) = p/q$. Sama pätee myös pienelle häiriölle toiseen suuntaan eli kun $f \prec \overline{f}$. □

HUOMAUTUS 3.12. Seuraavassa propositiossa puhutaan suunnansäilyttävien homeomorfismien monotonisesta perheestä $(f_t)_{t\in[0,1]}$. Tällä tarkoitetaan seuraavaa: Jos pisteille $s, t \in [0,1]$ pätee, että ne ovat lähellä toisiaan ja $s < t$, niin kuvauksille $f_s, f_t\colon S^1 \to S^1$ tulee päteä $f_s \prec f_t$.

PROPOSITIO 3.13. *Oletetaan, että $(f_t)_{t\in[0,1]}$ on monotoninen jatkuva perhe suunnansäilyttäviä ympyrähomeomorfismeja siten, että $\rho\colon t \mapsto \rho(f_t)$ ei ole vakio. Oletetaan lisäksi, että on olemassa tiheä joukko $S \subset \mathbb{Q}$ siten, että jokaiselle kuvaukselle f_t, joko $\rho(f_t) \notin S$ tai kuvauksella f_t on piste, joka ei ole jaksollinen. Tällöin ρ on pirunporrasfunktio.*

TODISTUS. Todistus on esitetty lähteessä [**3**] sivulla 140. Todistus löytyy myös lähteestä [**5**] sivulta 392. □

Viimeisessä esimerkissä tarvitaan Implisiittifunktiolausetta, joten muotoillaan se näkyviin.

LAUSE 3.14. *(Implisiittifunktiolause) Olkoon $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1-funktio. Oletetaan lisäksi, että*

(1) $G(x_0, y_0) = 0$ *ja*
(2) $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Tällöin on olemassa avoimet välit I ja J, joista I sisältää pisteen x_0 ja J pisteen y_0. Lisäksi on olemassa C^1- funktio $p\colon I \to J$ siten, että

(1) $p(x_0) = y_0$ *ja*
(2) $G(x, p(x)) = 0$ *kaikilla $x \in I$.*

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**8**] sivulta 19-21. □

Lopuksi esimerkki, jossa esitellään Cantorin funktion ja Arnoldin kielten yhteys.

ESIMERKKI 3.15. Tarkastellaan jo esimerkissä 1.15 esiteltyä kaksi-parametrista ympyräkuvausperhettä (tunnettu myös nimellä standardiperhe)

$$f_{\omega,\epsilon}(\theta) = \theta + 2\pi\omega + \epsilon \sin(\theta).$$

Tämän kuvauksen nosto on

$$F_{\omega,\epsilon}(x) = x + \omega + \frac{\epsilon}{2\pi}\sin(2\pi x).$$

Kun $\epsilon = 0$, niin kuvaus supistuu kierroksi $R_\omega(\theta) = f_{\omega,0}(\theta) = \theta + 2\pi\omega$.
Kun $\epsilon = 1$, niin $f_{\omega,1}(\theta) = \theta + 2\pi\omega + \sin(\theta)$. Nosto $F_{\omega,1}$ on aidosti kasvava. Merkitään kuvauksen $f_{\omega,1}(\theta)$ käänteiskuvausta symbolilla g, jolloin $f_{\omega,1}(g(x)) = x$. Tällöin

$$g(x) + 2\pi\omega + \sin(g(x)) = x.$$

Lasketaan tälle derivaatta pisteen x suhteen

$$g'(x) + g'(x)\cos(g(x)) = 1,$$

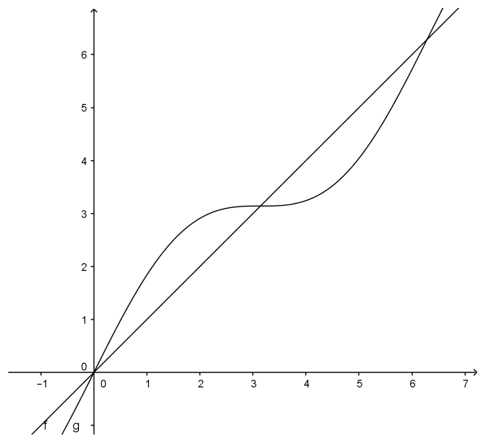
josta saadaan

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \cos(g(x))}.$$

Käänteiskuvauksen derivaatta on olemassa, jos

$$\cos(g(x)) \neq -1.$$

Huomataan, että $\cos(g(x)) = -1$, jos $g(x) = \pi$. Nyt $x = f(g(x)) = f(\pi)$ ja $f(\pi) = \pi + 2\pi\omega$, joten käänteiskuvaus ei ole differentioituva. Siis kun $\epsilon = 1$, niin kuvaus $f_{\omega,1}(\theta)$ on vain homeomorfismi. (Katso kuva 3.3.)



KUVA 3.3. Kuvassa $f(x) = x$ ja $g(x) = x + \sin(x)$.

Kun $0 \leq \epsilon < 1$, niin $f_{\omega,\epsilon}$ on ympyrädiffeomorfismi. (Katso kuva 3.4.) Kun $\epsilon > 1$, niin kuvaus ei enää ole injektio.(Katso kuva 3.5)

Jos $\omega_1 > \omega_2$, niin

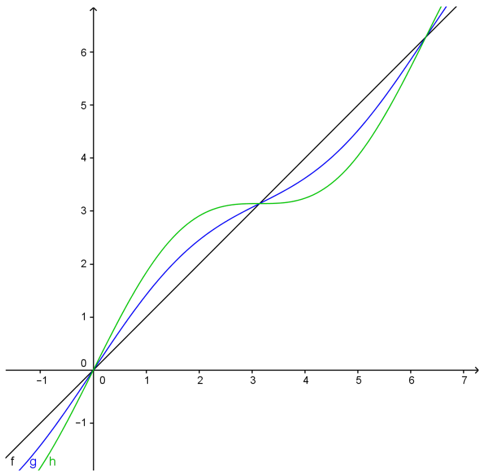
$$F_{\omega_1,\epsilon}(x) > F_{\omega_2,\epsilon}(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin myös

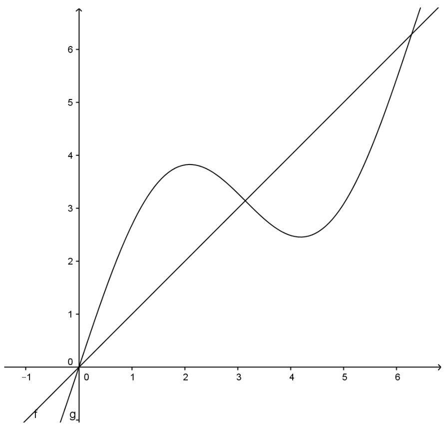
$$F^n_{\omega_1,\epsilon}(x) > F^n_{\omega_2,\epsilon}(x),$$

joten $\rho(F_{\omega_1,\epsilon}) \geq \rho(F_{\omega_2,\epsilon})$. Nyt kuvaus ρ on ei-vähenevä funktio jokaiselle kiinnitetylle arvolle ϵ. Proposition 1.29 mukaan ρ on jatkuva ja vaihtelee pisteestä ω riippuen. Kiinnitetään nyt $\epsilon \neq 0$ ja merkitään $f_\omega = f_{\omega,\epsilon}$. Oletetaan, että kiertoluku $\rho(f_{\omega_0}) = p/q$ on rationaalinen. Tällöin funktiolla f_{ω_0} on jaksollinen piste jaksolla q. Nyt on olemassa siis piste $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$F^q_{\omega_0}(x_0) = x_0 + k,$$



KUVA 3.4. Kuvassa $f(x) = x$, $g(x) = x + 0.5\sin(x)$ ja $h(x) = x + \sin(x)$.

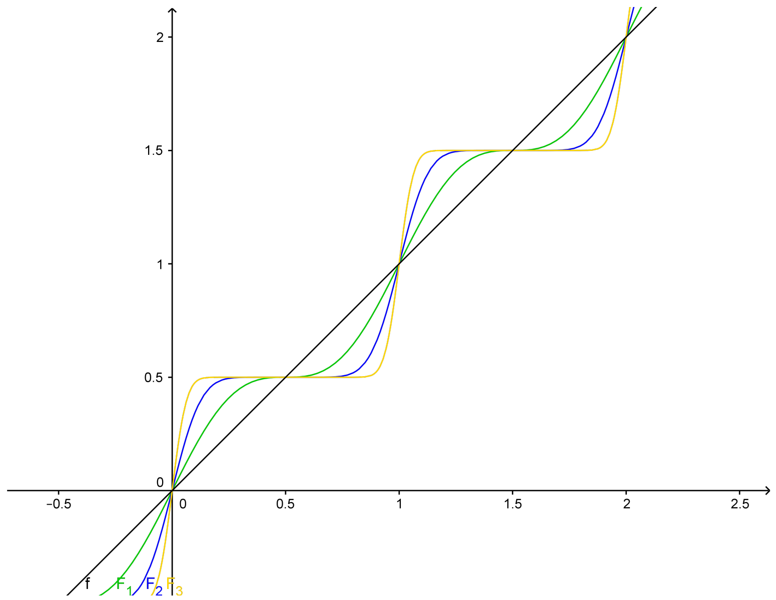


KUVA 3.5. Kuvassa $f(x) = x$ ja $g(x) = x + 2\sin(x)$.

jollakin kokonaisluvulla k. Itseasiassa $k = p$. Osoitetaan seuraavaksi, että on olemassa väli I ω-arvoja, joilla funktion f_{ω_0} kiertoluku on p/q. Tämän tutkimiseksi muodostetaan noston $F^q_{\omega_0}$ kuvaaja. Tämä kuvaaja sivuaa suoraa $y = x + p$ pisteessä $(x_0, x_0 + p)$. (Kuvassa 3.6 on tutkittu noston käyttäytymistä, kun $\epsilon = 1$ ja $\omega = 0$.)

Jos $(F^q_{\omega_0})'(x_0) \neq 1$, niin implisiittifunktiolauseen nojalla (lause 3.14) on olemassa avoin väli, joka sisältää pisteen ω_0 ja jossa myös jokaisen noston F^q_ω graafi kohtaa suoran $y = x + p$. Tällöin kaikille näille arvoille $\rho(f_\omega) = p/q$. Perustellaan tämä tarkemmin seuraavaksi. Kun $(F^q_{\omega_0})'(x_0) \neq 1$, niin $(F^q_{\omega_0})'(x_0) - 1 \neq 0$. Tällöin lauseen 3.14 merkinnöillä $G(\omega_0, x_0) := F^q_{\omega_0}(x_0) - x_0 + v$, missä v on jokin vakio. Näin ollen $G(\omega_0, x_0) = 0$, sillä $F^q_{\omega_0}(x_0) = x_0 + k$. Siis vakio $v = -k$. Nyt siis implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa avoimet välit I ja J siten, että $\omega_0 \in I$ ja $x_0 \in J$. Lisäksi on olemassa funktio $p\colon I \to J$ siten, että $p(\omega_0) = x_0$ ja $G(\omega, p(\omega)) = 0$ kaikilla $\omega \in I$. Tällöin $F^q_\omega(x) - x - k = 0$ kaikilla $\omega \in I$. Siis noston F^q_ω graafi kohtaa suoran $y = x + p$, sillä aiemmin huomattiin, että $k = p$.

Jos taas $(F^q_{\omega_0})'(x_0) = 1$, niin tapaus on monimutkaisempi. Koska F_{ω_0} on analyyttinen, niin on olemassa indeksi j, jolla derivaatalle pätee $(F^q_{\omega_0})^{(j)}(x_0) \neq 0$. Muuten



KUVA 3.6. Kuvassa $f(x) = x$, $F_1 = F_{0,1}(x) = x + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ ja $F_2 = F_{0,1}^2(x)$ sekä $F_3 = F_{0,1}^3(x)$.

$F_{\omega_0}^q(x)$ on identtisesti $x + p$. Nyt siis kuvauksen $F_{\omega_0}^q(x_0) - x_0$ ensimmäiselle derivaatalle pätee, että $(F_{\omega_0}^q)'(x_0) - 1 = 0$, koska oletuksen nojalla $(F_{\omega_0}^q)'(x_0) = 1$. Lisäksi siis oletetaan, että ensimmäinen nollasta eroava korkeamman asteen derivaatta on j. derivaatta.

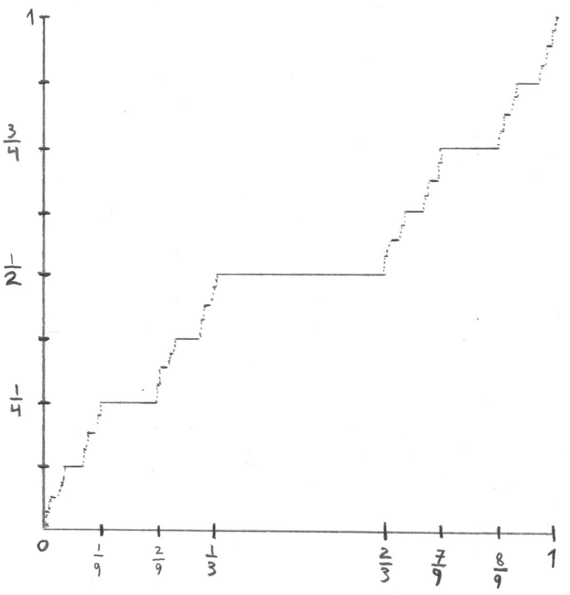
Tällöin, jos j on pariton, niin x_0 ei ole ääriarvopiste kuvaukselle $F_{\omega_0}^q(x) - x$. Siispä noston $F_{\omega_0}^q$ lähellä olevien nostojen F_ω^q täytyy lävistää suora $y = x + p$.

Jos taas j on parillinen, niin x_0 on kuvauksen $F_{\omega_0}^q(x) - x$ maksimikohta tai minimikohta. Jos $(F_{\omega_0}^q)^{(j)}(x_0) < 0$, niin x_0 on maksimikohta ja jos $(F_{\omega_0}^q)^{(j)}(x_0) > 0$, niin minimikohta. Tällöin $F_{\omega_0}^q$ on siis joko kupera tai kovera pisteessä x_0. Noston $F_{\omega_0}^q$ lähellä oleville nostoille F_ω^q valitaan joko $\omega < \omega_0$ tai $\omega > \omega_0$ riippuen siitä onko $F_{\omega_0}^q$ kupera vai kovera. Kummassakin tapauksessa nostojen täytyy lävistää suora $y = x + p$. Näin nähdään, että jokaiselle rationaaliluvulle p/q on epätyhjä väli ω-arvoja, jossa $\rho(f_\omega) = p/q$.

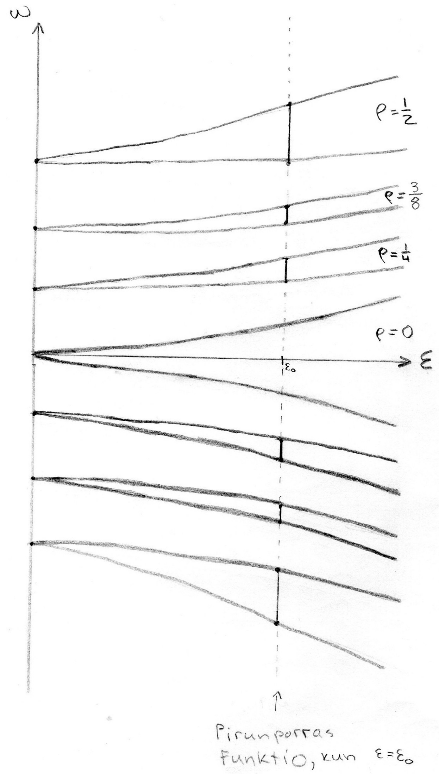
Kiertoluvun $\rho(f_\omega)$ kuvaaja on esimerkki Cantorin funktiosta.(Katso kuva 3.7.) Se on vakio väleillä, jotka vastaavat rationaalista kiertolukua, ja vieläpä jatkuva kaikkialla.

Seuraavaksi tutkitaan, mitä tapahtuu kun ϵ-arvot muuttuvat. Oletetaan siis, että $\rho(f_\omega) = p/q$. Tällöin jokaisella ϵ on olemassa väli I ω-arvoja, jolla ehto $\rho(f_\omega) = p/q$ toteutuu. Kun $\rho(f_\omega)$ alueet kuvataan $\epsilon - \omega$ tasoon, missä $\rho(f_{\omega,\epsilon})$ on kiinnitetty rationaaliluku, syntyy bifurkaatiodiagrammi strandardiperheelle ja se tuottaa Arnoldin kielet. (Katso kuva 3.8.) Nämä alueet muodostavat kieltä muistuttavia siivuja, jotka lähtevät levenemään pisteistä, jotka ovat muotoa $\epsilon = 0, \omega = p/q$. Kun $\epsilon < 1$, niin näin syntyvät kielet ovat epätyhjiä ja eivät voi olla päällekkäin.

Kun $\rho(f_\omega)$ on irrationaalinen, niin proposition 1.32 nojalla Arnoldin kielet ovat pelkästään käyriä.



KUVA 3.7. Kiertoluvun $\rho(f_\omega)$ kuvaaja on Cantorin funktio. Kuvassa x-akselilla on ω-arvot ja y-akselilla kiertoluvun ρ arvot.



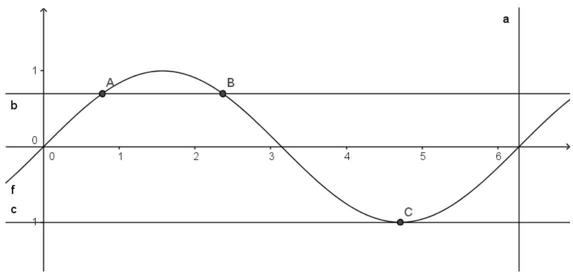
KUVA 3.8. Kuvassa Arnoldin kielet. Suora arvon ϵ_0 kohdalla havainnollistaa pirunporrasfunktiota.

Tutkitaan lopuksi kuvauksen f_ω dynamiikkaa. Kiinnitetään $0 < \epsilon \leq 1$. Tarkastellaan dynamiikkaa kiertolukua $\rho = 0$ vastaavassa kielessä kiinnitetyllä ϵ. Tutkitaan aluksi, milloin funktiolla $f_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega + \epsilon \sin(\theta)$ on kiintopiste. Kun $\theta + 2\pi\omega + \epsilon\sin(\theta) = \theta$ niin saadaan, että $\epsilon \sin(\theta) = -2\pi\omega$. Siis funktiolla f_ω on kiintopiste, kun

$$\sin(\theta) = \frac{-2\pi\omega}{\epsilon}. \tag{3.1}$$

Funktion $\sin(\theta)$ kuvaajasta (kuva 3.9) nähdään, että välillä $0 \leq \theta \leq 2\pi$ yhtälöllä (3.1) on ratkaisuja seuraavasti:

(1) jos $|2\pi\omega| < \epsilon$, niin ratkaisuja on kaksi,
(2) jos $|2\pi\omega| = \epsilon$, niin ratkaisuja on yksi ja
(3) jos $|2\pi\omega| > \epsilon$, niin ratkaisuja ei ole yhtään.



KUVA 3.9. Kuvassa on sinifunktio $f(x) = \sin(x)$ ja suora a, joka kulkee pisteen $(0, 2\pi)$ kautta. Suora b havainnollistaa tilannetta, jossa $|2\pi\omega| < \epsilon$ ja suora c tilannetta, jossa $|2\pi\omega| = \epsilon$.

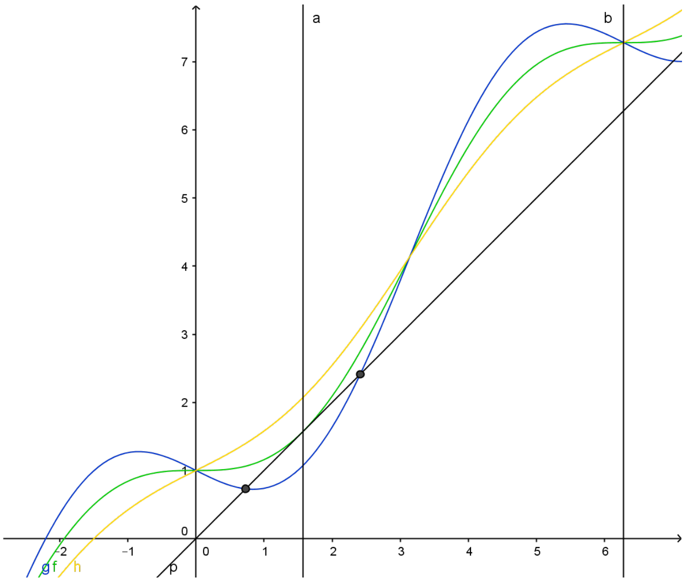
Tarkastellaan tilannetta, jossa yhtälöllä on kaksi ratkaisua eli oletetaan, että $|2\pi\omega| < \epsilon$. Olkoon θ_i kiintopiste, missä $i = 1, 2$. Tällöin $|f'_\omega(\theta_i)| \neq 1$, sillä jos

$$1 = |f'_\omega(\theta_i)| = |1 + \epsilon\cos(\theta_i)|,$$

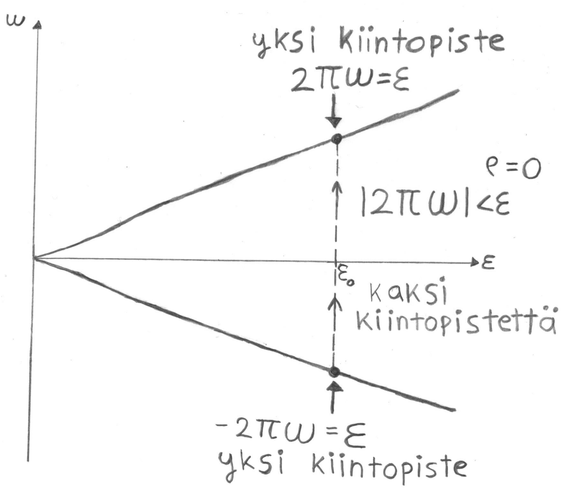
niin $|\epsilon\cos(\theta_i)| = 0$ ja edelleen $|\cos(\theta_i)| = 0$, koska $\epsilon > 0$. Näin ollen $|\sin(\theta_i)| = 1$, joten yhtälön (3.1) nojalla $|2\pi\omega| = \epsilon$ ja yhtälöllä olisi tällöin vain yksi ratkaisu. Funktion dynaamista käyttäytymistä voidaan kuvailla seuraavalla tavalla: Funktion f_ω kiintopiste syntyy satula-solmu-bifurkaationa pisteessä $\theta = \pi/2$, kun $\epsilon = -2\pi\omega$. Tällöin siis

$$f_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega + \epsilon\sin(\theta) = \theta + 2\pi\omega - 2\pi\omega\sin(\theta).$$

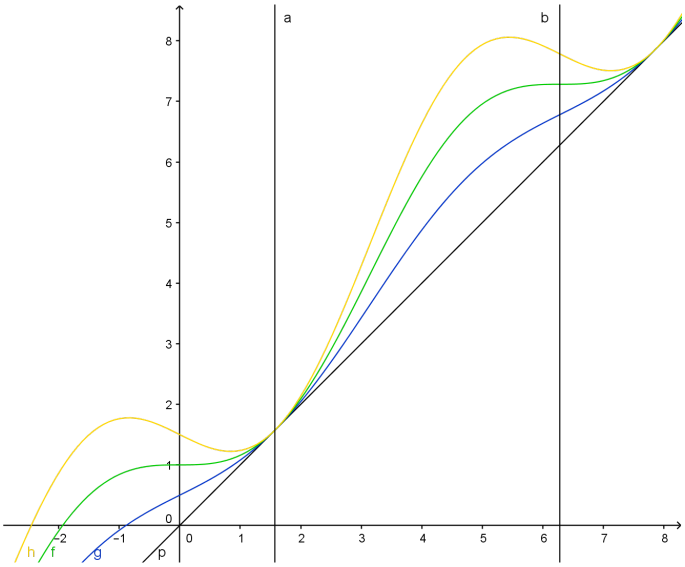
Kuva 3.10 esittää satula-solmu-bifurkaation muodostumista. Siis kun $\epsilon = -2\pi\omega$, niin funktiolla on kiintopiste $\theta = \pi/2$, joka on "solmupiste". Sitten ω kasvaa siten, että $|2\pi\omega| < \epsilon$ ja kuvauksella on kaksi kiintopistettä. Siis syntyy "satula". Kun ω kasvaa edelleen siten, että $2\pi\omega = \epsilon$, niin kuvauksella on yksi kiintopiste, joka on taas "solmupiste". Toisin sanoen kiintopiste $\pi/2$ jakaantuu kahteen kiintopisteeseen, jotka kiertävät yksikköympyrää vastakkaisiin suuntiin, kun ω kasvaa. Lopulta nämä kaksi kiintopistettä kohtaavat ja sulautuvat toiseksi satula-solmu-bifurkaatioksi pisteessä $\theta = 3\pi/2$, jolloin siis $2\pi\omega = \epsilon$. Tämän jälkeen kiintopisteet katoavat. Kuva 3.11 havainnollistaa kiintopisteiden kulkua ja katoamista kielessä $\rho = 0$. Vastaava ilmiö tapahtuu kaikissa kielissä. Kuvissa 3.12 ja 3.13 havainnollistetaan edellä esiteltyä satula-solmu-bifurkaatiota.



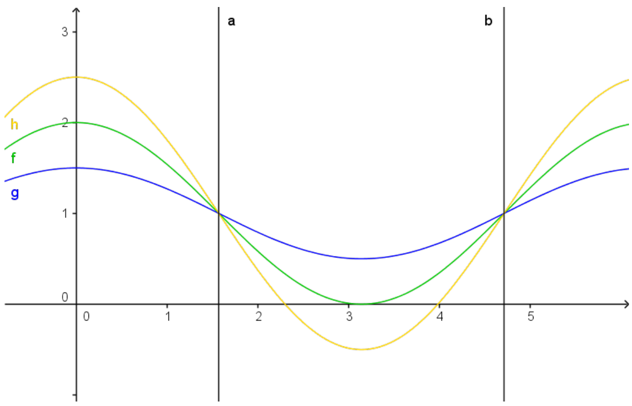
KUVA 3.10. Kuva havainnollistaa satula-solmu-bifurkaatiota. Suora a kulkee pisteen $x = \pi/2$ kautta ja suora b kulkee pisteen $x = 2\pi$ kautta. Molemmat suorat ovat kohtisuorassa x-akselia vastaan. Kuvassa $p(x) = x$, $f(x) = x + 1 - \sin(x)$, $g(x) = x + 1 - 1.5\sin(x)$ ja $h(x) = x + 1 - 0.5\sin(x)$. Funktio f kuvaa tilannetta $|2\pi\omega| = \epsilon$, g tilannetta $|2\pi\omega| < \epsilon$ ja h tilannetta $|2\pi\omega| > \epsilon$.



KUVA 3.11. Kuvassa tutkitaan, mitä Arnoldin kielessä $\rho = 0$ tapahtuu satula-solmu-bifurkaatiossa. Kuvassa f_ω ensimmäinen kiintopiste $\pi/2$ syntyy, kun $\epsilon = -2\pi\omega$. Kun ω-arvot kasvavat, kuvauksella on kaksi kiintopistettä. Kun ω kasvaa niin paljon, että $\epsilon = 2\pi\omega$ niin kuvauksella f_ω on enää yksi kiintopiste $3\pi/2$. Tämän jälkeen kiintopisteet katoavat pisteen ω kasvaessa.



KUVA 3.12. Kuvassa satula-solmu-bifurkaatiota pisteessä $x = \pi/2$, kun $\epsilon = -2\pi\omega$. Suora a kulkee pisteen $x = \pi/2$ kautta ja suora b kulkee pisteen $x = 2\pi$ kautta. Molemmat suorat ovat kohtisuorassa x-akselia vastaan. Kuvassa $p(x) = x$, $f(x) = x + 1 - 1 \cdot \sin(x)$, $g(x) = x + 0.5 - 0.5\sin(x)$ ja $h(x) = x + 1.5 - 1.5\sin(x)$. Siis ω-arvot muuttuvat kiinnitetyllä ϵ-arvolla.



KUVA 3.13. Kuva havainnollistaa satula-solmu-bifurkaatiota pisteessä $x = \pi/2$ derivaattakuvauksen $f'_\omega(x) = 1 + \epsilon\cos(x)$ avulla. Suora a kulkee pisteen $x = \pi/2$ kohdalla ja b pisteen $x = 3\pi/2$ kohdalla ja suorat ovat kohtisuorassa x-akselia vastaan. Kuvassa $f(x) = 1 + \cos(x)$, $g(x) = 1 + 0.5\cos(x)$ ja $h(x) = 1 + 1.5\cos(x)$.

Lähdeluettelo

[1] MICHAEL BRIN and GARRETT STUCK: *Introduction to dynamical systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[2] ROBERT L. DEVANEY: *An introduction to chaotic dynamical systems.* Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.

[3] BORIS HASSELBLATT and ANATOLE KATOK: *A First Course in Dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[4] JOHN G. HOCKING and GAIL S. YOUNG: *Topology.* Copyright 1961 Addison-Wesley publiching company, INC.

[5] ANATOLE KATOK and BORIS HASSELBLATT: *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[6] TERO KILPELÄINEN: *Analyysi 2.* Jyväskylä, 2001-2003.
http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA112.pdf (luettu 19.2.2015)

[7] JOUNI PARKKONEN: *Johdatus Dynaamisiin Systeemeihin.* Jyväskylä, 2013.
http://users.jyu.fi/ parkkone/Dyn2013/Dyn13.pdf (luettu 19.2.2015)

[8] VEIKKO T. PURMONEN: *Differentiaalilaskenta 2.* Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 2011. Neljäs tarkistettu painos.

LIITE A

Määritelmiä ja merkintöjä

MÄÄRITELMÄ A.1. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio ja $I \in \mathbb{R}$ suljettu väli. Merkitään funktion $f(x)$ ensimmäistä derivaattaa $f'(x)$, toista derivaattaa $f''(x)$ ja korkeamman asteen derivaattaa $f^{(r)}(x)$. Sanotaan, että f on C^r-funktio joukossa I, jos $f^{(r)}(x)$ on olemassa ja jatkuva joukossa I. Funktio on *sileä*, jos se on C^1-funktio. Funktio $f(x)$ on C^∞, jos sen kaikki derivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Käytetään yhdistetystä kuvauksesta merkintää $f \circ g(x) = f(g(x))$ ja n-kertaisesta yhdistetystä kuvauksesta merkintää $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(x)$. Huomaa merkintöjen ero n:nen derivaatan $f^{(n)}(x)$ ja n-kertaisen yhdistetyn kuvauksen $f^n(x)$ välillä. Jos käänteiskuvaus f^{-1} on olemassa, niin sen n-kertaista yhdistettyä kuvausta merkitään $f^{-n}(x) = f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}(x)$.

MÄÄRITELMÄ A.2. Olkoon $f\colon I \to J$ funktio, missä I ja J ovat suljettuja välejä. Funktio $f(x)$ on *homeomorfismi*, jos $f(x)$ on jatkuva bijektio ja myös sen käänteiskuvaus $f^{-1}(x)$ on jatkuva.

MÄÄRITELMÄ A.3. Olkoot M ja N topologisia avaruuksia. Differentioituva kuvaus $f\colon M \to N$ on *diffeomorfismi*, jos f on bijektio ja sen käänteiskuvaus $f^{-1}\colon N \to M$ on differentioituva. Jos tällaiset funktiot ovat r kertaa jatkuvasti differentioituvia sanotaan, että f on C^r *– diffeomorfismi*.

MÄÄRITELMÄ A.4. Olkoot A ja B topologisia avaruuksia siten, että $A \subset B$. Joukko A on *tiheä* joukossa B, jos sen sulkeuma on B. Joukko A on *harva* joukossa B, jos sen sulkeumalla ei ole sisäpisteitä.

MÄÄRITELMÄ A.5. Joukko X on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

MÄÄRITELMÄ A.6. Avaruuden S osajoukko X on *perfekti*, jos se on suljettu ja jokainen joukon X piste on kasautumispiste.

Määritellään seuraavaksi yhtenäisyys, joka on topologisen avaruuden ominaisuus.

MÄÄRITELMÄ A.7. Avaruus X on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa avoimet joukot $A, B \subset X$ siten, että

(1) $X = A \cup B$,
(2) $A \neq \emptyset \neq B$,
(3) $A \cap B = \emptyset$.

Avaruus on *yhtenäinen*, jos se ei ole epäyhtenäinen. Siis avaruus on yhtenäinen, jos ja vain jos sitä ei voida esittää kahden erillisen epätyhjän avoimen osajoukon yhdisteenä.

MÄÄRITELMÄ A.8. Olkoon X topologinen avaruus. Olkoon $\sim$ ekvivalenssirelaatio joukossa X. *Tekijäavaruus* on

$$Y = X/\sim = \{[x] \colon x \in X\} = \{\{v \in X \colon v \sim x\} \colon x \in X\}.$$

Kuvaus $f \colon X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$ on *tekijäkuvaus.*

MÄÄRITELMÄ A.9. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia. Jatkuva kuvaus $p \colon X \to Y$ on *peitekuvaus*, jos p on surjektio ja jokaisella pisteellä $y \in Y$ on olemassa sellainen ympäristö U, että $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, missä joukot V_i ovat avoimia, pareittain erillisiä (eli $V_i \cap V_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$) ja jokaisella indeksillä $i \in I$ kuvaus $p|_{V_i} \colon V_i \to U$ on homeomorfismi. Joukkoa U sanotaan pisteen y *peiteympäristöksi* kuvauksella p.

MÄÄRITELMÄ A.10. Funktion $f \colon X \to Y$ *rajoittuma* osajoukkoon $A \subset X$ on funktio $g \colon A \to Y$, jolle $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A$. Funktiolle g käytetään yleensä merkintää $f|_A$.

LAUSE A.11. *(Käänteisfunktion derivaatta) Olkoon f derivoituva avoimella välillä I ja olkoon $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in I$. Tällöin funktion f käänteisfunktio f^{-1} on myös derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja*

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**6**] sivulta 54. □