JOHDATUS VARIAATIOLASKENTAAN

Henna Maria Ojala

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2015

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Tiivistelmä: H. Ojala, *Johdatus variaatiolaskentaan*, matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kesä 2015.

Jokainen on varmasti pyöräillessään miettinyt kahden eri reitin välillä. Kulkeako lyhyempää reittiä vai vähän pidempää reittiä, jossa kuitenkin on enemmän alamäkiä? Kummalla reitillä olisin kotona nopeammin? Nopeinta reittiä miettivät myös matemaatikot 1600-luvulla. Tarinan mukaan, kun kuningatar Dido matkasi Afrikkaan noin 900 eKr. ostamaan lisää maata, lupasi maan kuningas Jarbas kuningattarelle niin suuren maa-alan kuin tämä pystyisi rajaamaan härän nahan avulla. Neuvokas kuningatar halusi tietenkin vallata itselleen mahdollisimman suuren alan, leikkeli nahan pitkäksi suikaleeksi ja rajasi ympyrän kaaren muotoisen alueen [**7**].

Tämän tyyppisiä ongelmia voidaan mallintaa ja ratkaista matemaattisesti variaatiolaskennan avulla. Variaatiolaskennan ongelmissa etsitään siis tietylle suureelle pienintä tai suurinta arvoa tiettyjen reunaehtojen toteutuessa. Variaatiolaskennassa, tätä suuretta mallinnetaan integraalin avulla. Etsitään siis tietyt ehdot toteuttavaa käyrää y_0, jolle on voimassa reunaehdot $y_0(x_1) = y_1$ ja $y_0(x_2) = y_2$ ja joka minimoi tai maksimoi muotoa

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

olevan integraalin. Yleensä integraalille etsitään nimenomaan pienintä arvoa.

Kun variaatiolaskennan ongelma on muotoiltu sanallisesti, on se muotoiltava myös täsmälliseen matemaattiseen muotoon. Mitä haluamme minimoida, mikä on tämän minimoitavan integraalin lauseke? Täytyykö ratkaisukäyrän olla jatkuva funktio ja derivoituva? Mitä ehtoja ratkaisukäyrän täytyy toteuttaa? Kun integroitava lauseke on muodostettu, pitää etsiä käyrää, jolla tämä integraali saa pienimmän arvonsa.

Tämän käyrän etsimiseen yhden tärkeän työkalun antaa niin sanottu Eulerin differentiaaliyhtälö. Yhtälö antaa ratkaisuehdokkaat, jotka ovat C^2-funktiota eli jatkuvia ja joiden ensimmäinen ja toinen derivaatta on olemassa ja hyvin määritelty. Kun normaalille funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ etsitään pienintä tai suurinta arvoa, lähdetään ratkaisua etsimään funktion derivaatan nollakohtien avulla. Vastaavan ehdon antaa Eulerin differentiaaliyhtälö. Samoin kuin funktion derivaatan nollakohta x_0 ei aina anna funktion pienintä arvoa, ei aina Eulerin differentiaaliyhtälölläkään ratkaistu funktio $y_0(x)$ ole integraalin minimoija.

Se, antaako ratkaisuehdokas todella pienimmän mahdollisen arvon integraalille täytyy tarkastella erikseen. Yhden ratkaisun tälle antaa funktion konveksisuustarkastelu. Funktion ollessa konveksi, Eulerin differentiaaliyhtälö antaa todella integraalin minimoivan funktion ja sen lisäksi ratkaisu on yksikäsitteinen. Konveksisuustarkastelukaan ei anna kuitenkaan ratkaisua kaikissa ongelmissa, sillä useimmat variaatiolaskennan ongelmat eivät ole konvekseja. Ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys onkin tarkasteltava tapauskohtaisesti.

Variaatiolaskennan ongelmista tunnetuimpia ovat niin sanottu brachistochronen ongelma ja pienimmän pyörähdyspinta-alan ongelma. Brachistocronen ongelmassa etsitään reittiä, jota pitkin kappale kulkee mahdollisimman lyhyessä ajassa kahden ennalta annettujen reunapisteiden kautta. Ongelman esitti matemaattisessa muodossa ja ratkaisi ensimmäisen kerran Johann Bernoulli vuonna 1696 vaikka jo vuonna 1638 Galileo esitti ratkaisun olevan osa ympyräkaarta [**7**]. Kyseisen reitin ja ratkaisun

ongelmalle antaa kuitenkin sykloidi. Brachistochronen ongelman ratkaiseminen johti Eulerin differentiaaliyhtälön muodostamiseen ja antoi näin sysäyksen myös muiden variaatiolaskennan ongelmien ratkaisemiselle [**1**].

Pienimmän pyörähdyspinnan ongelmassa etsitään kahden valitun reunapisteen kautta kulkevaa käyrää, jonka pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyvä pyörähdyspinta-ala olisi mahdollisimman pieni. Ongelman käsittely ei ole aivan niin suoraviivainen kuin brachistochronen ongelmassa sillä kyseiselle ongelmalle ei ole aina mahdollista määrittää ratkaisua. Eulerin differentiaaliyhtälö antaa ratkaisuehdokkaaksi ketjukäyrän, jonka synnyttämää pyörähdyspintaa kutsutaan katenoidiksi. Kahden annetun reunapisteen kautta ei kuitenkaan ole aina mahdollista määrittää ketjukäyrää, joten tiettyjen ehtojen toteutuessa ongelman ratkaisu ei olekaan ketjukäyrä. Tässä tapauksessa ratkaisun antaa ns. Goldschmidtin käyrä, jonka muodostama pyörähdyspinta koostuu kahdesta kiekosta ja näiden väliin jäävästä janasta. Goldschidtin käyrän antama ratkaisu on tietyllä tapaa erikoisratkaisu, johon ei usein kiinnitetä huomiota. Pienimmän pyörähdyspinnan ongelma antaa esimerkin tapauksesta, jossa Eulerin differentiaaliyhtälö ei kaikissa tapauksissa annakaan ongelman ratkaisua.

Variaatiolaskennalla on sovelluksia myös esimerkiksi fysiikassa. Sen avulla voidaan mallintaa luontoa, perustella miksi saippuakuplat ovat pyöreitä tai miksi valo taittuu veteen saapuessa. Monet käytännön ongelmat koskevat asioiden minimoisista tai maksimoimista ja näiden ratkaisemisessa variaatiolaskenta on suuressa osassa.

Sisältö

LUKU 1

Johdanto

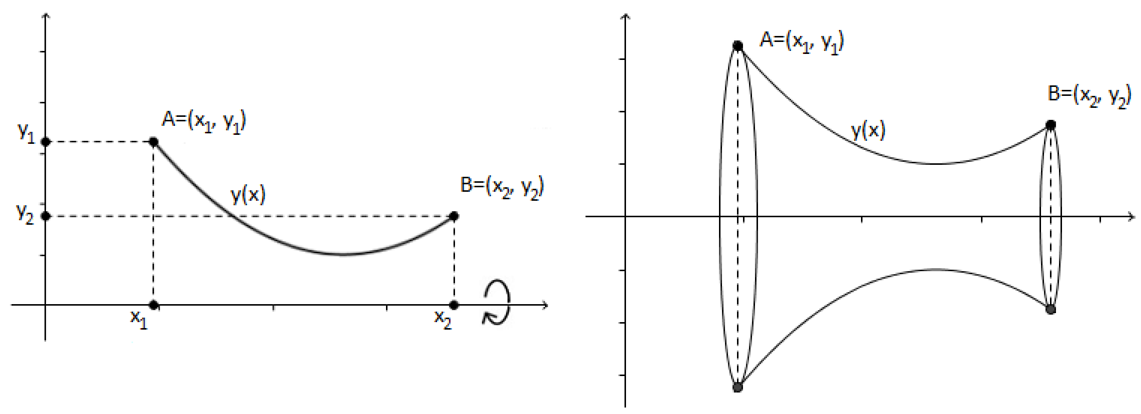
Monet käytännön ongelmat koskevat asioiden minimoimista tai maksimoimista. Kaupat haluavat maksimoida voittonsa ja minimoida kulunsa. Ajoreitit suunnitellaan mahdollisimman nopeiksi tai etsitään lyhintä reittiä määränpäähän. Samaa minimointia noudattaa myös luonto. Fysiikasta tutun Fermat'n periaatteen mukaisesti valo pyrkii valitsemaan kahden pisteen kautta kulkevan nopeimman reitin. Saippuakuplat muodostavat pienimmän pinta-alan. Tämän tyyppisten ongelmien matemaattiseen mallintamiseen ja ratkaisemiseen liittyvää teoriaa kutsutaan variaatiolaskennaksi.

1.1. Ongelman muotoilu

Variaatiolaskentaa on helpoin lähestyä esimerkin kautta. Alustetaan nyt yhtä variaatiolaskennan tunnetuimmista ongelmista, jota käsitellään myös myöhemmin esimerkeissä läpi työn ja tarkemmin Kappaleessa 5.

Esimerkki 1.1. Olkoon $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}^+$ käyrä, joka kulkee pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ kautta. Funkion y kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyspinta, jonka pinta-ala saadaan laskettua tuttuna lausekkeena

$$I(y) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x\,. \tag{1.1}$$



Kuva 1.1. *Esimerkki käyrästä y(x) ja siitä syntyvästä pyörähdyspinnasta*

Kuvassa 1.1 on esimerkkinä eräs käyrä $y(x)$, joka kulkee pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ kautta. Tälle käyrälle siis $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$ ja käyrän pyörähtäessä x-akselin ympäri muodostuu pyörähdyspinta, jonka pinta-ala voidaan laskea integraalin (1.1) avulla. Jotta pyörähdyspinta ja integraali olisivat hyvin määriteltyjä, halutaan käyrän y kulkevan kokonaan x-akselin yläpuolella.

Pisteiden A ja B kautta voidaan määrittää monenlaisia jatkuvia käyriä ja näiden käyrien pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyy monenlaisia pyörähdyspintoja. Tästä saadaan variaatiolaskennan ongelma kun mietitään, onko mahdollista löytää käyrää, joka pyörähtäessään x-akselin ympäri muodostaakin pienimmän mahdollisen pinta-alan. Tälle käyrälle y_0 integraali (1.1) saa pienimmän mahdollisen arvonsa eli $I(y_0) \leq I(y)$ kaikille y, jotka toteuttavat funktiolle asetetut ehdot.

Kun merkitään yllä olevassa esimerkissä $F(x,y,y') = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, saadaan integraali (1.1) muotoon

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.2}$$

Useat variaatiolaskennan ongelmat ovat yleisesti tätä muotoa. Integraalin sisällä oleva funktio F on yleensä muuttujista x, y ja y' riippuva funktio. Erikoistapauksia tästä käsitellään tarkemmin Luvussa 3. Jotta integraali I olisi hyvin määritelty, täytyy funktion y olla jatkuva ja funktion y derivaatan y' on oltava määritelty eli toisin ilmaistuna $y \in C^1$. Mikäli nämä ehdot eivät toteudu, ei integraali $I(y)$ ole hyvin määritelty.

Minimointiongelman ratkaisu y_0 on se funktio, jolla integraali (1.2) saa käsiteltävästä ongelmasta riippuen pienimmän tai suurimman arvonsa. Funktion y_0 täytyy olla C^1-funktio ja lisäksi sen täytyy toteuttaa annetut reunaehdot $y_0(x_1) = y_1$ ja $y_0(x_2) = y_2$. Usein käytännön sovelluksissa haetaan nimenomaan integraalin minimoivaa funktiota. Ongelmat, joissa etsitään maksimia saadaan palautettua minimin etsimiseen käsittelemällä integraalia $-I(y)$. Jatkossa käsitellään vain ongelmia, joissa integraalille haetaan pienintä mahdollista arvoa.

Työssä esitellään muutamia variaatiolaskennan ongelmia. Näistä tärkeimpiä ovat kappaleissa 4 ja 5 esitellyt brachistochronen ongelma ja pienimmän pyörähdyspinnan ongelma. Kappaleessa 4 tärkeimpinä lähteinä on käytetty teoksia [**1**] ja [**3**] ja pienimmän pyörähdyspinnan ongelman käsittelyssä apuna on pääasiassa käytetty lähteitä [**3**] ja [**2**]. Kappaleessa 6 käydään läpi esimerkki, jossa variaatiolaskentaa hyödynnetään fysiikan Snellin lain johtamiseen tärkeimmän lähteen ollessa [**6**].

1.2. Ratkaisun etsiminen ja olemassaolo

Kuinka kyseistä integraalin (1.2) minimoivaa funktiota y_0 lähdetään etsimään? Ongelmalla on yhtäläisyyksiä reaalifunktion minimin määrittämisen kanssa. Kun jatkuvasti derivoituvalle funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lähdetään etsimään minimiarvoa, aloitetaan tarkastelemalla funktion derivaattaa. Jos funktio f saa pisteessä x_0 pienimmän arvonsa, sen derivaatta tässä pisteessä häviää eli $f'(x_0) = 0$. Kuitenkaan vaikka $f'(x_0) = 0$ niin x_0 ei välttämättä ole funktion f minimikohta, vaan kyseessä voi olla myös maksimi tai esimerkiksi satulapiste. Voi myös olla, ettei funktiolla f ole minimiä ollenkaan. Se, onko kyseessä minimi vai maksimi varmistetaan tarkastelemalla funktion toista derivaattaa.

Variaatiolaskennan ongelmissa perusidea on samankaltainen. Voimme määrittää funktiolle y_0 vastaavanlaiset ehdon, jonka funktion täytyy toteuttaa minimoidakseen ongelmassa tarkastellun integraalin. Kuten normaalin minimointiongelman tapauksessa, tämä ehto ei kuitenkaan takaa, että löydetty funktio välttämättä on se funktio, joka todella minimoi integraalin $I(y)$. Ehto ei myöskään takaa, että integraalille on löydettävissä pienin mahdollinen arvo.

Lähdetään tarkastelemaan mikä tämä ehto on. Seuraavassa tarkastelussa päälähteenä on käytetty teosta [**5**]. Oletetaan, että y_0 on minimointiongelman ratkaisu ja C^1-funktio. Määritellään nyt funktio $h(x) = y_0 + \epsilon\eta(x)$, jollekin parametrille ϵ ja mielivaltaiselle funktiolle η, jolle pätee $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$ ja jonka ensimmäinen ja toinen derivaatta ovat jatkuvia integrointivälillä. Termiä $\epsilon\eta(x)$ kutsutaan funktion η variaatioksi.

Tällöin

$$\begin{aligned} h(x_1) &= y_0(x_1) + \epsilon\eta(x_1) = y_0(x_1) = y_1 \text{ ja} \\ h(x_2) &= y_0(x_2) + \epsilon\eta(x_2) = y_0(x_2) = y_2\,, \end{aligned}$$

joten funktio h toteuttaa reunaehdot. Tämän lisäksi funktio h on jatkuva, sillä y_0 sekä η ovat jatkuvia ja funktion derivaatta $h'(x) = y_0'(x) + \epsilon\eta'(x)$ on hyvin määritetty. Funktio h on siis C^1- funktio ja täten integraali $I(h)$ on hyvin määritelty.

Kiinnitetään funktiot y_0 ja η, jolloin integraalista 1.2 tulee muuttujan ϵ määräämä funktio

$$I(y_0 + \epsilon\eta) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_0 + \epsilon\eta, \hat{y}' + \epsilon\eta')\mathrm{d}x \equiv G(\epsilon)\,.$$

Koska oletettiin funktion y_0 antavan integraalin 1.2 minimiarvon, saadaan ylläolevasta integraalista minimi kun $\epsilon = 0$ sillä tällöin

$$I(y_0) = I(y_0 + \epsilon\eta)|_{\epsilon=0} = G(0)\,.$$

Kuten normaalin minimointiongelman tapauksessa, jotta y_0 minimoisi integraalin I on sen toteutettava välttämätön ehto $I'(y_0) = 0$ eli toisin sanoen

$$G'(0) = 0$$

Vastaava päättely toimii myös mikäli etsimme integraalille maksimia. Integraalifunktio $I(y)$ täytyy olla vähintään C^1-funktio, jotta derivaatta $I'(y)$ on hyvin määritelty.

Päättely ei takaa minimoivan funktion olemassaoloa, mutta ehdosta $G'(0) = 0$ seuraa variaatiolaskennan ongelmien ratkaisemiseen hyödyllinen lause. Tähän lauseeseen tutustutaan tarkemmin seuraavassa luvussa, jossa esiteltävä Eulerin differentiaaliyhtälö on tärkeä työkalu ratkaisufunktion etsimisessä. Luvussa 2 päälähteinä on käytetty teoksia [**1**] sekä [**2**].

Luku 3 on tarkoitettu käytännön laskuja helpottamaan ja esittelee edellä mainitun Eulerin differentiaaliyhtälön yksinkertaistuksia koskien tietyn tyyppisiä ongelmia. Luvussa ei siis esitellä varsinaisesti mitään uutta teoriaa vaan luku on puhtaasti laskujen ja esimerkkien tarkastelua nopeuttamaan. Tulokset voi helposti johtaa itsekin Eulerin differentiaaliyhtälön avulla. Luvussa on käytetty pääasiallisina lähteinä teoksia [**1**] ja [**2**].

Eulerin differentiaaliyhtälö ei anna työkaluja ratkaisun olemassaolon tai yksikäsitteisyyden tarkasteluun, vaan näihin on käytettävä muita keinoja. Yksi tapa esitetään Luvussa 2. Luvussa esitellyn lauseen mukaan, integroitavan funktion ollessa konveksi, on Eulerin differentiaaliyhtälön avulla saatu ratkaisuehdokas todella integraalin minimoiva funktio. Jos konveksit funktiot eivät ole ennestään tuttuja, on työssä tarvittavaa teoriaa käsitelty tarkemmin myös työn lopussa Liitteessä A. Konveksisuuteen liittyvän teorian ja lauseiden lähteinä on käytetty teoksia [**2**] ja [**8**]. Mikäli funktio ei ole konveksi, on osoitettava muulla tavalla, että saatu ratkaisu todella minimoi integraalin. Tämä tarkastelu on suoritettu työssä jokaisen esimerkin kohdalla erikseen. Brachistochronen ongelman kohdalla tarkastelussa lähteenä on käytetty [**3**] ja [**9**]. Pienimmän pyörähdyspinnan ongelmassa ratkaisun olemassaolon tarkastelussa lähteenä on toiminut [**4**] sekä [**3**]. Mikäli näiden ongelmien ratkaisujen tarkempi läpikäyminen kiinnostaa, on näissä teoksissa ongelmaan paneuduttu yksityiskohtaisemmin kuin se tässä työssä oli mahdollista ja järkevää.

LUKU 2

Eulerin differentiaaliyhtälö

Seuraava lause on keskeisessä osassa variaatiolaskennan ongelmia ratkaistaessa ja vastaa integraalin ensimmäisen derivaatan häviämistä. Lauseessa esiintyvää differentiaaliyhtälöä kutsutaan myös nimellä Euler-Lagrangen yhtälö ja se on hyödyllinen työkalu etsittäessä integraalin minimoivaa funktiota.

Huomaa, että jatkossa esiintyvät merkinnät

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y,y')$$

tarkoittavat samaa asiaa.

Lause 2.1. Olkoon $F = F(x,y,y') \in C^2([x_1,x_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ja $y_0 \in C^2([x_1,x_2])$, jolle $y_0(x_1) = y_1$ sekä $y_0(x_2) = y_2$. Jos funktio y_0 on integraalin $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x$ minimoija, sen on toteutettava Eulerin differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,, \tag{2.1}$$

kaikille $x \in [x_1,x_2]$.

Todistus. Olkoon $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x$. Oletetaan, että y_0 minimoi tämän integraalin. Määritetään nyt integraali

$$G(\epsilon) = I(y_0+\epsilon\eta) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')\mathrm{d}x\,, \tag{2.2}$$

jossa $\epsilon \in \mathbb{R}$ ja $\eta \in C^1([x_1,x_2])$ on funktio, joka toteuttaa ehdot $\eta(x_1) = 0$ ja $\eta(x_2) = 0$.

Funktio $h(x) = y_0 + \epsilon\eta$ on jatkuva funktio, sillä y_0 ja η ovat jatkuvia. Lisäksi funktion h ensimmäinen derivaatta $h'(x) = y_0'(x) + \epsilon\eta'(x)$ on määritelty ja h on näin ollen C^1-funktio. Funktio h toteuttaa myös reunaehdot $h(x_1) = y_1$ ja $h(x_2) = y_2$ sillä $h(x_1) = y_0(x_1) + \epsilon\eta(x_1) = y_0(x_1) = y_1$ ja $h(x_2) = y_0(x_2) + \epsilon\eta(x_2) = y_0(x_2) = y_2$. Integraali $I(h) = I(y_0+\epsilon\eta) = G(\epsilon)$ on siis hyvin määritelty.

Koska funktion y_0 oletetaan olevan minimoija, pätee

$$I(y_0) \le I(y_0+\epsilon\eta)\,,$$

kaikille $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Huomataan, että $G(0) = I(y_0 + 0\cdot\eta) = I(y_0)$, joten ylläoleva voidaan esittää myös muodossa

$$G(0) \le G(\epsilon)$$

kaikille $\epsilon \in \mathbb{R}$ ja edelleen

$$G'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} I(y_0+\epsilon\eta)\Big|_{\epsilon=0} = 0.$$

Derivoidaan lauseke (2.2), jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
G'(\epsilon) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(0 + \eta\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta') + \eta'\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta') + \eta'\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')\right)\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Tässä $\frac{d}{d\epsilon}\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\epsilon}F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')\mathrm{d}x$ seuraa Leibniz'n säännöstä, sillä $F \in C^2$, joten $\frac{d}{d\epsilon}F(x, y_0+\epsilon\eta, y_0'+\epsilon\eta')$ on olemassa ja jatkuva alueessa $[x_1, x_2] \times \mathbb{R}$. Lasketaan edelleen derivaatan arvo kun $\epsilon = 0$

$$\begin{aligned}
G'(0) &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0, y_0') + \eta'\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \eta\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0, y_0')\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \eta'\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\mathrm{d}x = 0\,. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Käytetään nyt osittaisintegrointikaavaa $\int_a^b fg' = \Big/_a^b fg - \int_a^b f'g$ jälkimmäiseen integraaliin kun $f = \frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')$ ja $g' = \eta'$

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\mathrm{d}x = \Big/_{x_1}^{x_2} \eta\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0') - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\right)\eta\;\mathrm{d}x\,.$$

Termi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\right)$ on hyvin määritelty, sillä funktion F oletetaan olevan C^2-funktio ja $y_0 \in C^2$. Koska $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$, niin sijoitus häviää ja integraali (2.3) saadaan lopulta muotoon

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0, y_0')\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\right)\eta\;\mathrm{d}x = 0\,.$$

Nyt edelleen yhtälö (2.3) voidaan muokata muotoon

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} \eta\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0, y_0')\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\right)\eta\;\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \eta\left[\frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0, y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\right)\right]\mathrm{d}x = 0\,.
\end{aligned}$$

Merkitään nyt $L(y_0) = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y_0, y_0') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x, y_0, y_0')\right)$, jolloin integraali saadaan lyhennettyä ja yksinkertaistettua muotoon

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta L(y_0)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Nyt Lause 2.1 on todistettu, mikäli $L(y_0) = 0$. Todistetaan tämä erikseen seuraavan tuloksen avulla.

LEMMA 2.1. *Jos jatkuvalle funktiolle $C(x)$ pätee*

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)C(x)\mathrm{d}x = 0$$

kaikille funktioille η, joille $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, sekä $\eta(x) \in C^1([x_1, x_2])$, niin $C(x) = 0$ kaikille $x \in [x_1, x_2]$.

TODISTUS. Oletetaan, että jossain pisteessä $\hat{x}$ välillä $[x_1, x_2]$ funktio $C(x)$ ei saakaan arvoa nolla vaan on positiivinen. Tässä pisteessä siis $C(\hat{x}) > 0$. Koska $C(x)$ on jatkuva, voidaan määrittää edelleen väli (a, b), siten että funktio $C(x)$ on edelleen positiivinen eli $C(x) > 0$ kaikille $x \in (a, b)$. Nyt siis pätee $x_1 \leq a < \hat{x} < b \leq x_2$. Määritellään funktio η siten, että

$$\eta(x) = \begin{cases} (x-a)^2(b-x)^2 & \text{kun } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin lauseessa funktiolle η esitellyt oletukset ovat voimassa eli

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

kun $x \in (a, b)$ ja $\eta(x) = 0$ muulloin. Derivaatta $\eta'(x) = 2(x-a)(b-x)^2 - 2(x-a)^2(b-x)$ on hyvin määritelty ja jatkuva sillä

$$\begin{aligned} \eta'(a) &= 2(a-a)(b-a)^2 - 2(a-a)^2(b-a) = 0 \text{ ja} \\ \eta'(b) &= 2(b-a)(b-b)^2 - 2(b-a)^2(b-b) = 0\,. \end{aligned}$$

Lisäksi $\eta(x) = (x-a)^2(b-x)^2$ on jatkuva välillä $[a, b]$ ja kohdissa $x = a$ ja $x = b$ pätee $\eta(a) = (a-a)^2(b-a)^2 = 0$ ja $\eta(b) = (b-a)^2(b-b)^2 = 0$, joten $\eta(x) \in C^1$ ja täten näin määritelty funktio η käy tarkasteltavaksi funktioksi.

Koska nyt oletettiin, että funktio $C(x)$ on positiivinen välillä $[a, b]$ ja lisäksi koska funktio η määriteltiin positiiviseksi välillä $[a, b]$ ja nollaksi muulloin niin saadaan

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)C(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{x_1}^{a} \eta(x)C(x)\mathrm{d}x}_{=0} + \underbrace{\int_{a}^{b} \eta(x)C(x)\mathrm{d}x}_{>0} + \underbrace{\int_{b}^{x_2} \eta(x)C(x)\mathrm{d}x}_{=0} > 0\,.$$

Tämä on ristiriita, sillä oletuksen mukaan $\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)C(x)\mathrm{d}x = 0$ kaikille sopiville funktioille η. Siispä funktio $C(x)$ ei voi olla positiivinen missään pisteessä välillä $[x_1, x_2]$. Samanlaisella päättelyllä funktio $C(x)$ ei myöskään voi olla negatiivinen. Siispä kaikille $x \in [x_1, x_2]$ pätee $C(x) = 0$. □

HUOMAUTUS 2.2.

(1) Huomaa, ettei Lause 2.1 ota kantaa minimoivan funktion olemassaoloon. Jos y_0 minimoi integraalin $I(y)$, sen on toteutettava Eulerin differentiaaliyhtälö, mutta kaikki Eulerin differentiaaliyhtälön toteuttavat funktiot eivät aina minimoi integraalia $I(y)$. Differentiaaliyhtälön toteuttava funktio ei välttämättä siis ole aina integraalin ääriarvopiste.

(2) Eulerin differentiaaliyhtälö vaatii ratkaisun y_0 olevan C^2-funktio. Kaikissa variaatiolaskennan ongelmissa halutun integraalin minimoivat funktiot eivät kuitenkaan ole C^2-funktioita. Eulerin differentiaaliyhtälön avulla on siis

mahdollista löytää vain ratkaisut, jotka ovat C^2-funktioita eikä differentiaaliyhtälö sovellu ratkaisun tarkistamiseen ellei ratkaisuehdokas täytä lauseen vaatimia oletuksia.

Esimerkki 2.3. Yksi yksinkertaisimpia variaatiolaskennan ongelmia on lyhimmän käyrän etsiminen kahden pisteen välille. Etsitään siis pisteitä $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ yhdistävää käyrää y, jolle $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$. Käyrän pituus saadaan tuttuna integraalina

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x\,. \tag{2.4}$$

Minimointiongelman ratkaisun antaa siis käyrä y, joka minimoi tämän integraalin.

Integroitava funktio on nyt muotoa $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2} \in C^2([x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Oletetaan, että ongelmalla on ratkaisu ja että tämä ratkaisu toteuttaa Lauseessa 2.1 esitetyt oletukset eli minimoiva käyrä y on C^2-funktio. Tällöin sen on toteutettava Eulerin differentiaaliyhtälö (2.1). Lasketaan nyt Eulerin differentiaaliyhtälöön tarvittavat osittaisderivaatat

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0\,,$$

sillä funktio F ei riipu muuttujasta y, sekä

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}(\sqrt{1 + y'^2}) = \frac{1}{2}(1 + y'^2)^{-1/2} \cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,.$$

Eulerin differentiaaliyhtälö on siis muotoa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

eli toisin sanoen

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c\,,$$

missä c on vakio. Mahdollisen ratkaisun on siis toteutettava tämä yhtälö.

Kuten useampaan kertaan on muistuteltu, Eulerin differentiaaliyhtälön avulla saatu funktio ei välttämättä anna integraalin minimoivaa funktiota. On kuitenkin mahdollista asettaa integroitavalle funktiolle F lisäehtoja, joiden avulla voimme varmistaa Eulerin differentiaaliyhtälöllä saamamme funktion todella variaatiolaskennan ongelman ratkaisuksi.

Seuraavissa lauseissa käytetään hyödyksi funktion konveksisuutta. Mikäli konveksit funktiot eivät ole tuttuja, on työn lopussa Liitteessä A käsitelty lyhyesti tarvittavaa teoriaa.

Lause 2.4. *Jos y_0 toteuttaa Eulerin differentiaaliyhtälön* (2.1) *ja jos $(y, y') \to F(x, y, y')$ on konveksi kaikille $x \in [x_1, x_2]$ niin tällöin y_0 minimoi integraalin* (1.2).

Todistus. Olkoon y_0 Eulerin differentiaaliyhtälön ratkaisu, jolle $y_0(x_1) = y_1$ ja $y_0(x_2) = y_2$. Koska oletuksen nojalla $(y, y') \to F(x, y, y')$ on konveksi kaikilla $x \in [x_1, x_2]$ niin voimme käyttää Lausetta A.1 termeille y ja y_0. Merkitään selvennyksen vuoksi $f = F(x, \cdot, \cdot)$, $t = (y, y') = (t_1, t_2)$ ja $s = (y_0, y_0') = (s_1, s_2)$, jolloin $t, s \in \mathbb{R}^2$.

Nyt siis esimerkiksi $f(t) = F(x, y, y')$. Funktion konveksisuudesta saatava epäyhtälö on nyt muotoa

$$\begin{aligned} f(t) &\geq f(s) + (\nabla f(s) \cdot (t - s)) \\ &= f(s) + \frac{\partial f(s)}{\partial t_1}(t_1 - s_1) + \frac{\partial f(s)}{\partial t_2}(t_2 - s_2) \end{aligned}$$

eli toisin sanoen

$$F(x, y, y') \geq F(x, y_0, y_0') + \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y' - y_0')\,.$$

Kun integroidaan yhtälö puolittain saadaan

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x}_{=I(y)} &\geq \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_0, y_0')\mathrm{d}x}_{=I(y_0)} \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y' - y_0') \right) \mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Tarkastellaan ylläolevan lausekkeen viimeistä integraalia termeittäin

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y' - y_0') \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y}(y - y_0)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y' - y_0')\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Käytetään jälkimmäiseen integraaliin osittaisintegrointikaavaa $\int_a^b fg' = \Big/_{a}^{b} fg - \int_a^b f'g$ kun $f = \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}$ ja $g' = (y' - y_0')$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y' - y_0')\mathrm{d}x &= \Big/_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y - y_0)\mathrm{d}x \\ &- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'} \right) (y - y_0)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Nyt koska $y_0(x_1) = y_1 = y(x_1)$ ja $y_0(x_2) = y_2 = y(x_2)$ niin erotuksille on voimassa $y(x_1) - y_0(x_1) = y_1 - y_1 = 0$ ja $y(x_2) - y_0(x_2) = y_2 - y_2 = 0$ joten ylläolevassa integraalissa sijoitus häviää ja integraali saadaan muotoon

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y' - y_0')\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'} \right) (y - y_0)\mathrm{d}x\,.$$

Sijoitetaan tämä saatu tulos takaisin yhtälöön (2.6) ja yhdistetään saman integraalin alle

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y}(y - y_0)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'}(y' - y_0')\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y}(y - y_0)\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'} \right) (y - y_0)\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F(x, y_0, y_0')}{\partial y'} \right) \right) (y - y_0)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Nyt voimme käyttää Eulerin differentiaaliyhtälöä, jonka nojalla

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

eli

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y'}\right)\right)(y-y_0)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y} - \frac{\partial F(x,y_0,y_0')}{\partial y}\right)(y-y_0)\mathrm{d}x = 0\,.
\end{aligned}$$

Lopulta edellisen nojalla yhtälöstä (2.5) viimeisen rivin termit häviävät ja yhtälö saadaan yksinkertaistettua muotoon

$$I(y) \geq I(y_0).$$

Tämä pätee konveksisuuden nojalla kaikille y, joten näin ollen y_0 todellakin minimoi integraalin $I(y)$ kuten väitettiin ja lause on todistettu. □

Lause 2.5. *Olkoon $(y,y') \to F(x,y,y')$ aidosti konveksi kaikille $x \in [x_1,x_2]$. Jos tällöin integraalilla (1.2) on olemassa reunaehdot $y_0(x_1) = y_1$ ja $y_0(x_2) = y_2$ toteuttava minimoija $y_0 \in C^2$ niin se on yksikäsitteinen.*

Todistus. Oletetaan, että integraalilla onkin kaksi minimoijaa u ja v, jotka toteuttavat reunaehdot $u(x_1) = y_1 = v(x_1)$ ja $u(x_2) = y_2 = v(x_2)$. Olkoon integraalin I minimiarvo m, jolloin siis $I(u) = m = I(v)$. Osoitetaan, että oletus johtaa ristiriitaan ja välttämättä näiden minimoijien on oltava samat eli $u = v$.

Määritellään uusi funktio

$$w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\,,$$

joka toteuttaa myös reunaehdot $w(x_1) = \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}v(x_1) = y_1$ ja $w(x_2) = \frac{1}{2}u(x_2) + \frac{1}{2}v(x_2) = y_2$. Tämä funktio on myös C^2-funktio, sillä u ja v ovat C^2-funktioita ja näin ollen integraali $I(w)$ on hyvin määritelty.

Koska $(y,y') \to F(x,y,y')$ on konveksi, niin Määritelmän A.1 avulla saadaan kun $f = F(x,\cdot,\cdot)$, $\lambda = 1/2$, $x_1 = (u,u')$ ja $x_2 = (v,v')$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}f(x_1) + \left(1-\tfrac{1}{2}\right)f(x_2) &\geq f\left(\tfrac{1}{2}x_1 + \left(1-\tfrac{1}{2}\right)x_2\right) \\
\tfrac{1}{2}F(x,u,u') + \tfrac{1}{2}F(x,v,v') &\geq F(x,\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{2}v,\tfrac{1}{2}u'+\tfrac{1}{2}v') = F(x,w,w')\,.
\end{aligned}$$

Integroidaan ylläoleva epäyhtälö puolittain

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\int_{x_1}^{x_2} F(x,u,u')\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} F(x,v,v')\mathrm{d}x\right) &\geq \int_{x_1}^{x_2} F(x,w,w')\mathrm{d}x \\
\tfrac{1}{2}I(u) + \tfrac{1}{2}I(v) &\geq I(w)\,. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Koska $I(u) = m = I(v)$ saadaan yhtälö (2.7) edelleen muotoon

$$\tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}m = m \geq I(w)\,.$$

Koska m on integraalin minimiarvo, pätee $I(w) \geq m$ ja näin ylläoleva yhtälö saadaan muotoon $m \geq m$. Tästä seuraa välttämättä, että $m = m$.

Yhtälö (2.7) saadaankin muotoon

$$\tfrac{1}{2}I(u) + \tfrac{1}{2}I(v) = I(w)$$

eli

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\int_{x_1}^{x_2} F(x,u,u')\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} F(x,v,v')\mathrm{d}x\right) &= \int_{x_1}^{x_2} F(x,w,w')\mathrm{d}x \\ \int_{x_1}^{x_2} \left(\tfrac{1}{2}F(x,u,u') + \tfrac{1}{2}F(x,v,v') - F(x,w,w')\right)\mathrm{d}x &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Funktio F oli oletuksen nojalla aidosti konveksi kun $x_1 \neq x_2$, jolloin

$$\frac{1}{2}F(x,u,u') + \frac{1}{2}F(x,v,v') - F(x,w,w') > 0\,.$$

Koska integroitava funktio on positiivista, pitäisi myös integraalin (2.8) olla positiivista. Integraali (2.8) saakin arvon nolla vain kun $u = v$ sillä tällöin

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \left(\tfrac{1}{2}F(x,u,u') + \tfrac{1}{2}F(x,v,v') - F(x,\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{2}v,\tfrac{1}{2}u'+\tfrac{1}{2}v')\right)\mathrm{d}x \\ = &\int_{x_1}^{x_2} \left(\tfrac{1}{2}F(x,u,u') + \tfrac{1}{2}F(x,u,u') - F(x,\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{2}u,\tfrac{1}{2}u'+\tfrac{1}{2}u')\right)\mathrm{d}x \\ = &\int_{x_1}^{x_2} \left(F(x,u,u') - F(x,u,u')\right)\mathrm{d}x = 0\,. \end{aligned}$$

Koska integraali (2.8) ei voi toteutua kun $u \neq v$ päädymme ristiriitaan. Näin ollen $u = v$. □

Esimerkki 2.6. Jatketaan lyhimmän käyrän etsimisen parissa. Esimerkissä 2.3 tälle ongelmalle muodostettiin Eulerin differentiaaliyhtälö. Tarkastellaan nyt onko integroitava funktio konveksi eli minimoiko Eulerin differentiaaliyhtälön avulla lopulta saatava tulos todellakin integraalin (2.4).

Integraali oli siis muotoa

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

eli tutkittava funktio on $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$. Funktion konveksisuuden tarkastelemiseksi on Lauseen A.2 nojalla laskettava $F''(y')$. Esimerkissä 2.3 saatiin

$$F'(y') = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,,$$

josta edelleen

$$\begin{aligned} F''(y') &= \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = (1+y'^2)^{-1/2} + y'(-\frac{1}{2}(1+y'^2)^{-3/2}\cdot 2y') \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1+y'^2-y'^2}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}} > 0\,. \end{aligned}$$

Funktio on siis aidosti konveksi, joten Lauseiden 2.4 ja 2.5 nojalla ratkaisu, joka toteuttaa Eulerin differentiaaliyhtälön, minimoi todella integraalin (2.4) ja ratkaisu on lisäksi yksikäsitteinen.

2.1. DuBois-Reymondin yhtälö

DuBois-Reymondin yhtälön nimellä tunnettu yhtälö on yksi tapa esittää Eulerin differentiaaliyhtälö. Tämä yhtälö on hyödyllinen erityisesti niissä sovelluksissa, joissa integroitava funktio F ei riipu muuttujasta x.

LAUSE 2.2. Olkoon $F = F(x, y, y') \in C^2([x_1, x_2]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ ja $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x$. Olkoon y tämän integraalin minimoiva funktio. Tällöin pätee seuraava yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x,y,y') - y'\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') \tag{2.9}$$

jokaiselle $x \in [x_1, x_2]$.

TODISTUS. Kaikille $y \in C^2([x_1, x_2])$ voidaan ylläolevassa lauseessa vasemmalla esiintyvä derivaatta kirjoittaa auki summan ja tulon derivoimissääntöjen avulla muotoon

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x,y,y') - y'\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right)\\
= \; &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y,y') - y''\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y') - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Kirjoitetaan funktion derivaatta auki osittaisderivaattojen avulla eli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y,y') = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') + y'\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y') + y''\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y').$$

Hyödyntäen tätä tietoa, voimme muokata lauseketta (2.10) edelleen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') + y'\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y') + y''\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\\
&-y''\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y') - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right)\\
= \; &\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') + y'\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y') - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right)\\
= \; &\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') + y'\left(\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right)\right).
\end{aligned}$$

Nyt Lauseen 2.1 mukaisesti y toteuttaa myös Eulerin differentiaaliyhtälön, jonka mukaan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right).$$

Siispä voimme muokata edelleen alkuperäistä yhtälöä

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') + y'\left(\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right)\right)\\
= \; &\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') + y'\left(\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y') - \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y')\right)\\
= \; &\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y').
\end{aligned}$$

Eli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x,y(x),y'(x)) - y'(x)\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y(x),y'(x))\right) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y')\,,$$

joten väite on todistettu. $\square$

Esimerkki 2.7. Lasketaan Esimerkin 2.3 funktiolle differentiaaliyhtälö myös DuBois-Reymondin yhtälön (2.9) avulla. Integroitava funktio oli muotoa $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$. Koska tämä ei riipu muuttujasta x on $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,y') = 0$ ja DuBois-Reymondin yhtälö (2.9) on muotoa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(x,y,y') - y'\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right) = 0$$

eli

$$F(x,y,y') - y'\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y') = \mathit{vakio}\,.$$

Verrattuna Eulerin differentiaaliyhtälöön, nyt laskettavana on vain yksi osittaisderivaatta. Tämä laskettiin jo Esimerkin 2.3 yhteydessä

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,.$$

DuBois-Reymondin yhtälön avulla differentiaaliyhtälö saadaan muotoon

$$\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \mathit{vakio}\,,$$

joka voidaan edelleen sieventää muotoon

$$\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \mathit{vakio}\,.$$

Äkkiseltään tämä ei näytä samalta tulokselta kuin Esimerkissä 2.3 saatu tulos

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c\,.$$

Yllä oleva yhtälö voidaan kuitenkin muokata haluttuun muotoon.

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= c \\
\frac{y'^2}{1+y'^2} &= c^2 \\
\frac{y'^2}{1+y'^2} - 1 &= c^2 - 1 \\
\frac{-1}{1+y'^2} &= c^2 - 1 \\
\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} &= \sqrt{1-c^2}
\end{aligned}$$

missä $\sqrt{1-c^2} = vakio$. Molemmat yhtälöt antavat siis saman tuloksen, mutta useissa tapauksissa DuBois-Reynoldin yhtälöä käyttämällä pääsee vähemmällä työllä. Sitä kannattaakin hyödyntää varsinkin ongelmissa, joissa integroitava funktio ei riipu muuttujasta x.

LUKU 3

Eulerin differentiaaliyhtälön erikoistapauksia

Yleisessä ongelmassa integroitava funktio F riippuu kolmesta muuttujasta; x, y ja y'. Tarkastellaan nyt muutamaa erikoistapausta, joissa funktio F Ei riipukaan kaikista näistä muuttujista. Tällöin Eulerin differentiaaliyhtälöä saadaan yksinkertaistettua ja näin saatuja tuloksia voidaan hyödyntää suoraan variaatiolaskennan ongelmia laskettaessa. Käsittelyssä ovat vain ne tapaukset, jotka ovat variaatiolaskennan ongelmien kannalta relevantteja.

3.1. Tapaus $F(x, y, y') = F(y')$

Kun integroitava funktio F riippuu pelkästään funktiosta y', niin Eulerin differentiaaliyhtälö (2.1) saadaan muotoon

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

sillä $\partial F/\partial y = 0$. Toisin sanoen

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y'} = c\,, \tag{3.1}$$

missä c on vakio. Tämä huomattiin jo Esimerkin 2.3 yhteydessä ja pätee yleisesti kaikille funktiolle F, jotka eivät riipu muuttujista x ja y.

Koska nyt F on ainoastaan muuttujan y' määräämä funktio, saadaan yhtälö (3.1) edelleen ratkaistua muotoon $y' = c_1$. Tässä c_1 on edelleen vakio ja riippuu funktiosta F. Esimerkiksi jos $F(y') = 2y'^2$ on $F'(y') = 4y'$ ja yhtälöstä (3.1) saadaan $y' = c/4 = c_1$, missä $c_1 = c/4$.

Esimerkki 3.1. Ratkaistaan vihdoin Esimerkeissä 2.3, 2.6 ja 2.7 aloitettu lyhimmän käyrän ongelma loppuun. Etsitään siis pisteitä $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$ yhdistävää käyrää y, joka minimoi integraalin

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x\,. \tag{3.2}$$

Esimerkissä 2.7 DuBois-Reymondin yhtälöllä ratkaistu differentiaaliyhtälö saatiin muotoon

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = c\,,$$

missä c on vakio. Samaan yhtälöön päädyttäisiin lausekkeen (3.1) avulla.

Ratkaistaan tämä nyt muotoon $y' = c_1$.

$$\begin{aligned} y' &= c\sqrt{1+y'^2} \\ y'^2 &= c^2(1+y'^2) \\ y'^2 &= c^2 + c^2 y'^2 \\ y'^2(1-c^2) &= c^2 \\ y' &= \pm\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Yllä olevassa lausekkeessa etumerkki määräytyy pisteiden A ja B sijainnin mukaan. Kun $y_1 < y_2$ niin ratkaisufunktion täytyy olla kasvava ja täten derivaatan on oltava positiivista. Vastaavasti jos $y_2 < y_1$ on ratkaisufunktio vähenevä ja derivaatta negatiivista.

Yhtälö (3.3) on hyvin määritelty kun $1 - c^2 > 0$ eli $-1 < c < 1$. Kun merkitään $\pm\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = c_1$ saadaan tämä differentiaaliyhtälö (3.3) ratkaistua integroimalla yksinkertaisesti muotoon

$$y = c_1 x + c_2\,.$$

Kuten olettaa saattoi, kyseessä on suoran yhtälö, jossa c_1 on suoran kulmakerroin ja suora on joko nouseva tai laskeva riippuen pisteiden A ja B valinnasta.

Reunaehtojen $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$ avulla voidaan ratkaista vielä vakiot c_1 ja c_2 yhtälöparin

$$\begin{aligned} y(x_1) &= c_1 x_1 + c_2 = y_1 \\ y(x_2) &= c_1 x_2 + c_2 = y_2 \end{aligned}$$

avulla. Kun ratkaistaan ylemmästä $c_2 = y_1 - c_1 x_1$ ja sijoitetaan se alempaan, saadaan

$$\begin{aligned} c_1 x_2 + y_1 - c_1 x_1 &= y_2 \\ c_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \end{aligned}$$

Tämä osamäärä on hyvin määritelty, koska oletuksen nojalla $x_1 \neq x_2$. Tämän avulla voidaan ratkaista edelleen

$$c_2 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1\,.$$

Näin ollen

$$y = c_1 x + c_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1\,. \tag{3.4}$$

Ratkaisu on siis pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ kautta kulkeva suoran yhtälö. Koska Esimerkissä 2.6 todettiin, että funktio F on aidosti konveksi, saatu funktio (3.4) todella minimoi integraalin (3.2) ja on näin minimointiongelman ratkaisu ja ratkaisu on sen lisäksi yksikäsitteinen.

Tapauksessa $y_1 = y_2$ ratkaisuna on vakiofunktio $y(x) = y_1$, sillä se toteuttaa reunaehdot $y(x_1) = y_1 = y_2 = y(x_2)$. Lisäksi se minimoi integraalin (3.2), koska

$$I(y_1) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + 0^2}\,\mathrm{d}x = x_2 - x_1$$

on pienin mahdollinen integraalin arvo, sillä kaikille muille funktioille y, integroitavalle funktiolle pätee $\sqrt{1+y'^2} \geq 1$, jolloin $I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \geq \int_{x_1}^{x_2} 1\mathrm{d}x = x_2 - x_1$.

3.2. Tapaus $F(x,y,y') = F(x,y')$

Kun funktio F ei riipu argumentista y, Eulerin differentiaaliyhtälö (2.1) saa muodon

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\,,$$

eli

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c\,.$$

Tästä voidaan edelleen ratkaista y' muuttujan x suhteen eli muotoon $y' = f(x,c)$ ja lopullinen ratkaisu saadaan integroimalla.

3.3. Tapaus $F(x,y,y') = F(y,y')$

Kun F riippuu vain muuttujista y ja y' on sen osittaisderivaatta muuttujan x suhteen nolla. Käyttäen hyödyksi tätä tietoa, sekä vaihtoehtoista Eulerin yhtälöä eli DuBoisson-Reymondin yhtälöä (2.2), saadaan yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

eli

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c$$

kun $x \in (x_1, x_2)$.

Esimerkki 3.2. Esimerkissä 1.1 alustettiin variaatiolaskennan ongelmaa, jossa etsitään käyrää, jonka muodostama pyörähdyspinta-ala on pienin. Muodostetaan nyt Eulerin differentiaaliyhtälö ongelmalle.

Pyörähdyskappaleen pienintä pinta-alaa etsittäessä minimoitava integraali on muotoa

$$I(y) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\,. \tag{3.5}$$

Nyt siis $F(y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$ eikä siis riipu muuttujasta x. Koska haemme integraalin minimiä, ei vakiotermi 2π vaikuta tulokseen ja voimme jättää sen huomiotta. Eulerin yhtälö on muotoa

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c\,.$$

Lasketaan tarvittava osittaisderivaatta

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(y\sqrt{1+y'^2}\right) = y \cdot \frac{1}{2}(1+y'^2)^{-1/2} \cdot 2y' = \frac{y'y}{\sqrt{1+y'^2}}\,.$$

Yhtälö on siis muotoa

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c\,,$$

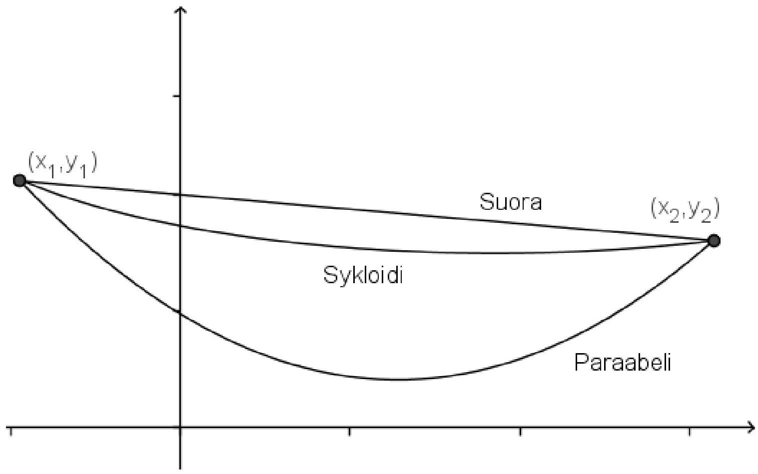
missä c on vakio.

Tässä luvussa esiteltyjä tuloksia hyödyntämällä on variaatiolaskennan ongelmien käsittely aavistuksen nopeampaa. Oikean Eulerin differentiaaliyhtälön muoto valitaan aina tapauskohtaisesti ja se riippuu integroitavasta funktiosta. Seuraavissa kappaleissa esiteltävien variaatiolaskennan ongelmien tarkastelussa hyödynnetään tämän luvun tuloksia.

LUKU 4

Brachistocrone

Yksi ensimmäisiä ja ehkä tärkeimpiä variaatiolaskennan ongelmia on niin sanottu brachistocronen ongelma, joka antoi alkusysäyksen variaatiolaskennalle. Nimi juontaa juurensa kreikan kielestä tarkoittaen lyhintä aikaa. Ongelman esitti ensimmäisen kerran vuonna 1638 Galileo ja ratkaisi ja muotoili matemaattisessa muodossaan Johann Bernoulli 1696. Brachistocronen ongelmassa etsitään kahden pisteen välillä kulkevaa käyrää, jota pitkin gravitaatiokentässä kulkeva kappale kulkee mahdollisimman nopeasti. Esimerkissä 3.1 todettiin, että kahden pisteen välillä lyhimmän reitin antaa näiden pisteiden kautta kulkeva suora, mutta nopein reitti ei olekaan suora. Galileo esitti virheellisesti käyrän olevan osa ympyräkaarta, mutta oikean ratkaisun ongelmaan löysi John Bernoulli vuonna 1697 ja hänen jälkeensä monet muut matemaatikot. Kuvassa 4.1 on muutama ehdotus mahdollisesta reitistä.



KUVA 4.1. *Mitä reittiä kappale kulkee alkupisteestä loppupisteeseen mahdollisimman lyhyessä ajassa?*

4.1. Minimointiongelman muotoileminen ja Eulerin differentiaaliyhtälö

Kiinnitetään (x, y)-tasoon kaksi pistettä $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ ja valitaan pisteet siten, että piste B sijaitsee pisteen A alapuolella eli $x_1 < x_2$ sekä $y_2 < y_1$. Olkoon näitä pisteitä yhdistävä käyrä $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, jolle lisäksi pätee $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$. Tarkoitus on siis löytää nämä ehdot toteuttavista käyristä se, jota pitkin ilman kitkaa liukumaan asetettu m-massainen, pyöreä kappale kulkee gravitaatiokentässä pisteestä A pisteeseen B mahdollisimman lyhyessä ajassa. Kappaleen oletetaan lähtevän levosta pisteestä A ja gravitaation ajatellaan vaikuttavan negatiivisen y-akselin suuntaan.

Olkoon käyrän pituus s, jolloin tietyllä ajanhetkellä t kappaleen nopeus on $v = ds/dt$. Kappaleen kokonaisaika T saadaan siis integraalina

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}s}{v}\,.$$

Käyrän ds pituus on $\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ jolloin lopulta saadaan

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\mathrm{d}x\,. \tag{4.1}$$

Koska nopeus v on kappaleen paikan funktio, täytyy meidän määrittää vielä nopeudelle lauseke $v(y)$. Koska kappale liikkuu kitkattomasti, systeemin kokonaisenergia säilyy. Olkoon $P(t)$ ja $K(t)$ systeemin potentiaali- ja kineettinen energia ajanhetkellä t ja asetetaan $t = 0$ pisteessä A. Energian säilymislain mukaan ajanhetkellä t systeemin kokonaisenergia on yhtä suuri kuin alkutilanteessa eli kappaleen lähtiessä pisteestä A jolloin siis

$$P(t) + K(t) = P(0) + K(0)\,. \tag{4.2}$$

Potentiaalienergian yleinen lauseke tietyllä ajanhetkellä on $P(t) = mgh$, missä h on kappaleen korkeus ajanhetkellä t. Korkeus h voidaan määrittää kappaleen y-koordinaatin perusteella ajanhetkellä t. Kineettinen energia saadaan vastaavasti lausekkeena $K(t) = \frac{1}{2}mv^2$, missä v on kappaleen nopeus ajanhetkellä t. Lauseke (4.2) saadaan siis muotoon

$$\begin{aligned} mgy + \frac{1}{2}mv^2 &= mgy_1 + \frac{1}{2}m{v_0}^2 \\ mgy + \frac{1}{2}mv^2 &= mgy_1\,, \end{aligned} \tag{4.3}$$

koska $v_0 = 0$ kun kappale lähtee liikkeelle levosta. Ratkaistaan lausekkeesta (4.3) etsitty v ja saadaan

$$v = \sqrt{2g(y_1 - y)}\,.$$

Sijoitetaan tämä aikaisemmin ajalle T saatuun lausekkeeseen (4.1)

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_1-y)}}\mathrm{d}x\,. \tag{4.4}$$

Integroitava funktio on hyvin määritelty kun $y(x) < y_1$. Nimittäjä saa arvon nolla kun $y(x) = y_1$ mikä toteutuu ainakin päätepisteessä x_1. Voidaan kuitenkin osoittaa [**1**], että kaavan (4.4) integraali on epäoleellisena integraalina hyvin määritelty.

Etsitään siis funktiota y, joka minimoi integraalin (4.4). Eulerin differentiaaliyhtälö on nyt Luvun 3.3 nojalla muotoa

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = c\,.$$

Lasketaan jälleen tarvittava osittaisderivaatta

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y_1-y}}\right) = \frac{y'}{\sqrt{y_1-y}\sqrt{1+y'^2}}\,.$$

Yhtälö on siis muotoa

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y_1-y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y_1-y}\sqrt{1+y'^2}} = c\,.$$

4.2. Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen

Lähdetään muokkaamaan yhtälöä hieman yksinkertaisempaan muotoon

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y_1-y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y_1-y}\sqrt{1+y'^2}} &= c \\
\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{y_1-y}\sqrt{1+y'^2}} &= c \\
\frac{1}{\sqrt{y_1-y}\sqrt{1+y'^2}} &= c \\
c\sqrt{y_1-y}\sqrt{1+y'^2} &= 1 \\
c^2(y_1-y)(1+y'^2) &= 1\,.
\end{aligned}$$

Ratkaistaan tämä yhtälö muuttujan y' suhteen

$$\begin{aligned}
1+y'^2 &= \frac{1}{c^2(y_1-y)} \\
y'^2 &= \frac{1}{c^2(y_1-y)} - 1 \\
y'^2 &= \frac{1-c^2(y_1-y)}{c^2(y_1-y)} \\
y' &= \pm\sqrt{\frac{1-c^2(y_1-y)}{c^2(y_1-y)}}\,. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Merkitään $u = c^2(y_1-y)$ ja suoritetaan muuttujanvaihto. Nyt siis $u'(x) = -c^2y'(x)$ eli $u'(x)/y'(x) = \mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -c^2$. Sijoitetaan yhtälöön (4.5) $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/c^2$ jolloin se saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}u}{c^2} &= \pm\sqrt{\frac{1-u}{u}}\mathrm{d}x \\
\frac{\mathrm{d}u}{c^2} &= \pm\sqrt{\frac{1-u}{u}}\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Ylläoleva differentiaaliyhtälö on separoituva ja se voidaan kirjoittaa muodossa $y' = g(x)h(u)$, missä $g(x) = c^2$ ja $h(u) = \pm\sqrt{\frac{1-u}{u}}$ ovat jatkuvia. Ratkaisu saadaan siis jälleen muodossa

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{h(u)} &= \int g(x)\mathrm{d}x + c_1 \\
\pm\int\sqrt{\frac{u}{1-u}}\mathrm{d}u &= \int c^2\mathrm{d}x + c_1 \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Oikeanpuoleinen integraali saadaan helposti ratkaistua

$$\int c^2 \mathrm{d}x + c_1 = c^2 x + c_1 \,. \tag{4.7}$$

Vasemmanpuoleisen integraalin ratkaisemiseksi suoritetaan jälleen muuttujanvaihto $u = \sin^2\theta$, jolloin $\mathrm{d}u = 2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$. Siispä integraali on muotoa

$$\begin{aligned}
\pm\int\sqrt{\frac{u}{1-u}}\,\mathrm{d}u &= \pm\int\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}\,2\sin\theta\cos\theta\;\mathrm{d}\theta \\
&= \pm\int 2\sin\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \pm\int 2\sin\theta\sqrt{\frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{1-\sin^2\theta}}\;\mathrm{d}\theta \\
&= \pm\int 2\sin\theta|\sin\theta|\;\mathrm{d}\theta \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Koska $\theta \in [0, 2\pi]$ on yllä olevassa integraalissa

$$|\sin\theta| = \begin{cases} \sin\theta & \text{kun } \theta \in [0,\pi] \\ -\sin\theta & \text{kun } \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Integraali (4.8) saa siis kummassakin tapauksessa positiivisen arvoja kun otetaan huomioon lausekkeen edessä oleva $\pm$-merkki ja saadaan muotoon

$$\int 2\sin^2\theta\;\mathrm{d}\theta = \int(1-\cos 2\theta)\;\mathrm{d}\theta = \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + c_2 \,. \tag{4.9}$$

Kun nyt sijoitetaan saadut tulokset (4.7) ja (4.9) yhtälöön (4.6), saadaan se lopulta muotoon

$$\begin{aligned}
\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + c_2 &= c^2 x + c_1 \text{ eli} \\
2\theta - \sin 2\theta + 2c_2 &= 2c^2 x + 2c_1 \,.
\end{aligned}$$

Ratkaistaan tämä muuttujan x suhteen

$$x = \frac{2\theta - \sin 2\theta + 2c_2 - 2c_1}{2c^2} = \frac{1}{2c^2}(2\theta - \sin 2\theta) + \frac{c_2 - c_1}{c^2} \,.$$

Selkeyden vuoksi merkitään lopussa olevaa vakiota yksinkertaisesti kirjaimella C jolloin yllä oleva lauseke saadaan muotoon

$$x = \frac{1}{2c^2}(2\theta - \sin 2\theta) + C \,.$$

Koska nyt määriteltiin $u = c^2(y_1 - y)$, niin tästä saadaan ratkaistua funktiolle y lauseke muuttujan u avulla lausuttuna

$$y = y_1 - \frac{u}{c^2}$$

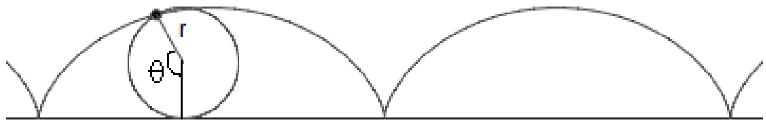
ja edelleen koska $u = \sin^2\theta$ saadaan

$$y = y_1 - \frac{\sin^2\theta}{c^2} = y_1 - \frac{1/2 - 1/2\cos 2\theta}{c^2} = y_1 - \frac{1}{2c^2}(1 - \cos 2\theta) \,.$$

Siispä

$$
\begin{aligned}
x &= r(2\theta - \sin 2\theta) + C\,, \\
y &= y_1 - r(1 - \cos 2\theta)\,,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

missä $r = 1/2c^2$. Kyseinen parametriesitys antaa sykloidin. Sykloidi on ympyrän pyöriessä ympyrän kehäpisteen piirtämä käyrä, kuten kuvassa 4.2. Yhtälössä (4.10) r



Kuva 4.2. *Sykloidi*

antaa ympyrän säteen ja θ kyseisen pisteen koordinaatin kulman avulla ilmaistuna. Brachistochronen ongelman tapauksessa, sykloidi on peilattu x-akselin suhteen ja nostettu y-akselilla alkamaan kohdasta $y(x) = y_1$, jolloin reitti on ilman koordinaatistoa Kuvan 4.3 kaltainen.

Kuva 4.3. *Nopeimman reitin pisteestä A pisteeseen B antaa sykloidi*

4.3. Minimointiongelman ratkaisu

Variaatiolaskennan ongelmissa etsimme käyrää $y(x)$, joka minimoi halutun ongelman. Nyt Eulerin differentiaaliyhtälö antoi kuitenkin meille ratkaisuehdokkaan parametriesitys muodossa. Sykloidi voitaisiin kuitenkin esittää myös muodossa $x = x(y)$, mutta sykloidin tapauksessa parametriesitys antaa tutumman ja selkeämmän esityksen. Tässä tapauksessa parametriesitys ei tuota siis ongelmaa.

Lähdetään nyt tarkastelemaan onko sykloidi todella ongelman ratkaisu. Ensimmäinen työkalu on tarkastella funktion konveksisuus. Voidaan kuitenkin osoittaa, että funktio $F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y_1 - y}}$ ei ole konveksi [**9**]. Ongelmalla on siitä huolimatta olemassa yksikäsitteinen ratkaisu.

Jotta sykloidi todella olisi brachistochronen ongelman ratkaisu, on löydettävä sykloidi, joka toteuttaa annetut reunaehdot. On siis tarkasteltava onko olemassa sykloidia, joka toteuttaa ehdot $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$. Tässä tapauksessa etsitään siis vakioita θ_1, θ_2, C ja r siten että yhtälöt

$$\begin{aligned} x_1 &= r(2\theta_1 - \sin 2\theta_1) + C \\ y_1 &= y_1 - r(1 - \cos 2\theta_1) \\ x_2 &= r(2\theta_2 - \sin 2\theta_2) + C \\ y_2 &= y_1 - r(1 - \cos 2\theta_2)\,, \end{aligned}$$

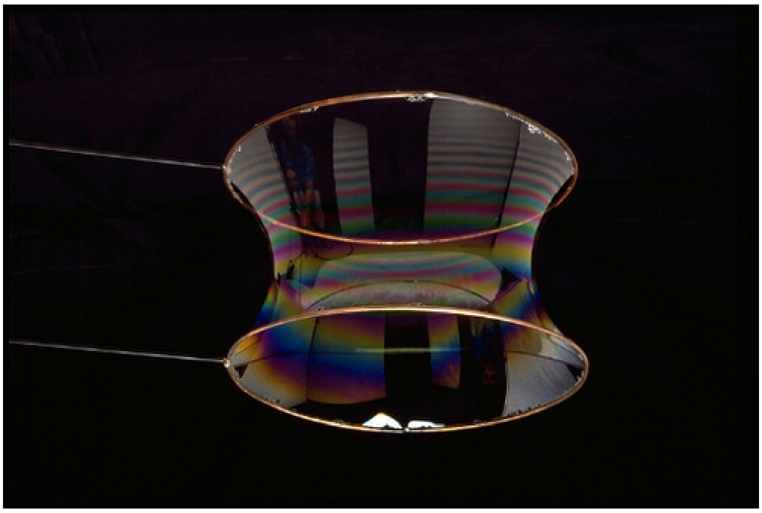
toteutuvat.

Kahden ylimmän yhtälön avulla saadaan helposti ratkaistua $\theta_1 = 0$ ja $x_1 = C$. Sen jälkeen θ_2 ja r ratkeavat, mutta eivät niin suoraviivaisesti. Yhtälöryhmälle on kuitenkin olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $(\theta_1, \theta_2, C, r)$, joista yhdenlaiset osoitukset voi löytää teoksista [**1**] ja[**3**]. Pisteiden A ja B kautta on siis mahdollista määrittää sykloidi pisteiden valinnasta riippumatta. Minimointiongelmalle on siis olemassa yksikäsitteinen ratkaisu, jonka antaa muotoa (4.10) oleva sykloidi [**9**].

LUKU 5

Pyörähdyskappaleen pienin pinta-ala

Pyörähdyskappaleen pienimmän pinta-alan etsiminen on historiallisesti yksi ensimmäisiä variaatiolaskennan ongelmia, jonka ensimmäisen kerran esitti Lagrange vuonna 1762. Ongelmaa voidaan havainnoillistaa esimerkiksi saippuakuplia tarkastelemalla, sillä kahden saippuakuplatelineen välille muodostuva saippuapinta muodostaa pienimmän pyörähdyspinnan kuten Kuvassa 5.1. Vaikka ongelma on muotoiltaan yksinkertainen, ei sen ratkaisu olekaan niin yksinkertainen ja selvä. Pyörähdyskappaleen pienimmän pinta-alan ongelma antaa esimerkin, jossa Eulerin differentiaaliyhtälöllä saatu ratkaisuehdokas ei annakaan aina minimointiongelman ratkaisua.



KUVA 5.1. *Katenoidi saippuakuplan avulla*

5.1. Minimointiongelman muotoileminen ja Eulerin differentiaaliyhtälö

Palataan pyörähdyskappaleen pienimmän pinta-alan määrittämiseen, jota on käsitelty aikaisemmin läpi työn. Kuten Esimerkissä 3.2 määriteltiin, etsitään siis käyrää y, joka pyörähtäessään x-akselin ympäri muodostaa pienimmän mahdollisen pinta-alan eli minimoi integraalin

$$I(y) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

ja lisäksi toteuttaa ehdot $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$. Jotta integraali olisi järkevä oletetaan lisäksi, että käyrä y kulkee kokonaan x-akselin yläpuolella.

Samassa esimerkissä Eulerin differentiaaliyhtälöksi saatiin

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c,$$

missä c on vakio. Kun $c = 0$ tämä yhtälö sievenee muotoon $y(x) = 0$, joka on tässä tapauksessa differentiaaliyhtälön ainoa ratkaisu. Tämä ei kuitenkaan toteuta annettuja reunaehtoja, joten voidaan olettaa, että $c \neq 0$.

5.2. Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen

Lähdetään ratkaisemaan kyseistä yhtälöä muuttujan y' suhteen

$$\begin{aligned}
y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} &= c \\
\frac{y(1+y'^2) - yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} &= c \\
\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} &= c \\
y &= c\sqrt{1+y'^2} \\
y^2 &= c^2(1+y'^2) \\
\frac{y^2}{c^2} &= 1+y'^2 \\
y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \pm\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}.
\end{aligned}$$

Tämä differentiaaliyhtälö on myös separoituva ja se on muotoa $y' = g(x)h(y)$, missä $g(x) = 1$ ja $h(y) = \pm\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}$ ovat jatkuvia funktiota ja ratkaisu saadaan jälleen integraaliyhtälöstä

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} &= \int g(x)\mathrm{d}x + c_1 \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{\pm\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}} &= \int 1\mathrm{d}x + c_1.
\end{aligned}$$

Oikean puoleinen integraali saadaan helposti integroitua muotoon

$$\int 1\mathrm{d}x + c_1 = x + c_1,$$

missä c_1 on vakio. Suoritetaan vasemmanpuoleiseen integraaliin muuttujanvaihto ja merkitään $y = c\cosh t$, jolloin $\mathrm{d}y = c\sinh t\mathrm{d}t$. Tällöin integraali saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{\pm\sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}} &= \int \frac{c\sinh t\mathrm{d}t}{\pm\sqrt{\frac{c^2\cosh^2 t}{c^2} - 1}} = \int \frac{c\sinh t\mathrm{d}t}{\pm\sqrt{\cosh^2 t - 1}} \\
&= \int \frac{c\sinh t\mathrm{d}t}{\pm\sqrt{\sinh^2 t}} = \int \frac{c\sinh t\mathrm{d}t}{\pm\sinh t} = \int \pm c\mathrm{d}t = \pm ct + c_2.
\end{aligned}$$

Kun nämä yhdistetään ja lisäksi muistetaan, että $y = c\cosh t$, josta saadaan $t = \cosh^{-1}(y/c)$, niin saadaan lopulta lauseke

$$\pm c\cosh^{-1}\left(\frac{y}{c}\right) + c_2 = x + c_1.$$

Tästä voidaan ratkaista y

$$y(x) = c\cosh\left(\frac{x + c_3}{\pm c}\right), \tag{5.1}$$

missä $c_3 = c_1 - c_2$ on edelleen vakio. Koska hyperboliselle kosinille $\cosh(x) = \cosh(-x)$ voidaan lauseke kirjoittaa yksinkertaisesti muodossa

$$y(x) = c\cosh\left(\frac{x + c_3}{c}\right). \tag{5.2}$$

Tämä on ketjukäyrän yhtälö.

Kuva 5.2. *Ketjukäyrä luonnossa*

Ketjukäyrä on ratkaisu myös raskaan ketjun ongelmaan, jossa etsitään, mihin muotoon asettuu molemmista päistään kiinteisiin pisteisiin asetettu ketju gravitaatiokentässä. Tällöin minimoitava suure on ketjun potentiaalienergia. Ketjukäyrän pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyvää pyörähdyspintaa kutsutaan katenoidiksi. Kuvassa 5.3 on yksi esimerkki katenoidista.

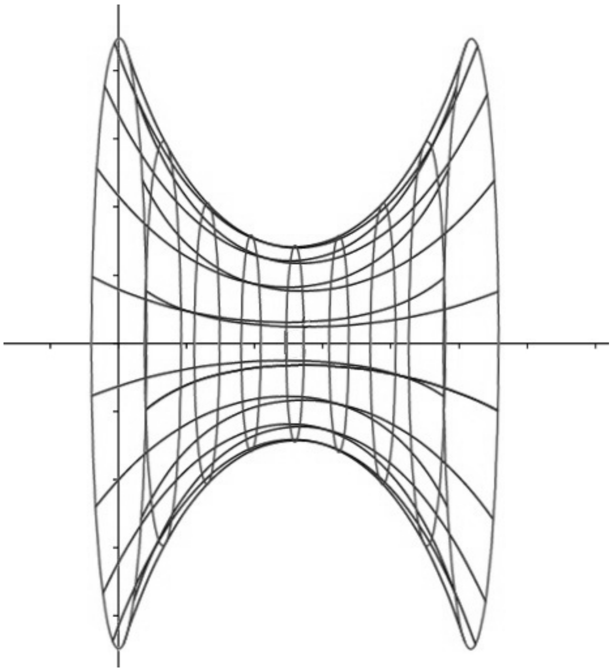
5.3. Minimointiongelman ratkaisu

Eulerin differentiaaliyhtälö on antanut meille ratkaisuehdokkaaksi ketjukäyrän (5.2). Tarkastellaan nyt antaako ketjukäyrä todella ratkaisun ongelmalle.

Aloitetaan tutkimalla onko funktio konveksi. Nyt $F(x, y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$ on kahden muuttujan y ja y' määräämä funktio. Muodostetaan Lauseen A.3 mukaisesti funktiolle F Hessen matriisin determinantti $\partial_1\partial_1 F \cdot \partial_2\partial_2 F - \partial_1\partial_2 F^2$ ja tarkistetaan muut tarvittavat ehdot funktion konveksisuudelle.

Lasketaan tarvittavat osittaisderivaatat

$$\partial_1 F = \frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1 + y'^2} \qquad \partial_1\partial_1 F = \frac{\partial F}{\partial y \partial y} = 0 \geq 0$$



KUVA 5.3. *Esimerkki katenoidista*

ja

$$\partial_2 F = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} \qquad \partial_2\partial_2 F = \frac{\partial F}{\partial y' \partial y'} = \frac{y}{(1+y'^2)^{3/2}} \geq 0$$

jos $y \geq 0$ ja vielä

$$\partial_1\partial_2 F = \frac{\partial F}{\partial y \partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Siispä

$$\partial_1\partial_1 F \cdot \partial_2\partial_2 F - \partial_1\partial_2 F^2 = 0 - \frac{y'^2}{1+y'^2} = -\frac{y'^2}{1+y'^2} < 0,$$

jos $y' \neq 0$. Funktio F ei siis ole konveksi, joten on tarkistettava toisella tavalla onko saatu funktio todella ongelman ratkaisu.

Ollakseen minimointiongelman ratkaisun, täytyy funktion (5.2) myös toteuttaa ehdot $y(x_1) = y_1$ ja $y(x_2) = y_2$ eli kulkea pisteiden $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$ kautta. Toisin kuin brachistochronen ongelmassa sykloidin tapauksessa, kahden valitun pisteen kautta ei ole aina mahdollista määrittää ketjukäyrää. Näin ollen ketjukäyrän olemassaolo ja sitä kautta minimointiongelman ratkaisu riippuu pisteiden A ja B valinnasta.

Osoitetaan nyt, ettei kahden pisteen kautta voida aina määrittää ketjukäyrää. Kiinnitetään piste $A = (0, 1)$ ja tarkastellaan tämän pisteen ja pisteen $B = (x_2, y_2)$ kautta kulkevia ketjukäyriä. Pisteen A valinta näin helpottaa myöhempää tarkastelua eikä muuta olennaisesti ongelmaa, sillä jokainen ketjukäyrä voidaan aina siirtää alkamaan pisteestä $(0, 1)$. Kun haluamme osoittaa, ettei kahden pisteen välille voida aina määrittää ketjukäyrää ei ketjukäyrän sijainnilla ole olennaisesti merkitystä.

Kun alkupiste on valittu, voidaan lähteä muokkaaman yhtälöä (5.2) kun tiedämme, että ratkaisukäyrän on nyt toteutettava ehdot $y(0) = 1$ sekä $y(x_2) = y_2$. Yhtälössä esiintyvät vakiot c ja c_3 riippuvat alku- ja loppupisteen valinnasta. Tavoitteenamme on yksinkertaistaa yhtälö muotoon $y(x, \alpha)$, missä α riipppuu vakioista c ja c_3. Tämä vakio määrää sen, kulkeeko ketjukäyrä molempien valittujen pisteiden kautta eli tietyllä tapaa identifioi ketjukäyrän.

Ehdosta $y(0) = 1$ saadaan

$$\begin{aligned} y(0) &= c\cosh\left(\frac{0+c_3}{c}\right) \\ c\cosh\left(\frac{c_3}{c}\right) &= 1 \\ c &= \frac{1}{\cosh\alpha}, \end{aligned}$$

missä $\alpha = c_3/c$. Koska hyperbolinen kosini on aidosti positiivinen funktio, on yhtälö hyvin määritelty. Sijoitetaan tämä yhtälöön (5.2), joka saadaan nyt muotoon

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\cosh\alpha}\cosh\left(\frac{x+c_3}{\frac{1}{\cosh\alpha}}\right) \\ y(x) &= \frac{\cosh\left(\cosh\alpha(x+c_3)\right)}{\cosh\alpha}. \end{aligned}$$

Koska haluamme yhtälön muotoon $y(x, \alpha)$, sijoitetaan yllä olevaan yhtälöön vielä $c_3 = c\alpha = \frac{1}{\cosh\alpha}\alpha$, jolloin se yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\cosh\left(\cosh\alpha(x+\frac{1}{\cosh\alpha}\alpha)\right)}{\cosh\alpha} \\ y(x,\alpha) &= \frac{\cosh\left(x\cosh\alpha+\alpha\right)}{\cosh\alpha}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pisteen $A = (0, 1)$ kautta kulkevat ketjukäyrät ovat siis muotoa (5.3). Koska ketjukäyrän halutaan kulkevan myös pisteen $B = (x_2, y_2)$ kautta, saadaan ehdosta $y(x_2) = y_2$

$$\begin{aligned} y(x_2) &= \frac{\cosh\left(x_2\cosh\alpha+\alpha\right)}{\cosh\alpha} \\ \frac{\cosh\left(x_2\cosh\alpha+\alpha\right)}{\cosh\alpha} &= y_2. \end{aligned}$$

Tämä yhtälö antaa siis pisteiden A ja B kautta kulkevat ketjukäyrät. Tähän asti kaikki näyttää vielä hyvältä, mutta kun lähdemme tarkastelemaan tarkemmin yllä olevaa yhtälöä, huomaammekin, ettei yhtälö ole voimassa kaikille pisteen $B = (x_2, y_2)$ valinnoille. Alla olevassa tarkastelussa hyödynnetään muun muassa kolmioepäyhtälöä sekä epäyhtälöä $\cosh x \geq |x|$

$$\begin{aligned} y_2 = \frac{\cosh\left(x_2\cosh\alpha+\alpha\right)}{\cosh\alpha} &\geq \left|\frac{x_2\cosh\alpha+\alpha}{\cosh\alpha}\right| = \left|x_2 + \frac{\alpha}{\cosh\alpha}\right| \\ &\geq |x_2| - \left|\frac{\alpha}{\cosh\alpha}\right| = |x_2| - \frac{|\alpha|}{|\cosh\alpha|}. \end{aligned}$$

Ylläolevalle termille etsitään siis karkeaa alarajaa, joka on voimassa kaikille vakioille α ja sitä kautta kaikille pisteiden A ja B kautta kulkeville ketjukäyrille. Tämä löydetään kun etsitään lausekkeen $\frac{|\alpha|}{|\cosh\alpha|}$ suurin arvo. Tämä saadaan derivaatan

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{|\alpha|}{|\cosh\alpha|}\right) = \frac{|\cosh\alpha - \alpha\sinh\alpha|}{\cosh^2\alpha}$$

nollakohtana eli lausekkeen $|\cosh\alpha - \alpha\sinh\alpha| = 0$ ratkaisuna. Tällä yhtälöllä on ratkaisut $\alpha_0 \approx \pm 1,1996$. Toisin sanoen

$$\max\frac{|\alpha|}{|\cosh\alpha|} = \frac{|\alpha_0|}{|\cosh\alpha_0|}$$

Eli

$$\begin{aligned} y_2 &\geq |x_2| - \frac{|\alpha|}{|\cosh\alpha|} \geq |x_2| - \frac{|\alpha_0|}{|\cosh\alpha_0|} = |x_2| - \frac{|\alpha_0|}{|\alpha_0\sinh\alpha_0|} \\ &= |x_2| - \frac{1}{|\sinh\alpha_0|} \approx |x_2| - 0,6628. \end{aligned}$$

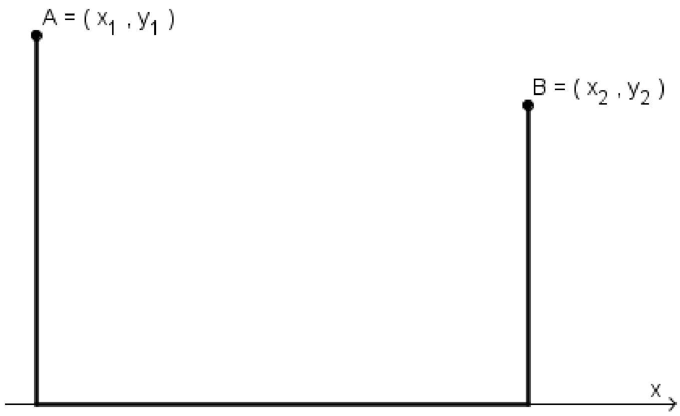
Epäyhtälö

$$y_2 \geq |x_2| - 0,6628 \tag{5.4}$$

on voimassa kaikilla vakion α arvoilla ja pätee siis kaikille pistepareille (x_2, y_2). Jos valitaan piste $B = (x_2, y_2)$ siten, että

$$0 < y_2 < |x_2| - 0,6628 \tag{5.5}$$

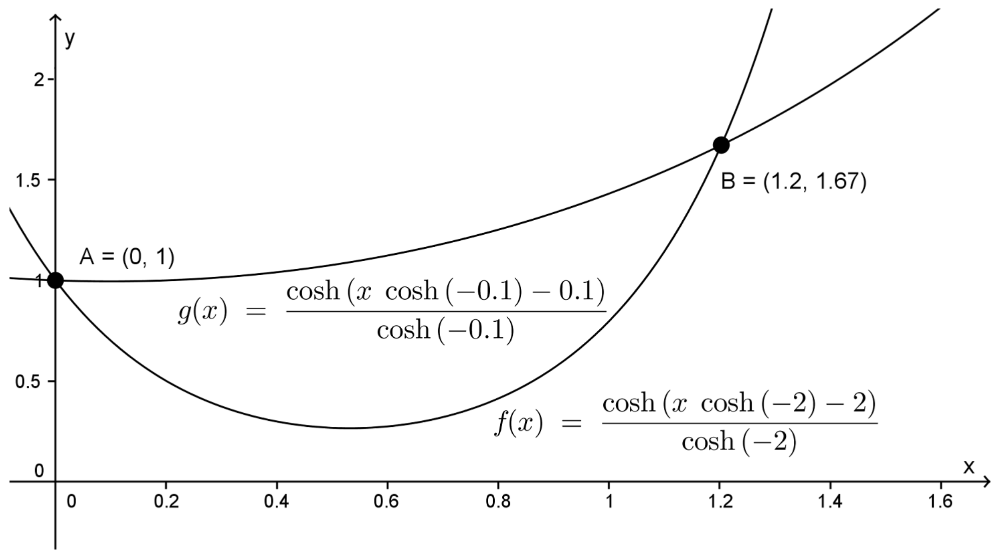
ei ehtoa $y(x_2) = y_2$ olevaa ketjukäyrää voida määrittää eikä näin ollen minimointiongelman ratkaisu voi olla ketjukäyrä.



Kuva 5.4. *Goldschmidt'n käyrä*

Kun ketjukäyrää ei ole olemassa, voidaanko pienintä pyörähdyspinta-alaa määrittää ollenkaan? Näissä tapauksissa ratkaisun antaa ns. Goldschmidtin käyrä, josta yksi esimerkki Kuvassa 5.4. Goldschmidtin pyörähdyspinta koostuu kahdesta kiekosta ja niiden väliin jäävästä janasta. Eulerin differentiaaliyhtälö antaa ratkaisuksi vain C^2-funktiot, joihin Goldschmidtin käyrä ei kuulu. Mikäli tarkastelussa pysytään C^2-funktioiden parissa, voidaan siis todeta, että mikäli ratkaisu ylipäätään on olemassa on se ketjukäyrä ja tiettyjen ehtojen (5.5) toteutuessa minimointiongelmalla ei ole ratkaisuna C^2-funktiota.

Tietyillä pisteillä Eulerin differentiaaliyhtälöllä saatua ratkaisuehdokasta ei saadakaan siis toteuttamaan rajaehtoja $y(x_1) = y_2$ ja $y(x_2) = y_2$ eli ketjukäyrä ei kuljekaan pisteiden A ja B kautta. Mikäli ratkaisuksi sallittujen funktioiden joukkoa laajennetaan, ratkaisun antaa tässä tapauksessa aiemmin esitelty Goldscmidtin käyrä.

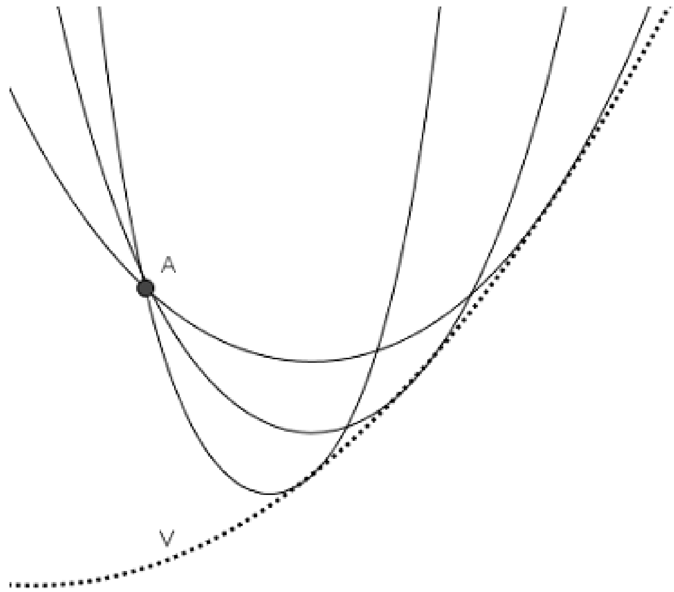


Kuva 5.5. *Kaksi ketjukäyrää pisteiden A ja B kautta*

Kahden pisteen kautta voi kuitenkin olla mahdollista määrittää kulkemaan pisteiden sijainnista riippuen myös yksi tai maksimissaan kaksi eri ketjukäyrää, jotka molemmat toteuttavat Eulerin differentiaaliyhtälön. Kuvassa 5.5 on esimerkkinä kaksi ketjukäyrää pisteiden $A = (0, 1)$ ja $B = (1.2, 1.67)$ kautta. Huomaa, että pisteelle B ehto (5.4) toteutuu sillä $1,67 \geq |1,2| - 0,6628 = 0,5372$.

Vaikka ketjukäyriä olisikin olemassa yksi tai kaksi, ei näistä ketjukäyristä yksikään anna välttämättä minimointiongelman ratkaisua. Ketjukäyrän olemassaoloa ja minimointiongelman ratkaisua voidaan lähteä käsittelemään niin sanotun verhokäyrän avulla. Verhokäyrä on käyrä, jota tässä tapauksessa jokainen pisteen A kautta kulkeva ketjukäyrä sivuaa yhdessä pisteessä kuten kuvassa 5.6. Verhokäyrän avulla ilmaistuna pisteiden A ja B kautta kulkevia ketjukäyriä ei ole yhtään pisteen B sijaitessa verhokäyrän alapuolella, yksi kun piste B on verhokäyrällä ja kaksi kun piste B on verhokäyrän yläpuolella. Minimointiongelman ratkaisu voidaan siis ilmaista myös pisteen B sijaintina verhokäyrään nähden. Minimointiongelman ratkaisun antaa

- Goldschmidtin käyrä kun piste B sijaitsee verhokäyrän alapuolella tai verhokäyrällä
- Goldschmidtin käyrä tai ketjukäyristä se, joka ei sivua verhokäyrää kun piste B sijaitsee verhokäyrän yläpuolella. Ratkaisu on muodostuneista pyörähdyspinnoista pienempi.



Kuva 5.6. *Yhden käyräperheen verhokäyrä V*

Esimerkki 5.1. Kuvassa 5.5 olevien käyrien f ja g määräävät pyörähdyspinta-alat ovat $I(f) \approx 12,51$ ja $I(g) \approx 11,08$. Näistä pienemmän pinta-alan antaa siis ylempänä kulkeva käyrä g, sillä käyristä alempana kulkeva sivuaisi verhokäyrää. Goldschmidt'n käyrän antama pinta-ala tässä tapauksessa on $2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 1,67 \approx 16,78$ joten näille pisteille, pienimmän pinta-alan ja minimointiongelman ratkaisun antaisi ketjukäyrä g.

LUKU 6

Snellin laki

Fysiikasta tunnetun Fermat'n periaatteen mukaan, valo kulkee kahden pisteen välillä matkan, johon kuluu vähiten aikaa. Tämä variaatiolaskennan ongelma, jossa kahden pisteen välillä etsitään reittiä, jonka kulkemiseen kuluu vähiten aikaa, poikkeaa hieman aiemmin esitellyistä ongelmista. Ongelmaa ei varsinaisesti ratkaista loppuun asti vaan variaatiolaskennan avulla voidaan johtaa geometrisen optiikan taittumis- ja heijastumislait. Ongelman muotoilu on hyvin samankaltainen kuin brachistochronen ongelmassa, mutta nyt gravitaatiovoimaa ei oteta huomioon.

6.1. Minimointiongelman muotoileminen ja Eulerin differentiaaliyhtälö

Kiinnitetään pisteet $A = (x_1, y_1)$ ja $B = (x_2, y_2)$, joiden kautta valo kulkee (x, y)-tasossa. Fermat'n periaatteen mukaisesti, valon kulkee pisteestä A pisteeseen B reitin y joka minimoi tämän reitin kulkemiseen käytetyn ajan $T(y)$.

Lähdetään määrittämään ajalle T minimoitavaa integraalia. Kun valo kulkee väliaineessa, jonka taitekerroin on $n(y)$, sen nopeus on $v = C/n$, missä C on valon nopeus tyhjiössä. Kun hyödynnetään tätä, sekä yleistä ajan lauseketta $T = s/v$, missä s on valon kulkema matka, saadaan pisteestä A pisteeseen B reittiä y kuluva aika ilmaistua integraalina

$$T(y) = \frac{1}{C}\int_{x_1}^{x_2} n(y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}t.$$

Haetaan siis reittiä y, joka minimoi tämän ajan ja jolle pätee $y(x_1) = y_1$ sekä $y(x_2) = y_2$. Koska integraalille haetaan minimoijaa, edessä oleva vakiotermi $1/C$ ei vaikuta tulokseen ja se voidaan jättää laskuissa huomioimatta.

Koska integroitava funktio ei riipu muuttujasta x, on Eulerin differentiaaliyhtälö nyt Luvun 3.3 nojalla muotoa

$$F - y'\frac{\partial}{\partial y'}F = vakio$$

missä $F = n(y)\sqrt{1+y'^2}$ eli

$$\begin{aligned}
&n(y)\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{\partial}{\partial y'}\left(n(y)\sqrt{1+y'^2}\right) \\
&= n(y)\sqrt{1+y'^2} - \frac{n(y)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \\
&= \frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = c.
\end{aligned}$$

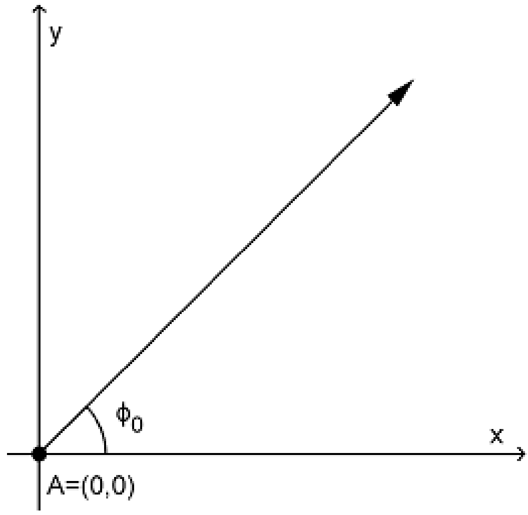
Taitekertoimelle n saadaan siis Eulerin differentiaaliyhtälön avulla lauseke

$$n(y) = c\sqrt{1+y'^2}, \tag{6.1}$$

missä c on vakio.

6.2. Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen

Käsittelyä helpottaakseemme, voimme asettaa, että valonsäde lähtee pisteestä $A = (0,0)$, jolloin $y(0) = 0$. Olkoon lisäksi tähän pisteeseen piirretyn tangentin suuntakulma $\phi_0 \in]-\pi/2, \pi/2]$ kuten Kuvassa 6.1. Tällöin $y'(0) = \tan\phi_0$ ja taitekertoimelle



Kuva 6.1.

n saadaan yhtälön (6.1) mukaisesti

$$\begin{aligned} n(y(0)) &= c\sqrt{1+(y'(0))^2} = c\sqrt{1+\tan^2\phi_0} = c\sqrt{1+\frac{\sin^2\phi_0}{\cos^2\phi_0}} \\ &= c\sqrt{\frac{\cos^2\phi_0+\sin^2\phi_0}{\cos^2\phi_0}} = c\sqrt{\frac{1}{\cos^2\phi_0}} = c\frac{1}{\cos\phi_0}. \end{aligned}$$

Kun käytetään merkintää $n(y(0)) = n(0) = n_1$ niin vakion arvoksi saadaan $c = n_1\cos\phi_0$.

Olkoon vastaavasti pisteessä $B = (x_2, y_2)$ suuntakulma ϕ_2. Nyt $\tan\phi_2 = y'(x_2)$ ja taitekertoimelle saadaan

$$n(y(x_2)) = c\frac{1}{\cos\phi_2}$$

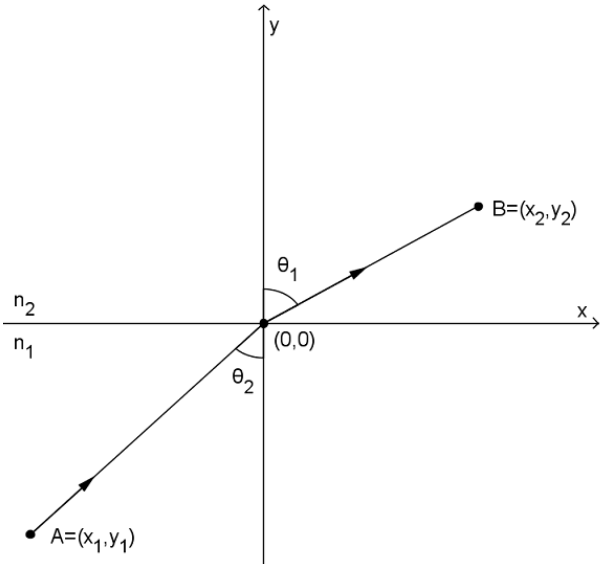
eli $c = n(y(x_2))\cos\phi_2$, jossa edelleen voidaan merkitä $n(y(x_2)) = n_2$.

Siispä

$$n_2\cos\phi_2 = n_0\cos\phi_0.$$

Kun nyt määritellään kulma $\theta = \pi/2 - \phi$ ja hyödynnetään lisäksi tietoa $\sin(\theta) = \sin(\pi/2-\phi) = \cos\phi$ niin yllä oleva yhtälö saadaan lopulta Snellin lakina tunnettuun muotoon

$$n_2\sin\theta_2 = n_0\sin\theta_0. \tag{6.2}$$



KUVA 6.2.

Kun valo kulkee kahden eri materiaalia olevan raja-pinnan läpi, voidaan valita, että tämä eri aineita erottava raja-pinta on x-akseli ja aineilla taitekertoimet n_1 ja n_2 ja niitä vastaavat taitekulmat θ_1 ja θ_2 kuten Kuvassa 6.2. Ongelma voidaan tällöin erottaa kahteen osaan ja tarkastella erikseen pisteestä $A = (x_1, y_1)$ pisteeseen $(0, 0)$ kulkevaa valonsädettä ja vastaavasti pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $B = (x_2, y_2)$ kulkevaa sädettä. Molemmissa tapauksissa valon kulkema reitti on suora taitekertoimien n_1 ja n_2 ollessa vakioita, mutta kuten Kuvassa 6.2, eri taitekertoimista johtuen, valonsäde taittuu ylittäessään rajapinnan.

Tällöin yhtälö (6.2) saadaan edelleen Snellin lakina paremmin tunnettuun muotoon

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

Variaatiolaskennan ongelman ja teorian avulla saatiin siis tulokseksi fysiikassa käytetty tulos, vaikka minimoivaa funktiota ei varsinaisesti ratkaistukaan.

6.3. Minimointiongelman ratkaisu

Integroitava funktio on muotoa $F(x, y, y') = n(y)\sqrt{1 + y'^2}$. Kun taitekerroin n on vakio, on integroitava funktio samaa muotoa kuin Esimerkissä 2.3 esitellyssä lyhimmän reitin ongelmassa. Näin ollen, taitekertoimen ollessa vakio, sen sijaan, että minimoitaisiin aikaa, voidaankin minimoida reitin pituutta. Esimerkissä 2.6 todettiin samaa muotoa olevan funktion olevan konveksi, joten myös tässä esimerkissä funktion konveksisuuden nojalla, Eulerin differentiaaliyhtälöllä saatu ratkaisu tulee olemaan ongelman ratkaisu. Tässä tapauksessa ratkaisun antoi siis näiden pisteiden kautta kulkeva suora kun tarkastellaan ongelmaa kahdessa osassa kuten Kuvassa 6.2.

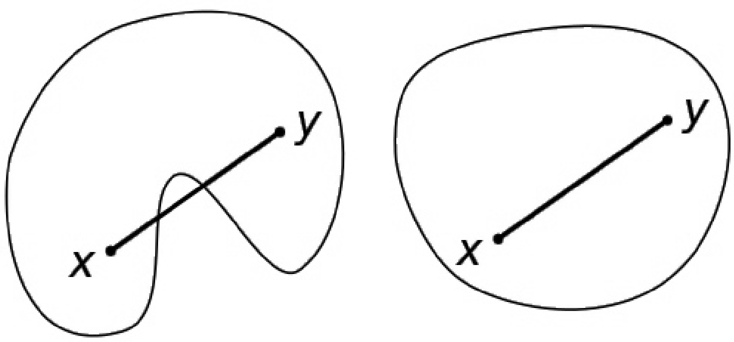
LIITE A

Konvekseista funktioista

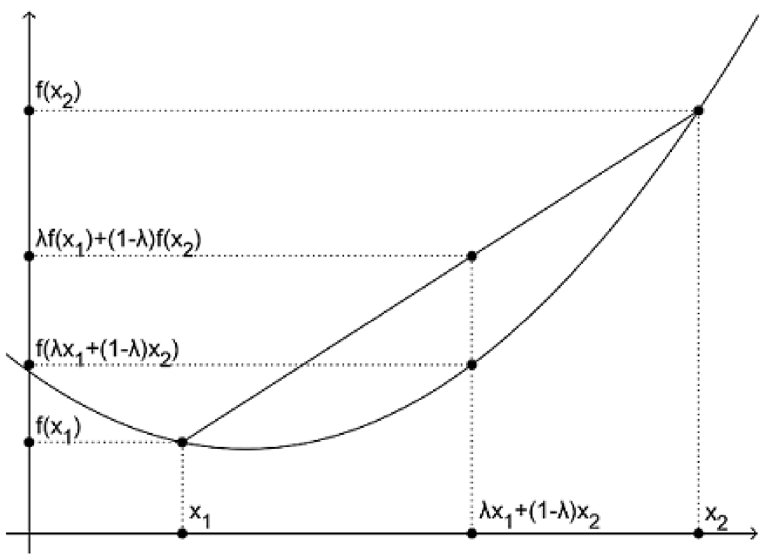
Työssä on käsitelty paikoitellen konvekseja funktiota. Mikäli nämä eivät ole ennestään tuttuja, käydään tässä läpi oleellisimmat tulokset.

MÄÄRITELMÄ A.1.

(1) Joukko $S \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi jos kaikille $x_1, x_2 \in S$ ja $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$ eli toisin sanoen kaikki pisteitä x_1 ja x_2 yhdistävät janan pisteet kuuluvat joukkoon S.



KUVA A.1. *Oikealla ei-konveksi, vasemalla konveksi joukko*



KUVA A.2. *Konveksi funktio*

(2) Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko. Tällöin funktio $f : S \to \mathbb{R}$ on konveksi jos kaikille $x_1, x_2 \in S$ ja $\lambda \in [0, 1]$ pätee seuraava epäyhtälö

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \tag{A.1}$$

Jos epäyhtälössä käytetään merkkiä $<$ sanotaan funktion f olevan aidosti konveksi.

Kuvassa A.2 on esimerkki yhdestä konveksista funktiosta. Jos funktion konveksisuutta tarkastellaan vähemmän matemaattisesti, kyse on siitä, että piirrettäessä kahden mielivaltaisesti valitun funktion pisteen välille suora, funktion kuvaaja kulkee kokonaisuudessaan aina suoran alapuolella.

Lause A.2. *Funktio $f \in C^2$, jolle $f : S \to \mathbb{R}$, missä $S \subset \mathbb{R}$ on konveksi jos ja vain jos*

$$f''(x) \geq 0$$

kaikille $x \in S$. Funktio on aidosti konveksi, mikäli yhtäsuuruus ei ole voimassa.

Muistutellaan seuraavaa lausetta varten mieleen seuraava merkintä. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : S \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Funktion f gradientti pisteessä $x \in S$ on

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Lause A.3. *Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $f \in C^1(\mathbb{R})$.*

(1) *Funktio f on konveksi jos ja vain jos kaikille $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ pätee*

$$f(x_1) \quad \geq \quad f(x_2) + (\nabla f(x_2) \cdot (x_1 - x_2))$$

(2) *Jos $f \in C^2(\mathbb{R})$ niin f on konveksi jos ja vain jos Hessen matriisi $H = \bigtriangledown^2 f$ on positiivisesti semidefiniitti.*

Kun f on kahden muuttujan funktio $f(y_1, y_2)$ niin Hessen matriisi C^2-funktiolle f on muotoa

$$H = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f & \partial_1\partial_2 f \\ \partial_2\partial_1 f & \partial_2\partial_2 f \end{bmatrix}$$

Nyt f on konveksi jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} \partial_1\partial_1 f & \partial_1\partial_2 f \\ \partial_2\partial_1 f & \partial_2\partial_2 f \end{vmatrix} = \partial_1\partial_1 f \cdot \partial_2\partial_2 f - \partial_1\partial_2 f^2 \geq 0,$$

$$\partial_1\partial_1 f \geq 0$$

ja

$$\partial_2\partial_2 f \geq 0\,.$$

Tässä on käytetty lyhennettyä merkintää

$$\partial_i\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial y_i \partial y_j}\,.$$

Lähdeluettelo

[1] FREDERICK Y.M. WAN: *Introduction to the calculus of variations and its applications.* ensimmäinen laitos, Chapman & Hall, 1995.

[2] BERNARD DACOROGNA: *Introduction to The Calculus of Variations.* ensimmäinen laitos, Imperiar College Press, 2004.

[3] GILBERT AMES BLISS: *Calculus of variations.* viides laitos, The mathematical association of America, 1962.

[4] I.M. GELFRAND ja S.V. FOMIN *Calculus of variations.* toinen laitos, Dover, 2000.

[5] RICHARD COURANT ja FRITZ JOHN: *Introduction to Calculus and Analysis II/2.* uudelleenpainos vuoden 1989 versiosta, Springer, 1991.

[6] GIUSEPPE BUTTAZZO, MARIANO GIAQUINTA ja STEFAN HILDEBRANDT: *One-dimensional Variational Problems: An introduction.* ensimmäinen laitos, Oxford science publications, 1998.

[7] STEFAN HILDEBRANDT ja ANTHONY TROMBA: *Mathematics and Optimal Form.* ensimmäinen laitos, Scientific American Books, 1985.

[8] R. TYRRELL ROCKAFELLAR ja ROGER J-B. WETS *Variational analysis.* Springer-Verlag, 1998.

[9] R. COLEMAN *A Detailed Analysis of the Brachistochrone Problem.* http://arxiv.org/pdf/1001.2181.pdf.