

^{12}C -ionien energiajätö vedessä

Pro gradu -tutkielma, 30.5.2015

Tekijä:

TARU MALMINEN

Ohjaaja:

HEIKKI KETTUNEN



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

TIIVISTELMÄ

Malminen, Taru Pauliina

^{12}C -ionien energiajätö vedessä

Pro gradu -tutkielma

Fysiikan laitos, Jyväskylän yliopisto, 2015, 34 sivua

Tässä tutkimuksessa käsiteltiin varatuista raskaista hiukkasista koostuvan säteilyn yleistä käyttäytymistä sen vuorovaikuttaessa materiaalin kanssa, sekä tutustuttiin lyhyesti erilaisiin tapoihin mitata säteilyn energiajätöä. Lisäksi MCP-pohjaisiin lentoaikailmaisimiin perustuvalla mittausasetelmalla määritettiin kokeellisesti ^{12}C -ioneista koostuvan säteilyn energiajätöä eripaksuisissa vesikohtioissa. Kohtioiden paksuudet olivat 0,39 mm, 0,57 mm ja 0,93 mm. Motivaationa mittauksille toimi suihkujen käyttö hadroniterapiassa, sillä varattujen raskaiden hiukkasten energiajätön käyttäytyminen materiassa toimii syvällä kudoksissa olevien kasvainten hoitoon erityisen hyvin. Lopulliset tulokset olivat noin 8-21 prosenttia pienempiä kuin ICRU:n raportin 73 data. Lisäksi yhdessä kohtiossa tapahtunut energiajätö poikkesi huomattavasti muista. Syytä tähän ei löydetty, mutta virhelähteeksi epäiltiin kohtioiden paksuuden mittausta.

Avainsanat: energiajätö, jarruuntumiskyky, kantama, energiaspektri, raskaat varatut hiukkaset, vesikohtio, lentoaikailmaisimien

ABSTRACT

Malminen, Taru Pauliina

Stopping Power of ^{12}C ions in Water

Master's thesis

Department of Physics, University of Jyväskylä, 2015, 34 pages

This thesis describes the main features of heavy charged particles' interaction with matter and some methods of measuring the stopping power of radiation. The stopping power of ^{12}C -ions in water targets was also determined from experimental data collected with MCP-based time-of-flight detectors. The water target thicknesses used were 0.39 mm, 0.57 mm and 0.93 mm. The motivation for these measurements was the use of ^{12}C -beams in hadron therapy. The behavior of heavy charged particles suits the treatment of tumors found deep inside the body. The final results for stopping power were 8-21 percent smaller compared to the ICRU Report 73 data. One of the targets also gave results that didn't agree with the results of the rest of the targets. The cause for this remained unknown, but it was suspected to be an error in the target thickness measurements.

Keywords: stopping power, range, energy spectrum, heavy charged particles, water target, time-of-flight detector

ESIPUHE

Tämän tutkielman teossa minua auttoivat useat henkilöt, kuten ohjaajani. Erityisesti haluaisin kiittää Mikko Iltasta tuesta, sekä konkreettisesta avusta data-analyysissä tarvittavien ohjelmien toteuttamisessa. Lisäksi haluan kiittää vanhempiani, jotka ovat aina tukeneet ja kannustaneet minua opiskeluissani.

SISÄLTÖ

1	Johdanto	1
2	Teoreettiset lähtökohdat	3
2.1	^{12}C -isotooppi	3
2.2	Varattujen raskaiden hiukkasten vuorovaikutus materian kanssa	4
2.2.1	Kantama	7
2.2.2	Energiaspektri	8
2.3	Menetelmiä hiukkasten energiajätön määrittämiseen	9
2.3.1	Kantamiin perustuvat mittaukset	9
2.3.2	Energiaspektrien mittaukset	9
2.3.3	Konversiomittaukset	10
2.3.4	Kalorimetriset mittaukset	10
2.3.5	Heijastusgeometriaan perustuvat mittaukset	11
2.3.6	Doppler-siirtymän vaimenemiseen (DSA) perustuvat mittaukset	11
2.4	Relativistinen liike-energia, liike-energian laskeminen hiukkasen lentoajasta	11
3	Mittausasetelma	13
3.1	Lentoaikaporttien toiminta	14
3.2	Signaalin käsittely	14
3.3	Koinsidenssiehdon toteutus	15
3.4	Kohtio ja sen paksuuden mittaus	15
4	Tulosten käsittely	18
4.1	Lentoaikakalibraatio	18
4.1.1	Lentoaikakalibraation kulmakerroin	19
4.1.2	Lentoaikakalibraation vakiotermit	20
4.2	Systemien offsetit ja koinsidenssiehto	22
4.3	Energianmäärittäminen	24
4.4	Kohtion kalvojen ja ilmakerrosten simulointi	25
4.5	Tulokset	25
4.6	Virhenalyysi	27
5	Johtopäätökset	30
	Lähteet	32
A	Liite 1: Kalibraatiovakion A virhe	33

1 JOHDANTO

Säteily ja sen vuorovaikutus materian kanssa on koko ydinfysiikan perusta. Säteilyilmaisimetkin perustuvat säteilyn ja materiaalin väliseen vuorovaikutukseen. Tällöin kaikki säteilyn havaitsemisesta siihen liittyvien sovellusten tutkimiseen ja käyttöön vaativat säteilyn vuorovaikutuksien tarkkaa tuntemista. Säteilyn ja aineen välisten vuorovaikutusmekanismien tunteminen mahdollistaa myös säteilyltä suojautumisen, jolloin sitä päästään hyödyntämään vaaratta.

Säteily voidaan jakaa ionisoivaan ja ionisoimattomaan säteilyyn sen energeettisyyden perusteella. Ionisoivalla säteilyllä tarkoitetaan säteilyä, jolla on riittävästi energiaa elektronien vapauttamiseen säteilyä absorboivan aineen atomeista, jotka siten ionisoituvat. Raja ionisoivan ja ionisoimattoman säteilyn välillä ei ole aina kuitenkaan selvä, sillä elektronien irrotusenergiat riippuvat elektronikuoresta, sekä käsiteltävästä alkuaineesta tai alkuaineiden seoksesta. Ionisoivia säteilylajeja ovat hiukkassäteilystä mm. raskaat varatut hiukkaset ja elektronit, sekä sähkömagneettinen eli fotoneista koostuva säteily. Raskaiden varattujen hiukkasten määritelmä vaihtelee hieman kirjallisuudesta riippuen, sillä joskus kevyiksi ioneiksi lasketaan kaikki ionit neoniin asti [1]. Kuitenkin tässä työssä termi raskaat varatut hiukkaset käsittää kaikki varatut hiukkaset, jotka ovat yhtä raskaita tai raskaampia kuin protonit. Tämä johtuu siitä, että näiden kaikkien hiukkasten käyttäytyminen noudattaa pääsääntöisesti samoja periaatteita.

Ionien kemiallinen reaktiivisuus poikkeaa usein sähköisesti neutraalin atomin reaktiivisuudesta. Säteilyn vaikutuksesta tapahtunut muutos voi rikkoa kemiallisia yhdisteitä absorboivassa aineessa tai muuten muuttaa aineen rakennetta. Syntyvät ionit voivat myös vuorovaikuttaa edelleen aineen muiden atomien kanssa synnyttäen lisävaurioita. Elävissä soluissa ionisaatio voi vaurioittaa myös solujen perimäainesta DNA-molekyyliä. Pahimmassa tapauksessa vauriot voivat johtaa solukuolemaan tai syöpään.

Ionisoivaa säteilyä voidaan kuitenkin käyttää myös syövän hoidossa. Vuosittain syöpään sairastuu erilaisista perinnöllisistä ja ympäristöstä liittyvistä syistä Suomessa noin 30000 ihmistä, joista puolet paranee [2]. Ionisoivan säteilyn erityisesti jakautumassa olevia soluja tuhoavaa vaikutusta voidaan käyttää hyväksi ohjaamalla sitä hallitsemattomasti jakautuviin syöpäsoluihin. Näin syöpäkasvain tuhoutuu. Yleisesti kuitenkin myös terveet kudokset saavat säteilyannoksia ja siten vaurioita.

Yleisin käytetty säteilyterapian muoto on fotoniterapia. Fotonit vaimenevat väliaineessa eksponentiaalisesti, minkä seurauksena säteilyannos jää suuremmaksi lähellä ihoa. Tämä on ongelma esimerkiksi syvällä ihon alla sijaitsevilla kasvaimilla. Sen sijaan raskaiden varattujen hiukkasten vuorovaikutus materiaalin kanssa on suurinta juuri ennen niiden pysähtymistä, jonka seurauksena suurin mahdollinen säteilyannos on hiukkasäteilyllä ohjattavissa juuri haluttuun paikkaan säätämällä hiukkasten energiaa. Mitä raskaampi varattu hiukkanen on, sitä terävämmiin se menettää energiansa tietyllä syvyydellä materiassa, säilyttäen samalla etenemissuuntansa.

Raskaiden varattujen hiukkasten kuten ^{12}C -hiukkasten ohjaaminen kasvaimiin ja annosten

suunnittelu vaatii kuitenkin niiden vuorovaikutusten tarkkaa tuntemista. Erityisesti vesi on tutkittavana kohtiona mielenkiintoinen, sillä se muodostaa noin 70 prosenttia ihmiskehon kudoksista. Tarkentamalla ^{12}C -hiukkasten energiajätön arvoa vedessä saadaan hiukkashoitojen annossuunnittelua tarkennettua. Tässä työssä määritetään ^{12}C -hiukkasten energiäjätö vedessä kokeellisesta datasta, sekä käsitellään yleisesti varattujen raskaiden hiukkasten vuorovaikutusta väliaineen kanssa.

2 TEOREETTISET LÄHTÖKOHDAT

2.1 ^{12}C -isotooppi

^{12}C merkinnällä tarkoitetaan hiili-isotooppia, jonka massaluku on 12. Vaihtoehtoisia merkintätapoja ovat myös C-12 tai hiili-12. Kirjain C on hiilelle annettu alkuainetunnus jaksollisessa järjestelmässä ja hiiliatomilla on määritelmällisesti ytimessä aina kuusi protonia. Tällöin ^{12}C -isotoopilla on ytimessään lisäksi kuusi neutronia, sillä massaluvun eli neutronien ja protonien summan on oltava 12. Luonnossa esiintyy kolmea hiilen isotooppia: stabiileja ^{12}C ja ^{13}C -isotooppeja, sekä radioaktiivista ^{14}C -isotooppia, jonka puoliintumisaika on noin 5730 vuotta. Hiilen isotoopeista 98,89 prosenttia on kuitenkin tässäkin työssä tutkittavaa ^{12}C -isotooppia [3].

Kemiallisilta ominaisuuksiltaan hiili on epämetalli, joka elektronikonfiguraationsa ja atomiorbitaaliensa hybridisaation ansiosta pystyy muodostamaan jopa 4 kovalenttista sidosta, jotka asettuvat tällöin tetraedrin muotoon. Tämä mahdollistaa suuren määrän erilaisia hiileen pohjautuvia kemiallisia yhdisteitä, mistä syystä hiili onkin hyvin tärkeä alkuaine elämän kannalta. Kemian osa-alueista orgaaninen kemia tutkii hiiliyhdisteiden kemiaa.

Yksittäisten atomien massat ovat hyvin pieniä, joten niitä käsiteltäessä on usein järkevää käyttää tätä tarkoitusta varten määritettyä atomimassayksikköä. Hiilen yleisyyden ja tärkeyden vuoksi atomimassayksikkö u on määritelty juuri hiili-12 atomin avulla siten, että kyseisen atomin massa on 12 u. Tämä koskee kuitenkin vain atomimassaa, jolloin mukana on myös 6:n elektronin massa. Tässä työssä kiihdyttimeltä tullessaan ^{12}C -ionin varaus on +5, jolloin se siis sisältää yhden elektronin. Lisäksi ionin varausaste voi muuttua sen kulkiessa kohtion tai hiilikalvojen läpi. Elektronin massa on kuitenkin niin pieni, ettei tämän työn puitteissa hiili-ionin varausasteella ole merkitystä. Tämän vuoksi on oletettu, että suihkun ^{12}C isotoopit ovat niitä mitattaessa täysin riisuttuja eli ytimillä ei ole yhtään elektronia. Tämä pitää varsin hyvin paikkaansa ennen niiden pysähtymistä väliaineessa.

Tässä työssä on järkevää käsitellä muuttujia ns. luonnollisissa yksiköissä. Tällöin energian yksikkönä on elektronivoltti eV, joka vastaa elektronin saamaa energiamäärää sen kulkiessa tyhjiössä yhden voltin suuruisen potentiaalieron läpi. Samanaikaisesti massan yksikkönä kannattaa taas käyttää yksikköä eV/c^2 . Tällöin $u = 931,494013 \text{ MeV}/c^2$ [4] ja hiili-12 atomin massa:

$$12 u = 11177,92816 \text{ MeV}/c^2.$$

Lisäksi kun tiedetään, että elektronin lepomassa on $m_e = 5,4857990 \cdot 10^{-4} u$ [3], saadaan täysin elektroneista riisutun C-12-ionin massaksi

$$m = 11174,86217 \text{ MeV}/c^2.$$

Vuorovaikutuksessa materian kanssa ^{12}C -ionit käyttäytyvät kuten varatut raskaat hiukaset. Näitä vuorovaikutusmekanismeja käsitellään seuraavassa osiossa.

2.2 Varattujen raskaiden hiukkasten vuorovaikutus materian kanssa

Kulkiessaan väliaineen läpi varatut raskaat hiukkaset menettävät energiaansa varauksen muodostaman sähkökentän vuorovaikutuksissa pääosin väliaineen atomien elektronien kanssa. Myös väliaineen ytimet kokevat Coulombin voiman sähkökentän vaikutuksesta. Ydinten massat ovat kuitenkin elektroneihin verrattuna suuria, joten varattujen raskaiden hiukkasten ja ydinten välisissä vuorovaikutuksissa menetetty energiamäärä jää täten liikemäärän säilymisen takia paljon pienemmäksi. Lisäksi ydinreaktiot väliaineen ydinten ja säteilyn välillä ovat erittäin harvinaisia hyvin suuria energioita lukuun ottamatta. Täten varatuista raskaista hiukkasista koostuvan säteilyn ja väliaineen ydinten vuorovaikutuksella ei ole juurikaan merkitystä säteilyn energianmenetykseen. [5, s. 129]

Raskaiden varattujen hiukkasten energianmenetys edes homogeenisessa väliaineessa ei kuitenkaan ole tasaista, vaan riippuu useista tekijöistä. Raskaan varatun hiukkasen vuorovaikutuksessa aineen elektronien kanssa sähköinen impulssi (voima kertaa törmäysaika) siirtää liikemäärän p elektronille. Tästä seuraa, että elektronin saama energia on verrannollinen sähköisen voiman neliöön, sekä energian siirtymiseen kuluneen ajan neliöön. Ajan neliö taas on kääntäen verrannollinen nopeuden neliöön. Energianmenetys on myös suoraan verrannollinen elektronien tiheyteen väliaineessa, sekä kääntäen verrannollinen aineeseen tunkeutuvan hiukkasen massaun. Tämä on helppo perustella, sillä mitä useamman elektronin kanssa vuorovaikutusta tapahtuu, sitä enemmän energiaa menetetään. Massiivisempi hiukkanen taas menettää yhdessä vuorovaikutuksessa vähemmän energiaa kerralla. [5, s. 131]

Suhdetta, jolla säteily menettää energiaa aineessa kuljettua pituusyksikköä kohti kutsutaan jarruuntumiskyvyksi tai energiajätöksi. Energiajätön yhtälö tunnetaan sen johtamiseen ja muokkaukseen osallistuneiden fyysikoiden mukaan Bethe-Bloch yhtälönä [5, s. 130]:

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{4\pi Z\rho N_A}{Am_e v^2} \left[\ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right) - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right]. \quad (1)$$

Yhtälössä esiintyvistä termeistä v on säteilyn hiukkasen nopeus, c on valonnopeus, $\beta = \frac{v}{c}$ on hiukkasen nopeuden ja valonnopeuden suhde, ze on hiukkasen varaus, m_e on elektronin massa, N_A on Avokadron vakio ja ϵ_0 on tyhjiön permittiivisyys. Energiajätö riippuu myös väliaineen ominaisuuksista, jotka tulevat yhtälössä esiin vakioiden A , Z , ρ ja I kautta. Järjestyksessä ne ovat aineen massaluku, järjestysluku, tiheys, sekä aineen keskimääräinen ionisaatioenergia. Ionisaatioenergialle on olemassa myös kokeellisesti määritetty aineen atomiluvusta riippuva approksimaatio $I = 11 ZeV$. [5, s. 130]

Yleisesti energiajätö ilmoitetaan yksikössä, jossa energian yksikkö on jaettu pintatiheyden yksiköllä. Tämä saadaan kun jaetaan yhtälö (1) väliaineen tiheydellä ρ . [5, s. 131] Tässäkin työssä käytetään yksikköä $\frac{\text{MeV}}{\text{mg/cm}^2}$.

Kun säteily koostuu tietyn massan ja varauksen ze omaavista raskaista varatuista hiukkasista, niin energiajätön käyttäytyminen eri energioilla tietyssä homogeenisessä väliaineessa voidaan jakaa kolmeen osaan. Tätä on pyritty havainnollistamaan kuvassa 1.

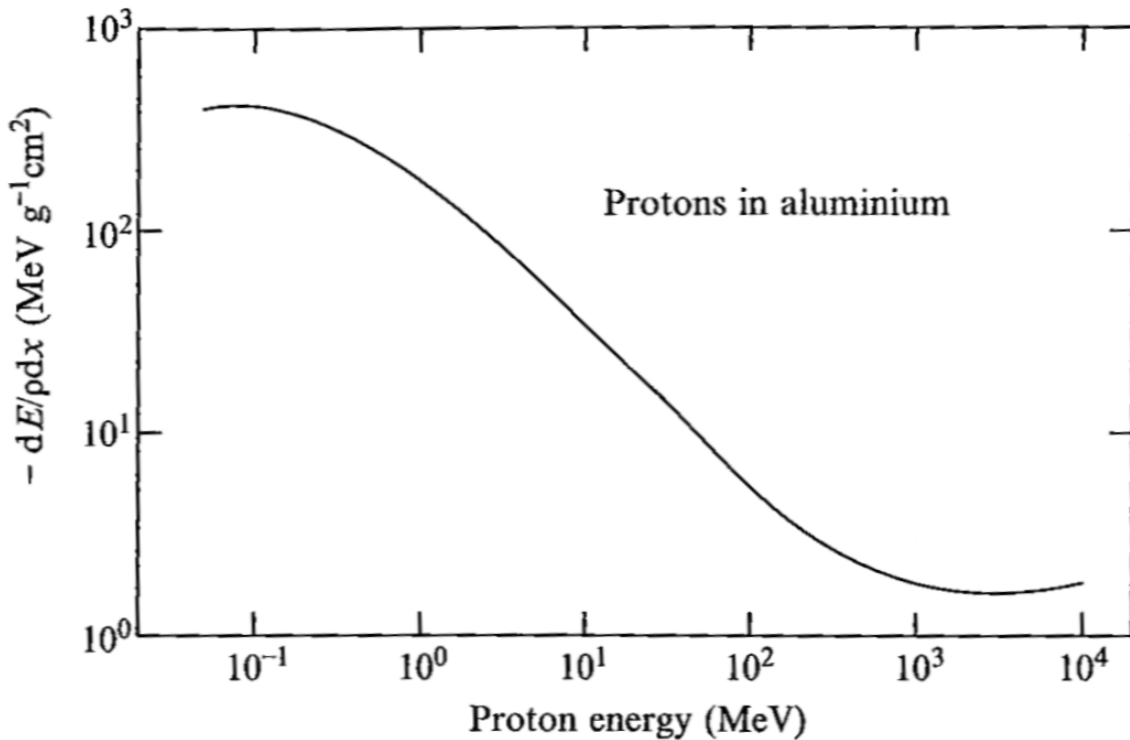
Pienillä energioilla säteilyn hiukkasten nopeus on huomattavasti pienempi kuin valonnopeus ($v \ll c$), jolloin $\beta \ll 1$. Tällöin yhtälö (1) sieventyy muotoon:

$$-\frac{dE}{dx} \approx \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4\pi Z\rho N_A}{Am_e v^2} \ln \left(\frac{2m_e v^2}{I} \right). \quad (2)$$

Huomataan, että pienillä energioilla energiajättöä dominoi v^{-2} -termi logaritmitermin jäädessä pieneksi. Tällöin siis varatun raskaan hiukkasen energiajätön voidaan approksimoida olevan kääntäen verrannollinen hiukkasen nopeuden neliöön. Tällöin se on myös kääntäen verrannollinen hiukkasen energiaan, sillä oletuksen nojalla nopeudet olivat pieniä.

Hyvin pienillä energioilla käyttäytyminen poikkeaa tästä, sillä tällöin hiukkanen kulkee materiaassa niin hitaasti, että energiansiirron maksimi vastaa aineen ionisaatioenergiaa I . Tällöin logaritminen termi yhtälössä (2) menee nolnaan. Todellisuudessa tässä nopeudessa ioni alkaa myös kaapata aineen elektroneja itselleen, kun elektronit eivät enää aineen atomeista vapautuessaan saa suuria liike-energioita. Tällöin ionin efektiivinen varaus myös pienenee ja energiajättö pienenee tämän seurauksena. [5, s. 131]

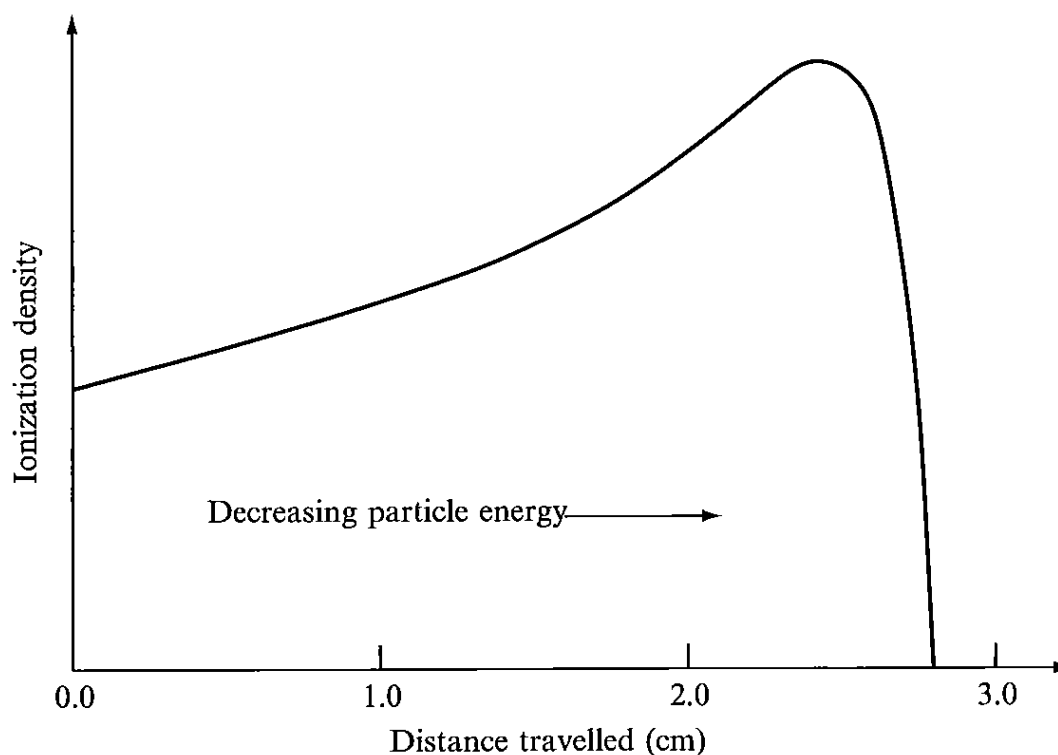
Siirryttäessä pienistä energioista suuriin energioihin energiajättö pienenee yhtälössä (2) määritellyn suhteen mukaan, kunnes se saavuttaa varatun hiukkasen massasta riippuvan minimin $E \approx 3mc^2$. Protoneista ja neutroneista muodostuneilla hiukkasilla minimi löytyy kohdasta, jossa aineeseen tunkeutuvan hiukkasen energia on noin 1 GeV nukleonia kohden. Tämän jälkeen yhtälön (1) logaritmistien termien sisältämät relativistiset korjaukset



Kuva 1: Protonien energiajättö alumiinissa niiden energian funktiona. Energiajättö ilmoitetaan muodossa $-\frac{dE}{pdx}$, jolloin se ei riipu aineen tiheydestä. Käyrää ei ole piirretty pienimmille energioille, mutta silti tästäkin kuvasta on havaittavissa energiajätön karkea kolmijako ja minimikohta. Itseasiassa kaikkien hiukkasten ionisaation aiheuttama energiajättö käyttäytyy vastaavasti. Energiajätön minimikohta löytyy hiukkasen massasta m riippuvasta energiasta $E \approx 3mc^2$. [5]

alkavat olla merkittäviä ja energiajätto lähtee jälleen nousemaan. Energialtaan tällä minimikohdan alueella olevaa hiukkasta kutsutaan yleisesti minimi-ionisaation aiheuttavaksi hiukkaseksi. [5, s. 132]

Tunkeutuessaan aineeseen varattu raskas hiukkanen siis menettää energiaansa yhtälön (1) määräämällä tavalla. Energian pienentyessä myös energiajätto muuttuu edellä määritellyllä tavalla. Tällöin säteilyn energian ollessa pienempää kuin energiajätön minimikohdassa (1 GeV nukleonia kohti) yhtälön (2) mukaan energiajätto, eli säteilyn aineeseen jättämä energia pituusyksikköä kohti, kasvaa varatun raskaan hiukkasen energian pienentyessä. Samalla kasvaa myös ionisaatiotiheys eli säteilyn vaikutuksesta muodostuneiden ionien määrä pituusyksikköä kohti. Energiajätön maksimissa myös ionisaatiotiheys saavuttaa selkeän maksiminsa ja putoaa nopeasti nolnaan varatun raskaan hiukkasen efektiivisen varauksen mennessä nolnaan. Esimerkki tästä käyttäytymisestä on annettu kuvassa 2, joka tunnetaan Braggin käyränä.



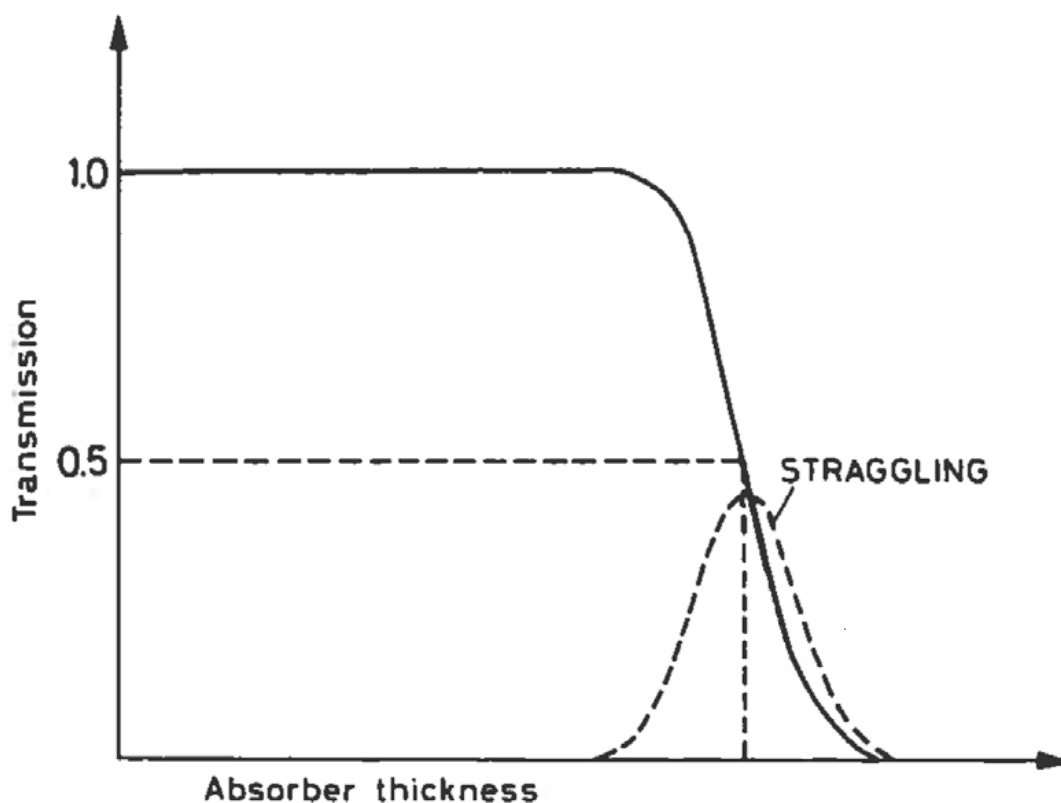
Kuva 2: Monoenergeettisistä α -hiukkasista koostuvan säteilyn energiajätto ilmassa niiden tunkeutumisyyden funktiona. Alfahiukkasten energia kuvassa on noin 5 MeV. Käyrä tunnetaan myös nimellä Braggin käyrä ja sen maksimia kutsutaan sen muodon perusteella myös Braggin piikiksi. [5]

Braggin käyrän maksimia kutsutaan Braggin piikiksi. Nimitys tulee selvästä noususta ja tätä seuraavasta nopeasta romahduksesta ionisaatiotiheydessä juuri ennen varatun hiukkasen pysähtymistä. Tätä maksimienergianluovutusta tietyllä syvyydellä käytetään hyväksi monissa sovelluksissa mm. tietynlaisten syöpäkasvaimien sädehoidoissa. Mitä suurempi massa varatulla raskaalla hiukkasella on, sitä selvempi on Braggin piikki. Ionisoidessaan ainetta säteily vapauttaa siitä sekundaarielektroneja (tunnetaan myös δ -elektroneina), jotka vuorostaan vuorovaikuttavat aineen kanssa edelleen. [5, s. 132-133]

2.2.1 Kantama

Säteilyn kantamalla tarkoitetaan syvyyttä, jolle säteily tunkeutuu ennen pysähtymistään tai absorboitumistaan. Raskaille varatuille hiukkasille kantama on helppo määrittellä, sillä niiden elektronia huomattavasti suurempi massa aiheuttaa sen, että liikemäärän muutos ja energianmenetykset vuorovaikutusta kohti jää pieneksi. Tällöin niiden etenemissuunta ainekerroksessa ei juurikaan muutu ja kantaman voidaan sanoa olevan niiden aineessa kulkeva matka.

Tämä kantama on suurinpiirtein sama kaikille identtisille saman energian omaaville hiukkasille. Kuitenkin siinä esiintyy pientä vaihtelua (eng. *range straggling*), sillä vuorovaikutukset elektronien kanssa ovat luonteeltaan statistisia. Tämän seurauksena varatun raskaan hiukkasen pysäyttämiseen vaadittavien törmäysten määrässä on myös pientä vaihtelua, jolloin jotkut hiukkaset kulkevat pidemmälle kuin toiset. [5, s. 130] Kuvassa 3 on esitetty kaaviokuva raskaista varatuista hiukkasista muodostuneen säteilyn intensiteetistä säteilyn kulkeman matkan funktiona. Se pysyy vakiona melkein koko matkan väliaineessa, kunnes putoaa nolliin. Juuri tässä lopussa kantaman vaihtelut ovat nähtävissä, sillä pudotus ei ole aivan välitön. Yleensä vaihtelut jäävät kuitenkin alle 5 prosenttiin koko kantamasta [6, s. 148].



Kuva 3: Väliaineeroksesta läpi päässeen säteilyn intensiteetti väliaineerokseksen paksuuden funktiona. Kuvassa on myös havainnollistettu kantamanvaiheluja (eng. *range straggling*), jotka yleisesti noudattavat gaussista jakaumaa. Muokattu kuvan [7, s. 32] pohjalta.

2.2.2 Energiaspektri

Kun säteilyn intensiteetti kuvataan sen energian funktiona, saadaan kyseisen säteilyn energiaspektri. Monoenergeettiselle säteilylle energiaspektri on diskreetti piikki hiukkasien energian kohdalla, sillä kaikilla hiukkasilla on sama energia. Tässä osiossa käsitellään yksinkertaisuuden vuoksi tällaisen monoenergeettisen varatuista raskaista hiukkasista koostuvan säteilyn energiaspektrin käyttäytymistä, kun säteily läpäisee eripaksuisia väliainekerroksia. Säteilyn energiaspektrissä tapahtuvat muutokset voidaan jakaa kolmeen osaan sen mukaan, mikä on väliainekerroksen paksuus suhteessa käsiteltävän säteilyn kantamaan tutkittavassa aineessa.

Kun väliainekerros on selvästi paksumpi kuin käsiteltävän säteilyn kantama kyseisessä aineessa, niin säteily tunkeutuu aineeseen kantaman syvyydelle. Koska itse ainekerros on kantamaa paksumpi, koko väliainekerroksen läpi ei pääse yhtään säteilyä.

Väliainekerroksen ollessa selvästi ohuempi kuin säteilyn kantama kyseisessä väliaineessa lähes kaikki hiukkaset pääsevät aineesta läpi. Jokainen hiukkanen kuitenkin vuorovaikuttaa ainekerroksen kanssa Coulombin sähkökentän välityksellä. Kentän ollessa jatkuva vuorovaikutusta tapahtuu, vaikka ainekerros olisi kuinka ohut tahansa. Tämän seurauksena jokaisen hiukkasen energia laskee, jolloin energiapiikin paikka siirtyy pienemmille energioille. Vuorovaikutusten statistisuudesta johtuen yksittäisten hiukkasten menettämät energiat kuitenkin vaihtelevat, jolloin säteilyn hiukkasten energia ei enää ole vakio ja piikki levenee.

Aivan kaikki hiukkaset eivät kuitenkaan välttämättä pääse läpi edes ohuen väliainekerroksen tapauksessa. Hiukkaset voivat esimerkiksi sirota takaisin tulosuuntaansa Rutherfordin sironnalla tai läpikäydä ydinreaktioita väliaineen ydinten kanssa. Todennäköisyys näihin ydinreaktioihin on kuitenkin pieni muille kuin hyvin suuren energian hiukkasille [5, s. 129]. Myös sironta suuriin kulmiin on epätodennäköistä. Piikin pinta-ala pysyykin vakiona, sillä yleensä lähes kaikki hiukkaset läpäisevät väliaineen.

Väliainekerroksen ollessa noin kantaman paksuinen nousevat hiukkasten kantamavaihtelut merkittäväksi tekijäksi. Näitä kantamavaihteluja käsiteltiin osiossa 2.2.1, sekä kuvassa 3. Tällöin väliaine pysäyttää osan hiukkasista ja osa pääsee läpi, jolloin energiaspektrin piikin pinta-ala ei pysy enää vakiona. Energiaspektrin piikki myös siirtyy hyvin pienille energioille.

2.3 Menetelmiä hiukkasten energiajätön määrittämiseen

Yksi käytännön sovellusten kannalta tärkeimpiä säteilyn ominaisuuksia on energiajätto, joka oli tämänkin työn tutkimuskohde. Käytännöntasolla sitä hyödynnetään esimerkiksi sädehoidossa ja säteilyltä suojaautumisessa. Energiajätön määrittämiseen on olemassa monia erilaisia menetelmiä, joista tässä osiossa esitellään muutamia.

2.3.1 Kantamiin perustuvat mittaukset

Kun hiukkasten energiajättojä ryhdyttiin määrittämään, käytettiin apuna kantamia [8, s.251]. Kantama R voidaan määrittellä yhtälöllä

$$R(E) = \int_0^E \frac{dE'}{NS(E')}, \quad (3)$$

missä E on hiukkasen alkuenergia ja E' on hiukkasen energia integraalin sisällä, $S(E)$ on hiukkasen energiasta riippuva energiajätto, sekä N on kohdeatomien lukumäärä tilavuusyksikköä kohden.

Jos kantama tunnetaan usealle energian alkuarvoille E , voidaan yhtälöstä (3) laskea energiajättovoima $NS(E)$ aina tietyille energiavälille. Tätä menetelmää käytetään nykyään vain erikoistapauksissa. [8, s. 251]

2.3.2 Energiaspektrien mittaukset

Nykyään yleisin ja myös yksinkertaisin tapa määrittää energiajätto on energiaspektrien mittaaminen. Tässä menetelmässä yleensä tunnettu lähes monoenerginen suihku ohjataan tutkittavasta materiaalista muodostettuun ohueen kohtiokalvoon, jossa sen energia pienenee vuorovaikutuksissa. Kohtion läpi kulkeneen suihkun energiaspektri mitataan esimerkiksi tarkalla energiailmaisimella (kuten pii- tai germanium puolijohdeilmaisimet) tai muulla energiaspektrien määrittäytavalla. Mitatuista energiaspektreistä ja kohtion paksuudesta voidaan määrittää keskimääräinen energiajätto laskuissa käytettyjen suihkun energioiden välillä.[8, s. 249-250]

Tällaisissa mittauksissa erityistä huomiota on kiinnitettävä käytettyjen ilmaisimien energiakalibraatioon, sekä kohtion homogeenisuuteen ja tasapaksuuteen. Kohtion paksuus on myös tunnettava riittävällä tarkkuudella. Epähomogeeninen tai paksuudeltaan vaihteleva kohtio aiheuttaa variaatioita hiukkasten energiaspektreihin. Lisäksi energiajätto muuttuu energian pienentyessä, joten kohtioiden tulee olla riittävän ohuita. Pienillä energioilla riittävän ohuiden kohtioiden valmistus voi olla ongelmallista. [8, s. 249-250]

Tätä menetelmää käytettiin myös tämän työn kokeellisessa osiossa ^{12}C -hiukkasten energiajätön määrittämiseen. Energiaspektrit mitattiin lentoaikailmaisimilla, joiden energiamäärittäminen perustuu hiukkasen lentoaikaan kahden lentoaikaportin välillä.

2.3.3 Konversiomittaukset

Energiajätön määrittäminen energiaspektreistä vaatii tarkkoja korkean resoluution energiamittauksia. Yleisesti käytössä on puolijohde-ilmaisimet. Kuitenkin mitä raskaampi varattu hiukkanen on, sitä korkeampi on hiukkasen ionisaatiotiheys. Tällöin myös ilmaisimen kuollut kerros vääristää tuloksia enemmän, sillä siihen jäävä signaalia tuottamaton energiamäärä on suurempi. Raskaammat ionit aiheuttavat materiaalissa myös enemmän elastisia törmäyksiä, jotka eivät muodosta ilmaisimeen mitattavia vapaita varauksia. Kaikesta tästä johtuen mittalaitteeseen aiheutuu lukuisia epälineaarisuuksia, jotka vääristävät tuloksia sitä enemmän, mitä raskaampia ovat tutkittavat hiukkaset.

Tämän vuoksi raskaampien ionien energiajätön määrittämiseen on kehitetty oma menetelmänsä, jossa itse hiukkasten energian mittausta konvertoidaan eli muutetaan epäsuoraksi energiamittaukseksi. Tällöin tutkittava suihku ohjataan tutkittavan kohtion jälkeen sekundaariseen kohtioon, josta irtoavien sekundaarihiukkasten kuten rekyyliprotonien energiaspektri mitataan puolijohdeilmaisimella. Tästä energiasta määritetään sitten alkuperäisen suihkun energia kohtion jälkeen. Kun alkuperäisen suihkun alkuenergia tunnetaan tai mitataan, saadaan myös energiajätön määritettyä. Raskaiden ionien ja niiden synnyttämien δ -elektronien pääsy ilmaisimeen tulee kuitenkin estää etteivät ne vääristä rekyylihiukkasten energiaspektriä. Raskaille ioneille tämän tekee raskaasta materiaalista tehty kalvo, joka pysäyttää ne hidastamatta kevyempiä rekyylihiukkasia merkittävästi. Syntyneet δ -elektronit voidaan ohjata ohi ilmaisimesta esimerkiksi pienillä magneeteilla, jotka eivät poikkeuta rekyylihiukkasten suuntaa liikaa. [1]

2.3.4 Kalorimetriset mittaukset

Suihkun hiukkasten energiamentysten sijaan voidaan mitata myös vuorovaikutuksissa kohtioon jäänyt energia kalorimetrisillä mittauksilla. Kun säteily vuorovaikuttaa kohtiomateriaalin kanssa, se jättää kohtioon energiaa, mikä nostaa kohtion lämpötilaa. Kun tämä lämpötilan muutos mitataan, voidaan siitä määrittää suihkun energiajätön. Parempien tulosten saamiseksi kohtio voidaan esimerkiksi jäähdyttää alhaisiin lämpötiloihin, jotta lämpötilojen muutokset on mitattavissa mahdollisimman tarkasti. [8, s. 250]

Nykyään on myös kehitetty termistoreihin perustuvia mittaumenetelmiä, joilla on mahdollista kohtioon jääneen energian lisäksi määrittää energijakaumia. Termistorit ovat vastuksia, joiden resistanssi riippuu niiden lämpötilasta. Niistä saadaan hyvin tarkkoja ympäristön lämpötilanmuutoksille, kun käytetään suprajohtavia materiaaleja ja operoidaan tämän faasitransition lämpötiloissa. [1]

Tällä tavalla mitattaessa tulee kuitenkin ottaa huomioon, että kaikki suihkun menettämä energia ei välttämättä mene kohtion lämmittämiseen. Huomioon tulee ottaa niin kemialliset kuin ydinreaktiot, sekä kohtion rakenteelliset muutokset. Lisäksi energiaa saatetaan menettää elektronien, fotonien tai molekyylien emissioissa. Säteily saattaa esimerkiksi viritellä väliaineen atomeja, jotka purkavat viritystilan emittoimalla fotoneja. Nämä kaikki eivät absorboitu takaisin väliaineeseen. [8, s. 250]

2.3.5 Heijastusgeometriaan perustuvat mittaukset

Erityisesti pienille energioille on vaikeaa valmistaa itsensä kantavia kalvoja, jotka olisivat riittävän ohuita ja laadukkaita energiajättömittauksien vaatimuksiin. Sen sijaan kevyestä kohtiomateriaalista voidaan höyrystää kalvo raskaammasta materiaalista tehdyn substratin päälle. Tämän kalvon Rutherfordin takaisinsironta -spektroskopiolla (RBS eng *Rutherford Backscattering Spectrometry*) saadusta spektristä voidaan määrittää säteilyn energiahäviöitä kyseisessä materiaalissa. Spektri saadaan ohjaamalla tutkittava suihku kohtiokalvoon ja mittaamalla tiettyyn kulmaan heijastuneiden suihkun hiukkasten energioita.

Tässä menetelmässä erityisesti data-analyysi on tehtävä huolella, sillä informaatiota saadaan mm. spektrin reunoista. Lisäksi höyrystetyn kohtiokalvon homogeenisuus on tärkeää mittauksen onnistumisen kannalta. [8, s. 250]

2.3.6 Doppler-siirtymän vaimenemiseen (DSA) perustuvat mittaukset

Liikkuvan ytimen emittoimat fotonit ovat Doppler-siirtyneitä laboratoriokoordinaatistossa. Vuorovaikuttaessaan aineen kanssa ydin menettää energiaa ja hidastuu. Tällöin Doppler-siirtymän suuruus muuttuu ja sen sanotaan vaimenevan. [8, s.251]

Tätä Doppler-siirtymän vaimenemismenetelmää (eng. *Doppler shift attenuation method*) on käytetty ydinfysiikassa ydinten viritystilojen elinaikojen mittaukseen, kun materiaalin energiajättö on hyvin tunnettu. Jos taas ytimen viritystilan elinikä tunnetaan, voidaan tämä menetelmä kääntää ja käyttää sitä energiajätön määrittämisessä. Tuloksena energiajättö saadaan aikayksikköä kohti.

Kuten muissakin menetelmissä, on tässäkin kohtion homogeenisuus tärkeää onnistumisen kannalta. Tämä menetelmä on kuitenkin käytettävissä, vaikka kohtion paksuus ei olisi tarkasti tiedossa, kunhan kohtion tiheys on. [1]

2.4 Relativistinen liike-energia, liike-energian laskeminen hiukkasen lentoajasta

Energiajättömittauksissa ollaan kiinnostuneita säteilyn energiasta ja siitä, kuinka paljon siitä jää väliaineeseen. Tässä työssä säteily koostuu hiukkasista, joilla on liikkuaan aina liike-energiaa, kuten kaikilla liikkuvilla kappaleilla. Kun kappaleen nopeus lähestyy valonnopeutta, vaikuttavat relativistiset efektit jo merkittävästi kappaleen energiaan ja ne tulee huomioida sitä laskettaessa. Nopeudella v liikkuvalla m -massaiselle kappaleelle voidaan laskea sen liike-energia E käyttämällä Einsteinin johtamaa relativistisen liike-energian kaavaa [9, s. 1173].

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2, \quad (4)$$

missä c on valonnopeus. Yhtälö muokkautuu myös yleisemmin tunnetuksi yksinkertaiseksi Newtonin liike-energian kaavaksi riittävän pienillä nopeuksilla. Tämä voidaan helposti osoittaa olettamalla, että $v \ll c$. Tällöin yhtälöä (4) voidaan approksimoida:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \stackrel{v \ll c}{\approx} mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2.$$

Approksimaatio saadaan kehittämällä yhtälöstä (4) Taylorin 2. asteen polynomi termin $\frac{v^2}{c^2}$ suhteen. Approksimaatio on parempi mitä pienempi termi $\frac{v^2}{c^2}$ on. Tästä saadaan kuitenkin jo tieto siitä, että Newtonin liike-energian yhtälö antaa relativistisen liike-energian yhtälön kanssa yhtäpitäviä tuloksia nopeuden ollessa riittävän pieni. Kun $v \ll c$, nopeudella v liikkuvalla m -massaiselle kappaleelle liike-energia voidaan siis approksimoida muotoon:

$$E = \frac{1}{2} mv^2. \quad (5)$$

Tämä on Newtonin mekaniikan antama yhtälö kappaleen liike-energialle [3]. Tässä työssä hiukkasten nopeudet olivat kuitenkin sen verran suuria, että tarkkuuden vuoksi relativistiset efektit oli huomioitava, jolloin oli käytettävä yhtälöä (4) yhtälön (5) sijaan.

Mittauksista saatiin välituloksina tutkittavan suihkun hiukkasten lentoaika aina tietylle etäisyydelle. Suihku kulki melkein tyhjiön kaltaisessa paineessa, joten hiukkasten nopeuden voitiin olettaa olleen vakio. Tällöin hiukkasten keskinopeus tietylle matkalle saadaan laskettua, kun tiedetään, että matkan s ajassa Δt kulkeneen kappaleen keskinopeus v on muotoa [9, s. 35]:

$$v = \frac{s}{\Delta t}. \quad (6)$$

Käyttäen yhtälöitä (4) ja (6) voidaan tasaista nopeutta kulkevan kappaleen energia kirjoittaa muodossa:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{(\frac{s}{\Delta t})^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (7)$$

Yhtälöstä (7) voidaan myös ratkaista hiukkasen lentoaika, jos sen energia on tunnettu:

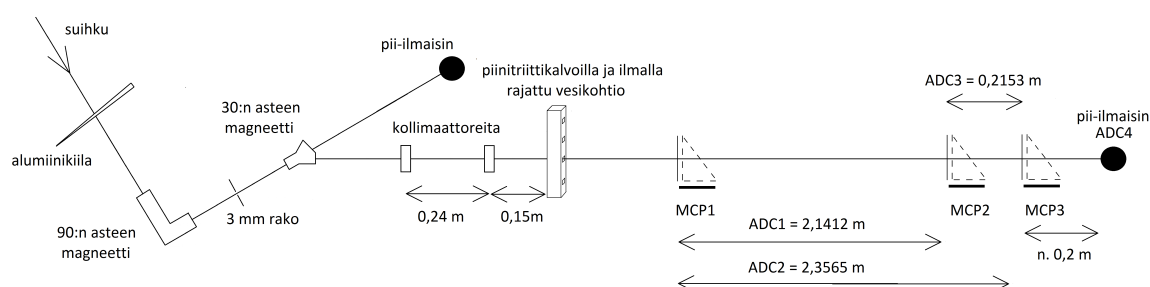
$$\Delta t = \frac{s}{c \sqrt{1 - \frac{c^4 m^2}{(E + c^2 m)^2}}}. \quad (8)$$

Nämä lentoaikaan perustuvat energian yhtälöt toimivat tämän työn energiamäärittelylaskujen pohjana.

3 MITTAUSASETELMA

Työssä määritettiin ^{12}C -ionien energiajätto vedessä Jyväskylän yliopiston fysiikan laitoksella 19.-21.5.2014 tehdyissä mittauksissa. Kaaviokuva tähän käytetystä mittausasetelmasta on kuvassa 4. Tutkittavat ^{12}C -suihkut saatiin K-130-kiihdyttimeltä.

Mittausasetelmassa oli ensimmäisenä alumiinista valmistettu hidastinkiila, jonka läpi tutkittava suihku asetettiin kulkemaan. Tällöin suihkun energia laskee ja energiaspektri levenee osiossa 2.2.2 käsitellyllä tavalla. Kiilan jälkeen suihkulinjalla oli 90:n ja 30:n asteen magneetit, joiden väliin oli asetettu kaksi metallilevyä kolmen millimetrin päähän toisistaan. Suihku kulki tästä levyjen välisestä raosta, joten levyt toimivat näin kollimaattorina. Magneettien ja tämän kollimaattorin avulla suihkun energioresoluutiota pystyttiin parantamaan. Ensin suihku ohjattiin pii-ilmaisimeen laittamalla 30:n asteen magneetti pois päältä. Ilmaisimella energiaspektrin muoto voitiin tarkastaa ennen sen ohjaamista magneeteilla vesikohtioon. Ennen kohtiota oli kaksi kollimaattoria, joiden rakojen halkaisijat olivat 1,5 mm. Kohtion jälkeen suihkulinjalla oli kolme lentoaikaportti-ilmastinta, joiden avulla pystyttiin määrittämään kohtion läpäisemien hiukkasten energia. Näiden takana oli vielä toinen pii-ilmaisim, jota käytettiin koincidenssimittauksessa.



Kuva 4: Työssä käytetyn mittausjärjestelmän kaaviokuva ja etäisyydet.

Säätämällä suihkun eteen osuvaa alumiinikiilan paksuutta voitiin suihkun energiaa varioida. Tässä mittauksessa käytetyt energiat olivat väliltä 110-240 MeV. Kohtio pystytettiin poistamaan mittausasetelmasta kesken mittauksen, jolloin voitiin määrittää suoraan kulkevan suihkun energia. Kun taas kohtio asetettiin suihkun eteen, saatiin määritettyä kohtion läpi kulkeneen suihkun energia. Vertaamalla kohtion läpi kulkeneen suihkun energiaa alkuperäisen suihkun energiaan saatiin määritettyä ^{12}C -ionien energiajätto käytetyllä kohtion paksuudella.

Käytetyn kohtion suihkun eteen osuvaa osaa voitiin myös vaihtaa kesken mittauksen, jolloin pystyttiin tutkimaan energiajättoa eri paksuisilla kohtioilla. Tutkittavia kohtion paksuuksia oli kolme: 0,39 mm, 0,57 mm ja 0,93 mm. Kohtiojärjestelmään oli kiinnitetty lasermittausjärjestelmä, jonka avulla kohtioiden paksuudet määritettiin.

3.1 Lentoaikaporttien toiminta

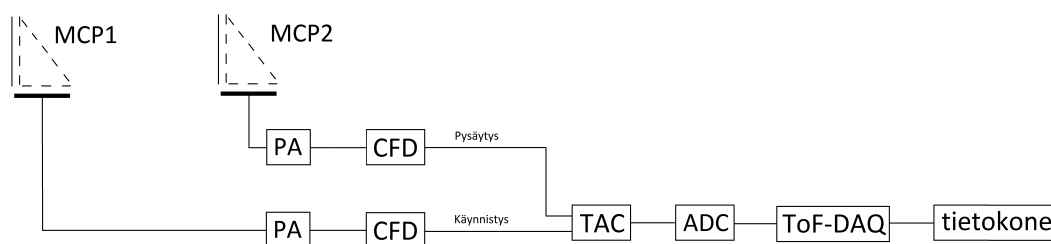
Lentoaikaportteina toimi kolme micro-channel plate-pohjaista ajoitusilmaisinta (MCP). Ilmaisimen tehtävänä oli tuottaa signaali, kun ^{12}C -hiukkanen läpäisi sen. Tämä perustui osiossa 2.2 käsitellyyn säteilyn käyttäytymiseen materiaalissa. Ilmaisimien sisälsi hiilikalvon, jonka kanssa varattu raskas hiukkanen vuorovaikutti vapauttaen samalla ns. δ -elektroneja.

Elektronit ohjattiin sähkökentän avulla MCP-kennoon, jonka yli on kytketty jännite. Kenno toimi mittauksessa elektroni-monistimena, jossa kennon seinämiin osuvat elektronit vapauttivat lisää elektroneja vahvistaen signaalin mitattavaan muotoon.

Kaksi lentoaikaporttia oli aina kytketty siten, että toinen käynnisti ajanoton ja toinen lopetti sen. Näin kolmella lentoaikaportilla saatiin aikaan kolme eri etäisyydellä toisistaan sijaitsevaa porttiparia (ADC1-ADC3). Porttiparien muodostamat systeemit näkyivät myös kuvassa 4. Saadusta datasta voitiin määrittää hiukkasen lentoaika porttien välillä, mistä taas pystyttiin laskemaan hiukkasen energia yhtälön (7) avulla.

3.2 Signaalin käsittely

Mittauksissa mitattiin kahden portin välistä lentoaikaa ja käytetty elektroniikkakokoonpano yhdelle porttiparille on esitetty kuvassa 5. Muilla porttipareilla signaali käsiteltiin vastaavalla tavalla.



Kuva 5: Mittauksissa käytetty elektroniikkakokoonpano yhdelle porttiparille

Lentoaikaportteilta tullut signaali kulki ensin esivahvistimen (PA = preamplifier) kautta CFD:lle (constant fraction discriminator), joka antoi signaalin energiasta ja nousuajasta riippumattoman ajoitusignaalin. Ajoitusignaalit tuotiin pareittain TAC:lle (time to analog converter), joka antoi analogisen signaalin, jonka amplitudi oli verrannollinen signaalien välisen aikaeron suuruuteen. Tämä signaali muutettiin digitaaliseen muotoon ADC:llä (analog to digital converter), joka muunsi pulssinkorkeuden siihen verrannolliseksi kokonaisluvuksi eli kanavaluvuksi. Signaalit ohjattiin ToF-DAQ data-analysaattorin [10] kautta dataa kerääväälle tietokoneelle. Lopullisena tietona jokaisesta havainnosta saatiin sen systeemin numero, missä havainto oli tehty (ADC1-ADC4), kanavaluku, sekä timestamp eli aikaleima, joka vastaa havaintoaikaa.

Koska tutkimuksessa mitattiin lentoaikaa kolmella eri porttiparilla, saattoi eri systeemeissä ilmetä erikokoisia viiveitä identtisistä laitteistoista huolimatta. Tätä varten jokaiselle porttiparille suoritettiin aikakalibraatio. Aikakalibraatiota varten käytössä oli pulssigeneraattori, jossa oli kaksi ulostuloa: toinen käynnistys- ja toinen lopetusignaalia varten. Kalibraattori kytkettiin tutkittavaan TAC:iin ja asetettiin lähettämään aina yksi lopetusignaali jokaista käynnistysignaalia kohden. Signaalien välinen aikaero säädettiin olemaan 10 nanosekuntia tai tämän monikerta. Tällöin saadusta datasta pystyttiin määrittämään lineaarisen aikakalibraation kulmakerroin, kuten osiossa 4.1.1 tullaan esittämään.

3.3 Koinsidenssiehdon toteutus

Aikaporttien taakse oli sijoitettu vielä pii-ilmaisain (ADC4), joka havaitessaan hiukkasen antoi signaalin. Jos hiukkanen kulkisi suhteellisen suoraan, tulisi sama hiukkanen havaituksi jokaisessa ilmaisimessa tietyn ajan sisällä. Sen sijaan esimerkiksi hiilikalvosta tai kohtiokkunasta siroavat hiukkaset eivät enää osuisi viimeisenä sijaitsevaan pii-ilmaisimeen. Kohtion muodosta johtuen jotkut hiukkasista saattoivat kulkea piintriitti-ikkunan sijaan läpi ikkunan kehikon reunoista. Lisäksi hiukkaset saattoivat vuorovaikuttaa hiilikalvojen teräskehikoiden kanssa. Näiden ylimääräisten osien kanssa vuorovaikuttaneet hiukkaset menettivät energiaa huomattavasti enemmän kuin pelkän kohtiokkunan läpi kulkeneet. Tällaiset hiukkaset vääristäisivät energiainformaatiota, eivätkä olisi tämän mittauksen kannalta hyödyllistä mittausdataa.

Jos hiukkanen havaittiin lentoaikaporteissa, mutta ei pii-ilmaisimessa, sitä ei otettu lopulliseen dataan. Lisäehtona oli vielä, että havainnon piti tapahtua porteissa ja pii-ilmaisimessa tietyn ajan sisällä. Nämä karsivat datasta sironneet hiukkaset, sekä ylimääräisissä vuorovaikutuksissa energiaansa menettäneet hiukkaset.

3.4 Kohtio ja sen paksuuden mittaus

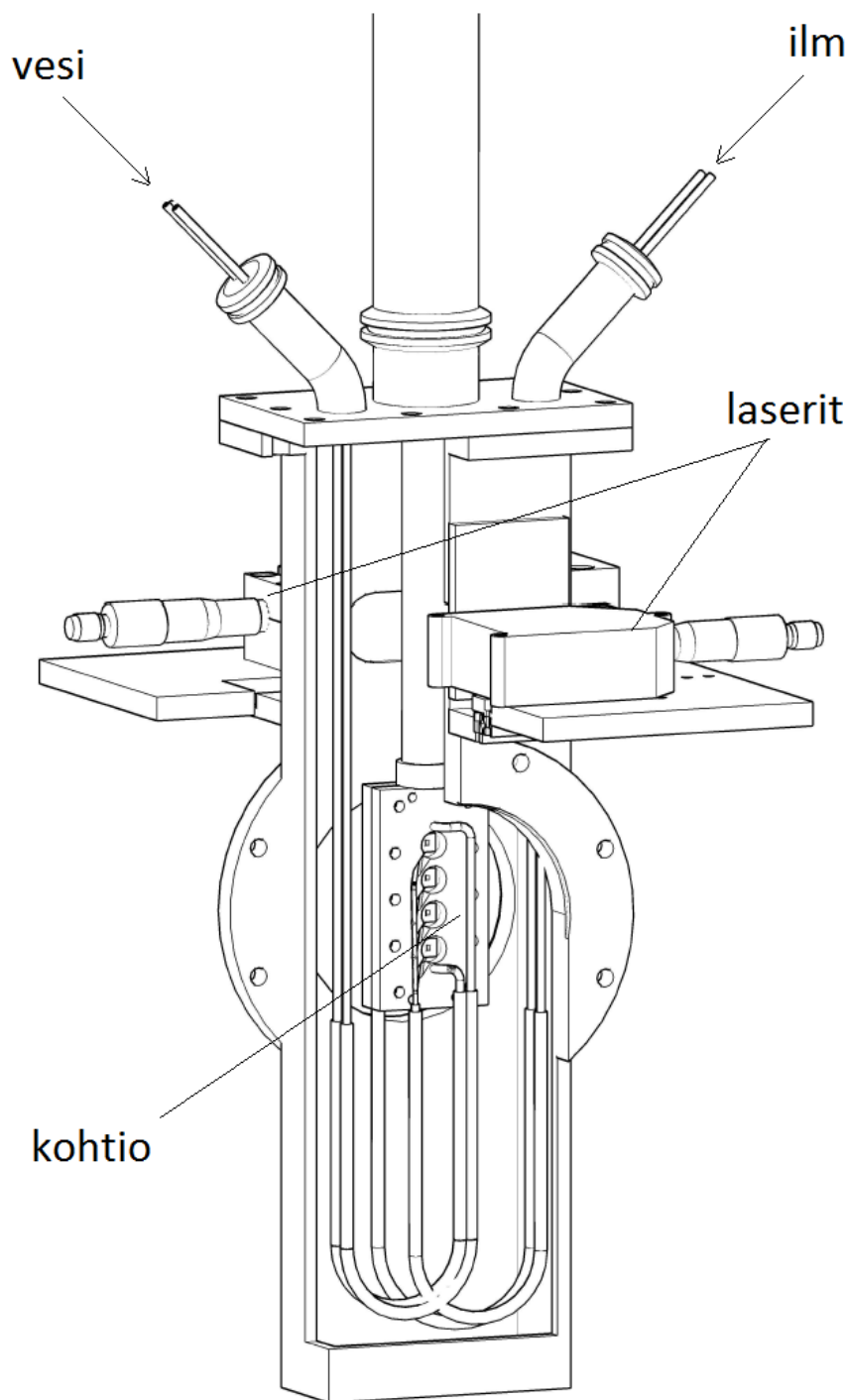
Mittauksissa käytetty kohtiokammio on esitetty kuvassa 6 ja itse kohtio kuvassa 7. Kohtion rakennetta on selvennetty kuvassa 8.

Kohtio koostui neljästä eri paksuuden omaavasta piintriittikalvojen rajaamasta vesikohtiosta. Lopulliset tulokset laskettiin käyttämällä kolme ohuinta kohtiota, sillä neljäs kohtio oli mittauksissa käytetyille energioille liian paksu eikä suihku läpäissyt sitä.

Koska tarkoituksena oli tutkia energiajättöä vedessä, ohjattiin kohtioiden sisimpään osaan kahden piintriittikalvon väliin vettä painovoimapohjaisella vesikierrolla, jonka putkissa kulki ionivaihdettu vesi. Vesikierron tarkoituksena oli huuhtoa ilmakuplat pois kohtioiden sisältä ennen varsinaisia mittauksia. Itse mittausten aikana vesi ei kiertänyt. Vesikierron pullojen oikealla sijoituksella varmistettiin, että veden pinta oli aina mitattavan kohtion korkeudella, mikä ehkäisi korkeasta vedenpaineesta johtuvaa kalvojen pullistumista. Näiden kahden piintriittikalvon muodostaman kohtion paksuus mitattiin.

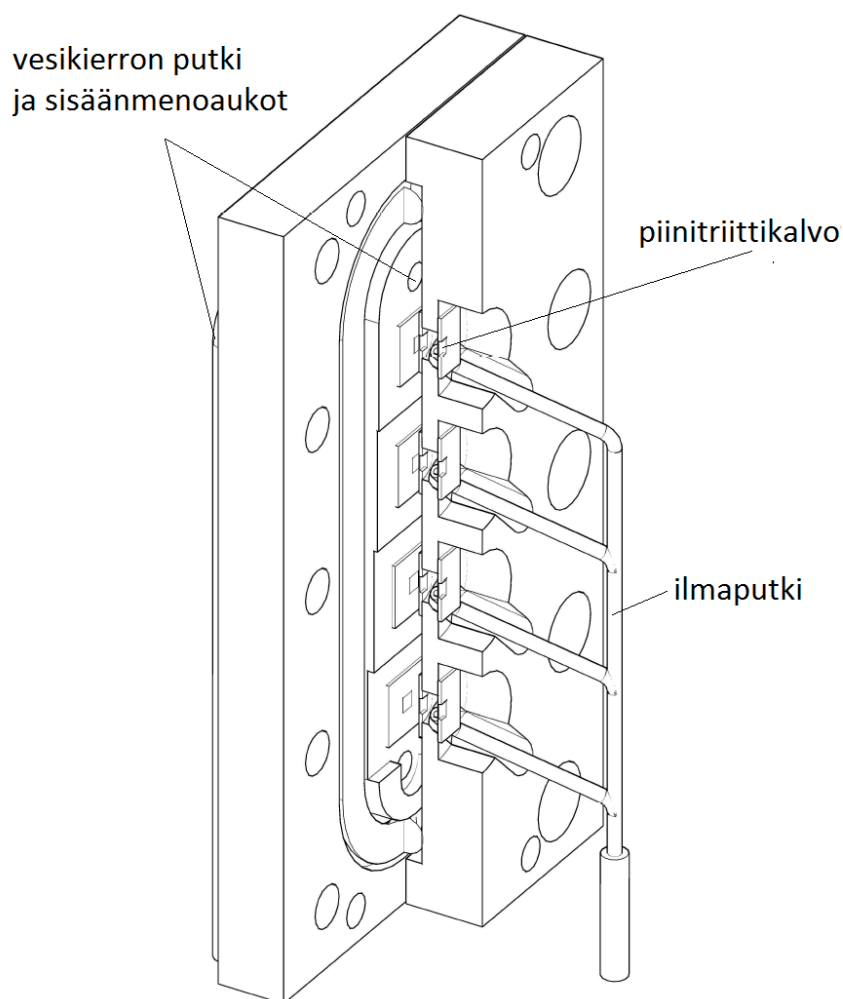
Paksuudenmäärittäminen tehtiin asettamalla laserit (Micro-Epsilon 1700-10 ja Micro-Epsilon 1700-20) tunnettuun kulmaan kohtiokammion molemmille puolille. Tällöin lasersäde heijastui kohtion pinnasta analysaattoriin, joka laskee kohtion pinnan etäisyyden saapuneen valonsäteen kulmasta. Kohtion paksuudet mitattiin 15.04.2015 ja 16.04.2015. Mittaukset koostuivat kalibraatiosta, sekä toistomittauksista. Kalibraatio tehtiin tämän mittauksen tarkkuudella nollapaksuuden (100 nm) omaavan mittakohtion avulla. Toistomittauksissa mitattiin kaikkien kohtioiden paksuutta vaihtelevista kohdista kohtiota. Kaikkia kohtiota mitattiin molempien päivien aikana ja niiden todettiin olevan tasapaksuisia normaali-ilmanpaineessa.

Koska suihku tuli kulkemaan tyhjiönkaltaisessa paineessa, olisi paine-ero pullistanut piintriittikalvoja, mikä olisi aiheuttanut kohtioon paksuuseroja. Tämä olisi huomattavasti heikentänyt tuloksia, sillä kohtionpaksuus oli mittauksen kannalta tärkeää tuntea mahdollisimman tarkasti. Tämän ehkäisemiseksi piintriittikalvojen rajaaman vesimassan molemmille puolille liimattiin vielä toiset piintriittikalvot, joiden sisään ohjattiin putkella normaali-ilmanpaineessa olevaa ilmaa. Tällöin paine-ero veden ja ilman rajapinnassa oli

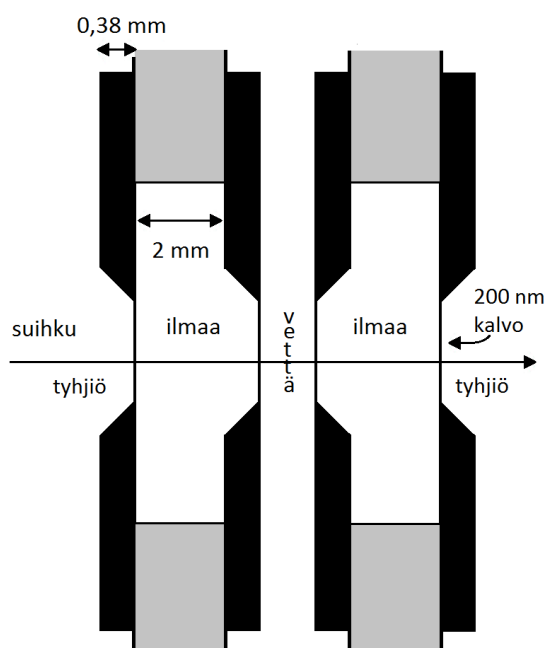


Kuva 6: Mittauksissa käytetty kohtiojärjestelmä. Kuvassa näkyy kohtioon normaali-ilmanpaineista ilmaa ja ionivaihdettua vettä vievät putket, sekä kohtiokammioon kiinnitetty lasermittausjärjestelmä. Laserien avulla kohtioiden paksuudet pystyttiin määrittämään, kun kohtiot nostettiin laserien eteen.

riittävän pieni ehkäisemään pullistumista. Tämä oltiin todettu jo kohtion paksuutta mittaessa. Kahden piintriittikalvon asentamisen ansiosta ainoastaan uloimmat piintriittikalvot pullistuivat, mutta tällä ei ollut niin suurta vaikutusta energianmenetykseen, sillä energianmenetys ilmassa on paljon pienempää kuin vedessä.



Kuva 7: Käytetyn kohtion rakenne.



Kuva 8: Kaaviokuva kohtion rakenteesta. Piintriittikalvoilla rajatun vesimassan molemmilla puolilla oli vielä noin 2,4 mm normaali-ilmanpaineessa olevaa ilmaa, joka oli rajattu omilla piintriittikalvoillaan.

4 TULOSTEN KÄSITTELY

Tietokone antoi jokaisesta mittauksesta listan eri systeemeissä tehdyistä havainnoista ja niihin liittyvistä kanavaluvuista ja aikaleimoista (aikainformaatio). Näistä tuloksista ei suoraan saatu haluttua energiäjättöinformaatiota vaan niitä täytyi analysoida ja muokata halutun datan määrittämiseksi.

Ensin suoritettiin aikakalibraatio, joka antoi kanavaluvun ja hiukkasen lentoajan välisen yhteyden. Tämän jälkeen datasta suodatettiin pois huonoja mittaustuloksia koinssidenssiehdolla. Lopuksi tehtiin energiakalibraatio eli lentoaikaspektri muokattiin energiaspektriksi.

Tämän jälkeen eri suihkujen energiat olivat tiedossa, jolloin energiäjättö koko kohtiassa pystyttiin laskemaan. Koska tavoitteena oli määrittää energiäjättö vedessä, tuli huomioida vielä kohtion kalvojen ja ilmakerrosten vaikutus. Tämä tehtiin simuloimalla energiäjättö näihin osiin, jolloin lopullinen energiäjättö vesikohtioon saatiin määritettyä.

Lopulliset tulokset on laskettu käyttäen ainoastaan ADC1:n antamia arvoja, sillä se oli pääasiallinen porttipari. Muut porttiparit olivat joko mittausten aikana tapahtuvaa tulosten pikaista tarkistamista varten tai varalla.

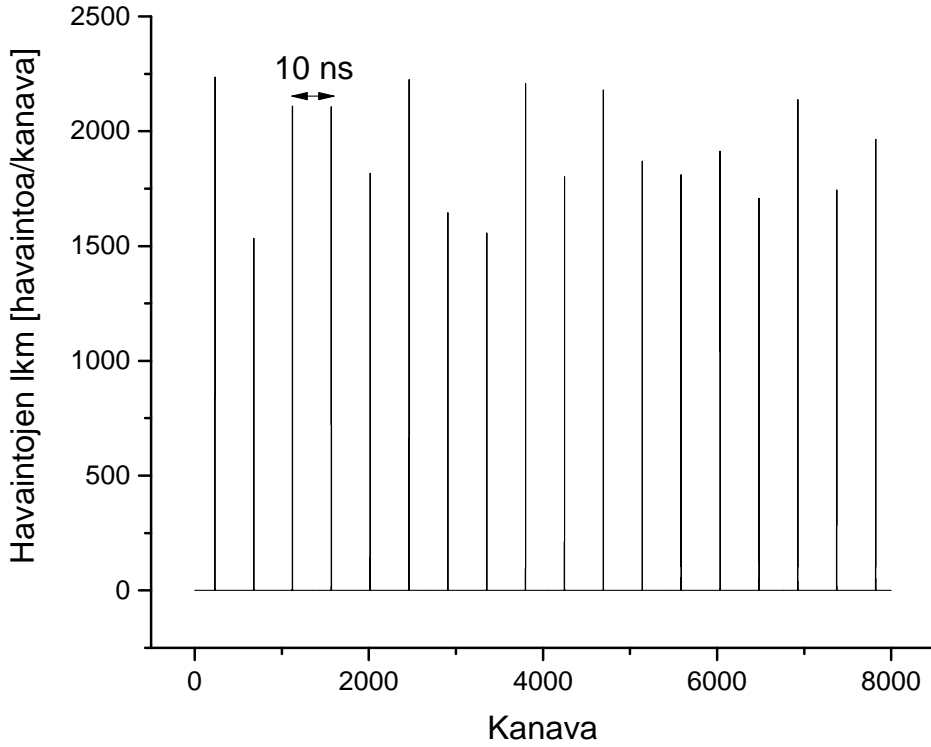
4.1 Lentoaikakalibraatio

Lentoaikakalibraatiota varten kalibraattori kiinnitettiin jokaiseen TAC:iin ja kerätystä mittaustuloksesta piirrettiin kuvaajat, joissa x-akselilla oli kanavaluku ja y-akselilla kanavassa havaittujen tapahtumien lukumäärä. Kuvassa 9 on esimerkki tällä tavalla saadusta kuvaajasta. Kuvaajia tehtiin jokaiselle TAC:n sisältävälle systeemille, jolloin jokaista lentoaikaporttiparia vastaa yksi kuvaaja.

Kuvaajat koostuivat systeemien viiveestä riippuvasta vaihtelevasta määrästä selkeitä piikkejä. Koska TAC mittasi saamiensa signaalien välistä aikaeroa, kuvaajien piikit vastaavat kalibraattorilta saatujen signaalien välistä aikaeroa, joka oli 10 ns tai sen monikerta. Koska piikkien havaittiin olevan tasavälein olivat ADC:t lineaarisia. Tällöin voitiin olettaa lentoajan Δt olevan lineaarisesti riippuvainen kanavaluvusta ch ja riippuvuus pystyttiin esittämään yhtälömuodossa:

$$\Delta t = B \cdot ch + A, \quad (9)$$

missä B on tässä lentoaikakalibraatiossa määriteltävä kulmakerroin ja A vastaavasti vakioterminä. Koska kuvaajien piikkien välisen etäisyyden tiedettiin olevan 10 ns, pystyttiin kulmakerrointa B vastaavat arvot määrittämään. Kuitenkin vakioterminä A ei saatu tällä tavalla, vaan sitä varten tarvittiin kalibraatiosuoran kiinnittävä ylimääräinen datapiste. Tämä saatiin, kun kiihdyttimeltä otettiin 240 MeV suihku, jonka lentoajat mitattiin jokaiselle porttiparille ilman kohtiota ja hidastinkiilaa.



Kuva 9: Kalibraattorista saatu spektri. Kalibraattorin asetuksista tiedettiin, että piikkien välinen etäisyys on aina 10 ns.

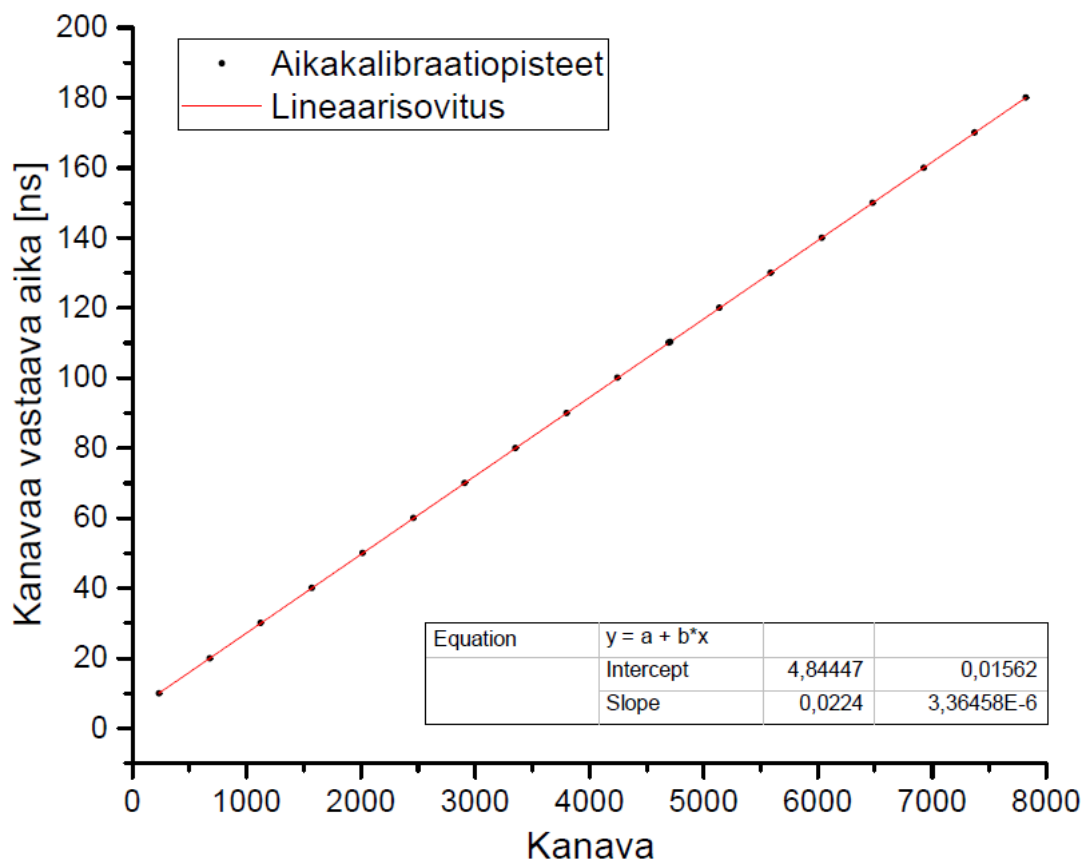
4.1.1 Lentoaikakalibraation kulmakerroin

Kalibraattorin avulla tehdystä mittauksesta saatuihin (kanava, havaintojen lkm)-kuvaajien jokaiseen piikkiin sovitettiin gaussinen jakauma, jonka avulla saatiin määritettyä piikin keskikohta ja tätä vastaava kanavaluku. Koska tarkoituksena oli määrittää yhtälössä (9) oleva kulmakertoimen B arvo, ei piikkien tarkalla paikalla ollut vaikutusta kulmakertoimen arvoon - vain paikkojen suhteella toisiinsa.

Tällöin voitiin olettaa ensimmäisen piikin kanavalukua vastaavan ajan olevan 10 ns kohdalla ja seuraavien lineaarisesti 10 ns välein. Näin saadut $(\Delta t, ch)$ -pisteparit piirrettiin vastaavaan koordinaatistoon ja niihin sovitettiin PNS-suora. Esimerkki tällaisesta kuvaajasta on kuvassa 10. Tällöin syntyneen suoransovituksen vakiotermillä ei ollut fysikaalista merkistystä, sillä se riippui ensimmäiselle piikille valitusta paikasta. Kuitenkin kulmakertoimen arvoon valinta ei vaikuttanut ja sovituksesta saatiinkin yhtälön (9) kulmakerroin. Saadut kulmakertoimet on lueteltu taulukkoon 1.

Taulukko 1: Lentoaikakalibraation kulmakertoimien arvot

Systeemi	Kulmakerroin [ns/kanava]
ADC1	$0,022400 \pm 0,000004$
ADC2	$0,020730 \pm 0,000003$
ADC3	$0,024080 \pm 0,000010$



Kuva 10: Lentoaikakalibraatiosuoran kulmakertoimen määrittäminen. Aikakalibraatiopisteillä oli virherajat, mutta ne eivät suuruusluokkansa vuoksi näy kuvassa.

Jotta oletus lineaarisuudesta saatiin vielä perusteltua kuvaajiin sovitettiin myös toisen asteen polynomi, jonka suuruusluokka jäi kuitenkin merkityksettömän pieneksi. Tämän ansiosta lentoaikakalibraatiossa voitiin käyttää yhtälöä (9) taulukon 1 termien arvoilla.

4.1.2 Lentoaikakalibraation vakiotermin

Lentoaikakalibraatiosuoran (9) vakiotermin A määrittämiseksi kiihdyttimeltä otettiin 240 MeV suihku, jonka lentoajat mitattiin jokaiselle porttiparille ilman kohtiota ja hidastinkiilaa. Saadusta datasta piirrettiin taas kuvaajat, joiden piikkeihin sovitettiin gaussiset jakaumat piikkien keskikohtien määrittämistä varten. Piikkejä vastaavat kanavaluvut on lueteltu virheineen taulukossa 2.

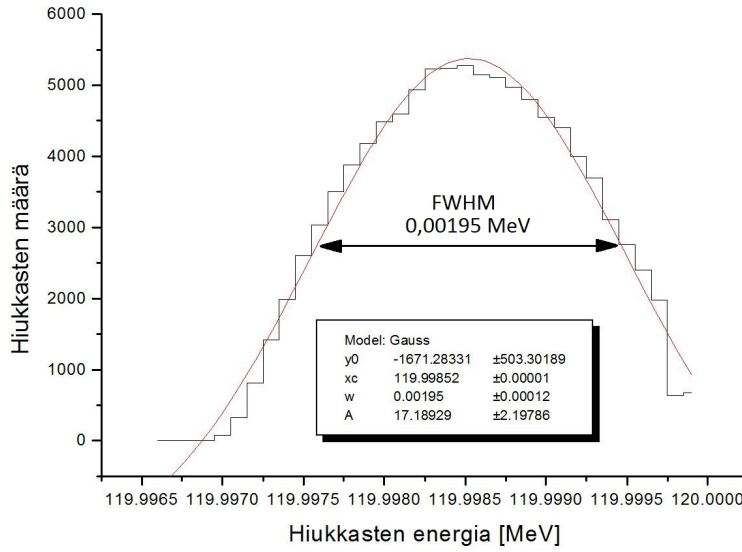
Taulukko 2: 240 MeV suihkun lentoaikaspektien piikkien keskikohtaa vastaavat kanavaluvut

Systeemi	Piikkiä vastaava kanava
ADC1	$311,781 \pm 0,015$
ADC2	$722,20 \pm 0,02$
ADC3	$81,61 \pm 0,03$

Koska suihkun energia tunnettiin voitiin sen hiukkasten lentoaika ratkaista käyttäen yhtälöä (7). Kuitenkin tätä ennen täytyi ottaa huomioon se, miten hiukkasten havaitsemiseen käytetyt lentoaikaportteissa sijaitsevat hiilikalvot vaikuttivat piikin energiaan. Jotta energiajättö kalvoissa saatiin selville, käytettiin niiden määrittämiseen SRIM-2013-ohjelmaa

[11], jonka avulla pystyttiin simuloimaan tietyn energian omaavien hiukkasten energiajät-
töä aineessa.

Simulaatioita tehtiin useille mittauksessa käytetyille energioille. Esimerkkinä 120 MeV:in
energian omaavien hiukkasten simulaatiospektri on nähtävissä kuvassa 11. Selvästi näh-
dään, että kalvon läpäisseiden hiukkasten energia on hyvin lähellä alkuperäistä energiaa.
Lisäksi hajonta on pientä puoliarvoleveyden ollessa alle 0,002 prosenttia suihkun energias-
ta. Suihkun energian virheen ollessa yksi prosentti suihkun koko energiasta, voidaan sui-
hkun energiajätto hiilikalvoissa jättää kalibraatiovakion A laskemisessa huomiotta erittäin
pienenä.



Kuva 11: 120 MeV hiukkasten energioiden simuloitu hajonta yhden lentoaikaportin hiilikalvon läpäisyn
jälkeen

Sijoittamalla kalibraatiosuoran yhtälöön (9) yhtälön (8) avulla laskettu 240 MeV:in sui-
hkun energiaa vastaava lentoaika sekä sen lentoaikaspektristä saatu piikin kanavaluku saa-
daan suoran vakiotermin A ratkaistua. Esimerkki tästä on laskettu käyttäen ADC1:lle sui-
hkun energialla $E = 240$ MeV laskettua lentoaikaa Δt , ilmaisparin etäisyyttä $s_1 = 2,1412$
m sekä sille määritettyä lentoaikaspektrin piikin paikkaa $ch = 311,7806$:

$$\begin{aligned}
 A = \Delta t - B \cdot ch &= \frac{s_1}{c \sqrt{1 - \frac{c^4 m^2}{(E + c^2 m)^2}}} - B \cdot ch \\
 &= \frac{2,1412 \text{ m}}{0,299792458 \text{ m/ns} \sqrt{1 - \frac{c^4 \cdot (11174,86217 \text{ MeV}/c^2)^2}{(240 \text{ MeV} + c^2 \cdot (11174,86217 \text{ MeV}/c^2))^2}}} - 0,0224 \text{ ns/ch} \cdot 311,7806 \text{ ch} \\
 &= \frac{2,1412 \text{ m}}{0,299792458 \text{ m/ns} \sqrt{1 - \frac{124877544,5 \text{ MeV}^2}{(240 \text{ MeV} + 11174,86217 \text{ MeV})^2}}} - 6,98388544 \text{ ns} \\
 &= 28,03046848 \text{ ns}.
 \end{aligned}$$

Laskussa on käytetty aina mahdollisimman tarkkoja arvoja. Lisäksi laskuissa tarvittiin ^{12}C -ytimen massaa $m = 11174,86217 \text{ MeV}/c^2$, sekä valonnopeutta $c = 299792458 \text{ m/s}$, jotka ovat tämän työn tarkkuuden puitteissa voitu arvioida tarkkoiksi arvoiksi. Muille lentoaikaportteille tulos laskettiin vastaavalla tavalla. Kalibraatiovakiolle A voidaan laskea virhe virheen yleisellä etenemislailalla. Esimerkki tästä on esitetty liitteessä A systeemin ADC1 arvoilla. Lopulliset kalibraatiovakioiden arvot virheineen löytyvät taulukosta 3. Kalibraatiovakion virheanalyysistä voidaan huomata, että suurin yksittäinen virhelähde on suihkun energian epätarkkuus, joka dominoi kalibraatiovakion virhelaskuissakin muiden virhelähteiden vaikutuksen jäädessä melko mitättömäksi.

Taulukko 3: Kalibraatiosuorien vakioiden A arvot

Systeemi	A [ns]
ADC1	$28,1 \pm 0,2$
ADC2	$23,6 \pm 0,2$
ADC3	$1,56 \pm 0,02$

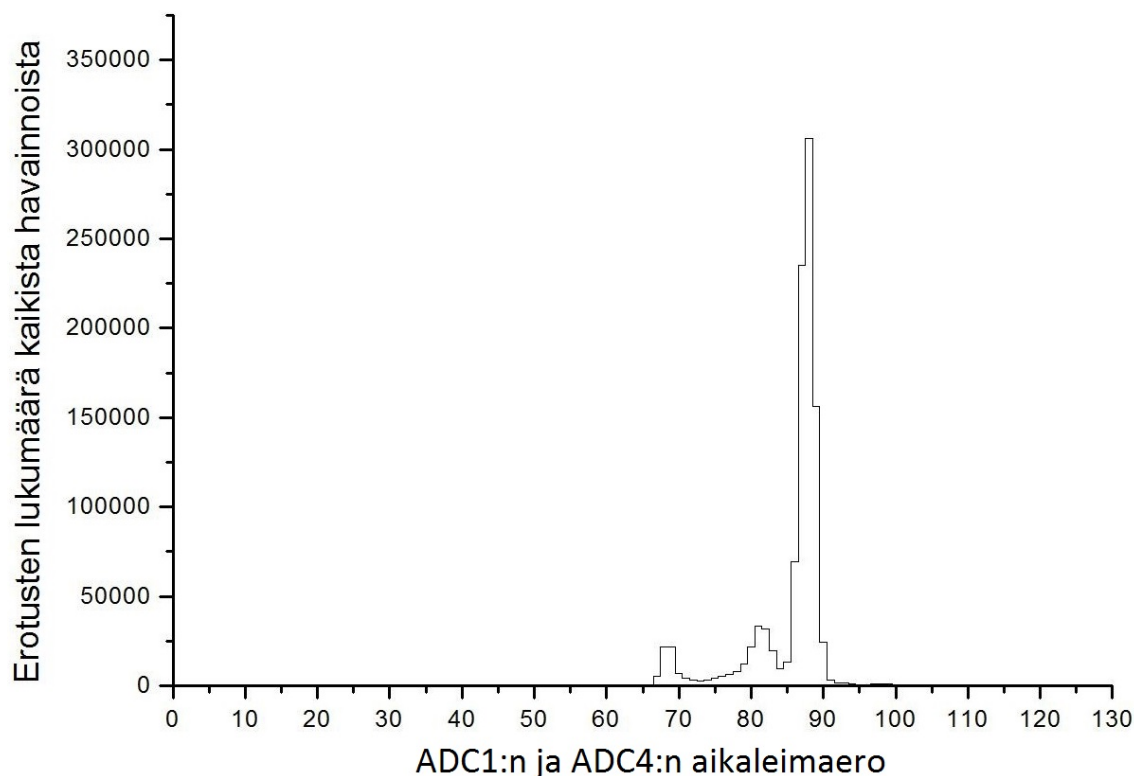
4.2 Systemien offsetit ja koinsidenssiehto

Koinsidenssiperiaate tarkoittaa samaan aikaan tapahtuvien tapahtumien hyväksymistä tai hylkäämistä. Tässä työssä koinsidenssiehtoa käytettiin poistamaan datasta tapahtumia, joita ei havaita sekä pii-ilmaisimessa että tutkittavassa porttiparissa tietyn ajan sisällä. Tällaisia poistettavia huonoja tapahtumia voisivat olla esimerkiksi hiilikalvosta tai kohtion reunoista sironneet hiukkaset, sekä satunnainen taustasäteily. Sironneiden ja mitaussysteemin ylimääräisten osien kanssa vuorovaikuttaneiden hiukkasten energia laskee. Energialtaan poikkeavat hiukkaset vääristäisivät energiajakaumaa, joten koinsidenssiehdon tarkoitus on puhdistaa ja suodattaa dataa. Ennen kuin koinsidenssiehtoa päästiin toteuttamaan, täytyi tutkia hiukkasten aikainformaatiota eli aikaleimoja.

Timestamp eli aikaleima on 14-numeroinen luku, jonka tietokone antaa jokaiselle havainnolle sen havaintohetken mukaan. Yksi luku vastaa 25 nanosekuntia. Koska mittauksiin lisättiin koinsidenssiehto pii-ilmaisimen eli ADC4:n kanssa, täytyi mitaussysteemeistä ensin määrittää mikä oli elektronisista viiveistä ja mittauslaitteiden pienistä eroista johtuva ero samanaikaisissakin aikaleimoissa. Tästä erosta käytetään termiä offset.

Tässä työssä offset määritettiin tutkittavassa porttiparissa ja pii-ilmaisimessa havaittujen toisiaan vastaavien tapahtumien aikaleimojen erotuksena. Vastaavuus määritettiin kirjoittamalla pieni ohjelma, joka etsi mittausdatasta jokaista tutkittavassa porttiparissa tehtyä havaintoa seuraavan ja edellisen ADC4:n aikaleiman arvon. Koska mittausdata oli aikaleimojen mukaisessa järjestyksessä, olivat nämä kaksi ADC4:n aikaleiman arvoa lähimpänä kyseistä havaintoa. Jos porttiparissa havaittu hiukkanen havaittiin myös pii-ilmaisimessa oli sitä vastaava aikaleima jompikumpi näistä.

Saaduista pii-ilmaisimen ja porttiparin aikaleimoista laskettiin erotukset. Erotuksista piirrettiin 2D-kuvaaja, jossa erotus oli x-akselilla ja y-akselilla oli kyseisen eron määrä. Näiden joukossa oli useita virheellisiä lukuja, sillä erotuksia tuli tehtyä myös toisiinsa liittymättömistä tapahtumista. Kuitenkin toisiinsa liittyvien tapahtumien määrä oli paljon suurempi kuin virheellisten. Tällöin kuvaajassa havaittiin piikki tutkittavan porttiparin ja pii-ilmaisimen samanaikaisten havaintojen välisen aikaleima-eron kohdalla. Esimerkki tällaisesta kuvaajasta on kuvassa 12.

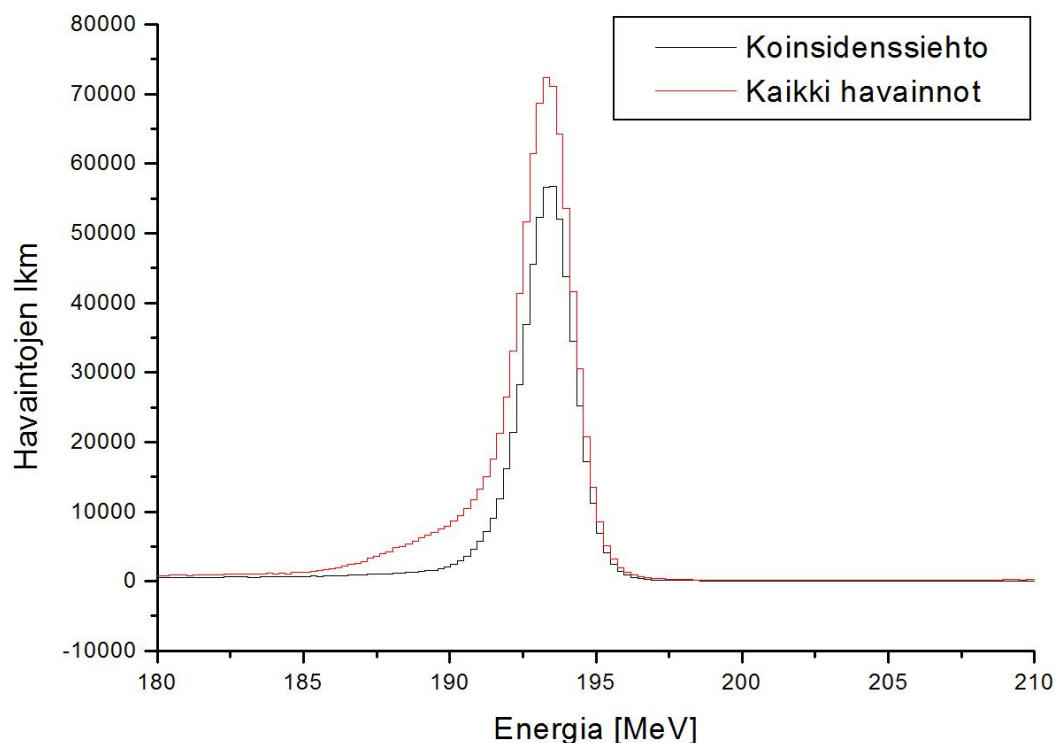


Kuva 12: Offsetin määrittämiseksi piirretty kuvaaja. Tarkasteltavan mittaussysteemin ja pii-ilmaisimen välinen offset saatiin korkeimpaa piikkiä vastaavasta aikaleima-erosta.

Tämän suurimman piikin keskikohta määritettiin. Eri mittausten kohdalla piikki oli kuitenkin hieman eri kohdissa, vaikka tarkasteltava mittaussysteemi pysyi samana. Tämä johtui siitä, että eri mittausten välillä suihkun energia vaihteli, mistä seurasi vaihtelua suihkun hiukkasten nopeuksiin. Tällöin hiukkasilta kului myös eri aika kulkea porttiparilta pii-ilmaisimeen, mikä näkyy aikaleimaerossa. Lisäksi asiaan liittyi myös mittausasetelmasta johtuvaa vaihtelua. Tästä syystä offsetin arvolle täytyi sallia tietty vaihteluväli, jolloin kuitenkin pahimmat poikkeamat saatiin poistettua mittausdatasta. Esimerkiksi ADC1:n havainnolle hyväksymisrajana oli suurimmassa osassa mittauksia 90 ± 30 , kun vertailukohtana oli ADC4 eli pii-ilmaisim.

Offset-datassa kuitenkin havaittiin myös sivupiikkejä päämaksimin lähellä. Nämä näkyvät myös esimerkikuvassa 12. Näitä sivupiikkien arvoja päätyi offsetin vaihteluvälin ansiosta myös hyväksytyjen tapahtumien joukkoon. Niiden kuitenkin todettiin energiatarkastelun avulla olevan käyttökelpoista dataa, sillä offsetin vaihtelusta huolimatta niiden energia vastasi suihkun energiaa.

Koinsidenssiehdon avulla saatiin karsittua hieman poikkeavaa dataa, mikä paransi saadun energiaspektrin muotoa. Energiaspektrin piikin tulisi lopulta noudattaa gaussista jakaumaa ja koinsidenssiehto poistaa energiaspektristä hännän, jolloin jakauman muoto paranee. Esimerkki tästä on kuvassa 13.



Kuva 13: Sama energiaspektri koinssidenssiehdon kanssa (musta) ja ilman (punainen). Koinssidenssiehto paransi energiaspektriä siten, että se noudattaa paremmin gaussista jakaumaa poistamalla siitä esimerkiksi sironneet ja mittaussysteemin ylimääräisten osien kanssa vuorovaikuttaneet hiukkaset.

4.3 Energianmääritys

Koinssidenssiehdosta selvinneille tapahtumille tuli laskea energiat. Tämä tehtiin ensin laskemalla havainnon kanavaluvusta hiukkasen lentoaika osiossa 4.1 määritetyllä lentoaikalibraatiolla ja sitten laskemalla tämän jälkeen hiukkasen energia yhtälöllä (7).

Käytettäessä lineaarista kanavaajaotusta energiaspektrissä saatiin energiapiikki, joka venyi mentäessä kohti suuria energioita huolimatta siitä, että alkuperäinen lentoaikaspektri oli gaussinen. Tämä oli seurausta energian yhtälössä olevasta lentoajan neliöstä. Tällöin lineaarinen jaotus ei antanut haluttua spektrin muotoa. Tämän vuoksi käytetty energiajaotus perustui yksittäisten kanavien avulla laskettujen energioiden muodostamiin energiaväleihin. Tällöin suuremmilla energioilla energiavälien pituus kasvoi. Kun havainto tehtiin, kasvatettiin hiukkasen laskettua energiaa vastaavan energiavälin havaintojen lukumäärää yhdellä. Tuloksena saatiin gaussin jakaumaa noudattavia hyvännäköisiä energiapiikkejä.

4.4 Kohtion kalvojen ja ilmakerrosten simulointi

Mittaustulokset olivat energiaspektrejä. Niitä vastaavat energianarvot saatiin sovittamalla spektreihin gaussin käyrät ja määrittämällä muodostuneen käyrän keskipiste. Näistä tuloksista olisi pystytty laskemaan energianmenetys kohtiassa, mutta tutkimuskohteena oli energiajätö vedessä. Tämän vuoksi energianmenetys kohtion kalvoissa ja ilmakerroksessa tuli huomioida tarkkojen tulosten määrittämiseksi. Tämä tehtiin simulaatio-ohjelma SRIM-2013:lla [11].

Kohtion rakenne esiteltiin kuvassa 7 ja rakenteesta piirrettiin yksinkertainen kaaviokuva kuvaan 8. Kaaviokuvasta nähdään, että suihkun kanssa vuorovaikuttava kohtion osa koostui mitatun paksuuden omaavasta vesikerroksesta, jonka molemmilla puolilla oli piintriittikalvot. Kalvot oli valmistettu päällystämällä piinpala toiselta puolelta 200 nm paksuisella piintriittikerroksella ja etsaamalla piitä piintriittikerrokseen asti. Tällöin saatiin 200 nm paksuiset piintriitti-ikkunat. Tämän vesikohtion molemmilla puolilla oli noin 2 mm paksu normaali-ilmanpaineessa oleva ilmakerros, joiden tarkoitus oli estää vesikohtion kalvoja pullistumasta paine-eron vaikutuksesta. Kohtion muodon ja sen liimauksien johdosta suihku kulki kahden noin 2,4 mm ilmakerroksen läpi. Ilmakerroksen rajaamiseen käytettiin vastaavia piintriittikalvoja kuin vesikerroksenkin. Tällöin suihku kulki yhteensä neljän piintriittikalvon läpi.

Tietyn energian mittaukset koostuivat aina ilman kohtiota, sekä kohtion kanssa tehdystä energian mittauksesta. Näistä saatiin määritettyä suihkun energia ennen kohtiota, sekä sen jälkeen. SRIM:illä simuloitiin kuinka paljon pelkän suihkun energia pieneni sen läpäistessä ensimmäiset kaksi kalvoa ja ilmakerroksen. Tämä vastasi energiaa ennen vesikohtiota. Kohtion kanssa tehdyistä mittauksista taas saatiin vertailukohta, sille mikä energia suihkulla oli sen läpäistyä koko kohtiota. Tämä vastasi kohtion jälkeistä energiaa. Tästä poistettiin kalvojen ja ilmakerroksen vaikutus tekemällä alkuarvaus ja simuloimalla tätä. Tarkentamalla tätä energiaa saadun simulaatiotuloksen perusteella simulointia jatkettiin, kunnes arvauksesta tehty simulaatio vastasi kohtionjälkeistä energiaa.

4.5 Tulokset

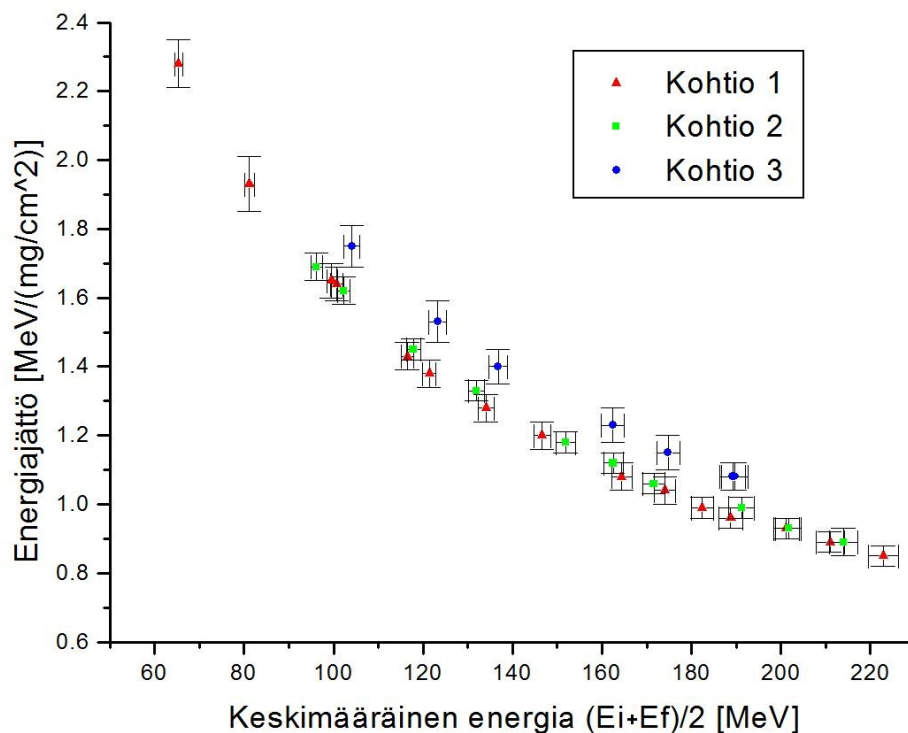
Kun simulaatiot kohtion kalvoissa ja ilmakerroksissa oli saatu tehtyä, voitiin laskea energianmenetys vedessä ΔE . Tämä saatiin energiaerotuksesta $E_i - E_f$. Arvona E_i käytettiin ilman kohtiota mitatun suihkun energiaa, josta oli vähennetty kahteen piintriittikalvoon ja yhteen ilmakerrokseen jäänyt energia. Energiana E_f taas käytettiin kohtion kanssa tehtyä mittausta, johon oli lisätty kohtion kalvoihin ja ilmakerrokseen jäänyt energia. Näiden simulointia käsiteltiin osiossa 4.4.

Energiaeroista ΔE saatiin energiajätö S yksiköissä $\frac{\text{MeV}}{\text{mg/cm}^2}$ jakamalla se kohtion paksuudella d ja veden tiheydellä $\rho = 998,2 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$ [3]. Energianmenetys muuttuu aina suihkun energian muuttuessa, joten energianmenetys S vastaa aina keskimääräistä energianmenetystä sen laskuun käytettyjen energioiden välillä $E_f - E_i$. Koska energianmenetystä S vastaavaa energiaa ei tässä työssä pystytty suoraan määrittämään, käytettiin lineaarisista approksimaatiota, ja asetettiin sitä vastaavaksi energiaksi energioiden keskiarvo $\frac{E_i + E_f}{2}$.

Kokeelliset ^{12}C -isotooppien energiajätöt, niiden laskemiseen käytetyt energiat, sekä niitä vastaavat energioiden keskiarvot löytyvät taulukosta 4. Saaduista arvoista piirrettiin myös kuvaa ja 14.

Taulukko 4: Kokeellisesti määritellyt ^{12}C -hiukkasten energiajätöt S eri kohtionpaksuuksille, niiden laskemiseen käytetyt energiat (E_i ennen kohtiota ja E_f kohtion jälkeen) ja niitä vastaavat energioiden keskiarvot E_{ave} . Energiajätöt laskettiin tarkoilla arvoilla, mutta tähän energiat pyöristettiin 0,1 MeV:in tarkkuuteen.

	E_i [MeV]	E_f [MeV]	E_{ave} [MeV]	S [Mev/mg/cm ²]
Kohtio 1 $d_1 = 0,39$ mm	194,4 ± 1,9	153,7 ± 1,4	174,1 ± 2,4	1,04 ± 0,04
	207,6 ± 2,1	170,0 ± 1,6	188,8 ± 2,7	0,96 ± 0,03
	185,5 ± 1,9	143,4 ± 1,3	164,4 ± 2,3	1,08 ± 0,04
	170,0 ± 1,6	123,2 ± 1,0	146,6 ± 1,9	1,20 ± 0,04
	159,1 ± 1,5	109,1 ± 0,9	134,1 ± 1,7	1,28 ± 0,04
	148,3 ± 1,4	94,6 ± 0,7	121,4 ± 1,5	1,38 ± 0,04
	144,3 ± 1,3	88,7 ± 0,7	116,5 ± 1,4	1,43 ± 0,04
	132,6 ± 1,2	68,8 ± 0,5	100,7 ± 1,3	1,64 ± 0,05
	109,6 ± 1,0	20,9 ± 0,3	65,3 ± 0,9	2,28 ± 0,07
	118,8 ± 1,0	43,6 ± 0,4	81,2 ± 1,0	1,93 ± 0,08
	131,5 ± 1,1	67,8 ± 0,5	99,6 ± 1,2	1,65 ± 0,05
	239,3 ± 2,7	206,4 ± 2,1	222,9 ± 3,4	0,85 ± 0,03
	228,2 ± 2,5	193,8 ± 1,9	211,0 ± 3,1	0,89 ± 0,03
	219,3 ± 2,3	183,0 ± 1,8	201,2 ± 2,9	0,93 ± 0,03
201,7 ± 2,1	163,2 ± 1,5	182,4 ± 2,5	0,99 ± 0,03	
Kohtio 2 $d_2 = 0,57$ mm	194,4 ± 1,9	130,7 ± 1,1	162,5 ± 2,2	1,12 ± 0,03
	185,5 ± 1,8	118,4 ± 1,0	151,9 ± 2,1	1,18 ± 0,03
	170,0 ± 1,6	94,1 ± 0,7	132,0 ± 1,8	1,33 ± 0,03
	159,1 ± 1,5	76,5 ± 0,6	117,8 ± 1,6	1,45 ± 0,04
	148,3 ± 1,4	56,3 ± 0,5	102,3 ± 1,4	1,62 ± 0,04
	144,3 ± 1,3	48,1 ± 0,4	96,2 ± 1,3	1,69 ± 0,04
	239,3 ± 2,7	188,8 ± 1,9	214,0 ± 3,2	0,89 ± 0,03
	228,2 ± 2,4	175,1 ± 1,7	201,7 ± 2,9	0,93 ± 0,03
	219,3 ± 2,5	163,2 ± 1,5	191,2 ± 2,9	0,99 ± 0,03
201,7 ± 2,1	141,5 ± 1,3	171,6 ± 2,4	1,06 ± 0,03	
Kohtio 3 $d_2 = 0,93$ mm	239,7 ± 2,7	139,7 ± 1,3	189,7 ± 2,9	1,08 ± 0,04
	194,4 ± 2,0	52,3 ± 0,4	123,3 ± 2,0	1,53 ± 0,06
	185,5 ± 1,8	22,7 ± 0,3	104,1 ± 1,8	1,75 ± 0,06
	239,3 ± 2,7	139,1 ± 1,2	189,2 ± 2,9	1,08 ± 0,04
	228,2 ± 2,4	121,3 ± 1,0	174,8 ± 2,6	1,15 ± 0,05
	219,3 ± 2,5	105,5 ± 0,9	162,4 ± 2,6	1,23 ± 0,05
201,7 ± 2,0	72,0 ± 0,5	136,8 ± 2,1	1,40 ± 0,05	



Kuva 14: Laskettu energianmenetys keskimääräisen energian $\frac{E_i+E_f}{2}$ funktiona. Tulokset on esitetty kolmelle eri kohtion paksuudelle ($d_1 = 0,39$ mm, $d_2 = 0,57$ mm ja $d_3 = 0,93$ mm).

4.6 Virhenanalyysi

Suurimmat virhelähteet tuloksissa olivat alkuperäisen suihkun energian epätarkkuus, sekä kohtion paksuuden määrittäminen. Muita virhelähteitä olivat mm. lentoaikaporttien välinen etäisyyden epävarmuus, aikakalibraatiosta saatujen kulmakertoimen virhe, lentoaikaporttien hiilikalvoihin menetetty energia, simulaatioista aiheutuneet virheet, sekä data-analyysin eri vaiheissa tehtyjen sovitusten virheet. Virheet ja niiden vaikutukset on esitetty tiivistettynä taulukoissa 5 ja 6.

Taulukko 5: Virhelähteiden vaikutus määritettyyn energiaan

Virhelähde	Suhteellinen vaikutus energiaan [%]
Aikakalibraatio	0,36 - 1,0
Lentoaikaporttien etäisyyden epävarmuus	0,05
Energiajätö kaikissa hiilikalvoissa	0,0011-0,08
Sovitukset	<0,05
Simulaatiovirheet	<0,03
Kohtion ilmassan paksuuden epävarmuus	0,004 - 0,4
Niittriitti-ikkunan paksuuden epätarkkuus	0,0009-0,15

Taulukko 6: Virhelähteiden vaikutus energiajättöön

Virhelähde	Suhteellinen vaikutus energiajättöön [%]
Energian virhe	1,0-1,8
Kohtion paksuuden epätarkkuus	1,7-2,6

Aikakalibraatiossa oletettiin, että lentoaika riippuu kanavaluvusta lineaarisesti. Dataan kuitenkin sovittiin myös toisen asteen polynomi, jonka toisen asteen termin kertoimen suuruusluokka oli ADC:sta riippuen 10^{-9} – 10^{-10} . Tämän perusteella voidaan sanoa, että lineaarinen sovitus antoi luotettavia tuloksia. Kalibraattorin avulla saadun kulmakerroimen suhteelliseksi virheeksi saatiin alle 0,002 prosenttia. Kalibraatiosuoran vakiotermi laskettiin mittaamalla alkuperäisen 240 MeVin suihkun energiaa ja kiinnittämällä lentoaikakalibraatiosuora kulkemaan tämän pisteen kautta. Vakiotermin virhe laskettiin virheen yleisellä etenemislailalla liitteessä A ja sen suhteelliseksi virheeksi saatiin noin 0,6 prosenttia. Kulmakertoimen virheen lisäksi siihen vaikutti lentoaikaporttien etäisyyden epätarkkuus ja alkuperäisen suihkun energian epätarkkuus. Kaikki tässä nimetyt virhelähteet huomioitiin, mutta alkuperäisen energian epätarkkuus osoittautui ainoaksi merkittäväksi virhelähteeksi kalibraatiovakiota laskettaessa.

Lentoaikakalibraation aiheuttama lentoajan virhe tuotti koko energiaskaalassa suurimmillaan energiaan noin 1,3 prosentin suhteellisen virheen. Suurimmalla käytetyllä suihkun energialla virhe oli noin 1,0 prosenttia. Pienillä energioilla lentoaika piteni, jolloin lentoajan virhe ei ollut enää niin merkittävä. Lisäksi energiaan aiheutti virhettä lentoaikaporttien etäisyyden epätarkkuus, jonka lopullinen vaikutus energioiden arvoon oli kuitenkin vain 0,05 prosentin luokkaa suihkun energiasta. Lentoaikaporttien hiilikalvoissa tapahtunut energianmenetys aiheutti myös osaltaan energiaan epätarkkuutta. Kalvoja oli yhteensä kolme ja ADC:sta riippuen suihku läpäisi niistä kaksi tai kolme, jolloin energianarvoon vaikutti energianmenetys yhdessä tai kahdessa kalvossa. Energiamenetyksen vaikutus kasvoi huomattavasti mitä pienemmille energioille siirryttiin, mutta tästä huolimatta kaikissa porteissa yhteensä tapahtunut energianmenetys oli pienempää kuin 0,08 prosenttia koko suihkun energiasta. Käytetyn energiaskaalan puolivälissä sen aiheuttama virhe oli $< 0,015$ prosenttia. Kun suihku läpäisi vähemmän kalvoja oli niiden aiheuttama virhe vielä pienempi.

Virhettä mitattuihin suihkun energioihin aiheutti itse mittausdataan tehtyjen sovitusten virheet, jotka olivat yleisesti luokkaa < 1 keV ja epätarkimmissakin mittauksissa luokkaa < 10 keV. Suurimmillaakin virheet jäivät $< 0,05$ prosenttiin suihkun energiasta. Valtaosassa mittauksista virhe oli vielä huomattavasti pienempi.

Osiossa 4.4 tehnyt simulaatiot suihkun energioista aiheuttivat myös virhettä tuloksiin. Alkuarvaukset tehtiin yhden keV:in tarkkuudella, jolla yleisesti saavutettiin arviolta noin 1-2 keVin tarkkuudella sama tulos simulaation ja kohtion jälkeen mitatun energian välillä. Ero oli vastaavaa suuruusluokkaa kuin samalla energialla tehtyjen simulaatioiden suurin poikkeama toisistaan. Ainoastaan suihkun energia-alueella < 50 MeV jouduttiin yleisemmin tyytymään noin 5 keVin tarkkuuteen, sillä simulaatiotulokset vaihtelivat pienemmällä energioilla enemmän samalla alkuarvauksella tehtyjen eri ajojen välillä. Tämäkin vaikutus jää $< 0,03$ prosenttiin suihkun energiasta. Tähän piti lisätä vielä simulaatiodataan tehdyn sovituksen virhe, joka oli kuitenkin energiasta riippumatta noin 0,5-1,5 keV eli merkityksetön tämän työn puitteissa.

Simulaatioissa virhettä aiheutti lisäksi kohtion muiden osien, kuten piinitriittikalvojen ja ilmakerrosten paksuuden epätarkkuus. Ilmakerroksen paksuuden epätarkkuuden arvion ollessa $\pm 0,1$ mm oli vaikutus energian arvoon suurilla sekä keskisuurilla energioilla pieni. Pienemmillä energioilla vaikutus kasvoi. Esimerkiksi alueella 240-50 MeV sen aiheuttama epätarkkuus oli 0,004-0,08 prosenttia. Pienemmillä energioilla virheen aiheuttama epätarkkuus taas oli 0,15-0,4 prosenttia. Piinitriittikalvon paksuus oli paljon tarkempi, mutta sen virheen vaikutuskin jäi pieneksi. Arvio ± 5 nm aiheutti simuloituun energiaan arvoilla 240-20 MeV 0,0009-0,15 prosentin epätarkkuuden.

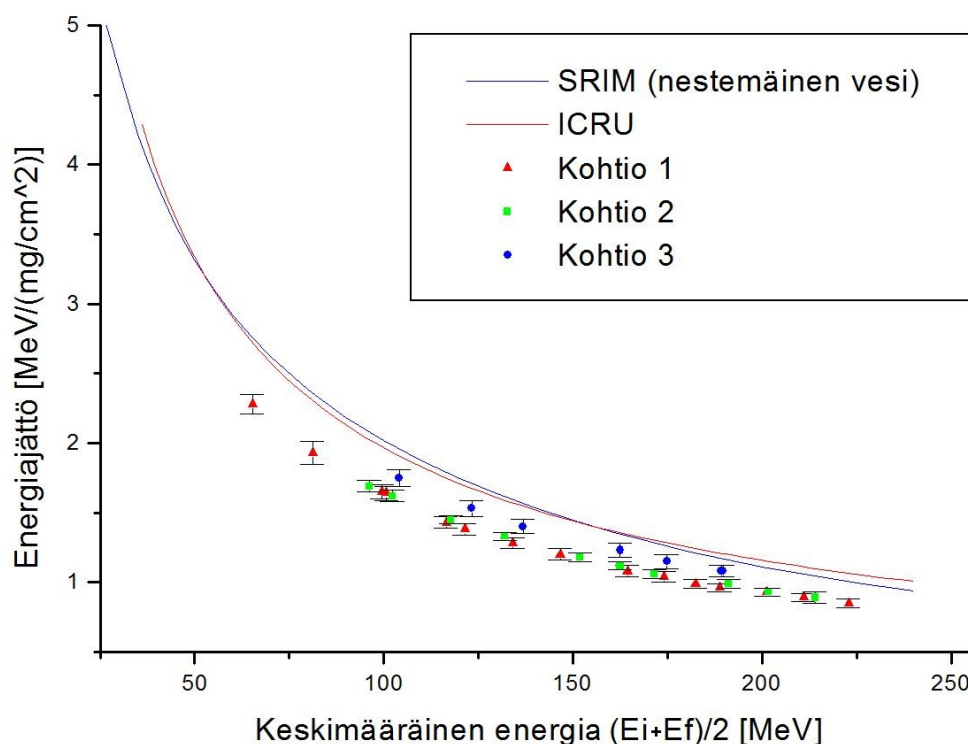
Itse energiäjätön laskussa virhelähdettä aiheutti jo läpikäytyt energian epätarkkuudet ja virheet. Lisäksi suurimpana virhelähteenä oli kohtion paksuuksien epätarkkuus. Kohtion paksuus määritettiin lasermittaussysteemillä, joka kalibroitiin molempina mittauspäivinä uudelleen systemaattisten virheiden minimoimiseksi. Paksuutta mitattiin myös usealta eri kohtion korkeudelta, mutta tällä ei huomattu olevan vaikutusta - eli merkittävää kohtion pullistumista ei havaittu. Kaikkia kohtioita mitattiin myös molempina päivinä, jolloin data oli keskenään vertailukelpoista. Mittausdatasta valittiin useimmiten esiintyvät arvot ja virherajat valittiin siten, että kaikki mittaustulokset sisältyivät virherajojen sisään.

Koska alkuperäisen suihkun energian epätarkkuus, sekä hiilikalvoissa tapahtunut energianmenetys olivat alunperin muodoltaan systemaattista virhettä, vaikuttavat ne samaan tuntemattomaan suuntaan molemmissa energiajätön laskuun käytetyissä energioissa. Tällöin niiden vaikutuksen tulisi kumoutua. Kuitenkin energian epätarkkuuden vaikutus virheeseen oli eri energioille hieman erilainen, sillä se laskettiin eri vaiheissa mm. kasautuneena virheenä tai virheen yleisellä etenemislaila. Tämän takia energiaerotuksen epätarkkuutena huomioitiin energioiden virheiden erotus. Tällöin sen arvo varmasti oli virherajojen sisällä. Myös hiilikalvossa tapahtunut energiajätö riippui energiasta, joten se päätettiin ottaa huomioon, vaikka sen vaikutus olikin pieni. Huomioon otettiin lisäksi sovitus- ja simulaatiovirheet, sillä ne olivat luonteeltaan satunnaisia ja saattoivat kasaantua.

Kohtion paksuuden epätarkkuus aiheutti virheen yleisen etenemislain avulla laskettuna noin 1,7-2,6 prosentin epätarkkuuden lopulliseen energiajätön tulokseen. Vastaavasti energian erilaiset epätarkkuudet ja virheet aiheuttivat yhteensä 1,0-1,8 prosentin epätarkkuuden. Virheen yleisellä etenemislaila laskettuna lopullisen energiajätön virheeksi saatiin 2,1-3,0 prosenttia energiajätöstä. Energiajätöä vastaavana energian arvona käytettiin keskimääräistä energiaa, jolle laskettiin epävarmuus yhdistämällä energioiden virheet neliöllisesti.

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

Tuloksien avulla energiajätöistä piirrettiin jokaista kohtiota vastaavat (energia, energiajätö)-kuvaajat kuvaan 15. Lisäksi kuvassa 15 verrataan saatuja arvoja IRCU:n (International Commission on Radiation Units and Measurements) raportin 73 teoreettisiin arvoihin [13], sekä SRIM ohjelmalla simuloituihin ^{12}C -ionien energiajätöihin nestemäisessä vedessä. Kuvaajaan piirretty käyrät on saatu extrapoloimalla IRCU:n tai SRIM-simulaation datapisteitä sovituksella aE^b , missä a ja b olivat sovitusvakioita.



Kuva 15: Laskettu energianmenetys keskimääräisen energian $\frac{E_i+E_f}{2}$ funktiona. Tulokset on esitetty kolmelle eri kohtion paksuudelle ($d_1 = 0,39$ mm, $d_2 = 0,57$ mm ja $d_3 = 0,93$ mm). Tuloksia verrataan IRCU:n datasta ja SRIM:in simulaatiosta extrapoloituihin käyriin.

Kuvasta 15 on nähtävissä, että vaikka määritetyt tulokset seuraavat muodoltaan IRCU:n ja SRIM:n vastaavia käyriä, jäävät tässä työssä määritetyt energiajätöt vertailukohtia huomattavasti pienemmiksi. Lisäksi nähdään, että kohtion 1 ja kohtion 2 muodostamat käyrät ovat yhtenevät. Sen sijaan kohtion 3 muodostama käyrä ei osu samaan kohtaan, vaan on korkeammalla kuin kaksi muuta käyrää. Kohtioiden 1 ja 2 antamien energiajätöjen voisi olettaa olevan tarkemmin mitattuja niiden yhteneväisyyden perusteella. Tämä oletus aiheuttaisi sen, että kohtio 3 olisi mitattu noin 10 prosenttia liian ohueksi. Kuitenkin kohtion 3 antama energiajätö poikkeaa vain noin 8-11 prosentin verran IRCU:n

energiajättödatasta, kun taas ohuemmillä kohtioilla poikkeama on noin 19-21 prosenttia. Mitattujen energiajättöjen poikkeamat SRIM:n vastaavasta datasta olivat 10-16 prosenttia paksuimmalle kohtiolle ja 17-27 prosenttia ohuille kohtioille.

Täysin tarkkaan ei tämän mittauksen perusteella voida päätellä kumpi energiajättökäyrä on lähempänä oikeaa. Vaikka kohtioiden 1 ja 2 tulokset vaikuttavat luotettavilta niiden yhteneväisyyden perusteella, ei kohtion 3 poikkeavaa tulosta pystytty selittämään millään systemaattisella virheellä, joka ei olisi vaikuttanut myös kohtioiden 1 ja 2 tuloksiin. Lisäksi voisi olettaa, että paksuimman kohtion paksuus olisi ollut helpoin mitata tarkimmin. Selvästi työn suurin epätarkkuus oli juuri kohtioiden paksuuden määrittäminen, mikä piti tehdä ennen kohtion uloimpien kalvojen asentamista. Tämän vuoksi kohtioiden paksuuden tarkistusmittaus olisi ollut hankala toteuttaa mittauksen jälkeen.

Kuitenkin voidaan sanoa, että energiajättö vaikuttaisi olevan merkittävästi pienempi kuin ICRU:n taulukoima energiajättödata. Vastaavia tuloksia on saatu myös aikaisemmin, sillä esimerkiksi energia-alueella 1-6 MeV saadut kokeelliset tulokset hiilen energiajättölle nestemäisessä vedessä poikkeavat noin 20 prosenttia SRIM-ohjelmalla simuloiduista energiajätöistä [13] samaan suuntaan. Kyseisessä kokeessa SRIM-simulaatioiden kohtioina käytettiin vesihöyryä nestemäisen veden sijaan. Tämä ei kuitenkaan vaikuta huomattavasti SRIM-simulaatioiden tuloksiin ja poikkeaman suuruusluokka pysyy merkittävänä.

LÄHTEET

- [1] H. GEISSEL, H. WEICK, C. SCHEIDENBERGER, R. BIMBOT, D. GARDÉS *Experimental studies of heavy-ion slowing down in matter*, Elsevier, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B 195 (2002) 3-54
- [2] SUOMEN SYÖPÄJÄRJESTÖ Cancer.fi viittauspäivä 26.5.2015
- [3] RAIMO SEPPÄNEN, MARTTI KERVINEN, IRMA PARKKILA, LEA KARKELA, PEKKA MERILÄINEN *maol taulukot* , Kustannusosakeyhtiö Otava, Helsinki, 2005
- [4] A.H. WAPSTRA, G. AUDI, C. THIBAUT *The AME2003 atomic mass evaluation* Nuclear Physics A 729 (2003) 129-336, Elsevier, 2003
- [5] JOHN LILLEY *Nuclear Physics Principles and Applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2001.
- [6] JUHANI KANTELE *Handbook of Nuclear Spectrometry*, Academic Press Limited, 1995.
- [7] WILLIAM R. LEO *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer-Verlag, 1994
- [8] P. SIGMUND *Particle Penetration and Radiation effects, General Aspects and Stopping of Swift Charges* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- [9] RANDALL D. KNIGHT *Physics for Scientists and Engineers, A Strategic Approach* Second Edition, Pearson Addison-Wesley, San Francisco, 2008
- [10] MIKKO ROSSI, PANU RAHKILA, HEIKKI KETTUNEN, MIKKO LAITINEN *A Simple Timestamping Data Acquisition System for ToF-ERDA* Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, B (2015), pp. 39-46 DOI
- [11] JAMES F. ZIEGLER *SRIM The Stopping and Range of Ions in Matter*, Simulaatio-ohjelma, versio SRIM-2013.00 2013
- [12] P. SIGMUND, A. SCHINNER, H. PAUL *ICRU Report 73, Stopping of Ions Heavier than Helium* Journal of the ICRU vol. 5 no. 1 (2005)
- [13] J. M. RAHM, W. Y. BAEK, H. RABUS AND H. HOFSSÄSS *Stopping power of Liquid Water for Carbon Ions in the Energy Range Between 1 MeV and 6 MeV* IOPscience, 13 June 2014

A LIITE 1: KALIBRAATIOVAKION A VIRHE

Tässä liitteessä on esitetty yhtälössä (9) esiintyvän vakion A virheen lasku systeemille ADC1. Tämä saadaan laskettua käyttämällä hiili-12-ytimen massaa $m = 11174,86217 \text{ MeV}/c^2$ [4], sekä valonnopeutta $c = 299792458 \text{ m/s}$, jotka ovat tämän työn tarkkuuden puitteissa voitu arvioida tarkoiksi arvoiksi. Lisäksi laskussa on tarvittu suihkun energian arvoa $E = 240,0 \pm 2,4 \text{ MeV}$, sekä sitä vastaavaa systeemille ominaista kanavalukua $ch = 311,78060 \pm 0,01476$. Lisäksi yhtälössä esiintyy hiukkasen kulkema matka $s = 2,1412 \pm 0,0005 \text{ m}$, joka tässä on systeemin lentoaikaporttien välinen etäisyys, sekä jo aikaisemmin laskettua kalibraatiosuoran (9) kulmakerroin $B = 0,0224 \pm 0,00000336458 \text{ ns/kanava}$. Kun nämä sijoitetaan virheen yleisellä etenemislailalla johdettuun kalibraatiovakion A virheyhtälöön saadaan sen virheelle:

$$\begin{aligned} \delta A &= \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial E} \delta E\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial s} \delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial B} \delta B\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial ch} \delta ch\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-c^3 m^2 s}{(E + c^2 m)^3 \left(1 - \frac{c^4 m^2}{(E + c^2 m)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\delta E\right)^2 + \left(\frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{c^4 m^2}{(E + c^2 m)^2}}}\delta s\right)^2 + (-ch \delta B)^2 + (-B \delta ch)^2}. \end{aligned}$$

Selkeyden vuoksi tämä kannattaa laskea osissa, jolloin energian E virheen osuus A :n virheestä on

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial E} \delta E\right)^2 &= \left(\frac{-c^3 \cdot (11174,86217 \text{ MeV}/c^2)^2 \cdot 2,1412 \text{ m}}{(240 \text{ MeV} + c^2 \cdot 11174,86217 \text{ MeV}/c^2)^3 \left(1 - \frac{c^4 \cdot (11174,86217 \text{ MeV}/c^2)^2}{(240 \text{ MeV} + c^2 \cdot 11174,86217 \text{ MeV}/c^2)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2,4 \text{ MeV}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\frac{-(11174,86217 \text{ MeV})^2}{c} \cdot 2,1412 \text{ m}}{(240 \text{ MeV} + 11174,86217 \text{ MeV})^3 \left(1 - \frac{(11174,86217 \text{ MeV})^2}{(240 \text{ MeV} + 11174,86217 \text{ MeV})^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2,4 \text{ MeV}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\frac{-124877544,5 \text{ MeV}^2}{0,299792458 \frac{\text{m}}{\text{ns}}} \cdot 2,1412 \text{ m}}{(240 \text{ MeV} + 11174,86217 \text{ MeV})^3 \left(1 - \frac{124877544,5 \text{ MeV}^2}{(240 \text{ MeV} + 11174,86217 \text{ MeV})^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2,4 \text{ MeV}\right)^2 \\ &= (-0,1695699392 \text{ ns})^2 \\ &= 0,02875396428 \text{ ns}^2. \end{aligned}$$

Vastaavasti matkan s virheen osuus on:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial A}{\partial s}\delta s\right)^2 &= \left(\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{c^4 m^2}{(E+c^2 m)^2}}}\delta s\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{0,299792458\frac{\text{m}}{\text{ns}}\cdot\sqrt{1-\frac{c^4\cdot(11174,86217\text{MeV}/c^2)^2}{(240\text{MeV}+c^2\cdot 11174,86217\text{MeV}/c^2)^2}}}\cdot 0,0005\text{ m}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{0,299792458\frac{\text{m}}{\text{ns}}\cdot\sqrt{1-\frac{(11174,86217\text{MeV})^2}{(240\text{MeV}+11174,86217\text{MeV})^2}}}\cdot 0,0005\text{ m}\right)^2 \\
&= (0,00817633895\text{ ns})^2 \\
&= 0,00006685251437\text{ ns}^2.
\end{aligned}$$

Kulmakertoimen B virheen osuus on:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial A}{\partial B}\delta B\right)^2 &= (-ch\delta B)^2 \\
&= (-311,78060\text{ch}\cdot 0,00000336458\text{ns}/\text{ch})^2 \\
&= (-0,001049010771\text{ns})^2 \\
&= 0,000001100423598\text{ ns}^2.
\end{aligned}$$

Ja kanavaluvun ch virheen osuus on:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial A}{\partial ch}\delta ch\right)^2 &= (-B\delta ch)^2 \\
&= (-0,0224\text{ns}/\text{ch}\cdot 0,01476\text{ch})^2 \\
&= (-0,000330624\text{ ns})^2 \\
&= 0,0000001093122294\text{ ns}^2.
\end{aligned}$$

Kokonaisvirhe saadaan näiden termien summan neliöjuuresta:

δA

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{0,028753964\text{ ns}^2 + 0,000066852514\text{ ns}^2 + 0,0000011004235\text{ ns}^2 + 0,00000010931222\text{ ns}^2} \\
&= 0,1697705114\text{ ns}.
\end{aligned}$$

Osassa laskuista on numeroita lyhennetty selkeyden vuoksi, mutta tulokset laskettiin aina tarkkoilla arvoilla.