

# Hyperbolinen geometria ja Fuchsin ryhmät

Salla Homanen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Kevät 2015

**Tiivistelmä:** Salla Homanen, *Hyperbolinen geometria ja Fuchsin ryhmä* (engl. *Hyperbolic Geometry and Fuchsian Groups*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 77 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2015.

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä hyperbolista geometriaa ja tutustua Fuchsin ryhmiin. Tutkielmassa rakennetaan hyperbolisen geometrian puolitasomalli lähtien kompleksiluvuista, edeten hyperbolisen metriikan asettamiseen ja hyperbolisiin suoriin. Tutkielmassa tullaan huomaamaan, että hyperbolinen geometria ja euklidinen geometria poikkeavat ominaisuuksiltaan toisistaan. Hyperbolinen geometria on epäeuklidista eli siinä ei päde paralleeliaksiooma.

Tärkeän osan ylemmän puolitason hyperbolisen geometrian mallia ja tätä tutkielmaa muodostavat ylemmässä puolitasossa määritellyt Möbius-muunnokset, jotka ovat muotoa

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Niillä on monia tärkeitä ominaisuuksia, kuten pisteiden välisen etäisyyden ja kulmien suuruuksien säilyminen kuvauksessa.

Hyperbolisen geometrian ja Möbius-muunnosten esittelyn jälkeen siirrytään tarkastelemaan Fuchsin ryhmiä. Ne ovat ylemmän puolitason isometristen kuvausten muodostaman ryhmän diskreettejä aliryhmiä, jotka säilyttävät kulmien asennot avaruudessa. Fuchsin ryhmiä käsiteltäessä keskitytään Möbius-muunnoksiin. Tutkielman päätulos on, että ryhmä on Fuchsin ryhmä, jos ja vain jos se toimii aidosti epäjatkuvasti.

**Avainsanoja:** hyperbolinen geometria, hyperbolinen metriikka, Möbius-muunnos, geodeesi, isometria, konformisuus, kiintopiste, rata, kiinnittäjä, diskreetti joukko, aidosti epäjatkuva toiminta, Fuchsin ryhmä.

## Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Hyperbolinen geometria	3
1.1. Kompleksiluvuista yleisesti	3
1.2. Pohjustavia määritelmiä ja käsitteitä	9
1.3. Hyperbolinen metriikka	11
1.4. Yleistetyt ympyrät ja Möbius-muunnokset	16
1.5. Isometriat ja geodeesit	25
1.6. Hyperbolinen metriikka ja geodeesit Poincarén kiekossa $\mathbb{D}$	32
1.7. Konformisuus	35
1.8. Hyperbolinen pinta-ala ja Gauss-Bonnet kaava	39
1.9. Hyperbolinen trigonometria	43
Luku 2. Lisää Möbius-muunnoksista: kiintopisteet ja muunnosten luokittelu	46
2.1. Kiintopisteet	46
2.2. Konjugointi ja Möbius-muunnoksen jälki	48
2.3. Hyperboliset Möbius-muunnokset	51
2.4. Paraboliset Möbius-muunnokset	53
2.5. Elliptiset Möbius-muunnokset	54
Luku 3. Fuchsin ryhmä	57
3.1. Fuchsin ryhmien käsittelyä pohjustavia määritelmiä ja tuloksia	57
3.2. Fuchsin ryhmät	60
3.3. Rajajoukko	68
3.4. Fuchsin ryhmien algebrallisista ominaisuuksista	71
3.5. Fuchsin ryhmä ja ylemmän puolitason yksikkötangenttien joukko	75
Kirjallisuutta	77

## Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tarkastellaan hyperbolista geometriaa ja Fuchsin ryhmiä. Hyperboliselle geometrialle on olemassa monia malleja, mutta tässä tutkielmassa keskitytään hyperbolisen geometrian puolitasomalliin. Vaikka tulokset on esitetty puolitasomallissa, ne pätevät myös Poincarén mallissa eli kiekkomallissa, jota esitellään lyhyesti ja käytetään joidenkin kohtien käsittelyn helpottamiseksi. Työn motivaationa on tutustua, kuinka hyperbolinen geometria rakentuu lähtien joukosta kompleksilukuja, joille määritellään tapa mitata pituuksia ja etäisyyksiä, yhdessä sellaisten kuvausten kanssa, jotka säilyttävät pisteiden väliset etäisyydet.

Tutkielman alussa määritellään kompleksiluvut ja esitellään niiden yleisimmät tulokset sekä listataan määritelmiä, joita tarvitaan muun muassa metriikkaa ja kulmien suuruuksia käsiteltäessä. Näitä voidaan pitää pohjatietoina tämän tutkielman ymmärtämiseen. Kompleksiluvuista rajoitutaan tutkimaan ylemmän puolitason joukkoa, eli niitä kompleksilukuja, joiden imaginääriosaa on positiivinen. Tämän jälkeen tutkitaan, kuinka voidaan mitata pituuksia ja etäisyyksiä ylemmässä puolitasossa ja asetetaan siihen hyperbolinen metriikka.

Metriikan käsittelyn jälkeen keskitytään Möbius-muunnoksiksi kutsuttuihin kuvauksiin ja yleistettyihin ympyröihin eli kompleksitason ympyröihin ja suoriin. Möbius-muunnokset ovat tietyt ehdot täyttäviä, kompleksitason isometrisiä eli pisteiden väliset etäisyydet säilyttäviä kuvauksia. Möbius-muunnokset ovat merkityksellisiä, sillä ne ovat konformisia eli kulmien suuruudet säilyttäviä kuvauksia ja kuvaavat monet geometriset objektit (kuten ympyrät ja suorat) muuttumattomina itselleen. Niiden avulla nähdään myös, että ylemmän puolitason suorat eli geodeesit ovat reaaliakselia vastaan kohtisuoria puoliympyröitä ja suorja. Työn ensimmäisen luvun lopuksi käsitellään lyhyesti hyperbolista pinta-alaa, kolmioita, niiden trigonometriaa ja esitellään Gauss-Bonnet kaava kolmion pinta-alan laskemiseksi.

Toisessa luvussa jatketaan Möbius-muunnosten käsittelyä tarkastelemalla niiden kiintopisteitä eli kuvauksessa paikallaan pysyviä pisteitä ja luokitellaan Möbius-muunnokset hyperbolisiin, parabolisiin ja elliptisiin muunnoksiin kiintopisteiden lukumäärän ja sijainnin mukaan. Lisäksi tutkitaan konjugointia ja hyperbolisten, parabolisten ja elliptisten muunnosten konjugaatteja.

Viimeisessä luvussa on tarkoituksena tutustua Fuchsin ryhmiin ja niiden toimintaan. Luvun alussa esitellään Fuchsin ryhmien käsittelyssä tarvittavia määritelmiä ja tuloksia. Tämän jälkeen määritellään Fuchsin ryhmät ylemmän puolitason isometristen kuvausten muodostaman ryhmän diskreetteinä aliryhminä, jotka säilyttävät kulmien asennot eli tutkitaan Möbius-muunnosten ryhmää. Luvussa näytetään aputulosten avulla tämän työn päätulos eli se, että ryhmä on Fuchsin ryhmä, jos ja vain jos se toimii aidosti epäjatkevasti hyperbolisessa avaruudessa. Lopuksi tutkitaan lyhyesti Fuchsin ryhmien algebrallisia ominaisuuksia ja Möbius-muunnosten toimintaa ylemmän puolitason yksikkötangenttien joukolla.

Hyperbolista geometriaa käytetään monilla matematiikan aloilla, esimerkiksi topologiassa kaaosteoriassa ja lukuteoriassa. Hyperbolista geometriaa hyödynnetään myös fysiikan tutkimuksessa. Fuchsin ryhmät sen sijaan liittyvät muun muassa Cantorin joukkoihin, Dirichlet'n alueisiin ja monikulmioihin sekä Riemannin pintoihin[10][4].

## LUKU 1

### Hyperbolinen geometria

#### 1.1. Kompleksiluvuista yleisesti

Euklidisen tason  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  koordinaatteja merkitään tavallisesti reaalilukujen  $x$  ja  $y$  järjestettyjen parien  $(x, y)$  avulla. Myös kompleksiluvut voidaan ajatella tällaisina järjestettyinä pareina, kun käyttöön otetaan *imaginääriyksikkö*  $i$ , jolle pätee

$$i^2 = -1.$$

Pistettä  $(x, y)$  merkitään imaginääriyksikön avulla merkinnällä  $x + iy$ .

*Kompleksiluku* on muotoa  $x + iy$  oleva luku, joka tarkoittaa jatkossa samaa kuin merkintä  $(x, y)$ . Siten  $x + iy = u + iv$ , jos ja vain jos  $x = u$  ja  $y = v$ . Kompleksilukujen käyttämisestä on hyötyä, sillä esimerkiksi yhtälöiden ratkaisujen löytyminen monipuolistuu.

ESIMERKKI 1.1. Reaalisella polynomilla  $x^2 + 1 = 0$  ei ole juuria reaalilukujen joukossa. Sillä on kuitenkin kompleksiset juuret  $i$  ja  $-i$ .

Merkitään jatkossa kompleksilukujen joukkoa symbolilla  $\mathbb{C}$ .

MÄÄRITELMÄ 1.2. Kompleksilukujen joukko koostuu kaikista järjestetyistä pareista  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , joille määritellään yhteen- ja kertolasku seuraavilla laskutoimituksilla: luvuille  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  ja  $w = (u, v) \in \mathbb{C}$  asetetaan

$$\begin{aligned}z + w &= (x + u, y + v) \\zw &= (xu - yv, xv + yu).\end{aligned}$$

Lukua  $x \in \mathbb{R}$  ja pisteparia  $(x, 0) \in \mathbb{C}$  pidetään samana, jolloin merkitään  $x = (x, 0)$ . Tällöin  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

MÄÄRITELMÄ 1.3. *Imaginääriyksikkö* on luku

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}.$$

HUOMAUTUS 1.4. Kertolaskun määritelmän nojalla

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1.$$

Imaginääriyksikön avulla luku  $(x, y) \in \mathbb{C}$  voidaan kirjoittaa myös summana  $x + iy$ , sillä

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Tällöin kompleksilukujen joukko voidaan ilmaista muodossa

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.5. Jos  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , niin  $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ , missä

$$x =: \operatorname{Re}(z) = \text{pisteen } z \text{ reaaliosa}$$

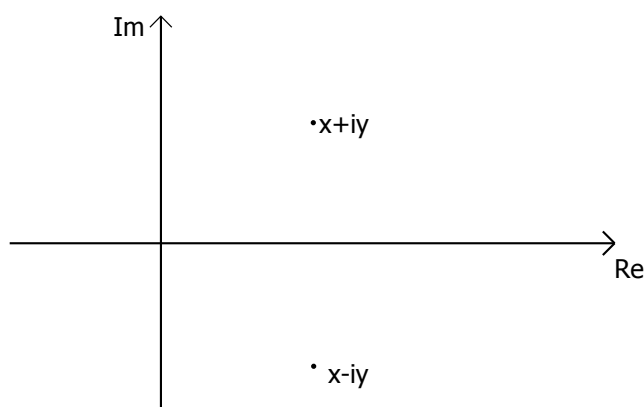
ja

$$y =: \operatorname{Im}(z) = \text{pisteen } z \text{ imaginääriosa}.$$

Kompleksilukujen välillä ei ole järjestysrelaatiota, joten merkinnällä  $z \geq 0$  (tai  $z > 0$ ) tarkoitetaan, että  $z \in \mathbb{R}$  ja  $z \geq 0$  (vastaavasti  $z > 0$ ).

MÄÄRITELMÄ 1.6. Kompleksiluvun  $z = x + iy$  liittoluku (eli kompleksikonjugaatti) on

$$\bar{z} := x - iy = (x, -y).$$



KUVA 1.1. Kompleksiluku ja sen liittoluku.

Geometrisesti luvun  $z$  liittoluku  $\bar{z}$  saadaan peilaamalla  $z$  reaaliakselin suhteen, jolloin luvulle  $z \in \mathbb{C}$  ja sen kompleksikonjugaatille  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  pätee

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) \text{ ja } \operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\bar{z})$$

Lisäksi seuraavat kolme tapausista pätevät:

- (1)  $\bar{\bar{z}} = z$
- (2)  $z = \bar{z}$ , jos ja vain jos  $z \in \mathbb{R}$

$$(3) \quad z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0 .$$

MÄÄRITELMÄ 1.7. Luvun  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  itseisarvo eli *normi* (käytetään myös nimitystä *moduli*) on

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

LAUSE 1.8. *Kompleksilukujen joukko  $\mathbb{C}$ , jossa laskutoimitukset ovat kompleksilukujen yhteen- ja kertolasku, on kunta.*

TODISTUS. Laskutoimitukset  $+$  ja  $\cdot$

- (1) ovat suljettuja: kaikille  $z, w \in \mathbb{C}$  pätee  $z + w \in \mathbb{C}$  ja  $zw \in \mathbb{C}$ ,
- (2) ovat liitännäisiä:  $(z + w) + u = z + (w + u)$  ja  $(zw)u = z(wu)$  kaikille  $z, w, u \in \mathbb{C}$ ,
- (3) ovat vaihdannaisia:  $z + w = w + z$  ja  $zw = wz$  kaikille  $z, w \in \mathbb{C}$  sekä
- (4) toteuttavat osittelulain :  $z(w + u) = zw + zu$  kaikille  $z, w, u \in \mathbb{C}$ .

Yhteenlaskun neutraalialkio on 0, sillä  $z + 0 = 0 + z = z$  ja kertolaskun neutraalialkio on 1, sillä  $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ . Laskutoimitusten käänteisalkiot löydetään huomaamalla, että kaikille  $z \in \mathbb{C}$  on olemassa  $-z \in \mathbb{C}$  siten, että  $z + (-z) = 0$  ja kaikille  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  on olemassa  $z^{-1} \in \mathbb{C}$  siten, että  $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$ . Yhteenlaskun käänteisalkio löydetään peilaamalla  $z$  ensin reaaliakselin suhteen ja sitten imaginääriakselin suhteen. Luvun  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  kertolaskun käänteisalkio on

$$w = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

sillä  $zw = 1$ , jos ja vain jos  $\bar{z}zw = \bar{z}$ , jos ja vain jos  $w = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ . □

HUOMAUTUS 1.9. Kompleksilukujen  $z$  ja  $w$  osamäärä määritellään asettamalla

$$\frac{w}{z} = w \frac{1}{z} = wz^{-1}$$

kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja  $w \in \mathbb{C}$ .

Kompleksiluvuilla on ominaisuuksia, joiden avulla kompleksilukujen käsittelyä ja niillä laskemista voidaan yksinkertaistaa. Seuraavassa lauseessa esitellään näitä ominaisuuksia.

LAUSE 1.10. *Kompleksiluvuille  $z, w \in \mathbb{C}$  pätee*

$$(1) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \text{ ja } \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$



$$(2) \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$$

$$(3) \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \text{ jos } w \neq 0$$

$$(4) \frac{z+\bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z)$$

$$(5) \frac{z-\bar{z}}{2i} = \operatorname{Im}(z)$$

$$(6) |zw| = |z||w|$$

$$(7) |z| = |\bar{z}| \text{ ja } |z|^2 = z\bar{z}$$

$$(8) |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ ja } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

$$(9) \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(10) \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$$

TODISTUS. (1) Olkoon  $z = x + iy$  ja  $w = u + iv$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{x + u + i(y + v)} \\ &= x + u - i(y + v) = x - iy + u - iv = \bar{z} + \bar{w} \end{aligned}$$

sekä

$$\begin{aligned} \overline{z - w} &= \overline{x - u + i(y - v)} = x - u - i(y - v) = x - iy - u + iv \\ &= (x - iy) - (u - iv) = \bar{z} - \bar{w}. \end{aligned}$$

(2) Olkoon  $z = x + iy$  ja  $w = u + iv$ . Tällöin

$$\overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv + uy)} = xu - yv - i(xv + uy) = (x - iy)(u - iv) = \bar{z}\bar{w}.$$

(3) Itseisarvon määritelmän ja kohdan (2) avulla saadaan

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{zw^{-1}} = \overline{\left(z\bar{w} \frac{1}{|w|^2}\right)} = \bar{z}\bar{\bar{w}} \overline{\left(\frac{1}{|w|^2}\right)} = \bar{z}w \frac{1}{|w|^2} = \bar{z}w \frac{1}{w\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

(4) Olkoon  $z = x + iy$ . Suoralla laskulla nähdään, että

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{x + x + i(y - y)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z)$$

(5) Olkoon  $z = x + iy$ . Suoralla laskulla nähdään, että

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{x - x + i(y - (-y))}{2i} = \frac{i2y}{2i} = y = \operatorname{Im}(z).$$

(6) Kohdan (2) ja itseisarvon määritelmän perusteella

$$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (zw)(\bar{z}\bar{w}) = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2|w|^2.$$

(7) Jos  $z = x + iy$ , niin itseisarvon määritelmän nojalla

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|.$$

Myös toinen väite pätee, sillä

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (-y)^2 = (x + iy)(x - iy) = z\bar{z}.$$

(8) Olkoon  $z = x + iy$ . Tällöin

$$|\operatorname{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|^2.$$

Väite  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$  osoitetaan vastaavasti.

(9) Luvulle ja sen kertolaskun käänteisalkiolle pätee  $zz^{-1} = 1$ , joten osoitetaan väite toteamalla, että  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  on luvun  $z = x + iy$  kertolaskun käänteisalkio:

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2}z = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - iy)(x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2}x^2 + y^2 = 1.$$

(10) Kohdan (9) nojalla  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ , joten käyttämällä kohtaa (3) saadaan

$$\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{x + iy}{|z|^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}} = \bar{z}^{-1}.$$

□

LAUSE 1.11. (**Kolmioepäyhtälö**) Olkoon  $z, w \in \mathbb{C}$ . Tällöin

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

TODISTUS. Väite seuraa laskusta

$$\begin{aligned}
 |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\
 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\
 &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\
 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
 &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
 &= (|z|^2 + |w|^2),
 \end{aligned}$$

kun huomataan, että  $w\bar{z} = \overline{z\bar{w}}$  ja käytetään itseisarvon määritelmää sekä Lausetta 1.10. □

Joskus kompleksilukuja on helpompi käsitellä *napakoordinaateissa*:

LAUSE 1.12. *Olkoon  $z \in \mathbb{C}$ . Tällöin on olemassa luku  $\theta \in \mathbb{R}$ , jolle*

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

TODISTUS. Oletetaan, että  $z = x + iy \neq 0$  ja olkoon  $\theta$  yhtälöparin

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

ratkaisun. Tällöin

$$|z|(\cos \theta + i \sin \theta) = x + iy = z.$$

□

Lauseessa (1.12) pisteelle  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  käytettyä esitystä kutsutaan *napakoordinaattiesitykseksi*. Toisin sanoen pisteen  $(x, y) \in \mathbb{C}$  napakoordinaatit ovat

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases}$$

MÄÄRITELMÄ 1.13. Kompleksiluvun  $z$  *argumentti*  $\arg(z)$  on niiden reaalilukujen  $\theta \in \mathbb{R}$  joukko, jolle pätee

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

HUOMAUTUS 1.14. Argumentti  $\arg(z)$  on yksikäsitteinen modulo  $2\pi$ : jos  $\theta$  on pisteen  $z$  argumentti, niin myös jokainen luku  $\theta + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , on pisteen  $z$  argumentti, ja vain nämä ovat pisteen  $z$  argumentteja.

HUOMAUTUS 1.15. Olkoot kompleksiluvut  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja olkoon  $\theta_j \in \arg(z_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Tällöin kompleksiluvun  $z_j$  napakoordinaattiesitys on

$$z_j = |z_j|(\cos \theta_j + i \sin \theta_j).$$

Kahden napakoordinaateissa esitetyn kompleksiluvun tulo on trigonometrinen funktioiden yhteenlaskukaavaa apuna käyttäen

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Kompleksilukujen kertolaskussa lasketaan siis kerrottavien lukujen argumentit yhteen ja kerrotaan itseisarvot keskenään.

Kompleksiluvut mahdollistavat aivan uudenlaisen geometrian konstruoinnin. Hyperbolisessa geometriassa käsitellään kaarevaa pintaa euklidisesta geometriasta tutun tason sijaan, minkä vuoksi hyperbolinen geometria eroaa euklidisesta geometriasta monin tavoin, esimerkiksi suorien yhdensuuntaisuuden ja kolmion kulmasumman osalta.

## 1.2. Pohjustavia määritelmiä ja käsitteitä

Tässä luvussa esitellään joitakin jatkoon kannalta oleellisia määritelmiä ja käsitteitä, joita tarvitaan muun muassa tutkittaessa kulmien suuruuksia.

MÄÄRITELMÄ 1.16. Joukkoa  $X$  kutsutaan *topologiseksi avaruudeksi*, jos on olemassa joukko  $\Sigma$  joukon  $X$  osajoukkoja siten, että seuraavat kolme ehtoa täyttyvät:

- (1)  $\emptyset \in \Sigma$  ja  $X \in \Sigma$
- (2) Jos  $\{S_i : i \in I\}$  on eräs joukon  $\Sigma$  osajoukkojen muodostama joukko, missä  $I$  on indeksijoukko, niin

$$\bigcup_{i \in I} S_i \in \Sigma,$$

sekä

- (3)  $S_i \cap S_j \in \Sigma$  kaikille  $i, j \in I, i \neq j$ .

Joukkoa  $\Sigma$  kutsutaan joukon  $X$  *topologiaksi* ja sen alkioita *avoimiksi joukoiksi*.

MÄÄRITELMÄ 1.17. *Vektoriavaruus* koostuu vektorijoukosta  $V$  ja (kerroin-)kunnasta  $K$ , jos vektoreille  $x, y, z \in V$  ja kertoimille (eli skalaareille)  $\lambda, \mu \in K$  pätee seuraavaa:

- (1) vaihdannaisuus:  $x + y = y + x$
- (2) liitännäisyys:  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (3) nollavektorin olemassaolo:  $x + 0 = x$
- (4) vastavektorin olemassaolo:  $x + (-x) = 0$
- (5) neutraalialkiolla kertominen:  $1 \cdot x = x$
- (6) reaalikerran liitännäisyys:  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- (7) osittelulait:  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  ja  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ .

Kun vektoriavaruuteen lisätään rakenne, jota kutsutaan *sisätuloksi*, vektoriavaruudesta tulee *sisätuloavaruus*. Sisätuloavaruudessa voidaan määritellä muun muassa käsitteet kulma ja kohtisuoruus. Sisätulon avulla saadaan määriteltyä myös normi ja metriikka, jotka mahdollistavat kulmien suuruuksien ja pisteiden välisten etäisyyksien mittaamisen.

**MÄÄRITELMÄ 1.18.** Vektoriavaruutta  $V$  kutsutaan *sisätuloavaruudeksi*, jos on olemassa kuvaus  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$  (missä joukko  $F$  on  $\mathbb{R}$  tai  $\mathbb{C}$ ), joka täyttää seuraavat ehdot:

- (1)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  kaikille  $x, y \in V$ , jos  $F = \mathbb{R}$  tai  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  kaikille  $x, y \in V$ , jos  $F = \mathbb{C}$
- (2)  $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$  ja  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  kaikille  $x, y \in V$  ja  $a \in F$
- (3)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  kaikille  $x \in V$  ja  $\langle x, x \rangle = 0$ , jos ja vain jos  $x = 0$ .

Kuvausta  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kutsutaan sisätuloksi.

Esimerkiksi vektoreiden  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in V = \mathbb{R}^2$  sisätulo määritellään

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

eli vektoreiden  $x$  ja  $y$  koordinaatit kerrotaan keskenään ja lasketaan yhteen (tällöin sisätulo on samalla euklidisesta geometriasta tuttu *ristitulo*). Tulos on reaaliluku tai kompleksiluku riippuen siitä, onko joukko  $F$  reaalilukujen vai kompleksilukujen joukko.

**MÄÄRITELMÄ 1.19.** Joukkoa  $X$  kutsutaan *metriseksi avaruudeksi*, jos on olemassa kuvaus  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  jolla on seuraavat ominaisuudet

- (1)  $d(x, y) \geq 0$  kaikille  $x, y \in X$  ja  $d(x, y) = 0$ , jos ja vain jos  $x = y$ ,
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  kaikille  $x, y \in X$  ja
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  kaikille  $x, y, z \in X$ .

Tällöin kuvausta  $d$  kutsutaan joukon  $X$  *metriikaksi*. Paria  $(X, d)$  kutsutaan *metriseksi avaruudeksi*.

MÄÄRITELMÄ 1.20. Vektoriavaruutta  $V$  kutsutaan *normiavaruudeksi*, jos on olemassa kuvaus  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , joka täyttää seuraavat ehdot:

- (1)  $\|x\| \geq 0$  kaikille  $x \in V$ . Lisäksi, jos  $\|x\| = 0$ , niin  $x = 0$ ,
- (2)  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$  kaikille  $x \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  ja
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  kaikille  $x, y \in V$ .

Kuvausta  $\|\cdot\|$  kutsutaan *normiksi*. Tason  $\mathbb{R}^2$  vektorin  $x = (x_1, x_2)$  euklidinen normi (eli pituus) määritellään

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.21. Osajoukko  $U \subset X$  on *avoin*, jos kaikille  $x \in U$  on olemassa luku  $\epsilon > 0$  siten, että avoin pallo  $B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ , missä pallon keskipiste on  $x$  ja säde  $\epsilon$ , sisältyy joukkoon  $U$ . Toisin sanoen kaikilla joukon  $U$  pisteillä  $x$  on pieni ympäristö, joka myös kuuluu joukkoon  $U$ .

HUOMAUTUS 1.22. [9, s.22-23]

- (1) Jos  $V$  on normiavaruus, niin määrittelemällä metriikka  $d$  normina  $d(x, y) = \|x - y\|$  kaikille  $x, y \in V$  pari  $(V, d)$  on metrinen avaruus.
- (2) Jos  $X$  on metrinen avaruus, niin joukko

$$\{B(x, r) : x \in X, r \geq 0\}$$

antaa topologian kannan  $\Sigma$  joukolla  $X$  eli avoimet joukot saadaan esitettyä yhdisteinä avoimista palloista. Tällöin pari  $(X, \Sigma)$  on topologinen avaruus.

MÄÄRITELMÄ 1.23. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Olkoon  $x_n \in X$  jono pisteitä joukossa  $X$ . Sanotaan, että jono  $x_n$  konvergoi kohti pistettä  $x \in X$ , jos kaikilla  $\epsilon > 0$  on olemassa  $N \in \mathbb{N}$  siten, että kaikilla  $n \geq N$  pätee  $d(x_n, x) < \epsilon$ .

### 1.3. Hyperbolinen metriikka

Kompleksitason  $\mathbb{C}$  pisteet ovat kompleksilukuja  $z = (x, y)$ , joiden reaaliosa on  $\operatorname{Re}(z) = x$  ja imaginääriosa on  $\operatorname{Im}(z) = y$ . *Ylempi puolitaso*

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

on joukko kompleksitason  $\mathbb{C}$  pisteitä  $z = (x, y)$ , joiden imaginääriosa on positiivinen. Sen reuna on

$$\partial\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\},$$

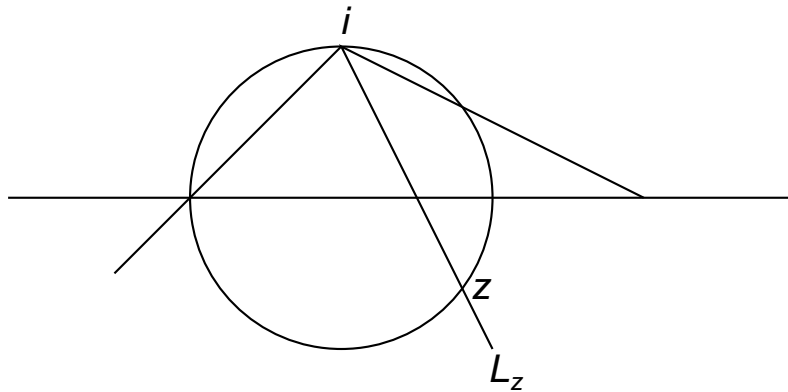
eli reunaan  $\partial\mathbb{H}$  kuuluu reaaliakseli ja äärettömyyspiste  $\infty$ .

Joukkoa  $\partial\mathbb{H}$  sanotaan *ympyräksi äärettömydessä*, sillä topologisesti se on ympyrä. Tämä nähdään *stereografisen projektion* avulla: olkoon  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  yksikköympyrä kompleksitasossa  $\mathbb{C}$  (ks. kuva 1.2). Määritellään kuvaus

$$\pi : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

seuraavasti: olkoot  $z \in K \setminus \{i\}$  ja  $L_z$  pisteiden  $z$  ja  $i$  kautta kulkeva (euklidinen) suora, joka leikkaa reaaliakselin yksittäisessä pisteessä  $\pi(z)$ . Määritellään lisäksi  $\pi(i) = \infty$ , sillä kun  $z \rightarrow i$ , niin  $\pi(z) \rightarrow \infty$  (ks. kuva 1.2). Tällöin kuvaus  $\pi$  on homeomorfismi joukosta  $K$  joukkoon  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , sillä  $\pi$  on bijektio. Tämä seuraa geometrisesti siitä, että joukossa  $\mathbb{C}$  kahden eri pisteen kautta kulkee yksikäsitteinen euklidinen suora: jos kahdelle yksikköympyrän  $K$  pisteelle  $z$  ja  $w$  pätee  $z, w \neq i$  ja  $\pi(z) = \pi(w)$ , niin euklidiset suorat  $L_z$  ja  $L_w$  kulkevat pisteiden  $i$  ja  $\pi(z) = \pi(w)$  kautta, joten on oltava  $L_z = L_w$  ja siten  $z = w$ .

Huomataan, että yksikköympyrästä  $K$  saadaan reaalinumerien joukko  $\mathbb{R}$  kuvauksen  $\pi$  avulla poistamalla yksikköympyrästä  $K$  piste  $i$ . Näin ollen yksikköympyrä voidaan ajatella saatavan joukosta  $\mathbb{R}$  lisäämällä siihen piste  $\infty$ . Toisin sanoen yksikköympyrä  $K$  ja joukko  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ovat topologisesti samanlaiset ympyrät ja sen vuoksi joukon  $\partial\mathbb{H}$  reunaa sanotaan ympyräksi äärettömydessä [1, s. 9], [10, s. 12-13], [2, s. 276].



KUVA 1.2. Stereografinen projektio.

Hyperbolisessa avaruudessa etäisyyksien ja pituuksien käsittelemiseen käytetään hyperbolista metriikkaa. Ennen hyperbolisen metriikan esittelemistä tutkitaan, mikä on kahden pisteen välinen etäisyys. Etäisyys kahden pisteen välillä saadaan selville tutkimalla kaikkia näitä pisteitä yhdistäviä polkuja ja valitsemalla poluista lyhin.

Aluksi tarvitaan siis tapa yhdistää pisteet polulla ja sen jälkeen tapa mitata polun pituus, jolloin muodostuu perusta hyperboliselle geometrialle. Muodostuva geometria

on hyvin erilaista kuin euklidinen geometria. Huomataan esimerkiksi, että lyhin käyrä, joka yhdistää kahta pistettä hyperbolisessa avaruudessa, on hyvin erilainen kuin euklidisestä geometriasta tuttu suora, jota pitkin pisteiden välinen euklidinen etäisyys mitataan. Tällaisia käyriä tutkitaan tarkemmin seuraavassa luvussa.

**HUOMAUTUS 1.24.** Etäisyydeltä vaaditaan (ks. määritelmä 1.19), että kahden pisteen etäisyys on aina ei-negatiivinen sekä nolla vain, jos mitataan etäisyys pisteestä itseensä. Lisäksi etäisyys kahden pisteen välillä ei saa riippua kummasta pisteestä mittaaminen aloitetaan. Kolmas ehto on, että etäisyys noudattaa kolmioepäyhtälöä eli etäisyys kasvaa jos etäisyys kahden pisteen välillä mitataan kolmannen pisteen kautta. Kun nämä ehdot saadaan voimaan, voidaan käsiteltävää avaruutta sanoa metriseksi ja etäisyyttä mittaavaa funktiota metriikaksi. Hyperboliseen avaruuteen halutaan siis löytää etäisyyttä mittaava funktio, joka toteuttaa nämä ehdot.

Olkoon  $I = [0, 1]$  ja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$  paloittain differentioituva kuvaus, jolloin *polku* ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H}$  tarkoittaa differentioituvan funktion  $\gamma$  kuva. Polun  $\gamma$  hyperbolinen pituus määritellään *polkuintegraalin* avulla: olkoon  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio, jolloin funktion  $f$  polkuintegraali yli polun  $\gamma$  määritellään

$$\int_{\gamma} f = \int_0^1 f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

missä

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(\gamma'(t)))^2 + (\operatorname{Im}(\gamma'(t)))^2}.$$

**MÄÄRITELMÄ 1.25.** Olkoon  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  polku ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ . Polun  $\gamma$  *hyperbolinen pituus*  $h$  saadaan integroimalla funktiota  $f(z) = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$  pitkin polkua  $\gamma$  [10, s. 14]:

$$h(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} = \int_0^1 \frac{|\gamma'|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt,$$

missä  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ovat polun  $\gamma$  koordinaattifunktiot eli  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  kaikilla  $t \in [0, 1]$ .

Polun hyperbolisen pituuden avulla voidaan nyt määritellä kahden pisteen välinen etäisyys valitsemalla pisteitä yhdistävistä poluista lyhin:

**MÄÄRITELMÄ 1.26.** Pisteiden  $z, w \in \mathbb{H}$  välinen etäisyys  $\rho$  on

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma),$$



missä infimum otetaan yli kaikkien paloittain differentioituvien polkujen  $\gamma \subset \mathbb{H}$ , jotka yhdistävät pisteitä  $z$  ja  $w$  joukossa  $\mathbb{H}$  [4, s. 2].

HUOMAUTUS 1.27. Jos  $z$  ja  $w$  ovat kaksi eri pistettä ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H}$ , niin pätee kolmioepäyhtälö

$$\rho(z, w) \leq \rho(z, \eta) + \rho(\eta, w).$$

Yhtäsuuruus pätee, jos piste  $\eta \in \mathbb{H}$  kuuluu sellaiselle pisteitä  $z$  ja  $w$  yhdistävän suoran tai ympyrän osalle, joka kuuluu joukkoon  $\mathbb{H}$ .

ESIMERKKI 1.28. Olkoon pisteitä  $a_1 + ib$  ja  $a_2 + ib$  yhdistävä polku  $\gamma(t) = a_1 + t(a_2 - a_1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Tällöin  $\gamma'(t) = a_2 - a_1$  ja polun  $\gamma$  pituus on

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|a_2 - a_1|}{b} dt = \frac{|a_2 - a_1|}{b}.$$

Jos  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 2$  ja  $b = 1$ , niin polku  $\gamma$  on reaaliakselin suuntainen suora, jonka pituus on 4.

Tarkastellaan sitten pisteitä  $-2+i$  ja  $2+i$  yhdistävää paloittain määriteltyä polkua

$$\sigma(t) = \begin{cases} (4t - 2) + i(1 + 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (4t - 2) + i(3 - 2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nyt

$$|\sigma'(t)| = \begin{cases} |4 + 2i| = \sqrt{20}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ |4 - 2i| = \sqrt{20}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ja

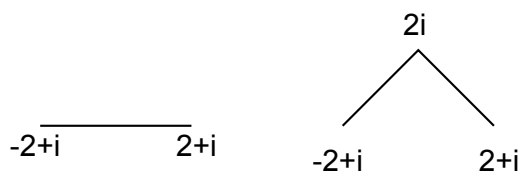
$$\operatorname{Im}(\sigma(t)) = \begin{cases} 1 + 2t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 2t, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Siten polun  $\sigma$  pituus on

$$\begin{aligned} h(\sigma) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{20}}{1 + 2t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{20}}{3 - 2t} dt \\ &= \sqrt{20} \frac{\ln 2}{2} + \sqrt{20} \frac{\ln 2}{2} \\ &= 2\sqrt{5} \log 2, \end{aligned}$$

joka on likimain 3,1.

Huomataan, että polun  $\sigma$  hyperbolinen pituus on lyhyempi kuin polun  $\gamma$ . Tämän perusteella näyttää siltä, että pisteiden välinen lyhin etäisyys hyperbolisessa avaruudessa mitataan eri tavalla kuin euklidisessa eli pitkin jotakin muuta käyrää kuin pisteitä yhdistävää euklidista suoraa (ks. 1.3).



KUVA 1.3. Pisteitä  $-2 + i$  ja  $2 + i$  yhdistävät polut  $\gamma$  ja  $\sigma$ .

HUOMAUTUS 1.29. Kahden pisteen  $z, w \in \mathbb{H}$  etäisyydelle  $\rho$  pätee kaava [4, s. 6]

$$\rho(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$$

Myöhemmin tullaan huomaamaan, että kaksi ylemmän puolitason pistettä  $z, w \in \mathbb{H}$  voidaan kuvata imaginääriakselille Möbius-muunnoksella, joka on muotoa  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  joillekin  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Tällöin pisteiden  $z$  ja  $w$  kuvapisteen ovat  $z_0 = ia$  ja  $w_0 = ib$ ,  $a \leq b$ . Näiden pisteiden  $z_0$  ja  $w_0$  välinen etäisyys on reaaliluku: kun  $\operatorname{Re}(z_0) = \operatorname{Re}(w_0)$ ,  $\operatorname{Im}(z_0) = a$  ja  $\operatorname{Im}(w_0) = b$ , niin pisteiden  $z_0$  ja  $w_0$  etäisyys on luku  $\ln \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{\operatorname{Im}(w_0)} = \ln \frac{b}{a}$ . Lisäksi väitteen todistamiseksi tarvitaan tietoa, että Möbius-muunnos on isometrinen, jolloin pisteiden  $w$  ja  $z$  etäisyys on yhtä suuri kuin pisteiden  $z_0$  ja  $w_0$ .

LAUSE 1.30. *Hyperbolinen etäisyys on metriikka eli funktio  $\rho$  toteuttaa seuraavat ehdot:*

- (1) *ei-negatiivisuus:*  $\rho(z, z) = 0$  ;  $\rho(z, w) > 0$ , jos  $z \neq w$ .
- (2) *symmetrisyys:*  $\rho(u, v) = \rho(v, u)$
- (3) *kolmioepäyhtälö:*  $\rho(z, w) + \rho(w, u) \geq \rho(z, u)$ .

TODISTUS. Ehdot (1) ja (2) ovat selvästi totta määritelmän 1.26 ja huomautuksen 1.29 nojalla. Ehdon (3) todistamiseksi olkoot pisteet  $z, w, u \in \mathbb{H}$ , pisteitä  $z$  ja  $w$  yhdistävä polku  $\sigma_{z,w} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{H}$  ja pisteitä  $w$  ja  $u$  yhdistävä polku  $\sigma_{w,u} : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ . Tällöin polku  $\sigma_{z,u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  pisteestä  $z$  pisteeseen  $u$  saadaan asettamalla [10, s. 171]

$$\sigma_{z,u}(t) = \begin{cases} \sigma_{z,w}(t), & \text{jos } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sigma_{w,u}(t), & \text{jos } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Sen pituus on sama kuin polkujen  $\sigma_{z,w}$  ja  $\sigma_{w,u}$  pituuksien summa eli  $h(\sigma_{z,u}) = h(\sigma_{z,w}) + h(\sigma_{w,u})$ . Kahden pisteen etäisyys on infimum niitä yhdistävien paloittain differentioituvien polkujen pituuksista, joten

$$\rho(z, u) \leq h(\sigma_{z,u}) = h(\sigma_{z,w}) + h(\sigma_{w,u}),$$

mistä saadaan

$$\rho(z, u) \leq \rho(z, w) + \rho(w, u).$$

□

HUOMAUTUS 1.31. Ylemmän puolitason  $\mathbb{H}$  *tangenttiavaruus*  $T_z\mathbb{H}$  pisteessä  $z$  määritellään tason  $\mathbb{H}$  pisteessä  $z$  olevien tangenttivektoreiden joukkona. Se voidaan ajatella vektoriavaruutena, joka on kaksiulotteinen ja koostuu reaali-vektoreista tai yksiulotteinen ja koostuu kompleksivektoreista. Tangenttiavaruudessa  $T_z\mathbb{H}$  sisätulo pisteille  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$  ja  $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2 \in T_z\mathbb{H}$  määritellään asettamalla

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \frac{(\zeta_1, \zeta_2)}{\operatorname{Im}(z)^2},$$

joka on euklidinen sisätulo  $(\zeta_1, \zeta_2) = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2$  kerrottuna skalaarilla  $\frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2}$ . Tämän ja määritelmien 1.25, 1.26 sekä lauseen 1.30 avulla nähdään, miksi polun  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  pituus joukossa  $\mathbb{H}$  määritellään siten kuin se on annettu määritelmässä 1.25: asettamalla metriikka  $ds$  [4, s. 1,10]

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

polun  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  hyperbolinen pituus  $h(\gamma)$  on

$$h(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{dt}\operatorname{Re}\gamma(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\operatorname{Im}\gamma(t)\right)^2}}{\operatorname{Im}\gamma(t)} dt.$$

Heuristisesti on siis “edullisempää” kulkea pitkin polkua, joka ei kulje lähellä reaaliakselia vaan jonka imaginääriosat ovat isoja.

HUOMAUTUS 1.32. Voidaan osoittaa, että hyperbolista metriikkaa käyttämällä määritellyt joukon  $\mathbb{H}$  avoimet joukot ovat samoja kuin ylemmän puolitason avoimet joukot, jotka on määriteltä käyttämällä Euklidista metriikkaa. Toisin sanoen hyperbolisen geometrian (hyperbolisen metriikan määrittämiä) avoimia joukkoja ja euklidisia (euklidisen metriikan määrittämiä) avoimia joukkoja voidaan pitää samoina. [11, s. 4]

#### 1.4. Yleistetyt ympyrät ja Möbius-muunnokset

Pisteiden  $a$  ja  $b$  välinen lyhin etäisyys euklidisessa avaruudessa mitataan pitkin suoraa, joka yhdistää pisteet  $a$  ja  $b$ . Tällöin pisteiden  $a$  ja  $b$  etäisyys saadaan lasketua euklidisena normina. Tilanne on toisenlainen, jos pisteet kuuluvat hyperboliseen avaruuteen. Edellisen luvun perusteella pisteiden  $a$  ja  $b \in \mathbb{H}$  välinen lyhin etäisyys mitataan käyttämällä eri metriikkaa kuin euklidisessa avaruudessa ja esimerkin 1.28

perusteella etäisyys mitataan pitkin jotakin muuta käyrää kuin pisteitä  $a$  ja  $b$  yhdistävää euklidista suoraa. Tässä ja seuraavassa luvussa on tavoitteena selvittää, millaisia nämä käyrät ovat.

Tutkitaan seuraavaksi kompleksitason suoria ja ympyröitä ja määritellään niiden avulla yleistetty ympyrä. Hyperbolinen suora, eli käyrä, jota pitkin mitattuna hyperbolinen etäisyys on lyhin, tullaan myöhemmin määrittelemään leikkauksena joukosta  $\mathbb{H}$  ja kompleksitason reaaliakselia vastaan kohtisuorasta yleistetystä ympyrästä.

Kappaleessa 1.1 todettiin, että järjestetty pari  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ja kompleksiluku  $x+iy \in \mathbb{C}$  vastaavat toisiaan, joten kompleksitasoa  $\mathbb{C}$  voidaan tarkastella joukon  $\mathbb{R}^2$  avulla. Tutkitaan seuraavaksi kompleksitason suorien ja ympyröiden yhtälöitä reaalitason ympyröiden ja suorien avulla. Tarkoituksena on selvittää, kuinka suoria ja ympyröitä voidaan käsitellä samanaikaisesti joukossa  $\mathbb{C}$ .

Olkoon  $L$  suora joukossa  $\mathbb{R}^2$ , jolloin sen yhtälö on muotoa

$$(1) \quad ax + by + c = 0,$$

joillekin  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Kirjoittamalla  $z = x + iy$  ja käyttämällä lauseessa 1.10 esitettyjä kompleksilukujen ominaisuuksia  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  ja  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  yhtälöstä (1) saadaan

$$a \left( \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right) + b \left( \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \right) + c = 0,$$

jonka uudelleenjärjestely antaa

$$\frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)\bar{z} + c = 0.$$

Merkitsemällä  $\beta = \frac{a-ib}{2}$  suoran  $L$  yhtälöksi saadaan

$$(2) \quad \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + c = 0.$$

Olkoon sitten  $C$  ympyrä joukossa  $\mathbb{R}^2$  siten, että sen keskipiste on  $(x_0, y_0)$  ja säde on  $r$ . Tällöin ympyrän  $C$  yhtälö on

$$(3) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Olkoon  $z = x + iy$  ja  $z_0 = x_0 + iy_0$ , jolloin yhtälö (3) saa muodon

$$(4) \quad |z - z_0|^2 = r^2.$$

Edelleen kompleksilukujen ominaisuutta  $|z|^2 = z\bar{z}$  käyttämällä saadaan yhtälöstä (4)

$$(5) \quad (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2.$$

Sieventämällä ja merkitsemällä  $\beta = -\bar{z}_0$  ja  $\gamma = z_0\bar{z}_0 - r^2 = |z_0|^2 - r^2$  ympyrän yhtälö saa muodon

$$(6) \quad z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0.$$

HUOMAUTUS 1.33. Jos yhtälö (2) tai (6) kerrotaan vakiolla  $c \neq 0$ , niin yhtälö määrää edelleen saman suoran tai ympyrän.

Yhtälöt (2) ja (6) voidaan yhdistää, jolloin kompleksitason ympyröitä ja suoria voidaan käsitellä samanaikaisesti. Tällöin niitä kutsutaan *yleistetyiksi ympyröiksi*. Saadaan seuraava lause:

LAUSE 1.34. *Käyrä  $A$  on yleistetty ympyrä (eli ympyrä tai suora) joukossa  $\mathbb{C}$ , jos ja vain jos sen määrää yhtälö*

$$(7) \quad \alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0,$$

missä  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  ja  $\beta \in \mathbb{C}$ .

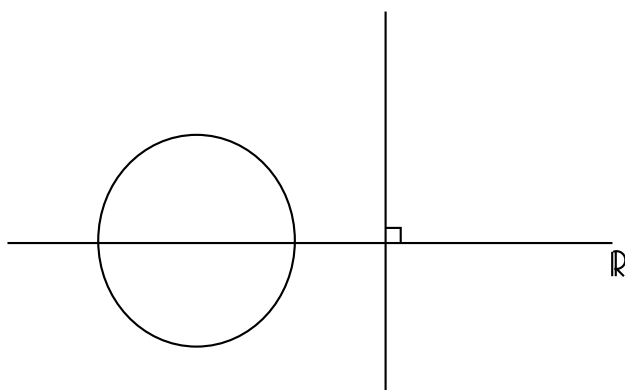
Verrattaessa Lauseen 1.34 yhtälöä (7) ja kaavoja (2) ja (6) huomataan, että kun  $\alpha = 0$ , niin yhtälö (7) esittää suoraa ja kun  $\alpha \neq 0$ , niin se esittää ympyrää.

Tärkeän joukon muodostavat ne käyrät, joille kertoimet  $\alpha, \beta, \gamma$  yhtälössä (7) ovat reaalisia. Oletetaan, että  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  ja tarkastellaan kompleksitasoa  $\mathbb{C}$ . Tällöin  $A$  on joko ympyrä, jonka keskipiste on reaaliakselilla (eli ympyrä on kohtisuorassa reaaliakselia vastaan) tai reaaliakselia leikkaava ja sitä kohtisuorassa oleva suora. Tarkastellaan näistä käyristä vain niitä osia, jotka ovat ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ . Huomataan, että käyrien osat ovat puoliympyröitä, joiden keskipiste on reaaliakselilla ja reaaliakselia vastaan kohtisuoria puolisuoria, joiden toinen päätepiste on reaaliakselilla. Luvussa 1.5 tullaan osoittamaan, että nämä ovat lyhimpiä käyriä, jotka yhdistävät kaksi ylemmän puolitason pistettä.

Jatkossa tässä työssä keskitytään *Möbius-muunnoksiksi* kutsuttuihin kuvauksiin. Ne ovat joukon  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (kompleksitaso, johon lisätty äärettömyyspiste  $\infty$ ) kuvauksia, joille asetetaan tiettyjä ehtoja. Tässä luvussa esitellään Möbius-muunnosten ryhmän toimintaa ylemmässä puolitasossa. Toiminnan tarkastelussa keskitytään sellaisiin hyperbolisen tason geometrisiin objekteihin, jotka pysyvät muuttumattomina Möbius-muunnoksissa.

MÄÄRITELMÄ 1.35. [6] Möbius-muunnos on kuvaus  $T : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ ,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$



KUVA 1.4. Reaaliakselia vastaan kohtisuora ympyrä ja suora.

missä luvuille  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  pätee  $ad - bc \neq 0$  ja käytetään sopimuksia

$$\begin{cases} T(z) = \frac{az+b}{d}, & \text{kun } c = 0 \text{ ja } z \in \mathbb{C} \\ T(\infty) = \infty, & \text{kun } c = 0 \\ T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, & \text{kun } c \neq 0 \text{ ja } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ T(-\frac{d}{c}) = \infty, & \text{kun } c \neq 0 \\ T(\infty) = \frac{a}{c}, & \text{kun } c \neq 0. \end{cases}$$

Möbius-muunnokset ovat kahden jatkuvan funktion osamääräfunktiona jatkuvia. Jos rajoitutaan tarkastelemaan vain sellaisia Möbius-muunnoksia, joille kertoimet  $a, b, c$  ja  $d$  ovat reaalisia ja joille pätee  $ad - bc > 0$ , löydetään joukko kuvauksia, jotka kuvaavat ylemmän puolitason ylemmäksi puolitasoksi:

LAUSE 1.36. *Möbius-muunnokselle*  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

jolle  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ja  $ad - bc > 0$ , pätee  $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ .

TODISTUS. [5, s.8] Laventamalla  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  kompleksiluvulla  $c\bar{z} + d$  ja käyttämällä kompleksilukujen ominaisuutta  $z\bar{z} = |z|^2$  saadaan

$$w = T(z) = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2}.$$

Luvun  $w$  imaginääriosaa on tällöin

$$\text{Im}(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} = \frac{(ad - bc)(z - \bar{z})}{2i|cz + d|^2} = \frac{(ad - bc)\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Oletuksen nojalla  $ad - bc > 0$  ja lisäksi  $|cz + d|^2 > 0$ . Koska  $z \in \mathbb{H}$ , niin  $\text{Im}(z) > 0$ . Näin ollen  $\text{Im}(w) > 0$  ja  $w \in \mathbb{H}$ . Tästä saadaan  $T(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ .

Osoitetaan sitten, että  $\mathbb{H} \subset T(\mathbb{H})$ . Möbius-muunnos  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  on jatkuva ja sillä on käänteiskuvaus

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

joka on jatkuva. Näin ollen kuvaus  $T$  on bijektio. Vastaavasti kuin yllä lauantamalla  $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$  luvulla  $-c\bar{z} + a$  ja käyttämällä tietoa  $z\bar{z} = |z|^2$  nähdään, että luvun  $w := T^{-1}(z)$  imaginääriosalle  $\text{Im}(w)$  pätee

$$\text{Im}(w) = \frac{(ad - bc)\text{Im}(z)}{|-cz + a|^2},$$

joten  $T^{-1}(z) \in \mathbb{H}$ . Tästä seuraa, että  $T \circ T^{-1}(z) = z \in T(\mathbb{H})$  ja edelleen, että  $\mathbb{H} \subset T(\mathbb{H})$ .  $\square$

**MÄÄRITELMÄ 1.37.** Olkoot  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  siten, että  $ad - bc > 0$ . Kuvausta  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kutsutaan ylempään puolitasoon Möbius-muunnokseksi. Ylempään puolitasoon Möbius-muunnosten joukkoa merkitään jatkossa  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

**ESIMERKKI 1.38.** Kuvaus  $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, H(z) = \frac{1}{z}$  on samaa muotoa kuin Möbius-muunnos, kun  $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$ . Kuvaus  $S$  ei kuitenkaan kuulu joukkoon  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , koska sille pätee  $ad - bc = -1 < 0$ .

Möbius-muunnosten toimintaa voidaan tarkastella joukon  $\mathbb{H}$  reunalla eli joukolla  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Möbius-muunnos  $T$ , jolle  $ad - bc \neq 0$  kuvaa joukon  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  itselleen bijektiivisesti: kaikille pisteille  $z \in \mathbb{R}, z \neq -\frac{d}{c}$ , kuvapiste  $T(z)$  kuuluu reaaliakselille (Möbius-muunnos toimii reaaliakselilla kuvaten reaaliluvun  $z$  osamääräksi  $\frac{az+b}{cz+d}$ , joka on reaaliluku tai ääretön) ja kuvauksella  $T$  on olemassa käänteiskuvaus  $T^{-1}$ ,

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Asetetaan  $T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ , joten  $T(-d/c) = \infty$ . Tutkitaan miten piste  $\infty$  kuvautuu kuvauksessa  $T$ . Kirjoitetaan  $T$  muodossa

$$T(z) = \frac{a + b/z}{c + d/z}.$$

Koska  $1/z \rightarrow 0$ , kun  $z \rightarrow \infty$ , niin  $T(\infty) = a/c$  (jos  $c = 0$ , niin  $a \neq 0$  ja  $d \neq 0$ , sillä  $ad - bc \neq 0$ ; voidaan siis määritellä luvut  $a/c$  ja  $-d/c$ , kun  $c = 0$  asettamalla  $a/0 = \infty$  ja  $-d/0 = \infty$ ). Siis  $T(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$ .

Seuraavaksi näytetään, kuinka Möbius-muunnoksia voidaan käsitellä matriisien avulla.

Ryhmä  $SL(2, \mathbb{R})$  koostuu reaalista  $2 \times 2$ -matriiseista

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

missä  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ja joille  $\det(A) = ad - bc = 1$ . Se on toisin sanoen joukko

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\},$$

jota kutsutaan *erityiseksi lineaariseksi ryhmäksi* (engl. *special linear group*). Sen toiminta joukolla  $\mathbb{H}$  on Möbius-muunnos: kuvauksen  $f : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Möb}(\mathbb{H})$ ,

$$f \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

avulla matriisia  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$  ja Möbius-muunnosta  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$(8) \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

jolle  $ad - bc = 1$ , voidaan pitää saman kuvauksen eri ilmaisutapoina.

Jos matriisin  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  determinantille pätee  $\det(A) \neq 1$ , niin jakamalla luvut  $a, b, c$  ja  $d$  luvulla  $\sqrt{ad - bc}$  saadaan voimaan haluttu determinanttiehto  $ad - bc = 1$ . Tällöin sanotaan, että matriisi ja sitä vastaava Möbius-muunnos on *normalisoitu*.

HUOMAUTUS 1.39.

- (1) Joukon  $SL(2, \mathbb{R})$  kaksi eri matriisia määrää saman Möbius-muunnoksen vain, jos ne koostuvat toistensa vastaluvuista: koska  $\det(A) = \det(-A)$ , niin matriisit  $A$  ja  $-A \in SL(2, \mathbb{R})$  määräävät saman Möbius-muunnoksen.
- (2) Joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnosten ryhmää  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  ja tekijäryhmää  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ , jota kutsutaan *projektiiviseksi erityiseksi lineaariseksi ryhmäksi* (engl. *projective special linear group*), voidaan pitää saman asian eri ilmaisutapoina.

HUOMAUTUS 1.40.  $PSL(2, \mathbb{R})$  on ryhmä, jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen. Ryhmän neutraalialkio on kuvaus  $z \mapsto z$ , jota vastaava matriisi on yksikkömatriisi.



TODISTUS. [10, s.172] Jos  $T_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$  ja  $T_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ , niin niiden yhdistetylle kuvaukselle pätee

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(z) &= \frac{a_2 \left( \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \right) + b_2}{c_2 \left( \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} \right) + d_2} \\ &= \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}, \end{aligned}$$

joka on Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{H}$ , sillä kertoimet ovat reaalisia ja

$$(a_2a_1 + b_2c_1)(c_2b_1 + d_2d_1) - (a_2b_1 + b_2d_1)(c_2a_1 + d_2c_1) = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) = 1.$$

Lisäksi tiedetään, että kuvausten yhdistäminen on assosiatiiivin. Jos  $T$  on Möbius-muunnos, niin sillä on käänteiskuvaus  $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$  ja sen neutraalialkio joukossa  $\mathbb{H}$  on kuvaus  $z \mapsto z$ , kun valitaan  $a = d = 1$  ja  $b = c = 0$ . Näin ollen  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  on ryhmä.  $\square$

Joukossa  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnoksia ovat muun muassa dilaatiot  $z \mapsto kz$  ( $k > 0$ ), translaatiot  $z \mapsto z + b$  ja inversiot  $z \mapsto -1/z$  [10, s. 172]:

ESIMERKKI 1.41. Olkoon  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Tällöin kuvaus  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$T(z) = \begin{cases} kz & \text{kun } a = k, b = c = 0, d = 1 \text{ ja } ad - bc > 0 \\ z + b & \text{kun } c = 0, b = b, a = d = 1 \text{ ja } ad - bc = 1 > 0 \\ -1/z & \text{kun } a = d = 0, b = -1, c = 1 \text{ ja } ad - bc = 1 > 0 \end{cases}$$

määrittelee joitakin joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnoksia.

Kaikki Möbius-muunnokset saadaan yhdistettynä kuvauksena *alkeismöbius-muunnoksista*, joita ovat:

- *siirto* eli kuvaus  $T(z) = z + b, b \in \mathbb{R}$
- *kierto* kulman  $\theta$  verran eli kuvaus  $T(z) = az = e^{i\theta}z$ , jolle  $|a| = 1$  ja  $-\pi < \theta \leq \pi$
- *dilaatio* (eli kutistus tai venytys) eli kuvaus  $T(z) = az$ , jolle  $a > 0, a \in \mathbb{R}$
- *inversio* (yksikköympyrän  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  suhteen) eli kuvaus  $T(z) = \frac{1}{z}$ .

LAUSE 1.42. Jokainen Möbius-muunnos saadaan yhdistettynä kuvauksena *siirroista, kierroista, dilaatioista ja inversioista*.

TODISTUS. Tutkitaan Möbius-muunnosta  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Jos  $c = 0$ , niin kuvaus

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

on yhdistetty kuvaus dilaatiosta ja siirrosta. Oletetaan, että  $c \neq 0$ . Määritellään

$$\begin{aligned} T_1(z) &= z + \frac{d}{c} \\ T_2(z) &= \frac{1}{z} \\ T_3(z) &= \frac{ad - bc}{-c^2} z \\ T_4(z) &= z + \frac{a}{c}, \end{aligned}$$

jolloin alkeismöbius-muunnosten yhdistetty kuvaus  $T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$  on Möbius-muunnos:

$$T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

□

HUOMAUTUS 1.43. Mikä tahansa Möbius-muunnos saadaan yhdistettynä kuvauksena muunnoksista

$$T(z) = az + b$$

ja

$$S(z) = \frac{1}{z},$$

valitsemalla luvut  $a$  ja  $b$  sopivasti ja määrittelemällä  $T(\infty) = \infty$ ,  $S(0) = \infty$  ja  $S(\infty) = 0$ .

MÄÄRITELMÄ 1.44. Ryhmä  $G$  toimii joukolla  $X$ , jos on olemassa homomorfismi ryhmältä  $G$  joukon  $X$  bijektioiden muodostamalle ryhmälle. Toisin sanoen ryhmä  $G$  toimii joukolla  $X$ , jos jokaista ryhmän  $G$  alkiota  $g$  vastaa jokin joukon  $X$  bijektio ja lisäksi ryhmän  $G$  laskutoimitus vastaa joukon  $X$  bijektioiden yhdistämistä.

LAUSE 1.45. Ryhmä  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  toimii joukolla  $\mathbb{H}$ .

TODISTUS. Joukolla  $\mathbb{H}$  määritelty kuvaus  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (kun  $ad - bc = 1$ ), joka vastaa ryhmän  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  matriisia  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , on bijektio, sillä lauseen 1.36 nojalla  $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ , kuvaus  $T$  on jatkuvien kuvausten osamääräfunktiona jatkuva ja käänteiskuvaus

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

on myös jatkuva. Ryhmän  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  laskutoimitus on matriisien kertolasku ja joukolla  $\mathbb{H}$  laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen.

Nähdään, että ryhmä  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  toimii joukolla  $\mathbb{H}$  homomorfishisesti, missä homomorfishismina on kuvaus  $f : \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Möb}(\mathbb{H})$ ,

$$\begin{aligned} f \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) &= \frac{az+b}{cz+d}, \text{ sillä} \\ f \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) &= f \left( \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \right) = \frac{(ae+bg)z + (af+bh)}{(ce+dg)z + (cf+dh)} \\ &= T_1(z) \circ T_2(z) \\ &= f \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \circ f \left( \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

kun  $T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ja  $T_2(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ . □

Möbius-muunnokset ovat keskeisessä osassa, kun tutkitaan joukkoon  $\mathbb{H}$  kuuluvia osia sellaisista yleistetyistä ympyröistä, joiden kertoimet ovat reaalisia. Tutkitaan seuraavaksi näiden kuvautumista Möbius-muunnoksessa. Muistetaan tätä varten yksi kompleksianalyysin keskeisistä Möbius-muunnosta koskevista tuloksista: Möbius-muunnos kuvaa suorat ja ympyrät suoriksi ja ympyröiksi (Ks. [6]).

**LAUSE 1.46.** *Olkoon  $L \in \mathbb{C}$  joko (i) reaaliakselia vastaan kohtisuora puoliympyrä tai (ii) pystysuora suora. Olkoon  $T \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . Tällöin  $T(L)$  on reaaliakselia vastaan kohtisuora puoliympyrä tai pystysuora suora.*

**TODISTUS.** Tiedetään, että Möbius-muunnos  $T$  kuvaa joukon  $\mathbb{H}$  itselleen bijektii-visesti, joten riittää osoittaa, että  $T$  kuvaa kompleksitason  $\mathbb{C}$  pystysuorat suorat ja ympyrät (joilla on reaalinen keskipiste) pystysuoriksi suoriksi ja ympyröiksi (joilla on reaalinen keskipiste) [10, s. 20].

Pystysuora suoran tai ympyrän, jonka keskipiste on reaaliakselilla, yhtälö on muotoa

$$(9) \quad \alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0,$$

missä  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  ja  $\beta \in \mathbb{C}$ . Olkoon

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

jolloin

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Sijoittamalla saatu  $z$  yhtälöön (9) saadaan (muistetaan, että reaaliluvulle  $\beta$  pätee  $\bar{\beta} = \beta$ )

$$\alpha \left( \frac{dw - b}{-cw + a} \right) \left( \frac{d\bar{w} - b}{-c\bar{w} + a} \right) + \beta \left( \frac{dw - b}{-cw + a} \right) + \beta \left( \frac{d\bar{w} - b}{-c\bar{w} + a} \right) + \gamma = 0,$$

joka sievennettynä antaa

$$\begin{aligned} &(\alpha d^2 - 2\beta cd + \gamma c^2)w\bar{w} + (-\alpha bd + \beta ad + \beta bc - \gamma ac)w + \\ &(-\alpha bd + \beta ad + \beta bc - \gamma ac)\bar{w} + (\alpha b^2 - 2\beta ab + \gamma a^2) = 0. \end{aligned}$$

Saatu yhtälö on muotoa (9), joten  $T(L)$  on joko reaaliakselia vastaan kohtisuora suora ympyrä tai pystysuora suora.  $\square$

### 1.5. Isometriat ja geodeesit

Tässä luvussa on tarkoituksena löytää joukon  $\mathbb{H}$  käyrä, jota pitkin mitattuna kahden ylemmän puolitason pisteen etäisyys on lyhin. *Geodeesi* on hyperbolisen metriikan mielessä lyhin käyrä, joka yhdistää pisteitä  $z$  ja  $w$  joukossa  $\mathbb{H}$ . Lauseessa 1.57 osoitetaan, että geodeesit eli hyperboliset suorat joukossa  $\mathbb{H}$  ovat reaaliakselia vastaan kohtisuoria puolisuoria ja puoliympyröitä. Tätä varten esitellään ensin uusi käsite *isometrisyys*, joka on tärkeä Möbius-muunnosten ominaisuus ja todistetaan, että imaginääriakseli on geodeesi.

**MÄÄRITELMÄ 1.47.** Kuvaus on *isometria* (tai *isometrinen*) joukossa  $\mathbb{H}$ , jos se säilyttää hyperbolisen etäisyyden joukossa  $\mathbb{H}$ .

Kaikkien ylemmän hyperbolisen puolitason isometrioiden joukko muodostaa ryhmän, merkitään sitä jatkossa  $\text{Isom}(\mathbb{H})$ .

Seuraava tärkeä tulos sanoo, että joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos säilyttää hyperbolisen etäisyyden  $\rho$  kahden pisteen välillä. Toisin sanoen Möbius-muunnos on isometrisen kuvaus.

**LAUSE 1.48.** Olkoot  $T$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos ja  $z, z' \in \mathbb{H}$ . Tällöin

$$\rho(T(z), T(z')) = \rho(z, z').$$

**TODISTUS.** [10, s.21-22] Olkoon  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  pisteet  $z$  ja  $z'$  yhdistävä polku, jolloin  $T \circ \sigma$  on eräs polku pisteestä  $T(z)$  pisteeseen  $T(z')$ . Väitteen osoittamiseksi riittää näyttää, että polut  $\sigma$  ja  $T \circ \sigma$  ovat yhtä pitkät.

Kun  $z \in \mathbb{H}$ , niin

$$|T'(z)| = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}$$

ja

$$\operatorname{Im}(T(z)) = \frac{(ad - bc)}{|cz + d|^2} \operatorname{Im}(z).$$

Ketjusääntöä käyttämällä nähdään, että

$$\begin{aligned} h(T \circ \sigma) &= \int_{T \circ \sigma} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \\ &= \int_0^1 \frac{|(T \circ \sigma)'(t)|}{\operatorname{Im}(T \circ \sigma)(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|T'(\sigma(t))| |\sigma'(t)|}{\operatorname{Im}(T \circ \sigma)(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{ad - bc}{|c\sigma(t) + d|^2} |\sigma'(t)| \frac{|c\sigma(t) + d|^2}{ad - bc} \frac{1}{\operatorname{Im}(\sigma(t))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|\sigma'(t)|}{\operatorname{Im}(\sigma(t))} dt \\ &= h(\sigma). \end{aligned}$$

□

**HUOMAUTUS 1.49.** Kaikki joukon  $\mathbb{H}$  isometriat ovat joko normaalimuotoisia Möbius-muunnoksia tai kuvauksia, jotka ovat yhdistettyjä kuvauksia normaalimuotoisesta Möbius-muunnoksesta ja kuvauksesta  $z \mapsto -\bar{z}$ . Joukon  $\mathbb{H}$  isometria on siis joko muotoa [5, s. 11-12]

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1$$

tai

$$S(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, ad - bc = -1.$$

**ESIMERKKI 1.50.** [10, s. 175-176] Tutkitaan seuraavaksi, miksi määritelmässä 1.25 esitetty polun hyperbolinen pituus  $h(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$  määriteltiin funktion  $z \mapsto \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$  avulla. Periaatteessa polun pituus voitaisiin määritellä myös jonkin muun positiivisen funktion avulla, mutta tällöin polun pituuden avulla määritelty pisteiden etäisyys ja geometria voisi olla hyvin monimutkaista ja isometrisiä kuvauksia voisi olla hyvin vähän. Sen vuoksi näytetään, että polun  $\gamma$  hyperbolinen pituus  $h(\gamma)$  on määriteltävä funktion  $z \mapsto \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$  avulla, jotta kaikki joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnokset ovat isometrioita.

Olkoon  $\rho : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva epänegatiivinen funktio. Osoitetaan, että  $\rho(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)}$ . Määritellään paloittain differentioituvan polun  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$   $\rho$ -pituus asettamalla

$$h_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho = \int_0^1 \rho(\gamma(t)) |\rho'(t)| dt.$$

Oletetaan, että  $\rho$ -pituus on muuttumaton joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnoksessa  $T$  eli  $h_\rho(T \circ \gamma) = h_\rho(\gamma)$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt &= h_\rho(\gamma) \\ &= h_\rho(T \circ \gamma) \\ &= \int_0^1 \rho(T(\gamma(t))) |(T \circ \gamma)'| dt \\ &= \int_0^1 \rho(T(\gamma(t))) |T'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

Saadaan

$$\int_0^1 (\rho(T(\gamma(t))) |T'(\gamma(t))| |\gamma'(t)| - \rho(\gamma(t)) |\gamma'(t)|) dt = 0.$$

Koska valittiin mielivaltainen polku  $\gamma$  ja mielivaltainen Möbius-muunnos  $T$ , on yllä oleva integraali nolla kaikilla poluilla  $\gamma$  ja kaikilla Möbius-muunnoksilla  $T$ . Näin ollen

$$\rho(T(z)) |T'(z)| - \rho(z) = 0$$

eli

$$\rho(T(z)) |T'(z)| = \rho(z),$$

kun merkitään  $\gamma(t) = z$ . Jos nyt  $T(z) = z + b$ , niin  $|T'(z)| = 1$  ja siten  $\rho(z + b) = \rho(z)$  kaikilla  $b \in \mathbb{R}$ . Näin ollen funktio  $\rho(z)$  riippuu vain pisteen  $z = x + iy$  imaginääriosasta eli kuvaus  $\rho$  on muuttujan  $y$  funktio  $\rho(y)$ . Olkoon sitten  $T(z) = kz$ , jolloin  $|T'(z)| = k$  ja  $k\rho(ky) = \rho(y)$ . Sijoittamalla  $y = 1$  ja valitsemalla  $c = \rho(1)$  nähdään, että

$$\rho(k) = \frac{\rho(1)}{k} = \frac{c}{k}.$$

Näin ollen

$$\rho(z) = \frac{c}{\text{Im}(z)}.$$

Normalisoimalla vakio  $c$  nähdään, että funktio  $\rho$  on pisteen  $z$  imaginääriosan  $y$  funktio  $\rho := \rho(y)$ . Siispä polun  $\gamma$  hyperbolinen pituus  $h(\gamma)$  on määriteltävä funktiona  $z \mapsto \frac{1}{\text{Im}(z)}$ , jotta kaikki joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnokset ovat isometrioita.

**HUOMAUTUS 1.51.** Hyperbolisen geometrian puolitasomalli on nyt siis valmis, kun on löydetty kuvaus (normaalimuotoinen Möbius-muunnos), joka säilyttää joukon  $\mathbb{H}$  pisteiden väliset hyperboliset etäisyydet.

Isometrisyyden avulla voidaan osoittaa, että geodeesit eli hyperboliset suorat ovat lyhimpiä käyriä joukossa  $\mathbb{H}$ , jotka yhdistävät kaksi pistettä. Tätä varten näytetään aluksi, että imaginääriakseli on geodeesi ja osoitetaan, että pystysuoralta suoralta valittujen mielivaltaisten pisteiden välinen lyhin etäisyys on reaaliluku. Näytetään sitten, että on olemassa Möbius-muunnos, jonka avulla joukossa  $\mathbb{H}$  oleva reaalikertoimisen yleistetyn ympyrän osa voidaan kuvata imaginääriakseliksi. Tämän perusteella geodeesit ovat reaaliakselia vastaan kohtisuoria puoliympyröitä ja pystysuoria suoria, joiden toinen päätepiste on reaaliakselilla.

LAUSE 1.52. *Olkoon  $a \leq b$ . Tällöin pisteiden  $ia$  ja  $ib$  välinen hyperbolinen etäisyys on  $\ln \frac{b}{a}$ . Lisäksi pisteitä  $ia$  ja  $ib$  yhdistävä pystysuora suora on ainoa niitä yhdistävä käyrä, jonka pituus on  $\ln \frac{b}{a}$ , toisin sanoen minkä tahansa muun pisteitä  $ia$  ja  $ib$  yhdistävän polun pituus on suurempi kuin  $\ln \frac{b}{a}$ .*

TODISTUS. [10, s.22-23] Olkoon  $\sigma(t) = it$ ,  $a \leq t \leq b$ . Tällöin  $\sigma$  on polku pisteestä  $ia$  pisteeseen  $ib$ . Koska  $\|\sigma'(t)\| = 1$ , niin

$$h(\sigma) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

Olkoon nyt  $\gamma = x + iy : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  eräs polku pisteestä  $ia$  pisteeseen  $ib$  ja näytetään, että polun  $\gamma$  pituus on vähintään  $\ln \frac{b}{a}$ :

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \\ &= \ln y(1) - \ln y(0) \\ &= \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Näin ollen pisteet  $ia$  ja  $ib$  yhdistävien polkujen pituus on vähintään  $\ln \frac{b}{a}$ . Yhtäsuuruus on voimassa, kun  $x'(t) = 0$ . Tällöin  $x(t)$  on vakio, toisin sanoen  $\gamma$  on pystysuora suora, joka yhdistää pisteet  $ia$  ja  $ib$ .  $\square$

LAUSE 1.53. *Olkoon  $H$  joukossa  $\mathbb{H}$  oleva reaalikertoimisen yleistetyn ympyrän osa. Tällöin on olemassa bijektiivinen kuvaus  $T \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että käyrä  $H$  kuvautuu imaginääriakseliksi.*

TODISTUS. [10, s.23] Jos  $H$  on pystysuora  $\operatorname{Re}(z) = a$ , niin translaatio  $z \mapsto z - a$  on Möbius-muunnos joukolla  $\mathbb{H}$ , joka kuvaa käyrän  $H$  suoraksi  $\operatorname{Re}(z) = 0$  eli imaginääriakseliksi.

Olkoon sitten  $H$  puoliympyrä, jonka päätepisteet ovat  $w_1$  ja  $w_2 \in \mathbb{R}$  siten, että  $w_1 < w_2$ . Kuvaus

$$T(z) = \frac{z - w_2}{z - w_1}$$

on Möbius-muunnos, kun  $-w_1 + w_2 > 0$  ja se toimii joukolla  $\mathbb{H}$ . Lauseen 1.46 perusteella  $T(H)$  on joukossa  $\mathbb{H}$  oleva reaalikertoimisen yleistetyn ympyrän osa. Selvästi  $T(w_2) = 0$  ja  $T(w_1) = \infty$ , joten kuvajoukon  $T(H)$  täytyy olla imaginääriakseli.  $\square$

Tutkitaan vielä esimerkkien avulla kuinka joukossa  $\mathbb{H}$  olevat reaalikertoimisten yleistettyjen ympyröiden osat käyttäytyvät Möbius-muunnoksessa:

ESIMERKKI 1.54. [10, s.23] Olkoon  $H_1, H_2$  joukossa  $\mathbb{H}$  olevia reaalikertoimisten yleistettyjen ympyröiden osia eli leikkausjoukkoja  $H_j = Y_j \cap \mathbb{H}$ , missä  $Y_j$  on yleistetty ympyrä ja  $j=1,2$ . Tällöin on olemassa kuvaus  $T \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että  $T(H_1) = H_2$ . Kuvaus  $T$  löydetään lauseen 1.53 avulla: on olemassa kuvaus  $T_1 \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että  $T_1(H_1)$  on imaginääriakseli. Vastaavasti on olemassa kuvaus  $T_2 \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että  $T_2(H_2)$  on imaginääriakseli. Näin ollen  $T_2^{-1}$  kuvaa imaginääriakselin käyräksi  $H_2$ , joten yhdistetty kuvaus  $T := T_2^{-1} \circ T_1$  on etsitty joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos, jolle  $T(H_1) = H_2$ .

ESIMERKKI 1.55. [10, s.24] Olkoon  $H$  joukossa  $\mathbb{H}$  oleva reaalikertoimisen yleistetyn ympyrän osa eli leikkaus  $Y \cap \mathbb{H}$ , missä  $Y$  on yleistetty ympyrä, ja  $z_0 \in H$ . Tällöin on olemassa kuvaus  $T \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ , joka kuvaa käyrän  $H$  imaginääriakseliksi ja pisteen  $z_0$  pisteeksi  $i$ . Lauseen 1.53 todistuksen perusteella löydetään nimittäin Möbius-muunnos  $T_1$ , joka kuvaa joukossa  $\mathbb{H}$  olevan käyrän  $H$  imaginääriakseliksi (kaksi eri tapausta: (i)  $H$  on pystysuora suora tai (ii)  $H$  on reaaliakselia kohtisuorassa oleva puoliympyrä. Tapauksessa (i) valitaan  $T$  translaatioksi ja tapauksessa (ii) oletetaan, että käyrän  $H$  päätepisteet ovat  $w_1 < w_2$  ja valitaan  $T(z) = \frac{z-w}{z-w}$ ). Nyt  $T_1(z_0)$  kuuluu imaginääriakselille. Mille tahansa  $k > 0$  Möbius-muunnos

$$T_2(z) = kz$$

kuvaa imaginääriakselin imaginääriakseliksi, joten jollekin  $k > 0$

$$T_2(T_1(z_0)) = i.$$

Näin ollen yhdistetty kuvaus  $T := T_2 \circ T_1$  on etsitty Möbius-muunnos.



ESIMERKKI 1.56. [10, s.174] Olkoot  $H_1, H_2$  joukossa  $\mathbb{H}$  olevia reaalikertoimisen yleistetyn ympyrän osia eli leikkausjoukkoja  $H_j = Y_j \cap \mathbb{H}$ , missä  $Y_j$  on yleistetty ympyrä ja  $j=1,2$ . Olkoot pisteet  $z_1 \in H_1, z_2 \in H_2$ . Tällöin on olemassa Möbius-muunnos  $T \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , jolle  $T(H_1) = H_2$  ja  $T(z_1) = z_2$ . Tämä löydetään lemmän 1.55 avulla: on olemassa joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos  $T_1$ , joka kuvaa käyrän  $H_1$  imaginääriakseliksi ja pisteen  $z_1$  pisteeksi  $i$  ja joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos  $T_2$ , joka kuvaa käyrän  $H_2$  imaginääriakseliksi ja pisteen  $z_2$  pisteeksi  $i$ . Näin ollen  $T := T_2^{-1} \circ T_1$  on etsitty joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos, jolle  $T(H_1) = H_2$  ja  $T(z_1) = (z_2)$ .

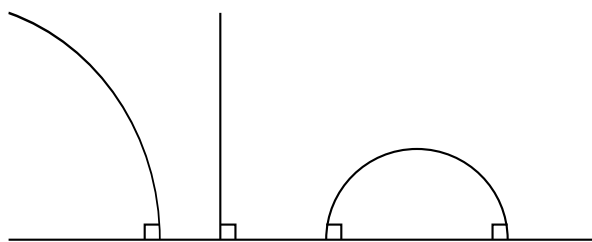
Nyt voidaan osoittaa, että geodeesit eli suorat joukossa  $\mathbb{H}$  ovat reaaliakselia vastaan kohtisuoria suorja ja puoliympyröitä. Näytetään samalla, että kaksi pistettä  $z, z' \in \mathbb{H}$  yhdistävä geodeesi on yksikäsitteinen.

LAUSE 1.57. *Geodeesit joukossa  $\mathbb{H}$  ovat reaaliakselia vastaan kohtisuorassa olevia suorja ja puoliympyröitä. Pisteiden  $z$  ja  $z'$  kautta kulkeva geodeesi on yksikäsitteinen.*

TODISTUS. [10, s.25] Olkoon  $z, z' \in \mathbb{H}$ , jolloin löydetään reaalikertoimisen yleistetyn ympyrän osa  $H \in \mathbb{H}$ , jolle molemmat pisteet  $z$  ja  $z'$  kuuluvat. Lauseen 1.53 perusteella on olemassa Möbius-muunnos  $T$  siten, että pisteet  $T(z)$  ja  $T(z')$  kuuluvat imaginääriakselille. Lisäksi pisteiden  $T(z)$  ja  $T(z')$  välinen etäisyys on lyhin mitattuna pitkin imaginääriakselia. Hyperbolinen etäisyys ja yleistetyt ympyrät säilyvät Möbius-muunnoksissa, joten geodeesien täytyy olla reaaliakselia vastaan kohtisuoria suorja tai puoliympyröitä. Lauseen 1.52 perusteella imaginääriakseli on ainoa pisteiden  $T(z)$  ja  $T(z')$  kautta kulkeva geodeesi. Näin ollen käänteiskuvaus  $T^{-1}$  kuvaa imaginääriakselin pisteiden  $z$  ja  $z'$  kautta kulkevaksi yksikäsitteiseksi geodeesiksi.  $\square$

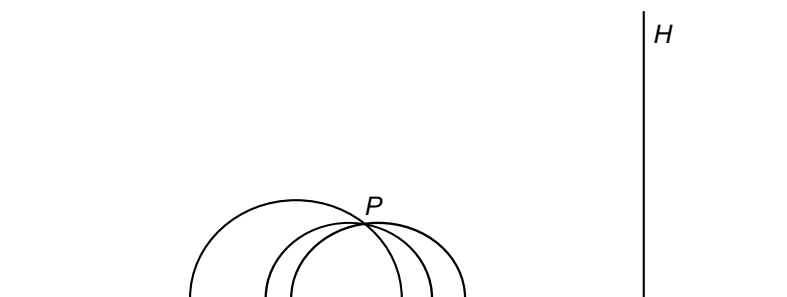
On siis osoitettu, että kaksi ylemmän puolitason pistettä  $z$  ja  $w$  voidaan yhdistää geodeesilla  $H_0$ , jota pitkin mitattuna niiden välinen etäisyys on lyhin. Edellä esitellyjen tulosten perusteella löydetään nimittäin Möbius-muunnos  $T$ , jolla geodeesi  $H_0$  ja pisteet  $z, w \in \mathbb{H}$  voidaan kuvata imaginääriakselille siten, että pisteiden  $z$  ja  $w$  kuvapisteen ovat  $ia$  ja  $ib$ . Lauseen 1.52 perusteella imaginääriakselin osa on pisteitä  $ia$  ja  $ib$  yhdistävä lyhin mahdollinen käyrä ja sen pituus on reaaliluku  $\log \frac{b}{a}$ . Tällöin geodeesia  $H_0$  pitkin mitattuna myös pisteiden  $z, w \in \mathbb{H}$  välinen etäisyys on lyhin, koska Möbius-muunnos  $T^{-1}$  säilyttää etäisyydet isometrisenä kuvauksena.

Geodeesien ominaisuuksien perusteella ylemmän puolitason  $\mathbb{H}$  geometria ei ole euklidista, sillä paralleeliaksioma ei päde joukossa  $\mathbb{H}$ . Mitkä tahansa kaksi pistettä  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  voidaan yhdistää yksikäsitteisellä geodeesilla  $L$  ja näiden pisteiden etäisyys mitataan pitkin kyseistä geodeesia. Pisteiden  $z_3 \in \mathbb{H}, z_3 \notin L$  kautta kulkee kuitenkin



KUVA 1.5. Geodeesit ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H}$  ovat puoliympyröitä tai pystysuoria puolisuoria, jotka ovat kohtisuorassa reaaliakselia vastaan.

useita geodeeseja, jotka eivät leikkaa geodeesia  $L$ . Näin ollen paralleeliaksioma ei ole voimassa hyperbolisessa geometriassa ja hyperbolinen geometria on siten epäeuklidista.



KUVA 1.6. Pisteestä  $P$  kulkee äärettömän monta geodeesia, jotka eivät leikkaa geodeesia  $H$ .

HUOMAUTUS 1.58. Geodeesien päätepisteet ovat joukossa  $\partial\mathbb{H}$ , joiden avulla ne voidaan määrittää yksikäsitteisesti: reaaliakselia vastaan kohtisuorien puoliympyröiden molemmat päätepisteet ovat reaaliakselilla, kun taas reaaliakselia vastaan kohtisuorien suorien päätepisteistä toinen on reaaliakselilla ja toinen on äärettömyyspiste  $\infty$ .

ESIMERKKI 1.59. [10, s.174]

- (1) Pisteet  $-3 + 4i$  ja  $-3 + 5i$  yhdistävä geodeesi on pystysuora suora. Suoran yhtälö on  $z + \bar{z} + 6 = 0$ .
- (2) Pisteet  $-3 + 4i$  ja  $3 + 4i$  ovat joukon  $\mathbb{C}$  ympyrällä, jonka keskipiste on 0 ja säde on 5. Pisteitä yhdistävä geodeesi on ympyrän  $z\bar{z} - 5^2 = 0$  kaaren osa.
- (3) Pisteiden  $-3 + 4i$  ja  $5 + 12i$  kautta kulkeva geodeesi ei ole pystysuora, joten sen yhtälö on muotoa

$$z\bar{z} + \beta z + \beta\bar{z} + \gamma = 0.$$

Sijoittamalla  $z_1 = -3 + 4i$  ja  $z_2 = 5 + 12i$  saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} 25 - 6\beta + \gamma &= 0 \\ 169 + 10\beta + \gamma &= 0, \end{aligned}$$

jonka ratkaisut ovat  $\beta = -9$  ja  $\gamma = -79$ . Siispä haettu geodeesi on

$$z\bar{z} - 9z - 9\bar{z} - 79 = 0.$$

### 1.6. Hyperbolinen metriikka ja geodeesit Poincarén kiekossa $\mathbb{D}$

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti toista hyperbolisen geometrian mallia, Poincarén kiekkoa. Se on kätevä malli hyperboliselle geometrialle, sillä kiekkomallia käyttämällä koko hyperbolinen taso on mahdollista hahmottaa piirtämällä. Puolitasomallin yksi heikkous on, että sen reuna  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  muodostuu kahdesta eri osasta, joista pistettä  $\infty$  ei voi hahmottaa piirtämällä. Kiekkomallissa tällaista ongelmaa ei ole.

Yksi tapa konstruoida hyperbolista geometriaa on tutkia kompleksitason avointa yksikkökiekkoa

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

jota kutsutaan *Poincarén kiekoksi*. Sen reuna  $\partial\mathbb{D}$  on yksikköympyrä eli reunan muodostaa pistejoukko

$$\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Joukkoon  $\mathbb{D}$  saadaan määriteltyä metriikka hyperbolisen puolitason  $\mathbb{H}$  metriikan ja bijektion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ ,

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}$$

avulla. Huomataan, että

$$f(\infty) = i, f(0) = -i, f(1) = 1,$$

joten Möbius-muunnos  $f$  kuvaa joukon  $\partial\mathbb{H}$  yksikköympyräksi  $\partial\mathbb{D}$  Möbius-muunnosten kuvausominaisuuksien perusteella (ks. [6]). Koska lisäksi  $f(i) = 0$ , niin joukko  $\mathbb{H}$  ja sen reuna kuvautuvat yksikkökiekoksi (työn alussa esiteltiin stereografinen projektio  $\pi$ , joka kuvasi yksikköympyrän joukoksi  $\partial\mathbb{H}$ , joten funktion  $f$  rajoittuma joukkoon  $\partial\mathbb{H}$   $f|_{\partial\mathbb{H}}$  kuvaa kuten stereografinen projektio, mutta joukolta  $\partial\mathbb{H}$  yksikköympyrälle).

Yksikkökiekkoon saadaan määriteltyä metriikka siirtämällä ylemmän puolitason  $\mathbb{H}$  metriikka yksikkökiekolle  $\mathbb{D}$  funktiota  $f$  käyttämällä. Tällöin kahden pisteen etäisyys joukossa  $\mathbb{D}$  on niiden alkukuvien etäisyys joukossa  $\mathbb{H}$ :

MÄÄRITELMÄ 1.60. Pisteiden  $z, w \in \mathbb{D}$  välinen hyperbolinen etäisyys  $\rho^*$  Poincarén kiekossa on

$$\rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)).$$

HUOMAUTUS 1.61. (1) Funktiolle  $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$  ja pisteelle  $z \in \mathbb{D}$  pätee

$$\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}.$$

(2) Metriikan Poincarén kiekkomallissa antaa differentiaali [4, s.7]

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

TODISTUS. (1) Suoralla laskulla ja derivoinnilla saadaan

$$\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = 2 \left| \frac{-2}{(z+i)^2} \right| \frac{1}{1-\left|\frac{zi+1}{z+i}\right|^2} = \frac{4}{|z+i|^2 - |zi+1|^2}.$$

Sijoittamalla  $z = x + iy$  saadaan

$$\begin{aligned} \frac{4}{|z+i|^2 - |zi+1|^2} &= \frac{4}{x^2 + (y+1)^2 - ((-y+1)^2 + x^2)} \\ &= \frac{4}{x^2 + y^2 + 2y + 1 - (y^2 - 2y + 1 + x^2)} = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

(2) Kohdan 1 nojalla  $\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ . Merkitsemällä  $w = f(z)$  saadaan

$$\frac{1}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{2 \left| \frac{dw}{dz} \right|}{1-|w|^2}.$$

Tällöin

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{\operatorname{Im}(z)} = \left| \frac{dz}{dt} \right| \frac{2 \left| \frac{dw}{dz} \right|}{1-|w|^2} = \frac{\left| \frac{dw}{dt} \right|}{1-|w|^2}$$

Metriikka saadaan siten siirrettyä ylemmästä puolitasosta yksikkökiekkoon kuvauksen  $f$  avulla. □

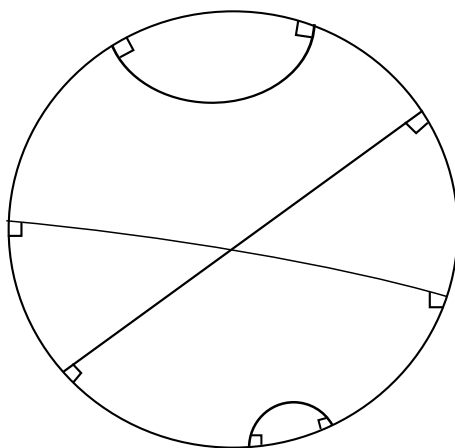
Tutkitaan edelleen kuvausta  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ . Määritetään pisteiden  $z = f(u), w = f(v) \in \mathbb{D}$  hyperbolinen etäisyys yksikkökiekossa. Oletetaan, että polku  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  yhdistää pisteitä  $u$  ja  $v$  joukossa  $\mathbb{H}$ , jolloin polku  $f \circ \gamma$  yhdistää pisteitä  $z$  ja  $w$  joukossa  $\mathbb{D}$ . Huomautuksen 1.61 kohdan (1) nojalla  $\frac{1}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}$ , joten

pisteiden  $z$  ja  $w$  väliseksi etäisyydeksi saadaan

$$\begin{aligned} \rho^*(z, w) &= \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) \\ &= \inf \left\{ \int_{\gamma} \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_{f(\gamma)} \frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \right\} \end{aligned}$$

LAUSE 1.62. *Geodeesit Poincarén kiekossa ovat kiekon  $\mathbb{D}$  halkaisijoita ja ympyrän kaaren osia, jotka ovat reunaa  $\partial\mathbb{D}$  vastaan kohtisuorassa.*

TODISTUS. Luvun alussa esitelty kuvaus  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$  on Möbius-muunnos. Yksi kompleksianalyysin keskeisistä Möbius-muunnosta koskevista tuloksista on, että Möbius-muunnos kuvaa suorat ja ympyrät suoriksi ja ympyröiksi (Ks. [6]). Kun muistetaan, että joukossa  $\mathbb{C}$  ympyrät ja suorat karakterisoidaan lauseen 1.34 mukaisesti yhtälön  $\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$  ratkaisuina ja tutkitaan joukon  $\mathbb{C}$  ympyröiden ja suorien kuvautumista kuvauksessa  $f$  huomataan, että ne kuvautuvat joukon  $\mathbb{C}$  ympyröiksi ja suoriksi. Lisäksi  $\partial\mathbb{H}$  kuvautuu joukoksi  $\partial\mathbb{D}$ . Näin ollen, koska joukon  $\mathbb{H}$  geodeesit ovat pystysuoria suoria ja ympyrän kaaren osia, jotka ovat kohtisuorassa reaaliakselia vastaan ja kuvaus  $f$  on Möbius-muunnos, geodeesin kuva kuvauksessa  $f$  on ympyrän kaaren osa tai ympyrän halkaisija, joka on kohtisuorassa reunaa  $\partial\mathbb{D}$  vastaan. □



KUVA 1.7. Geodeeseja yksikkökiekossa  $\mathbb{D}$ .

HUOMAUTUS 1.63. Olkoon  $T$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos. Joukon  $\mathbb{H}$  isometrinen kuvaus  $T$  voidaan siirtää joukon  $\mathbb{D}$  isometriaksi kuvausta  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}, f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$

käyttämällä. Poincarén kiekossa kuvaus  $f \circ T \circ f^{-1}$  on isometria, mikä nähdään tarkastelemalla pisteiden  $u, v \in \mathbb{D}$  kuvapisteiden etäisyyttä kuvauksessa  $f \circ T \circ f^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \rho^*(f \circ T \circ f^{-1}(u), f \circ T \circ f^{-1}(v)) &= \rho(T \circ f^{-1}(u), T \circ f^{-1}(v)) \\ &= \rho(f^{-1}(u), f^{-1}(v)) \\ &= \rho^*(u, v), \end{aligned}$$

missä  $\rho$  on pisteiden etäisyys joukossa  $\mathbb{H}$  ja  $\rho^*$  vastaavasti pisteiden etäisyys joukossa  $\mathbb{D}$ . Kuvaus  $f \circ T \circ f^{-1}$  on muotoa  $z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$ .

Seuraavaa lausetta ei tässä työssä todisteta. Se antaa kaavan Möbius-muunnokselle Poincarén kiekossa.

LAUSE 1.64. *Möbius-muunnokselle  $T : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  pätee  $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ , jos ja vain jos*

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}},$$

missä  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$ .

ESIMERKKI 1.65. [10, s. 37] Yksi esimerkki Möbius-muunnoksesta Poincarén kiekossa on kierto. Olkoon  $\alpha = e^{i\theta/2}$  ja  $\beta = 0$ , jolloin  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 > 0$ . Kuvaus

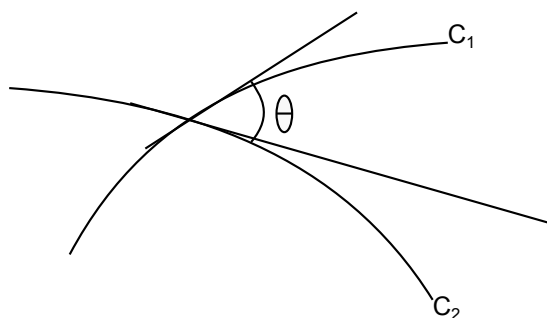
$$T(z) = \frac{e^{i\theta/2}z}{e^{-i\theta/2}} = e^{i\theta}z$$

on tällöin Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{D}$ , jossa se toimii kiertäen kiekkoa origon ympäri kulman  $\theta$  verran.

## 1.7. Konformisuus

Möbius-muunnoksilla on merkittävä ominaisuus, joka liittyy kulmien kuvautumiseen. Kulma määritellään joukossa  $\mathbb{C}$  tutkimalla kahden käyrän tangentteja: olkoon  $C_1$  ja  $C_2$  käyriä joukossa  $\mathbb{C}$ , jotka leikkaavat pisteessä  $z_0$ . *Käyrien  $C_1$  ja  $C_2$  välinen kulma pisteessä  $z_0$*  määritellään niiden tangenttien välisenä kulmana pisteessä  $z_0$ .

Möbius-muunnosten geometriaa tutkimalla osoittautuu, että Möbius-muunnoksessa kulman suuruus säilyy. Homeomorfista kuvausta, joka säilyttää kulmien suuruudet kutsutaan *konformikuvaukseksi*. Ennen Möbius-muunnoksen konformisuusominaisuuden käsittelyä tutkitaan ylempään puolitasoon  $\mathbb{H}$  tangentiavaruutta ja kulman määrittelyn samankaltaisuutta euklidisessa geometriassa ja hyperbolisen geometrian puolitasomallissa. Kompleksianalyysistä tutun tuloksen avulla voidaan lopulta osoittaa Möbius-muunnoksen konformisuus.



KUVA 1.8. Käyrien välinen kulma niiden leikkauspisteessä.

Sekä euklidisessa että hyperbolisessa geometriassa kulma määritellään sisätulon ja normin avulla. Eroa määrittelyihin tulee siitä, kuinka sisätulo ja normi määritellään. Määritellään joukossa  $\mathbb{H}$  vektoreiden  $u, v$  välinen kulma  $\theta = \angle(v, w)$  pisteessä  $z$  asettamalla

$$(10) \quad \cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle_z}{\|v\|_z \|w\|_z},$$

missä

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} (v_1 w_1 + v_2 w_2)$$

ja

$$\|v\|_z = \sqrt{\langle v, v \rangle_z} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Nähdään, että sisätulon ja normin määrittelyt joukossa  $\mathbb{H}$  saadaan tutuista euklidisista määrittelmistä skaalaamalla tekijöillä  $\frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2}$  ja  $\frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ . Skaalaustekijät supistuvat pois yhtälössä (10), jolloin kulman määrittely vastaa euklidista määritelmää vektoreiden  $v, w$  väliselle kulmalle.

Olkoon  $z$  joukon  $\mathbb{H}$  piste. Joukon  $\mathbb{H}$  tangenttiavaruudessa  $T_z \mathbb{H}$  pisteessä  $z$  (joukko  $T_z \mathbb{H}$  on sama joukko kuin joukko  $\mathbb{C}$ ) sisätulo pisteille  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2 \in T_z \mathbb{H}$  määritellään

$$(11) \quad \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2).$$

Normi määritellään sisätulon neliöjuurena

$$(12) \quad \|\zeta_1\| = \sqrt{\langle \zeta_1, \zeta_1 \rangle}.$$

Joukon  $\mathbb{H}$  kaikki isometriat ovat muotoa  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1$  tai  $S(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, ad - bc = -1$ , joten ne ovat differentioituvia kuvauksia. Tutkitaan Möbiusmuunnoksen  $T$  differentiaalia  $DT$  pisteessä  $z$ . Differentiaali  $DT$  on lineaarinen kuvaus

$T_z\mathbb{H} \rightarrow T_{T(z)}\mathbb{H}$  ja se määritellään matriisina (Jacobin matriisi)

$$DT = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix},$$

missä  $u$  ja  $v$  ovat kuvauksen  $T$  koordinaattikuvaukset eli  $T(z) = u(z) + iv(z)$  ja  $z = x + iy$ . Kuvauksen  $DT$  Jacobin determinantti  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$  Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla on

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |T'(z)|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}.$$

LEMMA 1.66. *Olkoon  $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Tällöin differentiaali  $DT$  säilyttää normin tangentiavaruuden jokaisessa pisteessä.*

TODISTUS. Olkoon  $\zeta \in T_z\mathbb{H}$ . Samaistetaan tangentiavaruus  $T_z\mathbb{H}$  ja kompleksitaso kuvauksen

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \xi + i\eta = \zeta,$$

avulla. Tällöin pisteelle  $\zeta \in T_z\mathbb{H}$  pätee  $DT(\zeta) = T'(z)\zeta$  (missä yhtälön vasen puoli on lineaarikuvauksen  $DT$  arvo pisteessä  $\zeta$  ja oikea puoli on kahden kompleksiluvun kertolasku) [5, s.25]. Koska

$$|T'(z)| = \frac{1}{|cz + d|^2},$$

niin normille voidaan kirjoittaa

$$\|DT(\zeta)\| = \frac{|DT(\zeta)|}{\text{Im}(T(z))} = \frac{|T'(z)||\zeta|}{\text{Im}(T(z))} = \frac{|\zeta|}{\text{Im}(z)} = \|\zeta\|.$$

□

Lisäksi huomataan, että mille tahansa  $\xi, \eta \in T_z\mathbb{H}$

$$(13) \quad \langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{\text{Im}(z)^2} (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) = \frac{1}{2} (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2).$$

Koska normi (eli etäisyys) säilyy isometrioissa, niin yhtälön (13) nojalla myös sisätulo ja siten kulmien suuruudet säilyvät kuvauksissa  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc = 1$  ja  $S(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ,  $ad - bc = -1$ .

Kulmalle voidaan antaa nyt tarkempi määritelmä: joukossa  $\mathbb{H}$  kahden geodeesin välinen kulma pisteessä  $z$  on niiden tangenttivektoreiden välinen kulma joukossa  $T_z\mathbb{H}$ , jonka suuruus saadaan yhtälöstä (10) käyttämällä sisätuloa (11) ja normia (12).

MÄÄRITELMÄ 1.67. Joukon  $\mathbb{H}$  muunnosta kutsutaan *konformiseksi*, jos se säilyttää kulmien suuruudet. Mikäli kulman absoluuttinen suuruus säilyy, mutta sen merkki vaihtuu, kutsutaan kuvausta *anti-konformiseksi*.



HUOMAUTUS 1.68. Kompleksianalyysi sitoo kuvauksen analyytillisyyden, konformisuuden ja injektiivisyyden seuraavasti: analyttinen funktio  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  on konformikuvaus alueessa  $G$ , jos se on injektio. Toisaalta, jos funktio  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  on analyttinen injektio, niin kaikilla  $z \in G$

$$f'(z) \neq 0.$$

Funktion  $f$  konformisuudella (jossakin pisteessä) tarkoitetaan, että funktio  $f$  on lokaalisti injektio eli että sen derivaatta ei häviä. Voidaan osoittaa, että jos  $f(z_0) \neq 0$ , niin pisteellä  $z_0$  on ympäristö  $U$  siten, että rajoittuma  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  on konformikuvaus. [6, s. 132-133]

LAUSE 1.69. *Kaikki Möbius-muunnokset ovat konformisia. Muotoa*

$$S(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

*$ad - bc = -1$  olevat kuvaukset ovat anti-konformisia.*

TODISTUS. Muistetaan, että joukon  $\mathbb{H}$  kaikki isometriat ovat muotoa  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc = 1$  tai  $S(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ,  $ad - bc = -1$ . Koska

$$T'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

niin kaikki Möbius-muunnokset ovat konformisia kompleksitasossa. Anti-konformisuus seuraa huomaamalla, että

$$S'(z) = \frac{a(c\bar{z} + d) - c(a\bar{z} + b)}{(c\bar{z} + d)^2} = \frac{-1}{(c\bar{z} + d)^2} = -T'(z) \neq 0.$$

□

HUOMAUTUS 1.70. Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

determinantti määrää, miten isometria kuvaa objektien suuntautumisen: sanotaan, että normaalimuotoiset Möbius-muunnokset ovat *suuntautumisen säilyttäviä*, kun taas muotoa  $S(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ ,  $ad - bc = -1$  olevat kuvaukset (erityisesti  $z \mapsto -\bar{z}$ ) ovat *suuntautumisen muuttavia*.

### 1.8. Hyperbolinen pinta-ala ja Gauss-Bonnet kaava

Olkoon  $A$  ylemmän puolitasan  $\mathbb{H}$  osajoukko. Joukon  $A$  pinta-ala saadaan selville jakamalla joukko  $A$  pieniin suorakulmioihin ja laskemalla yhteen suorakulmioiden pinta-alat. Olkoon piste  $z \in A$  ja sen ympäröivän suorakulmion sivujen (infinitesimaaliset) pituudet  $dx$  ja  $dy$ . Tällöin kyseisen suorakulmion pinta-ala saadaan sivujen pituuksien tulona eli se on luku

$$\frac{1}{\operatorname{Im}(z)^2} dx dy.$$

Summaamalla yhteen kaikki tällaiset suorakulmiot ja antamalla infinitesimaalisten sivun pituuksien lähestyä nollaa saadaan pinta-alan laskeminen muutettua integraaliksi. Joukon  $A$  hyperbolinen pinta-ala voidaan tällöin määritellä seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.71. Joukon  $A \subseteq \mathbb{H}$  hyperbolinen pinta-ala on

$$\mu(A) = \int \int_A \frac{dx dy}{y^2} = \int \int_A \frac{dz}{\operatorname{Im}(z)^2},$$

mikäli integraali on olemassa.

HUOMAUTUS 1.72. Joukon  $A \subseteq \mathbb{D}$  hyperbolinen pinta-ala on

$$\mu(A) = \int \int_A \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dz,$$

mikä seuraa pinta-alan määrittelystä joukossa  $\mathbb{H}$  ja kuvauksesta  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ .

Luvussa 1.5 todettiin, että Möbius-muunnos on isometrinen kuvaus ja säilyttää pisteiden välisen etäisyyden. Ryhmän  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  muunnoksissa säilyy pisteiden välisen etäisyyden lisäksi hyperbolinen pinta-ala:

LAUSE 1.73. Jos  $A \subseteq \mathbb{H}$ ,  $T \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  ja  $\mu(A)$  on olemassa, niin

$$\mu(T(A)) = \mu(A).$$

TODISTUS. [4, s. 11-12] Olkoot  $z = x + iy$  ja  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , jolle  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc = 1$ . Olkoon vielä  $w = T(z) = u + iv$ . Cauchy-Riemannin yhtälöitä käyttäen saadaan laskettua Jacobin matriisi

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u \partial v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u \partial v}{\partial y \partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left| \frac{dT}{dz} \right|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}.$$

Siten

$$\begin{aligned}\mu(T(A)) &= \int \int_{T(A)} \frac{dudv}{v^2} \\ &= \int \int_A \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{dxdy}{v^2} = \int \int_A \frac{1}{|cz+d|^4} \frac{|cz+d|^4}{y^2} dxdy = \mu(A),\end{aligned}$$

sillä  $v^2 = \text{Im}(w)^2 = \frac{\text{Im}^2(z)}{|cz+d|^4}$ . □

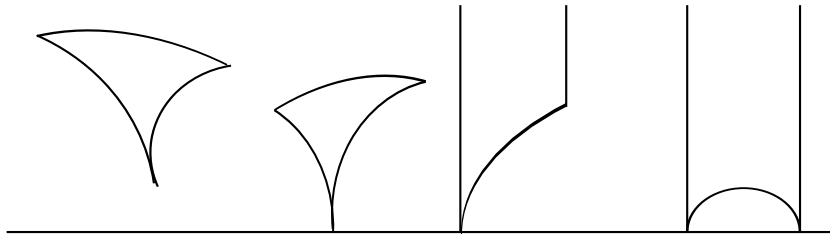
Hyperbolisessa geometriassa kolmion pinta-alan laskeminen on yksinkertaista: hyperbolisen monikulmion pinta-ala voidaan laskea sen kulmien suuruuksien avulla käyttämällä kaavaa, jota kutsutaan *Gauss-Bonnetin kaavaksi*. Sitä varten määritellään seuraavaksi *hyperbolinen monikulmio*.

HUOMAUTUS 1.74. Olkoon  $z, w \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen geodeesi, joka kulkee pisteiden  $z$  ja  $w$  kautta. Merkitään  $[z, w]$  sitä geodeesin osaa, joka yhdistää pisteet  $z$  ja  $w$ .

MÄÄRITELMÄ 1.75. Olkoon  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ . Tällöin *hyperbolinen  $n$ -sivuinen monikulmio*  $M$  on sellainen osa joukkoa  $\mathbb{H}$ , jonka reuna  $\partial M$  on

$$\partial M = \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} [z_i, z_{i+1}] \right) \cup [z_n, z_1].$$

Hyperbolinen monikulmio on siis joukon  $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$  suljettu osajoukko, jota geodeesin osat rajaavat. Erityisesti on huomattava, että reaaliakselin osa ei voi olla hyperbolisen monikulmion sivu.



KUVA 1.9. Neljä erilaista hyperbolista kolmiota. Kolmion muoto riippuu siitä, kuinka monta kulmaa kuuluu joukkoon  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

HUOMAUTUS 1.76. Hyperbolisen monikulmion *kärki* sijaitsee geodeesien osien yhteisessä päätepisteessä ja se voi olla myös joukossa  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}$ . Jos kärki on joukossa  $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{H}$ , niin sitä kutsutaan *ideaaliseksi kärjeksi*. Jos kaikki hyperbolisen monikulmion kulmista sijaitsevat ylemmän puolitason reunalla, kutsutaan monikulmiota *ideaaliseksi hyperboliseksi monikulmioksi*. Koska geodeesit ovat kohtisuorassa

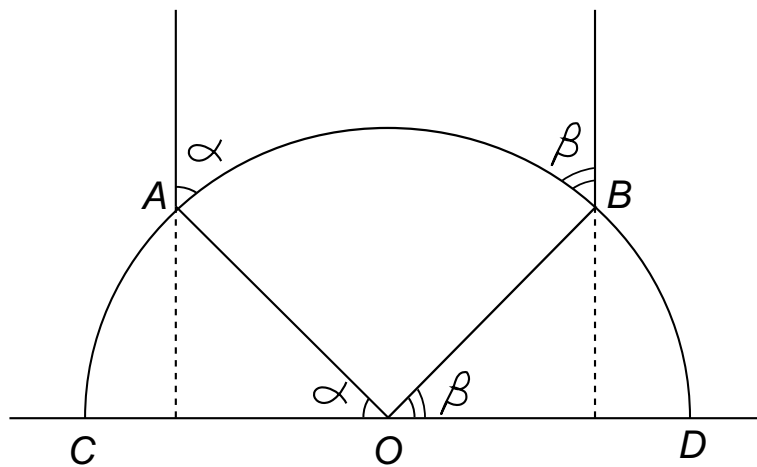
joukkoa  $\partial\mathbb{H}$  vastaan, niin monikulmion kulmien, joiden kärki on joukossa  $\partial\mathbb{H}$ , suuruus on nolla.

Seuraavaksi esiteltävä Gauss-Bonnetin kaava on tärkeä tulos hyperbolisessa geometriassa. Tulos pätee kaikille hyperbolisille monikulmioille, vaikka siitä käsitellään vain tapaus, jossa monikulmio on kolmio. Gauss-Bonnetin kaavan mukaan kolmion pinta-ala voidaan laskea kolmion infinitesimaalisten kulmien suuruuksien avulla. Tuloksella ei ole analogista vastinetta euklidisessa geometriassa ja siten se on yksi hyperbolisen ja euklidisen geometrian välisistä eroista.

LAUSE 1.77. (**Gauss-Bonnet**) *Olkoon  $\Delta$  hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat  $\alpha, \beta, \gamma$ . Tällöin*

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

TODISTUS. [4, s.13-14] *Tapaus 1:* Oletetaan, että kolmion  $\Delta$  yksi kulma kuuluu joukkoon  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ja merkitään tätä kulmaa symbolilla  $O$ . Tällöin kulman  $O$  suuruus on nolla. Jos  $O$  kuuluu reaaliakselille, se voidaan kuvata Möbius-muunnoksella pisteeksi  $\infty$  ilman, että kulmien suuruudet tai kolmion pinta-ala muuttuvat. Tällöin riittää tarkastella kolmiota, jonka kaksi sivua ovat pystysuoria geodeeseja. Tällaisen kolmion kanta on osa reaaliakselia kohtisuorassa olevaa puoliympyrän kaarta. Käyttämällä kuvauksia  $z \mapsto z+k$ ,  $k \in \mathbb{R}$  ja  $z \mapsto \lambda z$ ,  $\lambda > 0$  voidaan olettaa, että puoliympyrän keskipiste on origo ja säde on yksi.



KUVA 1.10. Tapaus 1. Yksi kolmion  $\Delta$  kulmista kuuluu joukkoon  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Käytetyissä kuvauksissa kolmion  $\Delta$  pinta-ala ei muutu Lauseen 1.73 nojalla. Nollakulma säilyy, sillä muunnokset  $z \mapsto z + k, k \in \mathbb{R}$  ja  $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$  kuvaavat reaaliakselia vastaan kohtisuorat suorat reaaliakselia vastaan kohtisuoriksi suoriksi. Muut kulmat säilyvät myös, sillä Möbius-muunnokset ovat konformikuvauksia (Lause 1.69).

Kulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  vastaavat suuruuksiltaan kulmia  $AOC$  ja  $BOD$ . Olkoon kärjen  $A$  kautta kulkeva pystysuora geodeesi suora  $x = a$  ja kärjen  $B$  kautta kulkeva pystysuora geodeesi suora  $y = b$ . Kolmion  $\Delta$  pinta-alaksi saadaan

$$\mu(\Delta) = \int \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_a^b dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

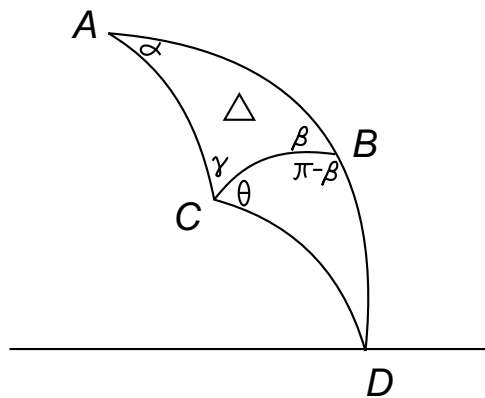
Käyttämällä muuttujanvaihtoa  $x = \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) saadaan

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta.$$

*Tapaus 2* : Oletetaan, että kolmiolla  $\Delta$  ei ole kärkeä joukossa  $\mathbb{R} \cup \infty$  ja merkitään kärkiä  $A, B$  ja  $C$ . Oletetaan kulmia  $A$  ja  $B$  yhdistävän sivun olevan osa geodeesia, jonka päätepiste reaaliakselilla on  $D$ , ja että mikään kolmion  $\Delta$  sivuista ei ole pystysuora geodeesi (mikäli sivu olisi pystysuora, niin käyttämällä ryhmän  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  muunnoksia saadaan sivusta muu kuin pystysuora geodeesi). Tällöin vallitsee kuvan 1.11 mukainen tilanne ja  $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ , missä kolmion  $\Delta_1$  kulmat ovat  $A, C$  ja  $D$  ja kolmion  $\Delta_2$  kulmat ovat  $B, C$  ja  $D$ . Tällöin

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) = \pi - \alpha - (\gamma + \theta) - [\pi - \theta - (\pi - \beta)] = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

□



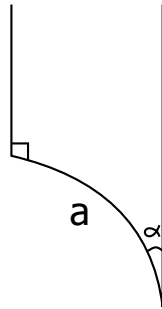
KUVA 1.11. Tapaus 2. Kolmiolla  $\Delta$  ei ole yhtään kulmaa joukossa  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

HUOMAUTUS 1.78.

- Gauss-Bonnetin kaavan avulla nähdään eräs euklidisen ja hyperbolisen geometrian eroista: yleisesti tiedetään, että euklidisessa geometriassa kolmion kulmien summa on täsmälleen  $\pi$  (tai  $180^\circ$ ), mutta Gauss-Bonnetin kaavan perusteella hyperbolisen kolmion kulmien summa on aina pienempi kuin  $\pi$ : hyperbolisen kolmion  $\Delta$  kulmille  $\alpha, \beta, \gamma$  pätee  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .
- Hyperbolisessa geometriassa ideaalisen kolmion kaikkien kulmien suuruus on nolla. Sen sivuina ovat kokonaiset geodeesit, joiden päätepisteet ovat joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja siten ideaalisen kolmion sivut ovat hyperbolisesti äärettömän pitkät. Hyperbolinen kolmio, jonka pinta-ala on suurin mahdollinen, on ideaalinen ja sen pinta-ala on  $\pi$ .

### 1.9. Hyperbolinen trigonometria

Kolmion *paralleelikulma* on kulma  $\alpha$ , joka määrätään trigonometrisena funktiona kolmiolle, jonka kulmat ovat  $\alpha$ ,  $0$  ja  $\frac{\pi}{2}$  ( $\alpha \neq 0$ ). Merkitään kuvan 1.12 kolmion äärellisen pituisen sivun pituutta  $a$ , jolloin paralleelikulma  $\alpha$  voidaan ilmaista muuttujan  $a$  funktiona muodossa  $\alpha = \Pi(a)$ .



KUVA 1.12. Paralleelikulma  $\alpha$

LAUSE 1.79. Oletetaan, että kolmiossa  $\Delta$  on äärellinen sivu, jonka pituus on  $a$  ja kaksi kulmaa, joiden suuruudet ovat  $0$  ja  $\frac{\pi}{2}$ . Tällöin kolmannelle kulmalle  $\Pi(a)$  pätee

$$(1) \tan \Pi(a) = \frac{1}{\sinh a},$$

$$(2) \sin \Pi(a) = \frac{1}{\cosh a},$$

$$(3) \sec \Pi(a) = \frac{1}{\tanh a}.$$

TODISTUS. [4, s.15-16]

□

Tarkastellaan lopuksi yleistä hyperbolista kolmiota, jonka sivujen hyperboliset pituudet ovat  $a, b$  ja  $c$  ja niitä vastaan olevat kulmat ovat  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$ . Oletetaan, että

nämä kulmat ovat positiivisia ja siten kolmion sivujen pituudet ovat äärellisiä. Tällaiselle hyperboliselle kolmiolle voidaan johtaa euklidisestä geometriasta tuttuja sini- ja kosinilauseita vastaavat sini- ja kosinilauseet (Ks. [4, s. 16-18]):

- Sinilause:  $\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$
- Kosinilause I:  $\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$
- Kosinilause II:  $\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$ .

HUOMAUTUS 1.80. Kosinilauseelle II ei ole analogista vastinetta euklidisessä geometriassa. Siitä seuraa suoraan hyperbolisessa geometriassa, että jos kolmion kulmat tiedetään, niin myös sen sivujen pituudet voidaan laskea. Lisäksi, jos kahdella eri kolmiolla on yhtä suuret kulmat, niin niiden välille on löydettävissä isometrinen kuvaus. Euklidisessä geometriassa tämä pätee vain, jos kolmiot ovat siirtoa ja kiertoa vaille samat.

Euklidisen geometrian yksi tunnetuimmista suorakulmaiselle kolmiolle pätevistä tuloksista on Pythagoraan lause, joka sitoo suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia toisiinsa. Se on euklidisessä geometriassa kosinilauseen erikoistapaus ja vastaava yhteys kosinilauseen ja Pythagoraan lauseen välillä pätee myös hyperbolisessa geometriassa. Kosinilauseen I suorana seurauksena saadaan hyperbolisen geometrian Pythagoraan lause:

LAUSE 1.81. (**Pythagoraan lause**) *Olkoon  $\Delta$  hyperbolinen kolmio, jonka sivujen pituudet ovat  $a, b$  ja  $c$  ja niitä vastaan olevat kulmat ovat  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$ . Jos  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , niin  $\cosh c = \cosh a \cosh b$ .*

Saatu kaava  $\cosh c = \cosh a \cosh b$  sivujen  $a, b$  ja  $c$  sivujen pituuksien suhteelle vastaa euklidista Pythagoraan lausetta, kun tarkastellaan kolmioita infinitesimaalisessa koossa. Hyperboliselle kosinille pätee

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Jos  $a, b$  ja  $c$  ovat infinitesimaalisen pieniä ja huomioidaan enintään toisen asteen termit, niin sarjakehitelmän avulla nähdään, että  $c^2 = a^2 + b^2$ . (Mikäli  $a, b$  ja  $c$  ovat suuria, niin  $c \approx a + b - \log 2$ . Siten hyperbolisessa geometriassa hypotenuusan pituus ei ole paljon lyhyempi kuin kateettien pituuksien summa.) [2, s.315-317]

HUOMAUTUS 1.82. Yksi geometrian malli on myös pallogeometria, jossa käsitellään kaksiulotteista, positiivisesti kaarevaa pallopintaa. Pallogeometria, euklidinen geometria ja hyperbolinen geometria voidaan erottaa toisistaan muun muassa kolmioiden kulmien summan perusteella:

- Mielivaltaiselle hyperboliselle kolmiolle, jonka kulmat ovat  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$  pätee

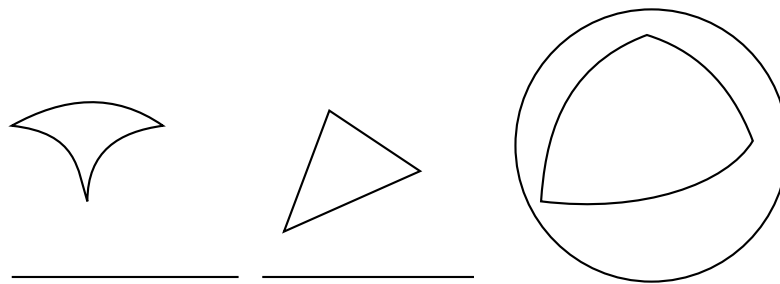
$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

- Mielivaltaiselle euklidiselle kolmiolle, jonka kulmat ovat  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$  pätee

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

- Voidaan osoittaa (esimerkiksi piirtämällä kolmio pallopinnalle), että mille tahansa pallogeometrian kolmiolle, jonka kulmat ovat  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$  pätee

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$



KUVA 1.13. Hyperbolinen, euklidinen ja pallogeometrian kolmio.



## LUKU 2

### Lisää Möbius-muunnoksista: kiintopisteet ja muunnosten luokittelu

Aiemmin esitettiin, että joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos on kuvaus  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä  $a, b, c$  ja  $d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc > 0$ . Tässä luvussa näytetään, että Möbius-muunnokset voidaan luokitella kolmeen luokkaan sen mukaan, miten muunnos käyttäytyy geometrisesti. Nämä luokat ovat *hyperboliset*, *paraboliset* ja *elliptiset Möbius-muunnokset*. Luokkien nimet ja geometrinen käyttäytyminen liittyvät toisiinsa, sillä joukon  $\mathbb{R}^2$  hyperbolisessa muunnoksessa muuttumattomia käyriä ovat hyperbelit, elliptisessä muunnoksessa ellipsit ja parabolisessa muunnoksessa paraabelit [4, s.23].

#### 2.1. Kiintopisteet

**MÄÄRITELMÄ 2.1.** Olkoon kuvaus  $T$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos. Piste  $z_0 \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$  on Möbius-muunnoksen  $T$  *kiintopiste*, jos

$$T(z_0) = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0.$$

Möbius-muunnoksen kiintopisteiden lukumäärä ja se, ovatko kiintopisteet joukossa  $\mathbb{H}$  vai sen reunalla  $\partial\mathbb{H}$  määräävät mihin Möbius-muunnosten luokkaan kyseinen kuvaus kuuluu. Huomattakoon erityisesti, että identtinen kuvaus  $T(z) = z$  kiinnittää kaikki joukon  $\mathbb{H}$  pisteet, joten oletetaan jatkossa, että kuvaus  $T$  ei ole identtinen kuvaus.

Tutkitaan ensin tapausta, jossa piste  $\infty$  on Möbius-muunnoksen  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  kiintopiste. Kirjoittamalla  $T$  muodossa

$$T(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}},$$

nähdään, että kun  $z \rightarrow \infty$ , niin  $\frac{1}{z} \rightarrow 0$  ja  $T(\infty) = \frac{a}{c}$ . Piste  $\infty$  on kuvauksen  $T$  kiintopiste, jos ja vain jos  $T(\infty) = \infty$ . Tämä on totta, jos ja vain jos  $c = 0$ .

Jos kuvauksella  $T$  on kiintopiste  $z = \infty$  (jolloin  $c = 0$ ), niin sillä on myös toinen kiintopiste: jos  $c = 0$ , niin kuvaus  $T$  voidaan kirjoittaa muodossa

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

ja nähdään, että myös piste  $z_0 = \frac{b}{d-a}$  on kiintopiste. Erityisesti, jos  $a = d$ , niin  $z_0$  voi olla äärettömyydessä. Näin ollen, jos piste  $\infty \in \partial\mathbb{H}$  on kiintopiste kuvaukselle  $T$ , niin kuvauksella  $T$  on korkeintaan yksi muu kiintopiste, joka myös sijaitsee joukossa  $\partial\mathbb{H}$ .

Oletetaan sitten, että piste  $\infty$  ei ole kuvauksen  $T$  kiintopiste, jolloin  $c \neq 0$ . Laventamalla yhtälö  $\frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0$  binomilla  $cz_0 + d \neq 0$  (sillä  $z_0 \neq -\frac{d}{c}$ ) huomataan, että piste  $z_0$  on kuvauksen  $T$  kiintopiste, jos ja vain jos

$$(14) \quad cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0.$$

Saatu yhtälö on reaalikertoiminen toisen asteen yhtälö, joten sillä on joko (i) yksi tai kaksi reaalista ratkaisua tai (ii) kaksi kompleksiarvoista ratkaisua. Jälkimmäisessä tapauksessa vain toinen ratkaisusta kuuluu joukkoon  $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ . On saatu johdettua seuraava lause:

**LAUSE 2.2.** *Olkoon  $T$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos ja oletetaan, että  $T$  ei ole identtinen kuvaus. Tällöin kuvauksella  $T$  on joko*

- (1) *kaksi kiintopistettä joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\mathbb{H}$  tai*
- (2) *yksi kiintopiste joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\mathbb{H}$  tai*
- (3) *yksi kiintopiste joukossa  $\mathbb{H}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\partial\mathbb{H}$ .*

**SEURAUUS 2.3.** *Jos joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnoksella  $T$  on kolme tai useampia kiintopisteitä, niin se on identtinen kuvaus ja kiinnittää kaikki joukon  $\mathbb{H}$  pisteet.*

**MÄÄRITELMÄ 2.4.** *Olkoon  $T$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos. Sanotaan, että Möbius-muunnos  $T$  on*

- (1) *hyperbolinen*, jos sillä on kaksi kiintopistettä joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\mathbb{H}$ ,
- (2) *parabolinen*, jos sillä on yksi kiintopiste joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\mathbb{H}$ ,
- (3) *elliptinen*, jos sillä on yksi kiintopiste joukossa  $\mathbb{H}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\partial\mathbb{H}$ .

**ESIMERKKI 2.5.** [10, s.184] Kuvauksen  $T_1(z) = \frac{2z+5}{-3z-1}$  kiintopiste on  $z = \frac{-3+i\sqrt{51}}{6} \in \mathbb{H}$  ja kuvaus  $T_1$  on siten elliptinen. Myös kuvaus  $T_2(z) = -\frac{1}{z}$  on elliptinen, sillä sen ainoa kiintopiste on  $z = i \in \mathbb{H}$ .

Kuvauksella  $T_3(z) = 7z + 6$  on kiintopisteet  $\infty$  ja  $-1$ , joten se on hyperbolinen. Kuvauksen  $T_4(z) = \frac{z}{z+1}$  ainoa kiintopiste on  $0$ , joten se on parabolinen.

HUOMAUTUS 2.6. Hyperbolisen muunnoksen  $T$  kiintopisteitä joukossa  $\mathbb{H}$  yhdistävä geodeesi on nimeltään muunnoksen  $T$  akseli, jota merkitään  $C(T)$ . Möbiusmuunnos  $T$  kuvaa akselin  $C(T)$  itselleen, toisin sanoen  $T(C(T)) = C(T)$ , sillä Möbiusmuunnos kuvaa geodeesin geodeesiksi ja kiintopisteet säilyvät alkuperäisillä paikoiltaan kuvauksessa  $T$ .

## 2.2. Konjugointi ja Möbius-muunnoksen jälki

Ennen Möbius-muunnosten luokkien tarkempaa tutkimista esitellään käsitteet konjugointi ja Möbius-muunnoksen jälki. Konjugointi kuvaa Möbius-muunnosten samankaltaisuutta ja sitä voidaan ajatella heuristisesti koordinaattien vaihtona.

MÄÄRITELMÄ 2.7. Olkoon  $T_1$  ja  $T_2$  kaksi joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnosta. Kuvaukset  $T_1$  ja  $T_2$  ovat *konjugaatteja*, jos on olemassa kuvaus  $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että

$$T_1 = g^{-1} \circ T_2 \circ g.$$

HUOMAUTUS 2.8.

- (1) Geometrisesti konjugoinnilla tarkoitetaan sitä, että jos Möbius-muunnokset  $T_1$  ja  $T_2$  ovat konjugaatteja, niin kuvauksen  $T_1$  toiminta joukolla  $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$  voidaan samaistaa kuvauksen  $T_2$  toimintaan joukolla  $g(\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}) = \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ .
- (2) Kuvauksen  $T_2$  kanssa konjugoivaa Möbius-muunnosta  $T_1$  vastaava matriisi saadaan Möbius-muunnosta  $T_2$  vastaavan matriisin  $A_2$  sekä kuvauksen  $g$  matriisin  $B$  avulla matriisien kertolaskuna  $A_1 = \pm B^{-1}A_2B$ .
- (3) Joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnosten konjugointi määritellään vastaavasti kuin ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H}$  määriteltyjen Möbius-muunnosten konjugointi.

ESIMERKKI 2.9. Jos joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnokset  $T_1$  ja  $T_2$  ovat konjugaatteja, niin niillä on sama määrä kiintopisteitä [10, s.184-185]: olkoon kuvaus  $g$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos siten, että  $T_1 = g^{-1} \circ T_2 \circ g$ , jolloin  $T_2 = g \circ T_1 \circ g^{-1}$ . Tutkitaan kuvauksen  $T_1$  kiintopisteitä:

$$T_1(x) = x \Leftrightarrow g^{-1} \circ T_2 \circ g(x) = x \Leftrightarrow T_2(g(x)) = g(x)$$

eli piste  $x$  on Möbius-muunnoksen  $T_1$  kiintopiste, jos ja vain jos  $g(x)$  on Möbius-muunnoksen  $T_2$  kiintopiste. Kuvaus  $g$  kuvaa kaikki muunnoksen  $T_1$  kiintopisteet muunnoksen  $T_2$  kiintopisteiksi. Koska kuvaus  $g$  on joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnoksena bijektio, niin Möbius-muunnoksilla  $T_1$  ja  $T_2$  on sama määrä kiintopisteitä.

Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

*jälki* saadaan sen diagonaalialkioiden summana. Jatkossa käytetään matriisin  $A$  jäljestä merkintää  $\text{Tr}(A)$ , joten jälki saadaan kirjoitettua summana  $\text{Tr}(A) = a + d$ .

Olkoon  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{H}$ , jolle  $ad - bc > 0$ . Jakamalla tarvittaessa kertoimet  $a, b, c, d$  luvulla  $\sqrt{ad - bc}$  saadaan kuvaus  $T$  muutettua normalisoituun muotoon (eli, että  $ad - bc = 1$ ).

Oletetaan, että Möbius-muunnos  $T$  on kirjoitettu normalisoidussa muodossa, jolloin se voidaan kirjoittaa matriisina

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Matriisin  $A$  determinantti on  $ad - bc = 1$ , joten matriisi  $A$  kuuluu erityiseen lineaariseen ryhmään  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Kuitenkin, myös matriisi

$$-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

vastaa Möbius-muunnosta  $T$ . Tämän vuoksi määritellään niin kutsuttu *jälkifunktio*  $\tau$  seuraavasti: määritellään kuvausta  $T$  vastaavan matriisin  $A$  jälkifunktio

$$\tau(T) = (\text{Tr}(A))^2 = (\text{Tr}(-A))^2.$$

**MÄÄRITELMÄ 2.10.** Olkoon  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  joukon  $\mathbb{H}$  normaalimuodossa oleva Möbius-muunnos. Möbius-muunnoksen  $T$  *jälki* on  $\tau(T) = (a + d)^2$ .

Seuraava tulos kertoo, että joukon  $\mathbb{H}$  konjugoivilla Möbius-muunnoksilla on sama jälki.

**LAUSE 2.11.** *Olkoon  $T_1$  ja  $T_2$  joukon  $\mathbb{H}$  konjugaatteja Möbius-muunnoksia. Tällöin  $\tau(T_1) = \tau(T_2)$ .*

**TODISTUS.** [10, s.185] Olkoot  $A_1, A_2$  ja  $B$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnoksia sekä  $T_1, T_2$  ja  $g$  näitä vastaavat matriisit. Olkoot kuvaukset

$$T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$$

ja

$$T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

konjugoivia ja normaalimuotoisia Möbius-muunnoksia. Tällöin niitä vastaavat normalisoidut matriisit ovat

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

ja

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Olkoon kuvaus  $g$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos siten, että  $T_1 = g^{-1} \circ T_2 \circ g$ . Huomautuksen 2.8 perusteella tätä kuvausta vastaa matriisi  $A_1 = B^{-1}A_2B$  (tarvittaessa korvataan matriisi  $B$  matriisilla  $-B$ ). Nähdään, että

$$\mathrm{Tr}(A_1) = \mathrm{Tr}(B^{-1}A_2B) = \mathrm{Tr}(A_2BB^{-1}) = \mathrm{Tr}(A_2),$$

joten

$$\tau(T_1) = \mathrm{Tr}(A_1)^2 = \mathrm{Tr}(A_2)^2 = \tau(T_2),$$

sillä lineaarialgebrasta tiedetään, että mielivaltaisille matriiseille  $C$  ja  $D$ , joille tulot  $CD$  ja  $DC$  on määritelty, pätee  $\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$ .  $\square$

Seuraava tulos liittää Möbius-muunnosten luokittelun ja jälkifunktion toisiinsa:

LAUSE 2.12. *Olkoon  $T$  Joukon  $\mathbb{H}$  normaalimuotoinen Möbius-muunnos ja oletetaan, ettei  $T$  ole identtinen kuvaus. Tällöin*

- (1)  $T$  on hyperbolinen, jos ja vain jos  $\tau(T) \in (4, \infty)$ ,
- (2)  $T$  on parabolinen, jos ja vain jos  $\tau(T) = 4$  ja
- (3)  $T$  on elliptinen, jos ja vain jos  $\tau(T) \in [0, 4)$ .

TODISTUS. Edellä luvussa 2.1 esitellyt paraboliset, hyperboliset ja elliptiset Möbius-muunnokset voidaan erottaa kiintopisteiden lisäksi jälkifunktion avulla. Tutkitaan joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnosta  $T$  ja oletetaan aluksi, että  $\infty$  ei ole sen kiintopiste, toisin sanoen  $c \neq 0$ . Aiemmin todettiin, että kuvauksen  $T$  kiintopisteet saadaan selvitettyä ratkaisemalla yhtälö (14). Näin ollen piste  $z_0$  on kuvauksen  $T$  kiintopiste, jos ja vain jos

$$z_0 = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}.$$

Juuren diskriminantti  $D = (a - d)^2 + 4bc$  määrää, ovatko ratkaisut reaalisia vai kompleksisia ja kuinka monta niitä on. Jos  $D > 0$ , niin ratkaisuja on kaksi reaalista pistettä. Jos  $D = 0$ , niin ratkaisuja on yksi ja se on reaalinen. Jos taas  $D < 0$ , niin ratkaisuna on kompleksikonjugaattipari.

Oletetaan, että Möbius-muunnos  $T$  on normalisoitu, joten  $ad - bc = 1$  ja  $\tau(T) = (a + d)^2$ . Tällöin

$$D = (a - d)^2 + 4bc = a^2 - 2ad + d^2 + 4bc = a^2 + 2ad + d^2 - 4(ad - bc) = \tau(T) - 4.$$

Jos  $\infty$  on kiintopiste, niin  $c = 0$  ja toinen kiintopiste on  $\frac{b}{(d-a)}$ . Jos  $a = d$  (jolloin  $a = 1$  ja  $d = 1$  tai  $a = -1$  ja  $d = -1$ , sillä täytyy olla  $ad - bc = ad = 1$ ), niin  $\infty$  on ainoa kiintopiste. Näin ollen  $\tau(T) = (1 + 1)^2 = 4$ . Jos taas  $a \neq d$ , niin ratkaisemalla  $a$  yhtälöstä  $ad - bc = ad = 1$  saadaan  $a = \frac{1}{d}$  ja sijoittamalla se yhtälöön  $(a - d)^2 + bc = \tau(T) - 4$  nähdään, että  $\tau(T) > 4$ .  $\square$

**HUOMAUTUS 2.13.** Luokkien nimet johtuvat kuvauksia vastaavien matriisien lineaarisesta käyttäytymisestä joukolla  $\mathbb{R}^2$  [4, s.23]. Luvuissa 2.3 ja 2.5 tullaan näkemään, että matriisi joukossa  $SL(2, \mathbb{R})$  on hyperbolinen, jos ja vain jos sillä on joukossa  $\mathbb{R}^2$  konjugaattimatriisi

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

jollekin  $\lambda \neq 1$  ja matriisi joukossa on  $SL(2, \mathbb{R})$  elliptinen, jos ja vain jos sillä on joukossa  $\mathbb{R}^2$  konjugaattimatriisi

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Jos hyperbeli kuvataan hyperbolisella kuvauksella, niin yllä olevaa konjugoivaa matriisiä tutkimalla huomataan hyperbelin kuvautuvan hyperbeliksi. Vastaavasti, jos ellipsi kuvataan elliptisellä kuvauksella, niin yllä olevaa konjugoivaa matriisiä tutkimalla huomataan ellipsin kuvautuvan ellipsiksi. Paraabelit ovat hyperbelien ja ellipsien välimuotoja ja ne kuvautuvat parabolisessa muunnoksessa paraabeleiksi.

### 2.3. Hyperboliset Möbius-muunnokset

Aiemmin todettiin, että hyperbolisella Möbius-muunnoksella on kaksi kiintopistettä joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja johdettiin, että hyperbolisen muunnoksen jälkifunktiolle pätee  $\tau(T) > 4$ .

Hyperbolisen Möbius-muunnoksen  $T$  yhteys muunnoksen jälkifunktioon ja konjugaattikuvaukseen voidaan eritellä seuraavan lauseen mukaisesti.

**LAUSE 2.14.** *Olkoon  $T$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (1)  $T$  on hyperbolinen,
- (2)  $\tau(T) > 4$  ja

(3)  $T$  voidaan konjugoida dilaatioksi eli muotoa  $z \mapsto kz, k > 0$  olevaksi joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnokseksi.

TODISTUS. [10, s.59-60] Lauseen 2.12 nojalla kohdat 1 ja 2 ovat ekvivalentteja. Oletetaan, että 3 pätee, joten  $T$  on konjugaatti dilaatiolle. Dilaatiolla on kiintopisteet 0 ja  $\infty$  joukossa  $\partial\mathbb{H}$ , joten Möbius-muunnoksella  $T$  on myös kaksi kiintopistettä joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja siten kohta 1 pätee.

Osoitetaan sitten, että kohdasta 1 seuraa 3. Todistetaan aluksi, että jos  $T$  kiinnittää pisteet 0 ja  $\infty$ , niin kuvaus  $T$  on dilaatio. Koska  $T$  on Möbius-muunnos, niin se on muotoa

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

jolle  $ad - bc > 0$ . Koska  $\infty$  on kuvauksen  $T$  kiintopiste, niin on oltava  $c = 0$  ja  $T(z) = \frac{az+b}{d}$ . Koska myös piste 0 on kiintopiste, on oltava myös  $b = 0$  ja siten  $T(z) = \frac{a}{d}z$  eli kuvaus  $T$  on dilaatio.

Oletetaan, että  $T$  on hyperbolinen Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{H}$ , jolloin sillä on kiintopisteet  $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\mathbb{H}$ . Oletetaan, että  $\zeta_1 = \infty$  ja  $\zeta_2 \in \mathbb{R}$  ja olkoon  $g(z) = z - \zeta_2$ . Tällöin Möbius-muunnos  $gTg^{-1}$  on konjugaatti kuvauksen  $T$  kanssa ja sillä on kiintopisteet 0 ja  $\infty$ . Kuvaus  $gTg^{-1}$  on siten dilaatio.

Oletetaan sitten, että  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$  ja  $\zeta_1 < \zeta_2$ . Olkoon kuvaus  $g$  muotoa

$$g(z) = \frac{z - \zeta_2}{z - \zeta_1}.$$

Koska  $-\zeta_1 + \zeta_2 > 0$ , niin  $g$  on joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos. Lisäksi  $g(\zeta_1) = \infty$  ja  $g(\zeta_2) = 0$ , joten kuvauksella  $gTg^{-1}$  on kiintopisteet 0 ja  $\infty$  ja se on siten dilaatio. Näin ollen Möbius-muunnos  $T$  on dilaation konjugaatti.  $\square$

ESIMERKKI 2.15. Olkoon  $k > 0$  ja oletetaan, että  $k \neq 1$ . Joukon  $\mathbb{H}$  muunnos

$$T(z) = kz$$

on hyperbolinen. Sen kiintopisteet ovat 0 ja  $\infty$ . Hyperbolinen Möbius-muunnos  $T$  on konjugaatti dilaatiolle  $z \mapsto kz$ . Dilaatio on normalisoituna muotoa

$$z \mapsto \frac{\frac{k}{\sqrt{k}}z}{\frac{1}{\sqrt{k}}},$$

jolloin  $\tau(T) = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ . [10, s.60]

HUOMAUTUS 2.16. Dilaatiot  $z \mapsto k_1z$  ja  $z \mapsto k_2z$ , ovat konjugaatteja, jos ja vain jos  $k_1 = k_2$  tai  $k_1 = \frac{1}{k_2}$  [10, s.59].

## 2.4. Paraboliset Möbius-muunnokset

Aiemmin todettiin, että parabolisella Möbius-muunnoksella on yksi kiintopiste joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja johdettiin, että parabolisen muunnoksen jälkifunktiolle pätee  $\tau(T) = 4$ .

ESIMERKKI 2.17. Joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos

$$T(z) = z + 1$$

on parabolinen. Sen kiintopiste on  $\infty$ .

HUOMAUTUS 2.18. Yleisesti joukon  $\mathbb{H}$  muotoa  $z \mapsto z+b$  olevia Möbius-muunnoksia kutsutaan *translaatioiksi* eli siirroiksi. Paraboliset Möbius-muunnokset ovat konjugaatteja translaatioiden kanssa. Translaation  $z \mapsto z + b$  konjugaatti on translaatio  $z \mapsto z + 1$ , jos  $b > 0$  ja translaatio  $z \mapsto z - 1$ , jos  $b < 0$ . Translaatiot  $z \mapsto z + 1$  ja  $z \mapsto z - 1$  eivät konjugoi [10, s. 58, 185]: jos  $T_1(z) = z + 1$  ja  $T_2(z) = z - 1$  konjugoisivat, niin olisi olemassa kuvaus  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että  $T_1 \circ g(z) = g \circ T_2(z)$ . Toisin sanoen matriisien avulla tarkasteltuna pätsi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eli

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} a & -a+b \\ c & -c+d \end{bmatrix}.$$

Vertaamalla kertoimia "+"-tapauksessa nähdään, että  $c = 0$  ja  $d = -a$ , jolloin  $ad - bc = -a^2 < 0$ , mikä on ristiriita. "-"-tapauksessa olisi  $c = 0, d = 0$ , jolloin  $ad - bc = 0$ , mikä on jälleen ristiriita.

Parabolisen Möbius-muunnoksen  $T$  yhteys muunnoksen jälkifunktioon ja konjugaattikuvaukseen voidaan eritellä seuraavan lauseen mukaisesti.

LAUSE 2.19. *Olkoon  $T$  joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos ja oletetaan, että  $T$  ei ole identtinen kuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (1)  $T$  on parabolinen,
- (2)  $\tau(T) = 4$ ,
- (3)  $T$  on konjugaatti translaatiolle ja
- (4)  $T$  on konjugaatti joko translaatiolle  $z \mapsto z + 1$  tai translaatiolle  $z \mapsto z - 1$ .



TODISTUS. [10, s. 58] Lauseen 2.12 nojalla kohdat 1 ja 2 ovat ekvivalentteja. Kohta 3 seuraa kohdasta 4 triviaalisti ja huomautuksen 2.18 nojalla kohdasta 3 seuraa kohta 4.

Oletetaan, että 4 pätee ja muistetaan, että kuvauksella  $z \mapsto z + 1$  on kiintopiste  $\infty$ . Jos  $T$  on konjugaatti kuvaukselle  $z \mapsto z + 1$ , niin kuvauksella  $T$  on kiintopiste joukossa  $\partial\mathbb{H}$  ja kuvaus  $T$  on siten parabolinen. Sama pätee kuvaukselle  $z \mapsto z - 1$ .

Näytetään sitten, että kohdasta 1 seuraa kohta 3. Oletetaan, että kuvaus  $T$  on parabolinen ja että sillä on kiintopiste  $\zeta \in \partial\mathbb{H}$ . Olkoon  $g$  Möbius-muunnos ylemmässä puolitasossa siten, että  $g(\zeta) = \infty$ , jolloin Möbius-muunnoksella  $gTg^{-1}$  on kiintopiste  $\infty$ . Koska  $gTg^{-1}$  on Möbius-muunnos, on se muotoa

$$gTg^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Koska  $\infty$  on kuvauksen  $gTg^{-1}$  kiintopiste, niin täytyy päteä  $c = 0$ . Siten

$$gTg^{-1}(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

ja seuraa, että kuvauksella  $gTg^{-1}$  on kiintopiste  $\frac{b}{d-a}$ . Koska kuvauksella  $gTg^{-1}$  on vain yksi kiintopiste, joka on  $\infty$ , niin täytyy olla  $d = a$ . Siten  $gTg^{-1}(z) = z + b'$  jollekin  $b' \in \mathbb{R}$  eli kuvaus  $T$  on konjugaatti translaatiolle.  $\square$

## 2.5. Elliptiset Möbius-muunnokset

Elliptisten Möbius-muunnosten käsittely on helpompaa, kun tarkastellaan ylemmän puolitason sijaan Poincarén kiekkomallia  $\mathbb{D}$ .

Joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnokset ovat muotoa

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}},$$

missä  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ja  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$ . Kuvaus  $T$  voidaan normalisoida siten, että  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ . Möbius-muunnokset luokitellaan joukossa  $\mathbb{D}$  vastaavasti kuin joukossa  $\mathbb{H}$ : joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnos  $T$  on

- (1) hyperbolinen, jos sillä on kaksi kiintopistettä joukossa  $\partial\mathbb{D}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\mathbb{D}$
- (2) parabolinen, jos sillä on yksi kiintopiste joukossa  $\partial\mathbb{D}$  ja ei yhtään kiintopistettä joukossa  $\mathbb{D}$
- (3) elliptinen, jos sillä ei ole kiintopisteitä joukossa  $\partial\mathbb{D}$  ja yksi kiintopiste joukossa  $\mathbb{D}$ .

Joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnokset voidaan luokitella niin ikään jäljen avulla. Jos  $T$  on joukon  $\mathbb{D}$  normalisoitu Möbius-muunnos, niin määritellään jälkifunktio  $\tau(T) = (\alpha + \bar{\alpha})^2$ . Tällöin Möbius-muunnos  $T$  on

- (1) hyperbolinen, jos ja vain jos  $\tau(T) > 4$
- (2) parabolinen, jos ja vain jos  $\tau(T) = 4$
- (3) elliptinen, jos ja vain jos  $\tau(T) \in [0, 4)$ .

HUOMAUTUS 2.20. Todistus olisi voitu tehdä myös käyttämällä kuvausta  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ : joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnos on muotoa  $fTf^{-1}$ , missä  $T$  on joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnos ja kuvaus  $f$  on ”koordinaattien muunnoskuvaus” joukosta  $\mathbb{H}$  joukkoon  $\mathbb{D}$ . Möbius-muunnos  $T$  on hyperbolinen, jos ja vain jos  $fTf^{-1}$  on hyperbolinen. Vastaavasti Möbius-muunnos  $T$  on parabolinen, jos ja vain jos  $fTf^{-1}$  on parabolinen ja  $T$  on elliptinen, jos ja vain jos  $fTf^{-1}$  on elliptinen. Joukossa  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnosten jälkifunktiolle pätee, että  $\tau(fTf^{-1}) = \tau(T)$ .

ESIMERKKI 2.21. Olkoon  $T$  eräs joukon  $\mathbb{D}$  elliptinen Möbius-muunnos siten, että sillä on yksi kiintopiste joukossa  $\mathbb{D}$ . Kuvaus

$$T(z) = e^{i\theta}z,$$

missä  $\theta \in (0, 2\pi)$ , on esimerkki elliptisestä Möbius-muunnoksesta joukossa  $\mathbb{D}$  ( $\alpha = e^{i\theta/2}$  ja  $\beta = 0$ ). Kuvaus  $T$  toimii Poincarén kiekolla  $\mathbb{D}$  kiertäen sitä origon ympäri kulman  $\theta$  verran. Origon on ainoa piste, joka pysyy tällaisessa kierrossa paikallaan.

Elliptisessä tapauksessa Möbius-muunnoksen  $T$ , sen jälkifunktion ja konjugaattikuvaukseen välillä on seuraava yhteys:

LAUSE 2.22. *Olkoon  $T$  joukon  $\mathbb{D}$  elliptinen Möbius-muunnos. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (1)  $T$  on elliptinen,
- (2)  $\tau(T) \in [0, 4)$  ja
- (3)  $T$  on konjugaatti rotaatiolle eli kierrolle  $z \mapsto e^{i\theta}z$ .

TODISTUS. [10, s.61] Lauseen 2.12 nojalla kohdat 1 ja 2 ovat ekvivalentteja. Oletetaan, että 3 pätee ja muistetaan, että kierrolla on yksi kiintopiste (origo). Jos joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnos  $T$  konjugoi rotaation kanssa, niin sillä on yksi kiintopiste joukossa  $\mathbb{D}$  ja siten  $T$  on elliptinen.

Osoitetaan sitten, että kohdasta 1 seuraa kohta 3. Oletetaan, että Möbius-muunnos  $T$  on elliptinen ja että sillä on kiintopiste  $\zeta \in \mathbb{D}$ . Olkoon  $g$  joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnos

siten, että  $g(\zeta) = 0$ . Tällöin kuvaus  $gTg^{-1}$  on joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnos, joka konjugoi kuvauksen  $T$  kanssa ja jolla on kiintopiste origossa. Oletetaan, että

$$gTg^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}},$$

missä  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 > 0$ . Koska 0 on kiintopiste, täytyy olla  $\beta = 0$ . Kirjoitetaan  $\alpha$  napakoordinaateissa eli muodossa  $\alpha = re^{i\theta}$ , jolloin

$$gTg^{-1}(z) = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}z = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}z = e^{2i\theta}z.$$

Tästä nähdään, että Möbius-muunnos  $T$  konjugoi rotaation kanssa.  $\square$

HUOMAUTUS 2.23. Elliptinen joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnos  $T$  konjugoi rotaation  $z \mapsto e^{i\theta}z$  kanssa, joka normalisoituna on muotoa

$$z \mapsto \frac{e^{i\theta/2}z}{e^{-i\theta/2}}.$$

Tällöin  $\tau(T) = (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^2 = 4 \cos^2(\theta/2)$ . [10, s.61].

## Fuchsin ryhmä

### 3.1. Fuchsin ryhmien käsittelyä pohjustavia määritelmiä ja tuloksia

Tässä luvussa esitetään Fuchsin ryhmän käsittelyä pohjustavia määritelmiä. Niitä ovat pisteen ympäristö, diskreetti joukko, lokaalisti äärellisyys, ryhmän toiminnan rata ja kiinnittäjä sekä aidosti epäjatkuva toiminta. [9, s.22-23]

**MÄÄRITELMÄ 3.1.** Avointa joukkoa  $U \subset X$ , joka sisältää pisteen  $x \in X$ , kutsutaan pisteen  $x$  *ympäristöksi*.

Muistetaan, että jono  $x_n \in X$  konvergoi kohti pistettä  $x \in X$ , jos kaikilla  $\epsilon > 0$  on olemassa  $N \in \mathbb{N}$  siten, että kaikilla  $n \geq N$  pätee  $d(x_n, x) < \epsilon$ . Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja ja seuraavat suoraan määritelmistä [11, s.3]:

**LEMMA 3.2.** *Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja  $x_n, x \in X$ . Tällöin  $x_n \rightarrow x$  kun  $n \rightarrow \infty$ , jos ja vain jos on olemassa luku  $N \in \mathbb{N}$  siten, että  $x_n \in U$  kaikilla  $n \geq N$ , missä  $U$  on pisteen  $x$  ympäristö.*

**MÄÄRITELMÄ 3.3.** Olkoon  $Y$  jokin joukon  $X$  osajoukko. Sanotaan, että

- (1) piste  $x \in X$  on joukon  $Y$  *rajapiste*, jos jokainen pisteen  $x$  ympäristö sisältää pisteen  $y \in Y$  siten, että  $y \neq x$ .
- (2) piste  $x \in Y$  on *eristetty* joukossa  $Y$ , jos on olemassa  $r > 0$  siten, että

$$B(x, r) \cap Y = \{x\},$$

toisin sanoen muita joukon  $Y$  pisteitä ei ole alle etäisyydellä  $r$  pisteestä  $x$  [11, s.6].

Seuraavaksi määriteltävää käsitettä *diskreetti joukko* tarvitaan, kun tutkitaan Fuchsin ryhmiä. Fuchsin ryhmiä käsiteltäessä keskitytään nimittäin ryhmän  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  aliryhmiin, jotka ovat diskreettejä. Diskreettisyys on keskeisessä roolissa myös monilla geometrian aloilla, topologiassa ja käsiteltäessä metrisiä avaruuksia.

**MÄÄRITELMÄ 3.4.** Olkoon  $(X, \Sigma)$  metrinen avaruus. Joukko  $E \subset X$  on *diskreetti*, jos ja vain jos kaikilla  $e \in E$  on olemassa  $S \in \Sigma$  siten, että  $E \cap S = \{e\}$ .

HUOMAUTUS 3.5. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Osajoukko  $Y \subset X$  on diskreetti, jos jokainen piste  $y \in Y$  on eristetty eli on olemassa  $\delta > 0$  siten, että  $d(y, y') > \delta$ , kun  $y' \in Y$  ja  $y \neq y'$ .

ESIMERKKI 3.6. [10, s. 62-63]

- (1) Missä tahansa metrisessä avaruudessa yhden pisteen  $x$  muodostama joukko  $\{x\}$  on diskreetti.
- (2) Kokonaislukujen joukko  $\mathbb{Z}$  on reaaliakselin  $\mathbb{R}$  diskreetti osajoukko: olkoon piste  $n \in \mathbb{Z}$  ja valitaan  $\delta = \frac{1}{2}$ . Jos tällöin pätee  $|m - n| < \delta$  jollekin  $m \in \mathbb{Z}$ , niin on oltava  $m = n$ , koska kahden kokonaisluvun etäisyys on vähintään yksi (ja aina kokonaisluku).
- (3) Rationaalilukujen joukko  $\mathbb{Q}$  ei ole reaalinumerien diskreetti osajoukko, sillä rationaaliluvut ovat tiheässä.
- (4) Joukko  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \subset \mathbb{R}$  on diskreetti: olkoon  $y = \frac{1}{n}$  ja valitaan  $\delta = \frac{1}{n(n+1)}$ . Tällöin pisteelle  $y' \in Y$  pätee  $|y - y'| < \frac{1}{n(n+1)}$ , vain kun  $y' = 1/n$ .
- (5) Joukko  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\} \cup \{0\}$  ei ole diskreetti, koska 0 ei ole eristetty: muotoa  $\frac{1}{n}$  olevat pisteet voivat tulla mielivaltaisen lähelle nollaa vaikka  $\delta$  valittaisiin kuinka pieneksi tahansa.

MÄÄRITELMÄ 3.7. Olkoot  $(X, d)$  metrinen avaruus. Tällöin joukon  $X$  osajoukkojen kokoelmaa  $\mathcal{P} \subset \{A : A \subset X\}$  kutsutaan *lokaalisti äärelliseksi*, jos ja vain jos kaikille kompakteille joukoille  $K \subset X$  pätee  $A \cap K \neq \emptyset$  korkeintaan äärellisen monella  $A \in \mathcal{P}$ .

Ryhmän toimintaan joukolla liittyy kaksi käsitettä, rata ja kiinnittäjä, jotka esitellään seuraavaksi. Radan ja kiinnittäjän määrittelyä tarvitaan aidosti epäjatkovaa toimintaa määriteltäessä ja Fuchsien ryhmää koskevissa tuloksissa.

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja  $G$  ryhmä, joka toimii joukolla  $X$ . Tällöin alkion  $x \in X$

- *rata*  $G(x)$  on joukko

$$G(x) = \{g(x) : g \in G\}$$

- *kiinnittäjä*  $G_x$  on joukko

$$G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$$

Kun alkioon  $x$  sovelletaan kaikkia ryhmän  $G$  kuvauksia, niin kuvapisteen muodostama joukko on alkion  $x$  rata. Alkion  $x$  kiinnittäjien joukko taas muodostuu niistä ryhmän  $G$  kuvauksista, jotka kuvaavat alkion  $x$  alkuperäiselle paikalleen.

ESIMERKKI 3.9. [11, s. 8]

(1) Olkoon  $X = \mathbb{D}$  ja metriikkana hyperbolinen metriikka  $\rho^*$ . Ryhmän

$$G = \{T_\theta(x) = e^{2\pi i\theta} x : \theta \in [0, 1)\}$$

muodostavat kierrot origon ympäri kulman  $\theta$  verran. Olkoon  $x = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ . Tällöin alkion  $x \in X$  rata  $G(x)$  on (euklidinen) ympyrä, jonka säde on  $r$ . Jos  $x \neq 0$ , niin alkion  $x$  kiinnittää ainoastaan identtinen kuvaus  $T_0(x) = e^{2\pi i \cdot 0} x = x$ . Huomataan, että jokainen ryhmän  $G$  muunnos kiinnittää origon, joten origon kiinnittäjien joukon muodostaa kaikki ryhmän  $G$  alkiot.

(2) Olkoon  $X = \mathbb{H}$  ja metriikkana hyperbolinen metriikka  $\rho$ . Ryhmän

$$G = \{T_n(x) = x + n : n \in \mathbb{Z}\}$$

muodostavat siirrot kokonaisluvun  $n$  verran. Tällöin alkion  $x \in \mathbb{H}$  radan muodostaa pistejoukko

$$G(x) = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$$

eli kaikki alkion  $x$  kokonaislukutranslaatiot. Alkion  $x \in X$  kiinnittäjien joukossa on vain identtinen kuvaus, toisin sanoen alkion  $x$  ainoa kiinnittäjä on kuvaus  $T_0(x) = x$ .

Edellisen esimerkin kohdassa (2) joukon  $X$  jokaisen alkion rata on joukon  $X$  diskreetti osajoukko ja jokaisen pisteen kiinnittäjien joukko on äärellinen. Heuristisesti tämä tarkoittaa sitä, että jos  $x \in X$ , niin ryhmän  $G$  toiminta joukolla  $X$  aiheuttaa sen, että alkion  $x$  radan pisteet ovat kaukana alkiosta  $x$  paitsi äärellisen monella ryhmän  $G$  alkiolla, jotka kiinnittävät alkion  $x$ . Voi kuitenkin olla (kuten edellisen esimerkin kohdassa (1)), että alkion  $x$  rata sisältää alkiota, jotka ovat mielivaltaisen lähellä alkiota  $x$  ja joillekin pisteille (esimerkissä origolle) on äärettömän monta kiinnittäjää. Nämä havainnot johtavat seuraavaan uuteen määritelmään. [11, s.9]

MÄÄRITELMÄ 3.10. [11, s. 9] Ryhmä  $G$  toimii *aidosti epäjatkovasti* metrisessä avaruudessa  $(X, d)$ , jos ja vain jos rata  $G(x)$  on lokaalisti äärellinen jokaiselle joukon  $X$  alkiolle  $x$ .

HUOMAUTUS 3.11. Ryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $X$ , jos ja vain jos kaikille joukon  $X$  kompakteille osajoukoille  $K$  ja pisteille  $x \in X$  leikkaus  $K \cap G(x)$  on äärellinen.

Voidaan ajatella, että alkion  $x$  sisältävä kompakti joukko on pieni, suljettu joukko alkion  $x$  ympärillä, jolloin ryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkovasti, jos mille tahansa

alkiolle  $x \in X$  kaikki paitsi äärellisen moni ryhmän  $G$  kuvaus vie alkion  $x$  kauas alkuperäisestä paikastaan. Tutkitaan esimerkkinä joukkoa  $X = \mathbb{R}^2$  ja tavallista euklidista metriikkaa. Olkoon

$$\Gamma = \{T_{n,m}(x, y) = (x + n, y + m) : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$$

joukko isometrioita, joissa kuvauksena on siirto kokonaisluvun verran. Tällöin  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{R}^2$ , sillä selvästi sellaisia kokonaislukupareja  $(n, m)$ , jotka siirtävät alkion  $(x, y)$  kauas lähtöpisteestään, on äärettömän monta ja vain äärellisen moni siirto jättää sen lähelle alkupistettä  $(x, y)$ . [11, s.9]

### 3.2. Fuchsian ryhmät

MÄÄRITELMÄ 3.12. Ylemmän puolitason isometrioiden ryhmän  $\text{Isom}(\mathbb{H})$  diskreettiä, suuntautumisen säilyttävien muunnosten aliryhmää kutsutaan *Fuchsian ryhmäksi*.

Tämän luvun tarkoituksena on näyttää, että ryhmä  $G$  on *Fuchsian ryhmä*, jos ja vain jos se toimii aidosti epäjatkovasti hyperbolisessa avaruudessa. Käsittelyssä keskitytään ryhmiin, jotka koostuvat Möbius-kuvauksista ja tutkitaan sellaisia joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnosten aliryhmiä, jotka muodostavat diskreettejä osajoukkoja. Tätä varten on oltava keino erottaa, milloin kaksi Möbius-muunnosta on lähellä toisiaan, mikä tehdään asettamalla metriikka avaruuteen  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  eli ylemmän puolitason Möbius-muunnosten joukkoon.

Intuitiivisesti ajateltuna kaksi joukon  $\mathbb{H}$  normalisoitua Möbius-muunnosta on *lähellä toisiaan*, jos niitä määrittävät reaali- ja imaginaarilukukertoimet  $(a, b, c, d)$  ovat likimain yhtä suuret. Tällä tavalla määriteltynä epämääräisyyttä aiheutuu kuitenkin siitä, että normalisoidut Möbius-muunnokset

$$T_1(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ja

$$T_2(z) = \frac{-az - b}{-cz - d}$$

määräävät saman muunnoksen, sillä  $T_2(z) = T_1(z)$  kaikilla  $z \in \mathbb{H}$ . Tilanteet, joissa kahden muunnoksen  $T_1, T_2 \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  määrittävät kertoimet ovat toistensa vastalukuja, ovat kuitenkin ainoat erityistapaukset metriikkaa joukkoon  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  asetettaessa.

Sanotaan, että (normaalimuotoiset) joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnokset  $T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$  ja  $T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$  ovat lähellä toisiaan, jos joko kertoimet  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  ja  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$

tai  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  ja  $(-a_2, -b_2, -c_2, -d_2)$  ovat reaalityyppisiä lähellä toisiaan. Formaalisti, asetetaan metriikka  $d$  avaruuteen  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  asettamalla [11, s.12]

$$d(T_1, T_2) = \min\{\|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (a_2, b_2, c_2, d_2)\|, \|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (-a_2, -b_2, -c_2, -d_2)\|\},$$

missä  $T_1, T_2 \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  ja  $\|\cdot\|$  tarkoittaa euklidista metriikkaa avaruudessa  $\mathbb{R}^4$ .

**HUOMAUTUS 3.13.** Fuchsian ryhmiä voidaan tutkia myös yksikkökiekossa eli tarkastella yksikkökiekkon Möbius-muunnoksia. Tällöin joukon  $\mathbb{D}$  Möbius-muunnosten joukkoon pitää määrittellä metriikka, mikä onnistuu samalla tavalla kuin yllä määriteltäessä metriikkaa joukkoon  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

**HUOMAUTUS 3.14.**

- (1) Ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H}$  määriteltyjen Möbius-muunnosten aliryhmä on Fuchsian ryhmä, jos se on diskreetti. Näin ollen, jos  $\Gamma$  on Fuchsian ryhmä ja  $T_n \in \Gamma$  on jono kuvauksia siten, että  $T_n \rightarrow T \in \Gamma$ , niin  $T_n = T$  tarpeeksi suurelle indeksille  $n$ . Samanlaiset määritelmät pätevät myös hyperbolisen tason Poincarén kiekkomallissa  $\mathbb{D}$ . [10, s. 128]
- (2) Diskreetiltä osajoukolta vaaditaan, että jokainen sen pisteistä on eristetty. Aliryhmän tapauksessa diskreettisuuden (ja siten sen, että aliryhmä on Fuchsian ryhmä) osoittamiseksi riittää osoittaa, että aliryhmän identiteettialkio on eristetty. [10, s. 65]

Seuraavan lauseen todistuksessa käytetään aputulosta (aputulosta ei todisteta): Oletetaan, että  $G$  on ryhmä isometrioita, joka toimii joukolla  $X$  ja piste  $z$  kuuluu joukkoon  $X$ . Jos pisteen  $z$  rata  $G(z)$  on diskreetti, niin on olemassa luku  $\epsilon > 0$  siten, että

$$B(g(z), \epsilon) \cap G(z) = \{g(z)\}$$

kaikilla  $g \in G$ . Lisäksi, jos rata  $G(z)$  on diskreetti ja  $K$  on kompakti joukko, niin joukko  $K \cap G(z)$  on äärellinen [11, s. 10].

**LAUSE 3.15.** Ryhmän  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  aliryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkuvasti joukolla  $\mathbb{H}$ , jos ja vain jos jokaiselle pisteelle  $z \in \mathbb{H}$  rata  $G(z)$  on diskreetti joukko hyperbolisen tason  $\mathbb{H}$  pisteitä (toisin sanoen radalla  $G(z)$  ei ole kasautumispisteitä joukossa  $\mathbb{H}$ ) ja kiinnittäjien joukko  $G_z$  on äärellinen ryhmä.

**TODISTUS.** Oletetaan ensin, että pisteen  $z \in \mathbb{H}$  rata  $G(z)$  on diskreetti ja kiinnittäjien joukko  $G_z$  on äärellinen ja osoitetaan, että ryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkuvasti. Olkoon  $K \subset \mathbb{H}$  kompakti ja epätyhjä joukko. Koska rata  $G(z)$  on diskreetti ja



joukko  $K$  on kompakti, niin

$$G(z) \cap K = \{z_1, \dots, z_m\}$$

on äärellinen joukko. Väite seuraa, jos joukko  $G^j = \{g \in G : g(z) = z_j\}$  on äärellinen kaikilla  $j \in \{1, \dots, m\}$ , sillä

$$\{g \in G : g(z) \in K\} = \bigcup_{j=1}^m G^j.$$

Olkoon  $g^j \in G^j$  kaikille  $j$  siten, että  $g^j(z) = z_j$ . Olkoon pisteen  $z$  kiinnittäjien joukko  $G_z = \{f_1, \dots, f_n\}$  ja olkoon  $g \in G^j$ . Tällöin  $g(z) = z_j$  ja  $g_j^{-1} \circ g(z) = z$  siten, että  $g_j^{-1} \circ g \in G_z$ . Näin ollen pätee  $g_j^{-1} \circ g = f_i$  jollekin  $1 \leq i \leq n$  ja  $g = g^j f_i$ . Siispä  $G^j$  on äärellinen.

Oletetaan sitten, että ryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$ . Olkoon piste  $z \in \mathbb{H}$  ja oletetaan, että rata  $G(z)$  ei ole diskreetti. Tällöin on olemassa jono  $\{g_n\} \in G$  ja piste  $z_0 \in \mathbb{H}$  siten, että  $g_n(z) \rightarrow z_0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , mutta  $g_n(z) \neq z_0$  kaikilla  $n$  ja  $g_n \neq g_m$ , kun  $n \neq m$ .

Kiinnitetään luku  $\epsilon > 0$  ja olkoon joukko  $K$  suljettu pallo  $K = \overline{B(z, \epsilon)}$ , joka on kompakti. Koska  $g_n(z) \rightarrow z$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , niin on olemassa indeksi  $N \in \mathbb{N}$  siten, että  $g_n(z) \in K$ , kun  $n \geq N$ . Koska tällaisia lukuja  $n$  on äärettömän monta, ollaan ristiriidassa oletuksen kanssa.

Oletetaan sitten väitteen vastaisesti, että kiinnittäjien joukko  $G_z$  on ääretön jollekin pisteelle  $z \in \mathbb{H}$  ja merkitään  $\Gamma := G_z$ . Kun ryhmä  $\Gamma$  konjugoidaan sopivalla Möbius-muunnoksella, voidaan olettaa, että  $z = 0$ . Koska ryhmän  $\Gamma$  toiminta avaruudessa  $\mathbb{H}$  on isometria, niin pisteen  $z_1 = \frac{1}{2}$  rata kuuluu suljettuun hyperboliseen kiekkoon eli pätee  $\Gamma(z_1) \in \overline{B(0, 1)}$ . Osoitetaan, että  $\Gamma(z_1)$  on äärellinen joukko. Jos  $\Gamma(z_1)$  on ääretön, niin sillä on kasautumispiste kiekossa  $\overline{B(0, 1)}$ , koska suljetut joukot ovat kompakteja. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että ryhmä  $G$  ja siten ryhmä  $\Gamma$  toimivat aidosti epäjatkovasti avaruudessa  $\mathbb{H}$ . Siten rata  $\Gamma(z_1)$  on äärellinen. Koska oletettiin, että  $\Gamma$  on ääretön, on olemassa piste  $z_2 \in \Gamma(z_1)$  ja ääretön osajoukko  $S \subset \Gamma$ , jolle pätee  $S(z_1) = \{z_2\}$ .

Valitaan sitten piste  $z_3 \in \overline{B(0, 1)}$ , jolle pätee  $z_3 \notin \Gamma(z_1)$  ja  $z_3 \neq 0$ . Vastaavasti kuin edellä havaitaan, että  $S(z_3)$  on äärellinen joukko. Löydetään piste  $z_4 \in S(z_3)$  ja ääretön osajoukko  $S' \subset S$ , jolle pätee  $S'(z_3) = \{z_4\}$ .

Näin ollen kaikilla kuvauksilla  $g \in S'$  pätee  $g(0) = 0, g(z_1) = z_2$  ja  $g(z_3) = z_4$ . Koska joukon  $S'$  kuvaukset ovat Möbius-muunnoksia, niin joukko  $S'$  koostuu vain

identtisestä kuvauksesta eli  $S' = \{id\}$ . Tämä on ristiriita, sillä  $S'$  on ääretön joukko. Siten kiinnittäjien joukko  $G_z$  ei voi olla ääretön eli joukko  $G_z$  on äärellinen.  $\square$

ESIMERKKI 3.16. [11, s.13], [4, s.30]

- (1) Olkoon  $\Gamma = \{T_n(z) = 2^n z : n \in \mathbb{Z}\}$  joukko kuvauksia. Piste  $z \in \mathbb{H}$  rata on joukko

$$G(z) = \{2^n z : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{H}.$$

Kiinnitetään piste  $2^n z$  ja olkoon  $\delta = 2^{n-1}|z|$ . Tällöin  $|2^m z - 2^n z| \geq \delta$ , kun  $m \neq n$ , joten rata  $G(z)$  on joukon  $\mathbb{H}$  diskreetti osajoukko. Piste  $z \in \mathbb{H}$  ainoa kiinnittäjä on kuvaus  $z \mapsto 2^0 z$ . Näin ollen  $\Gamma$  on Fuchsin ryhmä.

- (2) Koska metrisen avaruuden äärellinen osajoukko on diskreetti, niin kaikki ryhmän  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  äärelliset aliryhmät ovat Fuchsin ryhmiä.
- (3) Joukon  $\mathbb{H}$  Möbius-muunnosten aliryhmä  $\Gamma_1 = \{T_n : T_n(z) = z+n : n \in \mathbb{Z}\}$  eli siirrot kokonaisluvun verran muodostavat Fuchsin ryhmän, sillä esimerkissä 3.6 todettiin, että joukko  $\mathbb{Z}$  on diskreetti. Sen sijaan ryhmä  $\Gamma_2 = \{T_b(z) = z+b : b \in \mathbb{R}\}$  ei ole diskreetti (eikä siten Fuchsin ryhmä), sillä kokonaisluvut ovat tiheässä.
- (4) Olkoon  $\theta \in \mathbb{R}$  ja joukon  $\mathbb{D}$  Möbiusmuunnosten aliryhmä  $\Gamma = \{T_\theta^n(z) = T_\theta^n(z) = e^{2\pi i n \theta} z : n \in \mathbb{Z}\}$ . Rationaalisille kulman  $\theta$  arvoille  $\Gamma$  on äärellinen ryhmä ja siten Fuchsin ryhmä.
- (5) Modulaariryhmä  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  koostuu muunnoksista  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , joille  $(a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ab - bc = 1)$ . Se on ryhmän  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  diskreetti aliryhmä ja siten Fuchsin ryhmä.
- (6) Ryhmän  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  laajennus  $\text{PS}^*\text{L}(2, \mathbb{Z}) = \text{S}^*\text{L}(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I_2\}$  (missä  $\text{S}^*\text{L}(2, \mathbb{Z})$  on ryhmä kokonaislukumatriiseja

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

joille  $\det(g) = \pm 1$ ) on esimerkki diskreetistä ryhmästä joukon  $\mathbb{H}$  isometrioita, joka ei kuitenkaan ole Fuchsin ryhmä.

Ryhmän aidosti epäjatkuva toiminta voidaan määritellä myös seuraavan lauseen mukaisesti.

LAUSE 3.17. *Ryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkuvasti joukolla  $X$ , jos ja vain jos jokaisella pisteellä  $x \in X$  on ympäristö  $V$  siten, että*

$$T(V) \cap V \neq \emptyset$$

*ainoastaan äärellisen monella kuvauksella  $T \in G$ .*

TODISTUS. [4, s.28] Oletetaan, että ryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $X$ . Tällöin kaikille pisteille  $x \in X$  rata  $G(x)$  on diskreetti ja jokaisella pisteellä  $x \in X$  on äärellinen määrä kiinnittäjiä (toisin sanoen joukko  $G_x$  on äärellinen). Näin ollen on olemassa pallo  $B(x, \epsilon)$  mielivaltaiselle pisteelle  $x \in X$ , joka ei sisällä radan  $G(x)$  muita pisteitä kuin pisteen  $x$ .

Olkoon  $V \subset B(x, \frac{\epsilon}{2})$  jokin pisteen  $x$  ympäristö. Tällöin, jos  $T(V) \cap V \neq \emptyset$ , niin  $T$  on pisteen  $x$  kiinnittäjä, mikä on totta vain äärellisen monelle kuvaukselle  $T \in G$ .

Kääntäen: jos pisteen  $x$  ympäristölle  $V$  ja äärellisen monelle kuvaukselle  $T \in G$  pätee  $T(V) \cap V \neq \emptyset$ , niin väite seuraa, jos jokainen rata on diskreetti ja jokaisen pisteen  $z \in X$  kiinnittäjien lukumäärä on äärellinen.

Jos pisteen  $z$  rata ei ole diskreetti, sillä on kasautumispiste  $z_0$ . Pisteen  $z_0$  ympäristöissä on äärettömän monta ryhmän  $G$  kuvausten kuvapistettä, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Vastaavasti, jos  $T(z) = z$  äärettömän monelle kuvaukselle  $T \in G$ , niin pisteen  $z$  mielivaltainen ympäristö  $V$  leikkaa äärettömän montaa kuvajoukkoa  $T(V)$ , missä  $T \in G$ .  $\square$

Seuraavien aputulosten avulla on tarkoituksena näyttää, että joukon  $\mathbb{H}$  Möbiusmuunnosten aliryhmä on Fuchsin ryhmä, jos ja vain jos aliryhmä toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$ .

LEMMA 3.18. [4, s.30] *Olkoon piste  $z_0 \in \mathbb{H}$  ja joukko  $K$  joukon  $\mathbb{H}$  kompakti osajoukko. Tällöin joukko*

$$E = \{T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}) : T(z_0) \in K\}$$

*on kompakti.*

TODISTUS. [4, s.30-31] Määrittelynsä nojalla (ks. huomautus 1.39) joukko  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  koostuu joukon  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  ekvivalenssiluokista. Siten on olemassa kuvaus  $\psi : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\psi \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = T$ , missä  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .

Osoitetaan, että joukko

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) : \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \in K \right\}$$

on kompakti, jolloin  $E = \psi(E_1)$  on kompakti. Joukon  $E_1$  kompaktius osoitetaan näyttämällä, että se on suljettu ja rajoitettu, kun se ajatellaan joukon  $\mathbb{R}^4$  osajoukkona (samaistetaan matriisi  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ja piste  $(a, b, c, d)$ ). Tarkastellaan matriisia  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  ja jatkuvaa kuvausta  $\beta : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}, \beta(A) = \psi(A)(z_0) = \frac{az_0+b}{cz_0+d}$ . Koska  $E_1 = \beta^{-1}(K)$  ja joukko  $K$  on suljettu, niin  $E_1$  on suljettu.

Näytetään sitten, että  $E_1$  on rajoitettu. Koska  $K$  on rajoitettu, on olemassa luku  $M_1 > 0$  siten, että

$$\left| \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right| < M_1$$

kaikille matriiseille  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in E_1$ .

Koska  $K$  on kompakti joukossa  $\mathbb{H}$ , on olemassa vakio  $M_2 > 0$  siten, että

$$\mathrm{Im} \left( \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right) \geq M_2.$$

Koska kompleksiluvuille  $z$  ja  $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  pätee  $\mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ , niin yllä olevan epäyhtälön vasemmasta puolesta saadaan

$$\mathrm{Im} \left( \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right) = \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{|cz_0 + d|^2} \geq M_2,$$

ja edelleen

$$|cz_0 + d| \leq \sqrt{\left( \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{M_2} \right)}.$$

Siten saadaan

$$|az_0 + b| \leq M_1 \sqrt{\left( \frac{\mathrm{Im}(z_0)}{M_2} \right)}.$$

Tämän perusteella luvut  $a, b, c$  ja  $d$  ovat rajoitettuja ja edelleen joukko  $E_1$  on rajoitettu.  $\square$

LEMMA 3.19. [4, s.31] *Olkoon  $\Gamma$  ryhmän  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  aliryhmä, joka toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$  ja piste  $p \in \mathbb{H}$ , jonka jokin joukon  $\Gamma$  alkio kiinnittää. Tällöin pisteellä  $p$  on olemassa ympäristö  $W$  siten, että mikään muu ympäristön  $W$  pisteistä ei ole kiintopiste joukon  $\Gamma$  kuvauksille (poislukien identtinen kuvaus).*

TODISTUS. [4, s.31-32] Oletetaan, että  $T(p) = p$  jollekin  $T \in \Gamma, T \neq \mathrm{Id}$ . Oletetaan lisäksi, että pisteen  $p$  missä tahansa ympäristössä on ryhmän  $\Gamma$  muunnosten kiintopisteitä, eli että on olemassa jono  $(p_n)$  joukon  $\mathbb{H}$  pisteitä  $p_n \rightarrow p$  siten, että muunnokselle  $T_n \in \Gamma$  pätee  $T_n(p_n) = p_n$ .

Olkoon  $\bar{B}(p, 3\epsilon)$  suljettu hyperbolinen kiekko. Koska hyperbolisen metriikan indusoima topologia vastaa euklidista topologiaa, on  $\bar{B}(p, 3\epsilon)$  kompakti.

Koska  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti, on joukko  $\{T \in \Gamma : T(p) \in \bar{B}(p, 3\epsilon)\}$  äärellinen. Kun  $n > N$  ja  $N$  on iso, niin

$$\rho(T_n(p), p) > 3\epsilon,$$

kun  $\rho(p_n, p) < \epsilon$ . Kolmioepäyhtälön ja kuvauksen  $T$  isometrisyyden nojalla

$$\rho(T_n(p), p) \leq \rho(T_n(p), T_n(p_n)) + \rho(T_n(p_n), p) = \rho(p, p_n) + \rho(p_n, p) < 2\epsilon,$$

mikä on ristiriita. □

HUOMAUTUS 3.20.

- (1) Lemma 3.19 tarkoittaa, että jos jollekin kuvaukselle  $T \in \Gamma$  ja pisteelle  $p \in \mathbb{H}$  pätee  $T(p) = p$ , niin mikään epäidenttinen joukon  $\Gamma$  kuvaus ei kiinnitä yhtään pisteen  $p$  lähellä olevista pisteistä.
- (2) Lemmasta 3.19 seuraa, että jos  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti, niin on olemassa piste  $p' \in \mathbb{H}$  siten, että  $T(p') \neq p'$  kaikille  $T \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ . [10, s. 130]

LAUSE 3.21. *Olkoon  $\Gamma$  ryhmän  $PSL(2, \mathbb{R})$  aliryhmä. Tällöin  $\Gamma$  on Fuchsian ryhmä, jos ja vain jos  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$ .*

TODISTUS. [4, s. 32] Osoitetaan ensin, että jos  $\Gamma$  on Fuchsian ryhmä, niin se toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$ : olkoon  $z \in \mathbb{H}$  ja joukko  $K \subset \mathbb{H}$  kompakti. Tällöin

$$\{T \in \Gamma : T(z) \in K\} = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}) : T(z) \in K\} \cap \Gamma$$

on äärellinen joukko kompaktin (lemma 3.18) ja diskreetin joukon leikkausjoukkona, joten  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti.

Oletetaan sitten, että  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti, mutta se ei ole ryhmän  $PSL(2, \mathbb{R})$  diskreetti aliryhmä. Lemman 3.19 ja huomautuksen 3.20 perusteella on olemassa  $p \in \mathbb{H}$  siten, että joukon  $\Gamma$  kuvauksista ainoastaan identtinen kuvaus kiinnittää pisteen  $p$ .

Koska  $\Gamma$  ei ole diskreetti, niin on olemassa kasautumispiste  $T \in \Gamma$ . Olkoon  $\{S_k\}$  jono kuvauksia, jolle pätee  $S_k \rightarrow T$ , kun  $k \rightarrow \infty$  eli jono  $\{S_k\}$  suppenee kohti kuvausta  $T$ . Tiedetään, että matriisien suppeneminen on yhtäpitävää matriisien alkioiden suppenemisen kanssa, joten jonolle  $\{T^{-1}S_k\}$  pätee  $T^{-1}S_k \rightarrow T^{-1}T = \text{Id}$ , kun  $k \rightarrow \infty$ . Siten  $T^{-1}S_k(p) \rightarrow \text{Id}(p) = p$ , kun  $k \rightarrow \infty$  ja pätee  $T^{-1}S_k(p) \neq p$ .

Olkoon  $U$  jokin pisteen  $p$  ympäristö. Tällöin  $T^{-1}S_k(p) \in U$ , kun  $k$  on tarpeeksi suuri. Lisäksi pätee  $T^{-1}S_k(p) \in T^{-1}S_k(U)$ , sillä  $U$  on pisteen  $p$  ympäristö. Näin ollen on olemassa äärettömän monta kuvausta  $T^{-1}S_k \in \Gamma$  siten, että  $T^{-1}S_k(U) \cap U \neq \emptyset$ . □

Lauseen 3.15 mukaan ryhmän  $PSL(2, \mathbb{R})$  aliryhmä  $G$  toimii aidosti epäjatkovasti, jos ja vain jos kaikkien pisteiden radat ovat diskreettejä ja kiinnittäjien lukumäärä on äärellinen. Toisaalta luvussa 2.1 Möbius-muunnosten kiintopisteitä tutkittaessa todettiin, että Möbius-muunnoksella on vain yksi tai kaksi kiintopistettä ja sellaisia Möbius-muunnoksia, jotka kiinnittävät pisteen  $z$ , on hyvin vähän. Siksi Möbius-muunnoksia käsiteltäessä ei tarvitse tarkastaa erikseen, onko jokaisen pisteen kiinnittäjien lukumäärä äärellinen, vaan lause 3.15 voidaan antaa Fuchsin ryhmille seuraavasti.

SEURAUUS 3.22. [4, s.32] *Olkoon  $\Gamma$  ryhmän  $PSL(2, \mathbb{R})$  aliryhmä. Tällöin  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$ , jos ja vain jos kaikille  $z \in \mathbb{H}$  ja kaikille joukon  $\Gamma$  kuvauksille  $T$  rata  $T(z)$  on joukon  $\mathbb{H}$  diskreetti osajoukko.*

TODISTUS. [4, s.32] Oletetaan, että  $\Gamma$  toimii aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$  ja osoitetaan, että radat  $T(z)$  ovat ylemmän puolitason  $\mathbb{H}$  diskreettejä osajoukkoja. Koska  $\Gamma$  toimii epäjatkovasti, niin jokaisen joukon  $\Gamma$  kuvauksen rata on lokaalisti äärellinen joukko pisteitä. Näin ollen se on myös joukon  $\mathbb{H}$  diskreetti joukko.

Kääntäen, oletetaan, että kaikille  $z \in \mathbb{H}$  ja kaikille joukon  $\Gamma$  kuvauksille  $T$  radat  $T(z)$  ovat joukon  $\mathbb{H}$  diskreettejä osajoukkoja. Oletetaan väitteen vastaisesti, että  $\Gamma$  ei toimi aidosti epäjatkovasti joukolla  $\mathbb{H}$ , eikä se siten ole edellisen Lauseen 3.21 nojalla diskreetti. Koska  $\Gamma$  ei ole diskreetti, on olemassa kasautumispiste  $T \in \Gamma$  ja jono  $\{T_k\}$  kuvauksia, jotka suppenevat kohti kuvausta  $T$ . Lauseen 3.21 todistusta mukaillen saadaan konstruointia jono  $\{T_k(s)\}$ , johon ei kuulu piste  $s$  siten, että  $T_k(s) \rightarrow s$ . Näin ollen pisteen  $s$  rata ei ole diskreetti.  $\square$

SEURAUUS 3.23. [4, s.33] *Jos  $\Gamma$  on Fuchsin ryhmä, niin sen elliptisten kuvausten kiintopisteet eivät kasaudu joukossa  $\mathbb{H}$ .*

TODISTUS. [4, s. 33] Olkoon  $z \in \mathbb{H}$  ja  $K \subset \mathbb{H}$  sellainen kompakti joukko, että  $z \in K$ . Oletetaan, että  $z = T(z)$  jollekin  $T \in \Gamma$ , minkä perusteella leikkausjoukko  $K \cap T(K)$  on epätyhjä. Edellisen Lauseen 3.21 näin voi päteä vain äärellisen monelle kuvaukselle  $T \in \Gamma$ , joten joukossa  $K$  on vain äärellisen monta kiintopistettä elliptiselle kuvaukselle.  $\square$

HUOMAUTUS 3.24. Lause 3.21 pätee vain joukon  $\mathbb{H}$  pisteille, mutta ei reunalla  $\partial\mathbb{H}$ . Jos tarkastellaan esimerkiksi pisteen  $0 \in \partial\mathbb{H}$  rataa ja ryhmänä on Fuchsin ryhmä  $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ , niin pisteen  $0$  rata on  $\Gamma(0) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , joka ei ole diskreetti.

SEURAUUS 3.25. [10, s. 132] *Olkoon  $\Gamma$  Fuchsin ryhmä ja piste  $z \in \mathbb{H}$ . Tällöin pisteen  $z$  radalla ei ole kasautumispisteitä joukossa  $\mathbb{H}$ .*

Siten, jos radalla  $\Gamma(z)$  on kasautumispiste, niin se sijaitsee joukon reunalla  $\partial\mathbb{H}$ . Tämä motivoi tarkastelemaan tarkemmin ratojen kasautumispisteitä, mihin keskitytään seuraavaksi.

### 3.3. Rajajoukko

Piste  $x \in X$  on on joukon  $Y \subset X$  kasautumispiste, jos jokainen pisteen  $x$  ympäristö sisältää pisteen  $y \in Y$  siten, että  $y \neq x$ . Tutkitaan seuraavaksi radan rajapisteitä, kun joukolla toimivana ryhmänä on Fuchsin ryhmä.

**HUOMAUTUS 3.26.** Tässä kappaleessa Fuchsin ryhmää merkitään symbolilla  $\Gamma$  ja pisteen  $z$  rataa  $\Gamma(z)$ .

**MÄÄRITELMÄ 3.27.** Olkoon  $\Gamma$  Fuchsin ryhmä, joka toimii joukolla  $\mathbb{H}$ , ja piste  $z_0 \in \mathbb{H}$ . Radan  $\Gamma(z_0)$  kasautumispisteiden joukkoa merkitään  $\Lambda(\Gamma(z_0))$ . Kaikkien joukon  $\mathbb{H}$  pisteiden ratojen kasautumispisteiden joukkoa kutsutaan *rajajoukoksi*, merkitään sitä  $\Lambda(\Gamma)$ .

Seuraavan lauseen mukaan radan kasautumispisteitä tutkittaessa puolitason pisteen valinnalla ei ole merkitystä, vaan kaikkien pisteiden ratojen rajapisteiden joukko on sama. Lausetta ei todisteta, mutta väite voidaan näyttää todeksi käyttämällä hyperbolisen trigonometrian kaavoja ja konvergenssiä [10, s. 133].

**LAUSE 3.28.** *Olkoon  $\Gamma$  Fuchsin ryhmä ja pisteet  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ . Tällöin pisteiden  $z_1$  ja  $z_2$  rajajoukoille pätee*

$$\Lambda(\Gamma(z_1)) = \Lambda(\Gamma(z_2)).$$

**TODISTUS.** Väite osoitetaan käyttämällä hyperbolisen trigonometrian kaavoja ja konvergenssiä [10, s. 133].  $\square$

Seurauksen 3.25 ja lauseen 3.28 nojalla pätee seuraavaa. Olkoot  $z$  joukon  $\mathbb{H}$  piste ja  $\{T_n\}$  jono Fuchsin ryhmän  $\Gamma$  kuvauksia, missä  $T_n \neq T_m$ . Jos jonolla  $\{T_n(z)\}$  on rajapiste  $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , niin  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Näin ollen kaikille joukolla  $\mathbb{H}$  toimiville Fuchsin ryhmille  $\Gamma$  pätee  $\Lambda(\Gamma) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  [4, s. 33]. Jos Fuchsin ryhmä  $\Gamma$  toimii Poincarén kiekossa, niin  $\Lambda(\Gamma) \subseteq \partial\mathbb{D}$  [10, s.132].

**ESIMERKKI 3.29.** [4, s. 33-34]

- (1) Jos  $\Gamma$  on ryhmä  $\Gamma = \{2^n z : n \in \mathbb{Z}\}$ , niin  $\Lambda(\Gamma) = \{0, \infty\}$ .
- (2) Jos  $\Gamma$  on kuvausten  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  muodostama ryhmä, niin  $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Muistetaan seuraavaa määritelmää varten, että kaksi Möbius-muunnosta  $T_1, T_2 \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  ovat konjugaatteja, jos on olemassa Möbius-muunnos  $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että  $T_2 = g^{-1}T_1g$ .

**MÄÄRITELMÄ 3.30.** Olkoon  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  Fuchsin ryhmiä. Sanotaan, että  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  ovat konjugaatteja, jos on olemassa Möbius-muunnos  $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että

$$\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1g = \{g^{-1}T_1g : T_1 \in \Gamma_1\}.$$

Fuchsin ryhmän  $\Gamma$  rajajoukon käsittely on yleensä yksinkertaisempaa, kun ryhmä  $\Gamma$  korvataan sen konjugaatilla.. Seuraava lause yhdistää konjugaattisten Fuchsin ryhmien rajapisteiden joukot.

**LAUSE 3.31.** *Olkoot  $\Gamma_1$  Fuchsin ryhmä ja  $\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1g$  sen kanssa konjugaattinen Fuchsin ryhmä. Tällöin*

$$\Lambda(\Gamma_2) = g^{-1}(\Lambda(\Gamma_1)).$$

**TODISTUS.** [10, s. 134] Olkoon  $\zeta \in \Lambda(\Gamma_1)$ . Tällöin on olemassa  $z \in \mathbb{H}$  ja jono  $T_n^{(1)} \in \Gamma_1$  siten, että  $T_n^{(1)}(z) \rightarrow \zeta$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Huomataan, että  $T_n^{(2)} = g^{-1}T_n^{(1)}g \in \Gamma_2$ , joten

$$\begin{aligned} T_n^{(2)}(g^{-1}z) &= g^{-1}T_n^{(1)}g(g^{-1}z) \\ &= g^{-1}(T_n^{(1)}(z)) \\ &\rightarrow g^{-1}(\zeta), \end{aligned}$$

joten

$$g^{-1}(\Lambda(\Gamma_1)) \subset \Lambda(\Gamma_2).$$

Toinen inklusio osoitetaan vastaavasti. □

Lauseesta 3.31 seuraa, että jos  $\Gamma_1$  ja  $\Gamma_2$  ovat konjugaatteja Fuchsin ryhmiä, niin niiden rajapisteiden joukoissa  $\Lambda(\Gamma_1)$  ja  $\Lambda(\Gamma_2)$  on yhtä monta alkioita, toisin sanoen  $g|_{\Lambda(\Gamma_1)} : \Lambda(\Gamma_1) \rightarrow \Lambda(\Gamma_2)$  on bijektio.

**HUOMAUTUS 3.32.** Rajajoukolle voidaan osoittaa myös seuraavat topologiset ominaisuudet [10, s. 135]:

- (1) Jos  $\Gamma$  on Fuchsin ryhmä, niin sen rajapisteiden joukko  $\Lambda(\Gamma)$  on suljettu.
- (2) Rajajoukko  $\Lambda(\Gamma)$  on kompakti.

Tutkitaan seuraavaksi Fuchsin ryhmän  $\Gamma$  toimintaa rajajoukolla  $\Lambda(\Gamma)$ . Jos  $T \in \Gamma$ , niin  $T(\Lambda(\Gamma)) = \{T(\zeta) : \zeta \in \Lambda(\Gamma)\} \subset \mathbb{H}$ .



LAUSE 3.33. *Rajajoukko  $\Lambda(\Gamma)$  pysyy muuttumattomana Fuchsin ryhmän  $\Gamma$  toiminnassa, toisin sanoen  $T(\Lambda(\Gamma)) = \Lambda(\Gamma)$  jollekin  $T \in \Gamma$ .*

TODISTUS. [10, s.135] Olkoon  $\zeta$  rajajoukon piste,  $\zeta \in \Lambda(\Gamma)$ . Tällöin on olemassa  $T_n \in \Gamma$  siten että  $T_n(z) \rightarrow \zeta$ . Koska  $\Gamma$  on ryhmä, niin  $TT_n \in \Gamma$ , joten  $TT_n(z) \rightarrow T(\zeta)$ . Tällöin  $T(\zeta) \in \Lambda(\Gamma)$  ja siten  $T(\Lambda(\Gamma)) \subset \Lambda(\Gamma)$ .

Vaihtamalla kuvauksen  $T$  tilalle sen käänteiskuvaus  $T^{-1}$  saadaan inklusio toiseen suuntaan osoitettua vastaavasti. Näin ollen  $T(\Lambda(\Gamma)) = \Lambda(\Gamma)$  jollekin  $T \in \Gamma$ .  $\square$

HUOMAUTUS 3.34. Voidaan osoittaa, että  $\Lambda(\Gamma)$  on pienin reunan osajoukko, joka säilyy muuttumattomana Fuchsin ryhmän  $\Gamma$  toiminnassa. Toisin sanoen, jos  $C \subset \partial\mathbb{H}$  on muuttumaton Fuchsin ryhmän  $\Gamma$  toiminnassa, niin  $\Lambda(\Gamma) \subset C$ . [10, s.135]

Lopuksi tässä luvussa käsitellään rajajoukon *mahtavuutta*. Joukon  $X$  mahtavuudella tarkoitetaan joukon  $X$  alkioden määrää. Nähdään, että jos  $\Gamma$  on Fuchsin ryhmä, niin rajajoukossa  $\Lambda(\Gamma)$  on joko 0, 1, 2 tai  $\infty$  monta alkioita. Tämän osoittamiseksi tarvitaan seuraavaa lausetta. Sitä varten muistetaan, että kuvaus  $T$  on parabolinen tai hyperbolinen Möbius-muunnos, jos kuvauksella  $T$  on 1 tai 2 kiintopistettä rajajoukossa  $\Lambda(\Gamma)$ . Näytetään, että jos  $\Gamma$  sisältää parabolisen tai hyperbolisen muunnoksen, niin kiintopisteet ovat joukossa  $\Lambda(\Gamma)$ .

LAUSE 3.35. *Olkoon  $\Gamma$  Fuchsin ryhmä.*

- (1) *Oletetaan, että  $T \in \Gamma$  on parabolinen Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{H}$ . Tällöin kuvauksen  $T$  kiintopiste  $\zeta \in \partial\mathbb{H}$  on rajajoukon  $\Lambda(\Gamma)$  piste.*
- (2) *Oletetaan, että  $T \in \Gamma$  on hyperbolinen Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{H}$ . Tällöin kuvauksen  $T$  kiintopisteet  $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\mathbb{H}$  ovat rajajoukon  $\Lambda(\Gamma)$  pisteitä.*

TODISTUS. [10, s. 135-136, 200]

- (1) Olkoon  $T \in \Gamma$  parabolinen Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{H}$ . Lauseen 2.19 nojalla kuvaus  $T$  on konjugaatti translaatiolle  $z \mapsto z + b, b \neq 0$ . Toisin sanoen on olemassa  $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että  $g^{-1}Tg(z) = z + b$ . Tällöin

$$g^{-1}T^n g(z) = z + bn \rightarrow \infty \in \partial\mathbb{H},$$

kun  $n \rightarrow \infty$ . Koska  $\zeta = g(\infty)$  on ainoa kuvauksen  $T$  kiintopiste, niin

$$T^n(g(z)) \rightarrow \zeta,$$

kun  $n \rightarrow \infty$ . Siten  $\zeta \in \Lambda(\Gamma)$ .

- (2) Olkoon  $T \in \Gamma$  hyperbolinen Möbius-muunnos joukossa  $\mathbb{H}$ . Lauseen 2.14 nojalla  $T$  voidaan konjugoida dilaatioksi  $z \mapsto kz$ , missä  $k > 1$ . Toisin sanoen on olemassa  $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  siten, että  $g^{-1}Tg(z) = kz$ . Tällöin pisteelle  $z \in \mathbb{H}$  pätee

$$g^{-1}T^n g(z) = k^n z \rightarrow \infty \in \partial\mathbb{H},$$

kun  $n \rightarrow -\infty$ . Vastaavasti  $g^{-1}T^n g(z) \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . Siten kuvauksen  $g^{-1}T^n g(z)$  rajapisteet ovat  $\{0, \infty\}$ . Näin ollen pisteelle  $z \in \mathbb{H}$ , radan  $T^n(z)$  on rajapisteet ovat  $\{0, \infty\}$ .

□

LAUSE 3.36. *Olkoon  $\Gamma$  Fuchsin ryhmä ja  $\Lambda(\Gamma)$  sen rajajoukko. Tällöin joukon  $\Lambda(\Gamma)$  mahtavuus on 0, 1, 2 tai  $\infty$ .*

TODISTUS. Todistus ohitetaan, mutta se löytyy lähteestä [10, s. 136-137]. □

Fuchsin ryhmät voidaan luokitella niiden rajajoukkojen mahtavuuksien perusteella. Sanotaan, että  $\Gamma$  on *yksinkertainen* (engl. *elementary*), jos joukon  $\Lambda(\Gamma)$  mahtavuus on äärellinen. Jos mahtavuus on ääretön, sanotaan Fuchsin ryhmää  $\Gamma$  *ei-yksinkertaiseksi* (engl. *non-elementary*).

### 3.4. Fuchsin ryhmien algebrallisista ominaisuuksista

Tämä luku esittelee lyhyesti Fuchsin ryhmien algebrallisia ominaisuuksia, muun muassa esimerkiksi syklistyyttä, kommutointia ja normalisoijia.

Ryhmän  $\Gamma$  sanotaan olevan *syklinen*, jos olemassa  $T \in \Gamma$  siten, että

$$\Gamma = \{T^n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Tällöin sanotaan, että  $T$  *virittää* ryhmän  $\Gamma$  (eli  $T$  on ryhmän  $\Gamma$  *virittäjä*). Jos syklistessä ryhmässä  $\Gamma$  on äärellinen määrä alkioita, sanotaan sen olevan *äärellisesti syklinen*. Jos alkioita on ääretön määrä, sanotaan syklisen ryhmän  $\Gamma$  olevan *äärettömästi syklinen*.

LEMMA 3.37.

- (1) *Kaikki joukon  $\mathbb{R}$  epätriviaalit diskreetit aliryhmät ovat äärettömästi syklisiä.*
- (2) *Kaikki joukon  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\phi}\}$  diskreetit aliryhmät ovat äärellisesti syklisiä.*

TODISTUS. [4, s.28-29]

- (1) Olkoon  $\Gamma$  joukon  $\mathbb{R}$  diskreetti osajoukko. Reaalilukujen yhteenlaskun neutraalialkio on nolla, joten  $0 \in \Gamma$  ja on olemassa pienin positiivinen  $x \in \Gamma$ , muutoin  $\Gamma$  ei olisi diskreetti. Näin ollen  $\{nx : n \in \mathbb{Z}\}$  on aliryhmä joukolle  $\Gamma$ .

Oletetaan, että  $y \in \Gamma, y \neq nx$ . Voidaan olettaa lisäksi, että  $y > 0$  (jos näin ei olisi, valittaisiin  $-y$ , joka kuuluu joukkoon  $\Gamma$ ). Tällöin on olemassa kokonaisluku  $k \geq 0$  siten, että

$$kx < y < (k+1)x,$$

eli

$$y - kx < x$$

ja koska  $(y - kx) \in \Gamma$ , niin  $x$  ei ole pienin positiivinen alkio joukossa  $\Gamma$ .

- (2) Olkoon  $\Gamma$  joukon  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\phi}\}$  aliryhmä. Diskreettisuuden nojalla on olemassa  $z = e^{i\phi_0} \in \Gamma$ , missä  $\phi_0$  on pienin kulman  $\phi$  arvoista. Jollekin  $m \in \mathbb{Z}$  pätee  $m\phi_0 = 2\pi$

□

Möbius-muunnokset luokitellaan hyperbolisiin, parabolisiin ja elliptisiin muunnoksiin, jotka ovat ryhmän  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  aliryhmiä. Jos hyperbolisten, parabolisten tai elliptisten muunnosten muodostama aliryhmä on syklinen, niin se on myös Fuchsian ryhmä:

LAUSE 3.38. [4, s.29]

- (1) Kaikki ryhmän  $PSL(2, \mathbb{R})$  hyperboliset ja paraboliset sykliset aliryhmät ovat Fuchsian ryhmiä.  
 (2) Ryhmän  $PSL(2, \mathbb{R})$  elliptinen syklinen aliryhmä on Fuchsian ryhmä, jos ja vain jos se on äärellinen.

Jos  $G$  on mielivaltainen ryhmä ja  $g \in G$ , niin alkion  $g$  keskittäjä (engl. centralizer) on

$$C_G(g) = \{h \in G : hg = gh\}.$$

LEMMA 3.39. Jos kuvaus  $S$  on kuvauksen  $T$  keskittäjä eli pätee  $ST = TS$ , niin  $S$  kuvaa kuvauksen  $T$  kiintopisteiden joukon itselleen.

TODISTUS. [4, s.34] Oletetaan, että  $T$  kiinnittää alkion  $p$ . Tällöin

$$S(p) = ST(p) = TS(p)$$

eli  $S(p)$  on myös kuvauksen  $T$  kiintopiste. □

Tarkastellaan seuraavaksi joukon  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  parabolisten, elliptisten ja hyperbolisten kuvausten keskittäjiä.

ESIMERKKI 3.40. [4, s.34]

- (1) Tarkastellaan äärettömyyspisteen  $\infty$  kiinnittävää parabolista muunnosta  $T(z) = z + 1$ . Jos  $S \in C_{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}(T)$ , niin  $S(\infty) = \infty = T(\infty)$  edellisen lemmän 3.39 nojalla. Näin ollen kuvaus  $S$  on muotoa  $S(z) = az + b$ . Ehdosta  $ST = TS$  saadaan, että  $a = 1$  ja siten kuvauksen  $T$  keskittäjä on  $C_{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}(T) = \{z \mapsto z + k : k \in \mathbb{R}\}$ .
- (2) Yksikkökierokkeen  $\mathbb{D}$  elliptisten muunnosten (jotka kiinnittävät origon) keskittäjien joukko koostuu muotoa  $z \mapsto e^{i\theta}$  olevista kuvauksista, kun  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Olkoon  $T(z) = \lambda z$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$  ja  $S \in C_{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}(T)$ . Jotta ehto  $ST = TS$  toteutuisi, on kuvauksen  $S$  vastattava diagonaalimatriisia eli oltava muotoa  $S(z) = \mu z$ ,  $\mu > 0$ . Kuvauksen  $T$  keskittäjä on siis  $C_{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})}(T) = \{z \mapsto e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ .

Näistä saadaan seuraavat tulokset:

LAUSE 3.41. *Kaksi joukon  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  muunnosta (jotka eivät ole identtisiä kuvauksia) kommutoi, jos ja vain jos niiden kiintopisteiden joukot ovat samat.*

LAUSE 3.42. *Joukon  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  hyperbolisen (vastaavasti parabolisen ja elliptisen) muunnoksen keskittäjien joukko koostuu identtisen kuvauksen lisäksi kaikista sellaisista hyperbolisista (vastaavasti parabolisista ja elliptisistä) muunnoksista, joilla on sama kiintopisteiden joukko.*

SEURAUUS 3.43. *Kaksi joukon  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  hyperbolista muunnosta kommutoi, jos ja vain jos niillä on sama akseli.*

LAUSE 3.44. *Olkoon  $\Gamma$  Fuchsian ryhmä, jonka kaikilla muunnoksilla (jotka eivät ole identtisiä kuvauksia) on sama kiintopisteiden joukko. Tällöin  $\Gamma$  on syklinen.*

TODISTUS. [4, s.35] Muistetaan, että joukon  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  muunnosten kiintopisteiden joukko määrittää muunnoksen tyypin. Siten kaikkien joukon  $\Gamma$  kuvausten on oltava samaa tyyppiä.

Oletetaan, että kaikki muunnokset ovat hyperbolisia. Tällöin voidaan olettaa, että jokainen kuvaus  $S \in \Gamma$  kiinnittää origon ja pisteen  $\infty$ . Siten  $\Gamma$  on diskreetti aliryhmä ryhmälle

$$H = \{z \mapsto \lambda z : \lambda > 0\},$$

joka on isomorfinen ryhmän  $\mathbb{R}^*$  (positiivisten reaalilukujen multiplikatiivinen ryhmä) kanssa. Edelleen  $\mathbb{R}^*$  on isomorfinen joukon  $\mathbb{R}$  kanssa, kun isomorfismina on kuvaus  $x \mapsto \ln x$ . Näin ollen Lemman 3.37 nojalla  $\Gamma$  on äärettömästi syklinen. Vastaavasti, jos  $\Gamma$  sisältää parabolisen muunnoksen, niin  $\Gamma$  on äärettömästi syklinen ryhmä, joka sisältää vain parabolisia muunnoksia.

Oletetaan, että  $\Gamma$  sisältää elliptisen muunnoksen. Yksikkökiekkomallissa  $\mathbb{D}$  ryhmä  $\Gamma$  on joukon  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\phi}\}$  suuntautumisen säilyttävien isometrioiden aliryhmä. Konjugoimalla ryhmä  $\Gamma$  sopivalla Poincarén kiekon Möbius-muunnoksella  $g$  voidaan olettaa, että kaikkien joukon  $\Gamma$  muunnosten kiintopiste on origo ja näin ollen muunnokset joukossa  $\Gamma$  ovat muotoa  $z \mapsto e^{i\phi}z$ . Siten  $\Gamma$  on isomorfinen joukon  $\mathbb{S}^1$  aliryhmän  $S$  kanssa ja  $\Gamma$  on diskreetti, jos ja vain jos  $S$  on diskreetti. Väite seuraa nyt Lemmasta 3.37.  $\square$

LAUSE 3.45. *Jokainen abelinen Fuchsian ryhmä on syklinen.*

TODISTUS. [4, s.36] Lauseen 3.41 perusteella kaikilla abelin Fuchsian ryhmän ei-identiteettimuunnoksilla on sama kiintopisteiden joukko. Väite seuraa siten lauseesta 3.44.  $\square$

SEURAUUS 3.46. *Mikään Fuchsian ryhmä ei ole isomorfinen joukon  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{Z}\}$  kanssa.*

TODISTUS. Ryhmä  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  on abelin ryhmä, mutta ei syklinen.  $\square$

MÄÄRITELMÄ 3.47. Jos  $G$  on ryhmä ja  $H$  on ryhmän  $G$  aliryhmä, niin ryhmän  $H$  normalisoija  $N_G(H)$  joukossa  $G$  on

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

LAUSE 3.48. *Olkoon  $\Gamma$  Fuchsian ryhmä, joka ei ole abelin ryhmä. Tällöin joukon  $\Gamma$  normalisoijat muodostavat Fuchsian ryhmän.*

TODISTUS. [4, s.36-37] Oletetaan, että joukon  $\Gamma$  normalisoijien joukko ei ole Fuchsian ryhmä. Tällöin se sisältää jonon  $\{T_i\}$  kuvauksia siten, että  $T_i \rightarrow \text{Id}$ , kun  $i \rightarrow \infty$ .

Jos  $S \in \Gamma$  ( $S \neq \text{Id}$ ), niin  $T_i S T_i^{-1} \rightarrow S$ , kun  $i \rightarrow \infty$ . Koska  $T_i S T_i^{-1} \in \Gamma$  ja joukko  $\Gamma$  on diskreetti, niin on olemassa kokonaisluku  $m$  siten, että  $T_i S T_i^{-1} = S$  kaikille  $i > m$ . Tällaiselle indeksille  $i$  seuraa lauseesta 3.41, että kuvauksella  $T_i$  on sama kiintopisteiden joukko kuin kuvauksella  $S$ . Koska  $\Gamma$  ei ole abelinen, niin lauseen 3.41 perusteella on olemassa kuvaus  $S' \in \Gamma$ , jonka kiintopisteiden joukko ei ole sama kuin kuvauksen  $S$  kiintopisteiden joukko. Kuitenkin tällöin kuvauksella  $T_i$  on myös sama

kiintopisteiden joukko kuin kuvauksella  $S'$ , kun  $i$  on tarpeeksi suuri. Siten joukolla  $S'$  on sama kiintopisteiden joukko kuin joukolla  $S$ .  $\square$

### 3.5. Fuchsian ryhmä ja ylemmän puolitason yksikkötangenttien joukko

Tämän tutkielman lopuksi tässä luvussa tutkitaan Möbius-muunnosten toimintaa ylemmän puolitason  $\mathbb{H}$  yksikkötangenttien joukolla  $S_{\mathbb{H}}$ . Joukon  $S_{\mathbb{H}}$  alkiot voidaan ilmaista koordinaatein  $(z, \zeta)$ , missä  $z \in \mathbb{H}$  ja vektori  $\zeta \in \mathbb{C}$  on (hyperbolisen metriikan mielessä) yksikkötangenttivektori ylemmän puolitason pisteessä  $z$ , eli pisteessä  $z$  määrittelylle vektorin  $\zeta$  normille pätee

$$\|\zeta\|_z = \sqrt{\langle \zeta, \zeta \rangle_z} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} = \frac{|\zeta|}{|\zeta|} = 1.$$

Ryhmä  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  toimii joukolla  $S_{\mathbb{H}}$  siten, että kuvaus  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  ja sen differentiaali

$$(15) \quad DT(\zeta) = \frac{1}{(cz+d)^2} \zeta$$

kuvaavat pisteen  $(z, \zeta)$  pisteeksi  $(T(z), DT(\zeta))$ , toisin sanoen  $T(z, \zeta) = (T(z), DT(\zeta))$ . Algebrasta muistetaan, että kaikki ryhmät toimivat itsellään, kun toimintana on multiplikaatio (eli kertominen) vasemmalta. Seuraava tulos yhdistää ryhmän  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  toiminnan itsellään ja joukolla  $S_{\mathbb{H}}$ .

**LAUSE 3.49.** *Joukkojen  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  ja  $S_{\mathbb{H}}$  välillä on olemassa homeomorfismi siten, että ryhmän  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  toiminta itsellään (toimintana kertominen vasemmalta) vastaa sen toimintaa joukolla  $S_{\mathbb{H}}$  (jossa toiminnan antaa Möbius-muunnos  $T$ ).*

**TODISTUS.** [4, s.24-25] (Idea) Olkoon  $(i, \zeta_0) \in S_{\mathbb{H}}$ , missä  $\zeta_0$  on yksikkövektori pisteessä  $i$  ja tangentti imaginääriakselille. Oletetaan lisäksi, että piste  $(z, \zeta)$  on mielivaltainen joukon  $S_{\mathbb{H}}$  piste. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kuvaus  $T \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ , joka kuvaa imaginääriakselin geodeesiksi, joka kulkee pisteen  $z$  kautta ja on tangentti vektorille  $\zeta$  siten, että  $T(i) = z$ . Yhtälön (15) nojalla  $DT(\zeta_0) = \zeta$  ja siten

$$(16) \quad T(i, \zeta_0) = (z, \zeta).$$

Kuvaus  $T$  on myös bijektiivinen, sillä se on joko translaatio, dilaatio tai kiertö. Kuvaus  $(z, \zeta) \mapsto T$  on jatkuva, sillä  $T$  on jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena jatkuva ja differentiaali on jatkuva. Lisäksi on olemassa käänteiskuvaus  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow S_{\mathbb{H}}$ ,  $(T(z), DT(\zeta)) \mapsto (z, \zeta)$ , joka on jatkuva.

Kuvaus  $(z, \zeta) \mapsto T$  on homeomorfismi joukkojen  $S_{\mathbb{H}}$  ja  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  välillä, sillä matriisien kertolasku joukossa  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  vastaa Möbius-muunnosten yhdistämistä

joukolla  $S_{\mathbb{H}}$ . Olkoon kuvaus  $S \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  siten, että  $S(z, \zeta) = (z', \zeta')$ . Tällöin  $S(z, \zeta) = ST(i, \zeta_0)$  yhtälön (16) nojalla ja siten viimeinen väite pätee.  $\square$

Määritellään joukkoon  $S_{\mathbb{H}}$  (Riemannin) metriikka  $dl$  [4, s.25]

$$dl = \sqrt{ds^2 + d\theta^2},$$

missä  $ds$  on hyperbolinen metriikka joukossa  $\mathbb{H}$  ja

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \arg(\zeta).$$

Tällöin  $dv = d\mu d\theta$  antaa tilavuuden joukossa  $S_{\mathbb{H}}$ , missä  $d\mu$  on hyperbolinen pinta-ala joukossa  $\mathbb{H}$ .

LAUSE 3.50. *Metriikka  $dl$  ja tilavuus  $dv$  säilyvät joukon  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  muunnoksissa.* [4, s.156-157]

TODISTUS. Väitteet nähdään suoralla laskulla. Olkoon  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , jolloin pisteelle  $(z, \zeta)$  pätee  $(z, \zeta) \mapsto (f(z), (Df)(\zeta)) = (z', \zeta')$ . Joukon  $S_{\mathbb{H}}$  metriikka  $dl$  on normi joukon  $S_{\mathbb{H}}$  tangentiavaruudessa:

$$\|(dz, d\zeta)\|^2 = \frac{|dz|^2}{y^2} + (d\phi)^2.$$

Koska jokainen summattava on muuttumaton kuvauksessa  $(z, \zeta) \mapsto (f(z), (Df)(\zeta)) = (z', \zeta')$ , niin

$$\frac{|dz'|^2}{(\text{Im} f(z))^2} = \frac{|f'(z)|^2 |dz|^2}{(\text{Im}(f(z)))^2} = \frac{|dz|^2}{y^2}$$

ja

$$(d\phi')^2 = (d\phi)^2.$$

Näin ollen metriikka  $dl$  säilyy joukon  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  muunnoksissa. Tilavuuden  $dv$  muuttumattomuus seuraa metriikan säilymisestä joukon  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  muunnoksissa.  $\square$

Möbiuskuvausten (eli ryhmän  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ) toiminta joukolla  $\mathbb{H}$  voidaan siirtää toiminnaksi ylemmän puolitason yksikkötangenttien joukolle  $S_{\mathbb{H}}$  lauseen 3.50 mukaisesti. Tämän vuoksi Fuchsien ryhmiä käsiteltäessä tutkitaan usein diskreettejä isometrioiden ryhmiä (ks. [5, s.27]), jotka toimivat joukolla  $S_{\mathbb{H}}$ .

## Kirjallisuutta

- [1] JAMES W. ANDERSON: *Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag London Limited, second edition, 2005.
- [2] ALAN F. BEARDON: *Algebra and Geometry*. Cambridge University Press, 2005.
- [3] R.P. BURN: *Groups, A Path To Geometry*. Cambridge University Press, 1985.
- [4] SVETLANA KATOK: *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press, 1992.
- [5] SVETLANA KATOK: *Fuchsian groups, geodesic flows on surfaces of constant negative curvature and symbolic coding of geodesics*. Clay Mathematics Proceedings, Volume 8, 2008.
- [6] TERO KILPELÄINEN: *Kompleksianalyysi, luentomuistiinpanoja keväälle 2005*. Jyväskylän yliopisto, 2006.
- [7] LASSI KURITTU, VELI-MATTI HOKKANEN JA LAURI KAHANPÄÄ: *Geometria*. Jyväskylän yliopisto, 2008.
- [8] JOSEPH LEHNER: *Discontinuous Groups And Automorphic Functions*. American Mathematical Society, 1964.
- [9] B.O. STRATMANN: *Hyperbolic Geometry*, The University of Bremen, tulostettu syksyllä 2014. Elektroninen dokumentti tulostettu osoitteesta  
<http://www.math.uni-bremen.de/bos/>.
- [10] CHARLES WALKDEN: *Hyperbolic Geometry*, The University of Manchester, viitattu 1.3.2015. Elektroninen dokumentti osoitteessa  
[http://www.maths.manchester.ac.uk/cwalkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic\\_geometry.pdf](http://www.maths.manchester.ac.uk/cwalkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic_geometry.pdf).
- [11] CHARLES WALKDEN: *Reading material on the limit set of a Fuchsian group*, viitattu 1.3.2015. Elektroninen dokumentti osoitteessa  
[http://www.maths.manchester.ac.uk/cwalkden/hyperbolic-geometry/limit\\_sets.pdf](http://www.maths.manchester.ac.uk/cwalkden/hyperbolic-geometry/limit_sets.pdf).