Yleistetyn kontinuumihypoteesin ja $\aleph$-hypoteesin yhtäpitävyys valinta-aksiooman kautta

Matematiikan sivuainetutkielma
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014
Anna Kausamo
anna.m.kausamo@jyu.fi

Tiivistelmä

Anna Kausamo, *Yleistetyn kontinuumihypoteesin ja $\aleph$-hypoteesin yhtäpitävyys valinta-aksiooman kautta* (engl. *The Equivalence of the Genereralized Continuum Hypothesis and the $\aleph$-hypothesis through the Axiom of Choice*), matematiikan sivuainetutkielma, 91. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2014.

Tässä tutkielmassa todistetaan, että yleistetty kontinuumihypoteesi ja $\aleph$-hypoteesi ovat yhtäpitäviä joukko-opin Zermelon ja Fraenkelin mukaisessa aksiomatisoinnissa. Päättely esitetään Rubinin ja Sierpinskin lauseiden todistusten kautta. Näistä ensimmäisen mukaan valinta-aksiooma seuraa $\aleph$-hypoteesista, ja jälkimmäisen perusteella yleistetty kontinuumihypoteesikin implikoi valinta-aksiooman. Lähtien kummasta tahansa hypoteesista saadaan siis valinta-aksiooma käyttöön, ja tätä kautta tutkielman pääväite on suoraviivainen todistettava.

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Valmisteluja **5**

2.1 Lähtökohtia predikaattilogiikasta 5

2.2 Lähtökohtia aksiomaattisesta joukko-opista 7

2.2.1 Perustietoja ja merkintöjä 7

2.2.2 Joukko-opin aksioomat ja muita tärkeitä kaavoja . . . 17

2.3 Yleistetyn kontinuumihypoteesin ja ℵ-hypoteesin yhtäpitävyys 19

3 Rubinin lause **19**

4 Sierpinskin lause **48**

5 Lopuksi **88**

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on perustellen selvittää, miten kolme aksiomaattisessa joukko-opissa keskeistä tulosta, nimittäin valinta-aksiooma, yleistetty kontinuumihypoteesi ja $\aleph$-hypoteesi, kytkeytyvät toisiinsa Zermelo-Fraenkel(ZF)-aksioomajärjestelmässä. Näistä ensiksi mainittu eli valinta-aksiooma muodostaa ZF-aksioomiin liitettynä ja predikaattilogiikan kieleen perustuvaan formalisointiin valjastettuna niin sanotun ZFC-teorian, joka on yleisesti hyväksytty tapa rakentaa modernin matematiikan muodollinen perusta. Jotta tämä perusta olisi eheä, on sille löydyttävä yhtymäkohtansa matematiikan eri osa-alueiden menetelmissä ja lähtökohdissa. Näin onkin: esimerkiksi alkeisjoukko-opillisilla tuloksilla, joita on läsnä miltei jokaisessa matematiikan kirjallisuudessa esitettävässä todistuksessa, sekä toisaalta induktio- ja rekursioperiaatteiden kaltaisilla todistusmenetelmillä on muotoilunsa ja todistuksensa ZFC-teoriassa.

Aksiomaattisen joukko-opin voidaan katsoa[1] syntyneen 1800-luvun lopulla, kun vallitseva ymmärrys äärettömyydestä mullistui täysin. Saksalainen matemaatikko Georg Cantor (1845-1918) todisti vuonna 1873 kuuluisan diagonaaliargumenttinsa avulla, että reaalilukujen joukko on ylinumeroituva. Näin avautui kokonaan uusi erilaisten äärettömyyksien ja ylipäätään äärettömän tarkastelun kirjo maailmantilanteessa, jossa matemaatikot olivat pääosin tottuneet pitämään äärettömyyttä merkinnällisenä tai saavuttamattomana objektina. Ei aihe kuitenkaan täysin vaille tarkastelua ollut jäänyt historiassakaan, sillä esimerkiksi numeroituvuuden olemusta oli pohdittu sitten Galileo Galilein (1564-1642) päivien. Hämmennystä oli herättänyt esimerkiksi (modernin matematiikan käsittein ilmaistuna) yhtä mahtavien numeroituvien joukkojen olemassaolo – seikka, jota pidettiin vielä 1800-luvun puolen välin tienoilla paradoksaalisena ja joka vaikeutti tšekkiläisen matemaatikon Bernard Bolzanon (1781-1848) joukko-opin teoriankehittelyä.

Vaikka äärettömyyden olemusta oli siis jonkin verran pohdittu ja vaikka muun muassa Bolzanon työn jälki näkyy vielä nykypäivänäkin esimerkiksi joissain joukko-opillisissa merkinnöissä, vasta Cantorin lähtökohdat aloittivat tien äärettömyyden ymmärtämiseen ja sitä kautta joukko-opin kivijalan perustamiseen. Cantor kehitti muun muassa niin sanotut ordinaali- ja kardinaaliluvut laskusääntöineen ja järjestyksineen. Nuo käsitteet antoivat työkalut erilaisten äärettömyyksien karakterisointiin. Joukko-oppi muodostui eräänlaiseksi opiksi äärettömyyksistä; monet sen ongelmat pelkistyvät triviaalilla tai vähintään lukuteoreettisella tarkastelulla ratkeaviksi, jos rajoitutaan tarkastelemaan äärellisiä joukkoja.

Cantorin aikaansaannosten myötä heräsi monia kysymyksiä. Näiden kuvaamiseksi muistutetaan lukijaa joukkojen mahtavuuden käsitteestä. Sanotaan, että joukot ovat yhtä mahtavia, jos niiden välillä on bijektio. Luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ kanssa yhtä mahtavia joukkoja sanotaan numeroituviksi, ja joukkoja, jotka ovat äärettömiä mutta eivät yhtä mahtavia kuin $\mathbb{N}$, sanotaan ylinumeroituviksi. Kaikki joukot voidaan pyrkiä karakterisoimaan sen mukaan, mikä on niiden mahtavuus. Karkeasti ilmaistuna Cantorin kardinaaliluku-käsite vastaa suoraan näitä erilaisia "mahtavuusluokkia". Jos nyt määritellään, että numeroituvien joukkojen mahtavuus on ensimmäinen ääretön kardinaaliluku ja seuraava mahdollinen mahtavuus on toinen ääretön kardinaaliluku, niin vastaako tuo toinen ääretön kardinaaliluku reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ mahtavuutta? Kysymyksellä on sisältöä, sillä edellä mainitun Cantorin suuren tuloksen nojalla tuo seuraava, erisuuri mahtavuus on todellakin olemassa. Jos vastaus kysymykseen on kielteinen, niin on olemassa jokin välijoukko, joka on mahtavuudeltaan aidosti luonnollisten lukujen joukon ja reaalilukujoukon välissä. Koska voidaan helposti osoittaa, että $\mathbb{R}$ on yhtä mahtava luonnollisten lukujen joukon kaikkien osajoukkojen joukon eli $\mathbb{N}$:n potenssijoukon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kanssa, voidaan yhtäpitävästi miettiä, onko olemassa joukkoa, joka on mahtavuudeltaan joukkojen $\mathbb{N}$ ja $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mahtavuuksien välillä. Ja jos on, niin montako välijoukkoa löytyy eli monesko ääretön kardinaaliluku tuo joukon $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mahtavuus oikeastaan onkaan? Yrityksistään huolimatta Cantor ei onnistunut todistamaan, ettei edellä hahmoteltuja välijoukkoja ole olemassa. Teoreeman sijasta tuloksesta tulikin olettamus ja sitä alettiin kutsua kontinuumihypoteesiksi.

Cantorin työ oli osavastuussa 1900-luvun alussa heränneestä tarpeesta nostaa joukko-oppi epämuodollisesta, intuiviitisesta lähestymistavasta ja luoda sille tarkka perusta. Havahduttiin esimerkiksi kysymään, mikä oikeastaan on joukko. Tähän ongelmaan liittyy olennaisesti niin sanottu Russelin paradoksi: Sisältääkö joukko, joka koostuu kaikista niistä joukoista, jotka eivät sisällä itseään alkiona, itsensä alkiona? Saksalainen Ernst Zermelon (1871-1953) ja saksalaissyntyinen Abraham Fraenkelin (1891-1965) kehittivät 1900-luvun alkupuolella lähestymistavan, jossa joukko-opin pohjaksi otetaan yhdeksän aksioomaa ja teoria kehitetään tarkasti määriteltyjen logiikan menetelmien avulla näistä aksioomista. Näin syntynyttä niin sanottua aksiomaattista joukko-oppia kutsutaan Zermelo-Fraenkel-teoriaksi tai lyhennettynä ZF-teoriaksi ja edellä mainittua yhdeksää aksioomaa ZFC-aksioomiksi. Kirjainlisäys C lyhenteeseen ZF tulee aksioomista viimeisestä eli valinta-aksioomasta (AC, *engl. Axiom of Choice*), johon palataan tuonnempana. Jos C jätetään pois lyhenteestä eli puhutaan ZF-aksioomista, viitataan kahdeksaan ensimmäiseen joukko-opilliseen aksioomaan. Zermelon ja Fraenkelin aksiomaattinen joukko-oppi on, kuten tämän johdannon alussa todettiin, modernin matematiikan hyväksytty perusta. Se kykenee välttämään Russellin paradoksin kaltaiset ongelmatilanteet kieltämällä huonosti käyttäytyvien systeemien luokittelun joukoiksi. Lisäksi Cantorin alkujaan epämuodollisempaan tapaan esitetyt mahtavuustarkastelut voidaan siirtää ZFC-teoriaan.

Useimmat ZFC-järjestelmän aksioomista ovat – jos nyt ei maailmaa aivan äärimmäisen kriittisesti tarkastella – intuitiivisesti ajateltuina varsin selviä. Esimerkiksi aksiooma (Ax1) kertoo karkeasti ilmaistuna, että samat alkiot kuuluvat samoihin joukkoihin, ja aksiooman (Ax5) mukaan joukon potenssijoukko on joukko. Valinta-aksiooma on sanomaltaan epätriviaalimpi, ja se esitetäänkin yleensä erillään kahdeksasta ZF-aksioomasta. Sen sisältö on havainnollisesti ilmaistuna seuraava: Olkoon ensinnäkin I jokin epätyhjä indeksijoukko. Jos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ on perhe epätyhjiä joukkoja, niin valinta-aksiooman mukaan on olemassa funktio $f : I \to \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ siten, että

$$f(\alpha) \in A_\alpha \quad \text{kaikilla } \alpha \in I\,. \tag{1}$$

Aksiooman joukko-opillinen muotoilu on jonkin verran erilainen (ks. luku 2.2.2). Valinta-aksiooman merkityksellisyys tulee ilmi tapauksessa, jossa indeksijoukko I on ääretön. Äärelliselle indeksijoukollehan ehdon (1) mukainen valintafunktio on helppo konstruoida. Mutta jos I todellakin on ääretön, niin aksiooma lupaa, että tässäkin tapauksessa on olemassa yksikäsitteinen tapa liittää jokaiseen I:n alkioon α vastaavan joukon A_α alkio. Tämä liittäminen – tai valinta – tehdään vieläpä kaikille indeksijoukon I alkioille samanaikaisesti eikä esimerkiksi niin, että jollain tietyllä muuttujan arvolla α valinta edellyttäisi tietoa joistain aiemmista valinnoista, joista $f(\alpha)$ sitten konstruoitaisiin.

Monet matematiikan perustyövälineet kuten induktio- ja rekursioperiaate eivät vaadi valinta-aksioomaa toimiakseen vaan ne voidaan todistaa ZF-järjestelmän sisältä. Matematiikan eri osa-alueisiin sisältyy kuitenkin paljon tärkeitä tuloksia, jotka eivät ilman valinta-aksioomaa todistu. Tällaisia ovat esimerkiksi topologiassa erittäin keskeinen Bairen kategorialause ja sitä kautta funktionaalianalyysin piirissä esiintyvä Banach-Steinhausin lause. Valinta-aksioomaa itseään kenties jopa tunnetumpaa ja sen kanssa yhtäpitävää Zornin lemmaa puolestaan tarvitaan muun muassa takaamaan, että jokaiselle vektoriavaruudelle on olemassa Hamelin kanta eli lineaarisesti riippumaton virittäjäjoukko. Nämä esimerkit havainnollistavat valinta-aksiooman olennaista mutta toisaalta myös erillistä asemaa modernin matematiikan kivijalassa eli ZFC-järjestelmässä.

Tutkielmassa estradilla olevista kolmesta tärkeästä tuloksesta – tai oikeammin ilmaistuna olettamuksesta – kaksi jäljelläolevaa liittyvät olennaisesti joukkojen mahtavuuksien luokitteluun. Edellä kuvattu kontinuumihypoteesi on erikoistapaus toisesta pääolettamuksesta eli yleistetystä kontinuumihypoteesista (GCH, *engl. Generalised Continuum Hypothesis*). Karkeasti ilmaistuna (GCH) kertoo, ettei ole olemassa joukkoa, joka olisi mahtavuudeltaan aidosti äärettömän joukon ja sen potenssijoukon mahtavuuksien välissä. Sana yleistetty viittaa siihen, ettei ole rajoituttu tarkastelemaan vain numeroituva-ylinumeroituva -asetelmaa vaan joukot voivat olla kuinka käsittämättömän suuria tahansa. $\aleph$-hypoteesi, joka on saanut nimensä heprean kielen aakkosten 'alefiksi' lausutun ensimmäisen kirjaimen mukaan, lähestyy samaa mahtavuusrajausta hieman eri kautta. Niin kutsuttu $\aleph$-funktio tavallaan listaa suuruusjärjestyksessä joukkojen mahtavuuksia kuvaavat ordinaaliluvut. $\aleph$-hypoteesin sanoma on, että tiettyn mahtavuus-ordinaalin potenssijoukon mahtavuus saadaan yksinkertaisesti $\aleph$-funktion kiinnittämässä järjestyksessä seuraavana mahtavuutena.

Edelliset kuvaukset ovat huomattavan epämääräisiä. Niiden tarkentaminen vaatii aksiomaattisen joukko-opin peruskäsitteistön esittelyä, joka tehdään luvussa 2. Luvussa 3 todistetaan ensin kuuluisa Rubinin lause, jonka mukaan $\aleph$-hypoteesista seuraa ZF-järjestelmässä valinta-aksiooma. Rubinin lauseen avulla sitten osoitetaan, että yleistetty kontinuumihypoteesi voidaan todistaa olettamalla ZF-aksioomien lisäksi $\aleph$-hypoteesi. Luvun 4 päätavoite on todistaa niin kutsuttu Sierpinskin lause eli tulos, jonka mukaan (GCH) implikoi valinta-aksiooman. Tätä lausetta käytetään sitten todistamaan, että ZF-järjestelmästä (GCH):lla lisättynä voidaan päätellä $\aleph$-hypoteesi. Luvussa 5 luonnostellaan tarkasteltujen olettamusten voimasuhteita.

Tämä sivuainetutkielma on kirjoitettu kesällä vuonna 2014 Jyväskylässä. Tutkielman ohjaaja on yliopistonopettaja Lassi Kurittu.

Jyväskylässä 20.8.2014

Anna Kausamo

2 Valmisteluja

Tässä tutkielmassa esiintyvä joukko-opin aksiomatisointi merkintöineen ja asioiden esitystapa on lähteen [2] mukainen. Käydään sen perusteet kuitenkin lyhyesti läpi, jotta teksti olisi mahdollisimman helposti myös kyseiseen materiaaliin perehtymättömän lukijan seurattavissa.

2.1 Lähtökohtia predikaattilogiikasta

Aksiomaattisen joukko-opin perustana on predikaattikieli[3] $\mathcal{L}(S)$, jonka symbolijoukko koostuu ainoastaan yhdestä kaksipaikkaisesta predikaattisymbolista P_1^2. Tämä symboli kuvaa muuttujien välistä joukkoinkluusiota ja siitä käytetään yleensä tavallisesta matematiikasta tuttua merkintää $\in$. Siis muuttujasymboleille x ja y merkintä $P_1^2(x, y)$ kirjoitetaan $x \in y$. Kielen muuttujille on varattu kirjaimet x, y, z ja vakioille u, v, w; erottelussa käytetään paikoin alaindeksejä, mikäli vakioita tarvitaan enemmän. Kirjaimet a, b, c, d, f, g vastaavat asiayhteydestä riippuen muuttujia tai vakioita, ja valinta on aina kirjoitettu näkyville. Kirjaimen f käyttöön liittyy tietenkin vaara, että se sekoitetaan predikaattilogiikan epätotta kaavaa merkitsevään täysin samaan symboliin. Asiayhteydestä pitäisi käydä kuitenkin selväksi, milloin tarkoitetaan vakiota tai muuttujaa.

Kielen $\mathcal{L}(S)$ kaavoja merkitään kreikkalaisilla aakkosilla $\varphi, \psi, \rho.$ – jälleen alaindeksjä käytetään erotteluun. Muistetaan tässä kohtaa predikaattilogiikan piirissä yleisesti esiintyvästä sijoituksesta: merkitään kielen $\mathcal{L}(S)$ kaavalle φ, muuttujalle x ja muuttujalle tai vakiolle a symbolilla $S_a^x(\varphi)$ kaavaa, joka syntyy, kun korvataan kaavassa φ muuttujan x vapaat esiintymät a:lla. Tämän sijoituksen tarkka määritelmä on lähteessä [3]. Vastaavaan tapaan voidaan määritellä sijoitus $K_z^x(\varphi)$, joka muuttujille x ja z sekä kielen $\mathcal{L}(S)$ kaavalle φ tarkoittaa kaavaa, jossa kaikki x:n sidotut esiintymät on korvattu z:lla. Sovitaan vielä, että $K_z^z(\varphi) = \varphi$. Aksiomaattisen joukko-opin muotoilussa ja perustulosten todistamisessa tarvitaan kahta näistä hieman poikkeavia sijoitusta. Ensimmäistä näistä merkitään $\varphi_x(a)$ ja sen määritelmän on seuraava:

Määritelmä 2.1 *Olkoon φ kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava, x muuttuja ja a muuttuja tai vakio. Olkoon lisäksi y muuttuja, joka ei esiinny kaavassa φ. Asetetaan*

$$\varphi_x(a) = \begin{cases} S_a^x(\varphi) & \text{, jos } a \text{ on vakio} \\ S_a^x(K_y^a(\varphi)) & \text{, jos } a \text{ on muuttuja.} \end{cases}$$

Näin syntyy yksikäsitteisesti määritelty kaava, sillä kaavalle φ sijoitukset $K_y^a(\varphi)$, $S_a^x(K_y^a(\varphi))$ ja $S_a^x(\varphi)$ ovat yksikäsitteisesti määriteltyjä kaavoja.[3]

Intuitiivisesti ajateltuna kaava $\varphi_x(a)$ syntyy siis siten, että kaavassa φ korvataan ensin, jos a on muuttuja, a:n mahdolliset sidotut esiintymät muuttujalla y, ja näin syntyvässä kaavassa muutetaan x:n vapaat esiintymät a:ksi. Jatkossa tullaan tarvitsemaan vielä tämän sijoituksen laajennusta, jota merkitään eri muuttujille x, y ja muuttujille tai vakioille a, b symbolilla $\varphi_{x,y}(a, b)$. Intuitiivisesti ajateltuna tässä sijoituksessa korvataa ensin a:n ja b:n (mahdolliset) sidotut esiintymät joillakin muilla eri muuttjilla, joista kumpikaan ei ole x tai y, ja näin syntyvässä kaavassa muutetaan x:n vapaat esiintymät a:ksi ja y:n vapaat esiintymät b:ksi. Tarkka määritelmä on alla.

Määritelmä 2.2 *Olkoon φ kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava, x ja y eri muuttujia sekä a ja b muuttujia tai vakioita. Olkoot lisäksi z ja w eri muuttujia, jotka eivät esiinny kaavassa φ. Määritellään sijoitus $\varphi_{x,y}(a, b)$ asettamalla*

$$\varphi_{x,y}(a,b) = \begin{cases} S_a^x(S_b^y(\varphi)) & \text{, jos } a \text{ ja } b \text{ ovat vakioita} \\ S_b^y(S_a^x(K_z^x(\varphi))) & \text{, jos } a \text{ on muuttuja ja } b \text{ vakio} \\ S_a^x(S_b^y(K_z^y(\varphi))) & \text{, jos } b \text{ on muuttuja ja } a \text{ vakio} \\ S_a^x(S_b^y(K_z^y(K_w^x(\varphi)))) & \text{, jos } a \text{ ja } b \text{ ovat muuttujia.} \end{cases}$$

Seuraavaksi tarkastellaan hieman päättelyprotokollaa. Käytetään merkintää $\vdash_L \varphi$ kuvaamaan tilannetta, jossa φ on looginen teoreema eli pääteltävissä predikaattilogiikan viidestä aksioomasta. Joukko-opin formalisoinnissa näihin aksioomiin lisätään perusoletuksia, joita on ZF-järjestelmässä kaiken kaikkiaan kahdeksan ja joita jatkossa kutsutaan joukko-opin aksioomiksi. Nämä aksioomat, joita merkitään (Ax1),..., (Ax8), esitellään seuraavassa alaluvussa. Merkitään nyt symbolilla $\vdash \varphi$ tilannetta, jossa kaava φ on pääteltävissä predikaattilogiikan aksioomista, joihin on lisätty joukko-opin aksioomat eli tarkalleen ottaen oletuspäättelyä

$$(\text{Ax1}), \ldots, (Ax8) \vdash_L \varphi\,. \tag{1}$$

Jos ehto (1) toteutuu, niin sanotaan, että kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava φ on joukko-opillinen teoreema tai yksinkertaisesti teoreema. Teoriankehittelyn kannalta olennaista on selvittää, milloin näin on asian laita. Tässä auttaa huomattavasti predikaattikielten täydellisyyslause, jonka mukaan jokainen predikaattikielen $\mathcal{L}(S)$ validi kaava on teoreema. Jos siis oletetaan, että on olemassa kielen $\mathcal{L}(S)$ malli m ja malliin m liittyvä totuusarvofunktio t_m siten, että

$$t_m((\text{Axi})) = 1 \text{ kaikilla } i \in \{1, \ldots, 8\}\,, \tag{2}$$

niin koska joukko-opin aksioomat esitetään suljetussa muodossa, riittää päättelyn (1) päteväksi näyttämiseen osoittaa, että

$$t_m(\overline{\varphi}) = 1\,,$$

missä $\overline{\varphi}$ on kaava φ esitettynä suljetussa muodossa eli siten, että siinä esiintyvät vapaat muuttujat on korvattu mielivaltaisilla vakioilla. Jatkossa oletetaan, että ehdon (2) täyttävä malli m on olemassa ja toimitaan malliin liittyvän totuusarvofunktion, jota merkitään yksinkertaisesti t:llä, kautta. Tämän oletuksen paikkansa pitävyyteen palataan luvussa 5.

2.2 Lähtökohtia aksiomaattisesta joukko-opista

2.2.1 Perustietoja ja merkintöjä

Tämän tutkielman seurattavuuden edellytyksenä on, että lukija tuntee aksiomaattisen joukko-opin perusteet tarkkuudella, jolla ne on esitelty Takeutin ja Zaringin aksioomaattista joukko-oppia käsittelevän kirjan (lähde [4]) luvuissa 1-11. Koska on erittäin olennaista kyetä toteamaan, että esiteltävät päättelyt voidaan tehdä käyttäen pelkästään aksioomia (Ax1)–(Ax8), ovat esitettävät todistukset pääosin varsin yksityiskohtaisia. Samasta syystä todistuksissa on useita suoria viittauksia lähteen [4] tuloksiin, sillä tarvittavan rakennelman alusta alkaen luominen ei yhden tutkielman mittakaavassa ole mahdollista. Kun viitataan lähteen [4] lauseeseen X, käytetään merkintää TZX. Sana 'lause' vastaa siis kyseisen kirjan 'teoreemaa' (*engl. theorem*), mutta nyt sana 'teoreema' on varattu luvun 2.1 mukaisesti muuhun tarkoitukseen eikä sitä siis tässä yhteydessä käytetä. Viitattaessa lähteen [4] lukuun X käytetään merkintää TZlX, ja sivua X vastaa lyhenne TZsX.

Aksiomaattisen joukko-opin peruskäsitteistö on suurilta osin teoksen [4] mukainen, mutta erojakin on. Seuraavaksi listataan nämä mahdollisesti erilaiset merkinnät ja lyhenteet, minkä jälkeen esitellään ZFC-aksioomat. Tässä listauksessa, kuten myös jatkossa esitettävissä todistuksissa, käytetään yhtäsuuruusmerkkiä = tarkoittamaan *merkintää* eikä vaikkapa joukkojen välistä suhdetta. Yhtäsuuruusmerkki = ei siis kuulu tässä muotoiltavaan aksiomaattisen joukko-opin termistöön vaan esimerkiksi merkintä $A = \{x \mid x \in B\}$ tarkoittaa lausumaa: "Merkitään A:lla luokkaa $\{x \mid x \in B\}$". Usein yhtäsuuruusmerkin edessä käytetään kaksoispistettä korostamaan, että kyseessä on merkinnän esittely ja että merkin := vasemmalla puolella on nimenomaan lyhenne, jota aiotaan käyttää, ja oikealla puolella kielen $\mathcal{L}(S)$ sana (tai jo määritelty lyhenne), jota (edelleen) lyhennetään.

Edelisessä alaluvussa esitellyn sopimuksen mukaisesti oletetaan, että x, y, z ovat muuttujia ja a, b, c muuttujia tai vakioita. Ilmeisenä lisäoletuksena on, että jos a:n, b:n tai c:n suhteen kvantifioidaan, on kvantifiointisymboli väistämättä muuttuja. Käytetään nimitystä termi kuvaamaan luokkaa, muuttujaa tai vakiota. Olkoot seuraavaksi esiteltävää lyhenteiden luetteloa varten A, B, F ja R termejä. Oletetaan vielä, etteivät muuttujat x, y ja z esiinny termeissä A, B, F tai R. Jotta merkinnät vastaisivat paremmin intuitiota, käytetään yleensä termeistä, joihin liitetään funktioille tyypillisiä ominaisuuksia, merkintää F, ja relaatioista merkintää R. On kuitenkin tärkeää huomata, että myös näissä tapauksissa määritelmiä voidaan soveltaa mielivaltaiselle termille. Merkintätavan valinta on siis vain tulkintaa helpottava eikä suinkaan tarkastelua rajaava. Jos jokin termi on merkintöjen sovellustilanteessa jopa joukko, niin merkintään liitettyihin nimiin voidaan jatkossa sanan luokka tilalle vaihtaa sana joukko. Esimerkiksi jos luokasta $F(A)$ tiedetään, että se on joukko, niin voidaan luokkaa sanoa yhtä lailla A:n kuvaluokaksi luokassa F tai A:n kuvajoukoksi luokassa F. Muitakin ominaisuuksia sanan luokka paikalle voidaan liittää – esimerkiksi puhua joukon a kuvajoukosta funktiossa F, jos tiedetään, että F on funktio – mutta tämä ei aiheuttane sekaannusta.

Joukkojen yhtenevyys:

$$A \approx B := \forall x[x \in A \leftrightarrow x \in B]\,.$$

Jos kaava $A \approx B$ on teoreema, niin sanotaan, että luokat A ja B ovat yhteneviä. Jos kaava $\neg A \approx B$ on teoreema, niin sanotaan, että luokat A ja B eivät ole yhteneviä. Kaavaa $\neg A \approx B$ merkitään myös symbolilla $A \not\approx B$.

Joukko: Merkitään

$$\mathcal{M}(A) := \exists x[x \approx A]$$

Jos kaava $\mathcal{M}(A)$ on teoreema, niin sanotaan, että A on joukko.

Osaluokka:

$$A \subseteq B := \forall x[x \in A \to x \in B]\,.$$

Sanotaan, että A on luokan B osaluokka tai (jos A on joukko) osajoukko, jos kaava $A \subseteq B$ on teoreema.

Aito osaluokka:

$$A \subset B := A \subseteq B \wedge A \not\approx B\,.$$

Sanotaan, että A on luokan B aito osaluokka tai (jos A on joukko) aito osajoukko, jos kaava $A \subset B$ on teoreema.

Potenssiluokka:

$$\mathcal{P}(A) := \{x \mid x \subseteq A\}\,.$$

Luokkaa $\mathcal{P}(A)$ sanotaan luokan A potenssiluokaksi.

Yhdiste: Merkitään

$$\begin{aligned} &A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad \text{ja} \\ &\cup_A := \{x \mid \exists y[y \in A \wedge x \in y]\}\,. \end{aligned}$$

Luokkaa $A \cup B$ sanotaan luokkien A ja B yhdisteeksi ja luokkaa $\cup_A$ luokan A yhdisteeksi.

Järjestämätön pari:

$$\{a, b\} := \{x \mid x \approx a \vee x \approx b\}\,.$$

Yksiö:

$$\{a\} := \{a, a\}\,.$$

Järjestetty pari:

$$\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}\,.$$

Karteesinen tulo:

$$A \times B := \{x \mid \exists a \exists b[a \in A \wedge a \in B \wedge x \approx \langle a, b\rangle]\}\,,$$

missä a ja b ovat eri muuttujia. Luokkaa $A \times B$ kutsutaan luokkien A ja B karteesiseksi tuloksi. Luokan A karteesista tuloa itsensä kanssa eli luokkaa $A \times A$ merkitään myös symbolilla A^2.

Kaikkien joukkojen luokka:

$$V := \{x \mid x \approx x\}\,.$$

Relaatio:

$$\mathit{Rel}(A) := A \subseteq V^2\,.$$

Jos kaava $\mathit{Rel}(A)$ on teoreema, niin sanotaan, että A on relaatio. Lisäksi merkitään

$$aRb := \langle a, b\rangle \in R\,.$$

Käänteisluokka:

$$A^{-1} := \{x \mid \exists y \exists z[\langle y, z\rangle \in A \wedge x \approx \langle z, y\rangle]\},$$

missä y ja z ovat eri muuttujia. Luokkaa A^{-1} sanotaan luokan A käänteisluokaksi.

Järjestävä minimaalirelaatio: Merkitään

$$R\ JRel\ A := Rel(A) \wedge \forall x \forall y[[x \in A \wedge y \in A] \to [xRy \vee x \approx y \vee yRx]]$$

ja

$$R\ Min\ A := \forall y[[y \subseteq A \wedge y \not\approx \emptyset] \to \exists x[x \in y \wedge y \cap R^{-1}(\{x\}) \approx \emptyset]].$$

Näiden avulla asetetaan

$$R\ JMin\ A := R\ JRel\ A \wedge R\ Min\ A.$$

Jos kaava $R\ JRel\ A$ on teoreema, niin sanotaan, että R on järjestävä relaatio luokassa A. Edelleen, jos kaava $R\ Min\ A$ on teoreema, niin sanotaan, että R on minimaalirelaatio luokassa A. Lopulta, jos kaava $R\ JMin\ A$ on teoreema, niin sanotaan, että R on järjestävä minimaalirelaatio luokassa A.

Järjestysrelaatio: Merkitään:

$$\begin{aligned} R\ Or\ A :=& \forall x \forall y[[x \in A \wedge y \in A] \to [xRy \leftrightarrow \neg[x \approx y \vee yRx]]] \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z[[x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A] \to [[xRy \wedge yRz] \to xRz]]. \end{aligned}$$

Jos kaava $R\ Or\ A$ on teoreema, niin sanotaan, että R on järjestysrelaatio luokassa A.

Osajoukkoon periytyvä minimaalirelaatio: Helposti nähdään, että

$$\vdash [R\ JMin\ A \wedge B \subseteq A] \to R \cap B^2\ JMin\ B. \tag{1}$$

Jos kaava $R\ JMin\ A \wedge B \subseteq A$ on teoreema, niin luokkaa $R \cap B^2$ kutsutaan ehdon (1) mukaisesti luokan A järjestävästä minimaalirelaatiosta R osajoukkoon B periytyväksi järjestäväksi minimaalirelaatioksi.

Alkusegmentti: Sanotaan, että luokka $A \cap R^{-1}(\{a\})$ on joukon a ja luokan

R määräämä alkusegmentti tai a:n R-alkusegmentti luokassa A.

Funktio: Merkitään eri muuttujille x, y ja z

$$Un(F) := \forall x \forall y \forall z[[\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, z\rangle \in F] \rightarrow x \approx y]\,.$$

Jos kaava $Un(F)$ on teoreema, niin sanotaan, että luokka F on yksiarvoinen. Edelleen merkitään

$$Fnc(F) := Un(F) \wedge Rel(F)$$

ja sanotaan, että F on funktio, mikäli kaava $Fnc(F)$ on teoreema.

Määrittelyluokka ja arvoluokka: Olkoot x ja y eri muuttujia. Merkitään

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}(F) = \{y \mid \exists x[\langle x, y\rangle \in F]\} \quad \text{ja} \\ &\mathcal{D}(F) = \{x \mid \exists y[\langle x, y\rangle \in F]\}\,. \end{aligned}$$

Sanotaan, että luokka $\mathcal{W}(F)$ on luokan F arvoluokka, ja että luokka $\mathcal{D}(F)$ on luokan F määrittelyluokka.

Rajoittumaluokka: Merkitään

$$F^{\ulcorner} A := F \cap (A \times V)$$

ja sanotaan, että $F^{\ulcorner} A$ on luokan F rajoittuma luokkaan A.

Kuvaluokka: Merkitään

$$F(A) = \mathcal{W}(F^{\ulcorner} A)$$

ja sanotaan, että $F(A)$ on luokan A kuvaluokka luokassa F.

Kuvapiste: Merkitään

$$F[a] := \{x \mid \exists y[x \in y \wedge \langle a, y\rangle \in F] \wedge \exists_1 z[\langle a, z\rangle \in F]\}$$

ja sanotaan, että $F[a]$ on luokan F arvo pisteessä a tai joukon a kuvapiste luokassa F. On syytä huomata, että kuvapistemerkintä eroaa "tavallisen matematiikan" merkinnästä, joka puolestaan muistuttaa tässä esitettävän muotoilun kuvaluokkamerkintää.

Yhdistetty luokka: Merkitään

$$A \circ B := \{a \mid \exists x \exists y \exists z[a \approx \langle x, z\rangle \wedge \langle x, y\rangle \in A \wedge \langle y, z\rangle \in B]\}$$

ja sanotaan, että luokka $A \circ B$ on luokkien A ja B määräämä yhdistetty luokka.

Luokassa määritelty funktio: Merkitään

$$F\ Fn\ A := Fnc(F) \wedge \mathcal{D}(F) \approx A\,.$$

Jos kaava $F\ Fn\ A$ on teoreema, niin sanotaan, että F on luokassa A määritelty funktio.

Luokkien välinen funktio: Merkitään

$$F : A \to B := F\ Fn\ A \wedge \mathcal{W}(F) \subseteq B\,.$$

Jos kaava $F : A \to B$ on teoreema, niin sanotaan, että F on funktio luokalta A luokkaan B.

Injektio: Merkitään eri muuttujille x, y ja z

$$F : A \overset{1-1}{\to} B := F : A \to B \wedge \forall x \forall y \forall z[[\langle x, z\rangle \in F \wedge \langle y, z\rangle \in F] \to x \approx y]\,.$$

Jos kaava $F : A \overset{1-1}{\to} B$ on teoreema, niin sanotaan, että F on injektio luokalta A luokkaan B.

Surjektio: Merkitään

$$F : A \underset{onto}{\to} B := F : A \to B \wedge \mathcal{W}(F) \approx B\,.$$

Jos kaava $F : A \underset{onto}{\to} B$ on teoreema, niin sanotaan, että F on surjektio luokalta A luokalle B.

Bijektio: Merkitään

$$F : A \overset{1-1}{\underset{onto}{\to}} V := F : A \overset{1-1}{\to} B \wedge F : A \underset{onto}{\to} B\,.$$

Jos kaava $F : A \overset{1-1}{\underset{onto}{\to}} B$ on teoreema, niin sanotaan, että F on bijektio luokalta A luokkaan B.

Relaatiosysteemi: Merkitään

$$Rel_A(R) := R \subseteq A^2\,.$$

Jos kaava $Rel_A(R)$ on teoreema, niin sanotaan, että pari (A, R) on relaatiosysteemi ja että R on relaatio luokassa A.

Isomorfismi: Olkoot F, A_1, A_2, R_1 ja R_2 luokkia sekä x ja y muuttujia, jotka eivät esiinny näissä luokissa. Merkitään

$$F\ Isom_{R_1,R_2}(A_1, A_2) := F : A_1 \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} A_2 \wedge \forall x \forall y[[x \in A_1 \wedge y \in A_1] \to [xR_1 y \to F[x]R_2F[y]] \,.$$

Jos kaava $F\ Isom_{R_1,R_2}(A_1, A_2)$ on teoreema, niin sanotaan, että F on isomorfismi relaatiosysteemistä (A_1, R_1) relaatiosysteemille (A_2, R_2).

Bijektion indusoima relaatio: Olkoot y ja z eri muuttujia. Merkitään:

$$IndRel_{F,R}(A, B) := \{x \mid \exists y \exists z[x \approx \langle F[y], F[z]\rangle \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge \langle y, z\rangle \in R\} \,.$$

Tällöin lauseen TZ6.33 mukaisesti

$$\vdash [Rel_A(R) \wedge F : A \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} B] \to F\ Isom_{R,IndRel_{F,R}(A,B)}\ (A, B) \,. \tag{1}$$

Jos kaava $Rel_A(R) \wedge F : A \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} B$ on teoreema, niin kutsutaan ehdon (1) mukaisesti luokkaa $IndRel_{F,R}(A, B)$ relaation R ja funktion F luokasta A indusoimaksi luokan B relaatioksi.

Joukko potenssiin toinen joukko: Merkitään

$$a^b := \{f \mid f : b \to a\} \,.$$

Huomaa, että tämä merkintä ei ole päällekkäinen joukon karteesista tuloa itsensä kanssa kuvaavan merkinnän (esimerkiksi $a^2 := a \times a$) kanssa, sillä tavallista numeroa 2 ei lainkaan käytetä merkitsemään joukkoa.

Järjestäminen joukkoinkluusion avulla: Merkitään eri muuttujille x ja y

$$E := \{x \mid \exists y \exists z[x \approx \langle y, z\rangle \wedge y \in z]\} \,.$$

Transitiivinen luokka: Merkitään

$$Tr(A) := \forall x[x \in A \to x \subseteq A] \,.$$

Jos kaava $Tr(A)$ on teoreema, niin sanotaan, että luokka A on transitiivinen.

Ordinaaliluokat: Merkitään

$$Ord(A) = Tr(A) \wedge E\ JMin\ A \,.$$

Jos kaava $Ord(A)$ on teoreema, niin sanotaan, että A on ordinaaliluokka.

Ordinaaliluvut: Merkitään

$$On := \{x \mid Ord(x)\}$$

ja sanotaan, että On on ordinaalilukujen luokka. Lisäksi, jos kaava $\vdash a \in On$ on teoreema, niin sanotaan, että a on ordinaaliluku. Jatkossa ordinaalilukuja merkitään kreikkalaisilla aakkosilla $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi, \eta$. Näitä käytetään samaan tapaan kuin tämän alaluvun alussa esiteltyjä symboleja a, b, c, d, f, g, jotka voivat viitata muuttujiin tai vakioihin. Tässä vaiheessa siis edellisen listan kreikkalaiset kirjaimet ovat yksinkertaisesti muuttujia tai vakioita; seuravassa kohdassa merkintöihin tulee hieman täsmennyksiä.

Kvantifiointi ordinaaliluvun suhteen ja ordinaalilukuluokat: Olkoon φ kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava, w ja α muuttujia sekä x muuttuja, joka ei esiinny kaavassa φ. Merkitään

$$\begin{aligned} \forall\alpha[\varphi_w(\alpha)] &:= \forall x[x \in On \to \varphi_w(x)]\,, \\ \exists\alpha[\varphi_w(\alpha)] &:= \exists x[x \in On \wedge \varphi_w(x)] \quad \text{ja} \\ \{\alpha \mid \varphi_w(\alpha)\} &:= \{x \mid Ord(x) \wedge \varphi_w(x)\}\,. \end{aligned}$$

Lisäksi sovitaan, että sanonta “α on ordinaaliluku” ja sen johdannaiset tarkoittavat kiinteälle totuusarvofunktiolle t, että α on vakio, jolle on voimassa $t(\alpha \in On) = 1$. Tämän kohdan määrittelyissä α:n paikalla voi olla mikä tahansa muu listan $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi, \eta$ kreikkalainen kirjain, jolloin tulkinta on vastaava kuin edellä.

Finiittiset ordinaalit: Sanotaan, että α on finiittinen ordinaali, jos kaava $\alpha \in \omega$ on teoreema. Tässä ω on ensimmäinen rajaordinaali eli aksiomaattisen joukko-opin vastine tavallisen matematiikan luonnollisten lukujen joukolle. Merkintä on erittäin vakiintunut ja sen tarkan määrittelyn tulisi olla tuttu lähteestä [4]. Finiittisiä ordinaaleja merkitään yleensä symboleilla n, m, i, j, p, k. Niiden suhteen kvantifiointi määritellään hyvin samaan tapaan kuin ordinaalilukujen suhteen kvantifiointi yleensäkin: Olkoon φ kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava, w ja n muuttujia sekä x muuttuja, joka ei esiinny kaavassa φ. Merkitään

$$\begin{aligned} \forall n[\varphi_w(n)] &:= \forall x[x \in \omega \to \varphi_w(x)]\,, \\ \exists n[\varphi_w(n)] &:= \exists x[x \in \omega \wedge \varphi_w(x)] \quad \text{ja} \\ \{n \mid \varphi_w(n)\} &:= \{x \mid x \in \omega \wedge \varphi_w(x)\}\,. \end{aligned}$$

Lisäksi sovitaan, että sanonta "n on finiittinen ordinaali" ja sen johdannaiset tarkoittavat kiinteälle totuusarvofunktiolle t, että n on vakio, jolle pätee $t(n \in \omega) = 1$. Alkupään finiittisiä ordinaaleja merkitään lihavoiduilla numeroilla $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$.

Ordinaalilukujen vertailu: Merkitään:

$$A \prec B := Ord(A) \wedge Ord(B) \wedge A \in B$$

ja

$$A \precsim B := Ord(A) \wedge Ord(B) \wedge (A \in B \vee A \approx B)\,.$$

Ordinaalilukujen laskutoimitukset: Nämä määritellään samoin transfiniittistä rekursiota käyttäen samoin kuin lähteessä [4]. Ordinaalilukujen yhteenlaskua merkitään symbolilla $\oplus$.

Luokan minimi: Määritellään

$$\min A := \begin{cases} \bigcap_{A \cap On} & \text{, jos } \vdash A \not\approx \emptyset \\ \emptyset & \text{muuten.} \end{cases}$$

Aidosti kasvava ordinaalifunktio: Merkitään

$$\begin{aligned} Ako(F) :=& Fnc(F) \wedge Ord(\mathcal{D}(F)) \wedge \mathcal{W}(F) \subseteq On \wedge \\ & \forall\alpha\forall\beta[[\alpha \in \mathcal{D}(F) \wedge \beta \in \mathcal{D}(F)] \rightarrow [\alpha \prec \beta \rightarrow F[\alpha] \prec F[\beta]]]\,. \end{aligned}$$

Jos kaava $Ako(F)$ on teoreema, niin sanotaan, että F on aidosti kasvava ordinaalifunktio.

Yhtä mahtavat joukot: Olkoon $f \neq a, b$ muuttuja. Merkitään

$$a \simeq b := \exists f[f : a \underset{onto}{\overset{1-1}{\rightarrow}} b]\,.$$

Jos kaava $a \simeq b$ on teoreema, niin sanotaan, että joukot a ja b ovat yhtä mahtavia.

Kardinaaliluvut: Merkitään

$$\mathcal{O}_a := \{\alpha \mid a \simeq \alpha\}$$

ja

$$\overline{\overline{a}} := \min \mathcal{O}_a \,.$$

Sanotaan, että $\overline{\overline{a}}$ on joukon a mahtavuus. Tässä kohtaa on syytä todeta, että puhtaassa ZF-järjestelmässä voi joukolle a luokka $\mathcal{O}_a$ hyvinkin olla tyhjä, jolloin pätee $\vdash \overline{\overline{a}} \approx \emptyset$. Vasta valinta-aksiooma takaa, että jokaiselle epätyhjälle joukolle löytyy joukosta $\emptyset$ poikkeava mahtavuus.

Äärelliset ja äärettömät joukot: Merkitään

$$\begin{aligned} Fin(a) &:= \exists n[n \simeq a] \quad \text{ja} \\ Inf(A) &:= \neg Fin(A) \,. \end{aligned}$$

Jos kaava $Fin(a)$ on teoreema, niin sanotaan, että joukko a äärellinen. Jos kaava $Inf(a)$ on teoreema, niin sanotaan, että joukko a on ääretön.

Kardinaalilukujen luokittelu: Merkitään

$$\begin{aligned} &\mathcal{K} := \{\alpha \mid \exists a[\overline{\overline{a}} \simeq \alpha]\} \quad \text{ja} \\ &\mathcal{K}_T := \mathcal{K} \setminus \omega \,. \end{aligned}$$

Sanotaan, että $\mathcal{K}_T$ on transfiniittisten kardinaalilukujen luokka ja että α on transfiniittinen kardinaali, jos kaava $\alpha \in \mathcal{K}_T$ on teoreema.

$\aleph$-funktio: Merkitään kirjaimella $\aleph$ isomorfismia

$$\aleph \; Isom_{E,E}(On, \mathcal{K}_T) \,.$$

Lisäksi merkitään tavallisesta kuvapistemerkinnästä poiketen ordinaaliluvulle α kuvapistettä $\aleph[\alpha]$ symbolilla $\aleph_\alpha$. Lauseiden TZ7.50 ja TZ10.43 nojalla tällainen $\aleph$-funktio on todellakin olemassa, ja helposti nähdään sen yksikäsitteisyys.

On syytä muistaa, että kuten tämän alaluvun alussa todettiin, tutkielman seuraamisen esitiedoiksi ei suinkaan riitä edellä lueteloitujen merkintöjen muistaminen vaan aksiomaattisen joukko-opin perusteet on hallittava vähintään tasolla TZl1-TZl11. Esimerkiksi funktioiden perusominaisuudet, ordinaalilukujen laskutoimitukset ja joukkojen luokittelu *rank*-funktiolla oletetaan tunnetuiksi. *rank*-funktiosta käytetään suomen kieleen paremmin taipuvaa nimitystä rankifunktio, ja joukon a kuvapistettä funktiossa *rank* kutsutaan yksinkertaisesti joukon a rankiksi.

2.2.2 Joukko-opin aksioomat ja muita tärkeitä kaavoja

Tässä alaluvussa luetellaan ZFC-järjestelmän aksioomat. Lisäksi kirjataan tutkielmassa esiintyvistä kaavoista ne, joille on etupäässä tärkeytensä vuoksi aksiomaattisen joukko-opin piirissä vakiintunut erityinen lyhenne.

Aloitetaan joukko-opin aksioomista. Tekstissä niihin viitataan tässä esiintyvillä lyhenteillä (Ax1)-(Ax8) ja (AC). Olkoot kaikissa tämän alaluvun määrittelyissä a, b, u, w, x, y ja z muuttujia.

(Ax1):

$$\forall a \forall x \forall y[[x \approx y \wedge x \in a] \rightarrow y \in a]\,.$$

(Ax2):

$$\forall a \forall b[\mathcal{M}(\{a, b\})]\,.$$

(Ax3):

$$\forall a[\mathcal{M}(\cup_a)]\,.$$

(Ax4): Olkoon φ kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava. Olkoot lisäksi a, x ja y eri muuttujia sekä $y_1, \ldots, y_n$ kaavan φ muuttujista u ja w eroavat vapaat muuttujat. Oletetaan vielä, että $a, x, y \neq y_1, \ldots, y_n$. Merkitään nyt symbolilla (Ax4) kaavaa

$$\forall a \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists y \forall x[x \in y \leftrightarrow [\varphi_w(x) \wedge x \in a]]\,.$$

(Ax5):

$$\forall a[\mathcal{M}(\mathcal{P}(a))]\,.$$

(Ax6):

$$\forall a[a \not\approx \emptyset \rightarrow \exists x[x \in a \wedge x \cap a \approx \emptyset]]\,.$$

(Ax7): Olkoon φ kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava. Olkoot lisäksi a, b, x, y, z eri muuttujia ja $y_1, \dots, y_n$ kaavan φ muuttujista u ja w eroavat vapaat muuttujat. Oletetaan vielä, että $a, b, x, y, z \neq y_1, \dots, y_n$. Merkitään nyt symbolilla (Ax7) kaavaa

$$\forall a \forall y_1 \dots \forall y_n [\forall x \forall y \forall z [[\varphi_{w,u}(x, y) \wedge \varphi_{w,u}(x, z)] \rightarrow y \approx z] \rightarrow \\ \exists b \forall y [y \in b \leftrightarrow \exists x [x \in a \wedge \varphi_{w,u}(x, y)]]] \, .$$

(Ax8):

$$\mathcal{M}(\omega) \, .$$

Valinta-aksiooma (AC): Olkoot a, f ja x eri muuttujia. Merkitään symbolilla (AC) kaavaa

$$\forall a \exists f \forall x [[x \in a \wedge x \not\approx \emptyset] \rightarrow f[x] \in x] \, .$$

Seuraavaksi esitetään valinta-aksiooman kanssa yhtäpitävä niin sanottu hyvinjärjestyneisyysperiaate. Siitä käytetään lyhennettä WOP, joka pohjautuu englanninkieliseen nimitykseen *Well-Ordering Principle.*

Olkoot r ja a eri muuttujia. Merkitään symbolilla WOP kaavaa

(WOP):

$$\forall a \exists r [r \ JMin \ a] \, .$$

Hyvinjärjestyneisyysperiaate on jatkossa aivan olennaisessa asemassa, sillä valinta-aksiooma tullaan jopa kahteen kertaan todistamaan osoittamalla, että nimenomaan (WOP) seuraa tietyistä ZF-järjestelmän laajennuksista. Nämä laajennukset ovat yleistetty kontinuumihypoteesi (GCH) ja $\aleph$-hypoteesi (AH), jotka määritellään seuraavassa.

(GCH):

$$\forall a \forall b [[Inf(a) \wedge b \subseteq \mathcal{P}(a) \wedge \exists x [a \subseteq x \wedge x \simeq b]] \rightarrow [b \simeq a \vee b \simeq \mathcal{P}(a)]] \, .$$

(AH):

$$\forall \alpha [\overline{\overline{\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}}} \approx \aleph_{\alpha \oplus \mathbf{1}}] \, .$$

2.3 Yleistetyn kontinuumihypoteesin ja $\aleph$-hypoteesin yhtäpitävyys

Tutkielman päätavoitteena on todistaa väite

$$\vdash GCH \leftrightarrow AH\,, \tag{I}$$

missä käytettävä aksioomajärjestelmä on (Ax1)–(Ax8); huomattavaa on, että valinta-aksioomaa ei tähän järjestelmään lueta. Ehto (1) todistetaan osoittamalla, että

$$\vdash AH \to GCH \tag{II}$$

ja

$$\vdash GCH \to AH\,. \tag{III}$$

Molemmat väitteet olisi kohtuullisen helppo todistaa, jos valinta-aksioomaa saataisiin käyttää. Tästä syystä lähtökohtana on osoittaa, että valinta-aksiooma itse asiassa seuraa sekä GCH:sta että AH:sta, ja tätä kautta edetä päättelemään väite (I) väitteiden (II) ja (III) avulla. Tulosta

$$\vdash AH \to AC$$

kutsutaan Rubinin lauseeksi sen alkujaan vuonna 1960 todistaneen yhdysvaltalaisen matemaatikon Herman Rubinin (syntymävuosi 1926) mukaan. Rubinin lauseen todistaminen on seuraavan luvun 3 päätavoite. Luvussa 4 todistetaan niin sanottu Sierpinskin lause, eli väittämä

$$\vdash GCH \to AC\,.$$

Lause on nimetty sen vuonna 1947 todistaneen puolalaisen matemaatikon Waclav Sierpinskin (1882-1969) mukaan. Luvun 3 lopussa osoitetaan väite (II) oikeaksi ja luvun 4 lopussa väite (III). Kuitenkin, koska näissä todistuksissa Rubinin ja Sierpinskin lauseet ovat erittäin keskeisessä asemassa valinta-aksiooman kautta, on luvut nimetty niiden mukaisaan. Väitteet (II) ja (III) ovat oikeastaan helppoja seurauslauseita.

3 Rubinin lause

Rubinin lauseen todistus vaatii hieman valmisteluja, jotka kootaan lemmoihin 3.1-3.3. Ensimmäinen näistä koskee Rubinin lauseen todistuksessa olennaisessa asemassa olevan lauseen TZ10.40 yksityiskohtia.

Lemma 3.1 *Olkoot a ja b joukkoja. Merkitään*

$$\alpha := \{\epsilon \mid \exists h[h : \epsilon \overset{1-1}{\to} a]\}$$

ja

$$\beta := \{\epsilon \mid \exists h[h : \epsilon \overset{1-1}{\to} b]\}\,.$$

Lauseen TZ10.40 nojalla luokat α ja β todella ovat ordinaalilukuja, joten merkintä on järkevä. Nyt on voimassa

$$\vdash a \subseteq b \to \alpha \precsim \beta\,.$$

Todistus: Voidaan olettaa, että a ja b ovat vakioita, jolloin väitteen kaava on suljettu. Olkoon t totuusarvofunktio, joka toteuttaa aksioomat (Ax1)–(Ax8). Oletetaan, että

$$t(a \subseteq b) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitettava, että

$$t(\alpha \precsim \beta) = 1\,. \tag{2}$$

Olkoon tätä varten γ ordinaaliluku, jolle on voimassa

$$t(\gamma \in \alpha) = 1\,. \tag{3}$$

Riittää osoittaa, että

$$t(\gamma \in \beta) = 1\,. \tag{4}$$

On löydettävä vakio g siten, että

$$t(g : \gamma \overset{1-1}{\to} b) = 1\,. \tag{5}$$

Ehdon (3) ja luokan α määritelmän nojalla on olemassa vakio h siten, että

$$t(h : \gamma \overset{1-1}{\to} a) = 1\,. \tag{6}$$

Erityisesti siis

$$t(\mathcal{W}(h) \subseteq a) = 1\,.$$

Tällöin ehdon (1) ja sivun TZs16 harjoitustehtävän nojalla

$$t(\mathcal{W}(h) \subseteq b) = 1\,,$$

mistä seuraa ehdon (6) kanssa, että

$$t(h : \gamma \overset{1-1}{\to} b) = 1\,.$$

Näin ollen ehdossa (5) voidaan valita $g = h$. $\square$

Seuraava tässä kohtaa ehkä irralliselta vaikuttava lemma on tarpeellinen Rubinin lauseen (lause 3.4) todistuksessa esiintyvän transfiniittisen rekursion toimivuuden kannalta. Lauseessa on hieman ylioletettu, jotta siinä esiintyvää luokkaa S voidaan sellaisenaan soveltaa lauseessa 3.3.

Lemma 3.2 *Määritellään luokka S asettamalla*

$$
\begin{aligned}
S := \{x \mid \exists f \exists z \exists \beta [& x \approx \langle f, z\rangle \wedge f\ Fn\ \beta \wedge \\
& \forall \gamma[\gamma \prec \beta \rightarrow f[\gamma]\ JMin\ \{w \mid rank[w] \approx \gamma\}] \\
& \wedge \forall d[d \in z \leftrightarrow \exists b \exists c[d \approx \langle b, c\rangle \wedge rank[b] \prec \beta \wedge rank[c] \prec \beta \wedge \\
& [[rank[b] \prec rank[c]] \vee [rank[b] \approx rank[c] \wedge \langle b, c\rangle \in f[rank[b]]]]]]]\} \,.
\end{aligned}
$$

Tälle luokalle on voimassa

$$\vdash Rel(S)\,, \tag{1}$$

$$\vdash \forall x \forall y \forall z[[\langle x, y\rangle \in S \wedge \langle x, z\rangle \in S] \rightarrow y \approx z \wedge S[x] \approx y]\,,\ \textit{ja} \tag{2}$$

$$\vdash \forall f \forall \beta[[f\ Fn\ \beta \wedge \forall \gamma[\gamma \prec \beta \rightarrow f[\gamma]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \gamma\}]] \rightarrow S[f]\ JMin\ R[\beta]]\,. \tag{3}$$

Todistus: Olkoon t aksioomat (Ax1)–(Ax8) toteuttava totuusarvofunktio. Riittää osoittaa väitteiden kaavat valideiksi. Suljetaan nämä kaavat merkintöjä vaihtamatta.

Ehdon (1) toteamiseksi on huomattava, että luokan S määritelmän mukainen x on aina joukko. Ja onhan se, sillä ensinnäkin (edelleen määritelmän merkintöjä käyttäen) jossain ordinaaliluvussa β määriteltynä funktiona f on lauseen TZ6.15 nojalla joukko. Toisaalta joukon $\{x \mid rank[x] \prec \beta\} \times \{x \mid rank[x] \prec \beta\}$ osajoukkona myös jokainen z on joukko; tuo karteesinen tulo on joukko lauseen TZ9.19 perusteella, sillä sen 'koordinaattiuokkien' alkioden rankit ovat ylhäältä rajoitettuja. Kaiken kaikkiaan siis jokainen S:n määritelmän pari $\langle f, z\rangle$ on joukko.

Todistetaan seuraavaksi ehto (2). Olkoot tätä varten u, v_1 ja v_2 vakioita, joille on voimassa

$$t(\langle u, v_1\rangle \in S) = 1 \tag{4}$$

ja

$$t(\langle u, v_2\rangle \in S) = 1\,. \tag{5}$$

On osoitettava, että

$$t(v_1 \approx v_2) = 1 \tag{6}$$

ja

$$t(f[u] \approx v_1) = 1\,. \tag{7}$$

Todistetaan ensin ehto (6). Tehdään tämä osoittamalla, että

$$t(\forall x[x \in v_1 \to x \in v_2]) = 1 \tag{8}$$

ja

$$t(\forall x[x \in v_2 \to x \in v_1]) = 1\,. \tag{9}$$

Todistetaan tässä ehto (8) – ehto (9) hoituu vastaavasti. Oletetaan, että d on vakio, jolle on voimassa

$$t(d \in v_1) = 1\,. \tag{10}$$

Ehdon (8) todistamiseksi on osoitettava, että

$$t(d \in v_2) = 1\,. \tag{11}$$

Ehdon (4) (tai (5)) ja luokan S määritelmän nojalla on olemassa ordinaaliluku β siten, että

$$t(u\ Fn\ \beta) = 1 \tag{12}$$

ja

$$t(\forall \gamma[\gamma \prec \beta \to u[\gamma]\ JMin\ \{w \mid rank[w] \approx \gamma\}]) = 1\,. \tag{13}$$

Ehtojen (4) ja (10) sekä luokan S määritelmän nojalla on olemassa vakiot b ja c siten, että

$$t(d \approx \langle c, d \rangle) = 1\,, \tag{14}$$

$$t(rank[b] \prec \beta) = 1\,, \tag{15}$$

$$t(rank[c] \prec \beta) = 1 \quad \text{ja} \tag{16}$$

$$t(rank[b] \prec rank[c] \lor [rank[b] \approx rank[c] \land \langle b, c \rangle \in u[rank[b]]]) = 1\,. \tag{17}$$

Ehdosta (5) ja ehdot (14)–(17) toteuttavien vakioden b ja c olemassaolosta seuraa nyt luokan S määritelmän nojalla, että

$$t(d \in v_2) = 1 \tag{18}$$

eli että ehto (11) on voimassa. Tämä todistaa ehdon (8) ja, kuten todettu, ehto (9) hoituu vastaavasti. Ehto (6) on siis loppuun todistettu. Ehto (7) seuraa nyt sivun TZs25 huomautuksesta ehdon (4) ja ehdossa (6) todistetun yksikäsitteisyyspuolen nojalla. Näin ollen ehto (2) on kokonaisuudessaan todistettu.

Todistettavana on vielä ehto (3). Tätä varten oletetaan, että vakiolle f ja ordinaaliluvulle β on voimassa

$$t(f\ Fn\ \beta) = 1 \quad \text{ja} \tag{19}$$

$$t(\forall\gamma[\gamma \prec \beta \to f[\gamma]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \gamma\}]) = 1\,. \tag{20}$$

On osoitettava, että

$$t(S[f]\ JMin\ R[\beta]) = 1\,. \tag{21}$$

Todistetaan ensin, että

$$S[f] \quad \text{on järjestävä relaatio joukossa } R[\beta]\,. \tag{22}$$

Huomataan ensinnäkin, että kun valitaan

$$\begin{aligned} w :=&\{d \mid \exists b\exists c[d \approx \langle b, c\rangle \wedge rank[b] \prec \beta \wedge rank[c] \prec \beta\wedge \\ &[[rank[b] \prec rank[c]] \vee [rank[b] \approx rank[c] \wedge \langle b, c\rangle \in f[rank[b]]]]]\}\,, \end{aligned}$$

niin ehtojen (19) ja (20) sekä luokan S määritelmän nojalla

$$t(\langle f, w\rangle \in S) = 1$$

ja edellä todistetun ehdon (2) nojalla

$$t(S[f] \approx w) = 1\,. \tag{23}$$

Tuo w on merkitty joukoksi, sillä se on selvästi joukon

$$\{x \mid rank[x] \prec \beta\}^2$$

osaluokka ja siten joukko. Joukon w määritelmän nojalla ja ehdon (23) nojalla $S[f]$ on relaatio. Olkoot tämän relaation järjestävyyspuolen todistamista varten u ja v vakioita, joille on voimassa

$$t(u \in R[\beta]) = 1 \tag{24}$$

ja

$$t(v \in R[\beta]) = 1\,. \tag{25}$$

On osoitettava, että

$$t(u \approx v \vee uS[f]v \vee vS[f]u) = 1\,. \tag{26}$$

Lauseen TZ9.15 nojalla

$$t(\beta \precsim rank[u] \to u \notin R[\beta]) = 1\,, \tag{27}$$

joten ehdon (24) perusteella on oltava

$$t(rank[u] \prec \beta) = 1\,. \tag{28}$$

Vastaavasti

$$t(\beta \precsim rank[v] \to v \notin R[\beta]) = 1 \tag{29}$$

ja siten ehdosta (25) seuraa, että

$$t(rank[v] \prec \beta) = 1\,. \tag{30}$$

Jos

$$t(u \approx v) = 1\,,$$

niin ehto (26) seuraa selvästi. Voidaan siis olettaa, että

$$t(u \not\approx v) = 1\,. \tag{31}$$

Jos

$$t(rank[u] \prec rank[v]) = 1\,,$$

niin ehtojen (28), (30) ja (23) nojalla

$$t(uS[f]v) = 1$$

eli ehto (26) pätee. Vastaavasti, jos

$$t(rank[v] \prec rank[u]) = 1\,,$$

niin

$$t(vS[f]u) = 1$$

ja ehto (26) on jälleen voimassa. Oletetaan nyt, että

$$t(rank[u] \approx rank[v]) = 1\,. \tag{32}$$

Merkitään $\delta := rank[u] = rank[v]$. Ehdon (28) nojalla

$$t(\delta \prec \beta) = 1\,, \tag{33}$$

mistä seuraa ehdon (20) nojalla, että

$$t(f[\delta]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \delta\}) = 1\,. \tag{34}$$

Tällöin ehtojen (31) ja (32) sekä δ:n valinnan nojalla on voimassa

$$t(\langle u, v\rangle \in f[\delta]) = 1 \tag{35}$$

tai

$$t(\langle v, u\rangle \in f[\delta]) = 1\,. \tag{36}$$

Jos ehto (35) on voimassa, seuraa ehdoista (23), (28), (30) ja (32), että

$$t(uS[f]v) = 1$$

ja ehto (26) siten pätee. Vastaavasti nähdään, että jos ehto (36) on voimassa, niin

$$t(vS[f]u) = 1\,,$$

joten ehto (26) on voimassa tässäkin tapauksessa. Siispä vaihtoehto (31) on käsitelty loppuun, mikä todistaa ehdon (22).

On siis osoitettu, että $S[f]$ on järjestävä relaatio joukossa $R[B]$. Ehdon (21) loppuun todistamiseksi on vielä osoitettava, että

$$t(S[f]\ Min\ R[\beta]) = 1\,. \tag{37}$$

Olkoon tätä varten b vakio siten, että

$$t(b \subseteq R[\beta]) = 1 \quad \text{ja} \tag{38}$$

$$t(b \neq \emptyset) = 1\,. \tag{39}$$

Riittää löytää vakio v siten, että

$$t(v \in b) = 1 \quad \text{ja} \tag{40}$$

$$t(b \cap S[f]^{-1}(\{v\}) \approx \emptyset) = 1\,. \tag{41}$$

Määritellään luokka A asettamalla

$$A := \{\alpha \mid \exists x[x \in b \wedge rank[x] \approx \alpha]\}\,.$$

Osoitetaan, että
$$t(A \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{42}$$
Oletuksen (39) nojalla on olemassa vakio u siten, että
$$t(u \in b) = 1\,. \tag{43}$$
Merkitään $\gamma := rank[u]$. Nyt luokan A määritelmän ja ehdon (43) nojalla
$$t(\gamma \in A) = 1\,,$$
mistä ehto (42) seuraa.

Tilanne on siis se, että A on epätyhjä luokan On osaluokka. Tällöin sivun TZs40 harjoitustehtävän mukaisesti joukosta A löytyy E-minimaalinen alkio, joka on ordinaaliluku, eli on olemassa ordinaaliluku μ siten, että
$$\mu \in A \quad \text{ja} \tag{44}$$
$$t(\forall\gamma[\gamma \in A \to \mu \precsim \gamma]) = 1\,. \tag{45}$$
Merkitään
$$B = \{x \mid x \in b \wedge rank[x] \approx \mu\}\,.$$
Ordinaaliluvun μ valinnasta, ehdosta (44) ja luokan A määritelmästä seuraa, että
$$t(B \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{46}$$

Osoitetaan, että
$$t(\mu \prec \beta) = 1\,. \tag{47}$$
Tehdään antiteesi: oletetaan, että
$$t(\beta \precsim \mu) = 1\,. \tag{48}$$
Ehdon (46) nojalla on olemassa vakio u siten, että
$$t(u \in B) = 1$$
ja siten luokan B määritelmän nojalla
$$t(u \in b) = 1 \quad \text{ja} \tag{49}$$
$$t(rank[u] \approx \mu) = 1\,. \tag{50}$$

Ehdoista (48) ja (50) nähdään suoraan, että

$$t(\beta \precsim rank[u]) = 1\,,$$

mistä puolestaan seuraa lauseen TZ9.15 mukaisesti, että

$$t(u \notin R[\beta]) = 1\,. \tag{51}$$

Toisaalta ehtojen (38) ja (49) nojalla

$$t(u \in R[\beta]) = 1\,,$$

mikä on vastoin ehtoa (51). Syntynyt ristiriita kaataa antiteesin ja osoittaa ehdon (47) todeksi.

Ehdosta (47) ja oletuksesta (20) seuraa, että

$$t(f[\mu]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \mu\}) = 1\,. \tag{52}$$

Suoraan luokan B määritelmään perustuen

$$t(B \subseteq \{x \mid rank[x] \approx \mu\}) = 1\,. \tag{53}$$

Merkitään $\widetilde{f[\mu]} = f[\mu] \cap B^2$, jolloin ehdon (53) ja järjestävän minimaalirelaation osajoukkoon periytymisen nojalla

$$t(\widetilde{f[\mu]}\ JMin\ B) = 1\,. \tag{54}$$

Tästä ja ehdosta (46) seuraa, että on olemassa vakio v siten, että

$$t(v \in B) = 1 \quad \text{ja} \tag{55}$$

$$t(B \cap \widetilde{f[\mu]}^{-1}(\{v\}) \approx \emptyset) = 1 \tag{56}$$

eli joukosta B löytyy $\widetilde{f[\mu]}$-minimaalinen alkio. Osoitetaan, että tämä v toteuttaa ehdot (40) ja (41) eli on etsitty joukon b $S[f]$-minimaalinen alkio. Ehto (40) seuraa välittömistä siitä, että

$$t(B \subseteq b) = 1\,. \tag{57}$$

Ehdon (41) todistamiseksi tehdään antiteesi: oletetaan, että

$$t(b \cap S[f]^{-1}(\{v\})) \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{58}$$

Tämä tarkoittaa, että voidaan kiinnittää vakio u siten, että

$$t(u \in b) = 1 \quad \text{ja} \tag{59}$$
$$t(uS[f]v) = 1\,. \tag{60}$$

Ehdoista (51) ja (23) seuraa, että pätee joko

$$t(rank[u] \prec rank[v]) = 1 \tag{61}$$

tai

$$t(rank[u] \approx rank[v]) = 1\,. \tag{62}$$

Oletetaan ensin, että ehto (61) on voimassa. Ehdon (55) ja luokan B määritelmän nojalla

$$t(rank[v] \approx \mu) = 1\,, \tag{63}$$

mistä ehdon (61) kanssa seuraa, että

$$t(rank[u] \prec \mu) = 1\,. \tag{64}$$

Toisaalta ehdon (59) nojalla

$$t(rank[u] \in A) = 1\,,$$

mikä tarkoittaa ehdon (45) perusteella sitä, että

$$t(\mu \precsim rank[u]) = 1\,. \tag{65}$$

Ehdot (64) ja (65) ovat ristiriidassa keskenään, joten vaihtoehto (61) ei voi olla voimassa. Tällöin edellä todetun perusteella on vaihtoehdon (62) oltava tosi, mistä ehdon (63) perusteella seuraa, että

$$t(rank[u] \approx \mu) = 1$$

eli ehdon (59) ja luokan B määritelmän mukaisesti, että

$$t(u \in B) = 1\,. \tag{66}$$

Ehtojen (60), (62) ja (23) nojalla nyt

$$t(uf[\mu]v) = 1\,, \tag{67}$$

mistä seuraa ehtojen (55), (59) ja (60) nojalla, että

$$t(u\widetilde{f[\mu]}v) = 1\,. \tag{68}$$

Ehdoista (66) ja (68) seuraa, että

$$t(u \in B \cap \widetilde{f[\mu]}^{-1}(\{v\})) = 1\,.$$

Tämä on vastoin ehtoa (56), mikä tarkoittaa, että myös tapaus (62) johti ristiriitaan. Muita vaihtoehtoja ei ole enää jäljellä, joten antiteesi (58) on epätosi. Tämä todistaa ehdon (41) ja siten ehdon (37) loppuun. Kuten edellä todettu, tämä viimeistelee ehdon (3) todistuksen, joten lemma on kokonaisuudessaan todistettu. □

Esitetään vielä pieni lemma, joka liittyy rankifunktion perusominaisuuksiin ja joka on yksi Rubinin lauseen todistuksen lähtökohdista.

Lemma 3.3 *Olkoon A luokka. Tällöin*

$$\vdash \mathcal{M}(A) \to \exists\alpha\forall x[x \in A \to rank[x] \prec \alpha].$$

Todistus: Riittää osoittaa väitteen kaava validiksi. Suljetaan tämä kaava merkintöjä vaihtamatta. Olkoon aksioomat (Ax1)-(Ax8) toteuttava totuusarvofunktio. Oletetaan, että

$$t(\mathcal{M}(A)) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitettava, että

$$t(\exists\alpha\forall x[x \in A \to rank[x] \prec \alpha]) = 1$$

eli että jollekin vakiolle α on voimassa

$$t(\forall x[x \in A \to rank[x] \prec \alpha]) = 1\,. \tag{2}$$

Osoitetaan, että valinta $\alpha := rank[A]$ toteuttaa ehdon (2). Valinta on oletuksen (1), rankifunktion määritelmän ja sivuilla TZs67-68 tehtyjen rankifunktion määrittelyssä käytetyn apufunktion R ominaisuuksia koskevien huomioiden perusteella mielekäs.

Ehdon (2) todistamiseksi olkoon v vakio, jolle on voimassa

$$t(v \in A) = 1\,. \tag{3}$$

On osoitettava, että

$$t(rank[v] \precsim \alpha) = 1\,.$$

Tämä seuraa suoraan α:n määritelmästä, oletuksesta (3) ja lauseesta TZ9.16. Väite on siis todistettu. $\square$

Näiden valmistelujen jälkeen ollaan viimein valmiita todistamaan Rubinin lause. Todistuksen johtoajatus on lähteen [4] mukainen ja tarkka muotoilu edellä esitettyine aputuloksineen tämän tutkielman kirjoittajan käsialaa.

Lause 3.4 ***(Rubinin lause)***

$$\vdash AH \to AC\,.$$

Todistus: Olkoon t jälleen ZF-aksioomat (Ax1)–(Ax8) toteuttava totuusarvofunktio. Oletetaan, että

$$t(AH) = 1$$

eli että

$$t(\forall\alpha[\overline{\overline{\mathbf{2}^{\aleph_\alpha}}} \approx \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}]) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitettava, että

$$t(AC) = 1\,.$$

Lauseen TZ11.2 nojalla riittää osoittaa, että

$$t(WOP) = 1\,. \tag{2}$$

Olkoon tätä varten a vakio. Riittää löytää vakio r siten, että

$$t(r\ JMin\ a) = 1\,. \tag{3}$$

Etsinnässä on siis järjestävä minimaalirelaatio joukkoon a. Käytetään vertailuun rankifunktiota; jokaisen joukon a alkion rankihan on ordinaaliluku, ja ordinaalilukujen perusteella voidaan vertailla. Pelkkä rankifunktioon perustuva järjestäminen ei kuitenkaan ehdon (3) täyttävän relaation konstruointiin riitä, sillä täytyy saada järjestettyä myös joukot, joilla on sama ranki.

Määritellään ensin funktio F, joka liittää mielivaltaiseen ordinaalilukuun β joukon a rankia β edustavat alkiot järjestävän minimaalirelaation. Tämä vaatii jonkin verran valmisteluja.

Ensinnäkin, koska a on joukko, on lemman 3.3 nojalla olemassa ordinaaliluku α siten, että

$$t(\forall x[x \in a \to rank[x] \prec \alpha]) = 1\,. \tag{4}$$

Lauseen TZ10.40 perusteella on lisäksi olemassa ordinaaliluku ξ siten, että
$$t(\aleph_\xi \approx \{\epsilon \mid \exists h[h : \epsilon \overset{1-1}{\to} R[\alpha]]\}) = 1\,. \tag{5}$$
Tässä on käytetty korollaarissa TZ6.13 todistettua tietoa siitä, että $R[\alpha]$ on joukko.

Lauseesta TZ10.49 (jonka todistuksessa ei tarvita valinta-aksioomaa) ja oletuksesta (1) eli aleph-hypoteesista seuraa, että
$$t(\mathcal{P}(\aleph_\xi) \simeq \aleph_{\xi\oplus\mathbf{1}}) = 1\,.$$
Tällöin on olemassa vakio h siten, että
$$t(h : \mathcal{P}(\aleph_\xi) \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \aleph_{\xi\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{6}$$
Selvästi E on järjestävä minimaalirelaatio ordinaaliluvussa $\aleph_{\xi\oplus\mathbf{1}}$, joten bijektio h^{-1} ja relaatio E indusoivat sivulla TZs31 esiintyvän määrittelyn ja lauseen TZ6.33 mukaisesti joukkoon $\mathcal{P}(\aleph_\xi)$ relaation, joka on lisäksi lauseen TZ6.32 nojalla järjestävä minimaalirelaatio. Merkitään tätä indusoitua relaatiota U:lla, jolloin edellä todetun nojalla
$$t(U\ JMin\ \mathcal{P}(\aleph_\xi)) = 1\,. \tag{7}$$

Olkoon luokka S kuten lemmassa 3.2. Määritellään luokka G asettamalla
$$\begin{aligned} G =& \{x \mid \exists\beta\exists y\exists z\exists f\exists g\exists\delta\exists\gamma[x \approx \langle y, z\rangle \wedge y\ Fn\ \beta \\ & \wedge \forall\nu[\nu \prec \beta \to y[\nu]\ JMin\ \{b \mid rank[b] \approx \nu\}] \\ & \wedge f\ Isom_{S[y],E}\ (R[\beta], \delta) \wedge \aleph_\gamma \approx \{\varepsilon \mid \exists h[h : \varepsilon \overset{1-1}{\to} R[\beta]]\} \\ & \wedge \forall w[w \in \mathcal{P}(R[\beta]) \to g[w] \approx f(w)] \wedge g : \mathcal{P}(R[\beta]) :\underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} g(\mathcal{P}(R[\beta])) \\ & \wedge z \approx \{d \mid rank[d] \approx \beta\}^2 \cap (IndRel_{g^{-1},U\cap g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))^2}(g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma)), \mathcal{P}(R[\beta])))]\}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Ensinnäkin
$$t(Rel(G)) = 1\,. \tag{9}$$

Tämän toteamiseksi riittää osoittaa, että jokainen G:n määritelmän pari $\langle y, z\rangle$ todella on hyvin määritelty järjestetty pari eli olennaisesti, että y ja z ovat joukkoja. G:n mielivaltaisen alkion $\langle y, z\rangle$ ensimmäinen koordinaatti y on jossain ordinaaliluvussa määritelty funktio ja siten lauseen TZ6.15 nojalla joukko. z puolestaan on joko tyhjä joukko (ja siten joukko) tai G:n määritelmän viimeisen rivin perusteella joukon $\{d \mid rank[d] \approx \beta\}^2$ osaluokka ja siten joukko. Ehto (9) on siis kunnossa.

Osoitetaan, että jos kiinteälle y luokan G määritelmän ehtojen mukainen z on olemassa, niin se on yksikäsitteisesti määritelty. Merkitään sotkujen minimoinniksi symbolilla $Exists(y, z)$ kaavaa

$$\begin{aligned}
&\exists\beta\exists f\exists g\exists\delta\exists\gamma[y\ Fn\ \beta\wedge\\
&\forall\nu[\nu \prec \beta \to y[\nu]\ JMin\ \{b \mid rank[b] \approx \nu\}]\\
&\wedge f\ Isom_{S[y],E}\ (R[\beta], \delta) \wedge \aleph_\gamma \approx \{\varepsilon \mid \exists h[h : \varepsilon \overset{1-1}{\to} R[\beta]]\}\\
&\wedge \forall w[w \in \mathcal{P}(R[\beta]) \to g[w] \approx f(w)] \wedge g : \mathcal{P}(R[\beta]) :\underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} g(\mathcal{P}(R[\beta]))\\
&\wedge z \approx \{d \mid rank[d] \approx \beta\}^2 \cap (IndRel_{g^{-1},U\cap g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))^2}(g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma)), \mathcal{P}(R[\beta])))]
\end{aligned}$$

Osoitetaan, että

$$t(\forall x\forall y\forall z[[Exists(x, y) \wedge Exists(x, z)] \to y \approx z) = 1\,. \tag{10}$$

Olkoot tätä varten u, v_1, v_2 vakioita, joille on voimassa

$$t(Exists(u, v_1)) = 1 \tag{11}$$

ja

$$t(Exists(u, v_2)) = 1\,. \tag{12}$$

On osoitettava, että

$$t(v_1 \approx v_2) = 1\,. \tag{13}$$

G:n määritelmän nojalla ja ehtojen (11)-(12) nojalla on olemassa ordinaaliluvut β_1 ja β_2 siten, että

$$t(u\ Fn\ \beta_1) = 1 \quad \text{ja} \tag{14a}$$

$$t(u\ Fn\ \beta_2) = 1\,. \tag{14b}$$

Funktion määrittelyjoukon määritelmän perusteella u määrää täysin joukon $\mathcal{D}(u)$, ja siten ehdoista (14a-b) seuraa, että

$$t(\beta_1 \approx \beta_2) = 1\,,$$

joten voidaan merkitä $\beta := \beta_1 = \beta_2$.

Ehdosta (11) (tai (12)) seuraa, että on voimassa

$$t(\forall\delta[\delta \prec \beta \rightarrow u[\delta]\ JMin\ \{b \mid rank[b] \approx \delta\}]) = 1 \tag{15}$$

ja että on olemassa ordinaaliluvut δ_1 ja δ_2 sekä vakiot f_1, f_2 siten, että

$$t(f_1\ Isom_{S[u],E}\ (R[\beta], \delta_1)) = 1$$

ja

$$t(f_2\ Isom_{S[u],E}\ (R[\beta], \delta_2)) = 1\,.$$

Ehtojen (14a-b) ja (15) sekä lemman 3.2. nojalla kuvapisteelle $S[u]$ on voimassa

$$t(S[u]\ JMin\ R[\beta]) = 1\,.$$

Tällöin, koska $R[\beta]$ on joukko (mikä oletetaan jatkossa tunnetuksi), lauseen TZ7.51 oletukset ovat kunnossa. Kyseisen lauseen yksikäsitteisyyspuolen nojalla

$$t(f_1 \approx f_2) = 1$$

ja

$$t(\delta_2 \approx \delta_2) = 1\,,$$

joten voidaan merkitä $f := f_1 = f_2$ ja $\delta := \delta_1 = \delta_2$. Näillä merkinnöillä

$$t(f\ Isom_{S[u],E}\ (R[\beta], \delta)) = 1\,. \tag{16}$$

Luokan G määritelmän sekä ehtojen (11) ja (12) nojalla on olemassa ordinaaliluvut γ_1 ja γ_2 siten, että

$$t(\aleph_{\gamma_1} \approx \{\varepsilon \mid \exists h[h : \varepsilon \stackrel{1-1}{\rightarrow} R[\beta]]\}) = 1$$

ja

$$t(\aleph_{\gamma_2} \approx \{\varepsilon \mid \exists h[h : \varepsilon \stackrel{1-1}{\rightarrow} R[\beta]]\}) = 1\,.$$

Tällöin lauseen TZ4.7 nojalla

$$t(\aleph_{\gamma_1} \approx \aleph_{\gamma_2}) = 1\,,$$

joten voidaan merkitä $\gamma := \gamma_1 = \gamma_2$. Näin saadaan ehto

$$t(\aleph_\gamma \approx \{\varepsilon \mid \exists h[h : \varepsilon \overset{1-1}{\to} R[\beta]]\}) = 1\,. \tag{17}$$

Ehtojen (11) ja (12) nojalla on olemassa vakiot g_1 ja g_2 siten, että

$$t(\forall z[z \in \mathcal{P}(R[\beta]) \to g_1[z] \approx f(z)] \wedge g_1 : \mathcal{P}(R[\beta]) \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} g_1(\mathcal{P}(R[\beta]))) = 1 \tag{18}$$

ja

$$t(\forall z[z \in \mathcal{P}(R[\beta]) \to g_2[z] \approx f(z)] \wedge g_2 : \mathcal{P}(R[\beta]) \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} g_2(\mathcal{P}(R[\beta]))) = 1\,. \tag{19}$$

Tällöin sivun TZs25 harjoitustehtävän nojalla

$$t(g_1 \approx g_2) = 1\,. \tag{20}$$

Merkitään $g := g_1 = g_2$. Nyt luokan G määritelmän nojalla

$$t(v_1 \approx \{d \mid rank[d] \approx \beta\}^2 \cap (IndRel_{g^{-1}, U \cap g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))^2}(g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma)), \mathcal{P}(R[\beta])))) = 1 \tag{21}$$

ja

$$t(v_2 \approx \{d \mid rank[d] \approx \beta\}^2 \cap (IndRel_{g^{-1}, U \cap g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))^2}(g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma)), \mathcal{P}(R[\beta])))) = 1 \tag{22}$$

Väite (13) seuraa nyt ehdoista (21) ja (22). Tämä todistaa ehdon (10).

Ehdon (10) ja sivun TZs25 huomautuksen nojalla

$$t(\forall x \forall y[Exists(x, y) \to G[x] \approx y]) = 1\,. \tag{24}$$

Olkoon F luokasta G lauseen TZ7.40 mukaisesti transfiniittisellä rekursiolla saatu funktio. Tällöin lauseen TZ7.40 nojalla on voimassa

$$t(F\ Fn\ On) = 1 \quad \text{ja} \tag{25a)}$$
$$t(\forall \beta[F[\beta] \approx G[F^\ulcorner \beta]]) = 1\,. \tag{25b)}$$

Osoitetaan, että tämä F tekee sen, mitä todistuksen alussa lupailtiin, eli että

$$t(\forall \beta[\beta \prec \alpha \to F[\beta]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \beta\}]]) = 1\,. \tag{26}$$

Tehdään tämä transfiniittisella induktiolla ordinaaliluvun β suhteen.

Induktion alkuaskeleessa on osoitettava, että

$$t(\mathbf{0} \prec \alpha \to F[\mathbf{0}]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \mathbf{0}]) = 1\,. \tag{27}$$

Ordinaaliluvun α valinnan mojalla

$$t(\mathbf{0} \prec \alpha) = 1\,,$$

joten riittää osoittaa, että ehdon (27) takajäsenen totuusarvo on 1.

Lauseen TZ9.15 mukaisesti

$$t(\forall y[rank[y] \approx \mathbf{0}] \to y \in R[\mathbf{1}]]) = 1\,,$$

mistä nähdään määritelmän TZ9.9 avulla, että

$$t(\forall y[rank[y] \approx \mathbf{0} \to y \in \mathcal{P}(\mathbf{0})]) = 1$$

eli että

$$t(\forall y[rank[y] \approx \mathbf{0} \to y \approx \mathbf{0}]) = 1\,. \tag{28}$$

Toisaalta ehdon (25b) nojalla

$$t(F[\mathbf{0}] \approx \emptyset) = 1\,. \tag{29}$$

Ehtojen (28) ja (29) nojalla ehdon (27) todistamiseksi riittää osoittaa, että

$$t(\emptyset\ JMin\ \{x \mid x \approx \mathbf{0}\}) = 1$$

eli että

$$t(\emptyset\ JMin\ \{\mathbf{0}\}) = 1\,. \tag{30}$$

Ensinnäkin, koska tyhjä joukko on jokaisen joukon osajoukko, on voimassa

$$t(\emptyset \subseteq V^2) = 1\,. \tag{31}$$

Riittää siis osoittaa, että

$$t(\forall y \forall z[[y \in \{\mathbf{0}\} \wedge z \in \{\mathbf{0}\}] \to [y \approx z \vee \langle y, z\rangle \in \emptyset \vee \langle z, y\rangle \in \emptyset]) = 1 \tag{32a}$$

ja

$$t(\emptyset\ Min\ \{\mathbf{0}\}) = 1\,. \tag{32b}$$

Ehdon (32a) todistamiseksi olkoot v ja u vakioita, joille on voimassa

$$t(v \in \{\emptyset\}) = 1 \tag{33}$$

ja

$$t(u \in \{\emptyset\}) = 1\,. \tag{34}$$

Riittää osoittaa, että

$$t(u \approx v \vee \langle u, v\rangle \in \emptyset \vee \langle v, u\rangle \in \emptyset) = 1\,.$$

Tämä on selvää, sillä ehtojen (33) ja (34) nojalla

$$t(u \approx v) = 1\,.$$

Ehdon (32b) todistamiseksi muistetaan minimaalirelaation määritelmä; on osoitettava, että

$$t(\forall b[[b \subseteq \{\emptyset\} \wedge b \not\approx \emptyset] \to \exists x[x \in b \wedge b \cap \emptyset^{-1}(\{x\}) \approx \emptyset]]) = 1\,.$$

Koska yksiöllä $\{\emptyset\}$ ei ole muita osajoukkoja b kuin $\{\emptyset\}$ ja $\emptyset$, pätee tämä ehto triviaalisti. Induktion alkuaskel on siis loppuun todistettu.

Tehdään seuraavaksi induktio-oletus: oletetaan, että

$$t(\forall\delta[\delta \prec \beta \to [\delta \prec \alpha \to F[\delta]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \delta\}]]) = 1\,. \tag{35}$$

Oletetaan, että

$$t(\beta \prec \alpha) = 1\,. \tag{36}$$

On osoitettava, että

$$t(F[\beta]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \beta\}) = 1 \tag{37}$$

eli ehdon (25b) nojalla, että

$$t(G[F^\ulcorner\beta]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \beta\}) = 1\,. \tag{38}$$

Osoitetaan, että on olemassa vakio w siten, että

$$t(Exists(F^\ulcorner\beta, w)) = 1\,. \tag{39}$$

Ehdon (25a) ja rajoittumakuvauksen määritelmän perusteella

$$t(F^\ulcorner\beta \ Fn \ \beta) = 1\,. \tag{40}$$

Edelleen ehdon (25a)) nojalla

$$t(\delta \prec \beta \rightarrow F[\delta] \approx F^\ulcorner\beta[\delta]) = 1\,. \tag{41}$$

Nyt induktio-oletuksen (35) ja ehdon (36) nojalla

$$t(\forall\delta[\delta \prec \beta \rightarrow F[\delta] \ JMin \ \{x \mid rank[x] \approx \delta\}]) = 1$$

ja siten ehdon (41) perusteella on voimassa

$$t(\forall\delta[\delta \prec \beta \rightarrow F^\ulcorner\beta[\delta] \ JMin \ \{x \mid rank[x] \approx \delta\}]) = 1 \tag{42}$$

Tästä seuraa ehdon (40) ja lemman 3.2 nojalla, että

$$t(S[F^\ulcorner\beta] \ Jmin \ R[\beta]) = 1\,,$$

joten lauseen TZ7.51 perusteella on olemassa ordinaaliluku δ ja vakio f siten, että

$$t(f \ Isom_{S[F^\ulcorner\beta],E}(R[\beta], \delta)) = 1\,. \tag{43}$$

Lisäksi, koska $R[\beta]$ on selvästi joukko, on lauseen TZ10.40 nojalla olemassa ordinaaliluku γ siten, että

$$t(\aleph_\gamma \approx \{\epsilon \mid \exists h[h : \epsilon \overset{1-1}{\rightarrow} R[\beta]]\}) = 1\,. \tag{44}$$

Ehdon (43) nojalla erityisesti

$$t(f^{-1} : \delta \overset{1-1}{\rightarrow} R[\beta]) = 1\,,$$

mistä seuraa ehdon (44) perusteella

$$t(\delta \prec \aleph_\gamma) = 1$$

ja siten

$$t(\delta \subset \aleph_\gamma) = 1\,. \tag{45}$$

Määritellään nyt luokka g asettamalla

$$g := \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \wedge x \in \mathcal{P}(R[\beta]) \wedge y \approx f(x)]\}\,.$$

Luokka g on rohkeasti merkitty vakioksi, sillä g:n määritelmästä sekä ehdoista (43) ja (45) seuraa, että

$$t(g : \mathcal{P}(R[\beta]) \to \mathcal{P}(\aleph_\gamma)) = 1$$

ja

$$t(\forall x[x \in \mathcal{P}(R[\beta]) \to g[x] \approx f(x)]) = 1\,. \tag{46}$$

Ehdon (46) ja f:n injektiivisyyden perusteella myös g on injektio. Näin ollen g on bijektio kuvalleen eli on voimassa

$$t(g : \mathcal{P}(R[\beta]) \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))) = 1\,. \tag{47}$$

Määritellään nyt luokka W asettamalla

$$W := \{d \mid rank[d] \approx \beta\}^2 \cap (IndRel_{g^{-1}, U \cap g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))^2}(g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma)), \mathcal{P}(R[\beta]))]\}\,.$$

Koska lauseen TZ9.19 mukaan luokka $\{x \mid rank[x] \approx \beta\}$ on joukko, on myös karteesinen tulo

$$\{x \mid rank[x] \approx \beta\} \times \{x \mid rank[x] \approx \beta\}$$

joukko. Määritelmänsä nojalla W on tämän joukon osaluokka ja siten joukko. On siis olemassa vakio w siten, että

$$t(w \approx W) = 1\,.$$

Luokan W määritelmän sekä ehtojen (40), (42), (43), (44), (46) ja (47) perusteella tämä vakio w toteuttaa ehdon (39). Nyt ehdon (24) nojalla

$$t(G[F^\ulcorner \beta] \approx w) = 1\,,$$

mistä seuraa ehdon (25b) nojalla, että

$$t(F[\beta] \approx w) = 1\,.$$

Induktioväitteen todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$t(w\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \beta\}) = 1\,. \tag{48}$$

Rankifunktion määritelmän nojalla

$$t(\forall x[rank[x] \approx \beta \to x \in R[\beta \oplus \mathbf{1}]]) = 1\,,$$

mistä seuraa määritelmän TZ9.9 avulla, että

$$t(\forall x[rank[x] \approx \beta \to x \in \mathcal{P}(R[\beta])]) = 1 .$$

Näin ollen

$$t(\{x \mid rank[x] \approx \beta\} \subseteq \mathcal{P}(R[\beta]) = 1 . \tag{49}$$

Muistetaan luokan W määritelmästä, että

$$t(w \approx IndRel_{g^{-1}, U \cap g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))^2}(g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma)), \mathcal{P}(R[\beta]))) = 1 . \tag{50}$$

Ehto (48) seuraa järjestävän minimaalirelaation osajoukkoon periytymisen nojalla ehdosta (49), jos saadaan osoitettua, että

$$t(IndRel_{g^{-1}, U \cap g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma))^2}(g(\mathcal{P}(\aleph_\gamma)), \mathcal{P}(R[\beta]))\ JMin\ \mathcal{P}(R[\beta])) = 1 . \tag{51}$$

Ensinnäkin ehdon (36) ja lauseen TZ9.10 nojalla

$$t(R[\beta] \subset R[\alpha]) = 1 .$$

Tällöin lemman 3.1 nojalla ehtojen (5) ja (56) kardinaaliluvuille $\aleph_\xi$ ja $\aleph_\gamma$ on voimassa

$$t(\aleph_\gamma \precsim \aleph_\xi) = 1$$

eli

$$t(\aleph_\gamma \subseteq \aleph_\xi) = 1 .$$

ja edelleen sivulla TZs16 olevan harjoitustehtävän perusteella

$$t(\mathcal{P}(\aleph_\gamma) \subseteq \mathcal{P}(\aleph_\xi)) = 1 .$$

Tällöin ehdon (7) ja järjestävän minimaalirelaation osajoukkoon periytymisen nojalla

$$t(U \cap \mathcal{P}(\aleph_\gamma)^2\ JMin\ \mathcal{P}(\aleph_\gamma)) = 1 . \tag{52}$$

Joukon g määritelmän nojalla

$$t(g(\mathcal{P}(R[\beta])) \subseteq \mathcal{P}(\aleph_\gamma)) = 1 , \tag{53}$$

mistä seuraa ehdon (52) ja järjestävän minimaalirelaation osajoukkoon periytymisen nojalla, että

$$t(((U \cap \mathcal{P}(\aleph_\gamma)^2) \cap g(\mathcal{P}(R[\beta])))^2\ JMin\ g(\mathcal{P}(R[\beta]))) = 1 . \tag{54}$$

Ehdon (53) ja leikkauksen perusominaisuuksien perusteella

$$t((U \cap \mathcal{P}(\aleph_\gamma)^2) \cap g(\mathcal{P}(R[\beta]))^2 \approx U \cap g(\mathcal{P}(R[\gamma]))^2) = 1\,,$$

joten ehdon (54) perusteella

$$t(U \cap g(\mathcal{P}(R[\gamma]))^2)\ JMin\ g(\mathcal{P}(R[\beta])) = 1\,. \tag{55}$$

Koska g on ehdon (47) mukainen bijektio, on myös g^{-1} bijektio. Ehto (51) seuraa nyt lauseesta TZ6.32 ja ehdosta (55). Tämä todistaa ehdon (48) ja siten hoitelee ehdon (26) todistavan induktion loppuun.

Palataan nyt todistuksen alussa kaipailtuun relaatioon r. Määritellään luokka R asettamalla

$$\begin{aligned} R :=& \{z \mid \exists y \exists x[z \approx \langle x, y\rangle \wedge x \in a \wedge y \in a \wedge \\ & [rank[x] \prec rank[y] \vee [rank[x] \approx rank[y] \wedge \langle x, y\rangle \in F[rank[x]]]]\}\,. \end{aligned}$$

Osoitetaan, että

$$t(R\ JMin\ a) = 1 \tag{56}$$

eli että

$$t(R\ JRel\ a) = 1 \quad \text{ja} \tag{57}$$

$$t(R\ Min\ a) = 1\,. \tag{58}$$

Todistetaan ensin ehto (57). Joukon a^2 osaluokkana R on relaatio, joten riittää osoittaa sen järjestävyys. Olkoot tätä varten u ja v vakioita, joille on voimassa

$$t(u \in a \wedge v \in a) = 1\,. \tag{58}$$

Riittää osoittaa, että jokin ehdoista

$$t(uRv) = 1\,, \tag{59}$$

$$t(vRu) = 1 \quad \text{ja} \tag{60}$$

$$t(u \approx v) = 1\,. \tag{61}$$

on voimassa.

Koska joukkojen u ja v rankit ovat ordinaalilukuja ja koska ordinaalilukuja voidaan aina vertailla relaation $\prec$ suhten, on voimassa

$$t(rank[u] \prec rank[v]) = 1\,, \tag{62}$$

$$t(rank[v] \prec rank[u]) = 1 \quad \text{tai} \tag{63}$$

$$t(rank[u] \approx rank[v]) = 1\,. \tag{64}$$

Jos ehto (62) on voimassa, niin relaation R määritelmän mukaan ehto (59) pätee. Vastaavasti ehdosta (63) seuraa ehto (60), joten tarkasteltavaksi jää enää tapaus (64). Merkitään tätä varten $rank[u] = rank[v] = \beta$. Ehtojen (4) ja (58) nojalla

$$t(\beta \prec \alpha) = 1\,. \tag{65}$$

Tällöin ehdon (26) perusteella

$$t(F[\beta]\ JMin\ \{x \mid rank[x] \approx \beta\}) = 1\,. \tag{66}$$

Koska u ja v ovat luokan $\{x \mid rank[x] \approx \beta\}$ alkioita, seuraa ehdon (66) järjestävyyspuolesta, että

$$t(uF[\beta]v) = 1\,, \tag{67}$$

$$t(vF[\beta]u) = 1 \quad \text{ja} \tag{68}$$

$$t(u \approx v) = 1\,. \tag{69}$$

Jos ehto (69) pätee, niin pätee ilmiselvästi myös sama ehto (61). Tapauksessa (67) puolestaan ehdoista (58), (64) ja (67) sekä relaation R määritelmästä seuraa, että ehto (59) on voimassa. Vastaavasti ehdosta (68) seuraa ehto (60). Näin on nähty, että kaikissa tapauksissa jokin ehdoista (59)-(61) tulee voimaan. Tämä todistaa väitteen (57).

Väitteen (58) todistamiseksi olkoon b vakio, jolle on voimassa

$$t(b \subseteq a) = 1 \quad \text{ja} \tag{70}$$

$$t(b \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{71}$$

Riittää löytää vakio v siten, että

$$t(v \in b) = 1 \quad \text{ja} \tag{72a}$$

$$t(b \cap R^{-1}(\{v\}) \approx \emptyset) = 1\,. \tag{72b}$$

Määritellään luokka A asettamalla

$$A := \{\delta \mid \exists x[x \in b \wedge rank[x] \approx \delta]\}\,.$$

Osoitetaan, että

$$t(A \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{73}$$

Oletuksen (71) nojalla on olemassa vakio u siten, että

$$t(u \in b) = 1\,. \tag{74}$$

Merkitään $\gamma := rank[u]$. Nyt luokan A määritelmän ja ehdon (74) perusteella

$$t(\gamma \in A) = 1\,,$$

mistä ehto (73) seuraa.

Koska A on epätyhjä luokan On osaluokka ja koska E on minimaalirelaatio luokassa On (TZs27), löytyy luokasta A E-minimaalinen alkio. On siis olemassa ordinaaliluku μ siten, että

$$\mu \in A \quad \text{ja} \tag{75}$$
$$t(\forall\gamma[\gamma \in A \to \mu \precsim \gamma]) = 1\,. \tag{76}$$

Merkitään kuten lemman 3.2 todistuksessa

$$B = \{x\;|x \in b \wedge rank[x] \approx \mu\}\,.$$

Ordinaaliluvun μ valinnasta, ehdosta (75) ja luokan A määritelmästä seuraa, että

$$t(B \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{77}$$

Ehtojen (70-71), (77) ja (4) sekä luokan B määritelmän avulla nähdään helposti, että

$$t(\mu \prec \alpha) = 1\,. \tag{78}$$

Tämä tarkoittaa ehdon (26) nojalla sitä, että

$$t(F[\mu]\;JMin\;\{x \mid rank[x] \approx \mu\}) = 1\,. \tag{79}$$

Suoraan luokan B määritelmään perustuen

$$t(B \subseteq \{x \mid rank[x] \approx \mu\}) = 1\,. \tag{80}$$

Merkitään $\widetilde{F[\mu]} = F[\mu] \cap B^2$, jolloin ehdon (80) ja järjestävän minimaalirelaation osajoukkoon periytymisen nojalla

$$t(\widetilde{F[\mu]}\;JMin\;B) = 1\,. \tag{81}$$

Tästä ja ehdosta (77) seuraa, että on olemassa vakio v siten, että

$$t(v \in B) = 1 \quad \text{ja} \tag{82}$$
$$t(B \cap \widetilde{F[\mu]}^{-1}(\{v\}) \approx \emptyset) = 1 \tag{83}$$

eli joukosta B löytyy $\widetilde{F[\mu]}$-minimaalinen alkio. Osoitetaan, että tämä v toteuttaa ehdot (72a-b) eli on etsitty joukon b R-minimaalinen alkio. Ehto (72a) seuraa välittömästi siitä, että

$$t(B \subseteq b) = 1\,. \tag{83}$$

Ehdon (72b) todistamiseksi tehdään antiteesi: oletetaan, että

$$t(b \cap R^{-1}(\{v\})) \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{84}$$

Tämä tarkoittaa, että voidaan kiinnittää vakio w siten, että

$$t(w \in b) = 1 \quad \text{ja} \tag{85}$$

$$t(wRv) = 1\,. \tag{86}$$

Ehdosta (86) ja luokan R määritelmästä seuraa, että pätee joko

$$t(rank[w] \prec rank[v]) = 1 \tag{87}$$

tai

$$t(rank[w] \approx rank[v]) = 1\,. \tag{88}$$

Oletetaan ensin, että ehto (87) on voimassa. Ehdon (82) ja luokan B määritelmän nojalla

$$t(rank[v] \approx \mu) = 1\,, \tag{89}$$

mistä ehdon (87) kanssa seuraa, että

$$t(rank[w] \prec \mu) = 1\,. \tag{90}$$

Toisaalta ehdon (85) nojalla

$$t(rank[w] \in A) = 1\,,$$

mikä tarkoittaa ehdon (76) perusteella sitä, että

$$t(\mu \precsim rank[w]) = 1\,. \tag{91}$$

Ehdot (90) ja (91) ovat ristiriidassa keskenään, joten vaihtoehto (87) ei voi olla voimassa. Tällöin edellä todetun perusteella on vaihtoehdon (88) oltava tosi, mistä ehdon (89) perusteella seuraa, että

$$t(rank[w] \approx \mu) = 1$$

eli ehdon (85) ja luokan B määritelmän mukaisesti, että

$$t(w \in B) = 1 \,. \tag{92}$$

Ehdoista (86) ja (88) seuraa luokan R määritelmän nojalla nyt, että

$$t(wF[\mu]v) = 1 \,, \tag{93}$$

mistä seuraa ehtojen (92), (85) ja (88) nojalla, että

$$t(w\widetilde{F[\mu]}v) = 1 \,. \tag{94}$$

Ehdoista (92) ja (94) seuraa, että

$$w \in B \cap \widetilde{F[\mu]}^{-1}(\{v\})) = 1 \,.$$

Tämä on vastoin ehtoa (83), mikä tarkoittaa, että myös tapaus (88) johti ristiriitaan. Muita vaihtoehtoja ei ole enää jäljellä, joten antiteesi (84) on epätosi. Syntynyt ristiriita todistaa ehdon (72b) paikkansa pitäväksi ja siten väitteen (56) loppuun.

Relaation R määritelmän nojalla

$$t(R \subseteq a^2) = 1 \,,$$

joten R on joukon osaluokkana joukko ja on olemassa vakio r siten, että

$$t(r \approx R) = 1 \,. \tag{95}$$

Ehtojen (56) ja (95) nojalla tämä r toteuttaa ehdon (3), mikä todistaa väitteen loppuun. □

Nyt ollaan valmiita todistamaan luvussa 2 esitetty väite (II) eli tulos, jonka mukaan Alef-hypoteesista voidaan päätellä yleistetty kontinuumihypoteesi. Tämä on lauseen 3.6 sisältö. Ensin todistetaan pieni aputulos.

Lemma 3.5 *Ei ole olemassa transfiniittistä kardinaalilukua, joka olisi aidosti kardinaalilukujen $\aleph_\alpha$ ja $\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}$ välissä. Täsmällisemmin: Olkoon α ordinaaliluku. Tällöin*

$$\vdash \neg[\exists\gamma[\gamma \in \mathcal{K}_T \wedge \aleph_\alpha \prec \gamma \wedge \gamma \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}]] \,.$$

Todistus: Olkoon t aksioomat (Ax1)–(Ax8) toteuttava totuusarvofunktio. Voidaan olettaa, että α on vakio, jolloin väitteen kaava on suljettu. On osoitettava, että

$$t(\neg[\exists\gamma[\gamma \in \mathcal{K}_T \wedge \aleph_\alpha \prec \gamma \wedge \gamma \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}]]) = 1\,. \tag{1}$$

Tehdään antiteesi: oletetaan, että

$$t(\neg[\exists\gamma[\gamma \in \mathcal{K}_T \wedge \aleph_\alpha \prec \gamma \wedge \gamma \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}]]) = 0$$

eli, että

$$t(\exists\gamma[\gamma \in \mathcal{K}_T \wedge \aleph_\alpha \prec \gamma \wedge \gamma \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}]) = 1\,. \tag{2}$$

Tällöin on olemassa ordinaaliluku γ, jolle on voimassa

$$t(\gamma \in \mathcal{K}_T) = 1\,, \tag{3}$$
$$t(\aleph_\alpha \prec \gamma) = 1 \quad \text{ja} \tag{4}$$
$$t(\gamma \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{5}$$

Ehdon (3) ja määritelmän TZ10.44 mukaisesti on olemassa ordinaaliluku δ siten, että

$$t(\gamma \approx \aleph_\delta) = 1\,. \tag{6}$$

Tällöin ehdon (4) nojalla

$$t(\aleph_\alpha \prec \aleph_\delta) = 1 \tag{7}$$

ja ehdon (5) nojalla

$$t(\aleph_\delta \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{8}$$

Ehdosta (7) ja siitä, että $\aleph$ on isomorfismina aidosti kasvava, seuraa, että

$$t(\alpha \prec \delta) = 1\,. \tag{9}$$

Vastaavasti ehdon (8) nojalla

$$t(\delta \prec \alpha \oplus \mathbf{1}) = 1\,. \tag{10}$$

Ehdot (9) ja (10) eivät lauseen TZ7.25 nojalla voi olla yhtä aikaa voimassa, joten ollaan ristiriitatilanteessa. Antiteesi (2) ei näin ollen voi olla tosi, mikä todistaa väitteen. □

Lause 3.6

$$\vdash AH \rightarrow GCH\,.$$

Todistus: Olkoon t totuusarvofunktio, joka toteuttaa aksioomat (Ax1)-(Ax8). Oletetaan, että

$$t(AH) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitettava, että

$$t(GCH) = 1$$

eli että

$$t(\forall a \forall b[[Inf(a) \wedge b \subseteq \mathcal{P}(a) \wedge \exists x[a \subseteq x \wedge x \simeq b]] \to b \simeq a \vee b \simeq \mathcal{P}(a)]) = 1\,.$$

Olkoot tätä varten a ja b vakioita, joille on voimassa

$$t(Inf(a)) = 1 \tag{2}$$

ja

$$t(b \subseteq \mathcal{P}(a)) = 1\,. \tag{3}$$

Oletetaan lisäksi, että jollekin vakiolle c on voimassa

$$t(a \subseteq c) = 1 \tag{4}$$

ja

$$t(c \simeq b) = 1\,. \tag{5}$$

On osoitettava, että

$$t(b \simeq a \vee b \simeq \mathcal{P}(a)) = 1\,. \tag{6}$$

Oletuksesta (1) seuraa edellä todistetun Rubinin lauseen (Lause 3.5) nojalla, että

$$t(AC) = 1\,.$$

Näin ollen lähteen [4] nekin lauseet, jotka nojaavat valinta-aksioomaan, ovat käytössä. Käytetään näitä asiaan erikseen vetoamatta.

Oletuksen (2) nojalla

$$t(\overline{\overline{a}} \in \mathcal{K}_T) = 1\,,$$

joten määritelmän TZ10.44 mukaisesti on olemassa ordinaaliluku α siten, että

$$t(\overline{\overline{a}} \approx \aleph_\alpha) = 1\,. \tag{7}$$

Toisaalta $\aleph$-hypoteesin eli oletuksen (1) nojalla

$$t(\overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_\alpha)}} \approx \aleph_{\alpha \oplus \mathbf{1}}) = 1\,. \tag{8}$$

Oletuksen (3) ja lauseen TZ10.22 nojalla

$$t(\overline{\overline{b}} \precsim \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}) = 1\,. \tag{9}$$

Vastaavasti oletuksesta (4) ja lauseesta TZ10.22 seuraa, että

$$t(\overline{\overline{a}} \precsim \overline{\overline{c}}) = 1\,. \tag{10}$$

Toisaalta ehdon (5) ja lauseen TZ10.14 nojalla

$$t(\overline{\overline{c}} \approx \overline{\overline{b}}) = 1\,. \tag{11}$$

Ehtojen (10) ja (11) nojalla

$$t(\overline{\overline{a}} \precsim \overline{\overline{b}}) = 1\,,$$

mistä seuraa ehdon (7) perusteella, että

$$t(\aleph_\alpha \precsim \overline{\overline{b}}) = 1\,. \tag{12}$$

Ehdosta (7) seuraa lauseen TZ10.11 nojalla, että

$$t(a \simeq \aleph_\alpha) = 1\,, \tag{13}$$

mistä puolestaan seuraa lauseen TZ10.6 mukaisesti, että

$$t(\mathcal{P}(a) \simeq \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1$$

eli (lause TZ10.14)

$$t(\overline{\overline{\mathcal{P}(a)}} \approx \overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_\alpha)}}) = 1\,. \tag{14}$$

Ehtojen (8) ja (13) nojalla

$$t(\overline{\overline{\mathcal{P}(a)}} \approx \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{15}$$

Ehdoista (9) ja (14) seuraa, että

$$t(\overline{\overline{b}} \precsim \overline{\overline{\aleph}}_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{16}$$

Tilanne on siis se, että ehtojen (12) ja (16) nojalla joukon b mahtavuus on vähintään $\aleph_\alpha$:n suuruinen ja korkeintaan $\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}$. Lemman 3.4 nojalla

$$t(\aleph_\alpha \prec \overline{\overline{b}} \wedge \overline{\overline{b}} \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 0\,,$$

joten ehtojen (12) ja (16) nojalla on oltava

$$t(\overline{\overline{b}} \approx \aleph_\alpha \vee \overline{\overline{b}} \approx \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{17}$$

Ehto (6) seuraa ehdosta (17) ehtojen (12) ja (15) sekä lauseen TZ10.14 perusteella. □

4 Sierpinskin lause

Seuraavaksi lähdetään todistamaan, että GCH implikoi $\aleph$-hypoteesin. Todistetaan ensin Sierpinskin lause, niin saadaan valinta-aksiooma käyttöön. Sierpinskin lausehan sanoo, että valinta-aksiooma seuraa, jos oletetaan GCH.

Sierpinskin lauseen todistus on etenemisensä osalta "tavallisen" joukko-opin kielellä esitetyn julkaisun [5] mukainen. Sen formalisointi, joka on tämän tutkielman kirjoittajan muotoilema, vaatii kuitenkin jonkin verran valmisteluja. Nämä kootaan lemmoihin 4.1-4.10, joista kaikissa olkoon t totuusarvofunktio, joka toteuttaa aksioomat (Ax1)–(Ax8). Lauseessa TZ10.2 perustellut joukkojen yhtämahtavuuden ekvivalenssirelaatio-ominaisuudet oletetaan jatkossa tunnetuiksi. Myös funktioiden monia luvussa TZl6 todistettuja perusominaisuuksia käytetään niihin erikseen viittaamatta.

Lemma 4.1 *Olkoot a ja b joukkoja. Tällöin*

$$\vdash [a \cap b \approx \emptyset \wedge a \simeq b] \to a \cup b \simeq \mathbf{2} \times a\,.$$

Todistus: Suljetaan väitteen kaava merkintöjä muuttamatta. Oletetaan, että

$$t(a \cap b \approx \emptyset) = 1 \tag{1}$$

ja

$$t(a \simeq b) = 1\,. \tag{2}$$

On osoitettava, että

$$t(a \cup b \simeq \mathbf{2} \times a) = 1$$

eli että on olemassa vakio g siten, että

$$t(g : a \cup b \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \mathbf{2} \times a) = 1\,. \tag{3}$$

Oletuksen (2) nojalla on olemassa vakio f siten, että

$$t(f : b \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} a) = 1\,. \tag{4}$$

Määritellään luokka G asettamalla

$$G := \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \wedge [[x \in a \wedge y \approx \langle \mathbf{0}, x\rangle] \vee [x \in b \wedge y \approx \langle \mathbf{1}, f[x]\rangle]]]\}\,.$$

G:n määritelmästä sekä ehdoista (1) ja (4) seuraa, että

$$t(G : a \cup b \to \mathbf{2} \times a) = 1\,. \tag{5}$$

Lisäksi G on injektio, mikä seuraa aika suoraan G:n määritelmästä, oletuksen (1) mukaisesta a:n ja b:n pistevieraudesta sekä siitä, että identtinen kuvaus ja (ehdon (4) mukaisesti) f ovat injektioita.

G on vieläpä surjektio – olennaisesti siitä syystä, että sekä identtinen kuvaus a:lta itselleen on surjektio ja samoin on ehdon (4) mukaan funktio f, joka kuvaa siis b:n surjektiivisesti joukkoon a. Kaiken kaikkiaan siis

$$t(G : a \cup b \underset{onto}{\overset{1-1}{\rightarrow}} \mathbf{2} \times a) = 1 \,. \tag{6}$$

Koska a ja b ovat joukkoja, on myös $a \cup b$ joukko, ja tässä joukossa määriteltynä funktiona G on joukko. On siis olemassa vakio g siten, että

$$t(g \approx G) = 1 \,.$$

Tämä g toteuttaa ehdon (6) nojalla ehdon (3). □

Lemma 4.2

$$\vdash \forall a[\exists b[b \subseteq a \wedge b \simeq \omega] \rightarrow \mathbf{1} \cup a \simeq a]] \,.$$

Todistus: Olkoon a vakio. Oletetaan, että on olemassa vakio b siten, että

$$t(b \subseteq a) = 1 \tag{1}$$

ja

$$t(b \simeq \omega) = 1 \,. \tag{2}$$

On osoitettava, että

$$t(\mathbf{1} \cup a \simeq a) = 1$$

eli että on olemassa vakio g siten, että

$$t(g : \mathbf{1} \cup a \underset{onto}{\overset{1-1}{\rightarrow}} a) = 1 \,. \tag{3}$$

Jos

$$t(\emptyset \in a) = 1 \,,$$

niin selvästi

$$t(\{\emptyset\} \cup a \approx a) = 1$$

eli

$$t(\mathbf{1} \cup a \approx a) = 1 \,,$$

ja väite (3) seuraa siitä, että joukko on itsensä kanssa yhtä mahtava. Voidaan siis olettaa, että

$$t(\emptyset \notin a) = 1$$

eli että

$$t(\mathbf{1} \cap a \approx \emptyset) = 1\,. \tag{4}$$

Oletuksen (2) nojalla on olemassa vakio f siten, että

$$t(f : \omega \overset{1-1}{\underset{onto}{\to}} b) = 1\,. \tag{5}$$

Määritellään luokka G asettamalla

$$G = \{\langle \mathbf{1}, f[\mathbf{0}]\rangle\} \cup \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \wedge \\ [[x \in a \setminus b \wedge y \approx x] \vee [x \in b \wedge \exists n[f[n] \approx x \wedge y \approx f[n \oplus \mathbf{1}]]]]\}\,.$$

Hieman yksityiskohtia oikoen todetaan, että ehtojen (4) ja (5) sekä G:n määritelmän nojalla

$$t(G : \mathbf{1} \cup a \to a) = 1\,. \tag{6}$$

Tuossa ehdon (5) injektiivisyyttä tarvitaan, jotta G:stä saadaan yksiarvoinen.

Lisäksi G on injektio. Nimittäin ensinnäkin joukon $a \setminus b$ sisällä kuvautuminen on selvästi injektiivistä, sillä G käyttäytyy siltä osin kuin identtinen kuvaus. Joukossa $b \setminus f[\mathbf{0}]$ injektiivisyys seuraa funktion f ehdon (5) mukaisesta injektiivisyydestä. On vielä varmistuttava, ettei alkiolle $f[\mathbf{0}]$ kuvaudu useampi kuin yksi lähtöjoukon alkio. Ainakin $\mathbf{1}$ sille kuvautuu. Selvästi mikään $a \setminus b$:n alkio ei kuvaudu, eikä kyllä b:nkään, sillä muuten $f[\mathbf{0}]$ olisi G:n määritelmän nojalla yhtenevä jonkin arvopisteen $f[n \oplus 1]$ kanssa, mikä ei ole mahdollista. Injektiivisyys on siis kunnossa. G:n surjektiivisuus seuraa identtisen kuvauksen ja f:n surjektiivisuuksista. Näillä puheilla ja ehdon (6) nojalla siis

$$t(G : \mathbf{1} \cup a \overset{1-1}{\underset{onto}{\to}} a) = 1\,, \tag{7}$$

ja koska G on lauseen TZ6.15 nojalla (joukossa $\mathbf{1} \cup a$ määriteltynä funktiona) joukko, on olemassa vakio g siten, että

$$t(g \approx G) = 1\,.$$

Ehdon (7) nojalla tämä g toteuttaa ehdon (3). $\square$

Seuraavaksi todistetaan hieman potenssisääntöjä.

Lemma 4.3 *Väite:*

$$\vdash \forall a \forall b[a \simeq b \to \mathbf{2}^a \simeq \mathbf{2}^b]\,.$$

Todistus: Olkoot a ja b vakioita, joille on voimassa

$$t(a \simeq b) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitettava, että

$$t(\mathbf{2}^a \simeq \mathbf{2}^b) = 1\,. \tag{2}$$

Oletuksesta (1) seuraa lauseen TZ10.6 nojalla, että

$$t(\mathcal{P}(a) \simeq \mathcal{P}(b)) = 1\,. \tag{3}$$

Toisaalta lauseen TZ10.49 (jonka todistuksessa ei tarvita valinta-aksioomaa) nojalla

$$t(\mathcal{P}(a) \simeq \mathbf{2}^a) = 1 \tag{4}$$

ja

$$t(\mathcal{P}(b) \simeq \mathbf{2}^b) = 1\,. \tag{5}$$

Ehto (2) seuraa ehdoista (3), (4) ja (5). $\square$

Lemma 4.4

$$\vdash \forall a \forall b[[a \cap c \approx \emptyset] \to b^{a \cup c} \simeq b^a \times b^c]]\,.$$

Todistus: Olkoot a, b ja c vakioita. Oletetaan, että

$$t(a \cap c \approx \emptyset) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitetettava, että

$$t(b^{a \cup c} \simeq b^a \times b^c) = 1\,.$$

eli että jollekin vakiolle g on voimassa

$$t(g : b^{a \cup c} \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} b^a \times b^c) = 1\,. \tag{2}$$

Jos jokin joukoista a, b ja c on tyhjä, on väite selvä. Nimittäin ensinnäkin tyhjä joukko on yhtä mahtava itsensä kanssa ja toisaalta

$$t(\forall x[x \cup \emptyset \approx x]) = 1\,.$$

Oletetaan siis, että

$$t(a \not\approx \emptyset \wedge b \not\approx \emptyset \wedge c \not\approx \emptyset) = 1\,. \tag{3}$$

Määritellään luokka G asettamalla

$$G := \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \wedge x \in b^{a\cup c} \wedge y \approx \langle x^\ulcorner b, x^\ulcorner c\rangle]\}\,.$$

Tälle on määritelmänsä, ehdon (1) (jota tarvitaan olennaisesti yksiarvoisuus- ja injektiivisyysperusteluissa) ja rajoittumakuvauksen ominaisuuksien nojalla voimassa

$$t(G : b^{a\cup c} \underset{onto}{\overset{1-1}{\rightarrow}} b^a \times b^c) = 1\,. \tag{4}$$

Lisäksi, koska aksiooman (A3) ja lauseen TZ10.48 nojalla $b^{a\cup c}$ on joukko, seuraa lauseesta TZ6.15 ja ehdosta (4), että myös G on joukko. On siis olemassa vakio g siten, että

$$t(g \approx G) = 1\,.$$

Ehdon (4) nojalla tämä g toteuttaa ehdon (2). □

Lemma 4.5

$$\vdash \forall a \forall b[a \simeq b \wedge \exists x[x \subseteq a \wedge x \simeq \omega]] \rightarrow \exists y[y \subseteq b \wedge y \simeq \omega]]\,.$$

Todistus: Olkoot a ja b vakioita. Oletetaan, että

$$t(a \simeq b) = 1\,, \tag{1}$$

ja että jollekin vakiolle v on voimassa

$$t(v \subseteq a) = 1 \tag{2}$$

ja

$$t(v \simeq \omega) = 1\,. \tag{3}$$

Riittää löytää vakio u siten, että

$$t(u \subseteq b) = 1 \tag{4}$$

ja

$$t(u \simeq \omega) = 1\,. \tag{5}$$

Oletuksen (1) nojalla on olemassa vakio f siten, että

$$t(f : a \underset{onto}{\overset{1-1}{\rightarrow}} b) = 1\,. \tag{6}$$

Tällöin ehdon (2) nojalla

$$t(f(v) \subseteq b) = 1\,. \tag{7}$$

Toisaalta, koska f on ehdon (6) nojalla injektio, on voimassa

$$t(v \simeq f(v)) = 1$$

ja edelleen ehdon (3) nojalla

$$t(f(v) \simeq \omega) = 1\,. \tag{8}$$

Joukko $f(v)$ on joukon kuva funktiossa ja siten lauseen TZ6.13 nojalla joukko. On siis olemassa vakio u siten, että

$$t(u \approx f(v)) = 1\,.$$

Ehtojen (7) ja (8) nojalla tämä u toteuttaa ehdot (4) ja (5). □

Lemma 4.6

$$\vdash \forall a \forall c[[\mathbf{2}^a \cap \mathbf{2}^c \approx \emptyset \wedge \exists b[b \subseteq a \wedge \omega \approx b] \wedge a \simeq c] \to \mathbf{2}^a \cup \mathbf{2}^c \simeq \mathbf{2}^a]\,.$$

Todistus: Olkoot a ja c vakioita, joille on voimassa

$$t(\mathbf{2}^a \cap \mathbf{2}^c \approx \emptyset \wedge a \simeq c) = 1\,. \tag{1}$$

Oletetaan lisäksi, että jollekin vakiolle b on voimassa

$$t(b \subseteq a \wedge \omega \approx b) = 1\,. \tag{2}$$

On osoitettava, että

$$t(\mathbf{2}^a \cup \mathbf{2}^c \simeq \mathbf{2}^a) = 1\,. \tag{3}$$

Käytetään tässä – ja mahdollisesti myös jatkossa – esityksen tiivistämiseksi $\simeq$-ketjumerkintöjä. Jos $\varphi_1 \ldots, \varphi_n$ ovat kaavoja ja n luonnollinen luku, asetetaan

$$\varphi_1 \simeq \ldots \simeq \varphi_n$$

tarkoittamaan, että

$$t(\varphi_i \simeq \varphi_j) = 1 \quad \text{kaikilla } i, j \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Tämä määrittely on hyvin asetettu, koska $\simeq$ on lauseen TZ10.2 nojalla ekvivalenssirelaatio.

Osoitetaan, että jollekin vakiolle d on voimassa

$$t(\mathbf{1} \cap d \approx \emptyset) = 1 \tag{4}$$

ja

$$t(d \simeq a) = 1\,. \tag{5}$$

Selvästi

$$t(a \times \{\mathbf{0}\} \simeq a) = 1 \tag{6}$$

ja

$$t(\forall x[x \in a \times \{\mathbf{0}\} \to \exists y[y \in a \wedge x \approx \langle y, \emptyset\rangle]]) = 1\,. \tag{7}$$

Valitaan $d := a \times \{\mathbf{0}\}$. Ehdon (6) nojalla tämä valinta toteuttaa ehdon (5). Osoitetaan, että myös ehto (4) toteutuu. Tehdään antiteesi: oletetaan, että

$$t(\mathbf{1} \cap d \not\approx \emptyset) = 1$$

eli että

$$t(\emptyset \in d) = 1\,.$$

Ehdosta (7) seuraa tällöin erityisesti, että on olemassa vakio v siten, että

$$t(\emptyset \approx \langle y, \emptyset\rangle) = 1\,.$$

Tämä ei selvästikään ole mahdollista; ei tyhjä joukko järjestetyn parin (joka siis määritelmällisesti on kaksio) kanssa yhtenevä voi olla. Antiteesi on siis epätosi ja ehto (4) todistettu.

Ehdoista (2) ja (5) seuraa lemman 4.5 nojalla, että

$$t(\exists x[x \subset d \wedge \omega \simeq x]) = 1\,. \tag{8}$$

Ehto (3) seuraa nyt seuraavasta yhtämahtavuusketjusta:

$$\mathbf{2}^a \cup \mathbf{2}^c \overset{a)}{\simeq} \mathbf{2} \times \mathbf{2}^a \overset{b)}{\simeq} \mathbf{2} \times \mathbf{2}^d \overset{c)}{\simeq} \mathbf{2}^{\mathbf{1}} \times \mathbf{2}^d \overset{d)}{\simeq} \mathbf{2}^{\mathbf{1} \cup d} \overset{e)}{\simeq} \mathbf{2}^d \overset{f)}{\simeq} \mathbf{2}^a\,.$$

Ketjun vaiheiden perustelut:

a): Seuraa lemmasta 4.1, jonka oletukset ovat oletuksen (1) ja lemman 4.3 perusteella voimassa.
b): Seuraa ehdosta (5) ja lemmasta 4.3 – ei aivan suoraan, mutta helpostihan noiden $\simeq$-merkin eri puolten joukkojen välille bijektion viitattujen ehtojen avulla saa.
c): $\mathbf{2}$ on selvästi yhtä mahtava joukon $\mathbf{2}^{\mathbf{1}}$ kanssa

d): Seuraa lemman 4.4 nojalla ehdosta (4).
e): Seuraa ehdon (8) nojalla lemmoista 4.2 ja 4.3
f): Seuraa suoraan ehdosta (5) ja lemmasta 4.3. □

Lemma 4.7 *Olkoot a ja b joukkoja. Tällöin*

$$\begin{aligned}&\vdash [\forall x \forall y[[x \cap y \approx \emptyset \wedge x \simeq b \wedge y \simeq b] \to x \cup y \simeq b] \wedge \\ &\quad \forall x \forall y[[x \cap y \approx \emptyset \wedge x \simeq a \wedge y \simeq b] \to x \cup y \simeq \mathbf{2}^b]] \\ &\quad \to \exists x[x \subseteq a \wedge x \simeq \mathbf{2}^b]]\,.\end{aligned}$$

Todistus: Suljetaan väitteen kaava eli oletetaan, että a ja b ovat vakioita. Oletetaan, että

$$t([\forall x \forall y[[x \cap y \approx \emptyset \wedge x \simeq b \wedge y \simeq b] \to x \cup y \simeq b]) = 1\,, \tag{1}$$

ja

$$t(\forall x \forall y[[x \cap y \approx \emptyset \wedge x \simeq a \wedge y \simeq b] \to x \cup y \simeq 2^b]) = 1\,. \tag{2}$$

On osoitettava, että jollekin vakiolle d on voimassa

$$t(d \subseteq a) = 1 \tag{3}$$

ja

$$t(d \simeq \mathbf{2}^b) = 1\,. \tag{4}$$

Merkitään $b' \approx b \times \{0\}$ ja $b'' \approx b \times \{1\}$, jolloin selvästi

$$t(b' \cap b'' \approx \emptyset) = 1\,, \tag{5}$$
$$t(b' \simeq b) = 1 \quad \text{ja} \tag{6}$$
$$t(b'' \simeq b) = 1\,. \tag{7}$$

Edelleen merkitään $a' := a \times \{\mathbf{1}\}$, jolloin b':n valinnan nojalla

$$t(a' \cap b' \approx \emptyset) = 1 \tag{8}$$

ja

$$t(a \simeq a') = 1\,. \tag{9}$$

Ehtojen (8), (9) ja (6) sekä oletuksen (2) nojalla

$$t(a' \cup b' \simeq \mathbf{2}^{b'}) = 1\,. \tag{10}$$

Toisaalta ehtojen (5), (6) ja (7) sekä oletuksen (1) nojalla

$$t(b' \simeq b' \cup b'') = 1\,. \tag{11}$$

Tällöin lemman 4.3 mukaisesti

$$t(\mathbf{2}^{b'} \simeq \mathbf{2}^{b' \cup b''}) = 1\,,$$

mistä ehdon (10) kanssa seuraa, että

$$t(a' \cup b' \simeq \mathbf{2}^{b' \cup b''}) = 1\,. \tag{12}$$

Lauseen TZ10.6 nojalla

$$t(\mathbf{2}^{b' \cup b''} \simeq \mathcal{P}(b' \cup b'')) = 1\,,$$

mistä seura ehdon (12) nojalla, että

$$t(a' \cup b' \simeq \mathcal{P}(b' \cup b'')) = 1\,.$$

Tällöin on olemassa vakio f siten, että

$$t(f : a' \cup b' \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \mathcal{P}(b' \cup b'')) = 1\,. \tag{13}$$

Määritellään joukko c asettamalla:

$$c := \{x \mid x \in b' \land x \notin f[x]\}\,.$$

Nyt

$$t(c \subseteq b') = 1\,, \tag{14}$$

joten c on joukon osaluokkana todella joukko, eli merkintä on järkevä. Ehdon (13) nojalla kullekin b':n alkiolle x arvopiste $f[x]$ on potenssijoukon $\mathcal{P}(b' \cup b'')$ alkiona yhdisteen $b' \cup b''$ osajoukko, ja joukko c siis koostuu niistä b':n alkioista, jotka eivät kuulu vastaavaan osajoukkoon $f[x]$.

Määritellään nyt luokka G asettamalla

$$G := \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \land x \in \mathcal{P}(b'') \land y \approx f^{-1}[x \cup c]]\}\,.$$

Selvästi

$$t(Rel(G)) = 1\,. \tag{15}$$

Osoitetaan, että
$$t(Un(G)) = 1\,. \tag{16}$$
Olkoot tätä varten u, v_1 ja v_2 vakioita, joille on voimassa
$$t(\langle u, v_1\rangle \in G) = 1 \tag{17}$$
ja
$$t(\langle u, v_2\rangle \in G) = 1\,. \tag{18}$$
Ehdon (16) todistamiseksi riittää osoittaa, että
$$t(v_1 \approx v_2) = 1\,. \tag{19}$$
Ehtojen (17) ja (18) nojalla
$$t(u \subseteq b'') = 1\,, \tag{20}$$
$$t(v_1 \approx f^{-1}[u \cup c]) = 1 \quad \text{ja} \tag{21}$$
$$t(v_2 \approx f^{-1}[u \cup c]) = 1\,. \tag{22}$$
Ehto (19) seuraa ehdoista (21) ja (22). Ehto (16) on siis todistettu.

Ehtojen (15) ja (16) nojalla
$$t(Fnc(G)) = 1\,. \tag{23}$$
Osoitetaan seuraavaksi, että
$$t(\mathcal{D}(G) \approx \mathcal{P}(b'')) = 1\,. \tag{24}$$
Luokan G määritelmästä seuraa suoraan, että
$$t(\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{P}(b'')) = 1\,, \tag{25}$$
joten riittää osoittaa, että
$$t(\mathcal{P}(b'') \subseteq \mathcal{D}(G)) = 1\,. \tag{26}$$
Olkoon tätä varten u vakio, jolla on voimassa
$$t(u \in \mathcal{P}(b'')) = 1\,. \tag{27}$$
On osoitettava, että
$$t(u \in \mathcal{D}(G)) = 1 \tag{28}$$

eli että on olemassa vakio v siten, että

$$t(\langle u, v\rangle \in G) = 1\,. \tag{29}$$

Valitaan $v := f^{-1}[u \cup c]$. Tällöin ehdon (27) ja luokan G määritelmän nojalla ehto (28) pätee. Tämä todistaa ehdon (26) ja siten ehdon (24) loppuun.

Seuraavaksi näytetään, että

$$t(\mathcal{W}(G) \subseteq a') = 1\,. \tag{30}$$

Olkoon tätä varten v vakio, jolle on voimassa

$$t(v \in \mathcal{W}(G)) = 1\,. \tag{31}$$

On osoitettava, että

$$t(v \in a') = 1\,. \tag{32}$$

Ehtojen (31) ja (24) nojalla on olemassa vakio u siten, että

$$t(u \subseteq b'') = 1 \tag{33}$$

ja

$$t(\langle u, v\rangle \in G) = 1\,. \tag{34}$$

Ehdon (34) ja luokan G määritelmän nojalla

$$t(v \approx f^{-1}[u \cup c]) = 1\,. \tag{35}$$

Ehtojen (14) ja (33) nojalla

$$t(u \cup c \subseteq b' \cup b'') = 1$$

eli

$$t(u \in \mathcal{P}(b' \cup b'')) = 1\,.$$

Tällöin ehtojen (13) ja (35) nojalla

$$t(v \in a' \cup b') = 1\,, \tag{36}$$

joten ehdon (32) todistamiseksi riittää osoittaa, että

$$t(v \notin b') = 1\,. \tag{37}$$

Tehdään antiteesi: oletetaan, että

$$t(v \in b') = 1\,. \tag{38}$$

Ehdosta (35) seuraa, että

$$t(f[v] \approx u \cup c) = 1\,. \tag{39}$$

Kaksi vaihtoehtoa tulevat nyt kyseeseen:

$$t(v \in f[v]) = 1 \tag{40}$$

ja

$$t(v \notin f[v]) = 1\,. \tag{41}$$

Oletetaan ensin, että ehto (40) on voimassa. Ehdon (39) nojalla

$$t(v \in u \cup c) = 1\,,$$

mistä seuraa ehtojen (33), (38), (14) ja (5) perusteella, että

$$t(v \in c) = 1\,.$$

Tällöin joukon c määritelmän nojalla

$$t(v \notin f[v]) = 1\,.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta ehdon (40) nojalla, joten kyseinen ehto ei voi olla voimassa. Tällöin ehdon (41) on pädettävä. Siten ehdon (38) ja joukon c määritelmän nojalla

$$t(v \in c) = 1$$

ja edelleen

$$t(v \in u \cup c) = 1\,.$$

Tällöin ehdon (39) nojalla

$$t(v \in f[v]) = 1\,,$$

mikä on vastoin ehtoa (41). Mahdottomaan tilanteeseen siis jouduttiin jälleen eikä muita vaihtoehtoja ole. Tämä kaataa antiteesin (38) ja todistaa ehdon (37). Tämä todistaa ehdon (32) ja siten ehdon (30) loppuun.

Ehtojen (23), (24) ja (30) nojalla

$$t(G : \mathcal{P}(b'') \to a') = 1\,. \tag{42}$$

Osoitetaan, että G on injektio. Olkoot tätä varten u_1, u_2 ja v vakioita siten, että

$$t(\langle u_1, v\rangle \in G) = 1 \tag{43}$$

ja

$$t(\langle u_2, v\rangle \in G) = 1\,. \tag{44}$$

Riittää osoittaa, että

$$t(u_1 \approx u_2) = 1\,. \tag{45}$$

Ehtojen (43) ja (44) nojalla

$$t(u_1 \subseteq b'') = 1\,, \tag{46}$$
$$t(u_2 \subseteq b'') = 1 \quad \text{ja} \tag{47}$$
$$t(f^{-1}[u_1 \cup c] \approx f^{-1}[u_2 \cup c]) = 1\,. \tag{48}$$

Näistä ehdoista seuraa ehtojen (13) ja (14) nojalla, että

$$t(u_1 \cup c \approx u_2 \cup c) = 1\,. \tag{49}$$

Ehdon (45) todistamiseksi osoitetaan, että

$$t(u_1 \cup c \subseteq u_2 \cup c) = 1 \tag{50}$$

ja

$$t(u_2 \cup c \subseteq u_1 \cup c) = 1\,. \tag{51}$$

Tehdään ehdon (50) todistus tarkasti, (51) hoituu täysin vastaavasti. Olkoon siis w vakio, jolle on voimassa

$$t(w \in u_1) = 1\,. \tag{52}$$

On osoitettava, että

$$t(w \in u_2) = 1\,. \tag{53}$$

Ehdosta (52) seuraa selvästi

$$t(w \in u_1 \cup c) = 1$$

ja siten ehdon (49) nojalla

$$t(w \in u_2 \cup c) = 1\,. \tag{54}$$

Ehdon (46) nojalla

$$t(w \in b'') = 1\,,$$

joten koska b' ja b'' ovat ehdon (5) mukaisesti pistevieraita ja koska c on ehdon (14) nojalla b':n osajoukko, on voimassa

$$t(w \notin c) = 1$$

ja siten ehdon (54) perusteella ehto (53) pätee. Tämä todistaa ehdon (50) ja, kuten sanottu, ehto (51) hoituu vastaavasti. G:n injektiivisyystodistus on siis valmis. Tällöin ehdon (42) nojalla

$$t(G : \mathcal{P}(b'') \stackrel{1-1}{\to} a') = 1\,. \tag{55}$$

Tällöin

$$t(G(\mathcal{P}(b'')) \subseteq a') = 1 \tag{56}$$

ja, koska injektio on bijektio kuvalleen, on voimassa

$$t(G(\mathcal{P}(b'')) \simeq \mathcal{P}(b'')) = 1\,. \tag{57}$$

Tässä vaiheessa muistetaan, että tarkoituksena oli löytää a:n osajoukko, joka on joukon $\mathcal{P}(b)$ kanssa yhtä mahtava. Ehdon (9) nojalla on olemassa vakio h siten, että

$$t(h : a' \underset{onto}{\stackrel{1-1}{\to}} a) = 1\,. \tag{58}$$

Tällöin ehdon (56) perusteella

$$t(h(G(\mathcal{P}(b''))) \subseteq a) = 1\,. \tag{59}$$

Toisaalta ehdon (58) nojalla (kun käytetään hieman rajoittumakuvauksen ja bijektion ominaisuuksia)

$$t(G(\mathcal{P}(b'')) \simeq h(G(\mathcal{P}(b''))) = 1\,,$$

joten ehdon (57) nojalla

$$t(\mathcal{P}(b'') \simeq h(G(\mathcal{P}(b'')))) = 1\,. \tag{60}$$

Koska G on funktiona yksiarvoinen ja $\mathcal{P}(b'')$ aksiooman (Ax5) nojalla joukko, on lauseen 7.41 nojalla myös kuvaluokka $G(\mathcal{P}(b''))$ joukko, ja siten (edelleen lauseeseen 7.41 perustuen) $h(G(\mathcal{P}(b'')))$ on joukko. On siis olemassa vakio d siten, että

$$t(d \approx h(G(\mathcal{P}(b'')))) = 1\,.$$

Ehdon (59) nojalla tämä vakio toteuttaa ehdon (3). Lisäksi ehdon (60) mukaisesti

$$t(d \simeq \mathcal{P}(b'')) = 1\,. \tag{61}$$

Ehdon (7) ja lauseen TZ10.6 nojalla

$$t(\mathcal{P}(b) \simeq \mathcal{P}(b'')) = 1\,,$$

mistä ehdon (61) kanssa seuraa, että

$$t(d \simeq \mathcal{P}(b)) = 1\,. \tag{62}$$

Toisaalta lauseen TZ10.49 nojalla

$$t(\mathcal{P}(b) \simeq \mathbf{2}^b) = 1\,. \tag{63}$$

Ehtojen (62) ja (63) nojalla d toteuttaa myös ehdon (4), mikä todistaa väitteen loppuun. $\square$

Lemma 4.8 *Olkoot a, a', b, b' ja c joukkoja. Tällöin on voimassa*

$$\vdash [a \cup b \simeq c \land a \cap b \approx \emptyset \land a' \simeq a \land b' \simeq b \land a' \cap b' \approx \emptyset] \to a' \cup b' \simeq c\,.$$

Todistus: Suljetaan väitteen kaava. Oletetaan, että

$$t(a \cup b \simeq c) = 1\,, \tag{1}$$
$$t(a \cap b \approx \emptyset) = 1\,, \tag{2}$$
$$t(a' \simeq a) = 1\,, \tag{3}$$
$$t(b' \simeq b) = 1 \quad \text{ja} \tag{4}$$
$$t(a' \cap b' \approx \emptyset) = 1\,. \tag{5}$$

On osoitettava, että

$$t(a' \cup b' \simeq c) = 1\,. \tag{6}$$

Tehdään tämä osoittamalla, että

$$t(a \cup b \simeq a' \cup b') = 1\,, \tag{7}$$

jolloin väite (6) seuraa oletuksesta (1).

Ehdon (7) todistamiseksi riittää osoittaa, että jollekin vakiolle f on voimassa

$$t(f : a \cup b \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} a' \cup b') = 1\,. \tag{8}$$

Oletuksen (3) nojalla on olemassa vakio f_a siten, että

$$t(f_a : a \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} a') = 1\,, \tag{9}$$

ja oletuksen (4) nojalla on olemassa vakio f_b siten, että

$$t(f_b : b \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} b') = 1\,. \tag{10}$$

Määritellään luokka F asettamalla

$$F := \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \wedge [[x \in a \wedge y \approx f_a[x]] \vee [x \in b \wedge y \approx f_b[x]]]]\}\,.$$

Luokka F on selvästi relaatio. Sen yksiarvoisuus seuraa joukkojen a' ja b' oletuksen (5) mukaisesta pistevieraudesta ja siitä, että f_a ja f_b ovat ehtojen (9) ja (10) nojalla funktioita. Ilmeistä F:n määritelmästä on, että

$$t(\mathcal{D}(F) \approx a \cup b) = 1$$

ja

$$t(\mathcal{W}(F) \subseteq a' \cup b') = 1\,.$$

Luokan F injektiivisyys seuraa oletuksesta (5) ja funktioiden f_a ja f_b injektiivisyydestä. Luokan F surjektiivisuus seuraa funktioiden f_a ja f_b surjektiivisuudesta. Kaiken kaikkiaan siis F on bijektio joukolta $a \cup b$ joukolle $a' \cup b'$, ja koska sen määrittelyluokka $a \cup b$ on selvästi joukko, on lauseen TZ6.15 nojalla myös F itse joukko. On siis olemassa vakio f siten, että

$$t(f \approx F) = 1\,,$$

ja edellä todetun nojalla tämä f toteuttaa ehdon (8). □

Näiden pitkällisten valmistelujen jälkeen ollaan miltei valmiita todistamaan Sierpinskin lause. Tarkastellaan ensin kuitenkin joukkoa a, jossa on olemassa järjestävä minimaalirelaatio S. Lemmassa 4.9 osoitetaan, että relaatiosysteemi (a, S) on isomorfinen a:n alkioiden S-alkusegmenttien joukon kanssa, kun tämä segmenttien joukko varustetaan aidolla joukkoinkluusiorelaatiolla $\subset$. Merkitään lemmaa 4.9 ja lausetta 4.11 varten tuota joukkoinkluusiorelaatiota R:llä, jolloin siis joukot a ja b ovat relaatiossa R, jos kaava $a \subset b$ on teoreema.

Lemma 4.9 *Olkoon a joukko ja S luokka. Tällöin pätee*

$$\vdash S\ JMin\ a \to \exists f[f\ Isom_{S,R}(a, \{x \mid \exists y[y \in a \wedge x \approx a \cap S^{-1}(\{y\})]\})]\,.$$

Todistus: Suljetaan väitteen kaava merkintöjä vaihtamatta ja oletetaan, että

$$t(S \ JMin \ a) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitettava, että jollekin vakiolle f on voimassa

$$t(f \ Isom_{S,R}(a, \{x \mid \exists y[y \in a \wedge x \approx a \cap S^{-1}(\{y\})]\})) = 1\,. \tag{2}$$

Merkitään:

$$B := \{x \mid \exists y[y \in a \wedge x \approx a \cap S^{-1}(\{y\})]\}\,.$$

Määritellään luokka F asettamalla

$$F := \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \wedge x \in a \wedge y \approx a \cap S^{-1}(\{x\})]\}\,.$$

Luokka F siis liittää jokaisen a:n alkioon x x:n ja relaation S määräämän alkusegmentin joukossa a.

Nyt ensinnäkin

$$t(Rel(F)) = 1\,. \tag{3}$$

Tämä johtuu siitä, että koska a on oletuksen nojalla joukko, ovat sen alkioiden S-alkusegmentitkin joukkoja. Osoitetaan, että

$$t(Un(F)) = 1\,. \tag{4}$$

Olkoot tätä varten u, v_1 ja v_2 vakioita, joille on voimassa

$$t(\langle u, v_1\rangle \in F) = 1 \tag{5}$$

ja

$$t(\langle u, v_2\rangle \in F) = 1\,. \tag{6}$$

Ehdon (4) todistamiseksi on osoitettava, että

$$t(v_1 \approx v_2) = 1\,. \tag{7}$$

Ehdon (5) (tai (6)) nojalla

$$t(u \in a) = 1\,. \tag{8}$$

Ehdon (5) perusteella

$$t(v_1 \approx S^{-1}(\{u\})) = 1 \tag{9}$$

ja

$$t(v_2 \approx S^{-1}(\{u\})) = 1\,. \tag{10}$$

Ehto (7) seuraa ehdoista (9) ja (10) ja lauseesta TZ4.7.

Ehtojen (3) ja (4) nojalla

$$t(Fnc(F)) = 1\,. \tag{11}$$

Lisäksi F:n määritelmästä seuraa suoraan, että

$$t(\mathcal{D}(F) \approx a) = 1\,. \tag{12}$$

Edelleen luokan F määritelmästä huomataan, että F:n arvojoukko on kaikkien a:n alkioiden S-alkusegmenttien joukko, eli

$$t(\mathcal{W}(F) \approx B) = 1\,.$$

Tästä sekä ehdoista (11) ja (12) seuraa, että

$$t(F : a \underset{onto}{\rightarrow} B) = 1\,. \tag{13}$$

Osoitetaan, että F on injektio. Olkoot tätä varten u_1, u_2 ja v vakioita, joille on voimassa

$$t(\langle u_1, v\rangle \in F) = 1 \tag{14}$$

ja

$$t(\langle u_2, v\rangle \in F) = 1\,. \tag{15}$$

On osoitettava, että

$$t(u_1 \approx u_2) = 1\,. \tag{16}$$

Tehdään antiteesi: oletetaan, että

$$t(u_1 \not\approx u_2) = 1\,. \tag{17}$$

Ehtojen (14) ja (15) sekä luokan F määritelmän nojalla

$$t(u_1 \in a) = 1 \tag{18}$$

ja

$$t(u_2 \in a) = 1\,. \tag{19}$$

Tällöin oletuksen (1) ja antiteesin (17) nojalla

$$t(u_1 S u_2) = 1 \tag{20}$$

tai

$$t(u_2 S u_1) = 1\,. \tag{21}$$

Tarvittaessa merkintöjä vaihtamalla voidaan olettaa, että ehto (20) on voimassa. Ehtojen (14) ja (15) nojalla

$$t(v \approx S^{-1}(\{u_1\})) = 1 \tag{22}$$

ja

$$t(v \approx S^{-1}(\{u_2\})) = 1\,. \tag{23}$$

Ehtojen (22) ja (23) nojalla

$$t(S^{-1}(\{u_1\}) \approx S^{-1}(\{u_2\})) = 1\,. \tag{24}$$

Ehdon (20) nojalla

$$t(u_1 \in S^{-1}(\{u_2\})) = 1\,,$$

mistä seuraa ehdon (24) perusteella, että

$$t(u_1 \in S^{-1}(\{u_1\})) = 1$$

eli että

$$t(u_1 S u_1) = 1\,.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta lauseen TZ6.23 nojalla. Antiteesi johti siis ristiriitaan, mikä todistaa ehdon (16) ja siten F:n injektiivisyyden. On siis voimassa

$$t(F : a \overset{1-1}{\rightarrow} B) = 1\,. \tag{25}$$

Ehtojen (13) ja (25) nojalla

$$t(F : a \underset{onto}{\overset{1-1}{\rightarrow}} B) = 1\,. \tag{26}$$

Osoitetaan, että F on isomorfismi relaatiosysteemien (a, S) ja (B, R) välillä. Olkoot tätä varten u ja v vakioita, joille on voimassa

$$t(uSv) = 1\,. \tag{27}$$

On osoitettava, että

$$t(F[u] \subset F[v]) = 1\,. \tag{28}$$

Samankaltaisella päättelyllä kuin F:n injektiivisyyden todistuksessa nähdään, että on oltava

$$t(F[u] \not\approx F[v]) = 1\,. \tag{29}$$

Ehdon (28) todistamiseksi riittää siis osoittaa, että

$$t(\forall x[x \in F[u] \to x \in F[v]]) = 1\,. \tag{30}$$

Olkoon tätä varten w vakio, jolle on voimassa

$$t(w \in F[u]) = 1\,. \tag{31}$$

Ehdon (30) todistamiseksi on osoitettava, että

$$t(w \in F[v]) = 1$$

eli luokan F määritelmän nojalla, että

$$t(wSv) = 1\,. \tag{32}$$

Ehdon (31) ja luokan F määritelmän nojalla

$$t(wSu) = 1\,. \tag{33}$$

Ehto (32) seuraa nyt ehdoista (27) ja (33), sillä relaatio S on hyvin määriteltynä järjestävänä minimaalirelaationa lauseen TZ6.25 nojalla järjestysrelaatio ja siten transitiivinen. Tuo, että S on hyvin määritelty relaatio, seuraa siitä, että a on joukko. Ehto (28) on siis todistettu. Tällöin ehdon (26) nojalla

$$t(F\ Isom_{S,R}(a, B)) = 1\,. \tag{34}$$

Koska F:n määrittelyjoukko on ehdon (26) mukaisesti a, on F lauseen TZ6.15 nojalla joukko. Siten on olemassa vakio f siten, että

$$t(f \approx F) = 1\,.$$

Ehdon (34) ja luokan B määritelmän nojalla tämä f toteuttaa ehdon (2), joten väite on todistettu. $\square$

Ennen Sierpinskin lauseen todistusta tarvitaan vielä helppo lemma, joka koskee joukon ja sen potenssijoukon suhdetta ja jota tarvitaan useampaan kertaan jatkossa.

Lemma 4.10 *Olkoon a joukko.*

$$\vdash \exists f[f : a \overset{1-1}{\to} \mathcal{P}(a)]$$

Todistus: Suljetaan väitteen kaava merkintöjä muuttamatta. Olkoon t aksioomat (Ax1)-(Ax8) toteuttava totuusarvofunktio. Riittää löytää vakio f siten, että
$$t(f : a \overset{1-1}{\to} \mathcal{P}(a)) = 1\,. \tag{1}$$
Määritellään luokka F asettamalla
$$F := \{x \mid \exists y[y \in a \wedge x \approx \langle y, \{y\}\rangle]\}$$
ja osoitetaan, että tämä valinta toteuttaa ehdon (1). Ensinnäkin F:n määritelmästä nähdään helposti aksiooman (Ax2) avulla, että
$$t(Rel(F)) = 1\,. \tag{2}$$
Lisäksi selvästi
$$t(\mathcal{W}(F) \subseteq \mathcal{P}(a)) = 1\,. \tag{3}$$
Osoitetaan, että
$$t(Un(F)) = 1\,. \tag{4}$$
Olkoot tätä varten u, v_1 ja v_1 vakioita, joille on voimassa
$$t(\langle u, v_1\rangle \in F) = 1 \quad \text{ja} \tag{5}$$
$$t(\langle u, v_2\rangle \in F) = 1\,. \tag{6}$$
Väitteen (4) todistamiseksi riittää osoittaa, että on voimassa
$$t(v_1 \approx v_2) = 1\,. \tag{7}$$
Ehdon (5) ja luokan F määritelmän nojalla
$$t(v_1 \approx \{u\}) = 1\,, \tag{8}$$
ja vastaavasti ehdon (6) avulla, että
$$t(v_2 \approx \{u\}) = 1\,. \tag{9}$$
Väite (7) seuraa nyt lauseen TZ4.7 nojalla ehdoista (8) ja (9).

Koska a on joukko, on lauseen TZ6.7 nojalla voimassa
$$t(\mathcal{M}(F)) = 1\,,$$
joten on olemassa vakio f siten, että
$$t(f \approx F) = 1\,. \tag{10}$$

Osoitetaan, että tämä vakio f toteuttaa ehdon (1). Ehtojen (2)-(4) ja (10) nojalla, riittää enää todistaa f:n injektiivisyys. Olkoot tätä varten u_1, u_2 ja v vakioita, joille on voimassa

$$t(\langle u_1, v\rangle \in F) = 1 \quad \text{ja} \tag{11}$$
$$t(\langle u_2, v\rangle \in F) = 1\,. \tag{12}$$

Riittää osoittaa, että

$$t(u_1 \approx u_2) = 1\,. \tag{13}$$

Ehdon (11) ja luokan F määritelmän nojalla

$$t(v \approx \{u_1\}) = 1\,, \tag{14}$$

ja vastaavasti ehdosta (12) nähdään, että

$$t(v \approx \{u_2\}) = 1\,. \tag{15}$$

Ehtojen (14) ja (15) sekä lauseen TZ4.7 perusteella

$$t(\{u_1\} \approx \{u_2\}) = 1\,,$$

mistä ehto (13) seuraa. Tämä todistaa F:n injektiivisyyden ja, kuten edellä on todettu, väitteen loppuun. □

Todistetaan viimein Sierpinskin lause.

Lause 4.11 ***(Sierpinskin lause)***

$$\vdash GCH \to AC\,.$$

Todistus: Olkoon t totuusarvofunktio, joka toteuttaa aksioomat (Ax1)–(Ax8). Oletetaan, että

$$t(GCH) = 1 \tag{1}$$

eli että

$$t(\forall a \forall b[[Inf(a) \wedge b \subseteq \mathcal{P}(a) \wedge \exists x[a \subseteq x \wedge x \simeq b]] \to [b \simeq a \vee b \simeq \mathcal{P}(a)]]) = 1\,. \tag{2}$$

On osoitettava, että

$$t(AC) = 1\,. \tag{3}$$

Lauseen TZ11.2 nojalla riittää osoittaa, että

$$t(WOP) = 1\,. \tag{4}$$

Tätä varten riittää osoittaa, että

$$t(\forall a \exists \alpha [\alpha \simeq a]) = 1\,. \tag{5}$$

Nimittäin, jos ehdon (5) mukainen α löydetään, niin on olemassa vakio h siten, että

$$t(h : a \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \alpha) = 1\,.$$

Koska E on järjestävä minimaalirelaatio joukossa α, indusoi se funktion h kanssa sivulla TZs31 esiintyvän määrittelyn ja lauseen TZ6.33 mukaisesti joukkoon a relaation S, jolle on lauseen TZ6.32 mukaisesti voimassa

$$t(S \ JMin \ a) = 1\,.$$

Tällaisen relaation R olemassaolo todistaa ehdon (4).

Olkoon ehdon (5) todistamiseta varten a mielivaltainen joukko. On löydettävä ordinaaliluku α siten, että

$$t(\alpha \simeq a) = 1\,. \tag{6}$$

Jos

$$t(Fin(a)) = 1\,,$$

niin äärellisen joukon määritelmän nojalla on olemassa finiittinen ordinaali n siten, että

$$t(n \simeq a) = 1\,.$$

Tällöin voidaan valita $\alpha := n$ ja ehto (6) toteutuu.

Oletetaan sitten, että

$$t(Fin(a)) = 0$$

eli että

$$t(Inf(a)) = 1\,. \tag{7}$$

Määritellään joukko b asettamalla

$$b = \mathcal{P}(\omega \cup a)\,.$$

Ehdosta (7) seuraa tällöin selvästi, että

$$t(Inf(b)) = 1\,. \tag{8}$$

Osoitetaan, että on olemassa vakio c ja ordinaaliluku γ siten, että

$$t(c \simeq \gamma) = 1\,, \tag{9}$$
$$t(c \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))) = 1\,, \quad \text{ja} \tag{10}$$
$$t(\neg\exists x[x \subseteq b \wedge x \simeq c]) = 1\,. \tag{11}$$

Määritellään luokka d asettamalla

$$d := \{x \mid x \subseteq \mathcal{P}(b) \wedge R\ JMin\ x\}\,.$$

Muistetaan lemmaa 4.9 edeltänyt valinta, jonka mukaan R:llä merkitään aitoa joukkoinkluusiorelaatiota $\subset$. Luokka d on merkitty joukoksi, sillä koska d:n alkiot ovat $\mathcal{P}(b)$:n osajoukkoja eli $\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))$:n alkioita, on voimassa

$$t(d \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) = 1$$

ja d on siten joukon osaluokkana joukko. Tilanne on siis se, että jokainen d:n alkio on joukko, jossa R on järjestävä minimaalirelaatio. Lauseen TZ7.51 nojalla tällöin

$$\forall x[x \in d \to \exists\beta\exists f[f\ Isom_{R,E}(x,\beta)]]) = 1\,. \tag{12}$$

Joukko d on epätyhjä. Tämä nähdään esimerkiksi seuraavasti: Koska b on ehdon (8) nojalla ääretön, ei b ole tyhjä. On tällöin olemassa vakio v siten, että pätee $t(v \in b) = 1$ ja siten $t(\{v\} \subseteq b) = 1$. Ei tule kyseeseen, että $t(b\backslash\{v\} \approx \emptyset) = 1$, sillä tällöin b olisi yhtenevä yksiön $\{v\}$ kanssa ja siten äärellinen vastoin ehtoa (8). On siis olemassa vakio u siten, että $t(u \in b\backslash\{v\}) = 1$. Tarkastellaan kaksiota $w := \{\{u, v\}, \{v\}\}$. Tämän alkiot ovat b:n osajoukkoja, joten $t(w \subseteq \mathcal{P}(b)) = 1$. Lisäksi joukkoinkluusiorelaatio R järjestää selvästi w:n alkiot ja kyseisen relaation suhteen löytyy helposti joukon w minimaalialkio $\{u\}$. Tällöin joukosta d on löydetty alkio eli epätyhjyysperustelu on valmis.

Nyt yksinkertaistetaan hieman merkintöjä. Koska jatkossa pelataan paljon isomorfismien kanssa, merkitään luvussa 2.2.1 esiteltyjä osajoukkoon periytyviä järjestäviä minimaalirelaatioita samoin kuin 'alkuperäisiä' relaatiota. Siis, jos S on järjestävä minimaalirelaatio luokassa A ja $t(B \subseteq A) = 1$, niin merkitään B:n järjestävää minimaalirelaatiota $S \cap B^2$ yksinkertaisesti S:llä.

Määritellään luokka C asettamalla

$$C := \{\beta \mid \exists f \exists x [x \in d \wedge f\ Isom_{R,E}\ (x, \beta)]\}\,.$$

Koska

$$t(C \subseteq On) = 1\,,$$

saadaan, sillä joukon On järjestävä minimaalirelaatio E periytyy osajoukkoon C, ehto

$$t(E\ JMin\ C) = 1\,. \tag{13}$$

Tällöin lauseen TZ7.51 nojalla on olemassa ordinaaliluku γ ja vakio f siten, että

$$t(f\ Isom_{E,E}\ (C, \gamma)) = 1\,. \tag{14}$$

Ehdosta (14) seuraa erityisesti, että

$$t(C \simeq \gamma) = 1\,. \tag{15}$$

Määritellään luokka G asettamalla

$$G := \{z \mid \exists \beta \exists y [z \approx \langle \beta, y \rangle \wedge \beta \in C \wedge y \approx \{x \mid x \in d \wedge \exists f [f\ Isom_{R,E}(x, \beta)\}]]\}\,.$$

Luokka G siis liittää jokaiseen C:n alkioon β ne d:n alkiot, joitka ovat (R, E)-isomorfiasuhteessa β:n kanssa. Selvästi G on relaatio (jokainen y on d:n osajoukkona joukko). Luokan G yksiarvoisuus seuraa aika lailla suoraan G:n määritelmästä: kiinteä β määrää vastaavan joukon y.

Kaiken kaikkiaan siis

$$t(Fnc(G)) = 1\,. \tag{16}$$

Luokkien C ja G määritelmien nojalla

$$t(\mathcal{D}(G) \approx C) = 1\,. \tag{17}$$

Osoitetaan, että G on injektio. Olkoot tätä varten β_1 ja β_2 ordinaalilukuja ja v vakio siten, että

$$t(\langle \beta_1, v \rangle \in G) = 1 \tag{18}$$

ja

$$t(\langle \beta_2, v \rangle \in G) = 1\,. \tag{19}$$

On osoitettava, että
$$t(\beta_1 \approx \beta_2) = 1\,. \tag{20}$$
Ehtojen (18) ja (19) ja G:n määritelmän nojalla
$$t(\beta_1 \in C) = 1\,, \tag{21}$$
$$t(\beta_2 \in C) = 1\,, \tag{22}$$
$$t(v \approx \{x \mid x \in d \wedge \exists f[f\ Isom_{R,E}(x, \beta_1)\}) = 1 \text{ ja} \tag{23}$$
$$t(v \approx \{x \mid x \in d \wedge \exists f[f\ Isom_{R,E}(x, \beta_2)\}) = 1\,. \tag{24}$$
Ehtojen (23) ja (24) nojalla
$$\begin{aligned} t(\{x \mid x \in d \wedge \exists f[f\ Isom_{R,E}(x, \beta_1)\} \approx \\ \{x \mid x \in d \wedge \exists f[f\ Isom_{R,E}(x, \beta_2)\}) = 1\,. \end{aligned} \tag{25}$$
Ehtojen (21) ja (22) sekä luokan C määritelmän ehdossa (25) esiintyvät luokat ovat epätyhjiä. Olkoon siis u vakio, jolle on voimassa
$$t(u \in \{x \mid x \in d \wedge \exists f[f\ Isom_{R,E}(x, \beta_1)\}) = 1\,. \tag{26}$$
Tällöin
$$t(u \in d) = 1\,, \tag{27}$$
ja jollekin vakiolle f on voimassa
$$t(f\ Isom_{R,E}(u, \beta_1)) = 1\,. \tag{28}$$
Ehdon (25) nojalla myös
$$t(u \in \{x \mid x \in d \wedge \exists f[f\ Isom_{R,E}(x, \beta_2)\}) = 1$$
ja siten on olemassa vakio g siten, että
$$t(g\ Isom_{R,E}(u, \beta_2)) = 1\,. \tag{29}$$
Ehto (20) seuraa lauseen TZ7.51 yksikäsitteisyyspuolen nojalla ehdoista (28) ja (29). Luokan G injektiivisyystodistus on siis valmis.

Koska jokaiselle β arvopiste $G[\beta]$ on joukon d ja luokan G määritelmien nojalla joukon $\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))$ osajoukko ja siten joukon $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))$ alkio, on voimassa
$$t(\mathcal{W}(G) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))) = 1\,. \tag{30}$$
Tästä, edellä todistetusta G:n injektiivisyydestä, ehdosta (16) ja ehdosta (17) seuraa, että
$$t(G : C \overset{1-1}{\rightarrow} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))) = 1\,. \tag{31}$$

Koska injektio on bijektio kuvalleen, on tällöin voimassa

$$t(G(C) \simeq C) = 1 \tag{32}$$

ja siten ehdon (15) nojalla

$$t(G(C) \simeq \gamma) = 1\,. \tag{33}$$

Ehdon (31) nojalla

$$t(G(C) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))) = 1\,, \tag{34}$$

joten koska $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))$ on joukko (mikä nähdään käyttämällä kolmesti aksioomaa (Ax5)), on olemassa vakio c siten, että

$$t(c \approx G(C)) = 1\,. \tag{35}$$

Osoitetaan, että tämä c ja edellä kiinnitetty ordinaaliluku γ toteuttavat ehdot (9), (10) ja (11). Ehdot (9) ja (10) seuraavat ehdon (35) nojalla ehdoista (32) ja (34). Todistettavana on vielä ehto (11). Tehdään tätä varten antiteesi: oletetaan, että

$$t(\exists x[x \subseteq b \wedge x \simeq c]) = 1 \tag{AT}$$

eli että jollekin vakiolle e on voimassa

$$t(e \subseteq b) = 1 \tag{36}$$

ja

$$t(e \simeq c) = 1\,. \tag{37}$$

Ehtojen (32) ja (37) nojalla

$$t(e \simeq C) = 1\,. \tag{38}$$

Osoitetaan tähän väliin, että

$$t(Ord(C)) = 1\,. \tag{39}$$

Olkoon tätä varten γ ordinaaliluku, jolle on voimassa

$$t(\gamma \in C) = 1\,. \tag{40}$$

On osoitettava, että

$$t(\gamma \subseteq C) = 1\,. \tag{41}$$

Olkoon ehdon (41) todistamista varten δ ordinaaliluku, jolle on voimassa

$$t(\delta \prec \gamma) = 1\,. \tag{42}$$

On osoitettava, että

$$t(\delta \in C) = 1 \tag{43}$$

eli luokan C määritelmän nojalla, että

$$t(\exists f \exists x[x \in d \wedge f \ Isom_{R,E} \ (x, \beta)]) = 1\,.$$

Tähän riittää löytää vakiot f ja v siten, että

$$t(v \in d) = 1 \tag{44}$$

ja

$$t(f \ Isom_{R,E} \ (v, \delta)) = 1\,. \tag{45}$$

Oletuksen (41) ja luokan C määritelmän nojalla on olemassa vakiot u ja g siten, että

$$t(u \in d) = 1 \tag{46}$$

ja

$$t(g \ Isom_{R,E} \ (u, \gamma)) = 1\,. \tag{47}$$

Merkitään $v := g^{-1}(\delta)$ ja $f := g^{\ulcorner} v$. Ehdon (45) sekä lauseiden TZ6.15 ja 7.41 nojalla nämä todella ovat joukkoja eli voidaan vakioiksi merkitä. Osoitetaan, että nämä valinnat toteuttavat ehdot (44) ja (45).

Ehdon (44) ja luokan d määritelmän nojalla

$$t(u \subseteq \mathcal{P}(b)) = 1 \tag{48}$$

ja

$$t(R \ JMin \ u) = 1\,. \tag{49}$$

Ehdon (47) nojalla

$$t(g^{-1} \ Isom_{E,R} \ (\gamma, u)) = 1\,, \tag{50}$$

joten

$$t(g^{-1} : \gamma \underset{onto}{\overset{1-1}{\rightarrow}} u) = 1$$

ja siten ehdon (42) nojalla

$$t(g^{-1}(\delta) \subseteq u) = 1 \tag{51}$$

eli vakion v valinnan nojalla

$$t(v \subseteq u) = 1\,. \tag{52}$$

Ehtojen (52) ja (48) nojalla

$$t(v \subseteq \mathcal{P}(b)) = 1\,, \tag{53}$$

minkä lisäksi ehtojen (52) ja (49) perusteella (edellä sovitun merkintäyksinkertaistuksin)

$$t(R\ JMin\ v) = 1\,. \tag{54}$$

Ehto (44) seuraa nyt ehdoista (53) ja (54).

Ehdon (47) bijektiivisyyspuolen ja ehdon (52) nojalla

$$t(f : v \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \delta) = 1\,.$$

Lisäksi, koska ehdon (47) nojalla g 'säilyttää järjestyksen', säilyttää sen selvästi myös g:n rajoittumakuvaus joukkoon v. Kaiken kaikkiaan siis ehto (45) toteutuu, mikä todistaa ehdon (43) ja siten ehdon (39) loppuun.

Palataan nyt tarkastelemaan antiteesin (AT) mukaista ehdot (36)-(38) toteuttavaa vakiota e ja metsästämään ristiriitaa. Ehdon (38) nojalla on olemassa vakio f_1 siten, että

$$t(f_1 : C \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} e) = 1\,.$$

Tällön f_1 ja relaatio E (joka selvästi järjestää C:n alkiot) indusoivat sivulla TZs31 esiintyvän määrittelyn mukaisen relaation joukkoon e, ja lauseen TZ6.32 mukaisesti tämä relaatio on järjestävä minimaalirelaatio. Merkitään tätä relaatiota S:llä. Nyt siis

$$t(S\ JMin\ e) = 1\,. \tag{55}$$

Merkitään s:llä joukon e alkioiden määräämän S-alkusegmenttien joukkoa eli asetetaan

$$s = \{x \mid \exists y[y \in e \land x \approx S^{-1}(\{y\})\}\,.$$

Koska

$$t(s \subseteq \mathcal{P}(e)) = 1\,, \tag{56}$$

on s joukon $\mathcal{P}(e)$ osaluokkana todellakin joukko eli sen vakioksi merkitseminen on luvallista. Lemman 4.9, lauseen TZ6.32 ja ehdon (55) nojalla

$$t(R\ JMin\ s) = 1\,. \tag{57}$$

Lisäksi ehtojen (36) ja (56) nojalla

$$t(s \subseteq \mathcal{P}(b)) = 1\,. \tag{58}$$

Ehdoista (57) ja (58) seuraa joukon d määritelmän nojalla, että

$$t(s \in d) = 1\,. \tag{58}$$

Ehdon (57) ja lauseen TZ7.51 nojalla on olemassa vakio f_2 ja ordinaaliluku β siten, että

$$t(f_2\ Isom_{R,E}\ (s, \beta)) = 1\,. \tag{59}$$

Ehtojen (58) ja (59) nojalla

$$t(\beta \in C) = 1\,. \tag{60}$$

Ehdon (39) ja sen, että C on luokan On osaluokka ja toisaalta C on joukko (mikä nähdään esimerkiksi ehdon (31) avulla), perusteella C on ordinaaliluku. Merkitään $\xi := C$. Nyt ehdon (60) nojalla

$$t(\beta \prec \xi) = 1\,. \tag{61}$$

Relaation S ja vakion f_1 valintojen nojalla

$$t(f_1\ Isom_{E,S}(\xi, e)) = 1\,. \tag{62}$$

Lisäksi lemman 4.9 ja ehdon (55) nojalla on olemassa vakio f_3 siten, että

$$t(f_3\ Isom_{S,R}(e, s)) = 1\,. \tag{63}$$

Merkitään $f_4 := f_3 \circ f_1$. Ehtojen (62) ja (63) sekä lauseen TZ6.30 nojalla

$$t(f_4\ Isom_{E,R}\ (\xi, s)) = 1\,. \tag{64}$$

Ehtojen (64) ja (59) sekä lauseen TZ6.30 nojalla

$$t(f_2 \circ f_4\ Isom_{E,E}(\xi, \beta)) = 1\,,$$

jolloin lauseen TZ7.38 nojalla, koska ξ ja β ovat ordinaalilukuja, on voimassa

$$t(\xi \approx \beta) = 1\,.$$

Mutta tämä on vastoin ehtoa (61). Syntynyt ristiriita kaataa antiteesin (AT) ja todistaa ehdon (11).

Seuraavaksi lähdetään soveltamaan ehtojen (9)-(11) mukaisia vakioita c ja

γ lauseen pääväitteen todistamiseksi. Oletetaan lause TZ10.49 tunnetuksi eli käytetään kakkosenpotenssi- ja potenssijoukkomerkintöjä vähän ristiin toistuvasti lauseeseen TZ10.49 viittaamatta.

Muistetaan, että $b = \mathcal{P}(\omega \cup a)$. Koska

$$t(\omega \subseteq \omega \cup a) = 1\,,$$

nähdään helposti lemman 4.10 mukaisia injektioita pitkin kulkemalla, että

$$t(\exists x[x \subseteq b \wedge \omega \simeq x]) = 1\,, \tag{65}$$
$$t(\exists x[x \subseteq \mathcal{P}(b) \wedge \omega \simeq x]) = 1 \quad \text{ja} \tag{66}$$
$$t(\exists x[x \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(b)) \wedge \omega \simeq x]) = 1\,, \tag{67}$$

Ehdon (9) nojalla on olemassa vakio f siten, että

$$t(f : \gamma \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} c) = 1\,. \tag{68}$$

Merkitään R':lla relaatiota, jonka bijektio f ja relaatio E indusoivat sivulla TZs31 olevan määrittelyn mukaisesti ordinaaliluvusta γ joukkoon c. Lauseen TZ6.32 nojalla

$$t(R'\ JMin\ c) = 1\,. \tag{69}$$

Olennaista on siis, että c voidaan järjestää minimaalirelaatiolla.

Merkitään $c' := c \times \{\mathbf{1}\}$ ja $p' := \mathcal{P}(\mathcal{P}(b)) \times \{\mathbf{2}\}$, jolloin

$$t(c' \cap p' \approx \emptyset) = 1\,. \tag{70}$$

Osoitetaan, että

$$t(\exists x[x \subseteq \mathcal{P}(p') \wedge x \simeq c' \cup p']) = 1\,. \tag{71}$$

Osoitetaan ensinnäkin, että on olemassa vakio h siten, että

$$t(h : c' \cup p' \overset{1-1}{\to} \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{1}\} \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{2}\}) = 1\,. \tag{72}$$

Määritellään luokka H asettamalla

$$\begin{aligned} H := \{z \mid \exists x \exists y[z \approx \langle x, y\rangle \wedge \\ &[\exists w[w \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(b)) \wedge x \approx \langle w, \mathbf{2}\rangle \wedge y \approx \langle \{w\}, \mathbf{2}\rangle] \\ &\vee \exists w[w \in c \wedge x \approx \langle w, \mathbf{1}\rangle \wedge y \approx \langle w, \mathbf{1}\rangle]]]\} \end{aligned}$$

Jos unohdetaan pistevierauden aikaansaamiseksi luodut lisäykset, niin intuitiivisesti luokan H voidaan ajatella kuvaavan jokaisen $\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))$:n alkion vastaavaksi yksiöksi ja siten $\mathcal{P}(p')$:n osajoukoksi ja c:n alkiot (jotka ovat ehdon (10) nojalla $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))$:n alkioita) itselleen. Nämä kuvautumiset on lisäksi järjestetty tapahtumaan pistevieraille joukoille. Näin syntyy selvästi relaatio, ja sen yksiarvoisuus seuraa ylla olevasta määritelmästä ja toisaalta c:n määrittävän F:n edellä todistetusta yksiarvoisuudesta. Yksiarvoisena relaationa H on siis funktio. Se on myös injektio, minkä toteamiseen tarvitaan tuon yksiöitä tuottavan kuvauksen (joka hoitelee $\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))$:n osion) selvää injektiivisyyttä ja toisaalta c:n määrittelevän kuvauksen F edellä todistettua injektiivisyyttä. H on siis joukossa $c' \cup p'$ määriteltynä funktiona joukko. Siten on olemassa vakio h siten, että

$$t(h \approx H) = 1\,.$$

Kuten yllä perusteltiin, tämä vakio toteuttaa ehdon (72).

Ehdon (67), ilmeisen seikan

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{1}\} \simeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{2}\} \simeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))$$

ja lemman 4.5 nojalla lemmaa 4.6 voidaan soveltaa joukkoihin $\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{1}\}$ ja $\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{2}\}$. Kyseisen tuloksen nojalla

$$t(\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{1}\}} \cup \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{2}\}} \simeq \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{2}\}}) = 1$$

ja siten

$$t(\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{1}\}} \cup \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{2}\}} \simeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{2}\})) = 1\,.$$

Tämä tarkoittaa vakion p' valinnan nojalla, että

$$t(\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{1}\}} \cup \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{2}\}} \simeq \mathcal{P}(p')) = 1\,.$$

Toisaalta helposti huomataan, että

$$t(\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{1}\}} \simeq \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{1}\}}\times\{\mathbf{1}\}) = 1 \text{ ja } t(\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{2}\}} \simeq \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{2}\}}\times\{\mathbf{2}\}) = 1\,,$$

mistä seuraa lemman 4.8, jonka oletukset ovat yllä oleviin joukkoihin luodun pistevierauden nojalla voimassa, perusteella

$$t((\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))\times\{\mathbf{1}\}} \times \{\mathbf{1}\}) \cup (\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))\times\{\mathbf{2}\}} \times \{\mathbf{2}\} \simeq \mathcal{P}(p'))) = 1\,. \tag{73}$$

Toisaalta, koska

$$\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))\times\{\mathbf{1}\}} \times \{\mathbf{1}\} \simeq \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))} \times \{\mathbf{1}\} \simeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{1}\} \text{ ja}$$
$$\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))\times\{\mathbf{2}\}} \times \{\mathbf{2}\} \simeq \mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))} \times \{\mathbf{2}\} \simeq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{2}\}\,,$$

voidaan jälleen soveltaa lemmaa 4.8 tuloksena

$$t((\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))\times\{\mathbf{1}\}}\times\{\mathbf{1}\})\cup(\mathbf{2}^{\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))\times\{\mathbf{2}\}}\times\{\mathbf{2}\}) \simeq (\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{1}\})\cup(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))\times\{\mathbf{2}\})) = 1\,.$$

Tästä ja ehdosta (73) seuraa, että

$$t((\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{1}\}) \cup (\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{2}\} \simeq \mathcal{P}(p'))) = 1\,.$$

Tällöin on olemassa vakio h_2 siten, että

$$t(h_2 : (\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{1}\}) \cup (\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))) \times \{\mathbf{2}\}) \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \mathcal{P}(p')) = 1\,. \tag{74}$$

Ehtojen (72) ja (74) nojalla

$$t(h_2(h(c' \cup p')) \subseteq \mathcal{P}(p')) = 1 \tag{75}$$

ja

$$t(h_2(h(c' \cup p')) \simeq c' \cup p') = 1\,. \tag{76}$$

Lisäksi selvästi

$$t(p' \subseteq c' \cup p') = 1 \tag{77}$$

ja ehdosta (7) seuraa vaikkapa pienellä antiteesitodistuksella, että

$$t(Inf(p')) = 1\,. \tag{78}$$

Ehtojen (75)-(78) nojalla yleistetyn kontinuumihypoteesin eli ehdon (2) oletukset ovat kunnossa joukoille p' ja $h_2(h(c' \cup p'))$. GCH:n ja ehdon (76) nojalla on nyt voimassa

$$t(c' \cup p' \simeq \mathcal{P}(p')) = 1 \tag{79}$$

tai

$$t(c' \cup p' \simeq p') = 1\,. \tag{80}$$

Oletetaan ensin, että ehto (79) on voimassa. Osoitetaan, että joukot c' ja p' täyttävät lemman 4.7 oletukset. On siis osoitettava, että

$$t(\forall x \forall y[[x \cap y \approx \emptyset \wedge x \simeq p' \wedge y \simeq p'] \to x \cup y \simeq p']) = 1 \quad \text{ja} \tag{81}$$
$$t(\forall x \forall y[[x \cap y \approx \emptyset \wedge x \simeq c' \wedge y \simeq p'] \to x \cup y \simeq \mathbf{2}^{p'}]) = 1\,. \tag{82}$$

Todistetaan ensin ehto (81). Olkoot tätä varten v_1 ja v_2 vakioita, joille on voimassa

$$t(v_1 \cap v_2 \approx \emptyset) = 1\,, \tag{83}$$
$$t(v_1 \simeq p') = 1 \quad \text{ja} \tag{84}$$
$$t(v_2 \simeq p') = 1\,. \tag{85}$$

On osoitettava, että

$$t(v_1 \cup v_2 \simeq p') = 1\,. \tag{86}$$

Ensinnäkin ehtojen (84) ja (85) nojalla

$$t(v_1 \simeq v_2) = 1\,,$$

mistä seuraa ehdon (83) ja lemman 4.1 perusteella, että

$$t(v_1 \cup v_2 \simeq \mathbf{2} \times p') = 1\,. \tag{87}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \times p' &\simeq \mathbf{2}^{\mathbf{1}} \times p' \overset{a)}{\simeq} \mathbf{2}^{\mathbf{1}} \times (\mathbf{2}^{\mathcal{P}(b)} \times \{\mathbf{2}\}) \simeq \mathbf{2}^{\mathbf{1}} \times \mathbf{2}^{\mathcal{P}(b)} \\ &\simeq \mathbf{2}^{\mathbf{1}} \times \mathbf{2}^{\mathcal{P}(b)\times\mathbf{1}} \overset{b)}{\simeq} \mathbf{2}^{\mathbf{1}\cup(\mathcal{P}(b)\times\mathbf{1})} \overset{c)}{\simeq} \mathbf{2}^{\mathcal{P}(b)\times\mathbf{1}} \\ &\simeq \mathbf{2}^{\mathcal{P}(b)} \overset{d)}{\simeq} p'\,. \end{aligned} \tag{88}$$

Tässä kohdat a) ja d) seuraavat vakion p' valinnasta ja kohta b) lemmasta 4.4, jonka oletukset on hoideltu pistevieraussäädöillä voimaan. Kohta c) seuraa lemman 4.3 nojalla lemmasta 4.2, jonka oletukset ovat ehdon (66) ja lemman 4.5 nojalla voimassa.

Ehto (86) seuraa nyt ehdoista (87) ja (88), joten väitteen (81) perustelu on valmis. Väitteen (82) todistamiseksi olkoot v_1 ja v_2 vakioita, joille on voimassa

$$t(v_1 \cap v_2 \approx \emptyset) = 1\,, \tag{89}$$
$$t(v_1 \simeq c') = 1 \quad \text{ja} \tag{90}$$
$$t(v_2 \simeq p') = 1\,. \tag{91}$$

Riittää osoittaa, että

$$t(v_1 \cup v_2 \simeq \mathbf{2}^{p'}) = 1\,. \tag{92}$$

Vakioiden p' ja c' valinnan nojalla

$$t(c' \cap p' \approx \emptyset) = 1\,,$$

mistä seuraa ehtojen (89)-(91), lemman 4.8 ja ehdon (79) nojalla, että

$$t(v_1 \cup v_2 \simeq \mathcal{P}(p')) = 1\,,$$

mistä ehto (92) seuraa. Tämä todistaa loppuun väitteen (82). Ehtojen (81)-(82) ja lemman 4.7 nojalla on nyt olemassa vakio v siten, että

$$t(v \subseteq c') = 1 \tag{93}$$

ja

$$t(v \simeq \mathcal{P}(p')) = 1\,. \tag{94}$$

Ehdon (94) nojalla on olemassa vakio h_3 siten, että

$$t(h_3 : v \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \mathcal{P}(p')) = 1\,.$$

Nyt muistetaan, että ehdon (69) nojalla c osataan järjestää minimaalirelaatiolla R', ja näin ollen osataan helposti (c':n valinnan nojalla) järjestää minimaalirelaatiolla joukko c'. Olkoon kyseinen relaatio S. Tällöin edellä sovitun merkintäyksinkertaistuksen nojalla S on järjestävä minimaalirelaatio myös c':n ehdon (81) mukaisessa osajoukossa v. Merkitään $S' := IndRel_{h_3,S}(v, \mathcal{P}(p'))$, jolloin lauseen TZ6.32 mukaisesti

$$t(S'\ JMin\ \mathcal{P}(p')) = 1\,.$$

Lemman 4.10 mukaisen p':n ja $\mathcal{P}(p')$:n välisen injektion ja relaation S' avulla saadaan järjestävä minimaalirelaatio joukkoon p' ja siten (p':n valinnan nojalla) helposti joukkoon $\mathcal{P}(\mathcal{P}(b)))$. Tästä saadaan taas lemman 4.10 injektion avulla järjestys joukkoon $\mathcal{P}(b)$ ja vastaavasti joukkon $b = \mathcal{P}(\omega \cup a)$. Taas voidaan kulkea lemman 4.10 antamaa injektiota – tällä kertaa joukolta $\omega \cup a$ potenssijoukolleen pitkin (ja takaisin) ja järjestää näin joukko $\omega \cup a$ minimaalirelaatiolla S''. Koska joukon järjestävä minimaalirelaatio periytyy osajoukkoon, on voimassa

$$t(S''\ JMin\ a) = 1\,,$$

jolloin lauseesta TZ7.51 seuraa, että on olemassa ordinaaliluku α ja vakio h_4 siten, että

$$t(h_4 : \alpha \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} a) = 1\,.$$

Tämähän tarkoittaa, että

$$t(\alpha \simeq a) = 1\,,$$

eli ehdon (6) täyttävä ordinaaliluku α on löytynyt. Lauseen väite on siis kunnossa ehdon (79) tapauksessa.

Oletetaan nyt, että ehto (80) pätee. Merkitään $p'' := \mathcal{P}(b) \times \{\mathbf{0}\}$. Ehdon (80) ja joukkojen c', p' ja p'' valintojen mukaisen pistevierauden sekä lemman 4.8 ja lauseen TZ10.6 nojalla tällöin

$$t(c' \cup \mathcal{P}(p'') \simeq \mathcal{P}(p'')) = 1\,, \tag{95}$$

Tällöin on olemassa vakio h_5 siten, että

$$t(h_5 : c' \cup \mathcal{P}(p'') \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \mathcal{P}(p'')) = 1\,. \tag{96}$$

Kuvaamalla joukon c' alkiot identtisesti ja joukon p'' alkiot $\langle x, \mathbf{0}\rangle$, missä $t(x \in \mathcal{P}(b)) = 1$, vastaaviksi yksiöiksi $\{\langle x, \mathbf{0}\rangle\}$, saadaan joukkojen c' ja p'' pistevierauden sekä identtisen kuvauksen ja tuon yksiöille kuvaavan kuvauksen injektiivisyyden perusteella vakio h_6, jolle on voimassa

$$t(h_6 : c' \cup p'' \overset{1-1}{\to} c' \cup \mathcal{P}(p'')) = 1\,. \tag{97}$$

Kuvajoukolle $h_6(c' \cup p'')$ on ehdon (97) nojalla voimassa

$$t(h_6(c' \cup p'') \subseteq c' \cup \mathcal{P}(p'')) = 1\,, \tag{98}$$

mistä seuraa ehdon (96) nojalla, että

$$t(h_5(h_6(c' \cup p'')) \subseteq \mathcal{P}(p'')) = 1\,. \tag{99}$$

Toisaalta, koska injektio on bijektio kuvalleen, saadaan ehtojen (96) ja (97) avulla

$$c' \cup p'' \simeq h_6(c' \cup p'') \simeq h_5(h_6(c' \cup p''))$$

ja erityisesti

$$t(c' \cup p'' \simeq h_5(h_6(c' \cup p''))) = 1\,. \tag{100}$$

Selvästi

$$t(p'' \subseteq c' \cup p'') = 1\,. \tag{101}$$

Ehtojen (99)-(101) ja oletuksen GCH nojalla on voimassa

$$t(c' \cup p'' \simeq \mathcal{P}(p'')) = 1 \tag{102}$$

tai

$$t(c' \cup p'' \simeq p'') = 1\,. \tag{103}$$

Jos ehto (102) on voimassa, on tilanne vastaavanlainen kuin ehdossa (79). Samoin edeten kuin ehdosta (79) lähtien löydetään taas ehdon (6) toteuttava ordinaaliluku α ja lauseen väite seuraa.

Jos taas ehto (103) pätee, edetään samaan tapaan kuin ehdosta (80) lähtien edettiin. Purkamalla pistevierauden aikaansaamiseksi luodut lisäykset saadaan tällöin (vastaavasti kuin ehtoihin (102) ja (103) päädyttäessä) funktioiden perusominaisuuksia soveltamalla voimaan jompikumpi seuraavista ehdoista:

$$t(\exists x[x \subseteq c \wedge x \simeq \mathcal{P}(b)]) = 1 \tag{104}$$

ja

$$t(\exists x[x \subseteq b \wedge x \simeq c]) = 1\,. \tag{105}$$

Ehto (105) ei voi olla voimassa ehdon (11) nojalla. Tällöin ehto (104) pätee, ja potenssijoukkoon $\mathcal{P}(b)$ löytyy ehdon (69) nojalla järjestävä minimaalirelaatio. Tämän relaation antama järjestys saadaan lemman 4.10 ja järjestävän minimaalirelaation osajoukkoon periytymisen avulla myös joukkoon b – tuloksena järjestävä minimaalirelaatio joukossa b. Koska $b = \mathcal{P}(\omega \cup a)$, saadaan vastaavalla potenssijoukon järjestyksestä 'taaksepäin' menemällä järjestävä minimaalirelaatio T' joukkoon $\omega \cup a$. Koska

$$t(a \subseteq \omega \cup a) = 1\,,$$

löydetään jälleen vastaavaan tapaan kuin ehdosta (79) lähtien ordinaaliluku α, joka täyttää ehdon (6).

On siis osoitettu, että kaikissa kyseeseen tulevissa tapauksissa ehdon (6) toteuttava α löytyy. Tämä todistaa ehdon (5) ja siten edelleen ehdot (4) ja (3). $\square$

Tarvittavat työkalut luvun 2.2 väitteen (II) todistamiseen on nyt käsillä. Voidaan siis lopulta osoittaa, että yleistetty kontinuumihypoteesi seuraa $\aleph$-hypoteesista, mikä on seuraavan lauseen sisältö.

Lause 4.12

$$\vdash GCH \to AH\,.$$

Todistus: Olkoon t totuusarvofunktio, joka toteuttaa aksioomat (Ax1)–(Ax8). Oletetaan, että

$$t(GCH) = 1\,. \tag{1}$$

On osoitettava, että

$$t(AH) = 1$$

eli että

$$t(\forall\alpha[\overline{\overline{2^{\aleph_\alpha}}} \approx \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}]) = 1\,. \tag{2}$$

Olkoon tätä varten α ordinaaliluku. Riittää osoittaa, että

$$t(\overline{\overline{2^{\aleph_\alpha}}} \approx \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{3}$$

Oletuksen (1) ja Sierpinskin lauseen (lause 4.11) nojalla

$$t(AC) = 1\,,$$

joten lähteen[4] kaikki aksioomajärjestelmän (Ax1)–(Ax8) lisäksi valinta-aksiooman olettavat tulokset ovat voimassa. Oletetaan tämä jatkossa tunnetuksi eli käytetään näitä tuloksia huoletta.

Tehdään ehdon (3) todistamiseksi antiteesi: oletetaan, että

$$t(\overline{\overline{2^{\aleph_\alpha}}} \approx \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 0 \tag{AT}$$

eli lauseiden TZ10.49 ja TZ10.14 nojalla, että

$$t(\overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_\alpha)}} \approx \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 0\,.$$

Merkitään $\beta := \overline{\overline{\mathcal{P}(\aleph_\alpha)}}$. Tällöin, koska kardinaaliluvut ovat ordinaalilukuja, on voimassa

$$t(\beta \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1 \tag{4}$$

tai

$$t(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}} \prec \beta) = 1\,. \tag{5}$$

Oletetaan ensin, että vaihtoehto (4) on voimassa. Tällöin, koska β on valintansa nojalla kardinaaliluku eikä kardinaalilukujen $\aleph_\alpha$ ja $\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}$ välissä ole kardinaalilukuja (mikä nähdään esimerkiksi isomorfismin $\aleph$ aidon kasvavuuden ja lauseen TZ6.15 avulla), on voimassa

$$t(\beta \precsim \aleph_\alpha) = 1\,. \tag{6}$$

Ordinaaliluvun β valinnan ja lauseen TZ10.11 nojalla

$$t(\beta \simeq \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{7}$$

Ehdon (6) mukaan

$$t(\beta \approx \aleph_\alpha) = 1 \tag{8}$$

tai

$$t(\beta \prec \aleph_\alpha) = 1\,. \tag{9}$$

Jos ehto (8) olisi voimassa, niin ehdon (7) nojalla pätisi

$$t(\aleph_\alpha \simeq \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,,$$

mikä on mahdotonta lauseen TZ10.4 nojalla. Näin ollen vaihtoehto (9) pätee.

Lemman 4.10 nojalla on olemassa vakio h siten, että

$$t(h : \aleph_\alpha \overset{1-1}{\to} \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{10}$$

Tällöin

$$t(h : \aleph_\alpha \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} h(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{11}$$

Ehdon (10) nojalla

$$t(h(\aleph_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(\alpha)) = 1 \tag{12}$$

ja

$$t(\aleph_\alpha \simeq h(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{13}$$

Ehdon (9) perusteella, koska ordinaaliluvuista on kyse, pätee

$$t(\beta \subseteq \aleph_\alpha) = 1\,. \tag{14}$$

Nyt ehdoista (7), (14), (12) ja (13) seuraa Cantor-Schröder-Bernsteinin lauseen TZ10.3 nojalla, että

$$t(\aleph_\alpha \simeq \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,,$$

mikä on mahdotonta lauseen TZ10.4 nojalla. Siispä ehto (9) ei voi olla voimassa, mikä osoittaa vaihtoehdon (4) paikkansa pitämättömäksi, joten antiteesin (AT) nojalla vaihtoehdon (5) on oltava voimassa.

Ehdon (7) nojalla on olemassa vakio g siten, että

$$t(g : \beta \underset{onto}{\overset{1-1}{\to}} \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{15}$$

Tarkastellaan rajoittumakuvausta $h := g\ulcorner\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}$. Ehtojen (5) ja (15) nojalla on voimassa

$$t(h : \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}} \overset{1-1}{\to} \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1 \tag{16}$$

ja erityisesti

$$t(h(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) \subseteq \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{17}$$

Ehtojen (16) ja (17) nojalla

$$t(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}} \simeq h(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}})) = 1\,. \tag{18}$$

Koska funktion $\aleph$ määritelmän mukaisesti

$$t(Inf(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}})) = 1\,,$$

seuraa ehdosta (18), että

$$t(Inf(h(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}})) = 1\,. \tag{19}$$

Koska $\aleph$-funktio on aidosti kasvava, on voimassa

$$t(\aleph_\alpha \prec \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1$$

ja edelleen, ordinaaliluvuista kun on kyse, että

$$t(\aleph_\alpha \subset \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{20}$$

Ehtojen (18) ja (20) nojalla

$$t(\exists x[\aleph_\alpha \subseteq x \wedge x \simeq h(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}})]) = 1\,,$$

mistä seuraa ehtojen (17) ja (18) sekä oletuksen (1) nojalla, että

$$t(h(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) \simeq \aleph_\alpha) = 1 \tag{21}$$

tai

$$t(h(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) \simeq \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{22}$$

Ehto (21) on mahdoton, sillä sen voimassaolosta seuraisi ehdon (18) nojalla, että

$$t(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}} \simeq \aleph_\alpha) = 1\,. \tag{23}$$

Ehto (23) ei voi olla voimassa seuraavasta syystä: Oletetaan antiteesin omaisesti, että (23) pätee. Tällöin lauseen TZ10.14 nojalla

$$t(\overline{\overline{\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}}} \approx \overline{\overline{\aleph_\alpha}}) = 1$$

eli lauseen TZ10.38 mukaisesti

$$t(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}} \approx \aleph_\alpha) = 1\,.$$

Tämä on vastoin funktion $\aleph$ injektiivisyyttä. Syntynyt ristiriita osoittaa vaihtoehdon (23) – ja siten vaihtoehdon (21) – mahdottomaksi.

Ehdon (22) on siis oltava voimassa. Tällöin ehdon (18) nojalla

$$t(\aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}} \simeq \mathcal{P}(\aleph_\alpha)) = 1\,. \tag{24}$$

Toisaalta ordinaaliluvun β valinnan ja määritelmien TZ10.7 ja TZ10.36 nojalla

$$t(\forall\gamma[\gamma \simeq \mathcal{P}(\aleph_\alpha) \to \beta \precsim \gamma]) = 1\,. \tag{25}$$

Ehtojen (24) ja (25) nojalla

$$t(\beta \precsim \aleph_{\alpha\oplus\mathbf{1}}) = 1\,. \tag{26}$$

Ehdot (5) ja (26) ovat ristiriidassa keskenään, mikä kaataa antiteesin (AT) ja todistaa ehdon (3). Väite on siis edellä todetun nojalla loppuun todistettu. □

Tämän tutkielman päätulos on käsillä ja esitetään seuraavassa lauseessa.

Lause 4.13

$$\vdash AH \leftrightarrow GCH\,.$$

Todistus: Olkoon vielä kerran t totuusarvofunktio, joka toteuttaa aksioomat (Ax1)–(Ax8). On osoitettava, että

$$t(AH \leftrightarrow GCH) = 1\,. \tag{1}$$

Lauseen 3.4 nojalla

$$t(AH \to GCH) = 1\,, \tag{2}$$

ja lauseen 4.12 nojalla

$$t(GCH \to AH) = 1\,. \tag{3}$$

Väite (1) seuraa ehdoista (2) ja (3). □

5 Lopuksi

Tarkastellaan vielä hetkinen tässä tutkielmassa pääroolia esittäneiden valinta-aksiooman, $\aleph$-hypoteesin ja yleistetyn kontinuumihypoteesin suhteita. Luvussa 4 osoitettiin, että $\aleph$-hypoteesi ja yleistetty kontinuumihypoteesi ovat ZF-teoriassa yhtäpitäviä. Toisaalta Rubinin ja Sierpinskin lauseiden perusteella molemmista seuraa valinta-aksiooma. Tässä kaikessa voidaan siis hahmottaa tarkastelun taso, jolle yhtäpitävät olettamukset (GCH) ja (AH) asettuvat. Edustaako valinta-aksiooma näiden ZF-teoreettisena seurauksena jotain alempaa tasoa? Vai voisiko (AC):n ja (GCH):n (tai ekvivalentisti $\aleph$-hypoteesin) välillä vallita yhtäpitävyys ZFC-teoriassa?

Valinta-aksiooman ja yleistetyn kontinuumihypoteesin yhtäpitävyyden osoittamiseksi pitäisi kyetä todistamaan (GCH) tai (AH) ZFC-järjestelmästä lähtien. Tämä ei ole mahdollista, sillä Cohenin ja Gödelin 1950-luvun molemmin puolin todistamien tulosten nojalla kontinuumihypoteesia ei voida todistaa ZFC-teoriassa oikeaksi eikä vääräksi[1, 6]. Tämä tarkoittaa, ettei Cantorin ja muiden joukko-opin syntyaikoina ihmettelemään kysymykseen äärettömän joukon ja sen potenssijoukon mahtavuuksien välissä olevan joukon olemassaolosta saatu ZFC-teorian avulla tyhjentävää ratkaisua. Täsmennystä kuitenkin saatiin, sillä nyt tiedetään, ettei myöntävää eikä kieltävää vastausta kerta kaikkiaan ole mahdollista antaa valitun järjestelmän (ZFC) sisältä: kumpikaan vastaus ei ole perusoletusten kanssa ristiriidassa.

Kaiken kaikkiaan kumpi tahansa – (GCH) tai sen negaatio – voitaisiin periaatteessa lisätä ZFC-aksioomajärjestelmään ja kehittää teoriaa osittain uudelta pohjalta. Tämä saattaa olla osasyy sille, ettei puhtaasti esimerkiksi yleistetystä kontinuumihypoteesista riippuvaista matematiikkaa ole helppo löytää. Toinen syy voi olla, että toisin kuin valinta-aksiooman modernissa matematiikassa alati läsnä olevien seurauslauseiden tapauksessa, lähestyy äärettömyyksien olemukseen liittyvä (GCH) matematiikan ja filosofian raja-aluetta, josta useat matematiikan sovellusalueet onnistuvat pysyttelemään kaukana. Vaikka 1900-luvulla onnistuttiin – jos nyt ei vastaamaan, niin ainakin karakterisoimaan ja selventämään – joukko-opin syntyaikoina hämmästeltyä äärettömyksien olemusta, ei siis välttämättä olla tältä osin jokapäiväisessä matematiikassa niin kovin kaukana aikalaisten lähtökohdasta pitää ääretöntä merkinnällisenä tai ainakin itsessään ilman hienovaraisempia vivahteita olevana käsitteenä. Kaikilla matematiikan osa-alueilla näin ei tietenkään ole asian laita, sillä esimerkiksi suuret kardinaaliluvut[1] ovat yksi monipuolinen tutkimuksen kohde tänäkin päivänä.

Edellä todettiin, että (GCH) ja sen negaatio eivät kumpikaan ole ristiriidassa ZFC-järjestelmän kanssa. Tässä jätettiin kuitenkin mainitsematta Gödelin ja Cohenin aivan olennainen lähtökohta: molemmat matemaatikot olettivat, että ZFC-järjestelmä itsessään on ristiriidaton. Tämän oletuksen oikeellisuus ei ole lainkaan selvä, sillä ZFC-teorian mainittua ristiriidattomuutta ei ole onnistuttu todistamaan(TZs175). Tähän riittäisi konstruoida kielen $\mathcal{L}(S)$ malli m ja siihen liittyvä totuusarvofunktio t_m siten, että jokaisen ZFC-aksiooman totuusarvo tämän mallin suhteen on 1, mutta tällainen malli ainakin toistaiseksi loistaa poissaolollaan. Ei tiedetä, onko sitä olemassa. Yhtä lailla ei tiedetä, onko edes ZF-järjestelmä ristiriidaton.

Jos aksioomajärjestelmä jonain päivänä osoitetaan ristiriitaiseksi, niin Cohenin ja Gödelin tulokset menettävät merkityksensä. Samoin menettää merkityksensä tämä tutkielma ja tietenkin koko aksiomaattinen joukko-oppi. Vääräksi näistä mitään ei voi kuitenkaan väittää tässä pahimman tapauksen skenaariossakaan, sillä jos päättely

$$ZFC \vdash_L f\,,$$

voidaan suorittaa, niin tällöinhän jokainen kielen $\mathcal{L}(S)$ kaava saadaan todistettua teoreemaksi. Mutta voidaanko mitään annettavaa sanoa olevan teorialla, jossa jokainen ilmaistavissa oleva lausuma on totta? Näiden tarkastelujen perusteella voidaan todeta, että ZFC-järjestelmän ristiriidattomuus on välttämätön vaatimus aksiomaattisen joukko-opin uskottavuudelle. Tämän tutkielman johdannossa mainittiin, että ZFC-teoria on modernin matematiikan yleisesti hyväksytty perusta, joten itse asiassa vaarassa ei ole vain aksiomaattisen joukko-opin vaan saman tien koko matematiikan asema.

Viitteet

[1] Jech, T., *Set Theory*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.). Artikkeli, joka on peräisin internet-osoitteesta http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/set-theory. Viittauspäivämäärä 20.8.2014.

[2] Kurittu, L., *Aksiomaattinen joukko-oppi*. Luentomoniste, joka löytyy internet-osoitteesta http://users.jyu.fi/ lkurittu/joukko-oppia.pdf. Viittauspäivämäärä 30.7.2014.

[3] Robbin, J., *Mathematical logic. A first course.*, Benjamin, 1969.

[4] Takeuti, G ja Zaring, W. M., *Introduction to Axiomatic Set Theory (Graduate Texts in Mathematics)*, Springer, 1971.

[5] Gillmann, L., *Math. Assoc. Amer.*, **109**, 544-553, 2002.

[6] Easwaran, K., *A Cheerful Introduction to Forcing and the Continuum Hypothesis*, Cornell University Library arXiv:0712.2279, 2007. Artikkeli, joka löytyy internet-osoitteesta http://arxiv.org/abs/0712.2279. Viittauspäivämäärä 20.8.2014.