Äärellisen väännön kuvaukset: Diskreettisyys ja avoimuus

Martti Rasimus

Matematiikan pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2015

Tiivistelmä: Martti Rasimus, *Äärellisen väännön kuvaukset: Diskreettisyys ja avoimuus* (engl. *Mappings of Finite Distortion: Discreteness and Openness*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 63 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2015.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella äärellisen väännön kuvauksia euklidisissa avaruuksissa, erityisesti niiden diskreettisyyttä ja avoimuutta. Äärellisen väännön kuvaukset ovat yleistys kvasisäännöllisistä kuvauksista, jotka molemmat määritellään käyttämällä vääntöepäyhtälöä

$$|Df|^n \leq K J_f,$$

missä K on äärellinen vääntöfunktio, kvasisäännöllisille kuvauksille lisäksi oleellisesti rajoitettu.

Kvasisäännöllisille eli rajoitetun väännön kuvauksille voimassa olevat tulokset jatkuvuudesta, diskreettisyydestä ja avoimuudesta säilyvät myös äärelliseen vääntöön siirryttäessä. Tähän tarvitaan kuitenkin joitain oletuksia kuvauksen vääntöfunktiosta. Työssä konstruoidaan vastaesimerkkejä kuvauksista, joille nämä ominaisuudet eivät välttämättä ole voimassa.

Tutkielman päätuloksina osoitetaan, että Sobolev-avaruuden $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ äärellisen väännön kuvauksella on olemassa jatkuva edustaja, joka on vakio tai diskreetti ja avoin, kun oletetaan lisäksi $K \in L^{n-1+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}$. Tässä n on avaruuden dimensio ja $\varepsilon > 0$ tai $\varepsilon = 0$ kun $n = 2$. Näiden tulosten rinnalla todistetaan molempien väitteiden seuraavan vaihtoehtoisesti myös siitä, että vääntöfunktio on eksponentiaalisesti integroituva.

Avainsanat: Äärellinen vääntö, jatkuvuus, diskreettisyys, avoimuus, distributiivinen Jacobi, heikko monotonisuus, topologinen aste.

Sisältö

Johdanto

Tutkielman aiheena ovat äärellisen väännön kuvaukset euklidisissa avaruuksissa ja niiden topologiset ominaisuudet. Äärellisen väännön kuvaukset muodostavat funktioavaruuden, joka on huomattava yleistys klassisen funktioteorian tyypillisistä funktioluokista. Alkaen kompleksianalyysistä tutuista tason konformikuvauksista voidaan kuvausominaisuuksien vaatimuksia keventämällä löytää uusia mielenkiintoisia, monipuolisempia kuvauksia. Konformikuvaus kompleksitasossa tarkoittaa tavallisesti analyyttista injektiota, joka on erityisesti kulmat säilyttävä homeomorfismi kuvajoukolleen. Kuuluisan Riemannin kuvauslauseen mukaan jokainen kompleksitason yhdesti yhtenäinen alue, joka ei ole koko taso, voidaan kuvata konformisesti yksikkökiekolle. Joukkojen ominaisuuksia voidaan näin tutkia niiden välisten kuvausten avulla, sanotaan esimerkiksi että tason yksikkökiekko ja puolitaso ovat konformisesti ekvivalentit.

Konformikuvaus korkeampiulotteisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$, missä $n \geq 3$, määritellään kulmat säilyttäväksi funktioksi. Tällöin voidaan osoittaa, että kuvaus säilyttää myös infinitesimaalisen pienet muodot. Liouvillen lauseen mukaan tasoa korkeammissa ulottuvuuksissa nämä konformikuvaukset ovat kuitenkin aina Möbius-kuvausten rajoittumia. Tämä tarkoittaa käytännössä, että toisin kuin tasossa, on konformisuus korkeammissa ulottuvuuksissa erittäin rajoittava vaatimus. Yleistys konformisuudelle on niin sanottu kvasikonformisuuden käsite, jolla on useita yhtäpitäviä määritelmiä. Nämä kuvaukset muodostavat selvästi monipuolisemman funktioavaruuden, jolla on tärkeitä sovelluksia matematiikan eri aloilla sekä yleistyksiä myös euklidisia avaruuksia abstraktimpiin metrisiin avaruuksiin.

Analyyttinen lähestymistapa konformisuuden yleistämiseen on kuvauksen *väännön* eli *dilataation* tarkastelu. Alueen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorfisen konformikuvauksen $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ differentiaalille pätee $|Df|^n = J_f$, missä $|Df|$ on sen differentiaalin operaattorinormi ja J_f Jacobi eli differentiaalin determinantti. Jos nyt melkein kaikkialla derivoituvalle kuvaukselle $\tilde{f}$ vaaditaan tässä yhtäsuuruuden sijaan epäyhtälö $|D\tilde{f}|^n \leq KJ_{\tilde{f}}$ jollain vakiolla $K \geq 1$, sanotaan että kuvaus $\tilde{f}$ on *K-kvasisäännöllinen* eli *rajoitetun väännön kuvaus*. Kvasikonformiset kuvaukset voidaan nyt määritellä homeomorfismeiksi, joilla on rajoitettu vääntö. Edellä kuvattu *vääntöepäyhtälö* merkitsee geometrisesti infinitesimaalisten muotojen rajoitettua vääntymistä tai vääristymistä, siinä missä konformikuvaus säilyttää nämä muodot.

Rajoitettua vääntöä edelleen yleistämällä päästään vihdoin käsiksi *äärellisen väännön kuvauksiin*: Oletetaan vakion K olemassaolon sijaan, että löytyy rajoittamaton funktio $K_f \colon \Omega \to [1, \infty]$, jolle $|Df|^n \leq K_f J_f$. Äärellisyys merkitsee nyt sitä, että tämä *vääntöfunktio* saa äärellisen arvon melkein kaikilla $x \in \Omega$. Tutkielmassa tullaan tämän oletuksen pohjalta todistamaan äärellisen väännön kuvauksen jatkuvuus, diskreettisyys ja avoimuus kun vääntöfunktio K_f oletetaan riittävän säännölliseksi. Lisäksi on tällaisen analyyttisen määritelmän mielekkyyden kannalta luonnollisesti oletettava kuvaukselta f jokin differentioituvuutta muistuttava ominaisuus; riittävän yleinen pohja-avaruus äärellisen väännön kuvauksille on *Sobolev-funktioiden* avaruus $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, minkä takia "differentiaali"voidaan käsittää myös kuvauksen yleistettyjen derivaattojen muodostamaksi.

1800-luvulla kukoistanut klassinen kompleksianalyysiin painottunut funktioteoria alkoi laajentua konformisuuden yleistystämisen suuntaan 1900-luvun alkupuolella, kun vuonna 1928 saksalainen matemaatikko Grötzsch esitteli aluksi tasossa kvasikonformisuuden käsitteen. Nimen näille kuvauksille on hieman myöhemmin antanut suomalainen Fields-mitalisti Lars Ahlfors, joka oli myös niiden merkittävimpiä varhaisia tutkijoita. 1960-luvulla alkanut kvasisäännöllisten kuvausten tutkimus laajensi teoriaa edelleen homeomorfisuus-oletuksesta luopumalla. Näiden rajoitetun väännön kuvausten perustulos on Reshetnyakin lause, jonka mukaan ne ovat aina jatkuvia ja lisäksi joko vakioita tai diskreettejä ja avoimia. Seuraava askel on ollut väännön rajoittuneisuudesta luopuminen ja vastaavien tulosten saavuttaminen myös äärellisen väännön kuvauksille.

Luvussa 1 käydään läpi teorian kannalta tärkeimpiä esitietoja ja aputuloksia sekä selvyyden vuoksi myös joitain merkintöjä. Luku 2 muodostuu rajoitetun ja äärellisen väännön kuvausten täsmällisistä määritelmistä euklidisissa avaruuksissa sekä lyhyestä muiden funktioavaruuksien, kuten kvasikonformikuvausten, esittelystä ja vertailusta. Luvussa 3 todistetaan äärellisen väännön kuvausten jatkuvuus sekä differentioituvuus melkein kaikkialla sen heikosta differentiaalista tai vaihtoehtoisesti vääntöfunktiosta tehtävillä oletuksilla, minkä lisäksi tarkastellaan myös todistuksessa tarvittavaa heikon monotonisuuden käsitettä. Lopulta luvussa 4 muotoillaan ja todistetaan tutkielman päätulos, äärellisen väännön kuvauksen diskreettisyys ja avoimuus vääntöfunktion säännöllisyyden nojalla. Luvussa käsitellään myös todistuksessa tarvittavaa topologisen asteen käsitettä. Tutkielma perustuu pääasiassa lähteeseen [**HenK**], varsinkin sen lukuihin 2 ja 3.

LUKU 1

Merkintöjä ja esitietoja

Tässä luvussa käydään läpi tutkielman aihealueen kannalta tärkeimmät merkinnät sekä esitiedot ja aputulokset. Lukijalta oletetaan tavallisimpien matematiikan syventävien kurssien tietojen hallinta, tärkeimpänä mitta- ja integraaliteoria. Esitiedoissa kerrataan tältä pohjalta lähinnä reaalianalyysin ja Sobolev-avaruuksien olennaisimmat määritelmät ja tulokset.

1.1. Merkinnät

Tutkielmassa pyritään noudattamaan nykykäyttöön vakiintuneita merkintöjä. Seuraavassa listassa käydään läpi ne merkinnät, jotka liittyvät olennaisesti käsiteltävään aihealueeseen ja ovat kirjallisuudessa osin tulkinnanvaraisia:

Ω	Alue avaruudessa $\mathbb{R}^n$
$cB = cB(x,r)$	Vakiolla $c > 0$ venytetty pallo $cB(x,r) := B(x,cr)$
$A \subset\subset B$	Joukko A sisältyy kompaktisti joukkoon B, eli $\overline{A} \subset B$ ja $\overline{A}$ on kompakti
$\operatorname{spt} f$	Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ kantaja, eli joukko $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$
f^+, f^-	Reaaliarvoisen funktion f positiivi- ja negatiiviosa, $f^{\pm}(x) := \max\{\pm f(x), 0\}$
$C(\Omega)$	Jatkuvat funktiot $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$
$C_C(\Omega)$	Jatkuvat funktiot $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, joille $\operatorname{spt} f \subset\subset \Omega$ (kompaktikantajaiset)
$C^k(\Omega)$	k-kertaa jatkuvasti derivoituvat funktiot $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$
$C^\infty(\Omega)$	$\cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$ (sileät funktiot)
$C^l_C(\Omega)$	$C^l(\Omega) \cap C_C(\Omega)$, $l = \infty, 1, 2, \ldots$
$C^\infty_0(\Omega)$	Funktiot $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, jotka jatkettuna nollana joukkoon $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ kuuluvat avaruuteen $C^\infty(\mathbb{R}^n)$
$\|A\|, \|L\|, \|x\|$	Tilanteesta riippuen joko joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ n-ulotteinen Lebesgue-mitta $m_n(A)$, lineaarikuvauksen L operaattorinormi tai vektorin $x \in \mathbb{R}^n$ euklidinen normi (itseisarvo)
χ_A	Joukon A karakteristinen funktio
$\langle x, y \rangle$	Vektoreiden $x, y \in \mathbb{R}^n$ sisätulo $\sum_j x_j y_j$

I	Identtinen matriisi $[e_1, e_2, \dots, e_n]$
$\partial_j f$, ∇f	Reaaliarvoisen funktion f (heikko) osittaisderivaatta tai gradientti
Df , J_f	Vektoriarvoisen funktion f (heikko) differentiaali tai Jacobin determinantti
$f_A = \fint_A f$	Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ integraalikeskiarvo yli joukon $A \subset \Omega$, $\fint_A f = \lvert A\rvert^{-1} \int_A f$ $(0 < \lvert A\rvert < \infty)$
$\mathscr{H}^s_\varepsilon$	s-ulotteinen Hausdorffin ε-sisältö, $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$
$\mathscr{H}^s$	s-ulotteinen Hausdorffin ulkomitta, $\mathscr{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \mathscr{H}^s_\varepsilon(A)$

Lisäksi tutkielmassa, etenkin esitiedoissa määritellään muita tärkeitä käsitteitä ja näiden merkintöjä.

Varoitus: Tutkielmassa käytetään toistuvasti kirjainta C merkitsemään vakiota, jonka pelkkä olemassaolo on riittävää meneillään olevan päättelyn kannalta. Erityisesti se voi todistuksen edetessä muuttaa arvoaan. Tavoitteena kuitenkin on, että tämä vakio on esitetyissä arvioissa ja yhtälöissä "riittävän suuri"; jos tarvitaan riittävän pientä positiivista vakiota pyritään kirjoittamaan $\frac{1}{C}$, ja tämän vakion arvo tulee käsittää maksimiksi kaikista päättelyssä tarvittavista kiinteistä ylärajoista. Vakion riippuvuutta mahdollisista parametreista kuten avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensiosta n merkitään $C = C(n)$.

1.2. Reaalianalyysiä ja Sobolev-avaruuksia

Kappaleen tulokset ovat irrallisia poimintoja matematiikan syventäviltä erikoiskursseilta tutkielman tarpeisiin. Tulosten todistuksia ja perusteellisempaa kehittelyä löytyy esimerkiksi lähteistä **[Zi]** (luvut 1-2) ja **[Ko]** (luvut 2-4, 7).

LAUSE 1.2.1 (Peitelause). *Olkoon $\mathscr{B}$ kokoelma suljettuja palloja avaruudessa $\mathbb{R}^n$ siten, että näiden säteiden joukko on rajoitettu. Tällöin on olemassa (mahdollisesti äärellinen) jono*

$$B_1, B_2, \dots \subset \mathscr{B}$$

pistevieraita palloja siten, että

$$\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} 5B_j.$$

LAUSE 1.2.2 (Lebesgue'n differentiointilause). *Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tällöin melkein kaikki pisteet $x \in \Omega$ ovat Lebesgue-pisteitä, eli*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y)dy = u(x)$$

melkein kaikilla x.

MÄÄRITELMÄ 1.2.3. Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Tällöin kuvaus $\partial^\alpha u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ on funktion u kertaluvun α *heikko (yleistetty) derivaatta*, jos osittaisintegrointikaava

$$\int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha u \varphi \, dx$$

pätee kaikilla $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Tässä

$$\partial^\alpha \varphi = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \varphi$$

ja $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

MÄÄRITELMÄ 1.2.4. Kun $p \in [1, \infty]$ ja $k \in \mathbb{N}$, määritellään *Sobolev-avaruus*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \text{on } \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ kaikilla } \alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \le k\}.$$

Tässä avaruudessa määritellään normi $\| \cdot \|_{k,p}$ kaavalla

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \le k} \|\partial^\alpha u\|_p,$$

missä siis $\partial^0 u = u$.

Jatkossa käytetään tuttuja merkintöjä ∇u, Du ja J_u myös Sobolev-funktioiden heikolle gradientille, differentiaalille ja Jacobin determinantille. Nämä määritellään samoin kuin vastaavat operaattorit differentioituvillekin kuvauksille. Tämän tavan taustalla on luonnollisesti se, että esimerkiksi Fubinin lauseen ja tavallisen osittaisintegrointikaavan nojalla nähdään helposti $f|_K \in W^{k,\infty}(K)$ kaikilla $f \in C^k(\Omega)$ ja $K \subset\subset \Omega$.

LAUSE 1.2.5. *Sobolev-avaruus $W^{k,p}(\Omega)$ on Banach-avaruus, eli täydellinen normiavaruus. Sileät funktiot ovat tiheässä Sobolev-avaruudessa, eli kaikilla $u \in W^{k,p}(\Omega)$ on olemassa jono $\varphi_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ siten, että*

$$\|u - \varphi_j\|_{k,p} \to 0 \quad \textit{kun } j \to \infty.$$

Sobolev-avaruus voidaan määritellä edellä olevan lauseen nojalla myös sileiden funktioiden täydentymänä normilla $\| \cdot \|_{k,p}$. On helppo todeta, että tässä normissa suppenevan sileiden funktioiden jonon raja kuuluu Sobolev-avaruuteen, ja näin saatu vaihtoehtoinen määritelmä tunnetaan yleisesti lauseena "$H = W$", missä H on kyseinen täydentymänä saatava avaruus. Kun sileiden funktioiden vaaditaan olevan myös kompaktikantajaisia, saadaan näiden täydentymänä tärkeä Sobolev-avaruuden aliavaruus:

MÄÄRITELMÄ 1.2.6. Sobolev-avaruuden $W^{k,p}(\Omega)$ aliavaruus $W_0^{k,p}(\Omega)$ on joukon $C_C^\infty(\Omega)$ sulkeuma.

Avaruus $W_0^{k,p}(\Omega)$ muodostuu siis niistä Sobolev-funktioista, joita voidaan approksimoida kompaktikantajaisilla sileillä funktioilla. Intuitiivisesti niiden tulee hävitä joukon Ω reunalla avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mikä on kuitenkin täsmällisesti väärin ilmaistu, sillä näitä kuvauksia ei ole määritelty joukossa $\partial\Omega$. Voidaan kuitenkin todistaa, että esimerkiksi $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Huomautus 1.2.7. Merkintä $W^{k,p}(\Omega)$ tarkoittaa tässä, kuten myös merkintä $L^p(\Omega)$, reaaliarvoisia kuvauksia $\Omega \to \mathbb{R}$ jotka toteuttavat kyseisen avaruuden määrittelevän ehdon. Jatkossa käytetään myös merkintää $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, millä tarkoitetaan vektoriarvoisten funktioiden $\Omega \to \mathbb{R}^n$ avaruutta, jossa jokainen komponenttikuvaus kuuluu avaruuteen $W^{k,p}(\Omega)$. Sobolev-avaruuksien kohdalla käytetään myös alaviitettä $_{\mathrm{loc}}$, joka tarkoittaa samaa kuin avaruuden L^p tapauksessa, eli kuulumista avaruuteen $W^{k,p}(K)$ kaikilla kompakteilla $K \subset \Omega$.

Määritelmä 1.2.8 (ACL). Funktio $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ on *ACL* (absolutely continuous on lines), jos kaikilla $j = 1, \dots, n$ ja m_{n-1}-melkein kaikilla koordinaateilla $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, joilla vastaava suora L leikkaa aluetta Ω, kuvaus $t \mapsto u(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$ on absoluuttisesti jatkuva kaikilla kompakteilla väleillä $[a, b]$, joilla $\{x_1\} \times \cdots \{x_{j-1}\} \times [a, b] \times \{x_{j+1}\} \cdots \{x_n\} \subset L \cap \Omega$.

Lause 1.2.9 (ACL-karakterisaatio). *Kuvaus $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ kuuluu avaruuteen $W^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos sillä on edustaja $\tilde{u}$, joka on ACL siten, että $\tilde{u}$ ja tavalliset osittaisderivaatat $\partial_j \tilde{u}$ kuuluvat avaruuteen L^p, sekä $\partial_j u = \partial_j \tilde{u}$ melkein kaikkialla.*

Seuraavat käsitteet ja tulokset niin sanotuista konvoluutioapproksimaatioista ovat tarpeellisia muun muassa todistettaessa aiemmin mainittua sileiden funktioiden tiheyttä Sobolev-avaruuksissa. Ne ovat myös teknisiä apuvälineitä, joita tarvitaan myöhemmin edetessä kohti tutkielman päätuloksia.

Määritelmä 1.2.10 (Silottajaydin). Olkoon

$$J(x) := \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

jolloin $J \in C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt} J = \overline{B(0,1)}$, $J \geq 0$ ja $\int_{\mathbb{R}^n} J = 1$ kun valitaan vakio $C = (\int_{B(0,1)} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}})^{-1}$. Määritellään lisäksi kaikilla $\varepsilon > 0$ yleinen *silottajaydin* $J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} J(\frac{x}{\varepsilon})$, jolloin selvästi $J_\varepsilon \geq 0$ on sileä, $\operatorname{spt} J_\varepsilon = \overline{B(0, \varepsilon)}$ ja myös se integroituu ykköseksi.

Määritelmä 1.2.11 (Silotus). Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Funktion u *silotus* on konvoluutio

$$(J_\varepsilon * u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x - y) u(y) dy,$$

kun J_ε on silottajaydin kuten yllä. Jatkossa funktion *konvoluutioapproksimaatiolla* tarkoitetaan tällaista silotusta, mikä seuraavan lauseen mukaan on mielekäs nimitys.

LAUSE 1.2.12. (1) *Funktiolle $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ silotus $J_\varepsilon * u$ on sileä funktio, ja kaikilla $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$\partial^\alpha (J_\varepsilon * u) = (\partial^\alpha J_\varepsilon) * u.$$

(2) *Jos $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, niin myös $(J_\varepsilon * u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|J_\varepsilon * u\|_p \le \|u\|_p \text{ ja } \|J_\varepsilon * u - u\|_p \to 0$$

kun $\varepsilon \to 0$. Erityisesti silotus suppenee funktioon u pisteittäin melkein kaikkialla.

(3) *Jos u on lisäksi jatkuva, niin silotus $J_\varepsilon * u$ suppenee siihen lokaalisti tasaisesti kun $\varepsilon \to 0$.*

(4) *Jos funktiolla $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ on (heikko) derivaatta $\partial^\alpha u$, niin kaikilla $\varepsilon \in (0, d(x, \partial\Omega))$*

$$\partial^\alpha (J_\varepsilon * u)(x) = (J_\varepsilon * \partial^\alpha u)(x).$$

LAUSE 1.2.13 (Ykkösen ositus). *Olkoon $\mathscr{U}$ alueen Ω avoin peite. Tällöin on olemassa kuvausperhe $\mathscr{F}$ sileitä, kompaktikantajaisia ja ei-negatiivisia funktioita f siten, että*

(1) *kaikilla $f \in \mathscr{F}$ on $U \in \mathscr{U}$ jolle $\operatorname{spt} f \subset U$,*
(2) *jokaisella kompaktilla $K \subset \Omega$ on vain äärellisen monta kuvausta $f \in \mathscr{F}$ jolle $\operatorname{spt} f \cap K \neq \emptyset$,*
(3) *kaikilla $x \in \Omega$ pätee $\sum_{f \in \mathscr{F}} f(x) = 1$.*

Seuraavat Sobolevin epäyhtälöt ovat Sobolev-avaruuksien perustyökaluja, joita tarvitaan useaan otteeseen tässä tutkielmassa:

LAUSE 1.2.14 (Sobolevin upotuslause, $p < n$). *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$, missä $1 \le p < n$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$u \in L^{p*}_{\text{loc}}(\Omega),$$

missä $p* = \frac{np}{n-p}$.

LAUSE 1.2.15 (Sobolevin upotuslause, $p > n$). *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$, missä $p > n$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus v siten, että kaikilla $v = u$ melkein kaikkialla ja $U \subset\subset \Omega$ on olemassa vakio $C = C(p, n, U)$ jolle*

$$|v(x) - v(y)| \le C|x - y|^{1 - \frac{n}{p}} \|\nabla u\|_p$$

kaikilla $x, y \in U$.

LAUSE 1.2.16 (Poincaré'n epäyhtälö). *Olkoon $u \in W^{1,1}(B)$, missä $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ on pallo. Jos $|\nabla u| \in L^p(B)$ jollain $p > 1$, niin myös $u \in L^p(B)$ ja pätee epäyhtälö*

$$\int_B |u(x) - u_B|^p dx \le C(p, n) r^p \int_B |\nabla u(x)|^p dx,$$

missä $C = C(p,n)$ on luvuista p,n riippuva vakio.

MÄÄRITELMÄ 1.2.17. Lineaarikuvaukselle $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja sitä vastaavalle matriisille A määritellään *operaattorinormi*

$$|L| = |A| \coloneqq \sup\{|Lx| : |x| \leq 1\} = \max\{|Lx| : |x| \leq 1\}.$$

Helposti nähdään, että matriisin operaattorinormi on vähintään yhtä suurta kuin mikä tahansa sen rivi- tai sarakevektorien normeista. Tämä onnistuu kuvaamalla rivivektoria $a_j \neq 0$ varten yksikkövektori $\frac{a_j}{|a_j|}$, ja sarakevektoria b_j varten yksinkertaisesti standardikantavektori e_j. Toisaalta operaattorinormi on aina korkeintaan yhtä suurta kuin matriisin alkioista muodostetun $\mathbb{R}^{nm}$-vektorin euklidinen normi.

LEMMA 1.2.18 (Hadamardin matriisiepäyhtälö, **[IM]** 9.9). *Olkoon A $(n \times n)$-matriisi, jonka sarakevektorit ovat $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}^n$. Tällöin pätee epäyhtälö*

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} |a_j|.$$

Koska determinanteille on voimassa lisäksi $\det A^\intercal = \det A$*, pätee sama myös rivivektoreille.*

Tässä työssä kyseessä olevat lineaarikuvaukset ovat pääasiassa Sobolev-avaruuden kuvausten (heikkoja) differentiaaleja, joiden operaattorinormit ja determinantit esiintyvät äärellisen väännön kuvauksen määrittelevässä epäyhtälössä, kuten seuraavassa luvussa tullaan näkemään.

LEMMA 1.2.19 (Jensenin epäyhtälö). *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko jolle $0 < |E| < \infty$ ja $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ konveksi funktio. Tällöin kaikille ei-negatiivisille funktioille $f \in L^1(E)$ pätee*

$$\Phi\Big(\fint_E f\Big) \leq \fint_E \Phi \circ f.$$

LAUSE 1.2.20 (McShane-Whitney). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ L-Lipschitz-kuvaus, eli*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \text{ kaikilla } x,y \in A.$$

Tällöin kuvauksella f on olemassa Lipschitz-jatkuva jatke F koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$, jonka Lipschitz-vakio on $\sqrt{m}L$. Siis kaikilla $x \in A$ $F(x) = f(x)$ ja

$$|F(x) - F(y)| \leq \sqrt{m}L|x-y| \text{ kaikilla } x,y \in \mathbb{R}^n.$$

TODISTUS. Olkoon ensin $m = 1$ ja f siis reaaliarvoinen kuvaus. Tällöin saadaan jatkeelle F sama Lipschitz-vakio L: Määritellään

$$F(x) \coloneqq \inf_{a \in A}\{f(a) + L|x-a|\}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin selvästi $F|_A = f$, sillä jos $x \in A$, niin $F(x) \leq f(x) + L|x-x| = f(x)$, ja koska f on L-Lipschitz niin $f(x) \leq f(a) +$

$L|x-a|$ kaikilla $a \in A$, mistä seuraa $f(x) \leq F(x)$ ottamalla infimum yli joukon A.

Olkoot sitten $x, y \in \mathbb{R}^n$. Jos $F(x) \geq F(y)$, niin

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| = F(x)-F(y) &= \inf_{a\in A}\{f(a)+L|x-a|\} - F(y)\\ &\leq \inf_{a\in A}\{f(a)+L|x-y|+L|y-a|\} - F(y)\\ &= L|x-y| + F(y) - F(y) = L|x-y|,\end{aligned}$$

joten myös F on L-Lipschitz.

Jos $m \geq 2$, niin erityisesti funktion f komponenttikuvaukset $f_1, \ldots, f_m$ ovat myös L-Lipschitz-jatkuvia, ja siten jatkamalla jokainen näistä reaaliarvoisista kuvauksista koko avaruuteen Lipschitz-kuvauksiksi $F_1, \ldots, F_m$ kuten edellä saadaan jatkeelle $F = (F_1, \ldots, F_m)$

$$\begin{aligned}|F(x)-F(y)| &= \Big(\sum_{j=1}^{m} |F_j(x)-F_j(y)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \Big(mL^2|x-y|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m}L|x-y|\end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$.

□

Edellisessä lauseessa esiintyvä luku $\sqrt{m}$ ei ole välttämätön arvio jatkeen Lipschitz-vakiolle, vaan myös vektoriarvoinen L-Lipschitz-kuvaus voidaan jatkaa koko avaruuteen Lipschitz-kuvaukseksi, jolla on sama Lipschitz-vakio L. Tämä onnistuu esimerkiksi käyttämällä edellisen McShane-Whitney-jatkeen sijasta Kirszbraunin jatketta ([**He1**] 2.5).

Tunnetusti Lipschitz-kuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ovat melkein kaikkialla differentioituvia, katso esim. [**Ko**] 7.7 ja 7.9. Siten seuraavan lauseen kuvauksen Jacobi J_f on määritelty melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Lause 1.2.21 (Sard, [**HenK**] lause A.37). *Olkoon $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva kuvaus. Tällöin kun F on sen kriittisten pisteiden joukko, eli*

$$F := \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\},$$

niin $|f(F)| = 0$.

Lause 1.2.22 ([**Ev**] 2.2.1 (*b*)). *Olkoon $\varphi \in C_C(\mathbb{R}^n)$. Tällöin on olemassa $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ siten, että*

$$\Delta u = \partial_1^2 u + \cdots + \partial_n^2 u = \varphi.$$

1.3. Maksimaalifunktio ja Hausdorff-sisältö

Tässä kappaleessa määritellään kuvauksen u maksimaalifunktion Mu käsite, sekä läpikäydään pääasiassa todistuksineen siihen liittyviä, huomattavan teknisiäkin aputuloksia. Maksimaalifunktio on erittäin hyödyllinen työkalu monella analyysin alalla, ja kappaleen tulokset voidaan usein muotoilla selvästi yleisempiinkin tilanteisiin. Tässä tarkoituksena on kuitenkin saada käyttöön juuri tutkielman päätulosten kannalta tarpeelliset ominaisuudet maksimaalifunktiolle sekä $\{Mu > t\}$-tyyppisten joukkojen Hausdorff-sisällöille $\mathscr{H}^s_\infty$. Tulokset perustuvat teoksiin [**HenK**] ja [**HKM**] sekä artikkelin [**Ad**] ratkaisevan tärkeään arvioon.

MÄÄRITELMÄ 1.3.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Funktion u (s,p)-*maksimaalifunktio* on

$$M_{\Omega,s,p}u(x) \coloneqq \sup_{x\in B(y,r)\subset\Omega} \Big(|B(y,r)|^{-s} \int_{B(y,r)} |u(z)|^p dz\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Jos $\Omega = \mathbb{R}^n$, niin jätetään maksimaalifunktion merkinnässä tämä alaindeksi pois, samoin jos $p = 1$ tai $s = 1$. Erityisesti siis

$$Mu(x) = \sup_{x\in B(y,r)} \fint_{B(y,r)} |u(z)|dz.$$

HUOMAUTUS 1.3.2. Joskus maksimaalifunktiolle M_Ω käytetään vaihtoehtoisesti keskistettyä (Hardy-Littlewood-)määritelmää

$$M^C_\Omega u(x) \coloneqq \sup_{0<r<|d(x,\partial\Omega)|} \fint_{B(x,r)} |u(z)|dz.$$

Jos $\Omega = \mathbb{R}^n$, nämä maksimaalifunktiot ovat verrannollisia, pätee

$$M^C u(x) \le Mu(x) \le 2^n M^C u(x).$$

Lisäksi Lebesgue'n differentiointilauseen nojalla $M^C_\Omega u(x) \ge |u(x)|$ melkein kaikkialla, ja sama pätee tietenkin myös ei-keskitetylle maksimaalifunktiolle.

LEMMA 1.3.3. *Olkoon $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Kaikilla $t > 0$ pätee*

$$|\{M_\Omega u > t\}| \le \frac{5^n}{t} \int_{\{M_\Omega u > t\}} |u|.$$

TODISTUS. Olkoon $t > 0$. Jos $\int_{\{M_\Omega u>t\}} |u| = \infty$, väitteessä ei ole todistettavaa. Oletetaan siis integraali äärelliseksi. Määritelmän mukaan kaikille $x \in \{M_\Omega u > t\}$ on olemassa pallo $B \subset \Omega$, joka sisältää pisteen x siten, että

$$\fint_B |u| > t,$$

joten $|B| < \frac{1}{t}\int_B |u|$. Jos $y \in B$, kelpaa sama pallo selvästi osoittamaan että myös $M_\Omega u(y) > t$ ja siten $B \subset \{M_\Omega u > t\}$. Siten näille palloille

$$|B| < \frac{1}{t}\int_B |u| \leq \frac{1}{t}\int_{\{M_\Omega u > t\}} |u| < \infty$$

ja myös näiden pallojen säteet ovat rajoitettuja, joten voidaan käyttää peitelausetta 1.2.1. Siis näistä palloista B, jotka peittävät joukon $\{M_\Omega u > t\}$, löydetään jono $B_1, B_2, \ldots$ pistevieraita palloja jolle $\{M_\Omega u > t\} \subset \bigcup_j 5B_j$. Tällöin

$$\begin{aligned} |\{M_\Omega u > t\}| &\leq \sum_j |5B_j| = 5^n \sum_j |B_j| \\ &\leq \frac{5^n}{t}\sum_j \int_{B_j} |u| \leq \frac{5^n}{t}\int_{\{M_\Omega u > t\}} |u|. \end{aligned}$$ □

Lähes samalla päättelyllä kuin edellisen lemman todistuksessa saadaan vastaava arvio myös joukon $\{M_{s,p}u > t\}$ s-sisällölle:

LEMMA 1.3.4. *Olkoon $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Kaikilla $t > 0$ pätee*

$$\mathscr{H}^s_\infty(\{M_{s,p}u > t\}) \leq \frac{10^n}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p.$$

LEMMA 1.3.5. *Olkoon $B = B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ pallo ja $u \in W^{1,1}(3B)$ kuvaus, jonka kaikki pisteet ovat Lebesgue-pisteitä. Määritellään kaikilla $\lambda > 0$*

$$F_\lambda := \{x \in B : M_{3B}|\nabla u|(x) < \lambda\}.$$

Tällöin on olemassa vakio $C = C(n) > 0$ jolle $u|_{F_\lambda}$ on $C\lambda$-Lipschitz. Lisäksi

$$\lambda|B \setminus F_\lambda| \to 0 \text{ kun } \lambda \to \infty.$$

TODISTUS. Olkoot $x, y \in F_\lambda$ eri pisteitä ja $r = |x - y|$. Merkitään $B_j = B(x, 2^{-j}r)$ kun $j \geq 0$ ja $B_j = B(y, 2^{j+1}r)$ kun $j < 0$, siis $x-$ ja y-keskisiä palloja joille $\lim_{j\to\infty} u_{B_j} = u(x)$ ja vastaavasti $u(y)$ kun $j \to -\infty$. Tällöin voidaan näiden erotusta arvioida teleskooppisummaa, pallojen sisäkkäisyyksiä, yhtälöä $|2B| = 2^n|B|$ ja Poincaré'n epäyhtälöä käyttäen

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} |u_{B_{j-1}} - u_{B_j}| \\ &\leq \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|B_{j-1}|}\int_{B_{j-1}} |u - u_{B_j}| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} |u - u_{B_{j-1}}| \\ &+ |u_{B_0} - u_{B_0\cap B_1}| + |u_{B_1} - u_{B_0\cap B_1}| \\ &\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{|B_j|}\int_{B_j} |u - u_{B_j}| \leq 2C\sum_{-\infty}^{\infty} 2^{-|j|}r \fint_{B_j} |\nabla u| \\ &\leq 8Cr\lambda, \end{aligned}$$

sillä määritelmän nojalla kaikilla palloilla B_j on $\fint_{B_j} |\nabla u| \leq \lambda$ kun $x, y \in F_\lambda$. Siten u todella on $C(n)\lambda$-Lipschitz joukossa F_λ, ja lisäksi lemman 1.3 nojalla

$$\lambda|B \setminus F_\lambda| \leq \lambda|\{M_{3B}|\nabla u| > \frac{\lambda}{2}\}| \leq 5^n 2 \int_{\{M_{3B}|\nabla u| > \frac{\lambda}{2}\}} |\nabla u| \to 0.$$

$\square$

LEMMA 1.3.6. *Olkoon $p > 1$, $\lambda > 0$ ja $u \in L^p(\Omega)$. Tällöin jollain vakiolla $C = C(n,p)$ maksimaalifunktiolle pätee epäyhtälö*

$$\int_{\{M_\Omega u > \lambda\}} (M_\Omega u)^p \leq C \int_{\{|u| > \frac{\lambda}{2}\}} |u|^p.$$

TODISTUS. Käyttämällä Fubinia saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\{M_\Omega u > \lambda\}} (M_\Omega u)^p &= \int_{\{M_\Omega u > \lambda\}} \int_0^{M_\Omega u(x)} p t^{p-1} dt dx \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{\{M_\Omega u > \max(\lambda, t)\}} dx dt \\
&= p \int_0^\lambda t^{p-1} \int_{\{M_\Omega u > \lambda\}} dx dt + p \int_\lambda^\infty t^{p-1} \int_{\{M_\Omega u > t\}} dx dt \\
&= \lambda^p |\{M_\Omega u > \lambda\}| + p \int_\lambda^\infty t^{p-1} |\{M_\Omega u > t\}| dt.
\end{aligned}$$

Olkoon luvulle $\mu > 0$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & |u(x)| \geq \frac{\mu}{2} \\ 0, & |u(x)| < \frac{\mu}{2}. \end{cases}$$

Tällöin $|u| \leq |\tilde{u}| + \frac{\mu}{2}$ ja samoin $M_\Omega u \leq M_\Omega \tilde{u} + \frac{\mu}{2}$, joten lemman 1.3 nojalla saadaan

$$|\{M_\Omega u > \mu\}| \leq |\{M_\Omega \tilde{u} > \frac{\mu}{2}\}| \leq \frac{5^n 2}{\mu} \int_\Omega |\tilde{u}| = \frac{C}{\mu} \int_{|u| > \frac{\mu}{2}} |u|.$$

Tällöin siis

$$
\begin{aligned}
&\int_{\{M_\Omega u>\lambda\}} (M_\Omega u)^p \\
&\leq C\lambda^{p-1} \int_{\{|u|>\frac{\lambda}{2}\}} |u(x)|dx + C\int_\lambda^\infty t^{p-2} \int_{\{|u|>\frac{t}{2}\}} |u(x)|dxdt \\
&\leq C\int_{\{|u|>\frac{\lambda}{2}\}} |u(x)|^p dx + C\int_\lambda^\infty \int_{\{|u|>\frac{t}{2}\}} |v(x)|^{p-1} dxdt \\
&= C\int_{\{|u|>\frac{\lambda}{2}\}} |u(x)|^p dx + C\int_{\{|u|>\frac{\lambda}{2}\}} |u(x)|^{p-1} \int_\lambda^{2|u(x)|} dtdx \\
&\leq C\int_{\{|u|>\frac{\lambda}{2}\}} |u(x)|^p dx. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Lemma 1.3.7. *Olkoon $u \in C_C^\infty(B(x_0, R))$ ja $p \in (n-1, n]$, $n \geq 2$. Tällöin on olemassa vakio $C = C(n, p)$ siten, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|u(x)| \leq CR^{1-\frac{n}{p}+\frac{1}{p}} M_{1,p}\nabla u(x).$$

Todistus. Voidaan olettaa $x_0 = 0$. Kun $x \in \mathbb{R}^n$ on kiinteä, niin kuvaus $f(t) = ⨍_{B(x,t)} u(y)dy$ on selvästi jatkuvasti differentioituva joukossa $(0, \infty)$. Lebesgue'n differentiointilauseen nojalla $f(0) = u(x)$ kun $t = 0$ ja lisäksi $f(t) \to 0$ kun $t \to \infty$. Siten $\int_0^\infty f'(t)dt = -u(x)$, mistä muuttujanvaihdolla saadaan

$$u(x) = -\int_0^\infty (\frac{d}{dt} ⨍_{B(0,1)} u(x+tz)dz)dt = -\int_0^\infty ⨍_{B(0,1)} \langle \nabla u(x+tz), z\rangle dzdt.$$

Tästä saadaan suora arvio $|u(x)| \leq \int_0^\infty ⨍_{B(0,1)} |\nabla u(x+tz)|dzdt$, ja edelleen muuttujanvaihdolla $y = x + tz$ pisteelle $x \in B(0, R)$

$$
\begin{aligned}
&|u(x)| \leq \int_0^\infty ⨍_{B(x,t)} |\nabla u(y)|dydt \\
&\leq \int_0^{3R} (⨍_{B(x,t)} |\nabla u(y)|^p dy)^{\frac{1}{p}} dt + \int_{3R}^\infty ⨍_{B(x,t)} |\nabla u(y)|dydt \\
&\leq C\int_0^{3R} \big(r^{1-n} r^{-1} \int_{B(x,t)} |\nabla u(y)|^p dy\big)^{\frac{1}{p}} dt + C\int_{B(0,R)} |\nabla u(y)|dy \int_{3R}^\infty r^{-n} dr \\
&\leq CM_{1,p}\nabla u(x) \int_o^{3R} r^{\frac{1-n}{p}} dt + CR^{1-n} \int_{B(0,R)} |\nabla u(y)|dy \\
&\leq CM_{1,p}\nabla u(x) R^{\frac{1-n+p}{p}} + CR\big(⨍_{B(0,R)} |\nabla u(y)|^p dy\big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq CM_{1,p}\nabla u(x) R^{\frac{1-n+p}{p}} + CR^{\frac{p-n+1}{p}} \big(R^{-1} \int_{B(0,R)} |\nabla u(y)|^p dy\big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq CR^{1-\frac{n}{p}+\frac{1}{p}} M_{1,p}\nabla u(x). \qquad \square
\end{aligned}
$$

LEMMA 1.3.8. *Olkoon $B = B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ pallo, $n \geq 2$ ja $u \in W_0^{1,q}(B)$ jatkuva kuvaus, missä $q \in (n-1, n]$. Tällöin on olemassa vakio $C = C(n,p) > 0$ siten, että kaikilla $t > 0$*

$$\mathscr{H}^1_\infty(\{x \in B : |u(x)| > t\}) \leq \frac{C}{t^q} R^{p-n+1} \int_B |\nabla u|^q.$$

TODISTUS. Oletetaan ensin lisäksi että u on paitsi jatkuva, myös sileä ja kompaktikantajainen pallossa B. Tällöin arvio saadaan helposti lemmoista 1.3.4 ja 1.3.7: Kun $|u(x)| > t$, on jälkimmäisen nojalla

$$M_{1,p} \nabla u(x) > CtR^{\frac{n-1}{p}-1}.$$

Siten lemmaa 1.3.4 käyttämällä

$$\mathscr{H}^1_\infty(\{|u(x)| > t\}) \leq \mathscr{H}^1_\infty(\{M_{1,p}\nabla u(x) > CtR^{\frac{n-1}{p}-1}\}) < \frac{C}{t^q} R^{p-n+1} \|\nabla u\|_q^q.$$

Olkoon sitten u kuten oletuksessa ja $(u_j)_j \in C_C^\infty(B)$ jono jolle $u_j \to u$ avaruudessa $W^{1,q}$. Koska u on jatkuva, voidaan lisäksi olettaa, että $u_j \to u$ tasaisesti. Siten suurilla j pätee $\{|u(x)| > t\} \subset \{|u_j(x)| > \frac{t}{2}\}$, mistä väite seuraa rajalla ottamalla vakioon C mukaan luku 2^q. $\square$

LEMMA 1.3.9 ([**Ad**] lause B). *On olemassa vakio $C > 0$ siten, että kaikilla $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ja $t > 0$ pätee*

$$\int_0^\infty \mathscr{H}^1_\infty(\{x \in \mathbb{R}^2 : M^C\varphi(x) > t\})dt \leq C \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \varphi(x)| dx.$$

LEMMA 1.3.10. *Olkoon $B = B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^2$ ja $u \in W_0^{1,1}(B)$ jatkuva kuvaus. On olemassa vakio $C > 0$ siten, että kaikilla $t > 0$*

$$\mathscr{H}^1_\infty(\{x \in B : |u(x)| > t\}) \leq \frac{C}{t} \int_B |\nabla u|.$$

TODISTUS. Selvästi voidaan olettaa $u \in C_C^\infty(B)$ kuten lemman 1.3.8 todistuksessakin. Nyt lemmasta 1.3.9 saadaan

$$\begin{aligned}
&t\mathscr{H}^1_\infty(\{x \in B : |u(x)| > t\}) \\
&\leq t\mathscr{H}^1_\infty(\{x \in \mathbb{R}^2 : M^C u(x) > t\}) \\
&\leq \int_0^t \mathscr{H}^1_\infty(\{x \in \mathbb{R}^2 : M^C u(x) > s\})ds \\
&\leq C\|\nabla u\|_1.
\end{aligned}$$

$\square$

LUKU 2

Funktioavaruuksia

Tässä luvussa määritellään tutkielmassa pääroolia näyttelevä äärellisen väännön kuvausten luokka sekä muita hieman erilaisia funktioavaruuksia. Tutkielman aihe kuuluu geometrisen funktioteorian alueeseen, joka tarkastelee erityisesti näitä funktioavaruuksia, niiden ominaisuuksia sekä pohjalla olevien avaruuksien geometriaa sopivia kuvauksia käyttämällä. Kompleksianalyysistä tutut konformikuvaukset toteuttavat topologisten lisäksi myös hyödyllisiä geometrisia ominaisuuksia, minkä takia niille on pyritty löytämään vähemmän rajoittavia yleistyksiä. Tällaisia funktioluokkia ovat muun muassa kvasikonformikuvaukset, sekä näitäkin yleisemmät rajoitetun ja äärellisen väännön kuvaukset. Luku perustuu hajanaisesti lähteisiin [**HenK**], [**IM**], [**Vä**], [**Ri**], [**HK**] ja [**He2**]

2.1. Rajoitetun ja äärellisen väännön kuvaukset

Rajoitetun ja äärellisen väännön kuvaukset määritellään seuraavien *vääntöepäyhtälöiden* avulla:

MÄÄRITELMÄ 2.1.1. Kuvaus $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ on *rajoitetun väännön kuvaus* tai *K-kvasisäännöllinen*, jos on olemassa vakio $K \geq 1$ siten, että vääntöepäyhtälö

$$|Df(x)|^n \leq K J_f(x)$$

on voimassa melkein kaikilla $x \in \Omega$.

MÄÄRITELMÄ 2.1.2. Olkoon $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Kuvaus f on *äärellisen väännön kuvaus*, jos sen Jacobin determinantille $J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja on olemassa *vääntöfunktio* $K_f \colon \Omega \to [1, \infty]$ siten, että $K_f < \infty$ melkein kaikkialla ja pätee vääntöepäyhtälö

$$|Df(x)|^n \leq K_f(x) J_f(x)$$

melkein kaikilla $x \in \Omega$.

HUOMAUTUS 2.1.3. Rajoitetun ja äärellisen väännön määritelmistä nähdään heti, että (heikon) Jacobin on oltava ei-negatiivista melkein kaikkialla, sillä $0 \leq |Df(x)|^n \leq K_f(x) J_f(x)$ melkein kaikilla $x \in \Omega$. Tunnetusti determinantin ominaisuuksista seuraa, että esimerkiksi vaihtamalla kuvauksen kaksi komponenttikuvausta keskenään sen Jacobin merkki muuttuu. Siten vääntöepäyhtälön toteuttavat vain "puolet"muuten samoin käyttäytyvistä kuvauksista, ja rajoitetun tai äärellisen väännön kuvaukset ovat näistä täsmälleen niin sanotusti suunnan säilyttävät (kappaleet 4.1, 4.2). Äärellisen väännön kuvaukselle f optimaalinen vääntöfunktio voidaan määritellä kaavalla

$$K_f(x) = \begin{cases} \frac{|Df(x)|^n}{J_f(x)}, & J_f(x) > 0 \\ 1, & J_f(x) = 0. \end{cases}$$

Hadamardin epäyhtälön 1.2.18 nojalla kaikilla $x \in \Omega$ pätee $|J_f(x)| = |\det Df(x)| \leq |Df(x)|^n$, minkä takia välttämättä $K_f \geq 1$. Sekä rajoitetun että äärellisen väännön kuvaukselle tulee erityisesti differentiaalin Df olla nollakuvaus melkein kaikkialla joukossa $\{J_f = 0\}$.

Esimerkki 2.1.4. Lineaarikuvaus $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on rajoitetun ja äärellisen väännön kuvaus täsmälleen silloin, kun se on kääntyvä ja suunnansäilyttävä, eli $\det A > 0$, tai nollakuvaus. Sama pätee affiinille lineaarikuvaukselle, sillä molempien differentiaali on joka pisteessä kuvaus itse (siirtoa vaille). Siten ei-kääntyvän lineaarikuvauksen on oltava nollakuvaus, tai muuten sen differentiaalin operaattorinormi on positiivista ja vääntö siten kaikkialla ääretöntä.

Selvästi kvasisäännölliset kuvaukset ovat myös äärellisen väännön kuvauksia, joille pätee erityisesti $K_f = K \in L^\infty$. Käydään läpi joitain näiden kuvausten perustuloksia ilman todistusta: Olkoon $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ K-kvasisäännöllinen.

(1) Kuvauksella f on lokaalisti $\frac{1}{K}$-Hölder-jatkuva edustaja.
(2) Jatkuva edustaja on joko vakio tai diskreetti ja avoin.
(3) Jatkuva edustaja toteuttaa Lusinin (N)-ehdon, eli jos $A \subset \Omega$ on nollamittainen, niin myös sen kuva $f(A)$ on. Lisäksi mikäli f ei ole vakiokuvaus, myös jokaisen nollamittaisen $B \subset \mathbb{R}^n$ alkukuva $f^{-1}(B)$ on nollamittainen. Tästä seuraa erityiseisti $J_f > 0$ melkein kaikkialla.

Topologiset väitteet (1) ja (2) ovat voimassa myös äärellisen väännön kuvauksille tietyillä oletuksilla. Tässä tutkielmassa todistetaan nämä ominaisuudet, mikä riittää osoittamaan väitteet myös kaikille rajoitetun väännön kuvauksille. Myös Lusinin (N)-ehto on voimassa kyllin säännöllisille äärellisen väännön kuvauksille. Kun vääntöepäyhtälön K on vakion sijaan funktio $\Omega \to [1, \infty]$, on tehtävä lisäoletuksia sen integroituvuudesta sekä mahdollisesti oletettava $f \in W^{1,n}$ myös äärellisen väännön tapauksessa. Seuraavissa luvuissa nähdään vastaesimerkkien avulla jatkuvuuden, diskreettisyyden ja avoimuuden todella vaativan yleiseltä $W^{1,1}$-kuvaukselta muutakin kuin pelkän äärellisen väännön. Nämä esimerkit tulevat siten edellä mainitun nojalla olemaan äärellisen, mutta rajoittamattoman väännön kuvauksia. Annetaan näiden käsitteiden helpottamiseksi jo tässä yksinkertaisempi esimerkki tällaisesta kuvauksesta:

Esimerkki 2.1.5. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeomorfismi
$$f(x,y) = (x^3, y),$$
joka kuuluu sileänä funktiona selvästi avaruuteen $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Sen differentiaali pisteessä $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on
$$Df = \begin{bmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
ja Jacobi $J_f(x,y) = 3x^2 \geq 0$, joka on selvästi lokaalisti integroituva. Nyt $|Df(x,y)| \geq 1$, eli vakiosta $K \geq 1$ riippumatta vääntöepäyhtälö
$$1 \leq |Df|^2 \leq KJ_f = 3Kx^2$$
ei ole voimassa jossain y-akselin ympäristössä, tai vaihtoehtoisesti kun $|(x,y)| \to \infty$ sillä tällöin $|Df|^2 = 9x^4$. Siten määritelmän mukaan f ei ole rajoitetun väännön kuvaus. Kuitenkin valitsemalla vääntöfunktio $K_f(x,y) = \max\{3x^2, \frac{1}{3x^2}\}$ nähdään, että $|Df|^2 \leq K_f J_f$, eli f on äärellisen väännön kuvaus. Tällä määrittelyllä y-akselilla $K_f = \infty$, sillä näissä pisteissä $J_f = 0$ ja $|Df| > 0$. Tämä on kuitenkin sallittua sillä suorat ovat m_2-nollamittaisia. Käytännössä f kuvaa tason pallot säteen lähestyessä nollaa ellipseiksi, joiden korkeus ei muutu, mutta leveys joko kutistuu kun $|x| < 1$ tai laajenee kun $|x| > 1$. Selvästi tämä infinitesimaalisten pallojen vääristyminen tai vääntö kasvaa rajatta, kun lähestytään joko y-akselia tai x-koordinaatti kasvaa rajatta.

2.2. Muita funktioluokkia

Käydään vertailun vuoksi lyhyesti ja ilman todistuksia läpi myös muita rajoitetun ja äärellisen väännön kuvauksiin läheisesti liittyviä funktioavaruuksia. Yksi tärkeimpiä viimeisen sadan vuoden analyysin tutkimuksessa on ollut kvasikonformisten funktioiden luokka:

Määritelmä 2.2.1. Homeomorfismi $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, f(\Omega))$ on *kvasikonforminen*, jos se on K-kvasisäännöllinen jollain $K \geq 1$.

Ylläoleva määritelmä kvasikonformikuvaukselle on analyyttinen muotoilu, muiden ollessa seuraavan lauseen metrinen ja geometrinen versio:

Lause 2.2.2 (Kvasikonformisuus, ks. esim. [**Vä**]). *Homeomorfismille $f\colon \Omega \to f(\Omega)$ seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

(1) *Kuvaus f on kvasikonforminen.*
(2) *On olemassa vakio $H \geq 1$ jolle*
$$\limsup_{r\to 0+} \frac{\sup\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \leq r\}}{\inf\{|f(x) - f(y)| : |x-y| \geq r\}} \leq H$$
kaikilla $x \in \Omega$.

(3) *On olemassa vakio* $K \geq 1$ *siten, että kaikilla alueen* Ω *käyräperheillä* Γ *pätee*

$$\frac{1}{K} \operatorname{mod} f(\Gamma) \leq \operatorname{mod} \Gamma \leq K \operatorname{mod} f(\Gamma),$$

missä $\operatorname{mod} \Gamma$ *on infimum integraaleista* $\int_{\mathbb{R}^n} \eta^n$, *kun* $\eta \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *on Borel-kuvaus, jolle* $\int_\beta \eta ds \geq 1$ *jokaisella* $\beta \in \Gamma$.

HUOMAUTUS 2.2.3. Edellinen lause näiden määritelmien ekvivalenttisuudesta on syvällinen tulos, sillä nämä ominaisuudet kertovat monipuolisesti kvasikonformisen kuvauksen käyttäytymisestä. Esimerkiksi geometrisesta määritelmästä eli kohdasta (3) on selvää, että myös kvasikonformisen kuvauksen käänteiskuvaus on kvasikonforminen. Metrinen määritelmä (2) taas tarkoittaa, että infinitesimaalisen pienet pallot $B \subset \Omega$ kuvautuvat rajalla ellipseiksi $f(B)$, joiden eksentrisyys (epäkeskisyys) on rajoitettu vakiolla $H \geq 1$. Vertailun vuoksi äärellisen väännön kuvaukselle tämä eksentrisyys eli kyseisten ellipsien akselien suhde ei välttämättä ole rajoitettua, vaan melkein kaikkialla äärellistä.

Kvasikonformisten kuvausten erikoistapauksia ovat seuraavan määritelmän kvasisymmetriset kuvaukset:

MÄÄRITELMÄ 2.2.4. Homeomorfismi $f \colon \Omega \to f(\Omega)$ on *kvasisymmetrinen*, jos on olemassa vakio $H \geq 1$ siten, että

$$\frac{\sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq r\}}{\inf\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \geq r\}} \leq H$$

kaikilla $x \in \Omega$ ja kaikilla $r > 0$.

Selvästi kvasisymmetrinen kuvaus on myös kvasikonforminen. Toista suuntaa koskee syvällinen tulos, jonka mukaan myös jokainen kvasikonforminen kuvaus $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on kvasisymmetrinen kaikilla $n \geq 2$. Tässä siis pallojen kuvien eksentrisyys on tasaisesti rajoitettua ilman säteen viemistä nollaan, mikä on lähtökohtaisesti paljon vahvempi ominaisuus. Reaalilukusuoralla $\mathbb{R}$ tämä väite ei pidä paikkaansa:

ESIMERKKI 2.2.5. Olkoon $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismi $g(x) = e^x + x$. Tällöin g on kvasikonforminen, sillä kun $x \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen, niin

$$\frac{\sup\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \leq r\}}{\inf\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \geq r\}} = \frac{|e^x + x - e^{x+r} - x - r|}{|e^x + x - e^{x-r} - x + r|}$$

$$= \frac{e^x(e^r - 1) + r}{e^x(1 - e^{-r}) + r} \to 1 \text{ kun } r \to 0+\,.$$

Toisaalta jo pisteelle $x = 0$ saadaan

$$\frac{\sup\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \leq r\}}{\inf\{|g(x) - g(y)| : |x - y| \geq r\}} = \frac{e^r + r - 1}{1 - e^{-r} + r} \to \infty$$

kun säde r kasvaa äärettömiin, joten g ei määritelmän mukaan ole kvasisymmetrinen.

LUKU 3

Jatkuvuus

Tunnetusti Sobolev-avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kuvaukset ovat edustajaa vaille jatkuvia, kun $p > n$. Vastaavasti kun $p < n$, on helppo konstruoida funktio $f \in W^{1,p}(\Omega)$, jolla ei ole missään avoimessa joukossa $U \subset \Omega$ rajoitettua edustajaa, eikä f siten voi olla jatkuva. Seuraavassa esimerkissä nähdään, että oleellinen epäjatkuvuus on mahdollista myös äärellisen väännön kuvaukselle, kun $p < n$. Sobolev-avaruudessa $W^{1,n}(\Omega)$ on myös mahdollista konstruoida jokaisessa avoimessa joukossa rajoittamaton ja siten epäjatkuva funktio, mutta osoittautuu, että nyt oletus äärellisestä väännöstä riittää takaamaan jatkuvan edustajan olemassaolon. Tässä luvussa todistetaan tämä vahva tulos. Samalla todistetaan myös yleisen äärellisen väännön kuvauksen jatkuvuus tilanteessa $p = 1$, kun vaihtoehtoisesti vaaditaan vääntöfunktiolta K_f eksponentiaalinen integroituvuus, eli $\exp(\lambda K_f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ jollain $\lambda > 0$. Luvun käsittely seuraa tiiviisti lähdettä [**HenK**] sekä osittain kirjaa [**Le**] melkein kaikkialla differentioituvuuden osalta.

LEMMA 3.0.6. *Olkoon $g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ aidosti monotoninen, jatkuvasti derivoituva funktio. Tällöin kuvaukselle*

$$f(x) = \frac{x}{|x|} g(|x|), \quad x \neq 0$$

pätee

$$|Df(x)| = \max\{\frac{g(|x|)}{|x|}, |g'(|x|)|\} \textit{ ja } J_f(x) = g'(|x|)\Big(\frac{g(|x|)}{|x|}\Big)^{n-1}$$

melkein kaikilla x.

TODISTUS. Selvästi $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Riittää myös osoittaa tulos vain puolisuoran $\{(t, 0, \dots, 0) : t > 0\}$ pisteille, sillä avaruuden kierroille L pätee $f \circ L = L \circ f$, eli mikä tahansa muu piste $x \neq 0$ saadaan tälle puolisuoralle kierrolla L, joka säilyttää väitteen yhtälöt, sillä

$$|DLx| = |Lx| = 1, \qquad J_L(x) = \det L = 1.$$

Olkoon siis $x = (x_1, 0, \dots, 0)$, $x_1 > 0$. Tällöin ($|t| < x_1$)

$$\partial_1 f_1(x) = \lim_{t \to 0} \frac{g(x_1 + t) - g(x_1)}{t} = g'(x_1) = g'(|x|),$$

ja kun $j \neq 1$ niin

$$\partial_j f_j(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{|x_1e_1+te_j|} g(|x_1e_1+te_j|) - 0}{t} = \frac{g(x_1)}{|x_1|} = \frac{g(|x|)}{|x|},$$

$$\partial_1 f_j(x) = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Samoin selvästi $\partial_j f_i(x) = 0$ kaikilla $j \neq i \neq 1$. Komponenttikuvauksen f_1 muille osittaisderivaatoille saadaan myös

$$\begin{aligned}
\partial_j f_1(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{x_1}{|x_1e_1+te_j|} g(|x_1e_1+te_j|) - g(x_1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{x_1}{|x_1e_1+te_j|} - 1}{t} g(|x_1e_1+te_j|) + \lim_{t\to 0} \frac{g(|x_1e_1+te_j|) - g(x_1)}{t} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sillä käyttämällä l'Hospitalin sääntöä

$$\lim_{t\to 0} \frac{x_1 - |x_1e_1+te_j|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{\sqrt{x_1^2+t^2}} = 0,$$

ja siten yllä keskirivin ensimmäinen raja-arvo on 0, samoin myös toinen käyttämällä ketjusääntöä kuvaukseen $t \mapsto g(|x_1e_1+te_j|)$. On siis saatu laskettua

$$Df(x) = \operatorname{diag}(g'(|x|), \frac{g(|x|)}{|x|}, \ldots, \frac{g(|x|)}{|x|}),$$

joten väitteen yhtälöt seuraavat tästä operaattorinormin ja determinantin määritelmiä vilkaisemalla. □

Edellistä lemmaa käyttämällä voidaan konstruoida esimerkkifunktio avaruuteen $W^{1,p}$, $p < n$, joka on äärellisen väännön kuvaus ja oleellisesti epäjatkuva:

Esimerkki 3.0.7. Olkoon $f\colon B(0,1) \to \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = \frac{x}{|x|}(|x|+1), \quad x \neq 0.$$

Tällöin f on samaa muotoa kuin edellisessä lemmassa, kun funktiona g on $t \mapsto t+1$. Nyt $f(S(0,r)) = S(0,r+1)$ kaikilla $0 < r < 1$, ja f on diffeomorfismi $B(0,1) \setminus \{0\} \to B(0,2) \setminus \overline{B(0,1)}$. Lemman 3.0.6 nojalla

$$|Df(x)| = \frac{|x|+1}{|x|} \text{ ja } J_f(x) = \Big(\frac{|x|+1}{|x|}\Big)^{n-1}.$$

Sobolev-funktioiden ACL-karakterisaation mukaan $f \in W^{1,p}(B(0,1))$ kun $p < n$, sillä selvästi tällöin $|Df(x)| \in L^p(B(0,1))$ ja f on melkein kaikkialla jatkuvasti derivoituva, siis erityisesti absoluuttisesti jatkuva melkein kaikilla suorilla. Samoin $J_f \in L^1(B(0,1))$ ja $J_f(x) > 0$ melkein kaikilla x, joten f on äärellisen väännön kuvaus. Se ei kuitenkaan ole edes edustajaa vaille jatkuva, sillä jokaisessa origon ympäristössä on jokin annulus, joka kuvautuu annulukseksi yksikkökiekon ympärille.

Seuraavan määritelmän funktioavaruudet ovat L^p-avaruuksien laajennuksia, jotka ovat tärkeässä roolissa tässä tutkielmassa ja sen todistuksissa. Erityisesti eksponentiaalisesti integroituvan vääntöfunktion omaavia kuvauksia voidaan tarkastella näiden avaruuksien kautta, mikä osoittautuu myöhemmin riittävän yleiseksi keinoksi myös Sobolev-avaruuden $W^{1,n}$-kuvausten käsittelyyn.

MÄÄRITELMÄ 3.0.8. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $1 \leq p < \infty$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Määritellään *Zygmund-avaruus*

$$L^p \log^\alpha L(\Omega) := \{f \colon \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f(x)|^p \log^\alpha(e + |f(x)|)dx < \infty\}.$$

Vastaavasti kuin L^p-avaruuksille määritellään $f \in L^p \log^\alpha L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, jos $f \in L^p \log^\alpha L(K)$ kaikilla kompakteilla $K \subset \Omega$.

HUOMAUTUS 3.0.9. Tämän ja seuraavan luvun tuloksissa käytetään erityisesti Zygmundin avaruuksia $L^n \log^{-1} L(\Omega)$. Heti huomataan että $L^p(\Omega) \subset L^p \log^{-1} L(\Omega)$ kaikilla p, sillä

$$\int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\log(e + |f(x)|)}dx \leq \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\log(e)}dx = \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$$

kaikilla $f \in L^p(\Omega)$. Toisaalta myös kaikilla $q < p$ nähdään $L^p \log^{-1} L_{loc} \subset L^q_{\mathrm{loc}}$, sillä kun $K \subset \Omega$ on kompakti ja $f \in L^p \log^{-1} L(K)$, niin

$$\int_K |f|^q = \int_K \frac{|f|^p}{\log(e + |f|)} \cdot \frac{\log(e + |f|)}{|f|^{p-q}} < \infty,$$

kun $p - q > 0$ eli $\frac{\log(e+|f|)}{|f|^{p-q}} \to 0$ kun $|f| \to \infty$ ja K on rajoitettu.

3.1. Distributiivinen Jacobi

Jatkuvuuden osoittamiseen tarvitaan seuraavaa distributiivisen Jacobin käsitettä:

MÄÄRITELMÄ 3.1.1. Olkoon $f \in W^{1,\frac{n^2}{n+1}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Määritellään *distributiivinen Jacobi (tai Jacobin determinantti)* distribuutioksi

$$\mathscr{J}_f(\varphi) := -\int_\Omega f_1(x) J(\varphi, f_2, \ldots, f_n)(x)dx$$

kaikille $\varphi \in C^\infty_C(\Omega)$.

HUOMAUTUS 3.1.2. Määritelmän integroituvuusasteella $\frac{n^2}{n+1}$ distributiivinen Jacobi on aina äärellistä kaikilla $\varphi \in C^\infty_C(\Omega)$: Kun $f \in W^{1,\frac{n^2}{n+1}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, niin $p = \frac{n^2}{n+1} < n$ ja Sobolevin upotuslauseen 1.2.14 nojalla

$$f_1 \in L^{p*}_{\mathrm{loc}} = L^{\frac{n\frac{n^2}{n+1}}{n-\frac{n^2}{n+1}}}_{\mathrm{loc}} = L^{n^2}_{\mathrm{loc}}.$$

Tällöin Hadamardin epäyhtälöllä 1.2.18 ja Hölderöimällä saadaan

$$\int_\Omega |f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n)| \le \|f_1\|_{n^2} \||Df|^{n-1}\|_{\frac{n^2}{n^2-1}} \sup_{x\in\Omega} |\nabla\varphi(x)| < \infty,$$

sillä L^p-normit ovat kompaktin joukon spt φ yli ja $(n-1)\frac{n^2}{n^2} = \frac{n^2}{n+1}$.

Distributiivinen Jacobi osoittautuu seuraavissa lemmoissa äärelliseksi myös kun $p = n$, sillä se yhtyy varsinaiseen Jacobiin J_f seuraavassa mielessä:

Lemma 3.1.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Tällöin kaikilla $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ pätee*

$$\mathscr{J}_f(\varphi) = -\int_\Omega f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n) = \int_\Omega \varphi J_f.$$

Todistus. Todistus on suoraviivainen lasku, mutta determinantin kehittäminen sekä tulofunktioiden osittaisderivaatat tuottavat siihen huomattavan pitkiä lausekkeita. Todistetaan väite tapauksessa $n = 2$, sillä jo tästä laskusta huomaa että korkeamman ulottuvuudenkin tapauksessa yhtäsuuruus seuraa vastaavalla argumentilla. Kun siis $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ja $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$, saadaan osittaisintegroimalla ja osittaisderivoinnin järjestystä vaihtamalla

$$\begin{aligned}
\int_\Omega J_f\varphi &= \int_\Omega (\partial_1 f_1 \partial_2 f_2 - \partial_2 f_1 \partial_1 f_2)\varphi \\
&= -\int_\Omega f_1(\partial_1(\partial_2 f_2 \varphi) - \partial_2(\partial_1 f_2 \varphi)) \\
&= -\int_\Omega f_1(\partial_{12} f_2 \varphi + \partial_2 f_2 \partial_1 \varphi - \partial_{21} f_2 \varphi - \partial_1 f_2 \partial_2 \varphi) \\
&= -\int_\Omega f_1(\partial_2 f_2 \partial_1 \varphi - \partial_1 f_2 \partial_2 \varphi) \\
&= -\int_\Omega f_1 J(\varphi, f_2)
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.1.4. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ alue ja $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Tällöin kaikilla $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ pätee*

$$\mathscr{J}_f(\varphi) = -\int_\Omega f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n) = \int_\Omega \varphi J_f.$$

Todistus. Olkoon $(f^j) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ jono jolle $f^j \to f$ avaruudessa $W^{1,n}$. Haluttu yhtäsuuruus saadaan käyttämällä edellistä lemmaa tämän approksimoivan jonon funktioille eli lisäämällä nolla ja menemällä rajalle:

$$
\begin{aligned}
&|\int_\Omega \varphi J_f + \int_\Omega f_1 J(\varphi, f_2, \ldots, f_n)| \\
&\leq \int_\Omega |\varphi(J_f - J_{f^j}) + f_1 J(\varphi, f_2, \ldots, f_n) - f_1^j J(\varphi, f_2^j, \ldots, f_n^j)| \\
&\leq (\|\varphi\|_\infty + 1) \int_{\mathrm{spt}\ \varphi} |J_f - J_{f^j}| + |f_1 J(\varphi, f_2, \ldots, f_n) - f_1^j J(\varphi, f_2^j, \ldots, f_n^j)|.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Nämä integraalit suppenevat nollaan kun $j \to \infty$: Teleskooppisummaa

$$
\begin{aligned}
J_f - J_g &= \sum_{i=1}^n J(f_1, \ldots, f_i, g_{i+1}, \ldots, g_n) - J(f_1, \ldots f_{i-1}, g_i, \ldots g_n) \\
&= \sum_{i=1}^n J(f_1, \ldots, f_i - g_i, \ldots, g_n)
\end{aligned}
$$

käyttämällä saadaan esimerkiksi

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathrm{spt}\,\varphi} |J_f - J_{f^j}| &\leq \int_{\mathrm{spt}\,\varphi} \sum_{i=1}^n |J(f_1, \ldots, f_i - f_i^j, \ldots f_n^j)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n C \int_{\mathrm{spt}\,\varphi} |Df|^{n-1} |\nabla f_i - \nabla f_i^j| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \| |Df|^{n-1} \|_{\frac{n}{n-1}} \|\nabla f_i - \nabla f_i^j\|_n \to 0,
\end{aligned}
$$

kun $\mathrm{spt}\,\varphi$ on kompakti ja $\|f - f^j\|_{1,n} \to 0$. Samankaltainen determinantin hajottaminen osoittaa myös arvion (1) toisen integraalin häviämisen rajalla.

□

Äärellisen väännön $W^{1,n}$-kuvausten jatkuvuuden todistamisessa edellinen lemma on tärkeässä roolissa. Myös yleisten äärellisen väännön kuvausten, joille vääntöfunktio K_f on eksponentiaalisesti integroituva, jatkuvuuden todistaminen vaatii vastaavan tuloksen. Lauseessa 3.1.8 osoitetaan distributiivisen Jacobin yhtyminen tavalliseen myös näille kuvauksille, mikä sitä paitsi riittää myös edellisen lemman väitteen todistukseksi kunhan kuvauksella $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ on lisäksi äärellinen vääntö. Tämän todistamiseksi tarvitaan maksimaalifunktion 1.3.1 käsitettä ja muutama aputulos:

LEMMA 3.1.5. *Olkoon $f \in W^{1,n-\frac{1}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ja $B \subset\subset \Omega$ avoin pallo. Jos $f_1 \in W_0^{1,\infty}(B)$, niin*

$$\int_B J_f = 0.$$

TODISTUS. Jos kuvaus f on sileä, seuraa tulos lemmasta 3.1.3, sillä f_1 voidaan jatkaa nollana pallon B ulkopuolelle, jolloin valitsemalla testifunktio $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ siten, että $\varphi(x) = 1$ kaikilla $x \in B$ saadaan

$$\int_B J_f = \int_B \varphi J_f = \int_\Omega \varphi J_f = -\int_\Omega f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n) = 0.$$

Yleisessä tapauksessa olkoon (f^j) jono sileitä funktioita joille $f^j \to f$ avaruudessa $W^{1,n-\frac{1}{2}}$ ja lisäksi

$$f_1^j \in W_0^{1,\infty}(B) \text{ ja } |\nabla f_1^j| \to |\nabla f_1| \text{ avaruudessa } L^{2n-1}(B).$$

Ensimmäinen lisäehto on mahdollinen oletuksen $f_1 \in W_0^{1,\infty}(B)$ nojalla, ja toinen käyttämällä Hölderin epäyhtälöä sillä $|\nabla f_1^j - \nabla f_1|$ on samoin oleellisesti rajoitettu pallossa B ja

$$\int_B |\nabla f_1^j - \nabla f_1|^{2n-1} \leq \int_B |\nabla f_1^j - \nabla f_1|^{n-\frac{1}{2}} \| |\nabla f_1^j - \nabla f_1|^{n-\frac{1}{2}} \|_\infty \to 0.$$

Nyt käyttämällä teleskooppisummaa Jacobille, Hadamardin epäyhtälöä ja edelleen tavallista (konjugaattiluvuille $2n-1$ ja $\frac{n-\frac{1}{2}}{n-1}$) sekä yleistettyä Hölderiä (konjugaattiluvuille $2n-1$, $\frac{n-\frac{1}{2}}{i-2}$, $n-\frac{1}{2}$ ja $\frac{n-\frac{1}{2}}{n-i}$) saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&\int_B J_f \leq \int_B |J_f - J_{f^j}| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_B |J(f_1^j, \dots, f_{i-1}^j, f_i, \dots, f_n) - J(f_,^j \dots, f_i^j, f_{i+1}, \dots, f_n)| \\
&= \sum_{i=1}^n \int_B |J(f_1^j, \dots, f_{i-1}^j, f_i - f_i^j, f_{i+1}, \dots, f_n| \\
&\leq \int_B |\nabla f_1 - \nabla f_1^j| |Df|^{n-1} \\
&+ \sum_{i=2}^n \int_B |\nabla f_1| |Df|^{i-2} |\nabla f_i - \nabla f_i^j| |Df^j|^{n-i} \\
&\leq \| |\nabla f_1 - \nabla f_1^j| \|_{2n-1} \| |Df|^{n-1} \|_{\frac{n-\frac{1}{2}}{n-1}} \\
&+ \sum_{i=2}^n \| |\nabla f_1| \|_{2n-1} \| |Df|^{i-2} \|_{\frac{n-\frac{1}{2}}{i-2}} \| |\nabla f_i - \nabla f_i^j| \|_{n-\frac{1}{2}} \| |Df^j|^{n-i} \|_{\frac{n-\frac{1}{2}}{n-i}} \\
&\to 0 \text{ kun } j \to \infty.
\end{aligned}$$

□

LEMMA 3.1.6. *Olkoon* $B = B(x_0, 3R) \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $u \in W^{1,1}(B)$ *siten, että* $\int_{B(x_0,R)} u = 0$. *Tällöin on olemassa vakio* $C = C(n, R) > 0$ *siten, että kaikilla* $\lambda > 0$ *ja* $x \in B(x_0, R)$ *pätee: Jos*

$$M_B u(x) > \lambda, \text{ niin } M_B|\nabla u|(x) > C\lambda.$$

TODISTUS. Olkoon $x \in B(x_0, R)$ ja $x \in B_0 \subset B$ pallo siten, että $M_B u(x) \leq 2|u|_{B_0}$. Valitaan äärellinen jono palloja $B_0, B_1, \ldots, B_n = B(x_0, R)$ seuraavasti: Kun $B_0 = B(y, r_1)$, valitaan $B_1 = B(x, r_1)$ ja kun pallo B_j, $j \geq 1$, on valittu, asetetaan $B_{j+1} = B(x, 2r_j)$ niin kauan, kun $2r_j < 2R$. Kun $j \in \mathbb{N}$ siten, että $2r_j \geq 2R$, asetetaan $B_{j+1} = B(x, 2R) \subset B$ ja lopuksi $B_{j+2} = B_n = B(x_0, R)$.

Tällöin pallojen säteille pätee $\sum_{j=0}^{n} r_i \leq 10R$, vaikka olisikin jo $r_1 \geq 2R$. Lisäksi peräkkäisten pallojen leikkaukselle on selvästi olemassa dimensiosta n riippuva vakio $C = C(n) > 0$ siten, että

$$|B_j \cap B_{j+1}| \geq C \max(|B_j|, |B_{j+1}|).$$

Nyt voidaan arvioida käyttämällä teleskooppisummaa, sopivien pallojen sisäkkäisyyttä, Poincaré'n epäyhtälöä ja tietoa $u_{B_n} = 0$

$$\begin{aligned}
M_B u(x) &\leq 2|u|_{B_0} \leq 2 \fint_{B_0} |u - u_{B_0}| + 2|u_{B_0}| \\
&\leq 2 \fint_{B_0} |u - u_{B_0}| + 2 \sum_{j=0}^{n-1} |u_{B_j} - u_{B_{j+1}}| \\
&\leq Cr_1 \fint_{B_0} |\nabla u| + 2|u_{B_0} - u_{B_0 \cap B_1}| + 2|u_{B_1} - u_{B_0 \cap B_1}| \\
&+ 2 \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{|B_j|} \int_{B_j} |u - u_{B_{j+1}}| + \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} |u - u_{B_{n-1}}| \\
&\leq Cr_1 \fint_{B_0} |\nabla u| + \frac{2}{|B_0 \cap B_1|} \int_{B_0 \cap B_1} (|u - u_{B_0}| + |u - u_{B_1}|) \\
&+ \sum_{j=1}^{n-2} \frac{C}{|B_{j+1}|} \int_{B_{j+1}} |u - u_{B_{j+1}}| + \frac{C}{|B_{n-1}|} \int_{B_{n-1}} |u - u_{B_{n-1}}| \\
&\leq C \sum_{j=0}^{n-1} r_j \fint_{B_j} |\nabla u| \\
&\leq C(n, R) M_B |\nabla u|(x),
\end{aligned}$$

sillä $x \in B_j$ kaikilla j. Siis pallossa $B(x_0, R)$ funktio $M_B|\nabla u|$ on funkiota $\frac{1}{C} M_B u$ suurempaa jollain vakiolla $C > 0$, mistä väite seuraa.

□

LEMMA 3.1.7. *Olkoon* $B = B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ *ja* $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(3B, \mathbb{R}^n)$ *siten, että* $|Df| \in L^n \log^{-1} L(3B)$. *Olkoon myös* $\varphi \in C^\infty_C(B)$ *ja määritellään*

$$u := \varphi(f_1 - (f_1)_B) \colon B \to \mathbb{R}.$$

Kun

$$F_\lambda := \{x \in B : M_{3B}|\nabla u|(x) < \lambda\},$$

niin

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \int_{B\setminus F_\lambda} |Df|^{n-1} = 0.$$

TODISTUS. Tulosäännön ja kolmioepäyhtälön nojalla

$$|\nabla u| \leq |\nabla f_1||\varphi| + |\nabla\varphi||f_1 - (f_1)_B|.$$

Nyt jos $y \in B \setminus F_\lambda$ ja $y \in B_y \subset 3B$ on pallo, niin (jatketaan u nollana joukkoon $3B \setminus B$) saadaan

$$\begin{aligned} \fint_{B_y} |\nabla u| &\leq \fint_{B_y} |\nabla f_1||\varphi| + \fint_{B_y} |\nabla\varphi||f_1 - (f_1)_B| \\ &\leq CM_{3B}|\nabla f_1|(y) + CM_{3B}|f_1 - (f_1)_B|(y). \end{aligned}$$

Ottamalla supremumin yli kaikkien tällaisten B_y nähdään että

$$\lambda \leq M_{3B}|\nabla u|(y) \leq CM_{3B}|\nabla f_1|(y) + CM_{3B}|f_1 - (f_1)_B|(y),$$

sillä keskitetylle maksimaalifuntioille on voimassa

$$M_{3B}|\nabla u|(y) \leq 2^n M^C_{3B}|\nabla u|(y).$$

Siis toisen yläpuolen summattavista on oltava vähintään $\frac{\lambda}{2}$. Lemman 3.1.6 nojalla, kun nyt $\int_B f_1 - (f_1)_B = 0$, saadaan $CM_{3B}|Df|(y) \geq CM_{3B}|\nabla f_1|(y) > \lambda$. Siten

$$B \setminus F_\lambda \subset \{x \in B : M_{3B}|Df|(x) > C\lambda\}.$$

Nyt kaikilla $\varepsilon \in (0,1)$ pätee

$$\begin{aligned} \lambda \int_{B\setminus F_\lambda} |Df|^{n-1} &\leq \lambda \int_{\{M_{3B}|Df|>C\lambda\}} |Df|^{n-1} \\ &\leq \lambda \int_{\{M_{3B}|Df|>C\lambda\}} (M_{3B}|Df|)^{n-1} \\ &\leq C^{-\varepsilon}\lambda^{1-\varepsilon} \int_{\{M_{3B}|Df|>C\lambda\}} (M_{3B}|Df|)^{n-1+\varepsilon} \\ &\leq C\lambda^{1-\varepsilon} \int_{\{|Df|>\frac{C\lambda}{2}\}} |Df|^{n-1+\varepsilon}, \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö saadaan käyttämällä lemmaa 1.3.6, sillä nyt $n > n-1+\varepsilon > 1$ ja $|Df| \in L^{n-1+\varepsilon}$. Tälle arviolle saadaan alarajaarvoksi $\liminf_{\lambda\to\infty} = 0$ käyttämällä seuraavaa apufunktiota: Olkoon

$$\Phi(t) = t^{\varepsilon-1}\frac{d}{dt}\frac{t^{1-\varepsilon}}{\log(e+t)},\ t \geq 1$$

jolloin $\Phi(t) > 0$ riittävän suurilla t, ja lisäksi

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \Phi(t)dt &= \int_1^\infty t^{\varepsilon-1}\frac{d}{dt}\frac{t^{1-\varepsilon}}{\log(e+t)}dt \\ &= \Big/_1^\infty \log^{-1}(e+t) + (1-\varepsilon)\int_1^\infty \frac{dt}{t\log(e+t)} = \infty.\end{aligned}$$

Oletuksen $|Df| \in L^n \log^{-1} L$ ja Fubinin lauseen nojalla nyt

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \Phi(t)t^{1-\varepsilon}\Big(\int_{\{|Df(x)|>t\}} |Df(x)|^{n-1+\varepsilon}dx\Big)dt \\ = &\int_{\{|Df(x)|>1\}} |Df(x)|^{n-1+\varepsilon}\Big(\int_1^{|Df(x)|} \frac{d}{dt}\frac{t^{1-\varepsilon}}{\log(e+t)}dt\Big)dx \\ \leq &\int_{\{|Df|>1\}} \frac{|Df|^n}{\log(e+|Df|)}dx < \infty.\end{aligned}$$

Nyt siitä että ylläolevassa integraalissa integrandi on (suurilla t) ei-negatiivinen, on välttämättä seurattava

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-\varepsilon}\int_{\{|Df|>t\}} |Df|^{n-1+\varepsilon}dx = 0,$$

mistä aiemman arvion kanssa saadaan väitteen alaraja-arvon häviäminen.

□

LAUSE 3.1.8. *Olkoon $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ siten, että $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja $J_f \geq 0$ melkein kaikkialla. Tällöin*

$$J_f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ ja } \mathscr{J}_f(\varphi) = -\int_\Omega f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n) = \int_\Omega \varphi J_f$$

kaikilla $\varphi \in C^\infty_C(\Omega)$.

HUOMAUTUS 3.1.9. Myöhemmin nähdään, että eksponentiaalisesti integroituvan vääntöfunktion K_f tilanteessa äärellisen väännön kuvauksen f (heikko) differentiaali $|Df|$ toteuttaa lauseen 3.1.8 ehdon. Kuten aiemmin mainittiin, ehto täyttyy myös välittömästi vahvemman oletuksen $f \in W^{1,n}$ tilanteessa, minkä nojalla lemma 3.1.4 on äärellisen väännön kuvaukselle suora seuraus lauseesta 3.1.8. Äärellisen väännön kuvaus toteuttaa lisäksi ehdon Jacobin ei-negatiivisuudesta, ja sitä paitsi jo määritelmänsä mukaan sen Jacobi on lokaalisti integroituva. Todistetaan tämä kuitenkin pelkästään lauseen 3.1.8 vaatimattomampien oletusten pohjalta.

TODISTUS. Olkoon $U \subset \Omega$ kompakti. Liittämällä jokaiseen pisteeseen $x \in U$ pallo $B(x, r)$ siten, että myös $B(x, 6r) \subset\subset \Omega$ saadaan joukon U avoin peite, josta päästään tällaisten pallojen muodostamaan äärelliseen osapeitteeseen. Jacobia koskevaa väitettä varten riittää siis todistaa, että $\int_{\frac{1}{2}B} J_f < \infty$, kun $B = B(x_0, R)$ on mielivaltainen pallo, jolle $3B \subset\subset \Omega$.

Olkoon $\varphi \in C_C^\infty(B, [0,\infty))$ jolle $\varphi(x) = 1$ kaikilla $x \in \frac{1}{2}B$. Määritellään $u = \varphi(f_1 - (f_1)_B)$ kuten edellisessä lemmassa. Tällöin $u \in W_0^{1,1}(B)$, sillä Sobolev-funktiota $f_1 - (f_1)_B \in W^{1,1}(B)$ approksimoivat sileät funktiot approksimoivat funktiolla φ kerrottuna funkiota u, ja ovat kompaktikantajaisia sillä φ on. Olkoon nyt $\lambda > 0$ ja edellisen lemman merkintää käyttäen

$$F_\lambda = \{M_{3B}|\nabla u| < \lambda\}.$$

Nyt u on joukon F_λ Lebesgue-pisteisiin rajoitettuna Lipschitz-jatkuva lemman 1.3.5 nojalla. Merkitään tätä joukkoa samalla nimellä, sillä $\{x \in F_\lambda : x \text{ ei ole Lebesgue-piste}\}$ on nollamittainen ja siten voidaan esimerkiksi edellisen lemman tulosta käyttää tälle pienemmällekin joukolle. Olkoon sitten

$$\tilde{u}_\lambda := \begin{cases} u(x), & x \in F_\lambda \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

joka on myös $C\lambda$-Lipschitz: Epäyhtälö $|\tilde{u}_\lambda(x) - \tilde{u}_\lambda(y)| \le C\lambda|x-y|$ on selvä jos $x, y \notin B$ tai $x, y \in F_\lambda$. Olkoot sitten $x \in F_\lambda$ ja $y \notin B$ sekä $r = d(x, \partial B) \le |x-y|$. Valitaan lisäksi pallot $B_j = B(x, 2^{-j+1}r)$ kun $j \ge 1$. Kun joukosta F_λ poistettiin ei-Lebesgue-pisteet, voidaan jälleen käyttää teleskooppisummaa ja Poincaré'n epäyhtälöä ja arvioida

$$\begin{aligned} & |\tilde{u}_\lambda(x) - \tilde{u}_\lambda(y)| = |\tilde{u}_\lambda(x)| = |u(x)| \\ = \; & |u_{B_1} + \sum_{j=1}^\infty (u_{B_{j+1}} - u_{B_j})| \le |u_{B_1}| + \sum_{j=1}^\infty |u_{B_j} - u_{B_{j+1}}| \\ \le \; & \frac{1}{|B_1 \setminus B|} \int_{B_1 \setminus B} |u - u_{B_1}| + \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} r \frac{C}{|B_j|} \int_{B_j} |\nabla u| \\ \le \; & \frac{C}{|B_1|} r \int_{B_1} |\nabla u| + \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} r \frac{C}{|B_j|} \int_{B_j} |\nabla u| \le C r M_{3B}|\nabla u|(x) \\ \le \; & C\lambda|x-y|, \end{aligned}$$

sillä $u(x) = 0$ kaikilla $x \in B_1 \setminus B$ (nollana jatkettuna), sekä selvästi $|B_1 \setminus B| \ge \frac{|B_1|}{4^n}$. Koska $\tilde{u}_\lambda$ on siis Lipschitz-jatkuva, voidaan se helposti laajentaa sellaiseksi joukkoon $B \setminus F_\lambda$ ja siis koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

Oletuksen $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ seurauksena selvästi myös $|Df| \in L^{n-\frac{1}{2}}(3B)$ ja siis Poincaré'n nojalla itseasiassa $f \in W^{1,n-\frac{1}{2}}(3B)$. Koska $\tilde{u}_\lambda$ on lisäksi Lipschitz-jatkuva koko avaruudessa, myös sille pätee $\tilde{u}_\lambda \in W^{1,n-\frac{1}{2}}(3B)$ ja erityisesti $\tilde{u}_\lambda \in W_0^{1,\infty}(B)$. Siten kuvaukselle $(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n)$ on lemman 3.1.5 nojalla

$$\int_B J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n) = 0.$$

Kun lisäksi ACL-karakterisaation perusteella $|\nabla \tilde{u}_\lambda| \leq C\lambda$, niin pätee

$$|\int_{F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n)| = |\int_{B\setminus F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n)| \leq C\lambda \int_{B\setminus F_\lambda} |Df|^{n-1}.$$

Funktion $\tilde{u}_\lambda$ määritelmän nojalla saadaan melkein kaikissa joukon F_λ pisteissä tulosäännöllä

$$J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n) = \varphi J_f + (f_1 - (f_1)_B)J(\varphi, f_2, \ldots, f_n).$$

Tällöin funktion φ valinnan ja edellisten nojalla

$$\begin{aligned}
&\int_{F_\lambda \cap \frac{1}{2}B} J_f \\
\leq\ & \int_{F_\lambda} \varphi J_f = \int_{F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n) - (f_1 - (f_1)_B)J(\varphi, f_2, \ldots, f_n) \\
\leq\ & |\int_{F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n)| + |\int_{F_\lambda} (f_1 - (f_1)_B)J(\varphi, f_2, \ldots, f_n)| \\
\leq\ & C\lambda \int_{B\setminus F_\lambda} |Df|^{n-1} + \int_B |(f_1 - (f_1)_B)J(\varphi, f_2, \ldots, f_n)|
\end{aligned}$$

Koska $F_\lambda \subset F_{\lambda'}$ kun $\lambda \leq \lambda'$, saadaan tällöin lemman 3.1.7 nojalla

$$\int_{\frac{1}{2}B} J_f = \liminf_{\lambda\to\infty} \int_{F_\lambda \cap \frac{1}{2}B} J_f \leq \int_B |(f_1 - (f_1)_B)J(\varphi, f_2, \ldots, f_n)|.$$

Tämä integraali nähdään äärelliseksi, kun nyt oletuksen $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}$ nojalla tiedetään $f \in W^{1,\frac{n^2}{n+1}}$, joten käyttämällä Hölderiä ja Sobolevin epäyhtälöä kuten huomautuksessa 3.1.2

$$\int_B |(f_1 - (f_1)_B)J(\varphi, f_2, \ldots, f_n)| \leq \|f_1 - (f_1)_B\|_{n^2} \|C|Df|^{n-1}\|_{\frac{n^2}{n^2-1}} < \infty,$$

sillä $f_1 \in L^{n^2}(B)$ ja $(n-1)\frac{n^2}{n^2-1} = \frac{n^2}{n+1}$.

Todistetaan vielä, että distributiivinen Jacobi yhtyy varsinaiseen Jacobiin. Olkoon siis $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ mielivaltainen testifunktio. Peittämällä sen kompakti kantaja $\operatorname{spt}\varphi$ samanlaisilla palloilla kuin todistuksen alussa ja ottamalla tästä saatavalle äärelliselle osapeitteelle ykkösen ositus $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, saadaan $\varphi = \sum_j \varphi_j \varphi$. Tällöin jokaiselle $\varphi_j\varphi$ on edellä määritelty pallo B_j jolle $\operatorname{spt}\varphi_j\varphi \subset B_j$, joten riittää osoittaa väite tällaisille näissä palloissa kannatelluille testifunktioille. Nyt voidaan käyttää samoja argumentteja kuin todistuksen alussa: Olkoon siis $\varphi \in C_C^\infty(B)$ pallolle B jolle $3B \subset\subset \Omega$ ilman muita rajoituksia ja samoin kuin edellä $u = \varphi(f_1 - (f_1)_B)$ tässä pallossa. Aiempaa päättelyä seuraten saadaan tälle kaikilla $\lambda > 0$ Lipschitz-jatke $\tilde{u}_\lambda \in W_0^{1,\infty}(B)$ ja Jacobille sama yhtälö

$$\varphi J_f = J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \ldots, f_n) - (f_1 - (f_1)_B(J(\varphi, f_2, \ldots, f_n)$$

melkein kaikkialla joukossa F_λ. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_B \varphi J_f = \int_{B\setminus F_\lambda} \varphi J_f + \int_{F_\lambda} \varphi J_f = \int_{B\setminus F_\lambda} \varphi J_f \\ + \int_{F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \dots, f_n) \\ + (f_1)_B \int_{F_\lambda} J(\varphi, f_2, \dots, f_n) - \int_{F_\lambda} f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n).\end{aligned} \tag{2}$$

Lemman 3.1.5 nojalla $\int_B J(\varphi, f_2, \dots, f_n) = 0$, joten käyttämällä dominoitua konvergenssia saadaan myös

$$(f_1)_B \int_{F_\lambda} J(\varphi, f_2, \dots, f_n) = C \int_B J(\varphi, f_2, \dots, f_n)\chi_{F_\lambda} \to 0 \text{ kun } \lambda \to \infty.$$

Samoin myös ensimmäinen yhtälön (2) oikean puolen integraaleista häviää integraalin jatkuvuuden nojalla kun $\lambda \to \infty$, sillä integrandi φJ_f ei riipu luvusta λ ja $|B \setminus F_\lambda| \to 0$. Jäljellä ovat siis toinen ja neljäs termi, jonka integrandi on juuri haluttua muotoa. Näistä ensimmäinenkin häviää rajankäynnissä: Lemman 3.1.5 nojalla
$\int_B J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \dots, f_n) = 0$, joten

$$\int_{F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \dots, f_n) = -\int_{B\setminus F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \dots, f_n).$$

Koska $|\nabla \tilde{u}_\lambda| \le C\lambda$, niin lemman 3.1.7 avulla saadaan

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \Big| \int_{F_\lambda} J(\tilde{u}_\lambda, f_2, \dots, f_n) \le C \liminf_{\lambda\to\infty} \lambda \int_{B\setminus F_\lambda} |Df|^{n-1} = 0.$$

Nyt siis ottamalla yhtälössä (2) alaraja-arvo puolittain päästään eroon muista oikean puolen termeistä paitsi viimeisestä ja saadaan dominoidun konvergenssin avulla (muistetaan että $f \in W^{1,\frac{n^2}{n+1}}(B, \mathbb{R}^n)$) täsmälleen

$$\begin{aligned}\int_B \varphi J_f &= \liminf_{\lambda\to\infty} \Big(-\int_{F_\lambda} f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n)\Big) \\ &= -\limsup_{\lambda\to\infty} \int_{F_\lambda} f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n) \\ &= -\lim_{\lambda\to\infty} \int_B f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n)\chi_{F_\lambda} \\ &= -\int_B f_1 J(\varphi, f_2, \dots, f_n) \\ &= \mathscr{J}_f(\varphi).\end{aligned}$$

□

3.2. Heikko monotonisuus

Edellisen kappaleen lauseen 3.1.8 avulla todistetaan saman luokan äärellisen väännön kuvausten toteuttavan ominaisuuden nimeltään heikko monotonisuus. Tavallisesti määritellään joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ olevan *monotoninen*, jos sille pätee $\operatorname{osc}_B f \leq \operatorname{osc}_{\partial B} f$ kaikilla avoimilla palloilla (tai joukoilla) $B \subset\subset \Omega$, missä $\operatorname{osc}_A f = \operatorname{diam} f(A)$. Heikon monotonisuuden käsite on intuitiivisesti tämän käsitteen yleistys. Se on olennainen työkalu todistettaessa äärellisen väännön kuvauksen jatkuvuutta.

MÄÄRITELMÄ 3.2.1. Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$, missä $p \in [1, \infty)$. Funktio u on *p-heikosti monotoninen*, jos aina pätee

$$(m-u)^+ \in W_0^{1,p}(B) \Rightarrow u \geq m \text{ melkein kaikilla } x \in B,$$

$$(u-M)^+ \in W_0^{1,p}(B) \Rightarrow u \leq M \text{ melkein kaikilla } x \in B,$$

kun $B \subset\subset \Omega$ on mielivaltainen pallo ja $m < M$ reaalilukuja.

HUOMAUTUS 3.2.2. Jos u on p-heikosti monotoninen ja lisäksi jatkuva, se on monotoninen. Olkoon nimittäin $B \subset\subset \Omega$ avoin pallo, $m = \min_{x \in \partial B} u(x)$ ja $M = \max_{x \in \partial B} u(x)$, jotka jatkuva kuvaus u saavuttaa kompaktilla pallon reunalla. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on reunan ∂B ympäristö U jossa $m-\varepsilon < u < M+\varepsilon$, jolloin $(m-\varepsilon-u)^+, (u-M-\varepsilon)^+ \in W_0^{1,p}(B)$ ja siten myös $m - \varepsilon \leq u \leq M + \varepsilon$ melkein kaikkialla pallossa B, eli $\operatorname{osc}_B u \leq M - m + 2\varepsilon = \operatorname{osc}_{\partial B} u + 2\varepsilon$.

LAUSE 3.2.3. *Olkoon $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ äärellisen väännön kuvaus siten, että $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tällöin komponenttikuvaukset $f_1, \dots, f_n$ ovat p-heikosti monotonisia kaikilla $p < n$.*

TODISTUS. Todistetaan väite ensimmäiselle komponenttikuvaukselle f_1. Muille voidaan väite todistaa vastaavasti, jos muokataan samalla edellisen kappaleen distributiivisen Jacobin määritelmää vastaamaan kyseistä komponenttikuvausta.

Olkoon $m \in \mathbb{R}$ ja $B \subset\subset \Omega$ avoin pallo. Oletetaan $(m - f_1)^+ \in W_0^{1,p}(B)$, jolloin on siis osoitettava, että $f_1(x) \geq m$ melkein kaikilla $x \in B$. Määritellään

$$v := (m - f_1)^+ \chi_B \text{ ja } g := (-v, f_2, \dots, f_n).$$

Selvästi $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ kaikilla $p < n$ ja yhä $|Dg| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Olkoon

$$E_m := \{x \in B : f_1(x) < m\},$$

jolloin $J_g = \chi_{E_m} J_f$ melkein kaikkialla. Olkoon $\varphi \in C_C^\infty(\Omega, [0,\infty))$ siten, että $\varphi(x) = 1$ kaikilla $x \in B$. Tällöin lauseen 3.1.8 nojalla

$$\int_B J_g \leq \int_\Omega \varphi J_g = -\int_\Omega v J(\varphi, f_2, \dots, f_n) = 0,$$

sillä $J_g \geq 0$ melkein kaikkialla, $v = 0$ joukossa B^c ja $\nabla \varphi = 0$ pallossa B. On siis oltava $J_g = 0$ melkein kaikkialla pallossa B, eli tällöin myös $J_f = 0$ melkein kaikkialla joukossa E_m. Äärellisestä väännöstä seuraa, että samoin $|Df| = 0$ melkein kaikkialla joukossa E_m, erityisesti

$\nabla f_1(x) = 0$ melkein kaikilla x, joilla $f_1(x) < m$. Apufunktion v määritelmän mukaan myös $\nabla v = 0$ tässä joukossa, joten se häviää melkein kaikkialla pallossa B. Tällöin oletuksesta $v = (m - f_1)^+ \in W_0^{1,p}(B)$ seuraa kuitenkin $v = 0$ melkein kaikkialla pallossa B, eli toisin sanoen $f_1 \geq m$. Vastaavalla päättelyllä voidaan todistaa myös implikaatio $(f_1 - M)^+ \in W_0^{1,p}(B) \Rightarrow f_1 \leq M$.

□

3.3. Jatkuva äärellisen väännön kuvaus

Edellisten lukujen käsitteiden ja tulosten avulla voidaan nyt muotoilla ja todistaa äärellisen väännön kuvauksille seuraavat jatkuvuustulokset:

LAUSE 3.3.1. *Olkoon $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ äärellisen väännön kuvaus. Tällöin sillä on olemassa jatkuva edustaja.*

LAUSE 3.3.2. *Olkoon $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ äärellisen väännön kuvaus. Jos on olemassa $\lambda > 0$ siten, että $\exp(\lambda K_f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, niin funktiolla f on olemassa jatkuva edustaja.*

Lauseen 3.3.2 todistamiseksi voidaan käyttää edellisten kappaleiden tuloksia, sillä oletuksesta $\exp(\lambda K_f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ seuraa
$|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (avaruudessa $W^{1,n}$ tämä nähdään välittömästi määritelmästä):

LEMMA 3.3.3. *Olkoot $a \geq 1, b \geq 0$ ja $\lambda > 0$. Tällöin pätee epäyhtälö*

$$ab \leq \exp(\lambda a) + \frac{2b}{\lambda} \log\big(e + \frac{b}{\lambda}\big).$$

TODISTUS. Koska kaikki termit ovat ei-negatiivisia, voidaan olettaa että $\exp(\lambda a) < ab$. Jos $x \geq 0$, niin $x^2 < e^x$, joten

$$\lambda^2 a^2 \leq \exp(\lambda a) < ab.$$

Nyt erityisesti $\lambda^2 a < b \Rightarrow ab < \frac{b^2}{\lambda^2}$, joten

$$\exp(\lambda a) < \frac{b^2}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda a < 2\log(\frac{b}{\lambda}) \Rightarrow ab < \frac{2b}{\lambda}\log(e + \frac{b}{\lambda}).$$

□

LEMMA 3.3.4. *Olkoon $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ äärellisen väännön kuvaus. Jos on $\lambda > 0$ siten, että $\exp(\lambda K_f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, niin $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

TODISTUS. Äärellisen väännön määrittelevästä epäyhtälöstä
$|Df|^n \leq K_f J_f$ melkein kaikkialla, tiedoista $K_f \geq 1$, $e + x^{\frac{1}{n}} \geq (e+x)^{\frac{1}{n}}$ ja siitä että kuvaus

$$x \mapsto \frac{x}{\log(e + x^{\frac{1}{n}})}$$

on kasvava saadaan arvio

$$\begin{aligned}\frac{|Df(x)|^n}{\log(e+|Df(x)|)} &\le \frac{K_f(x)J_f(x)}{\log(e+K_f(x)^{\frac{1}{n}}J_f(x)^{\frac{1}{n}})}\\ &\le \frac{K_f(x)J_f(x)}{\log(e+J_f(x)^{\frac{1}{n}})}\\ &\le \frac{nK_f(x)J_f(x)}{\log(e+J_f(x))}.\end{aligned}$$

Olkoon sitten $K \subset \Omega$ kompakti. Lemman 3.3.3 nojalla, kun valitaan luku λ kuten oletuksessa, $a = K_f$ ja $b = \frac{J_f}{\log(e+J_f)}$, saadaan

$$\begin{aligned}&\int_K \frac{|Df(x)|^n}{\log(e+|Df(x)|)}dx \le \int_K \frac{nK_f(x)J_f(x)}{\log(e+J_f(x))}dx\\ \le\ & n\int_K \exp(\lambda K_f(x))dx\\ +\ & 2n\int_K \frac{J_f(x)}{\lambda\log(e+J_f(x))}\log\Big(e+\frac{J_f(x)}{\lambda\log(e+J_f(x))}\Big)dx.\end{aligned}$$

Näistä ensimmäinen integraali on oletuksen mukaan äärellistä. Toista integraalia varten merkitään

$$K_1 := \{x \in K : \lambda\log(e+J_f(x)) \le 1\}$$

ja $K_2 = K \setminus K_1$. Tällöin joukon K_1 pisteissä $J_f(x) \le e^{\frac{1}{\lambda}} - e$, joten integrandi on rajoitettu, sillä aina $\lambda\log(e+J_f) \ge \lambda > 0$. Siten tämä integraali yli rajoitetun joukon K on äärellistä. Joukon K_2 pisteissä on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$\frac{J_f(x)}{\lambda\log(e+J_f(x))}\log\Big(e+\frac{J_f(x)}{\lambda\log(e+J_f(x))}\Big) \le CJ_f(x),$$

joka on integroituva yli joukon K. Molemmat integraalit ovat siis äärellisiä, joten $|Df| \in L^n\log^{-1}L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

□

Nyt tiedetään lauseiden 3.3.1 ja 3.3.2 oletusten kuvausten differentiaalien kuuluvan avaruuteen $L^n\log^{-1}L_{\mathrm{loc}}$. Edellisen kappaleen nojalla niiden komponenttikuvaukset ovat tällöin lisäksi p-heikosti monotonisia kaikille $p < n$. Seuraavan lemman mielessä tämä käsite kertoo myös niiden varsinaisesta monotonisuudesta:

Lemma 3.3.5. *Olkoon $1 \le p < \infty$ ja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ kuvaus, joka on p-heikosti monotoninen jossain pallossa $B(a,R) \subset\subset \Omega$. Valitaan $r \in (0,R)$. Tällöin kun $(u_j)_j$ on jono kuvauksen u konvoluutioapproksimaatioita, joille siis $u_j \to u$ avaruudessa $W^{1,p}$, $x_0, y_0 \in B(a,r)$ ovat kuvauksen u Lebesgue-pisteitä ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa indeksi $N \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $t \in (r,R)$ pätee*

$$|u_j(x_0) - u_j(y_0)| \le \mathrm{osc}_{S(a,t)}u_j + 2\varepsilon$$

kun $j > N$.

Todistus. Väite seuraa, jos kaikilla $t \in (r, R)$ ja riittävän suurilla j pätee

$$u_j(x_0) \in (\min_{x \in S(a,t)} u_j(x) - \varepsilon, \max_{x \in S(a,t)} u_j(x) + \varepsilon),$$

kun $x_0 \in B(a, r)$ on mielivaltainen kuvauksen u Lebesgue-piste. Tehdään vastaoletus: On olemassa jono $(j_k)_k$ luonnollisia lukuja sekä jono säteitä $(t_k)_k \in (r, R)$ joille

$$u_{j_k}(x_0) \geq \max_{x \in S(a,t_k)} u_{j_k}(x) + \varepsilon.$$

Siirtymällä osajonoon voidaan olettaa, että on $t \in [r, R]$, jolle $t_k \to t$ kun $k \to \infty$ ja $|t - t_k| \leq \frac{t}{2}$ kaikilla k. Määritellään

$$v_{j_k}(x) := u_{j_k}(x) - u_{j_k}(x_0) + \varepsilon.$$

Tällöin $v_{j_k}(x) \leq 0$ kaikilla $x \in S(a, t_k)$, joten $(v_{j_k})^+ \in W_0^{1,p}(B(a, t_k))$. Skaalataan säde t säteeksi t_k kuvauksilla $s_k(x) = (a + (x - a)\frac{t_k}{t})$. Tällöin määrittelemällä $\tilde{v}_{j_k}(x) = v_{j_k}(s_k(x))$ saadaan $(\tilde{v}_{j_k})^+ \in W_0^{1,p}(B(a, t))$. Nyt approksimaatioiden avulla voidaan käyttää kuvauksen u heikkoa monotonisuutta: Selvästi $v_{j_k} \to u - u(x_0) + \varepsilon$ avaruudessa $W^{1,p}$, sillä x_0 on Lebesgue-piste. Tällöin myös

$$\|\tilde{v}_{j_k} - u \circ s_k - u(x_0) + \varepsilon\|_{1,p} \to 0.$$

Edelleen pätee

$$\|u - u \circ s_k\|_{1,p} \to 0,$$

sillä tämä on selvää sileille kuvauksille rajoitetussa pallossa, ja approksimoimalla seuraa myös Sobolev-kuvauksille. Nyt siis $\tilde{v}_{j_k} \to u - u(x_0) + \varepsilon$ avaruudessa $W^{1,p}(B(a, R))$, eli erityisesti $(u - u(x_0) + \varepsilon)^+ \in W_0^{1,p}(B(a, t))$. Tällöin heikon monotonisuuden nojalla on oltava $u \leq u(x_0) - \varepsilon$ melkein kaikkialla pallossa $B(a, t)$, mikä on mahdotonta sillä x_0 valittiin Lebesgue-pisteeksi. $\square$

Seuraava lause on versio Sobolevin upotuslauseesta 1.2.15, ja sitä yhdessä edellisen lemman kanssa voidaan käyttää arvioimaan kuvauksen oskillaatiota pallossa.

Lause 3.3.6. *Olkoon $u \in W^{1,p}(B(0, R))$, missä $p > n - 1$. Tällöin on olemassa kuvauksen u edustaja v ja vakio $C = C(n, p)$ siten, että melkein kaikilla $t \in (0, R)$ pätee*

$$\mathrm{osc}_{S(0,t)} v \leq Ct\Big(\fint_{S(0,t)} |\nabla u|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Todistus. Olkoon $(u_j)_j \in C^\infty(B(0, R))$ jono sileitä funktioita joille $u_j \to u$ avaruudessa $W^{1,p}$. Koska $S(0, t)$ on $(n-1)$-ulotteinen avaruus ja oletuksen mukaan $p > n-1$, voidaan käyttää Sobolevin upotuslausetta tällä kompaktilla pallonpinnalla. Tämä on mahdollista esimerkiksi käyttämällä bilipschitz-diffeomorfismia $\varphi\colon B^{n-1}(0, \frac{\pi}{2}) \to S_+^{n-1}(0,1)$,

$$\varphi(x) = (\frac{x_1}{|x|}\sin|x|, \ldots, \frac{x_{n-1}}{|x|}\sin|x|, \cos|x|) \text{ ([\textbf{MZ}] 2.10)}$$

sekä integraalin muuttujanvaihtoa. Näiden avulla päästään käyttämään tuttua Sobolevin upotuslausetta 1.2.14 kuvaukselle $u_j \circ \varphi$, joka nyt on määritelty $(n-1)$-ulotteisella pallolla ja haluttu epäyhtälö seuraa kuvauksen φ ja sen käänteiskuvauksen Jacobin alideterminanttien rajoittuneisuudesta. Siten kaikille näille u_j ja kaikille $t \in (0, R)$ saadaan

$$\begin{aligned} |u_j(x) - u_j(y)| &\leq C|x-y|^{1-\frac{n-1}{p}} \Big(|S(0,t)| \fint_{S(0,t)} |\nabla u_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ \leq\ & Ct^{\frac{p-n+1}{p}} |S(0,t)|^{\frac{1}{p}} \Big(\fint_{S(0,t)} |\nabla u_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = Ct\Big(\fint_{S(0,t)} |\nabla u_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad (3) \end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in S(0,t)$, joten ottamalla supremum näiden yli saadaan

$$\operatorname{osc}_{S(0,t)} u_j \leq Ct\Big(\fint_{S(0,t)} |\nabla u_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla u_j ja t. Nyt koska $\nabla u_j \to \nabla u$ avaruudessa $L^p(B(0,R))$, voidaan käyttämällä muuttujanvaihtoa ja Fubinin lausetta integraaliin $\int_B$ sekä osajonoon siirtymällä olettaa, että

$$\int_{S(0,t)} |\nabla u_j|^p \to \int_{S(0,t)} |\nabla u|^p$$

melkein kaikilla t. Lisäksi tämä integraali on oletuksen nojalla melkein kaikilla t äärellistä. Tällöin näillä t on jono (u_j) epäyhtälön (3) perusteella yhtäjatkuva joukossa $S(0,t)$. Lisäksi voidaan edelleen osajonoon siirtymällä olettaa $u_j \to u$ pisteittäin melkein kaikkialla, joten jonon $(u_j)_j$ on oltava myös tasaisesti rajoitettu. Siis Arzela-Ascolin lauseen oletukset täyttyvät, ja jälleen osajonoon rajoittumalla nähdään, että $u_j \to v$ tasaisesti kompaktissa joukossa $S(0,t)$ jollekin v, joka on sitä paitsi kuvauksen u edustaja. Tälle edustajalle on selvästi mielivaltaisella $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{osc}_{S(0,t)} v \leq \operatorname{osc}_{S(0,t)} u_j + 2\varepsilon \leq Ct\Big(\fint_{S(0,t)} |\nabla u|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + 3\varepsilon,$$

riittävän suurilla j, kun $u_j \to v$ tasaisesti.

□

LEMMA 3.3.7. *Olkoon $n-1 < p \leq n$ ja $u \in W^{1,p}(\Omega)$ kuvaus joka on p-heikosti monotoninen joukossa $B(a,R) \subset\subset \Omega$. Jos $r \in (0,R)$, niin on olemassa kuvauksen u edustaja v siten, että melkein kaikilla*

$t \in (r, R)$ pätee

$$\mathrm{osc}_{B(a,r)} v \le Ct \Big(\fint_{S(a,t)} |\nabla v|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

TODISTUS. Olkoon $r \in (0, R)$ ja $v(x) := \lim_{s\to 0} \fint_{B(x,s)} u(y)dy$ kuvauksen u edustaja, jolle siis kaikki pisteet ovat nyt Lebesgue-pisteitä. Tällöin kun $(u_j)_j$ on jono sileitä funktioita joille $u_j \to u$ avaruudessa $W^{1,p}$, niin myös $u_j \to v$ ja lemman 3.3.5 sekä lauseen 3.3.6 nojalla sillä on osajono, jota merkitään yhä $(u_j)_j$, jolle

$$|u_j(x) - u_j(y)| \le Ct \Big(\fint_{S(a,t)} |\nabla u_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{j}$$

kaikilla $t \in (r, R)$ ja $x, y \in B(a, r)$. Edelleen osajonoon rajoittumalla pätee oletusta $\|u_j - v\|_{1,p} \to 0$ ja Fubinin lausetta käyttämällä melkein kaikilla $t \in (r, R)$

$$\int_{S(a,t)} |\nabla u_j - \nabla v|^p \to 0.$$

Näille säteille t saadaan aiemmasta epäyhtälöstä rajalla

$$|v(x) - v(y)| \le Ct \Big(\fint_{S(a,t)} |\nabla v|^p \Big)^{\frac{1}{p}},$$

mistä väite seuraa. □

Muistetaan, että funktio f on jatkuva pisteessä a täsmälleen silloin, kun sen oskillaatio tämän pisteen lähellä saadaan mielivaltaisen pieneksi pisteen ympäristöä pienentämällä, täsmällisesti siis

$$\mathrm{osc}_{B(a,r)} f = \mathrm{diam}\, f(B(a, r)) \to 0 \text{ kun } r \to 0.$$

Tämä nähdään helposti vertaamalla tätä ehtoa tuttuun jatkuvuuden $(\varepsilon,\, \delta)$-määritelmään.

Edellisen lemman avulla pystytään nyt arvioimaan kuvauksen edustajan oskillaatiota palloissa, joissa se on heikosti monotoninen. Yhdessä edellisen kappaleen tuloksen kanssa tästä saadaan kyseisen edustajan jatkuvuus sillä oletuksella, että kuvauksen differentiaali kuuluu lisäksi avaruuteen $L^n \log^{-1} L$:

LAUSE 3.3.8. *Olkoon $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ kuvaus, jolle $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ja komponenttikuvaukset $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ovat p-heikosti monotonisia jollain $p \in (n-1, n)$. Tällöin sillä on jatkuva edustaja.*

TODISTUS. Toisia derivaattoja tarkastelemalla nähdään suoralla laskulla, että kuvaus

$$t \mapsto \frac{t^n}{\log(t)}, \quad t > 1$$

on suurilla t kasvava ja konveksi, samoin $t \mapsto t^{\frac{n}{p}} \log^{-1}(t^{\frac{1}{p}})$. Olkoon tämän johdattelemana $\varphi \in C^\infty(0,\infty)$ aidosti kasvava ja konveksi funktio siten, että jollekin $M > 0$

$$\varphi(t) = \frac{t^{\frac{n}{p}}}{\log(e + t^{\frac{1}{p}})}, \text{ kun } t \geq M,$$

ja lisäksi määritellään $\Phi(t) := \varphi(t^p)$, joka on siten myös selvästi konveksi ja kasvava.

Olkoon $a \in \Omega$ mielivaltainen piste ja $R > 0$ siten, että $B(a,R) \subset\subset \Omega$ sekä $r \in (0,R)$. Oletuksesta $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\text{loc}}(\Omega)$ seuraa helposti $f \in W^{1,p}(B(a,R),\mathbb{R}^n)$. Käytetään nyt lemmaa 3.3.7 komponenttikuvauksille, ja muistetaan faktat $|(x_1,\ldots,x_n)| \leq C \max |x_j|$ sekä $|\nabla f_j| \leq |Df|$. Tällöin apufunktion φ konveksisuuden ja kääntyvyyden sekä Jensenin epäyhtälön 1.2.19 nojalla saadaan jollekin kuvauksen f edustajalle $\hat{f}$

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r)) &\leq Ct\Big(\varphi^{-1} \circ \varphi\big(⨍_{S(a,t)} |Df|^p\big)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Ct\Big(\varphi^{-1}\big(⨍_{S(a,t)} \varphi(|Df|^p)\big)\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= Ct\Big(\varphi^{-1}\big(⨍_{S(a,t)} \Phi(|Df|)\big)\Big)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

melkein kaikilla $t \in (r,R)$. Jaetaan tämä arvio puolittain luvulla Ct, korotetaan puolittain potenssiin p jonka jälkeen kuvataan kasvavalla funktiolla φ, ja saadaan arvio

$$\Phi\Big(\frac{\operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r))}{Ct}\Big) \leq ⨍_{S(a,t)} \Phi(|Df|).$$

Oikean puolen termistä päästään nyt integraaliin yli alkuperäisen pallon, kun epäyhtälö kerrotaan puolittain pallonkuoren $S(a,t)$ mitalla $\omega_{n-1}t^{n-1}$, ja integroidaan muuttuja t välin (r,R) yli :

$$\begin{aligned} \omega_{n-1} \int_r^R \Phi\Big(\frac{\operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r))}{Ct}\Big) t^{n-1} dt \leq \int_{B(a,R)\setminus B(a,r)} \Phi(|Df|) \\ \leq \int_{B(a,R)} \Phi(|Df|) \leq \int_{B(a,R)} \frac{M^n}{\log(e+M)} + \frac{|Df|^n}{\log(e+|Df|)} < \infty, \end{aligned}$$

sillä $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\text{loc}}(\Omega)$. Tämä yläraja on erityisesti voimassa kaikilla $r \in (0,R)$. Nyt koska $\operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r))$ on kasvava säteen r suhteen sekä ei-negatiivinen, on aina olemassa $\lim_{r\to 0+} \operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r)) \geq 0$. Edustajan $\hat{f}$ jatkuvuus seuraa, jos tämä raja on 0. Jos näin ei ole, eli

$$z := \lim_{r \to 0+} \operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r)) > 0,$$

erityisesti siis jokaisella $r > 0$ tämä halkaisija on vähintään $z > 0$, niin jollain $\delta > 0$ pätee funktion Φ valinnan nojalla

$$\lim_{r\to 0+} \omega_{n-1} \int_r^R \Phi\Big(\frac{\operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r))}{Ct}\Big) t^{n-1} dt \geq \lim_{r\to 0+} \omega_{n-1} \int_r^R \Phi\big(\frac{z}{Ct}\big) t^{n-1} dt$$
$$\geq \lim_{r\to 0+} \omega_{n-1} \int_r^\delta \frac{z^n C^{-n} t^{-1}}{\log(e + \frac{z}{Ct})} dt \geq C \int_0^\delta \frac{dt}{t \log(\frac{1}{t})} = \infty.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä edellä saatu äärellinen yläraja $\int_{B(a,R)} \Phi(|Df|)$ on voimassa kaikilla säteillä r. Siten on oltava $\lim_{r\to 0+} \operatorname{diam} \hat{f}(B(a,r)) = 0$, eli edustaja $\hat{f}$ on jatkuva pisteessä $a \in \Omega$ ja siten koko alueessa Ω.

$\square$

Lauseiden 3.3.1 ja 3.3.2 todistus. Jos $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ on äärellisen väännön kuvaus, on sille erityisesti $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ja siten lauseen 3.2.3 nojalla sen komponenttikuvaukset ovat p-heikosti monotonisia kaikilla $p < n$. Lemman 3.3.4 nojalla myös äärellisen väännön kuvaus, jolle $\exp(\lambda K_f) \in L^1_{loc}$ jollain $\lambda > 0$ toteuttaa ehdon $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Molemmissa tapauksissa jatkuvan edustajan olemassaolo seuraa siis suoraan lauseesta 3.3.8. $\square$

3.4. Differentioituvuus melkein kaikkialla

Tunnetusti kun $p > n$ on jokaisella Sobolev-funktiolla $f \in W^{1,p}(\Omega)$ paitsi jatkuva edustaja, on tämä edustaja myös differentioituva melkein kaikilla $x \in \Omega$. Sama ei tietenkään päde kun $p \leq n$, sillä nyt edes jatkuvuus ei ole välttämätöntä. Samoin kun näille yleisille jatkuvan edustajan omaaville Sobolev-funktioille, myös lauseiden 3.3.1 ja 3.3.2 tapauksessa saadaan kuvauksen jatkuvalle edustajalle differentioituvuus melkein kaikkialla seuraavien tulosten avulla:

Lause 3.4.1 (Stepanov). *Olkoon $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ funktio, jolle*

$$\limsup_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} < \infty$$

melkein kaikilla $x_0 \in \Omega$. Tällöin f on differentioituva melkein kaikkialla.

Todistus. Epäyhtälöiden

$$\max_{1\leq j\leq m} |x_j| \leq |(x_1, \ldots, x_m)| \leq \sum_{j=1}^m |x_j|$$

nojalla erotusosamäärän yläraja-arvo on äärellistä melkein kaikkialla myös jokaiselle komponenttikuvaukselle. Toisaalta jos jokainen näistä on differentioituva jossain pisteessä, myös itse funktio f on tässä pisteessä differentioituva. Siten voidaan olettaa, että $m = 1$ ja siis $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Olkoon $(B_j)_j$ jono palloja, joiden keskipisteet käyvät läpi kaikki alueen Ω rationaalipisteet ja säteet läpi kaikki positiiviset rationaaliluvut siten, että f on lisäksi rajoitettu jokaisessa pallossa B_j. Määritellään jokaisella $j \in \mathbb{N}$ funktiot g_j, $h_j \colon B_j \to \mathbb{R}$,

$$g_j(x) = \sup\{g(x) : g\colon B_j \to \mathbb{R} \text{ on } j\text{-Lipschitz, ja } g \leq f\},$$

$$h_j(x) = \inf\{h(x) : h\colon B_j \to \mathbb{R} \text{ on } j\text{-Lipschitz, ja } h \geq f\}.$$

Tällöin myös g_j ja h_j ovat j-Lipschitz-jatkuvia: Esimerkiksi jos $x, y \in B_j$ siten, että $g_j(x) \geq g_j(y)$, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on j-Lipschitz kuvaus g siten, että

$$g(x) \geq g_j(x) - \varepsilon,$$

jolloin Lipschitz-jatkuvuudesta seuraa välttämättä

$$g_j(y) \geq g(y) \geq g(x) - j|x-y| \geq g_j(x) - \varepsilon - j|x-y|,$$

jolloin saadaan $|g_j(x) - g_j(y)| \leq j|x-y| + \varepsilon$ mielivaltaisella $\varepsilon > 0$, vastaavasti myös funktiolle h_j. Selvästi nämä kuvaukset määrittelevien supremumin ja infimumin nojalla pätee myös $g_j \leq f \leq h_j$ pallossa B_j.

Tunnetusti Lipschitz-jatkuvat kuvaukset ovat melkein kaikkialla differentioituvia. Olkoon siis $x_0 \in \Omega$ piste, jolle oletuksen mukainen ylärajaarvo on äärellistä, ja jossa funktiot g_j, h_j ovat differentioituvia kaikilla j, joilla $x_0 \in B_j$. Tällaisia pisteitä ovat oletusten nojalla melkein kaikki $x \in \Omega$. Tällöin on olemassa $r > 0$ ja $M > 0$ siten, että kun $x \in B(x_0, r)$, niin

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M.$$

Nyt kun $j \geq M$ siten, että $x_0 \in B_j \subset B(x_0, r)$, niin välttämättä $g_j(x_0) = h_j(x_0) = f(x_0)$: Pallon B_j valinnan nojalla $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| \leq j|x - x_0|$ kaikilla sen pisteillä, joten esimerkiksi funktiot $x \mapsto f(x_0) \pm j|x - x_0|$ ovat j-Lipschitzejä ja kelpaavat selvästi funktioiden g_j, h_j määritelmien testifunktioiksi.

Edelleen koska Sobolev-funktioille, joita g_j ja h_j ovat, pätee $\nabla g_j = \nabla h_j$ joukossa $\{x : g_j(x) = h_j(x)\}$, niin voidaan nollamittainen joukko ohittamalla olettaa lisäksi, että $\nabla g_j(x_0) = \nabla h_j(x_0)$. Nyt näiden funktioiden differentioituvuudesta pisteessä x_0 ja arviosta $g_j \leq f \leq h_j$ sekä yhtäsuuruudesta pisteessä x_0 saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{x \to x_0} \frac{g_j(x) - g_j(x_0) - \nabla g_j(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} \\
&\leq \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla g_j(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} \\
&\leq \limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \nabla g_j(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} \\
&\leq \lim_{x \to x_0} \frac{h_j(x) - h(x_0) - \nabla h_j(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,
\end{aligned}$$

mikä tarkoittaa differentioituvuuden määritelmän mukaan, että myös f on differentioituva pisteessä x_0 ja $\nabla f(x_0) = \nabla g_j(x_0) = \nabla h_j(x_0)$. Tästä seuraa myös vektoriarvoisen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ kuvauksen differentioituvuus.

$\square$

LAUSE 3.4.2. *Olkoon $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, missä $p > n-1$. Jos f on jatkuva ja sen komponenttikuvaukset $f_1, \ldots, f_n$ lisäksi p-heikosti monotonisia, niin f on differentioituva melkein kaikkialla alueessa Ω.*

TODISTUS. Kuten huomautuksessa 3.2.2 todettiin, on f näillä oletuksilla monotoninen varsinaisessa mielessä, eli

$$\mathrm{osc}_B f \leq \mathrm{osc}_{\partial B} f \text{ kaikilla palloilla } B \subset\subset \Omega.$$

Valitaan nyt $B = B(x_0, r)$ jolle $2B \subset\subset \Omega$ ja käytetään Sobolevin epäyhtälöä pallonkuorella (lause 3.3.6), jonka mukaan melkein kaikilla $t \in (r, 2r)$ pätee

$$\mathrm{osc}_B f \leq \mathrm{osc}_{S(x_0,r)} f \leq C t^{1-\frac{n-1}{p}} \Big(\int_{S(x_0,t)} |Df|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Valitaan tämän arvion toteuttava t, jolle lisäksi

$$\int_{S(x_0,t)} |Df|^p \leq \frac{1}{r} \int_{2B \setminus B} |Df|^p,$$

joka on olemassa integraalin väliarvolauseen nojalla. Nyt saadaan tällä säteellä t

$$\begin{aligned}
\mathrm{osc}_B f &\leq C t^{1-\frac{n-1}{p}} \Big(\frac{1}{r} \int_{2B \setminus B} |Df|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq C (2r)^{1-\frac{n-1}{p}} r^{-\frac{1}{p}} \Big(\int_{2B \setminus B} |Df|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C r^{1-\frac{n}{p}} \Big(\int_{2B \setminus B} |Df|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = C r \Big(\frac{1}{r^n} \int_{2B \setminus B} |Df|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Tällöin kun oletetaan lisäksi että x_0 on kuvauksen $|Df|^p$ Lebesgue-piste, mikä on mahdollista melkein kaikilla $x \in \Omega$, seuraa tästä

$$\begin{aligned}
&\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \limsup_{r \to 0} \frac{\mathrm{osc}_{B(x_0,r)} f}{r} \\
\leq\ & \limsup_{r \to 0} C \Big(\frac{1}{r^n} \int_{2B \setminus B} |Df|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \limsup_{r \to 0} C \Big(\frac{1}{|2B|} \int_{2B} |Df|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,
\end{aligned}$$

mikä edellisen lauseen nojalla tarkoittaa, että f on differentioituva pisteessä x_0.

$\square$

Näiden huomattavan vahvojen lauseiden avulla saadaan erityisesti käsiteltävien äärellisen väännön kuvausten differentioituvuus:

SEURAUS 3.4.3. (1) *Olkoon $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ äärellisen väännön kuvaus. Tällöin sen jatkuva edustaja on differentioituva melkein kaikilla $x \in \Omega$.*

(2) *Olkoon* $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *äärellisen väännön kuvaus, jolle* $\exp(\lambda K_f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *jollain* $\lambda > 0$. *Tällöin sen jatkuva edustaja on differentioituva melkein kaikilla* $x \in \Omega$.

TODISTUS. Väite seuraa helposti edellisestä lauseesta, sillä luvun päätulosten mukaan näillä kuvauksilla on paitsi jatkuvat edustajat, niin ne kuuluvat myös avaruuteen $W^{1,q}_{\mathrm{loc}}$ jollain $q > n - 1$. Lisäksi komponenttikuvaukset ovat heikosti monotonisia lauseen 3.2.3 nojalla.

□

LUKU 4

Diskreettisyys ja avoimuus

Tässä luvussa todistetaan työn päätulos, äärellisen väännön kuvauksen diskreettisyys ja avoimuus. Muistetaan, että funktio $f\colon A \to B$ on diskreetti, jos kaikilla $b \in B$ joukko $f^{-1}(b) \subset A$ on diskreetti, eli sen jokainen piste on erakkopiste. Vastaavasti f on avoin, jos joukko $f(U) \subset B$ on avoin kaikilla avoimilla joukoilla $U \subset A$. Edellisessä luvussa tarkasteltiin Sobolev-avaruuden $W^{1,n}$ äärellisen väännön kuvauksen jatkuvuutta, ja nyt nähdään että tällainen kuvaus on väännön K_f ollessa riittävän säännöllinen joko vakio tai sekä diskreetti että avoin. Erityisesti oleellisesti rajoitettu vääntöfunktio, siis myös vakio, on riittävän säännöllinen, minkä seurauksena todistus osoittaa samalla kvasisäännöllisen ei-vakion kuvauksen diskreettisyyden ja avoimuuden. Päätuloksen todistus mukailee lähdettä [**HenK**], joka perustuu artikkelin [**OZ**] menetelmään.

Seuraava esimerkki osoittaa, että nämä ominaisuudet eivät ole välttämättömiä mielivaltaiselle äärellisen väännön kuvaukselle. Siten vääntöfunktiosta K_f todella on tehtävä oletuksia haluttujen ominaisuuksien varmistamiseksi:

Esimerkki 4.0.4. Olkoon $f\colon (-1,1)^2 \to \mathbb{R}^2$ jatkuva kuvaus
$$f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1, |x_1|x_2).$$
Selvästi f ei ole diskreetti, sillä $f^{-1}(0) = \{0\} \times (-1,1)$. Kun $x_1 \neq 0$, on differentiaali
$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm x_2 & |x_1| \end{bmatrix},$$
jonka operaattorinormi on joukossa $(-1.1)^2$ korkeintaan $|(1, 0, \pm x_2, |x_1|)| \leq 3$. Selvästi f toteuttaa ACL-karakterisaation, ja on neliöintegroituva kuten myös jokainen osittaisderivaatta $\partial_j f_i$, siis $f \in W^{1,2}((-1,1)^2, \mathbb{R}^2)$. Edelleen Jacobin determinantti on $J_f(x) = |x_1| \geq 0$. Siten kuvaus f on äärellisen väännön kuvaus, jonka vääntöfunktioksi kelpaa
$$K_f(x) = \frac{C}{|x_1|}.$$
Tämä vääntöfunktio on integroituva kaikilla potensseilla $p < 1 = 2 - 1$. Kuten tässä luvussa tullaan näkemään, riittäisi tässä tieto $K_f \in L^1$ takaamaan sekä diskreettisyyden ja avoimuuden äärellisen väännön kuvaukselle avaruudessa $W^{1,2}(\Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Esimerkki siis osoittaa, että tästä integroituvuusasteesta ei voida ainakaan suoraan luopua.

4.1. Topologinen aste

Diskreettisyyden ja avoimuuden todistuksessa keskeistä on kuvaukseen ja sen tiettyyn maalijoukon osajoukkoon liittyvä topologisen asteen käsite. Tässä kappaleessa tarkastellaan tämän käsitteen määritelmää jatkuville kuvauksille, minkä jälkeen tutkitaan sen ominaisuuksia sopivissa Sobolevin avaruuksissa. Topologisen asteen intuitiivisena ideana on tutkia annetun kuvauksen ja sen maalijoukon pisteen alkukuvien määrää suunnistus huomioiden määrittelyjoukkonsa osajoukoissa. Aloitetaan yksinkertaisimmasta tapauksesta, jatkuvasti derivoituvista funktioista:

Olkoon $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n), U \subset\subset \Omega$ ja $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$. Nyt voidaan määritellä kuvaukseen f liittyvä *topologinen aste*:

$$\deg(y, f, U) = \sum_{x \in U \cap f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x),$$

mikäli $J_f(x) \neq 0$ kaikilla summan pisteillä x. Tämän määritelmän yleistys jatkuville Sobolev-funktioille tulee olemaan oleellinen työkalu, jonka kehittelyyn tarvitaan muutama aputulos. Kaavan summa korvataan luonnollisesti integroinnilla yli joukon U, integrandina

$$\varphi(f(x))J_f(x),$$

missä φ on Diracin mitan approksimaatio pisteessä y. Tämä topologisen asteen määrittely osoittautuu seuraavissa kohdissa toimivaksi, kun φ on sileä funktio, jolle

$$y \in \operatorname{spt} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U).$$

LEMMA 4.1.1. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja avoin joukko ja $f, g \colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuvia kuvauksia. Jos $f = g$ reunalla ∂U, niin*

$$\int_U J_f(x)dx = \int_U J_g(x)dx.$$

TODISTUS. Jos $h \colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ on mielivaltainen Lipschitz-kuvaus, jolle jokin komponenttikuvaus h_j häviää reunalla ∂U, niin sen Jacobin integraali häviää: Käyttämällä lauseen 1.2.20 mukaista jatketta saadaan Lipschitz-kuvaus $H \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jolle $H|_{\overline{U}} = h$ ja $H_j = 0$ joukossa $\mathbb{R}^n \setminus U$. Jos $B \subset \mathbb{R}^n$ on lisäksi pallo joka sisältää rajoitetun joukon U, niin selvästi H ja sen osittaisderivaatat ovat tässä pallossa rajoitettuja ja siten $H \in W^{1,\infty}(B, \mathbb{R}^n)$. Edelleen $H_j \in W_0^{1,\infty}(B)$, ja siten lemman 3.1.5 (jossa ensimmäinen komponenttikuvaus ei ole erikoisasemassa) nojalla saadaan

$$\int_B J_H(x)dx = \int_U J_H(x)dx = \int_U J_h(x)dx = 0,$$

sillä H_j ja siten myös J_H häviää joukon U komplementissa. Nyt käyttämällä teleskooppisummaa Jacobeille J_f ja J_g saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_U J_f - J_g \\
= &\sum_{j=1}^{n} \int_U J(g_1, \ldots, g_{j-1}, f_j, \ldots, f_n) - J(g_1, \ldots, g_j, f_{j+1}, \ldots, f_n) \\
= &\sum_{j=1}^{n} \int_U J(g_1, \ldots, g_{j-1}, f_j - g_j, f_{j+1}, \ldots, f_n) \\
= &\ 0,
\end{aligned}$$

sillä viimeisen summan Jacobit ovat peräisin Lipschitz-kuvauksista, joiden j. komponenttikuvaus häviää reunalla ∂U.

□

LEMMA 4.1.2. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja avoin joukko ja $f, g \colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuvia kuvauksia. Jos $f = g$ reunalla ∂U, niin*

$$\int_U \varphi(f(x)) J_f(x) dx = \int_U \varphi(g(x)) J_g(x) dx$$

kaikilla sileillä $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

TODISTUS. Olkoon $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja ψ jatkuvasti derivoituva funktio

$$\psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_n) := \int_0^{x_1} \varphi(t, x_2, \ldots, x_n) dt,$$

jolloin $\partial_1 \psi = \varphi$. Sen gradientti on rajoitettu kompaktissa joukossa $\overline{U}$, joten kuvaukset

$$x \mapsto (\psi \circ f, f_2, \ldots, f_n) \text{ ja } x \mapsto (\psi \circ g, g_2, \ldots, g_n)$$

ovat myös Lipschitz-jatkuvia. Edellisen lemman nojalla

$$\int_U J(\psi \circ f, f_2, \ldots, f_n) = \int_U J(\psi \circ g, g_2, \ldots, g_n).$$

Ketjusäännöllä nämä Jacobit saadaan muotoon

$$J(\psi \circ f, f_2, \ldots, f_n) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j \psi \circ f) J(f_j, f_2, \ldots, f_n) = (\varphi \circ f) J_f.$$

Sama pätee funktiolle g, ja näin ollen siis

$$\int_U \varphi(f(x)) J_f(x) dx = \int_U \varphi(g(x)) J_g(x) dx.$$

□

Lemma 4.1.3. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja avoin joukko ja $f, g\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuvia kuvauksia. Olkoon lisäksi $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko siten, että kun $x \in \partial U$, niin*

$$[f(x), g(x)] \cap E = \emptyset,$$

eli E ei leikkaa janoja joiden päätepisteinä ovat reunan ∂U mielivaltaisen pisteen kuvat kuvauksissa f ja g. Tällöin kaikilla $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ joille $\operatorname{spt}\varphi \subset E$ *pätee*

$$\int_U \varphi(f(x)J_f(x)dx = \int_U \varphi(g(x))J_g(x)dx.$$

Todistus. Olkoon

$$F \coloneqq \{x \in \overline{U} : [f(x), g(x)] \cap E \neq \emptyset\}.$$

Oletuksen nojalla $F \subset U$. F on myös kompakti, sillä se on suljettu: Jos $x \notin F$ eli $[f(x), g(x)] \cap E = \emptyset$, niin koska kyseinen jana ja joukko E ovat kompakteja, on janalla putkimainen ympäristö, joka ei leikkaa joukkoa E. Tällöin kuvausten f ja g Lipschitz-jatkuvuus takaa, että jos $|y - x|$ on pientä, niin jana $[f(y), g(y)]$ pysyy tässä ympäristössä ja siten myös $y \notin F$, siis $\overline{U} \setminus F$ on avoin.

Kompaktiuden nojalla on olemassa Lipschitz-kuvaus

$$u\colon \mathbb{R}^n \to [0,1], \quad u|_F = 1, \quad u|_{\mathbb{R}^n \setminus U} = 0.$$

Määritellään tämän avulla

$$h(x) \coloneqq f(x) + u(x)(g(x) - f(x)), \text{ kun } x \in \overline{U}.$$

Tällöin myös h on Lipschitz-jatkuva, sillä tällaisten summat ovat, ja jokainen funktioista f, g, u on rajoitettu kompaktissa $\overline{U}$. Selvästi myös $h = f$ joukossa $\mathbb{R}^n \setminus U$ ja $h = g$ joukossa F. Erityisesti f ja h yhtyvät reunalla ∂U, joten edellisen lemman nojalla

$$\int_U \varphi(f(x))J_f(x)dx = \int_U \varphi(h(x))J_h(x)dx$$

kaikilla sileillä φ. Jos nyt lisäksi $\operatorname{spt}\varphi \subset E$, niin $\varphi(h(x)) \neq 0$ vain niillä x joilla $h(x) \in E$. Toisaalta koska $0 \leq u(x) \leq 1$, on $h(x)$ aina pisteiden $f(x)$ ja $g(x)$ konveksikombinaatio ja siten janalla $[f(x), g(x)]$. Jos siis $\varphi(h(x)) \neq 0$, niin $x \in F$. Samoin luonnollisesti jos $\varphi(g(x)) \neq 0$, niin on oltava $g(x) = 1g(x) + 0f(x) \in E$ eli $x \in F$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \int_U \varphi(f(x))J_f(x)dx &= \int_F \varphi(h(x))J_h(x)dx \\ = \int_F \varphi(g(x))J_g(x)dx &= \int_U \varphi(g(x))J_g(x)dx, \end{aligned}$$

sillä kun joukossa F pätee $h = g$, myös $J_h = J_g$ melkein kaikilla $x \in F$.

$\square$

LEMMA 4.1.4. *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja avoin joukko ja $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva kuvaus. Olkoon C joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ komponentti ja $\varphi \in C_0^\infty(C) \cap L^1(C)$. Tällöin on olemassa vakio $a \in \mathbb{R}$, joka ei riipu funktiosta φ siten, että*

$$\int_U \varphi(f(x)) J_f(x) dx = a \int_C \varphi(y) dy.$$

TODISTUS. Jatketaan φ nollana koko avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ja approksimoidaan tätä sileää L^1-funktiota kasvavalla jonolla yksinkertaisia funktioita. Voidaan myös olettaa että nämä muodostuvat karakteristisista funktioista, joiden kantajat ovat kuutioita $Q \subset C$, joilla on rationaaliset sivunpituudet. Tämän approksimaation perusteella riittää osoittaa väite tällaiselle karakteristiselle funktiolle χ_Q integraalin lineaarisuuden ja monotonisen konvergenssin nojalla.

Olkoon siis $Q' \subset\subset C$ mielivaltainen kuutio jonka sivunpituus on rationaalinen. Merkitään annetulle rationaaliluvulle $d > 0$ x-keskistä d-sivuista kuutiota $Q(x, d)$ ja määritellään joukko

$$Q'_d \coloneqq \{x \in C : Q(x, d) \subset Q'\}.$$

Selvästi kun $r > 0$ on tarpeeksi pieni, niin Lipschitz-kuvauksille f ja $g = f + r$ pätee $[f(x), g(x)] \cap Q' = \emptyset$ kaikilla $x \in \partial U$, sillä joukkojen Q' ja ∂U etäisyys on positiivinen. Tällöin kun $y, z \in Q'_d$ joille $|y - z| < r$, niin karakterististen funktioiden sileiden approksimaatioiden ja edellisen lemman nojalla

$$\begin{aligned} & \int_U \chi_{Q(z,d)}(f(x)) J_f(x) dx \\ = & \int_U \chi_{Q(z,d)}(g(x)) J_g(x) dx \\ = & \int_U \chi_{Q(y,d)}(f(x)) J_f(x) dx. \end{aligned}$$

Nyt siis ylläoleva integraali on kuution $Q(z, d)$ keskipisteen z funktiona vakiota sen ympäristössä $B(z, r) \cap Q'_d$ kaikilla $z \in Q'_d$, joten sen on oltava vakiota koko joukossa Q'_d. Olkoon tämä lukuun $d \in \mathbb{Q}$ liittyvä vakio $a_d |Q(0, d)|$, eli siis

$$\int_U \chi_{Q(z,d)}(f(x)) J_f(x) dx = a_d |Q(0, d)| = a_d \int_C \chi_{Q(0,d)}(x) dx$$

kaikilla $z \in Q'_d$. Väite on siten todistettu, jos luku a_d on sama kaikilla $d \in \mathbb{Q}^+$. Jakamalla kuutio $Q(z, d)$ sivuittain puoliksi 2^n osaan $\frac{d}{2}$-sivuisia kuutioita Q_j saadaan

$$
\begin{aligned}
a_d|Q(0,d)| &= \int_U \chi_{Q(z,d)}(f(x))J_f(x)dx \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} \int_U \chi_{Q_j}(f(x))J_f(x)dx \\
&= 2^n a_{\frac{d}{2}}|Q(0,\frac{d}{2})| \\
&= a_{\frac{d}{2}}|Q(0,d)|,
\end{aligned}
$$

eli luvun d puolittaminen ei muuta lukua a_d. Vastaavasti jakaminen millä tahansa luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$ ei muuta tätä lukua. Lisäksi rationaaliluku $d \in \mathbb{Q}^+$ valittiin mielivaltaisesti. Tästä seuraa että $a_d = a_{d'}$ kaikilla $d, d' \in \mathbb{Q}^+$, sillä on $k, k' \in \mathbb{N}$ joille $d = \frac{q}{k}$, $d' = \frac{q}{k'}$ jollain $q \in \mathbb{Q}$.

□

Seuraus 4.1.5. *Seuraavan määritelmän topologinen aste jatkuville kuvauksille on hyvin määritelty.*

Määritelmä 4.1.6. Olkoon $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Kun $U \subset\subset \Omega$ on alue ja C joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ komponentti, niin kuvauksen f *topologinen aste* komponentissa C joukon U suhteen on raja-arvo

$$\deg(C, f, U) := \lim_{j\to\infty} \int_U \varphi(f_j(x))J_{f_j}(x)dx,$$

missä $(f_j)_j$ on jono kuvauksen f tavallisia sileitä konvoluutioapproksimaatioita, ja $\varphi \in C_0^\infty(C, [0,\infty))$ mielivaltainen testifunktio, jolle $\int_C \varphi = 1$. Pisteille $y \in C$ asetetaan lisäksi $\deg(y, f, U) = \deg(C, f, U)$.

Todistus. Jokainen sileä konvoluutioapproksimaatio f_j on lokaalisti Lipschitz-jatkuva, siis erityisesti Lipschitz rajoitettuna kompaktiin joukkoon $\overline{U} \subset \Omega$. Tällöin kiinteällä indeksillä j on lemman 4.1.4 nojalla integraali

$$\int_U \varphi(f_j(x))J_{f_j}(x)dx$$

riippumaton testifunktion $\varphi \in C_0^\infty(C)$, jolle $\int_C \varphi = 1$, valinnasta. Valitsemalla tämän nojalla kompaktikantajainen $\varphi \in C_C^\infty(C)$ saadaan joukot $\operatorname{spt}\varphi = E$ ja $f(\partial U)$ positiivisen etäisyyden päähän toisistaan. Konvoluutioapproksimaatiot f_j suppenevat joukossa Ω lokaalisti tasaisesti jatkuvaan kuvaukseen f. Tällöin reunan ∂U kompaktisuuden nojalla saadaan kaikilla $x \in \partial U$ etäisyys $|f_j(x) - f(x)|$ mielivaltaisen pieneksi suurilla j, erityisesti pienemmäksi kuin joukkojen $f(\partial U)$ ja E etäisyys. Siten tällaisille konvoluutioille jana $[f_j(x), f_i(x)]$ ei leikkaa joukkoa $E = \operatorname{spt}\varphi$ millään $x \in \partial U$, joten lemman 4.1.3 nojalla aiempi integraali on vakiota kun j on riittävän suuri. Tällöin topologisen asteen $\deg(C, f, U)$ määrittelevä raja-arvo on siis olemassa, eikä riipu testifunktion φ valinnasta.

$\square$

Seuraavan lauseen mukaan topologisen asteen nimi on mielekäs. Tästä saadaan myös yhteys pisteen alkukuvien lukumäärälle jatkuvassa kuvauksessa.

LAUSE 4.1.7. *Määritelmän 4.1.6 topologinen aste on kokonaisluku.*

TODISTUS. Riittää osoittaa, että $\int_U \varphi(f)J_f$ on kokonaisluku kaikilla sileillä funktioilla f ja testifunktioilla $\varphi \in C_0^\infty(C)$, sillä määritelmän mukaan $\deg(C, f, U)$ yleiselle jatkuvalle kuvaukselle f on raja-arvo näistä integraaleista sileille konvoluutioapproksimaatioille, ja kokonaislukujonon raja-arvo on välttämättä kokonaisluku.

Olkoon siis $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ sileä. Muistetaan, että testifunktio φ voidaan valita vapaasti, sillä se ei vaikuta integraalin arvoon kunhan $\int_C \varphi = 1$. Väite on selvä, jos $J_f = 0$ joukossa $f^{-1}(C) \cap U$, sillä tällöin myös määritelmän integraali häviää eli on kokonaisluku 0. Voidaan siten olettaa, että on $x_0 \in f^{-1}(C) \cap U$, jolle $J_f(x_0) \neq 0$. Tällöin f on pisteen x_0 jossain ympäristössä diffeomorfismi, ja siten $|f(U) \cap C| > 0$. Koska lauseen 1.2.21 nojalla kriittisten pisteiden joukon

$$\{x \in f^{-1}(C) \cap U : J_f(x) = 0\}$$

kuva on nollamittainen, löydetään nyt

$$y \in f(U) \cap C$$

jolle $J_f(x) \neq 0$ kaikilla alkukuvilla $x \in f^{-1}(y) \cap U$.

Näitä alkukuvia voi olla vain äärellinen määrä: Jos olisi ääretön jono $(x_j)_j \in U$ jolle $f(x_j) = y$ kaikilla j, olisi tällä jonolla kasautumispiste x kompaktissa joukossa $\overline{U}$. Selvästi jatkuvuuden nojalla olisi myös $f(x) = y$, ja oletuksesta $y \in C \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ seuraa että $x \in U$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällöin olisi myös $J_f(x) \neq 0$ ja kuvauksen tulisi käänteskuvauslauseen nojalla olla myös tässä pisteessä lokaalisti diffeomorfismi, vaikka $x_j \to x$.

Merkitään alkukuvan äärellisyyden perusteella

$$\{x_1, \ldots, x_k\} = f^{-1}(y) \cap U.$$

Olkoon nyt $\varphi(z) := J_\varepsilon(z - y)$, missä J_ε on tavallinen silottajaydin, jolloin pienellä $\varepsilon > 0$ testifunktio φ on erityisesti sileä, kompaktikantajainen ja $\int_C \varphi = 1$. Lisäksi kun ε on tarpeeksi pieni, niin $f^{-1}(\operatorname{spt} \varphi) = f^{-1}(\overline{B(y, \varepsilon)})$ muodostuu tasan k kappaleesta komponentteja $V_1, \ldots, V_k$, joille siis $x_j \in V_j$, mikä nähdään samalla päättelyllä kuin alkukuvajoukon äärellisyys. Tällöin pätee

$$\int_U \varphi(f(x))J_f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{V_j} \varphi(f(x))J_f(x)dx.$$

Pisteiden x_j valinnan nojalla kuvaus f on lisäksi diffeomorfismi näissä ympäristöissä V_j, kunhan valitaan riittävän pieni ε. Siten integraalin muuttujanvaihdolla saadaan

$$\int_{V_j} \varphi(f(x))J_f(x)dx = \begin{cases} \int_C \varphi(y)dy = 1 & \text{jos } J_f(x_j) > 0 \\ -\int_C \varphi(y)dy = -1 & \text{jos } J_f(x_j) < 0, \end{cases}$$

mistä väite seuraa.

□

Huomautus 4.1.8. Topologiselle asteelle pätevät seuraavat ominaisuudet, jotka seuraavat edellisistä tuloksista:

(1) Jos $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ovat jatkuvia ja $U \subset\subset \Omega$ alue siten, että $f = g$ reunalla ∂U, niin $\deg(C, f, U) = \deg(C, g, U)$ joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U) = \mathbb{R}^n \setminus g(\partial U)$ komponenteilla C.
(2) $\deg(C, f, U) = 0$ kaikilla komponenteilla $C \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ joille $C \cap f(U) = \emptyset$, sillä nyt kaikilla testifunktioilla $\varphi \in C_0^\infty(C)$ on selvästi $\varphi(f(x)) = 0$ kaikilla $x \in U$.
(3) Jos $C \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ on komponentti, jolle $\deg(C, f, U) \neq 0$, niin $C \subset f(U)$. Tämä seuraa siitä, että $f(\overline{U})$ on kompakti ja $C \cap f(\partial U) = \emptyset$, joten jos olisi piste $y \in C \setminus f(U)$ niin erityisesti $y \notin f(\overline{U})$, joten sen etäisyys tästä kompaktista joukosta olisi positiivinen ja siten olisi $r > 0$ jolle $B(y, r) \subset C \setminus f(U)$. Tällöin kuitenkin voitaisiin valita testifunktio φ, jonka kantaja olisi tässä pallossa ja selvästi olisi $\deg(C, f, U) = 0$ vastoin oletusta.
(4) Jos $C \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ on rajoittamaton komponentti, niin $\deg(C, f, U) = 0$. Tämä seuraa kohdan (2) päättelystä, sillä $f(U) \subset f(\overline{U})$, eli $f(U)$ on erityisesti rajoitettu ja siten voidaan valita φ, jolle $\operatorname{spt} \varphi \cap f(U) = \emptyset$.
(5) Jos $U \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu alue ja $f\colon \partial U \to \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus, niin voidaan määritellä joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ komponenteille C topologinen aste $\deg(C, f, U) = \deg(C, F, U)$, missä $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva Tietzen jatke jolle $F|_{\partial U} = f$. Kohdan (1) nojalla tämä määrittely on yksikäsitteinen eli ei riipu valitusta jatkeesta F.
(6) Topologinen aste ei muutu homotopiassa: Olkoon $H\colon \overline{U} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ on homotopia kuvauksesta $f = H(\cdot, 0)$ kuvaukseen $g = H(\cdot, 1)$. Jos $y \notin H(\partial U, [0, 1])$, niin $\deg(y, f, U) = \deg(y, g, U)$. Väite seuraa lemmasta 4.1.3, sillä jatkuvia f, g voidaan approksimoida Lipschitz-kuvauksilla, joille aste on lemman nojalla sama.

4.2. Topologinen aste Sobolev-funktioille

Tietyissä Sobolev-avaruuksissa voidaan jatkuvan kuvauksen f topologinen aste määrittää suoraan integraalina $\int \varphi(f) J_f$:

LAUSE 4.2.1. *Olkoon $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ jatkuva kuvaus. Tällöin määritelmän 4.1.6 topologinen aste saadaan suoraan integraalina*

$$\deg(C, f, U) = \int_U \varphi(f(x)) J_f(x) dx,$$

missä $U \subset\subset \mathbb{R}^n$ on alue, C joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ komponentti ja $\varphi \in C_0^\infty(C)$ mielivaltainen ei-negatiivinen testifunktio, jolle $\int_C \varphi(y) dy = 1$.

TODISTUS. Määritelmän mukaan

$$\deg(C, f, U) = \lim_{j \to \infty} \int_U \varphi(f_j(x)) J_{f_j}(x) dx,$$

missä $(f_j)_j$ on jono kuvauksen f konvoluutioapproksimaatioita. Näille pätee lisäksi $f_j \to f$ avaruudessa $W^{1,n}(\operatorname{spt} \varphi, \mathbb{R}^n)$ ja lisäksi lokaalisti tasaisesti sillä f on jatkuva. Siten $J_{f_j} \to J_f$ avaruudessa L^1 ja $\varphi(f_j) \to \varphi(f)$ tasaisesti joukossa U, mistä seuraa

$$\int_U \varphi(f_j(x)) J_{f_j}(x) dx \to \int_U \varphi(f(x)) J_f(x) dx.$$

□

Seuraavassa lemmassa esiintyvät adjungoidun matriisin ja vektorikentän divergenssin käsitteet. Muistetaan, että $(n \times n)$-neliömatriisille A sen adjungoitu matriisi (tai liittomatriisi) $\operatorname{adj} A$ on matriisi, joka saadaan ottamalla transpoosi sen kofaktorimatriisista C. Kofaktorimatriisi muodostuu matriisin A jokaista paikkaa vastaavista alideterminanteista, joista lisäksi otetaan vastaluku joka toisessa paikassa kuten determinantin muodostamisessa. Täsmällisesti siis kofaktorimatriisin C paikassa (i, j) oleva alkio on determinantti $(n-1) \times (n-1)$-matriisista, joka saadaan poistamalla matriisista A i. rivi ja j. sarake, kerrottuna luvulla $(-1)^{i+j}$. Adjungoidulle matriisille pätee erityisesti yhtälö

$$A \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \, A = \det A \cdot I.$$

Jatkuvasti derivoituvan vektorikentän $V \colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ divergenssi $\operatorname{div} V$ on skalaarikenttä $A \to \mathbb{R}$, joka pisteessä $x \in A$ saa arvon

$$\operatorname{div} V(x) = \partial_1 V_1(x) + \cdots + \partial_n V_n(x).$$

LEMMA 4.2.2. *Olkoon $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ jatkuva äärellisen väännön kuvaus siten, että $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Tällöin kaikille jatkuvasti derivoituville vektorikentille $V \in C^1(\overline{f(\Omega)}, \mathbb{R}^n)$ pätee*

$$\int_\Omega \Big\langle \operatorname{adj} Df(x)(V(f(x)), \nabla\varphi(x) \Big\rangle dx = -\int_\Omega \operatorname{div} V(f(x)) J_f(x) \varphi(x) dx$$

kaikilla $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$.

TODISTUS. Olkoon $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$. Väitteen yhtälö on integraalin ja derivoinnin lineaarisuuden nojalla lineaarinen kentän V suhteen, joten voidaan olettaa $V = (v, 0, \dots, 0)$. Määritellään apufunktio

$$g(x) := (v(f(x)), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

jolle pätee ketjusäännön nojalla

$$J_g(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j v(f(x)) J(f_j, f_2, \dots, f_n) = \partial_1 v(f(x)) J_f(x).$$

Jotta päästäisiin käyttämään ominaisuutta $J_g \geq 0$, on komponenttikuvaus v vielä jaettava kahteen osaan: Olkoon $v^-(y) = y_1 \sup_y |\partial_1 v(y)|$, ja $v^+ = v + v^-$. Tällöin jälleen väitteen lineaarisuuteen vetoamalla voidaan olettaa $\partial_1 v \geq 0$, sillä $v = v^+ - v^-$, joista $\partial_1 v^+ \geq 0$ ja sama pätee funktiolle v^- merkkiä vaihtamalla.

Tällöin siis voidaan olettaa, että $J_g \geq 0$, sillä f on äärellisen väännön kuvaus, eli jo määritelmän perusteella $J_f \geq 0$. Nyt koska $|Dg| \leq C|Df|$, ovat lauseen 3.1.8 oletukset ovat voimassa, eli distributiiviselle Jacobille pätee $\mathscr{J}_g = J_g$. Adjungoidun matriisin määritelmästä seuraa nyt

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big\langle \operatorname{adj} Df(x)(V(f(x)), \nabla\varphi(x)\Big\rangle dx \\
&= \int_\Omega v(f(x))\Big\langle \operatorname{adj} Df(x)e_1, \nabla\varphi(x)\Big\rangle dx \\
&= \int_\Omega v(f(x)) J(\varphi, f_2, \dots, f_n) dx \\
&= -\int_\Omega \varphi(x) J_g(x) dx \\
&= \int_\Omega \varphi(x)\partial_1 v(f(x)) J_f(x) dx \\
&= -\int_\Omega \operatorname{div} V(f(x)) J_f(x)\varphi(x) dx,
\end{aligned}$$

sillä vektori $\operatorname{adj} Df(x)e_1$ on yhtä kuin differentiaalin $Df(x)$ kofaktorimatriisin ensimmäinen rivi, joka muodostuu differentiaalin ensimmäistä riviä vastaavista alideterminanteista vaihtuvalla merkillä. Tällöin sen sisätulo gradientin $\nabla\varphi(x)$ kanssa on juuri Jacobi $J(\varphi, f_2, \dots, f_n)$. □

Edellisen lemman avulla saadaan topologinen aste määritettyä suoraan integraalina $\int \varphi(f) J_f$ myös tässä yleisemmässä Sobolev-avaruudessa:

LAUSE 4.2.3. *Olkoon $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ jatkuva äärellisen väännön kuvaus siten, että $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Kun $U \subset\subset \Omega$ on alue ja C*

joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ *komponentti, niin topologiselle asteelle pätee*

$$\deg(C, f, U) = \int_U \varphi(f(x)) J_f(x) dx$$

kaikilla ei-negatiivissa testifunktioilla $\varphi \in C_0^\infty(C)$*, joille* $\int_C \varphi = 1$.

TODISTUS. Aiemman nojalla topologinen aste ei riipu testifunktion φ valinnasta, joten voidaan olettaa $\operatorname{spt} \varphi \subset\subset C$. Huomautuksen 4.1.8 kohdan (b) nojalla voidaan myös olettaa, että $C \cap f(U) \neq \emptyset$, sillä muuten yhtälön molemmat puolet häviävät. Olkoon $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ siten, että $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \varphi$ (lause 1.2.22). Olkoon myös $\psi \in C_C^\infty(U)$ siten, että $\psi = 1$ joukon $f^{-1}(\operatorname{spt} \varphi) \cap U$ ympäristössä. Tämä on mahdollista, sillä selvästi $f^{-1}(\operatorname{spt} \varphi) \cap U \subset\subset U$, kun $\operatorname{spt} \varphi \subset\subset C \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$. Tällöin kun $(f_j)_j$ on jono kuvauksen f konvoluutioapproksimaatioita, saadaan näiden valintojen, edellisen lemman ja joukossa $\overline{U}$ tasaisen sekä $W^{1,n-1}$-normissa suppenemisen $f_j \to f$ nojalla lopulta

$$\begin{aligned}
\deg(C, f, U) &= \lim_{j\to\infty} \int_U \varphi(f_j(x)) J_{f_j}(x) dx \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_U \varphi(f_j(x)) J_{f_j}(x) \psi(x) dx \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_U \Delta u(f_j(x)) J_{f_j}(x) \psi(x) dx \\
&= \lim_{j\to\infty} - \int_U \Big\langle \operatorname{adj} Df_j(x) \nabla u(f_j(x)), \nabla \psi(x) \Big\rangle dx \\
&= - \int_U \Big\langle \operatorname{adj} Df(x) \nabla u(f(x)), \nabla \psi(x) \Big\rangle dx \\
&= \int_U \Delta u(f(x)) J_f(x) \psi(x) dx \\
&= \int_U \varphi(f(x)) J_f(x) dx. \qquad \square
\end{aligned}$$

LAUSE 4.2.4. *Olkoon* $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *jatkuva äärellisen väännön kuvaus siten, että* $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Kun* $U \subset\subset \Omega$ *on alue ja* C *joukon* $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ *komponentti jolle* $C \cap f(U) \neq \emptyset$, *niin* $\deg(C, f, U) > 0$.

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että Jacobi J_f ei voi hävitä melkein kaikilla $z \in U$, joille $f(z) \in C$: Valitaan $y \in C \cap f(U)$ ja merkitään $V = f^{-1}(C) \cap U$, joka on kuvauksen f jatkuvuuden nojalla avoin joukko. Edelleen jatkuvuuden nojalla pätee $\overline{f^{-1}(y) \cap U} \subset\subset U$, sillä $y \notin f(\partial U)$. Tällöin on olemassa piste $x \in V$, joka on joukon $f^{-1}(y)$ reunalla. Avoimuuden nojalla on pallo $B = B(x, r) \subset V$, jossa pisteen x valinnan nojalla $J_f > 0$ positiivimittaisessa joukossa: Jos näin ei olisi, eli $J_f = 0$ melkein kaikkialla pallossa B, niin äärellisen väännön takia myös $|Df| = 0$ melkein kaikkialla tässä pallossa, ja siten $f(B) = y$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tällöin x olisi joukon $f^{-1}(y)$ sisäpiste. Siis $J_f > 0$ positiivimittaisessa joukon V osajoukossa.

Lauseiden 3.2.3 ja 3.4.2 nojalla oletuksista seuraa, että kuvaus f on differentioituva melkein kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin voidaan valita piste $x_0 \in V$, jolle $J_f(x_0) > 0$ ja f on differentioituva tässä pisteessä. Olkoon $y_0 = f(x_0) \in C \cap f(U)$. Jacobin positiivisuus tarkoittaa erityisesti jatkuvan lineaarikuvauksen $z \mapsto Df(x_0)z$ kääntyvyyttä, ja siten

$$\alpha = l(Df(x_0)) := \inf_{|z|=1} |Df(x_0)z| > 0.$$

Tällöin voidaan valita tarpeeksi pieni säde $r \in (0, 1)$, jolle differentioituvuuden nojalla

$$|f(x_0 + z) - f(x_0) - Df(x_0)z| < |z|\alpha \leq r\alpha$$

kaikilla $z \in \overline{B(0, r)}$, erityisesti tämän pallon pinnalla.

Olkoon sitten $H\colon \overline{B(0, r)} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ homotopia

$$H(z, t) := (1 - t)(f(x_0 + z) - f(x_0)) + tDf(x_0)z.$$

Säteen r valinnan perusteella tiedetään, että kaikilla $z \in S^{n-1}(0, r)$ ja $t \in [0, 1]$ pätee $H(z, t) \neq 0$. Tällöin huomautuksen 4.1.8 kohdan (6) nojalla kuvaukselle $\hat{f}\colon z \mapsto f(x_0 + z) - f(x_0)$ pätee

$$\deg(0, \hat{f}, B(0, r)) = \deg(0, Df(x_0), B(0, r)),$$

jonka avulla saadaan

$$\begin{aligned} & \deg(y, f, B(x_0, r)) \\ = \; & \deg(0, \hat{f}, B(0, r)) \\ = \; & \deg(0, Df(x_0), B(0, r)) \\ = \; & \int_{B(0,r)} \psi(Df(x_0)z) J_{Df(x_0)}(z)dz \\ = \; & \int_{Df(x_0)(B(0,r))} \psi(y)dy = 1, \end{aligned}$$

kun valitaan testifunktioksi ψ silottajaydin, jonka kantaja kuuluu joukkoon $Df(x_0)(B(0, r))$. Olkoon $\varphi \in C_0^\infty(C)$ testifunktio siten, että sen kantaja kuuluu sekä joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial B(x_0, r))$ että joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial U)$ y_0-komponentteihin. Tällöin lauseesta 4.2.3 ja äärellisen väännön kuvauksen ominaisuudesta $J_f \geq 0$ seuraa, että

$$\begin{aligned} \deg(C, f, U) = \deg(y, f, U) &= \int_U \varphi(f(x)) J_f(x)dx \\ &\geq \int_{B(x_0,r)} \varphi(f(x)) J_f(x)dx = \deg(y, f, B(x_0, r)) \\ &= 1 > 0. \end{aligned}$$

□

Edellisen lauseen väite määrittelee niin sanotun suunnan säilyttävän jatkuvan kuvauksen. Lauseen oletusten mukainen äärellisen väännön kuvaus on tällainen, erityisesti siis edellisen ja tämän luvun päätulosten 3.3.1, 3.3.2, 4.3.1, 4.3.2 kuvaukset sekä välittömästi myös kaikki kvasisäännölliset kuvaukset ovat suunnan säilyttäviä.

4.3. Diskreetti ja avoin äärellisen väännön kuvaus

Topologisen asteen käsitteen ja edellisissä kappaleissa sille todistettujen ominaisuuksien avulla voidaan lopulta todistaa tutkielman päätulokset. Jatkuva, ei-vakio äärellisen väännön kuvaus on diskreetti ja avoin seuraavilla oletuksilla vääntöfunktion integroituvuudesta:

LAUSE 4.3.1. *Olkoon $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ jatkuva äärellisen väännön kuvaus, jolle $K_f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ jollain $p > n-1$, tai $p = 1$ kun $n = 2$. Tällöin f on joko vakio, tai diskreetti ja avoin kuvaus.*

LAUSE 4.3.2. *Olkoon $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ jatkuva äärellisen väännön kuvaus, jolle* $\exp(\lambda K_f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *jollain $\lambda > 0$. Tällöin f on joko vakio, tai diskreetti ja avoin kuvaus.*

HUOMAUTUS 4.3.3. Lauseissa 4.3.1 ja 4.3.2 oletus jatkuvuudesta seuraa edellisen luvun tulosten mukaan muista oletuksista. Lauseiden väitteet koskevat luonnollisesti tätä jatkuvaa edustajaa.

Seuraava lause yhdistää olennaisesti pisteen alkukuvan jatkuvassa kuvauksessa sen diskreettisyyteen ja avoimuuteen. Tämän avulla päästään varsinaisesti käsiksi näihin ominaisuuksiin tarkastelemalla tätä alkukuvaa topologisen asteen käsitteen avulla.

LAUSE 4.3.4. *Olkoon $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ jatkuva äärellisen väännön kuvaus, jolle $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Jos kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$ pätee $\mathscr{H}^1(f^{-1}(y)) = 0$, niin kuvaus f on diskreetti ja avoin.*

TODISTUS. Osoitetaan ensin avoimuus: Olkoon $V \subset \Omega$ avoin joukko ja $x \in V$. Oletuksen nojalla $\mathscr{H}^1(f^{-1}(f(x)) = 0$, joten selvästi on olemassa säde $r > 0$ siten, että

$$S^{n-1}(x,r) \cap f^{-1}(f(x)) = \emptyset \text{ ja } B(x,r) \subset\subset V.$$

Olkoon tämän nojalla C joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial B(x,r))$ komponentti, joka sisältää pisteen $f(x)$. Nyt lauseen 4.2.4 nojalla $\deg(C, f, B(x,r)) > 0$, ja huomautuksen 4.1.8 kohdan (3) mukaan $C \subset f(B(x,r))$. Koska C on erityisesti avoin joukko, todistaa tämä kuvajoukon $f(V)$ ja siis kuvauksen f avoimuuden, sillä nyt jokaisella $f(x) \in f(V)$ on olemassa tällainen avoin joukko C, jolle $f(x) \in C \subset f(V)$.

Tehdään diskreettisyyden todistamiseksi vastaoletus: On olemassa piste y, jolle $f^{-1}(y)$ ei ole diskreetti joukko alueessa Ω. Tällöin sillä on kasautumispiste $x \in \Omega$, jonka jokaisessa ympäristössä on siis ääretön määrä pisteeksi y kuvautuvia pisteitä. Oletuksen nojalla voidaan valitaan kuten edellä säde $r > 0$, jolle

$$S^{n-1}(x,r) \cap f^{-1}(y) = \emptyset \text{ ja } B(x,r) \subset\subset \Omega.$$

Olkoon C taas joukon $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial B(x,r))$ y-komponentti. Kun $k := \deg(C, f, B(x,r))$, tiedetään lauseen 4.2.4 nojalla että tämä kokonaisluku on positiivinen. Valitaan vastaoletuksen nojalla $k+1$ eri pistettä pallosta $B(x,r)$, jotka kuvautuvat pisteeksi y. Edelleen yksiulotteisen Hausdorff-mitan häviämisen nojalla voidaan näille pisteille valita pistevieraat, palloon $B(x,r)$ sisältyvät palloympäristöt $B_1, B_2, \dots, B_{k+1}$ siten, että $y \notin f(\partial B_j)$ kaikilla $j = 1, \dots, k+1$. Kuvauksen f avoimuuden nojalla pisteen y sisältävä joukko

$$W := f(B_1) \cap f(B_2) \cap \cdots \cap f(B_{k+1})$$

on avoin, ja siten voidaan valita testifunktio $\varphi \in C_0^\infty(C \cap W)$ jolle $\int_{C\cap W} \varphi = 1$. Tällöin lauseiden 4.2.3 ja 4.2.4, pallojen B_j valinnan sekä Jacobin ei-negatiivisuuden nojalla saadaan tästä

$$\begin{aligned} k &= \deg(C, f, B(x,r)) = \int_{B(x,r)} \varphi(f(x)) J_f(x)dx \\ &\geq \sum_{j=1}^{k+1} \int_{B_j} \varphi(f(x)) J_f(x) dx = \sum_{j=1}^{k+1} \deg(y, f, B_j) \geq k+1. \end{aligned}$$

Tämä ristiriita osoittaa, että kuvaus f on välttämättä myös diskreetti. □

Lemma 4.3.5. *Olkoon $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ja $\Psi \in C^1([0,\infty))$ jolle $\Psi(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 0$ ja $\Psi(0) = 0$. Tällöin on olemassa dimensiosta n riippuva vakio $C = C(n)$ siten, että kaikilla testifunktioilla $\eta \in C_C^\infty(\Omega, [0,\infty))$ pätee*

$$\begin{aligned} &\Big| \int_\Omega \eta^n \big(n\Psi(|f|^2) + 2|f|^2\Psi'(|f|^2)\big) J_f \Big| \\ \leq\ & C \int_\Omega \eta^{n-1} |\nabla \eta| |f| \Psi(|f|^2) |Df|^{n-1}. \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Kun $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ on apufunktio siten, että $\varphi = 1$ joukossa $\operatorname{spt} \eta$, niin lemmaa 3.1.4 käyttämällä saadaan distributiivisen Jacobin määritelmästä

$$\int_\Omega J(f_1, \dots, f_{j-1}, \eta^n \Psi(|f|^2) f_j, f_{j+1}, \dots, f_n)(x) dx = 0,$$

ja tästä tulosäännöllä yhtälö

$$\begin{aligned} &- \int_\Omega n\eta^{n-1} \Psi(|f|^2) f_j J(f_1, \dots, f_{j-1}, \eta, f_{j+1}, \dots, f_n) \\ &= \int_\Omega \eta^n (\Psi(|f|^2) J_f + f_j J(f_1, \dots, f_{j-1}, \Psi(|f|^2), f_{j+1}, \dots, f_n). \end{aligned}$$

Ketjusäännön avulla nähdään

$$\begin{aligned} & J(f_1, \ldots, f_{j-1}, \Psi(|f|^2), f_{j+1}, \ldots, f_n) \\ = & \sum_{k=1}^{n} 2\Psi'(|f|^2) f_k J(f_1, \ldots, f_{j-1}, f_k, f_{j+1}, f_n) \\ = & \ 2\Psi'(|f|^2) f_j J_f, \end{aligned}$$

ja siten edellisistä saadaan

$$\begin{aligned} - & \int_\Omega n\eta^{n-1} \Psi(|f|^2) f_j J(f_1, \ldots, f_{j-1}, \eta, f_{j+1}, \ldots, f_n) \\ = & \int_\Omega \eta^n (\Psi(|f|^2) + 2\Psi' 2(|f|^2) f_j^2) J_f. \end{aligned}$$

Nyt summaamalla kaikki indeksit j saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} - & \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega n\eta^{n-1} \Psi(|f|^2) f_j J(f_1, \ldots, f_{j-1}, \eta, f_{j+1}, \ldots, f_n) \\ = & \int_\Omega \eta^n (n\Psi(|f|^2) + 2\Psi' 2(|f|^2)|f|^2) J_f, \end{aligned}$$

joten arvioimalla Jacobin determinanttia pisteittäin komponenttien gradienteilla saadaan väitteen epäyhtälö

$$\begin{aligned} & |\int_\Omega \eta^n (n\Psi(|f|^2) + 2\Psi' 2(|f|^2)|f|^2) J_f| \\ \leq & \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |n\eta^{n-1} \Psi(|f|^2) f_j J(f_1, \ldots, f_{j-1}, \eta, f_{j+1}, \ldots, f_n)| \\ \leq & \ n^2 \int_\Omega \eta^{n-1} |\nabla \eta| |f| \Psi(|f|^2) |Df|^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Nyt lauseen 4.3.4 ja edellisen lemman arvion avulla voidaan todistaa äärellisen väännön kuvauksen diskreettisyys ja avoimuus seuraavan lauseen oletuksilla, jotka itseasiassa ovat kappaleen alussa esitettyjen päätulosten oletuksia heikompia:

LAUSE 4.3.6. *Olkoon $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ jatkuva, ei-vakio äärellisen väännön kuvaus, jolle $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Jos $K_f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ jollain $p > n-1$ kun $n \geq 3$, tai $K_f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ kun $n = 2$, niin kuvaus f on diskreetti ja avoin.*

TODISTUS. Olkoon p se kiinteä luku, jolle oletuksen mukaan $K_f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p > n-1$ tai $p = 1$, kun $n = 2$. Lauseen 4.3.4 nojalla riittää osoittaa, että $\mathscr{H}^1(f^{-1}(y)) = 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$. Käyttämällä siirrettyä kuvausta $f - y$ mielivaltaiselle pisteelle y, riittää selvästi näyttää $\mathscr{H}^1(f^{-1}(0)) = 0$.

Olkoon

$$u(x) := \log\log\big(\frac{1}{|f(x)|}\big),$$

kun $0 < |f(x)| \le \frac{1}{e}$ ja asetetaan muilla x lisäksi $u(x) = 0$. Selvästi $u \ge 0$, ja $u(x) \to \infty$ kun $f(x) \to 0$. Osoitetaan, että kun B on pallo jolle $2B \subset\subset \Omega$, niin $|\nabla u| \in L^q(B \cap \{f \ne 0\})$, missä $q = \frac{np}{p+1}$. Jos $n = 2$, niin $q = 1 = n-1$, ja muuten $q \in (n-1, n)$. Olkoon $U = 2B \cap \{f \ne 0\}$. Jatkuvana kuvauksena f on lokaalisti rajoitettu ja siksi voidaan lisäksi olettaa, että $|f| \le \frac{1}{e}$ pallossa $2B$. Nyt suoralla laskulla ketjusääntöä käyttämällä saadaan

$$|\nabla u| = |-\frac{Df^{\intercal} f}{|f|^3 \log(|f|^{-1})(|f|^{-1})}| \le \frac{|Df|}{|f|\log(1/|f|)}$$

joukossa $\{f \ne 0\}$, mistä vääntöepäyhtälöä $|Df|^n \le K_f J_f$ ja Hölderin epäyhtälöä käyttämällä arvioidaan

$$\begin{aligned}
\int_U |\nabla u|^q &\le \int_U \frac{|Df|^q}{|f|^q \log^q(1/|f|)} \le \int_U \frac{J_f^{\frac{q}{n}} K_f^{\frac{q}{n}}}{|f|^q \log^q(1/|f|)} \\
&\le \Big(\int_U \frac{J_f}{|f|^n \log^n(1/|f|)}\Big)^{\frac{q}{n}} \Big(\int_U K_f^{\frac{1}{n/q-1}}\Big)^{\frac{n/q-1}{n/q}} \\
&= \Big(2^n \int_U \frac{J_f}{|f|^n \log^n(|f|^{-2})}\Big)^{\frac{p}{p+1}} \Big(\int_U K_f^p\Big)^{\frac{n-q}{n}}.
\end{aligned}$$

Koska $U \subset\subset \Omega$, on integraali $\int_U K_f^p$ oletuksen nojalla äärellistä. Riittää siis löytää yläraja ensimmäiselle integraalille

$$\int_U \frac{J_f(x)}{|f(x)|^n \log^n(|f(x)|^{-2})} dx.$$

Oletetaan, että f on sileä funktio, jolloin saadaan tämä integraali rajoitettua, minkä jälkeen voidaan approksimoida alkuperäistä $f \in W^{1,1}$ ja löytää siten myös tässä tapauksessa yläraja:

Käytetään lemmaa 4.3.5, jota varten valitaan $\varepsilon > 0$ ja lemmassa esiintyvä apufunktio

$$\Psi(t) := \frac{1}{2t^{n/2}} \int_0^t \frac{\varphi_\varepsilon(s)}{s \log^n(1/s)} ds, \text{ missä } \varphi_\varepsilon(s) := \frac{1}{1 + \varepsilon 2^{1/s}}.$$

Kun $t > 0$, on

$$\Psi'(t) = \frac{\varphi_\varepsilon(t)}{2t^{n/2} t \log^n(1/t)} - \frac{n}{2t^{n/2} t} \int_0^t \frac{\varphi_\varepsilon(s)}{s \log^n(1/s)} ds,$$

ja siten

$$n\Psi(t) + 2t\Psi'(t) = \frac{\varphi_\varepsilon(t)}{t^{n/2} \log^n(1/t)}.$$

Tällöin lemman 4.3.5 arvion mukaan testifunktiolle $\eta \in C_C^\infty(2B,[0,\infty))$ pätee

$$
\begin{aligned}
&\int_{2B} \eta^n J_f\big(n\Psi(|f|^2) + 2|f|^2\Psi'(|f|^2)\big) = \int_{2B} \eta^n \frac{J_f\varphi_\varepsilon(|f|^2)}{|f|^n \log^n(|f|^{-2})} \\
\leq\ & C\int_{2B} \eta^{n-1}|\nabla\eta||f|\Psi(|f|^2)|Df|^{n-1} \\
=\ & C\int_{2B}\left(\eta^{n-1}|\nabla\eta|\frac{|Df|^{n-1}}{|f|^{n-1}}\Big(\int_0^{|f|^2}\frac{\varphi_\varepsilon(s)}{s\log^n(1/s)}ds\Big)\right).
\end{aligned}
$$

Selvästi kuvaus φ_ε on kasvava ja $\varphi_\varepsilon(s) \leq 1$ kaikilla $s > 0$, joten

$$
\begin{aligned}
&\int_{2B} \eta^n \frac{J_f\varphi_\varepsilon(|f|^2)}{|f|^n \log^n(|f|^{-2})} \\
\leq\ & C\int_{2B}\left(\eta^{n-1}|\nabla\eta|\frac{|Df|^{n-1}}{|f|^{n-1}}\varphi_\varepsilon(|f|^2)\Big(\int_0^{|f|^2}\frac{ds}{s\log^n(1/s)}\Big)\right) \\
\leq\ & C\int_{2B}\left(\eta^{n-1}|\nabla\eta|\frac{|Df|^{n-1}}{|f|^{n-1}}\varphi_\varepsilon(|f|^2)^{\frac{n-1}{n}}\frac{1}{\log^{n-1}(|f|^{-2})}\right),
\end{aligned}
$$

kun $\int x^{-1}\log^{-n}(x^{-1}) = (n-1)\log^{-(n-1)}(x^{-1})$. Tässä arviossa termit

$$
\frac{\varphi_\varepsilon(|f(x)|^2)}{|f(x)|^n\log^n(|f(x)|^{-2})} \quad \text{ja} \quad \frac{\big(\varphi_\varepsilon(|f(x)|^2)\big)^{\frac{n-1}{n}}}{|f(x)|^{n-1}\log^{n-1}(|f(x)|^{-2})}
$$

ovat lisäksi rajoitettuja kuvauksesta f riippumatta. Alkuperäistä kuvausta f koskevasta oletuksesta $|Df| \in L^n\log^{-1}L$ seuraa lisäksi, että $f \in W^{1,m}$ kaikilla $1 \leq m < n$, joten sitä voidaan approksimoida sileillä funktioilla myös näissä avaruuksissa. Siten jos $(f_j)_j \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$ on jono jolle $f_j \to f$ avaruudessa $W^{1,n-\frac{1}{2}}$, niin erityisesti $|Df_j| \to |Df|$ normissa $||\cdot||_{n-1,2B}$ ja lisäksi $J_{f_j} \to J_f$ normissa $||\cdot||_{1,2B}$ kuten esimerkiksi lemmassa 3.1.5. Edellisten nojalla ylläoleva arvio pätee siten myös alkuperäiselle f.

Nyt käyttämällä uudestaan vääntöepäyhtälöä ja Hölderiä saadaan estimaatti

$$
\begin{aligned}
&\int_{2B} \eta^n \frac{J_f\varphi_\varepsilon(|f|^2)}{|f|^n \log^n(|f|^{-2})} \\
\leq\ & C\int_{2B}\left(\eta^{n-1}|\nabla\eta|\frac{(J_fK_f)^{\frac{n-1}{n}}}{|f|^{n-1}}\varphi_\varepsilon(|f|^2)^{\frac{n-1}{n}}\frac{1}{\log^{n-1}(|f|^{-2})}\right) \\
\leq\ & C\Big(\int_{2B}\eta^n\frac{J_f\varphi_\varepsilon(|f|^2)}{|f|^n\log^n(|f|^{-2})}\Big)^{\frac{n-1}{n}}\Big(\int_{2B}|\nabla\eta|^nK_f^{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}},
\end{aligned}
$$

eli potenssiin n korottamalla ja jakamalla ensimmäisen integraalin potenssilla

$$\int_{2B} \eta^n \frac{J_f \varphi_\varepsilon(|f|^2)}{|f|^n \log^n(|f|^{-2})} \leq C \int_{2B} |\nabla \eta|^n K_f^{n-1}.$$

Ottamalla raja-arvo tästä kun $\varepsilon \to 0$, saadaan monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_U \eta^n \frac{J_f}{|f|^n \log^n(|f|^{-2})} \leq C \int_{2B} |\nabla \eta|^n K_f^{n-1},$$

sillä nyt $\varphi_\varepsilon \to 1$. Valitsemalla testifunktio $\eta \in C_C^\infty(2B, [0,\infty))$, jolle $\eta = 1$ pallossa B, seuraa tästä nyt

$$\int_{U \cap B} |\nabla u|^q \leq C \Big(\int_{2B} |\nabla \eta|^n K_f^{n-1} \Big)^{\frac{p}{p+1}} \Big(\int_{2B} K_f^p \Big)^{\frac{n-q}{n}} < \infty.$$

Olkoon nyt $\varphi \in C_C^\infty(B, [0,2])$, jolle $\varphi|_{\frac{1}{2}B} = 2$, ja kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$u_k(x) := \varphi(x) \min\big(\log\log(\frac{1}{|f(x)|}), k \big),$$

jolloin tiedosta $\nabla u \in L^q(U \cap B)$ seuraa $u_k \in W_0^{1,q}(B)$. Lisäksi kaikilla k on tasaisesti

$$||\nabla u_k||_{q,B} \leq ||\nabla u||_{q,U\cap B} \leq C$$

ja u_k on selvästi jatkuva, joten lemmojen 1.3.8 ja 1.3.10 nojalla saadaan

$$\mathscr{H}^1_\infty(f^{-1}(0) \cap \frac{1}{2}B) \leq \mathscr{H}^1_\infty(x \in B : u_k(x) > k) \leq \frac{C}{k^q} \to 0.$$

Tällöin myös $\mathscr{H}^1(f^{-1}(0) \cap \frac{1}{2}B) = 0$, sillä Hausdorffin mitalle $\mathscr{H}^s(A) = 0$ täsmälleen kun $\mathscr{H}^s_\infty(A) = 0$. Tästä seuraa selvästi $\mathscr{H}^1(f^{-1}(0)) = 0$, ja väite on todistettu.

□

Lauseiden 4.3.1 ja 4.3.2 todistus. Muistetaan huomautus 3.0.9 ja lemma 3.3.4, joiden mukaan oletuksesta $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ tai siitä että vääntöfunktio K_f on eksponentiaalisesti integroituva seuraa $|Df| \in L^n \log^{-1} L_{\mathrm{loc}}$. Toisaalta jos $a^{K_f} \in L^1_{\mathrm{loc}}$ jollain $a > 1$, niin $K_f \in L^p_{loc}$ kaikilla $p \in [1,\infty)$. Siten nämä lauseet seuraavat suoraan lauseesta 4.3.6.

□

Huomautus 4.3.7. (1) Diskreettisyyden ja avoimuuden kannalta rajatapaus $K_f \in L^{n-1}$ kun $n \geq 3$ äärettömän väännön kuvaukselle $f \in W^{1,n}$ on osittain ratkaisematta; on mahdollista konstruoida vastaesimerkki, ei-vakio ja ei-diskreetti äärellisen väännön Lipschitz-kuvaus f siten, että $K_f \in L^{n-1}$, $n \geq 3$. Kysymys kuvauksen avoimuudesta on kuitenkin yhä avoin. Tavallisimmat todistukset näille ominaisuuksille takaavat yleensä molempien voimassaolon, ja siten mahdollisen avoimuuden näyttäminen vaatisi erilaisen lähestymistavan diskreettisyyden epäonnistuessa.

(2) Tapausten $K_f \in L^{n-1}$ ja $K_f \in L^{n-1+\varepsilon}$ välissä olevien Zygmundin avaruuksien asetelmassa kysymys diskreettisyydestä ja avoimuudesta on myös avoin: Jos $K_f \in L^{n-1}\log^\alpha L$, niin äärellisen väännön ei-vakio kuvaus $f \in W^{1,n}$, $n \geq 3$, on diskreetti ja avoin kaikilla $\alpha > n(n-2)$. Jos $\alpha < n-2$, niin ominaisuudet eivät välttämättä ole voimassa. Tilanteessa $\alpha \in [n-2, n(n-2)]$ kysymys on vielä ratkaisematta.

(3) Oletetaan lauseen 4.3.1 kuvaus f lisäksi homeomorfismiksi alueen Ω reunan lähellä, tai vaihtoehtoisesti että pisteen alkukuvien määrä on tasaisesti rajoitettu. Tällöin voidaan osoittaa, että kuvaus f on välttämättä vakio tai diskreetti ja avoin myös rajatapauksessa $K_f \in L^{n-1}$ kun $n \geq 3$.

(4) Jatkuvuuden, diskreettisyyden ja avoimuuden nojalla riittäisi lauseen 4.3.1 kuvauksen lokaalia homeomorfisuutta varten osoittaa, että pisteen alkukuvia on vain yksi jossain pienessä mielivaltaisen pisteen ympäristössä; Jos on kompakti joukko $K \subset \Omega$ siten, että $f^{-1}(f(x)) \cap K = \{x\}$ kaikilla $x \in K$, niin tällöin $f|_K$ on bijektio ja siis homeomorfismi. Itse asiassa voidaan osoittaa, että lauseen oletukset täyttävälle ei-vakiolle kuvaukselle on pisteen alkukuvien määrä lokaalisti rajoitettu: Kaikilla kompakteilla $K \subset \Omega$ on $m_K \in \mathbb{N}$, jolle card $f^{-1}(f(x)) \cap K \leq m_K$ kaikilla $x \in K$. Lokaalin homeomorfisuuden kannalta erittäin mielenkiintoinen kysymys on, millä lisäoletuksilla kuvauksesta f tai sen differentiaalista Df voitaisiin osoittaa tässä $m_K = 1$.

Kirjallisuutta

[Ad] Adams D. R.: *A note on Choquet integrals with respect to Hausdorff capacity*, Function spaces and applications, Lecture notes in Math. 1302, 115-124, Springer-Verlag, 1988.

[Ev] Evans, L. C.: *Partial differential equations*, American Mathematical Society, 1998.

[He1] Heinonen J.: *Lectures on lipschitz analysis*, Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2005.

[He2] Heinonen J.: *What is a quasiconformal mapping?*, Notices of the AMS, Vol. 53, 1334-1335, 2006.

[HKM] Heinonen J., Kilpeläinen T. & Martio O.: *Nonlinear potential theory of degenarate elliptic equations*, Dover, 2006.

[HK] Heinonen J. & Koskela P.: *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Math. 181, 1-61, 1998.

[HenK] Hencl S. & Koskela P.: *Lectures on mappings of finite distortion*, Lecture notes in Math. 2096, Springer, 2014.

[IM] Iwaniec T. & Martin G.: *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Mathematical Monographs, 2001.

[Ko] Koskela P.: *Sobolev-avaruudet*, Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2015.

[Le] Leoni G.: *A First course in Sobolev spaces*, American Mathematical Society, 2009.

[MZ] Malý J. & Ziemer W. P.: *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, American Mathematical Society, 1997.

[OZ] Onninen J. & Zhong X.: *Mappings of finite distortion: a new proof of discreteness and openness*, Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A 138, 1097-1102, 2008.

[Ri] Rickman S.: *Quasiregular mappings*, Springer-Verlag, 1993.

[Vä] Väisälä J.: *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture notes in Math. 229, Spinger, 1971.

[Zi] Ziemer W. P.: *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, 1989.