Transkendenttiluvuista

Juuso Mattila

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015

TIIVISTELMÄ

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mattila, Juuso: Transkendenttiluvuista
Pro gradu - tutkielma, 19 sivua
Ohjaaja: Lassi Kurittu
Kevät 2015

Tämän pro gradu - tutkielman aiheena on transkendenttiluvut. Ne ovat lukuja, jotka eivät voi olla minkään kokonaislukukertoimisen polynomin, joka ei ole nollapolynomi, nollakohtia.

Tutkielman tärkeimmät tulokset ovat Liouvillen lause, Lindemann-Weierstrassin lause sekä Gelfond-Schneiderin lause. Näiden kolmen lauseen avulla voidaan todistaa joitakin lukuja transkendenttisiksi. Yleisesti ottaen luvun transkendenttiseksi todistaminen on vaikeaa, eikä yleistä menetelmää tähän tunneta. Nämä kolme lausetta kuitenkin auttavat joissakin tapauksissa, kuten todistamaan e:n ja π:n transkendenttisiksi.

Tutkielma etenee määritelmien ja perusalgebran kautta päätulosten esittelyyn ja transkendenttisyystodistuksiin. Liouvillen lause ja siihen liittyvät todistukset esitellään kappaleessa 3. Lindemann-Weierstrassin lause ja Gelfond-Schneiderin lause puolestaan kappaleessa 4. Näitä kahta ei kuitenkaan todisteta, sillä ne ovat liian vaikeita tässä tutkielmassa esitettäviksi.

Avainsanat: pro gradu - tutkielma, Transkendenttiluvut, Liouvillen lause, Lindemann-Weierstrassin lause, Gelfond-Schneiderin lause.

Sisältö

LUKU 1

Johdanto

"Matematiikka on tieteiden kuningatar ja lukuteoria on matematiikan kuningatar"

-*Gauss*

Tutkin pro gradussani transkendenttilukuja (joskus *transsendenttiluku*). Ne ovat lukuja, jotka eivät voi olla minkään kokonaislukukertoimisen polynomin juuria. Kaikkein tunnetuimpia transkendenttilukuja ovat e ja π.

Joseph Liouville (1809-1882) oli ranskalainen matemaatikko ja transkendenttilukuteorian isä. Jokainen algebrallinen luku on kompleksiluku, joten oli herännyt kysymys: onko jokainen kompleksiluku algebrallinen? Liouville ratkaisi tämän kysymyksen vuonna 1844 todistamalla yksinkertaisen tuloksen, jonka avulla hän näytti, että osa kompleksiluvuista ei ole algebrallisia. Näitä lukuja alettiin kutsua transkendenttiluvuiksi. 1800-luvun loppupuolella luvut e ja π todistettiin transkendenttisiksi.

Ferdinand von Lindemannin ja Karl Weierstrassin mukaan nimetty lause esitellään kappaleessa 4. Sen avulla voidaan todistaa moni luku transkendenttiseksi. Näitä todistuksia on esitelty myös kappaleessa 4. Lindemann todisti vuonna 1882, että e^α on transkendenttinen kaikilla nollasta poikkeavilla algebrallisilla luvuilla α ja tämän avulla hän todisti myös, että π on transkendenttinen. Vuonna 1885 Weierstrass puolestaan todisti yleisemmän tuloksen, jota siis kutsutaan Lindemann-Weierstrassin lauseeksi.

Niin ikään kappaleessa 4 esitellään Gelfond-Schneiderin lause, jonka avulla voidaan myös todistaa lukuja transkendenttisiksi. Vuonna 1900 David Hilbert esitti yleisen ongelman, jossa piti määrittää ovatko luvut $2^{\sqrt{2}}$ ja e^π transkendenttisiä vai eivät. Venäläinen Aleksandr Gelfond ja saksalainen Theodor Schneider ratkaisivat tämän vuonna 1934 ja saivat tuloksen, jonka mukaan molemmat ovat transkendenttisiä. Gelfond-Schneiderin lause on itse asiassa seitsemäs Hilbertin kuuluisista 23 ongelmasta.

LUKU 2

Määritelmiä

Tutkielman alkuun on tietysti määriteltävä perusasioita. Aloitetaan polynomilaskentaan liittyvistä määritelmistä:

MÄÄRITELMÄ 2.1. Reaalikertoimiset polynomit $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, missä $a_i \in \mathbb{R}$ kaikilla $i = 0, \ldots, n$, ovat varsin tuttuja monestä yhteydestä. Yleistetään nyt polynomin käsitettä korvaamalla polynomin kertoimet renkaan $(S, +, \cdot)$ alkioilla. Kaikkien yhden muuttujan z polynomien, joiden kertoimet kuuluvat renkaaseen $(S, +, \cdot)$, joukosta käytetään merkintää

$$S[z] = \{s_N z^N + s_{N-1}z^{N-1} + \ldots + s_1 z + s_0 | s_k \in S, k = 0, \ldots, N\}.$$

Joukon alkioita sanotaan *polynomeiksi yli renkaan S.*
Olkoon $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \in S[z]$ ja $Q(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i \in S[z]$. Voidaan olettaa, että $m \geq n$. Määritellään polynomien yhteen- ja kertolasku yli renkaan S seuraavasti:

$$P(z) + Q(z) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) z^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i z^i$$

$$P(z) \cdot Q(z) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} a_i b_j z^k$$

Polynomin $P(z) = \sum_{n=0}^{N} s_n z^n \in S[z]$, $s_N \neq 0$, *aste* on N ja s_N on polynomin *johtava kerroin.*

Polynomia, jonka kaikki kertoimet ovat nollia, sanotaan *nollapolynomiksi.* Nollapolynomin aste määritellään olevan $-\infty$.
Yllä mainituilla laskutoimituksilla joukosta $S[x]$ tulee rengas. Rengasta $(S[x], +, \cdot)$ sanotaan *polynomirenkaaksi yli renkaan S.*

MÄÄRITELMÄ 2.2. Polynomia $p(z)$ sanotaan *jaottomaksi*, jos se ei ole minkään kahden $S[z]$:aan kuuluvan polynomin, joiden aste on pienempi kuin $p(z)$:n aste, tulo.

Tämän pienen polynomiteorian avulla voidaan määritellä algebrallinen luku:

MÄÄRITELMÄ 2.3 (Algebrallinen luku). Luku $\alpha \in \mathbb{C}$ on *algebrallinen*, jos se on polynomin $p(z) \in \mathbb{Z}[z]$, joka ei ole nollapolynomi, nollakohta. Jos tässä $p(z)$ on jaoton, niin sanotaan, että se on α:n *minimaalipolynomi.* α:n aste määritellään olevan tämän minimaalipolynomin aste.

Tämän edellä mainitun minimaalipolynomin olemassaolo vaatii todistuksen, kuten vaatii myös tämän asteen yksikäsitteisyys. Muotoillaan tästä seuraava aputulos:

LEMMA 2.4. *Olkoon α algebrallinen luku. Tällöin sillä on olemassa minimaalipolynomi, jonka aste on yksikäsitteinen.*

TODISTUS. Koska α on jonkun polynomin $P \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ juuri, niin joukko $A = \{\deg(Q) | Q \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}, Q(\alpha) = 0\} \subset N$ on epätyhjä. Koska epätyhjästä luonnollisten lukujen joukosta voidaan valita minimi, niin määritelmä $d = \min A$ on järkevä. Silloin myös $d \in A$, joten A:n määritelmän mukaan on olemassa $Q \in Z[x] \setminus \{0\}$, $Q(\alpha) = 0$ siten että $\deg(Q) = d$.

Tämä Q on jaoton, sillä jos olisi $Q = RS$, missä $\deg(R)$,$\deg(S) < d$, niin olisi $Q(\alpha) = R(\alpha)S(\alpha)$, jolloin $R(\alpha) = 0$ tai $S(\alpha) = 0$ ja siten $\deg(R) \in A$ tai $\deg(S) \in A$, mikä on mahdotonta.

Siten α:n minimaalipolynomi, Q, on olemassa. Koska $d = \min A$, niin minimaalipolynomin aste on yksikäsitteinen. $\square$

Transkendenttinen luku määritellään algebrallisen luvun määritelmän avulla seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 2.5 (Transkendenttinen luku). Kompleksiluku, joka ei ole algebrallinen, on *transkendenttinen luku*.

Johdetaan seuraavaksi tärkeä tulos, jonka mukaan algebralliset luvut muodostavat kunnan. Tätä tietoa käytetään joissakin luvussa 4 tehtävissä todistuksissa. Mukaillaan tässä lähdettä [5].

MÄÄRITELMÄ 2.6. Kompleksilukujen osajoukkoa V ($V \subset \mathbb{C}$) sanotaan $\mathbb{Q}$ - *moduliksi*, jos

(a) $\gamma_1, \gamma_2 \in V \Rightarrow \gamma_1 \pm \gamma_2 \in V$.
(b) $\gamma \in V$ ja $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r\gamma \in V$.
(c) On olemassa alkiot $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ siten, että jokainen $\gamma \in V$ on muotoa $\sum_{i=1}^{l} r_i \gamma_i$, kun $r_i \in \mathbb{Q}$.

Lyhyemmin, $V \subset \mathbb{C}$ on $\mathbb{Q}$ - moduli, jos se on äärellisulotteinen vektoriavaruus $\mathbb{Q}$:n yli.

Jos $\gamma_1, \ldots, \gamma_l \in \mathbb{C}$, niin kaikkien lausekkeitten $\sum_{i=1}^{l} r_i \gamma_i$, missä $r_1, r_2, \ldots, r_l \in \mathbb{Q}$, joukko on selvästi $\mathbb{Q}$ - moduli. Merkitään tätä $\mathbb{Q}$ - modulia $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l]$

PROPOSITIO 2.7. *Olkoon $V = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l]$ ja oletetaan, että luvulla $\alpha \in \mathbb{C}$ on seuraava ominaisuus: $\alpha\gamma \in V$ kaikilla $\gamma \in V$. Tällöin α on algebrallinen luku.*

TODISTUS. $\alpha\gamma_i \in V$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, l$. Siispä $\alpha\gamma_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\gamma_j$, missä $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
(\alpha - a_{11})\gamma_1 + (-a_{21})\gamma_2 + \cdots + (-a_{l1})\gamma_l &= 0 \\
(-a_{12})\gamma_1 + (\alpha - a_{22})\gamma_2 + \cdots + (-a_{l2})\gamma_l &= 0 \\
&\vdots \\
(-a_{1l})\gamma_1 + (-a_{2l})\gamma_2 + \cdots + (\alpha - a_{ll})\gamma_l &= 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{vmatrix}
\alpha - a_{11} & -a_{21} & \cdots & -a_{l1} \\
-a_{12} & \alpha - a_{22} & \cdots & -a_{l2} \\
\vdots & & & \\
-a_{1l} & -a_{2l} & \cdots & \alpha - a_{ll}
\end{vmatrix} = 0.$$

Nyt $f(\alpha) = 0$, missä f on yllä oleva determinantti. f on muotoa

$$f(x) = x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \cdots + a_0,$$

missä $a_0, \ldots, a_{l-1}$ ovat rationaalilukuja. Näin ollen α on algebrallinen luku. $\square$

Propositio 2.8. *Algebralliset luvut muodostavat kunnan.*

Todistus. Oletetaan, että α_1 ja α_2 ovat algebrallisia lukuja. Osoitetaan, että $\alpha_1 + \alpha_2$ ja $\alpha_1\alpha_2$ ovat algebrallisia.

Oletetaan, että $\alpha_1^n + r_1\alpha_1^{n-1} + \cdots + r_n = 0$ ja $\alpha_2^m + s_1\alpha_2^{m-1} + \cdots + s_m = 0$, missä $r_i, s_j \in \mathbb{Q}$. Olkoon V $\mathbb{Q}$:n moduli, joka sisältää kaikki alkioiden $\alpha_1^i\alpha_2^j$, missä $0 \leq i < n$ ja $0 \leq j < m$, rationaaliset lineaarikombinaatiot. Olkoon $\gamma \in V$ ja merkitään $\alpha_1^i\alpha_2^j = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$, missä $l = mn$.

Jos $i < n-1$, niin $\alpha_1(\alpha_1^i\alpha_2^j)$ on yksi luvuista γ_l. Jos $s = n-1$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\alpha_1^{n-1}\alpha_2^j) &= \alpha_1^n\alpha_2^j \\
&= -(r_1\alpha_1^{n-1} + r_2\alpha_1^{n-2} + \cdots + r_n)\alpha_2^j \\
&= -(r_1\alpha_1^{n-1}\alpha_2^j + r_2\alpha_1^{n-2}\alpha_2^j + \cdots + r_n + \alpha_2^j).
\end{aligned}$$

Siispä tulo $\alpha_1(\alpha_1^{n-1}\alpha_2^j)$ on lukujen γ_l lineaarikombinaatio. Samaan tapaan saadaan, että $\alpha_2(\alpha_1^i\alpha_2^{m-1})$ on lukujen γ_l lineaarikombinaatio. Tällöin myös $(\alpha_1 + \alpha_2)\gamma \in V$ ja $(\alpha_1\alpha_2)\gamma \in V$ ja proposition 2.7. mukaan $\alpha_1 + \alpha_2$ ja $\alpha_1\alpha_2$ ovat molemmat algebrallisia.

Vielä on todistettava, että jos α on nollasta poikkeava algebrallinen luku, niin α^{-1} on myös algebrallinen. Oletetaan, että $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, missä $a_i \in \mathbb{Q}$ kaikilla i. Jakamalla yhtälö puolittain α^n:llä saadaan $a_n\alpha^{-n} + a_{n-1}\alpha^{-(n-1)} + \cdots + a_0 = 0$. Siispä α^{-1} on algebrallinen. $\square$

LUKU 3

Liouvillen lause

Muotoillaan aluksi kaksi aputulosta, joita tarvitaan Liouvillen lauseen todistuksessa.

LEMMA 3.1. *Olkoon P astetta $n \geq 1$ oleva rationaalikertoiminen polynomi ja $q \in \mathbb{Q}$ siten, että $P(q) = 0$. Tällöin on olemassa rationaalikertoiminen $n-1$ - asteinen polynomi Q siten, että*

$$P(x) = (x - q)Q(x). \tag{3.1}$$

TODISTUS. Olkoon polynomi $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ astetta $n \geq 1$ ja $q \in \mathbb{Q}$ siten, että $P(q) = 0$. Nyt voidaan vähentää $P(x)$:stä $P(q)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
P(x) \quad &= P(x) - P(q) \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n - (a_0 + a_1q + a_2q^2 + \ldots + a_nq^n) \\
&= a_1(x - q) + a_2(x^2 - q^2) + \ldots + a_n(x^n - q^n) \\
&= (x - q)(a_1 + a_2(x + q) + \ldots \\
&+a_n(x^{n-1} + qx^{n-2} + q^2x^{n-3} + \ldots + xq^{n-2} + q^{n-1})) \\
&= (x - q)Q(x),
\end{aligned}$$

missä $Q(x)$ on astetta $n - 1$. □

LEMMA 3.2. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ astetta $n \geq 2$ oleva algebrallinen luku ja f α:n minimaalipolynomi. Tällöin $f(\frac{p}{q}) \neq 0$ kaikilla $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.*

TODISTUS. ks.[**6**, s.121]
Antiteesi: on olemassa $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ siten, että $f(\frac{p}{q}) = 0$. Koska f on astetta n oleva kokonaislukukertoiminen ja siten myös rationaalikertoiminen polynomi, niin lemman 3.1 nojalla on olemassa rationaalikertoiminen $n - 1$ - asteinen polynomi Q siten, että

$$f(x) = (x - \frac{p}{q})Q(x).$$

Koska f on α:n minimaalipolynomi, niin $f(\alpha) = 0$, ja tällöin myös

$$(\alpha - \frac{p}{q})Q(\alpha) = 0.$$

Koska α on astetta $n \leq 2$, niin se on irrationaaliluku. Lisäksi $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, joten $\alpha - \frac{p}{q} \neq 0$. Silloin on oltava $Q(\alpha) = 0$. Polynomi Q on rationaalikertoiminen, mutta lavennetaan sen kertoimet niiden nimittäjien tulolla, jolloin syntyy astetta $n-1$ oleva kokonaislukukertoiminen polynomi Q_k, jolle pätee $Q_k(\alpha) = 0$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, koska α:n aste on n. Tämä ristiriita osoittaa, että antiteesi on väärä ja väite pätee. □

Seuraavaksi esitetään Liouvillen lause, josta transkendenttilukuteoria sai alkunsa.

LAUSE 3.3 (Liouvillen lause). *Olkoon α algebrallinen luku astetta $d \geq 2$. Tällöin on olemassa positiivinen vakio c, joka riippuu vain luvusta α, $c = c(\alpha)$, siten että kaikille rationaaliluvuille $\frac{p}{q}$ pätee seuraava epäyhtälö:*

$$\frac{c}{q^d} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \tag{3.2}$$

TODISTUS. ks.[**2**, s.14-17]
Tavoitteena on siis löytää vakio c, joka riippuu vain luvusta α, siten että epäyhtälö (3.2) pätee kaikilla rationaaliluvuilla $\frac{p}{q}$. Olkoon $\frac{p}{q}$ mielivaltainen rationaaliluku, jolle $q > 0$. Tutkitaan termiä

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \tag{3.3}$$

ja yritetään löytää sille alaraja q:n ja α:n avulla. Jaetaan ongelma kahteen tapaukseen ja tutkitaan niitä erikseen: kun p/q on "kaukana" luvusta α ja kun p/q on "lähellä" lukua α.

α kaukana.

Oletetaan, että $|\alpha - \frac{p}{q}| > 1$. Tällöin rationaaliluku p/q on "kaukana" luvusta α. Itse asiassa, kun $q \geq 1$, saadaan:

$$\frac{1}{q^d} \leq 1 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \tag{3.4}$$

ja siten epäyhtälö (3.2) pätee kaikille $c \leq 1$.

α lähellä.

Oletetaan, että $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 1$. Oletamme siis, että p/q on lähellä α:aa ja yritämme osoittaa, että se ei voi olla liian lähellä. Tämä tapaus on näistä kahdesta tapauksesta huomattavasti mutkikkaampi ja se on Liouvillen lauseen keskeisin asia.

Olkoon $f(x)$ α:n minimaalipolynomi, eli $f(x)$:llä on kokonaislukukertoimet, se on jaoton ja $f(\alpha) = 0$. Vaaditaan myös, että f:n johtava kerroin on pienin mahdollinen positiivinen kokonaisluku, joka tässä voi olla, sillä tällöin α määrää f:n yksikäsitteisesti. Nimittäin, jos olisi olemassa toinen tällainen minimaalipolynomi g, jolle $g(\alpha) = 0$, niin tällöin olisi $f = \kappa g$, $\kappa \in \mathbb{Q}$ ja $\kappa \neq 0$. Tässä sekä f:n että g:n johtava kerroin on pienin mahdollinen positiivinen kokonaisluku joka tässä voi olla, joten $\kappa = 1$. Siispä $f = g$, eli f on yksikäsitteinen. Lisäksi α on astetta d, joten $f(x)$ voidaan kirjoittaa:

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{3.5}$$

missä $a_{d-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$.

Yritetään nyt luoda epäyhtälö, jonka alaraja on saman muotoinen epäyhtälön (3.2) alarajan kanssa. Tarkastellaan $f(x)$:ää pisteessä $x = p/q$:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_d \frac{p^d}{q^d} + a_{d-1} \frac{p^{d-1}}{q^{d-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0, \tag{3.6}$$

mikä voidaan ilmaista yhteisellä nimittäjällä:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_d p^d + a_{d-1}p^{d-1}q + \ldots + a_1 pq^{d-1} + a_0 q^d}{q^d}. \tag{3.7}$$

Kun tarkastellaan tätä yhtälöä, huomataan että osoittaja on kokonaisluku. Lisäksi huomataan, että koska f on α:n minimaalipolynomi ja tässä $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, niin lemman 3.2 nojalla $f(\alpha) \neq 0$. Osoittajan on siis oltava nollasta eroava. Näiden havaintojen perusteella osoittaja on nollasta eroava kokonaisluku, jonka itseisarvo on vähintään 1.

Korvataan edellisen esityksen osoittaja N:llä ($N \in \mathbb{Z}$ ja $N \neq 0$), jolloin yhtälö näyttää seuraavalta:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{N}{q^d}. \tag{3.8}$$

Koska q on positiivinen kokonaisluku, niin ottamalla itseisarvot puolittain saadaan

$$\frac{|N|}{q^d} = \left| f\left(\frac{p}{q}\right)\right|. \tag{3.9}$$

$f(\frac{p}{q}) \neq 0$, ja N:lle pätee siis $1 \leq |N|$. Siispä voimme heikentää yhtälöä (3.9) korvaamalla N ykkösellä ja kirjoittaa

$$\frac{1}{q^d} \leq \left| f\left(\frac{p}{q}\right)\right|. \tag{3.10}$$

Tämän epäyhtälön alaraja on samankaltainen kuin epäyhtälöllä (3.2). Epäyhtälön (3.10) oikea puoli vaatii kuitenkin vielä tarkastelua ja arviointia, sillä sieltä puuttuu termi $|\alpha - \frac{p}{q}|$. Nollan lisääminen on yksi tapa saada haluttu termi yhtälöön.

Koska $f(\alpha) = 0$, voidaan kirjoittaa epäyhtälö (3.10) muotoon

$$\frac{1}{q^d} \leq \left|\ f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \tag{3.11}$$

Tämä jo muistuttaa hieman etsimäämme epäyhtälöä (3.2). On vielä löydettävä riippuvuus termien $f(\alpha) - f(\frac{p}{q})$ ja $\alpha - \frac{p}{q}$ välille. Tässä auttaa differentiaalilaskennan väliarvolause (DVAL). Polynomifunktio on differentioituva, joten DVAL:tta voidaan käyttää.

Nyt $f(x)$ on differentioituva funktio, joten DVAL:n mukaan

$$f'(\varphi) = \frac{f(\alpha) - f(\frac{p}{q})}{\alpha - \frac{p}{q}},$$

missä φ on lukujen α ja $\frac{p}{q}$ välissä oleva reaaliluku. Tätä yhtälöä muokkaamalla saadaan

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\varphi)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right). \tag{3.12}$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (3.10), jolloin saadaan

$$\frac{1}{q^d} \leq \left| f'(\varphi)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\right|,$$

ja tätä muokkaamaalla

$$\frac{1}{q^d} \le |f'(\varphi)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \tag{3.13}$$

Hyödynnetään seuraavaksi tietoa, että käsittelemme tapausta, jossa α on lähellä lukua $\frac{p}{q}$, $|\alpha - \frac{p}{q}| \le 1$. Siispä, koska φ on α:n ja $\frac{p}{q}$:n välissä, niin $|\alpha - \varphi| \le 1$. Toisin sanoen, $\alpha - 1 \le \varphi \le \alpha + 1$. Nyt voimme luoda ylärajan $|f'(\varphi)|$:lle huomaamalla että

$$|f'(\varphi)| \le max\{|f'(\theta)| : \theta \in [\alpha - 1, \alpha + 1]\}. \tag{3.14}$$

Koska $f'(x)$ on jatkuva funktio, se saavuttaa maksimiarvonsa suljetulla välillä $[\alpha - 1, \alpha + 1]$. Siispä on olemassa M siten, että $|f'(x)| \le M$. Tärkeä ominaisuus M:lle on, että se riippuu vain α:sta, eikä etenkään luvun $\frac{p}{q}$ valinnasta. M ei riipu myöskään minimaalipolynomin f valinnasta, koska α määrää f:n yksikäsitteisesti, eikä f:ää siis valita. Lisäksi, $M > 0$, sillä $f'(\varphi) \neq 0$. Nämä havainnot yhdessä epäyhtälön (3.13) kanssa johtavat seuraavaan epäyhtälöön:

$$\frac{1}{q^d} \le |f'(\varphi)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \le M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \tag{3.15}$$

ja siispä

$$\frac{M^{-1}}{q^d} \le \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \tag{3.16}$$

Lopulta, yhdistämällä edellinen epäyhtälö havaintojen, jotka teimme tapauksessa α *kaukana*, kanssa päädymme siihen, että jokaiselle rationaaliluvulle p/q,

$$\frac{c}{q^d} \le \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \tag{3.17}$$

missä vakio $c = c(\alpha)$ määritellään:

$$c = min\{1, M^{-1}\}, \tag{3.18}$$

mikä päättää Liouvillen lauseen todistuksen, kun $\alpha \in \mathbb{R}$. □

30 vuotta sen jälkeen, kun Liouville todisti hienon tuloksensa, Cantor esitti mielenkiintoisen havainnon koskien transkendenttilukujen olemassaoloa. Cantorin työ osoitti, että *useimmat* luvut ovat transkendenttisiä. Silti tänäkin päivänä on vaikea osoittaa, että yksittäinen luku on transkendenttinen. Cantor osoitti jopa, että algebrallisia lukuja on vain numeroituvasti, kun taas transkendenttisiä lukuja on ylinumeroituvasti. Esitetään tässä todistus tuolle Cantorin tulokselle.

LAUSE 3.4. *Algebrallisia lukuja on numeroituvasti. Transkendenttilukuja on ylinumeroituvasti.*

TODISTUS. Määritelmän mukaan algeberalliset luvut ovat kokonaislukukertoimisten polynomien juuria. Koska jokaisella polynomilla on vain äärellinen määrä juuria ja äärellisten joukkojen numeroituva yhdiste on numeroituva, niin riittää osoittaa, että kokonaislukukertoimisia polynomeja on vain numeroituva määrä.

Jokainen polynomi on jotain astetta $n \in \mathbb{N}$. Koska $\mathbb{N}$ on numeroituva ja numeroituvien joukkojen numeroituva yhdiste on aina numeroituva, niin riittää osoittaa, että (kiinteätä) astetta n olevia kokonaislukukertoimisia polynomeja on vain numeroituva määrä. Tehdään tämä induktiolla n:n suhteen:

- Kun $n = 0$, niin f on kokonaislukuvakio ja koska $\mathbb{Z}$ on numeroituva, niin astetta 0 olevia polynomeja on numeroituvasti.
- Induktio-oletus: korkeintaan astetta n olevia kokonaislukukertoimisia polynomeja on vain numeroituva määrä.
- Induktioväite: korkeintaan astetta $n+1$ olevia kokonaislukukertoimisia polynomeja on vain numeroituva määrä.

  Todistus. Olkoon B korkeintaan astetta $n+1$ olevien polynomien joukko. B:n alkiot ovat siis muotoa
  $$f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + g(x),$$
  missä $g(x)$ on korkeintaan astetta n. Olkoon A korkeintaan astetta n olevien polynomien joukko. Induktio-oletuksen mukaan on olemassa bijektio $\phi : A \to \mathbb{N}$. Määritellään nyt kuvaus $\psi : B \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ asettamalla $\psi(f) = (a_{n+1}, \phi(g))$. Nyt ψ on selvästi bijektio. Koska $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ on numeroituva, niin induktioväite seuraa tästä ja algebrallisia lukuja on siis numeroituvasti.

Koska reaalilukujen joukko on ylinumeroituva, niin transkendenttilukujen joukon on oltava ylinumeroituva. □

Todistetaan seuraavaksi Liouvillen lausetta käytten Liouvillen luku transkendenttiseksi.

LAUSE 3.5. *Suppeneva sarja*
$\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000001000\ldots \in \mathbb{R}$ *on transkendenttiluku. $\mathcal{L}$ on nimeltään Liouvillen luku.*

TODISTUS. [**2**, s.11-13] Todetaan aluksi, että $\mathcal{L}$ todella on suppeneva sarja. Tämä seuraa siitä, että yleisesti tiedetään sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$ olevan suppeneva. Koska $-n! \leq -n$, kun $n \geq 1$, niin myös $\mathcal{L}$:n on majoranttiperiaatteen nojalla oltava suppeneva.
Tehdään antiteesi: oletetaan, että $\mathcal{L}$ on algebrallinen. Koska $\mathcal{L}$:n desimaaliesityksen perättäisten nollien määrä kasvaa rajatta, niin desimaaliesitys ei voi olla jaksollinen. Siksi $\mathcal{L}$ ei voi olla rationaalinen. Siis, kun oletetaan, että $\mathcal{L}$ on algebrallinen, sen täytyy olla astetta $d \geq 2$. Tämän havainnon perusteella voidaan käyttää Liouvillen lausetta. On siis olemassa vakio $c > 0$, joka toteuttaa epäyhtälön

$$\frac{c}{q^d} \leq \left|\mathcal{L} - \frac{p}{q}\right|, \tag{3.19}$$

kaikilla rationaaliluvuilla $\frac{p}{q}$.

Luodaan rationaalinen approksimaatio $\mathcal{L}$:lle. Se tehdään katkaisemalla $\mathcal{L}$:n desimaaliesitys aina ennen jokaista pitkää nollien jonoa. Olkoon $r_N = \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!}$ positiiviselle $N \in \mathbb{Z}$. Koska r_N:llä on päättyvä desimaaliesitys, on se rationaaliluku, $r_N = \frac{p_N}{q_N}$. Siis $r_N \in \mathbb{Q}$ kaikille N ja $r_N \to \mathcal{L}$. r_N voidaan kirjoittaa:

$$r_N = \tfrac{1}{10^{N!}}(10^{N!-1} + 10^{N!-2} + 10^{N!-6} + \ldots + 10^{N!-(N-1)!} + 1),$$

joten $r_N = \frac{p_N}{q_N}$, missä $p_N = 10^{N!-1} + 10^{N!-2} + 10^{N!-6} + \ldots + 10^{N!-(N-1)!} + 1 \in \mathbb{N}$ ja $q_N = 10^{N!} \in \mathbb{N}$. Nyt saadaan

$$|\mathcal{L} - r_N| = \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{(N+1)!}}\Big(1 + \frac{1}{10^{(N+2)!-(N+1)!}} + \frac{1}{10^{(N+3)!-(N+1)!}} + \ldots\Big). \tag{3.20}$$

Koska kaikille $k \geq 2, k \in \mathbb{Z}$ ja $n \geq 1$ pätee $(n+k)! - (n+1)! \geq n+k-(n+1)$, niin

$$\Big(1+\frac{1}{10^{(N+2)!-(N+1)!}}+\frac{1}{10^{(N+3)!-(N+1)!}}+\dots\Big) \leq (1+\frac{1}{10^{(N+2)-(N+1)}}+\frac{1}{10^{(N+3)-(N+1)}}+\dots\Big)$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} (3.21) \qquad |\mathcal{L} - r_N| &\leq \frac{1}{10^{(N+1)!}}\Big(1+\frac{1}{10^{(N+2)-(N+1)}}+\frac{1}{10^{(N+3)-(N+1)}}+\dots\Big) \\ &= \frac{1}{10^{(N+1)!}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

Nyt tarvitsemme geometrisen sarjan summakaavaa. Sen mukaan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}, \tag{3.22}$$

joten

$$|\mathcal{L} - r_N| = \left|\mathcal{L} - \frac{p_N}{q_N}\right| \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}}\frac{10}{9}. \tag{3.23}$$

Kun tämä yhdistetään epäyhtälöön (3.19) ja kun muistetaan, että $q_N = 10^{N!}$, niin saadaan

$$c10^{-dN!} < \frac{10}{9}10^{-(N+1)!}. \tag{3.24}$$

Siispä kaikille N pätee

$$0 < \frac{9}{10}c < 10^{dN!-(N+1)!}, \tag{3.25}$$

tai yhtäpitävästi

$$0 < 9 < (\frac{10}{c})10^{dN!-(N+1)!}. \tag{3.26}$$

Kun $N \geq d$, niin eksponentti $dN! - (N+1)!$ on negatiivinen, jolloin N:n kasvaessa edellisen yhtälön oikea puoli lähestyy nollaa. Riittävän isolla N yhtälön oikea puoli on alle luvun 1, jolloin $0 < 9 < 1$, mikä on selkeä ristiriita. Näin ollen alussa tehty antiteesi $\mathcal{L}$:n algebrallisuudesta on väärä ja siispä se on transkendenttinen luku. □

Liouvillen lauseen tulos voidaan kirjoittaa toisin seuraavasti:

$$\frac{c}{q^{\lambda(\alpha)}} < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|, \tag{3.27}$$

missä $c = c(\alpha)$, α on algebrallinen luku astetta $d \geq 2$, $\frac{p}{q}$ mikä tahansa rationaaliluku ja $\lambda(\alpha)$ on q:n eksponentti. Vuonna 1844 Liouville siis osoitti, että $\lambda(\alpha)$:ksi voidaan ottaa d. Tälle on saatu sittemmin seuraavia parannuksia (ks. [**1**, s.62]):

- 1844 Liouville: $\lambda(\alpha) = d$
- 1909 Thue: $\lambda(\alpha) > \frac{1}{2}d + 1$
- 1921 Siegel: $\lambda(\alpha) > 2\sqrt{d}$
- 1947 Dyson: $\lambda(\alpha) > \sqrt{2d}$
- 1955 Roth: $\lambda(\alpha) > 2$

Roth onnistui poistamaan q:n eksponentin $\lambda(\alpha)$ riippuvuuden α:n asteesta d. Se onkin näistä tuloksista selkeästi paras.

LUKU 4

Jatkotuloksia

Tässä kappaleessa esitellään kaksi tulosta: Lindemann - Weierstrassin lause ja Gelfond-Schneiderin lause. Näiden tulosten avulla voidaan todistaa joidenkin lukujen transkendenttisyys.

Charles Hermite ja Ferdinand von Lindemann todistivat e:n ja π:n transkendenttisyyden 1800-luvun puolivälin tienoilla. Heidän työnsä myös todisti, että e^α on transkendenttinen, kun α on nollasta eroava algebrallinen luku. Karl Weierstrass yleisti lauseen vuonna 1885.

LAUSE 4.1 (Lindemann-Weierstrassin lause). *Olkoot luvut $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ $N+1$ eri algebrallista lukua. Tällöin luvut $e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_N}$ ovat lineaarisesti riippumattomia algebrallisten lukujen joukossa. Siis kaikille algebrallisille luvuille $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$, jotka eivät kaikki ole nollia, pätee*

$$\sum_{m=0}^{N} \beta_m e^{\alpha_m} \neq 0.$$

TODISTUS. Todistus löytyy lähteestä [**3**] □

Tämän lauseen avulla voidaan siis todistaa lukuja transkendenttisiksi ja tässä on esitetty niistä kuusi.

SEURAUS 4.2. *e^α on transkendenttinen, kun $\alpha \neq 0$ on algebrallinen.*

TODISTUS. Oletetaan, että α on nollasta poikkeava algebrallinen luku. Tällöin $\{0, \alpha\}$ on eriävien algebrallisten lukujen joukko ja siten $\{e^0, e^\alpha\} = \{1, e^\alpha\}$ on lineaarisesti riippumaton algebrallisten lukujen joukossa Lauseen 4.1 mukaan. Koska on näin, niin e^α ei voi olla algebrallinen, joten se on transkendenttinen. □

HUOMAUTUS 4.3. Jos edellisessä valitaan $\alpha = 1$, niin saadaan, että e on transkendenttinen.

SEURAUS 4.4. *π on transkendenttinen.*

TODISTUS. Oletetaan, että π on algebrallinen. Tällöin myös $i\pi$ on algebrallinen, koska i on algebrallinen ja algebralliset luvut muodostavat kunnan. Seurauksen 4.2 mukaan e^α on transkendenttinen, kun α on nollasta poikkeava algebrallinen luku. Siispä $e^{\pi i} = -1$ pitäisi olla transkendenttinen, mutta selvästi näin ei ole. Siispä π on transkendenttinen. □

SEURAUS 4.5. *Olkoot $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ $N+1$ nollasta eroavaa algebrallista lukua, jotka eivät ole keskenään yhtäsuuria. Olkoon lisäksi $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$ mitä tahansa nollasta* *poikkeavia algebrallisia lukuja. Tällöin*

$$\sum_{i=0}^{N} \beta_i e^{\alpha_i}$$

on transkendenttinen.

TODISTUS. Antiteesi: oletetaan, että

$$\sum_{n=0}^{N} \beta_n e^{\alpha_n}$$

on algebrallinen.
Olkoon

$$\sum_{n=0}^{N} \beta_n e^{\alpha_n} = \gamma = \gamma e^0.$$

Asetetaan nyt $\alpha_{N+1} = 0$ ja $\beta_{N+1} = -\gamma$, jolloin saadaan

$$\sum_{n=0}^{N+1} \beta_n e^{\alpha_n} = 0$$

eri algebrallisille luvuille α_i. Tämä on ristiriita Lindemann-Weierstrassin lauseen kanssa. On siis oltava niin, että

$$\sum_{n=0}^{N} \beta_n e^{\alpha_n}$$

on transkendenttinen. □

SEURAUS 4.6. *Olkoon α algebrallinen reaaliluku, $\alpha > 0$ ja $\alpha \neq 1$. Tällöin* $\log(\alpha)$ *on transkendenttinen.*

TODISTUS. Antiteesi: oletetaan, että $\log(\alpha)$ on algebrallinen.
Tällöin Lauseen 4.2 mukaan $e^{\log(\alpha)}$ on transkendenttinen. Mutta $e^{\log(\alpha)} = \alpha$. Koska α on algebrallinen, niin päädytään ristiriitaan. Antiteesi on siis väärä ja väite pätee. □

SEURAUS 4.7. *Olkoon α nollasta eroava algebrallinen luku. Tällöin* $\cos(\alpha)$ *on transkendenttinen*

TODISTUS. Antiteesi: Oletetaan, että $\cos(\alpha)$ on algebrallinen jollakin nollasta eroavalla algebrallisella luvulla α. Olkoon $\cos(\alpha) = \beta$. Tällöin saadaan

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \frac{e^{i\alpha}}{2} + \frac{e^{-i\alpha}}{2} = \beta.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left(\frac{1}{2}\right)e^{i\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)e^{-i\alpha} + (-\beta)e^0 = 0.$$

Luku i on algebrallinen, joten $i\alpha$ on myös algebrallinen, koska algebralliset luvut muodostavat kunnan. Koska i on algebrallinen, niin myös $-i = -1 \cdot i$ on myös algebrallinen. Näin ollen $-i\alpha$ on niin ikään algebrallinen luku. Siispä $-i\alpha$, 0, ja $i\alpha$ ovat eri algebrallisia lukuja, joten $e^{-i\alpha}$:n, e^0:n ja $e^{i\alpha}$:n pitäisi olla lineaarisesti riippumattomia algebrallisten lukujen joukossa. Luku $\frac{1}{2}$ on algerallinen, samoin $-\beta$. Lindemann-Weierstrassin lauseen mukaan pitäisi tällöin olla

$$\left(\frac{1}{2}\right)e^{i\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)e^{-i\alpha} + (-\beta)e^0 \neq 0.$$

Näin ei kuitenkaan ole, joten tämä on ristiriita. Antiteesi on väärä ja väite pätee. □

Samaan tapaan voidaan osoittaa $\sin(\alpha)$ transkendenttiseksi, kun α on nollasta eroava algebrallinen luku.

SEURAUS 4.8. *Olkoon α nollasta eroava algebrallinen luku. Tällöin* $\sin(\alpha)$ *on transkendenttinen.*

TODISTUS. Antiteesi: $\sin(\alpha)$ on algebrallinen jollakin nollasta eroavalla algebrallisella luvulla α. Olkoon $\sin(\alpha) = \beta$. Tällöin saadaan

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} = \frac{e^{i\alpha}}{2i} - \frac{e^{-i\alpha}}{2i} = \beta.$$

Tämä voidaan kirjoittaa uudelleen

$$\left(\frac{-i}{2}\right)e^{i\alpha} + \left(\frac{i}{2}\right)e^{-i\alpha} + (-\beta)e^0 = 0.$$

Kuitenkin, $-i\alpha$, 0 ja $i\alpha$ ovat eri algebrallisia lukuja (perusteltu Seurauksen 4.6. todistuksessa), joten $e^{-i\alpha}$:n, e^0:n ja $e^{i\alpha}$:n pitäisi olla lineaarisesti riippumattomia algebrallisten lukujen joukossa. Siispä tämä on ristiriita Lindemann-Weierstrassin lauseen kanssa. Väite pätee. □

Siirrytään sitten Gelfond-Schneiderin lauseen pariin. Lause on itse asiassa Hilbertin seitsemäs ongelma ja sen avulla voidaan myös todistaa lukuja transkendenttisiksi.

LAUSE 4.9 (Gelfond-Schneiderin lause). *Olkoon α ja β algebrallisia lukuja siten, että $\alpha \neq 0, 1$ ja $\beta \notin \mathbb{Q}$. Tällöin kaikki potenssin α^β arvot ovat transkendenttisia.*

TODISTUS. Sivuutetaan, ks. [**4**] □

HUOMAUTUS 4.10. Seuraavat muodot ovat ekvivalentteja Lauseen 4.9. kanssa:

(i) Jos l ja β ovat kompleksilukuja siten, että $l \neq 0$, $k \cdot 2\pi i$ ja $\beta \notin \mathbb{Q}$, niin vähintään yksi luvuista e^l, β ja $e^{\beta l}$ on transkendenttinen

(ii) Jos α ja β ovat nollasta poikkeavia algebrallisia lukuja siten, että $\log \alpha$ ja $\log \beta$ ovat lineaarisesti riippumattomia rationaalilukujen joukossa, niin tällöin $\log \alpha$ ja $\log \beta$ ovat lineaarisesti riippumattomia algebrallisten lukujen joukossa. Tässä log on kompleksinen logaritmi, joka on määritelty käyttämällä jotakin napakoordinaattiesitystä $z = re^{it}$ ja asettamalla $\log z = \log r + it$.

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että jos α ja β ovat nollasta poikkeavia algebrallisia lukuja siten, että $\beta \neq 1$ ja $\frac{\log \alpha}{\log \beta} \notin \mathbb{Q}$, niin $\frac{\log \alpha}{\log \beta}$ on transkendenttinen.

TODISTUS. Lause 4.9 $\Rightarrow$ (i):
Koska $l \neq k \cdot 2\pi i$ kaikille $k \in \mathbb{Z}$, niin $e^l \neq 1$. Otetaan nyt $\alpha = e^l$, jolloin $\alpha \neq 0, 1$. Jos α ja β ovat algebrallisia, niin $\alpha^\beta = \left(e^l\right)^\beta = e^{\beta \log e^l}$ jollekin logaritmille. Määritelmän mukaan eräs potenssin e^l logaritmi on l. Näin ollen $e^{\beta l}$ on eräs potenssin $\left(e^l\right)^\beta$ arvo.

Gelfond-Schneiderin lauseen mukaan kaikki potenssin α^β arvot ovat transkendenttisiä, joten tämä tuottaa (i):n, sillä nyt vähintään yksi luvuista e^l, β ja $e^{\beta l}$ on transkendenttinen.
(i) $\Rightarrow$ (ii):
Huomataan, että koska $\log\alpha$ ja $\log\beta$ ovat lineaarisesti riippumattomia rationaalilukujen joukossa, niin α ja β eivät molemmat voi olla 1. Oletuksen mukaan saadaan myös, että $\frac{\log\alpha}{\log\beta} \notin \mathbb{Q}$. Ehdossa (i) oletettiin, että $l \neq k \cdot 2\pi i$ kaikille $k \in \mathbb{Z}$. Jos näin on, niin $\beta = 1$. Tällöin $\log\alpha$ ei voi olla $2\pi i$:n kokonainen monikerta, sillä $\log\alpha$ ja $\log\beta$ ovat lineaarisesti riippumattomia rationaalilukujen joukossa (ii):n oletuksen mukaan.
Vaihdetaan nyt α:n ja β:n rooli ja tutkitaan suhdetta $\frac{\log\beta}{\log\alpha}$. Olkoon $l = \log\alpha$ ja $\beta' = \frac{\log\beta}{\log\alpha}$. Tällöin

$$\begin{aligned} e^l &= e^{\log\alpha} = \alpha \qquad\qquad \text{ja} \\ e^{\beta' l} &= e^{\frac{\log\beta}{\log\alpha}\log\alpha} = e^{\log\beta} = \beta. \end{aligned}$$

Näin ollen β':n on oltava (i):n mukaan transkendenttinen. Algebralliset luvut muodostavat kunnan, joten algebrallisen luvun käänteisluku on algebrallinen ja tästä seuraa, että myös $\frac{\log\alpha}{\log\beta}$ on transkendenttinen. Siispä $\log\alpha$ ja $\log\beta$ ovat lineaarisesti riippumattomia algebrallisten lukujen joukossa.
(ii) $\Rightarrow$ Lause 4.9
Tehdään antiteesi: olkoot α ja β algebrallisia, $\alpha \neq 0, 1$ ja $\beta \notin \mathbb{Q}$, ja oletetaan, että α^β on algebrallinen. Olkoon $\log\alpha$ mielivaltainen ja valitaan $\beta' = e^{\beta\log\alpha}$. Nyt

$$\log\beta' = \log e^{\beta\log\alpha}.$$

Määritelmän mukaan eräs $\log\beta'$:n arvo on $\beta\log\alpha$. Tästä seuraa, että $\log\alpha$ ja $\log\beta' = \beta\log\alpha$ ovat lineaarisesti riippuvia algebrallisten lukujen joukossa, koska β on algerallinen. Tällöin (ii):n mukaan $\log\alpha$ ja $\log\beta'$ ovat lineaarisesti riippuvia rationaalilukujen joukossa, eli β:n pitäisi olla rationaaliluku. Kuitenkin vaadittiin, että $\beta \notin \mathbb{Q}$. Siispä tämä on ristiriita ja väite pätee. □

Todistetaan sitten lauseen 4.9 avulla kolmen luvun transkendenttisyys.

SEURAUS 4.11. *Luku $2^{\sqrt{2}}$ on transkendenttinen.*

TODISTUS. 2 ja $\sqrt{2}$ ovat algebrallisia lukuja. Koska $2 \neq 0, 1$ ja $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, niin Gelfond-Schneiderin lauseen mukaan luku $2^{\sqrt{2}}$ on transkendenttinen. □

SEURAUS 4.12. *Luku e^π on transkendenttinen.*

TODISTUS. Tiedetään, että $e^{\pi i} = -1$. Toisin sanoen, πi on eräs logaritmin $\log(-1)$ arvo. Tälle logaritmille saadaan

$$\begin{aligned} (-1)^i &= e^{-i\log(-1)} \\ &= e^{-i(\pi i)}, \\ &= e^\pi. \end{aligned}$$

Nyt $-1 \neq 0, 1$ ja $-i$ ei ole rationaaliluku, mutta on algebrallinen. Gelfond-Schneiderin lauseen mukaan kaikki potenssin $(-1)^i$ arvot ovat transkendenttisiä, joten e^π on transkendenttinen. □

SEURAUS 4.13. *Luku $\frac{\log 2}{\log 3}$ on transkendenttinen.*

TODISTUS. Tämä voidaan todistaa Huomautuksen 4.9 kohdan (ii) avulla. Todistetaan ensin, että $\frac{\log 2}{\log 3}$ on irrationaaliluku.
Tehdään antiteesi: $\frac{\log 2}{\log 3}$ on rationaaliluku
Tällöin

$$\frac{\log 2}{\log 3} = \frac{m}{n},$$

joillekin $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Koska $\frac{\log 2}{\log 3} > 0$, niin myös $m > 0$. Käytetään kaavaa

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b,$$

jolloin saadaan

$$\log_3 2 = \frac{m}{n}.$$

Siispä

$$3^{\frac{m}{n}} = 2,$$

eli

$$3^m = 2^n.$$

Luvut 3 ja 2 ovat molemmat alkulukuja ja $m, n > 0$, joten tämä johtaa ristiriitaan. Alkuluku on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1.

Luku $\frac{\log 2}{\log 3}$ on siis irrationaalinen. Lisäksi $2, 3 \neq 0, 1$, joten Huomautuksen 4.10 nojalla luku $\frac{\log 2}{\log 3}$ on transkendenttinen luku. $\square$

Lähdeluettelo

[1] Burger, Edward B. *Exploring the number jungle.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[2] Burger, Edward B. & Tubbs, Robert *Making Transcendence Transparent.* Springer Science Business Media Inc., New York, 2004.

[3] Butler, Lee A. *Transcendence and irrationality proofs.* http://www.maths.bris.ac.uk/∼malab/PDFs/MA469.pdf, luettu 23.8.2013.

[4] Filaseta, Michael *Gelfond-Schneiderin lause.* http://www.math.sc.edu/∼filaseta/gradcourses/Math785/Math785Notes8.pdf, luettu 20.10.2013.

[5] Ireland, Kenneth & Rosen, Michael *A Classical Introduction to Modern Number Theory.* Springer Science Business Media Inc., 2. painos, New York, 1998.

[6] Kurittu, Lassi *Ketjumurtoluvut.* http://users.jyu.fi/∼lkurittu/ketjumurtoluvut.pdf, luettu 22.11.2010.