Fourier-sarjoista ja -muunnoksesta

Susanna Vähämäki

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2015

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

Tiivistelmä: Susanna Vähämäki, *Fourier-sarjoista ja -muunnoksesta*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 52 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2015.

Tässä pro gradu -tutkielmassa käsitellään Fourier-analyysiä tarkastelemalla Fourier-sarjojen ja -muunnoksen yleisiä tuloksia ja joitakin sovelluksia. Fourier-analyysi on saanut nimensä ranskalaiselta matemaatikko ja fyysikko Joseph Fourier'lta (1768-1830), joka teoksessaan *Théorie analytique de la chaleur* (Analyyttinen lämpöteoria) ratkaisi lämpöyhtälön olettaen, että jokainen jaksollinen funktio voidaan esittää trigonometristen funktioiden sarjana.

Tutkielmassa määritellään aluksi Fourier-sarjojen perusominaisuudet, toisin sanoen, millaiselle funktiolle sarja voidaan muodostaa ja kuinka sen kertoimet lasketaan numeerisesti. Fourier-sarjojen pisteittäistä suppenemista tutkitaan osasummien suppenemisen kautta. Tuloksena saadaan Dirichlet'n lause, jonka mukaan jaksollisen, derivoituvan funktion Fourier-sarja suppenee pisteittäin funktioon. Lisäksi selvitetään, että jaksollisen ja jatkuvan funktion Fourier-sarja Abel- ja Cesàro-summautuu alkuperäiseen funktioon ja saadaan tulos Fourier-sarjojen yksikäsitteisyydestä.

Suppenemisteoria täydentyy, kun Fourier-sarjat määritellään 2π-jaksoisten, neliöintegroituvien funktioiden avaruudessa, $L^2([-\pi,\pi])$. Tämä valinta on luonnollinen, sillä kompleksiset eksponenttifunktiot $e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$ muodostavat avaruuteen $L^2([-\pi,\pi])$ ortonormaalin kannan, jonka avulla jokainen funktio $f \in L^2([-\pi,\pi])$ voidaan esittää lineaariyhdistelmänä

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

missä Fourier-kertoimet c_n saadaan sisätulosta $\langle f, e^{inx}\rangle$.

Funktion f Fourier-muunnos $\mathscr{F}[f] = \widehat{f}$ johdetaan jaksollisen funktion sarjakehitelmästä laajentamalla jakso koko reaaliakselin pituiseksi. Tutkielmassa käsitellään Fourier-muunnosta Lebesgue-avaruuksissa $L^1(\mathbb{R})$ ja $L^2(\mathbb{R})$ sekä Schwartzin avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja osoitetaan esimerkiksi, että funktio f voidaan palauttaa Fourier-muunnoksesta melkein kaikkialla käänteismuunnoksella $\mathscr{F}^{-1}[\widehat{f}]$. Fourier-muunnoksen eräs hyödyllinen ominaisuus on derivoinnin ja konvoluution muuttaminen kertolaskuksi, mistä on erityisesti apua osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa, mikä oli Fourier-sarjojen ja -muunnoksen ensimmäinen sovelluskohde.

Tutkielman lopuksi tutustutaan muutamien eri alojen sovelluksiin; näytetään Fourier-muunnoksen avulla erään jatkuvan funktion ei-missään-derivoituvuus, osoitetaan, että polynomit ovat tiheässä jatkuvien funktioiden joukossa, todistetaan isoperimetrinen epäyhtälö ja ratkaistaan lämpöyhtälö Dirichlet'n ongelman tapauksessa.

Sisältö

Johdanto

Fourier-sarjojen kehitys alkoi kahden fysikaalisen ilmiön, värähtelevän jousen ja lämmönjohtumisen, matemaattisen mallintamisen pohjalta. Jean le Rond d'Alembertin, Daniel Bernoullin, Leonard Eulerin ja Joseph-Louis Lagrangen saavutukset värähtelevän jousen ongelman tutkimisessa 1700-luvulla olivat esityönä Joseph Fourier'n väitteelle, jonka mukaan mikä tahansa funktio voitaisiin esittää trigonometristen funktioiden sarjana. Myöhemmin muun muassa Gustav Lejeune Dirichlet ja Bernhard Riemann tarkensivat Fourier'n tuloksia ja kehittivät Fourier-analyysiä eteenpäin.

Vuonna 1747 Jean le Rond d'Alembert julkaisi *aaltoyhtälön* − osittaisdifferentiaaliyhtälön, joka kuvaa värähtelevän jousen *yksinkertaista, harmonista aaltoliikettä*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Jousi, kuten kitarankieli, on kiinnitetty välin $0 \leq x \leq \ell$ päätepisteisiin. Yhtälössä $u(x,t)$ kuvaa jousen pystysuuntaista poikkeamaa kohdassa x ja ajanhetkellä t, ja kerroin $c > 0$ on liikkeen nopeus, joka riippuu jousen jännityksestä ja tiheydestä. Koska jousi on kiinnitetty pisteisiin 0 ja ℓ, niin osittaisdifferentiaaliyhtälön raja-arvoehdot ovat $u(0,t) = 0 = u(\ell,t)$. Lisäksi on selvitettävä jousen alkuasento ja nopeus hetkellä $t = 0$, eli yhtälön alkuehdot ovat

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),$$

missä f ja g ovat funktioita välillä $[0,\ell]$. Yhtälö voidaan yksinkertaistaa tapaukseen $c = 1$ ja $\ell = \pi$, jolloin se saa muodon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Vuonna 1753 Daniel Bernoulli esitti aaltoyhtälölle ratkaisutavan *seisovien aaltojen* avulla. Aaltoyhtälön ratkaisu on muotoa

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t),$$

missä $\varphi(x)$ on aallon alkuasento ja $\psi(t)$ on ajasta t riippuva kerroin. Aaltoyhtälön lineaarisuuden nojalla ratkaisuja ovat myös tälläisten ratkaisujen kombinaatiot.

Muotoa $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ olevissa ratkaisuissa muuttujat on *separoitu*, jolloin aaltoyhtälö voidaan esittää yksinkertaisemmassa muodossa

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t)$$

ja siten saadaan yhtälö, jonka toinen puoli riippuu ainoastaan muuttujasta t ja toinen muuttujasta x,

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

On siis olemassa vakio λ, jolle pätee

$$\begin{cases} \psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0 \\ \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Jotta yhtälöiden ratkaisut φ ja ψ eroaisivat nollasta, täytyy olla $\lambda < 0$. Siten kirjoitetaan $\lambda = -n^2$, jolloin yleisiksi ratkaisuiksi tulevat

$$\psi(t) = A\cos nt + B\sin nt \quad \text{ja} \quad \varphi(x) = \bar{A}\cos nx + \bar{B}\sin nx.$$

Koska jousi on kiinnitetty kohtiin 0 ja π, niin $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, mistä seuraa, että $\bar{A} = 0$. Jos $\bar{B} \neq 0$, niin n on kokonaisluku. Jos $n = 0$, niin $\varphi(x) = 0$ kaikilla x ja jos $n \leq 1$, niin vakioiden B ja $\bar{B}$ merkkiä vaihtamalla palaudutaan tapaukseen $n \geq 1$. Siten päädytään aaltoyhtälön ratkaisuun

$$u_n(x,t) = (A_n \cos nt + B_n \sin nt)\sin nx \quad \text{kaikille } n \geq 1.$$

Koska aaltoyhtälö on lineaarinen, saadaan ratkaisuehdotukseksi superpositioperiaatteen nojalla ratkaisujen sarja

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \sin nt)\sin nx$$

ja alkuehdoista, $u(x,0) = f(x)$ ja $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, seuraa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \quad \text{ja} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin nx,$$

mihin Bernoulli päätyi tutkimuksessaan. Bernoulli ei kuitenkaan osannut ratkaista kertoimia A_n ja B_n ja siksi monet matemaatikot kritisoivat hänen työtään.

Joseph Fourier (1768-1830) uskoi, että mikä tahansa jaksollinen funktio voitaisiin esittää trigonometristen funktioiden lineaariyhdistelmänä. Fourier esitti ratkaisukaavat sarjan kertoimille vuonna 1822 julkaistussa teoksessaan *Théorie analytique de la chaleur* (Analyyttinen lämpöteoria), jossa hänen ratkaisunsa lämpöyhtälöön perustui funktioiden sarjaesitykseen, joka nykyisin kantaa hänen nimeään.

Fourier-analyysi on kehittynyt laajaksi matematiikan osa-alueeksi ja sillä on sovelluskohteita esimerkiksi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa, lukuteoriassa, todennäköisyysteoriassa, tilastotieteessä, signaalinkäsittelyssä, akustiikassa, optiikassa, röntgenkristallografiassa ja kvanttimekaniikassa. Tässä tutkielmassa esitetään päätuloksia Fourier-sarjoista ja -muunnoksesta sekä tutustutaan muutamiin sovelluksiin.

"Cette remarque est importante, en ce qu'elle fait connaitre comment les fonctions entiérement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples."
Joseph Fourier,
Théorie analytique de la chaleur, 1822.

LUKU 1

Fourier-sarjojen perusominaisuuksista

Tässä luvussa määritellään Fourier-sarja Riemann-integroituvalle funktiolle, muodostetaan ratkaisukaavat Fourier-kertoimille ja tutkitaan esimerkin avulla sarjan osasummien suppenemista. Aluksi annetaan tarvittavia määritelmiä:

1.1. Määritelmiä

MÄÄRITELMÄ 1.1. Funktio f on *jaksollinen*, jos on olemassa vakio P, siten että $f(x+P) = f(x)$ kaikilla x, jotka kuuluvat funktion f määrittelyjoukkoon. Tällöin vakio P ja sen monikerrat kP, $k \in \mathbb{N}$, ovat funktion f *jaksoja*.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Funktio f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ on *paloittain jatkuva*, jos sillä on äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä välillä $[a,b]$ ja jos jokaisessa epäjatkuvuuspisteessä toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa. Jaksollinen funktio on paloittain jatkuva, jos se on paloittain jatkuva jollain jaksonsa mittaisella välillä.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Paloittain jatkuva funktio on Riemann-integroituva jokaisen rajoitetun välin yli määrittelyjoukossaan. Erityisesti, jos funktio f on jaksollinen ja paloittain jatkuva, niin funktion f integraalit jakson P pituisilla väleillä ovat yhtäsuuret:

$$\int_a^{a+P} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^P f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } a \in \mathbb{R}.$$

Muuttujanvaihdolla $\theta = \pi x/P$ jokaisesta $2P$-jaksoisesta funktiosta saadaan 2π-jaksoinen funktio, joten tarkastellaan Fourier-sarjoja käsiteltäessä pääasiassa 2π-jaksoisia funktioita. Esitettävät tulokset ovat kuitenkin yleistettävissä kaikille tarvittavat oletukset toteuttaville jaksollisille funktioille.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Funktio f on *k kertaa jatkuvasti derivoituva*, jos f on jatkuva ja sen derivaattafunktiot $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ ovat olemassa ja jatkuvia. Tällöin merkitään $f \in C^k$ ja jos funktion kaikki derivaatat ovat olemassa ja jatkuvia niin f on C^∞-funktio.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Jos väli $[a,b]$ voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$ siten, että toispuoleiset raja-arvot

$$f(x_{k-1}+) = \lim_{y \to x_{k-1}^+} f(y), \qquad f(x_k-) = \lim_{y \to x_k^-} f(y)$$

ovat olemassa kaikilla $k = 1, \ldots, n$ ja funktio f on jatkuvasti derivoituva jokaisessa osavälissä $[x_{k-1}, x_k]$, niin f on *paloittain jatkuvasti derivoituva*.

1.2. Fourier-sarjojen muodostaminen

Oletetaan, että 2π-jaksoinen, paloittain jatkuva, kompleksi- tai reaaliarvoinen funktio $f(\theta)$ voidaan esittää yksikäsitteisesti funktioiden $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$, $n \in \mathbb{Z}$, sarjakehitelmänä

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\theta}, \quad c_n \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Laskemalla yhteen n:s ja $-n$:s termi saadaan

$$c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta} = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

missä

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad \text{ja} \quad a_0 = c_0 + c_{-0} = 2c_0.$$

Sarja voidaan siten kirjoittaa yhtäpitävästi muotoon

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad a_n, b_n \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Selvitetään kertoimet c_n olettamalla, että sarja $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ suppenee pisteittäin funktioon $f(\theta)$ ja että sarja voidaan integroida termeittäin. Kerrotaan yhtälön (1.1) molemmat puolet funktiolla $e^{-ik\theta}$ ja integroidaan yli jaksonpituisen välin:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta, \quad \text{missä} \tag{1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{kun } n \neq k \\ 2\pi & \text{kun } n = k. \end{cases}$$

Siis yhtälön (1.3) sarjan termit ovat nollia muulloin kuin $n = k$, joten

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi c_k,$$

mistä kertoimille c_n ratkaistaan yhtälö

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Sarjan (1.2) kertoimille a_n ja b_n muodostetaan tästä ratkaisut

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(e^{-in\theta} + e^{in\theta})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(e^{-in\theta} - e^{in\theta})\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

MÄÄRITELMÄ 1.6. Jos f on integroituva, 2π-jaksoinen funktio, niin sen *Fourier-sarja* on

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

missä a_n, b_n ja c_n ovat *Fourier-kertoimia*,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta \ \text{ ja } \ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Tällöin merkitään

$$f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}.$$

Integroituvalle, $2P$-jaksoiselle funktiolle saadaan Fourier-sarja vastaavasti:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/P} \quad \text{tai} \quad f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{P} + b_n \sin\frac{n\pi x}{P}\Big), \quad \text{missä}$$

$$a_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\cos\frac{n\pi x}{P}\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{P}\int_{-P}^{P} f(x)\sin\frac{n\pi x}{P}\,\mathrm{d}x \quad \text{ja}$$

$$c_n = \frac{1}{2P}\int_{-P}^{P} f(x)e^{-in\pi x/P}\,\mathrm{d}x.$$

Huomautus 1.7. Jatkossa mainittaessa Fourier-sarja tai Fourier-kertoimet a_n, b_n tai c_n viitataan määritelmän 1.6 kaavoihin.

Määritelmä 1.8. Fourier-sarjan *osasumma* on

$$S_k(f;\theta) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{k}(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Esimerkki 1.9. Olkoon f 2π-jaksoinen funktio, $f(\theta + 2\pi k) = f(\theta)$, $k \in \mathbb{Z}$, ja

$$f(\theta) = \begin{cases} -1, & -\pi \le \theta < 0 \\ 1, & 0 \le \theta < \pi. \end{cases}$$

Funktio f on paloittain jatkuvana integroituva, joten sillä on olemassa Fourier-sarja. Määritetään funktion f Fourier-kertoimet a_n ja b_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\Big/_{-\pi}^{0} -\frac{1}{n}\sin n\theta + \frac{1}{\pi}\Big/_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin n\theta = 0 \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,\mathrm{d}\theta = -1 + 1 = 0 \quad \text{ja} \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\Big/_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\cos n\theta + \frac{1}{\pi}\Big/_{0}^{\pi} -\frac{1}{n}\cos n\theta = \frac{2 - 2\cos\pi n}{\pi n}. \end{aligned}$$

Kun n on parillinen, niin $b_n = 0$. Kun n on pariton, niin tällöin $n = 2m - 1$, jollain $m \in \mathbb{N}$ ja

$$b_n = \frac{4}{\pi(2m-1)}.$$

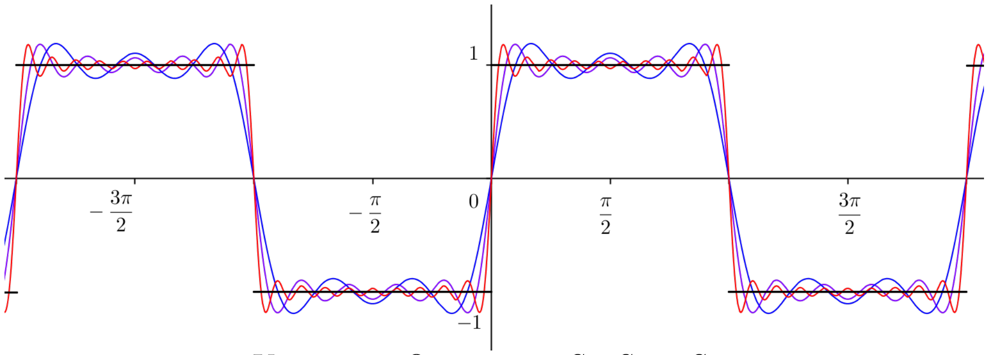
Funktion f Fourier-sarja on siten

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\theta)}{2n-1}.$$

Sarjasta voidaan laskea osasummia, kuten

$$S_3 = \frac{4}{\pi}\sin\theta + \frac{4}{3\pi}\sin 3\theta + \frac{4}{5\pi}\sin 5\theta \quad \text{ja}$$
$$S_5 = \frac{4}{\pi}\sin\theta + \frac{4}{3\pi}\sin 3\theta + \frac{4}{5\pi}\sin 5\theta + \frac{4}{7\pi}\sin 7\theta + \frac{4}{9\pi}\sin 9\theta.$$

Kuvassa 1.1 on esitetty funktion f kuvaaja sekä sen Fourier-sarjan osasummat S_3, S_5 ja S_{10}. Osasummien kuvaajien perusteella näyttää siltä, että sarja suppenee kohti funktiota f pisteissä, joissa f on jatkuva. Epäjatkuvuuspisteissä $\theta = \pi k$ sarja saa arvon $f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta+) + f(\theta-)] = 0$. Luvussa 2 selvitetään tarkemmin millä ehdoilla ja millä tavoin sarja suppenee alkuperäiseen funktioon.



Kuva 1.1. Osasummat S_3, S_5 ja S_{10}.

Huomautus 1.10. Funktio f on *parillinen*, jos $f(x) = f(-x)$ kaikilla x. Jos funktiolle pätee $-f(x) = f(-x)$, niin se on *pariton*. Esimerkissä 1.9 funktio on pariton ja koska kosinifunktio on pariton, niin $f(\theta)\cos n\theta$ on pariton. Tällöin

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \,\mathrm{d}\theta = 0$$

ja Fourier-sarjan kosinitermit häviävät. Vastaavasti jos funktio on parillinen, niin sen Fourier-sarja on kosinisarja, koska $f(\theta)\sin n\theta$ on parillinen ja

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \,\mathrm{d}\theta = 0.$$

1.3. Kosini- ja sinisarja

Määritelmä 1.11. Funktio $f(\theta)$, joka on määritelty 2π-pituisella välillä, kuten $]-\pi,\pi]$, voidaan laajentaa 2π-jaksoiseksi funktioksi koko reaaliakselille määrittelemällä $f(\theta + 2\pi k) = f(\theta)$ kaikilla $\theta \in]-\pi,\pi]$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Jos f on paloittain jatkuva välillä $]-\pi,\pi]$, niin myös sen jaksollinen laajennus on paloittain jatkuva.

Jos funktio f on määritelty välillä $[0,\pi]$ voidaan tehdä puolen jakson laajennus:

Määritelmä 1.12. Paloittain jatkuvan funktion f, $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, *parillinen laajennus* on

$$f_{\text{paril.}} = \begin{cases} f(\theta) & 0 \le \theta \le \pi \\ f(-\theta) & -\pi \le \theta \le 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad f_{\text{paril.}}(\theta + 2\pi k) = f_{\text{paril.}}(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

ja *pariton laajennus*

$$f_{\text{parit.}} = \begin{cases} f(\theta) & 0 < \theta < \pi \\ -f(-\theta) & -\pi < \theta < 0 \\ 0 & \theta = 0, \pm\pi \end{cases} \quad \text{ja} \quad f_{\text{parit.}}(\theta + 2\pi k) = f_{\text{parit.}}(\theta), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

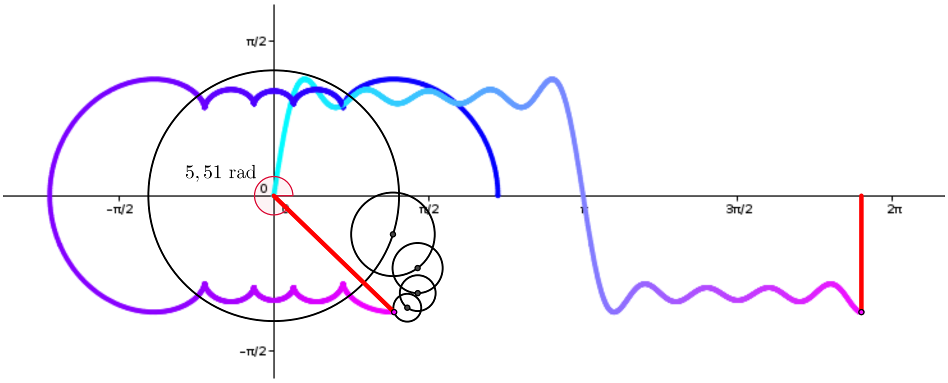
Laajennukset ovat paloittain jatkuvia ja 2π-jaksoisia, joten niille voidaan määrittää Fourier-sarjan kertoimet:

MÄÄRITELMÄ 1.13. Välin $[0, \pi]$ paloittain jatkuvan funktion f *Fourier-kosinisarja* on

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad \text{missä} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, \mathrm{d}\theta$$

ja *Fourier-sinisarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta, \quad \text{missä} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, \mathrm{d}\theta.$$



KUVA 1.2. Episykloidi ja osasumma S_5.

Palataan vielä esimerkkiin 1.9: Kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteen z liike r-säteisen, origokeskisen ympyrän kehällä voidaan parametrisoida muodossa

$$z(t) = re^{i\omega t},$$

missä $\omega = 2\pi/P$ on ympyrän kulmataajuus (kulmanopeus). Jos piste liikkuu ympyrän kehällä, jonka keskipiste kulkee origokeskisen ympyrän kehällä, toisin sanoen *episyklissä*, saadaan vastaavasti

$$z(t) = r_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 e^{i\omega_2 t}.$$

Jos ympyröitä on ääretön määrä ja parametrisoitu käyrä sulkeutuu, niin kulmataajuudet ω_n ovat peruskulmataajuuden ω_0 kokonaislukumonikertoja ja voidaan kirjoittaa

$$z(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t},$$

missä c_n on ympyrän säde, $\omega_0 = 2\pi/P_0$ ja P_0 käyrän jakso. Muodostunut *episykloidi* vastaa siis P_0-jaksoisen funktion Fourier-sarjaa.

Episykloidit tunnettiin kauan ennen Fourier-analyysin syntymistä. Esimerkiksi Klaudios Ptolemaios kuvasi 100-luvulla kirjoitetussa teoksessaan *Almagest* geosentrisen aurinkokuntamallinsa planeettojen liikettä episyklein.

Kuvassa 1.2 on esitetty osasumma $S_5 = \frac{4}{\pi}\sin\theta + \frac{4}{3\pi}\sin 3\theta + \frac{4}{5\pi}\sin 5\theta + \frac{4}{7\pi}\sin 7\theta + \frac{4}{9\pi}\sin 9\theta$ ja sitä vastaava episykloidi, missä n:n ympyrän säde on $4/\pi(2n-1)$ ja kulmataajuus $\omega_n = 2\pi(2n-1)$.

LUKU 2

Fourier-sarjan suppenemisesta

Edellisessä luvussa todettiin, että Riemann-integroituvalla, jaksollisella funktiolla on olemassa Fourier-sarja. Seuraavaksi tutkitaan, millä ehdoin ja millä tavoin sarja suppenee alkuperäiseen funktioon. Fourier-sarjan suppeneminen voidaan käsittää osasumman S_k,

$$S_k = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\theta},$$

suppenemisena raja-arvoon, kun $k \to \infty$. Siten on selvitettävä, millaisen funktion tapauksessa osasummat suppenevat pisteittäin alkuperäiseen funktioon, eli milloin

$$\lim_{k\to\infty} S_k(f;\theta) = f(\theta) \quad \text{kaikilla } \theta.$$

Jos funktio on ainoastaan integroituva, niin ylläoleva ei ole totta kaikilla θ, koska funktiota voidaan muuttaa yksittäisissä pisteissä vaikuttamatta Fourier-sarjan kertoimiin. Funktion jatkuvuus ja jaksollisuus eivät myöskään ole riittäviä vaatimuksia (huomautus 2.28), vaan funktion sileydelle on lisäksi asetettava ehtoja. Dirichlet'n lauseessa 2.11 todistetaan pisteittäinen suppeneminen 2π-jaksoiselle, paloittain derivoituvalle funktiolle.

Myöhemmin näytetään, että jatkuvan ja jaksollisen funktion f Fourier-sarja on Abel- ja Cesàro-summautuva funktioon f, ja että tällöin Fourier-sarja on yksikäsitteinen. Luvussa 3 saadaan tulos Fourier-sarjan tasaiselle ja itseiselle suppenemiselle ja luvussa 4 näytetään, että neliöintegroituvan funktion f Fourier-sarja suppenee L^2-normin suhteen funktioon f.

Määritellään aluksi sarjan suppenemiseen liittyviä käsitteitä ja esitetään kaksi suppenemistestiä:

2.1. Sarjan suppenemisesta

Määritelmä 2.1. Jos funktiojonon $\{f_n\}_0^\infty \in A \subset \mathbb{R}$ muodostama sarja $\sum_0^\infty f_n(x)$ suppenee kaikilla $x \in A$, niin sarja *suppenee pisteittäin* joukossa A. Sarjan suppeneminen on *tasaista*, jos osasummajono $S_k = \sum_0^k f_n$ suppenee tasaisesti, toisin sanoen kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa luonnollinen luku N siten, että

$$|S_k(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \text{kun } k > N \text{ ja } x \in A.$$

Sarja suppenee *itseisesti*, jos $\sum_0^\infty |f_n(x)|$ suppenee.

Lause 2.2 (Dirichlet'n testi). *Olkoon $\{\alpha_n\}$ lukujono, jolle pätee $\alpha_n \geq \alpha_{n+1} > 0$ ja $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Olkoon $\{\beta_n\}$ lukujono, jolle on $\left|\sum_1^N \beta_n\right| \leq M$ kaikilla $N \in \mathbb{N}$. Tällöin sarja $\sum_0^\infty \alpha_n\beta_n$ suppenee.*

Todistus. Katso [**2**, s. 303]. $\square$

SEURAUS 2.3. *Oletetaan, että lukujono* $\{\alpha_n\}$ *suppenee kohti nollaa, kun* $n \to \infty$. *Tällöin sarja* $\sum_1^\infty \alpha_n \cos n\theta$ *suppenee monikertoja* $2\pi k$ *lukuunottamatta kaikilla arvoilla, ja sarja* $\sum_1^\infty \alpha_n \sin n\theta$ *suppenee aina.*

LAUSE 2.4 (Weierstrassin M-testi). *Olkoon* $\{f_n\}_0^\infty$ *funktiojono,* $f_n \in A \subset \mathbb{R}$. *Jos on olemassa vakiojono* $\{M_n\}_0^\infty$, $M_n > 0$ *siten, että (i)* $|f_n(x)| \leq M_n$ *kaikilla* $x \in A$ *ja kaikilla* n, *ja (ii)* $\sum_0^\infty M_n < \infty$, *niin sarja* $\sum_0^\infty f_n$ *on itseisesti ja tasaisesti suppeneva.*

TODISTUS. Katso [**2**, s. 317]. □

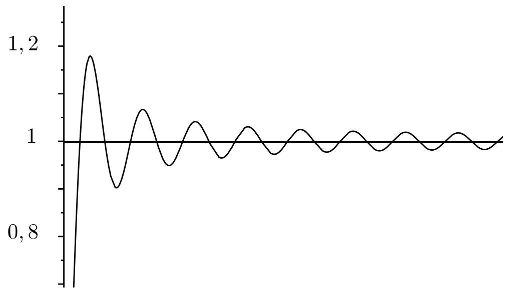
ESIMERKKI 2.5. Olkoon funktio $g(\theta) = |\theta|$, kun $\theta \in]-\pi, \pi[$ ja $g(\theta + 2\pi k) = g(\theta)$. Funktion g Fourier-sarja

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2}$$

suppenee itseisesti ja tasaisesti, koska sarja $\sum_1^\infty \frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2}$ suppenee itseisesti ja tasaisesti Weierstrassin M-testin mukaan, kun valitaan $M_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$.

2.2. Dirichlet'n ydin ja osasummien suppeneminen

Kuvasta 2.1 nähdään, että esimerkin 1.9 porrasfunktion epäjatkuvuuskohtien $\theta = \pi k$ läheisyydessä Fourier-sarjan osasummien S_k kuvaajat poikkeavat selvästi funktion kuvaajasta. *Gibbsin ilmiön* mukaan poikkeama on kaikilla $k \in \mathbb{N}$ noin 9 % funktion hyppäyksestä epäjatkuvuuskohdassa, mikä esimerkin 1.9 tapauksessa tarkoittaa, että osasummien korkein piikki kohoaa lähelle lukua 1,18. Gibbsin ilmiö selittyy *Dirichlet'n ytimellä*, joka määritellään lemmassa 2.7.



KUVA 2.1. Gibbsin ilmiö.

MÄÄRITELMÄ 2.6. Integroituvien, 2π-jaksoisten funktioiden *konvoluutio* välillä $[-\pi, \pi]$ on

$$(f * g)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) g(\theta - \psi) \, d\psi.$$

Funktioiden jaksollisuuden perusteella voidaan tehdä muuttujanvaihdos, jolloin saadaan:

$$(f * g)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \psi) g(\psi) \, d\psi.$$

Konvoluutiolla on seuraavat ominaisuudet:

(*i*) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

(*ii*) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ kaikille $c \in \mathbb{C}$

(*iii*) $f * g = g * f$

(*iv*) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(*v*) $f * g$ on jatkuva

(*vi*) $c_{(f*g)_n} = c_{f_n} c_{g_n}$, missä $c_{(f*g)_n}, c_{f_n}, c_{g_n}$ ovat funktioiden $f * g, f$ ja g Fourier-kertoimet.

LEMMA 2.7. *Fourier-sarjan osasumma S_n voidaan esittää integraalimuodossa*

$$S_n(f;\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) D_n(\theta - \psi)\,\mathrm{d}\psi, \quad \textit{missä} \quad D_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\varphi}$$

on n:s Dirichlet'n ydin.

TODISTUS. Sijoittamalla Fourier-kerroin c_n, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}\,\mathrm{d}\psi$, osasumman yhtälöön saadaan

$$S_n(f;\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{ik(\theta-\psi)}\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)D_n(\theta-\psi)\,\mathrm{d}\psi,$$

kun merkitään $D_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\varphi}$. Fourier-sarjan osasumma $S_n(f;\theta)$ on siis funktion f ja Dirichlet'n ytimen konvoluutio. □

LEMMA 2.8. *Dirichlet'n ytimelle pätee*

$$(i)\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \quad \textit{ja} \quad (ii)\ D_n(\varphi) = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi}-1}.$$

TODISTUS. (*i*) Todistetaan jälkimmäinen yhtäsuuruus, ensimmäinen lasketaan vastaavasti:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi + \underbrace{\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\pi}\cos k\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{=0} = \frac{1}{2}.$$

(*ii*) Kirjoitetaan $D_n(\varphi)$ geometristen sarjojen osasummien summana:

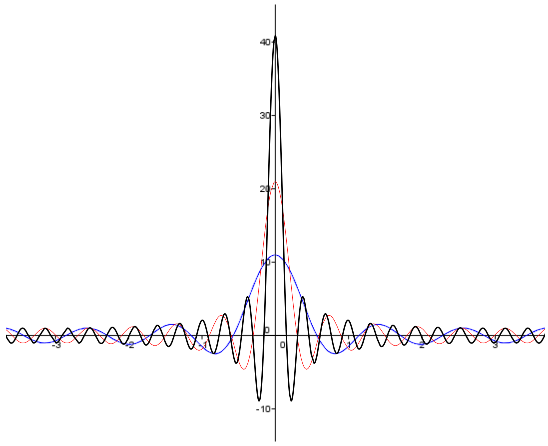
$$D_n(\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\varphi} = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi} + \sum_{k=-n}^{-1} e^{ik\varphi}.$$

Merkitään $e^{ik\varphi} = \omega^k$ ja lasketaan osasummat, jolloin saadaan

$$D_n(\varphi) = \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega} + \frac{\omega^{-n}-1}{1-\omega} = \frac{\omega^{n+1}-\omega^{-n}}{\omega-1} = \frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi}-1}.$$

Toisaalta $D_n(\varphi)$ voidaan esittää sinifunktioiden avulla:

$$D_n(\varphi) = \frac{\omega^{n+1}-\omega^{-n}}{\omega-1} = \frac{\omega^{-n-1/2}-\omega^{n+1/2}}{\omega^{-1/2}-\omega^{1/2}}$$



KUVA 2.2. Dirichlet'n ydin arvoilla $n = 5, 10, 20$.

$$= \frac{\cos(-n\varphi - \varphi/2) + i\sin(-n\varphi - \varphi/2) - \cos(n\varphi + \varphi/2) - i\sin(n\varphi + \varphi/2)}{\cos(-\varphi/2) + i\sin(-\varphi/2) - \cos(\varphi/2) - i\sin(\varphi/2)}$$
$$= \frac{\sin(n\varphi + \varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}. \qquad \square$$

Kuvassa 2.2 on esitetty Dirichlet'n ydin eri arvoilla. Syy Gibbsin ilmiöön on siis Dirichlet'n ytimen aaltoliike x-akselin ympärillä. Myöhemmin tässä luvussa käsiteltävillä Poissonin ja Fejérin ytimillä ei sen sijaan ole vastaavaa ominaisuutta ja jatkuvan funktion f konvoluutio näiden kanssa suppeneekin tasaisesti funktioon f, kuten lauseissa 2.19 ja 2.24 osoitetaan.

LAUSE 2.9 (Besselin epäyhtälö). *Jos f on 2π-jaksoinen, paloittain jatkuva funktio ja c_n on sen Fourier-sarjan kerroin, niin*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \,\mathrm{d}\theta$$

TODISTUS. Lasketaan funktion f ja osasumman S_k erotuksen neliö:

$$\left| f(\theta) - \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\theta} \right|^2 = \left(f(\theta) - \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\theta} \right) \left(\overline{f(\theta)} - \sum_{n=-k}^{k} \overline{c}_n e^{-in\theta} \right)$$
$$= |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-k}^{k} \left(\overline{c}_n f(\theta) e^{-in\theta} + c_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} \right) + \sum_{m,n=-k}^{k} c_m \overline{c}_n e^{i(m-n)\theta}. \tag{2.1}$$

Integroimalla yhtälö (2.1) puolittain yli välin $[-\pi, \pi]$ saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\theta} \right|^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \,\mathrm{d}\theta - \sum_{n=-k}^{k} (\overline{c}_n c_n + c_n \overline{c}_n) + \sum_{n=-k}^{k} c_n \overline{c}_n$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \,\mathrm{d}\theta - \sum_{n=-k}^{k} |c_n|^2.$$

Koska vasemmanpuoleinen integraali ei voi olla negatiivinen, niin

$$\sum_{n=-k}^{k} |c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, \mathrm{d}\theta \quad \text{ja, kun } k \to \infty, \text{ niin}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \, \mathrm{d}\theta. \qquad \square$$

Lauseesta 2.9 seuraa:

LEMMA 2.10 (Riemann-Lebesguen lemma). *Paloittain jatkuvan, 2π-jaksoisen funktion Fourier-kertoimelle c_n on*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \text{ ja siten } \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0.$$

LAUSE 2.11 (Dirichlet'n lause). *Olkoon f 2π-jaksoinen paloittain derivoituva funktio. Funktion f Fourier-sarjan osasummat S_n suppenevat pisteittäin kohti toispuoleisten raja-arvojen keskiarvoa $\frac{1}{2}[f(\theta-)+f(\theta+)]$. Jos f on jatkuva ja paloittain derivoituva, niin osasummat suppenevat kohti funktiota f.*

TODISTUS. On osoitettava, että seuraava erotus lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$.

$$S_n(f;\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-)+f(\theta+)] \tag{2.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi+\theta) D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \; - \; f(\theta-)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{=\frac{1}{2}} - f(\theta+)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [f(\varphi+\theta)-f(\theta-)] D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \; + \; \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [f(\varphi+\theta)-f(\theta+)] D_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Lemman 2.8 (ii)-kohdan perusteella erotus (2.2) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)(e^{i(n+1)\varphi} - e^{-in\varphi})\,\mathrm{d}\varphi, \quad \text{missä}$$

$$g(\varphi) = \begin{cases} \frac{f(\varphi+\theta)-f(\theta-)}{e^{i\varphi}-1} & \text{kun } -\pi \le \varphi < 0 \\ \frac{f(\varphi+\theta)-f(\theta+)}{e^{i\varphi}-1} & \text{kun } \quad 0 < \varphi \le \pi. \end{cases}$$

Funktio g on jatkuva välin $[-\pi,\pi]$ pisteissä, joissa $f(\varphi+\theta)$ on jatkuva ja epäjatkuva, kun $f(\varphi+\theta)$ on epäjatkuva. Lisäksi kohdassa $\varphi = 0$ funktiolla g on olemassa toispuoleiset raja-arvot, sillä l'Hôpitalin säännön mukaan

$$\lim_{\varphi\to 0+} g(\varphi) = \lim_{\varphi\to 0+} \frac{f(\varphi+\theta)-f(\theta+)}{e^{i\varphi}-1} = \lim_{\varphi\to 0+} \frac{f'(\varphi+\theta)}{ie^{i\varphi}} = \frac{f'(\theta+)}{i}$$

ja $\lim_{\varphi\to 0-} g(\varphi) = i^{-1}f'(\theta-)$. Siis g on paloittain jatkuva funktio ja siten integroituva ja sille voidaan muodostaa Fourier-sarja. Riemann-Lebesguen lemman 2.10 mukaan funktion g Fourier-kertoimelle c_n on

$$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0, \text{ missä } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)e^{-in\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Siten erotukselle (2.2) on

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)(e^{i(n+1)\varphi} - e^{-in\varphi})\,\mathrm{d}\varphi = c_{-n-1} - c_n \to 0, \text{ kun } n \to \infty. \qquad \square$$

SEURAUS 2.12 (Fourier-sarjan yksikäsitteisyys). *Jos f ja g ovat derivoituvia, 2π-jaksoisia funktioita, joilla on samat Fourier-kertoimet, niin $f(\theta) = g(\theta)$.*

TODISTUS. Funktioilla on sama Fourier-sarja, joka suppenee lauseen 2.11 nojalla pisteittäin funktioon f ja toisaalta funktioon g, joten $f(\theta) = g(\theta)$ kaikilla θ. $\square$

ESIMERKKI 2.13. Esimerkin 2.5 funktio g, $g(\theta) = |\theta|$, kun $|\theta| < \pi$ ja $g(\theta + 2\pi k) = g(\theta)$, on paloittain derivoituva ja jatkuva kaikilla θ. Siten lauseen 2.2 perusteella sen Fourier-sarja suppenee funktioon g eli

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2} = g(\theta) = |\theta|.$$

Sijoittamalla $\theta = 0$ saadaan sarjakehitelmä luvulle $\pi^2/8$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Tästä voidaan edelleen johtaa *Baselin ongelman* ratkaisu eli sarjan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ summa:

$$\begin{aligned}
S &:= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2}\cdots\right) \\
&= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}, \text{ joten}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Jos f on paloittain derivoituva funktio välillä $[0, \pi]$, niin sen parillinen ja pariton laajennus ovat paloittain derivoituvia koko reaalilukujen joukossa. Jos $f(0) = f(0+)$ ja $f(\pi) = f(\pi-)$, niin parillinen laajennus on jatkuva kohdissa 0 ja π. Pariton laajennus on näissä pisteissä epäjatkuva, jos f ei saa pisteissä arvoa nolla. Soveltamalla lausetta 2.11 parittoman ja parillisen laajennuksen tapaukseen saadaan seuraava tulos:

LAUSE 2.14. *Olkoon f paloittain derivoituva funktio välillä $[0, \pi]$. Funktion f Fourier-kosinisarja ja -sinisarja suppenevat arvoon $\frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$ kaikilla $\theta \in]0, \pi[$. Kosinisarja suppenee arvoon $f(\theta+)$, kun $\theta = 0$ ja arvoon $f(\pi-)$, kun $\theta = \pi$. Sinisarja suppenee molemmissa pisteissä nollaan.*

2.3. Poissonin ydin ja Abel-summautuvuus

MÄÄRITELMÄ 2.15. Kompleksilukujen sarja $\sum_0^\infty z_k$ on *Abel-summautuva* lukuun s, jos kaikille $0 \leq r < 1$ sarja

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k \quad \text{suppenee ja} \quad \lim_{r\to 1-} A(r) = s.$$

ESIMERKKI 2.16. Sarja $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k(k+1) = 1-2+3-4+5-\ldots$ Abel-summautuu lukuun $1/4$, sillä funktiolla

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad |x| < 1,$$

on Taylorin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k = 1 - 2x + 3x^2 + \ldots, \quad \text{joten}$$

$$\lim_{r\to 1-} A(r) = \lim_{r\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{(1+r)^2} = \frac{1}{4}.$$

MÄÄRITELMÄ 2.17. Funktiolle f ja sen Fourier-sarjalle $\sum_{-\infty}^\infty c_n e^{in\theta}$ määritellään vastaavasti Abel-summa

$$A_r f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta}.$$

Koska funktio f ja kertoimet c_n ovat rajoitettuja, niin sarja $A_r f(\theta)$ suppenee itseisesti ja tasaisesti kaikilla $0 \leq r < 1$. Nyt

$$A_r f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} c_n e^{in\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) e^{-in\psi} \, \mathrm{d}\psi \right) e^{in\theta}$$

ja tasaisesta suppenemisesta seuraa

$$A_r f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\psi)} \right) \mathrm{d}\psi.$$

Sarja $A_r f(\theta)$ on funktion f ja *Poissonin ytimen*, $P_r(\varphi)$, konvoluutio

$$A_r f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) P_r(\theta - \psi) \, \mathrm{d}\psi = (f * P_r)(\theta), \text{ missä } P_r(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

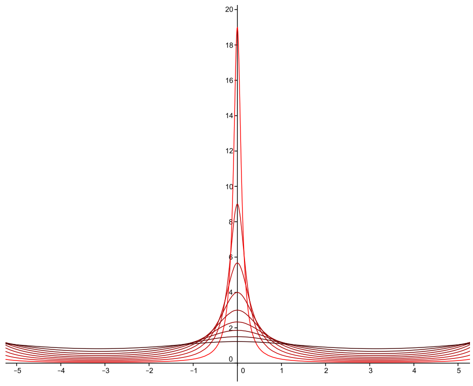
LEMMA 2.18. (*i*) *Poissonin ytimelle pätee*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} P_r(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} P_r(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}.$$

(*ii*) *Sarjalla on suljettu muoto*

$$P_r(\varphi) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}, \quad 0 \leq r < 1.$$

(*iii*) *Lisäksi kaikilla* $\delta > 0$ *ja* $\delta \leq |\varphi| \leq \pi$, $P_r(\varphi)$ *suppenee tasaisesti nollaan, kun* $r \to 1-$.



KUVA 2.3. Poissonin ydin arvoilla $r = i/10$, $i = 1, \dots, 9$.

TODISTUS. (i)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

koska $P_r(\varphi)$ suppenee tasaisesti, niin summauksen ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{0} r^n \cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}.$$

Vastaavasti $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 1/2$.
(ii) Jakamalla Poissonin ydin kahteen geometriseen sarjaan saadaan

$$\begin{aligned} P_r(\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\varphi} = \frac{1}{1-re^{i\varphi}} + \frac{re^{-i\varphi}}{1-re^{-i\varphi}} \\ &= \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}. \end{aligned}$$

(iii) Olkoon $\delta > 0$ ja $\delta \le |\varphi| \le \pi$. Kohdan (ii) perusteella $P_r(\varphi) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}$. Nyt

$$1 + r^2 - 2r\cos\varphi = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\varphi),$$

joten jos $1/2 \le r \le 1$, niin $1 + r^2 - 2r\cos\varphi \ge a_\delta > 0$. Tällöin

$$P_r(\varphi) \le \frac{1-r^2}{a_\delta}, \quad \text{kun } \delta \le |\varphi| \le \pi \quad \text{ja} \quad P_r(\varphi) \to 0, \text{ kun } r \to 1-. \qquad \square$$

LAUSE 2.19. *Olkoon f 2π-jaksoinen ja paloittain jatkuva funktio. Tällöin funktion Fourier-sarja on Abel-summautuva keskiarvoon $\frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$,*

$$\lim_{r\to 1-} A_r f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

kaikilla θ. Jos f on jatkuva, niin $A_r f$ suppenee tasaisesti funktioon f, kun $r \to 1-$.

TODISTUS. Olkoon $\epsilon > 0$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että $|f(\theta+\varphi) - f(\theta+)| < \epsilon$, kun $0 < \varphi < \delta$, ja $|f(\theta+\varphi) - f(\theta-)| < \epsilon$, kun $-\delta < \varphi < 0$. $P_r(\varphi) \ge 0$ kaikilla $\varphi \in [-\pi, \pi]$, ja paloittain jatkuva, 2π-jaksoinen funktio f on rajoitettu, toisin sanoen on olemassa $B > 0$ siten, että $|f(\theta)| \le B$ kaikilla $\theta \in [-\pi, \pi]$. Tällöin lemman 2.18 nojalla

$$\begin{aligned}
&\left|A_r f(\theta) - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\varphi)P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]\right| \\
&\quad \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(\varphi)\big|f(\theta+\varphi) - f(\theta-)\big|\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(\varphi)\big|f(\theta+\varphi) - f(\theta+)\big|\,\mathrm{d}\varphi \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\varphi)\big|f(\theta+\varphi) - f(\theta-)\big|\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(\varphi)\big|f(\theta+\varphi) - f(\theta-)\big|\,\mathrm{d}\varphi \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta} P_r(\varphi)\big|f(\theta+\varphi) - f(\theta+)\big|\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} P_r(\varphi)\big|f(\theta+\varphi) - f(\theta+)\big|\,\mathrm{d}\varphi \\
&\quad < \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\varphi)\,\big[\big|f(\theta+\varphi)\big| + \big|f(\theta-)\big|\big]\,\mathrm{d}\varphi \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} P_r(\varphi)\,\big[\big|f(\theta+\varphi)\big| + \big|f(\theta+)\big|\big]\,\mathrm{d}\varphi \\
&\quad \le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{B}{\pi}\int_{\delta\le|\varphi|\le\pi} P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&\quad = \epsilon + \frac{B}{\pi}\int_{\delta\le|\varphi|\le\pi} P_r(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \quad \to \epsilon, \quad \text{kun } r \to 1- .
\end{aligned}$$

Jos $f(\theta)$ on jatkuva, niin se on tasaisesti jatkuva välillä $[-\pi, \pi]$ ja siten jaksollisuuden nojalla tasaisesti jatkuva kaikilla $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin voidaan valita $\delta = \delta_\epsilon$ kaikille θ, mistä seuraa tasainen suppeneminen $A_r f(\theta) \to f(\theta)$, kun $r \to 1-$. □

2.4. Fejérin ydin ja Cesàro-summautuvuus

MÄÄRITELMÄ 2.20. Kompleksilukujen z_k muodostama sarja $\sum_0^\infty z_k$ on *Cesàro-summautuva*, jos sen n:s Cesàro-summa σ_n,

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k, \qquad \text{missä } s_k \text{ on sarjan } k\text{:s osasumma},$$

suppenee, kun $n \to \infty$.

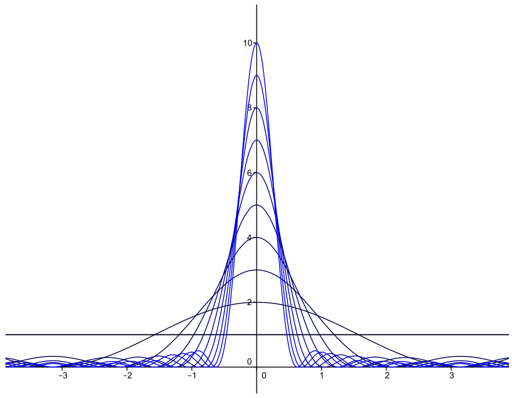
ESIMERKKI 2.21. Sarjan $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k = 1-1+1-1+\cdots$ osasummat muodostavat jonon $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$, jolla ei ole raja-arvoa. Sarjalle voidaan kuitenkin laskea Cesàro-summa σ: Jos n on pariton, niin

$$\sigma_n = \frac{1+0+\cdots+1+0}{n} = \frac{n-1}{2n} \to \frac{1}{2}, \qquad \text{kun } n \to \infty$$

ja jos n on parillinen, niin

$$\sigma_n = \frac{1+0+\cdots+1}{n} = \frac{n+2}{2n} \to \frac{1}{2}, \qquad \text{kun } n \to \infty,$$

joten $\sigma = 1/2$.



KUVA 2.4. Fejérin ydin arvoilla $n = 1, \ldots, 10$.

MÄÄRITELMÄ 2.22. Fourier-sarjan n:s Cesàro-summa on

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f).$$

Koska Fourier-sarjan osasummalle on $S_n(f) = f * D_n$, niin saadaan

$$\sigma_n(f;\theta) = (f * F_n)(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta+\varphi)F_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

missä $F_n(\varphi)$ on n:s *Fejérin ydin*,

$$F_n(\varphi) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(\varphi).$$

LEMMA 2.23. *(i) Fejérin ytimelle on*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F_n(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}.$$

(ii) Fejérin ytimellä on esitys

$$F_n(\varphi) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(n\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}.$$

(iii) Kaikilla $\delta > 0$, $\delta \le |\varphi| \le \pi$, $F_n(\varphi)$ *suppenee tasaisesti nollaan, kun* $n \to \infty$.

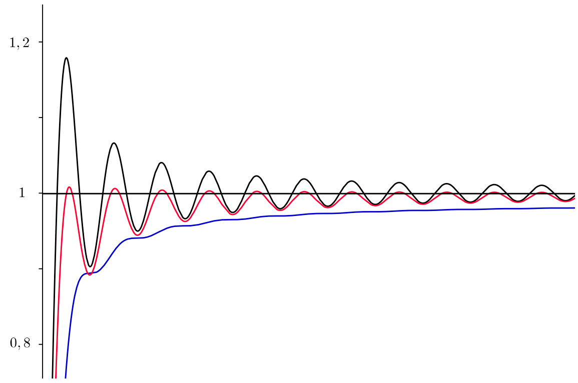
LAUSE 2.24. *Jos f on paloittain jatkuva ja 2π-jaksoinen funktio, niin sen Fourier-sarja on Cesàro-summautuva keskiarvoon* $\frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta-) + f(\theta+)]$$

kaikilla θ. Jos f on jatkuva, niin $\sigma_n f \to f$ tasaisesti, kun $n \to \infty$.

TODISTUS. Koska $F_n(\varphi) \ge 0$ kaikilla $\varphi \in [-\pi, \pi]$ ja Fejérin ytimellä on lemman 2.23 (i)- ja (iii)-kohtien mukaan Poissonin ytimen kaltaiset ominaisuudet, niin todistus vastaa lauseen 2.17 todistusta, kun vaihdetaan rajankäynniksi $n \to \infty$. $\square$

SEURAUS 2.25. *Jos f on jatkuva, 2π-jaksoinen funktio, jolle $c_n = 0$ kaikilla n, niin $f(\theta) = 0$ kaikilla θ.*



KUVA 2.5. Abel-summa $A_{0,995}$, $n = 50$, Cesàro-summa σ_{50} ja osasumma S_{50} esimerkin 1.9 porrasfunktiolle.

TODISTUS. Funktion osasummat ja siten Cesàro-summat ovat nollia, joten seuraus saadaan lauseesta 2.24. □

SEURAUS 2.26 (Fourier-sarjan yksikäsitteisyys). *Jos f ja g ovat jatkuvia, 2π-jaksoisia funktioita, joilla on samat Fourier-kertoimet, niin $f = g$ (vrt. seuraus 2.12).*

TODISTUS. Jatkuvalle, 2π-jaksoiselle funktiolle $f - g$ on $(f-g)(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$ kaikilla θ ja sen Fourier-kerroin $c_n = 0$ kaikilla n, joten seurauksen 2.25 perusteella $f = g$. □

Seuraavan lauseen mukaan trigonometriset polynomit $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ ovat *tiheässä* jatkuvien, 2π-jaksoisten funktioiden avaruudessa:

LAUSE 2.27 (Fejérin lause). *Jos f on jatkuva, 2π-jaksoinen funktio, niin sitä voidaan approksimoida tasaisesti trigonometrisellä polynomilla. Toisin sanoen, jos $\epsilon > 0$, niin on olemassa trigonometrinen polynomi T siten, että*

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon \quad \textit{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

TODISTUS. Koska osasummat ja siten Cesàro-summat ovat trigonometrisiä polynomeja, niin väite seuraa lauseesta 2.24. □

Fejérin lauseen avulla näytetään luvussa 4, että trigonometriset polynomit ovat tiheässä neliöintegroituvien funktioiden avaruudessa ja luvussa 6 todistetaan Weierstrassin approksimaatiolause, joka antaa vastaavan tuloksen polynomeille ja kaikille jatkuville funktioille.

Kuvassa 2.5 on esitetty Abel-summa, Cesàro-summa ja osasumma esimerkin 1.9 funktiolle, kun $n = 50$. Kuten nähdään Abel- ja Cesàro-summilla ei ole Gibbsin ilmiötä, koska Poissonin ydin tasoittaa osasummaa kertoimella $r^{|n|}$ ja vastaavasti Fejérin ydin keskiarvoistaa osasumman.

HUOMAUTUS 2.28. Poissonin ydin ja Fejérin ydin ovat *hyviä ytimiä* (engl. good kernels), koska niillä on lemmoissa 2.18 ja 2.23 esitetyt ominaisuudet. Sen sijaan

Dirichlet'n ydin ei ole hyvä ydin, sillä

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\varphi)| \to \infty, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Jos Dirichlet'n ydin olisi hyvä ydin, niin sillä olisi lauseita 2.19 ja 2.24 vastaava tulos, toisin sanoen funktion f Fourier-sarjan osasummat suppenisivat funktioon f pisteissä, joissa f on jatkuva. Paul du Bois-Reymond osoitti kuitenkin ensimmäisenä (v. 1873), että on olemassa jatkuva, jaksollinen funktio, jonka Fourier-sarja hajaantuu jossain pisteessä.

LUKU 3

Fourier-sarjan derivointi ja integrointi

Fourier-sarjojen eräs tärkeä sovellusala on osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen, joten määritetään seuraavaksi ehdot Fourier-sarjan derivoinnille ja integroinnille.

LAUSE 3.1. *Olkoon f 2π-jaksoinen k-kertaa derivoituva funktio. Olkoot c_n ja $c_n^{(k)}$ funktioiden f ja $f^{(k)}$ Fourier-kertoimet. Tällöin*

$$c_n^{(k)} = (in)^k c_n.$$

TODISTUS. Näytetään, että $c'_n := c_n^{(1)} = inc_n$. Osittaisintegroimalla kertoimen c'_n määritelmä saadaan

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\Big/_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(-ine^{-in\theta})\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\cos n\pi\,\underbrace{(f(\pi)-f(-\pi))}_{=0} + in\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = inc_n. \end{aligned}$$

Väite seuraa induktiolla. □

SEURAUS 3.2. *Olkoon f 2π-jaksoinen ja k kertaa derivoituva funktio. Jos $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$ on funktion f Fourier-sarja, niin*

$$f^{(k)}(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} (in)^k c_n e^{in\theta} \quad \textit{kaikilla } \theta.$$

TODISTUS. Lauseen 2.11 nojalla $f^{(k)}$ on Fourier-sarjansa summa kaikilla θ. Derivaattafunktion Fourier-sarjan yhtälö seuraa lauseesta 3.1. □

MÄÄRITELMÄ 3.3. Jos f on paloittain jatkuva, 2π-jaksoinen funktio, niin sen *primitiivi* $F(\theta) = \int_0^\theta f(\varphi)\, d\varphi$ on jaksollinen, vain kun

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = F(\pi) - F(-\pi) = 0,$$

toisin sanoen, kun funktion f Fourier-sarjan vakiotermi c_0 on nolla.

LAUSE 3.4. *Olkoon f 2π-jaksoinen ja paloittain jatkuva funktio, jonka Fourier-kertoimet ovat c_n tai a_n ja b_n. Oletetaan, että $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$. Jos F on jatkuva, paloittain derivoituva funktio siten, että $F' = f$ pisteissä, joissa f on jatkuva, niin*

$$F(\theta) = C_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{in\theta} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin n\theta - \frac{b_n}{n}\cos n\theta\right),$$

missä C_0 on funktion F keskiarvo välillä $[-\pi,\pi]$.

TODISTUS. Koska
$$F(\theta+2\pi)-F(\theta)=\int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=2\pi c_0=0,$$
niin F on 2π-jaksoinen. Siten lauseen 2.11 perusteella F on Fourier-sarjansa summa kaikkialla. Lauseen 3.1 nojalla sen Fourier-kertoimille C_n on $C_n=c_n/in$ kaikilla $n\neq 0$. Vastaavasti $A_n=-b_n/n$ ja $B_n=a_n/n$, $n\neq 0$. □

HUOMAUTUS 3.5. Jos funktion f Fourier-sarjan vakiotermille on $c_0\neq 0$, niin lausetta 3.4 sovelletaan funktioon $F(\theta)-c_0\theta$.

ESIMERKKI 3.6. Esimerkin 1.9 funktio $f(\theta)=\begin{cases}-1, & -\pi<\theta<0\\ 1, & 0<\theta<\pi\end{cases}$ on paloittain jatkuva ja sen integraalifunktio on esimerkin 2.5 funktio $g(\theta)=|\theta|$, $|\theta|<\pi$. Funktion g Fourier-sarja saadaan siten lauseen 3.4 avulla:
$$g(\theta)=\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,\mathrm{d}\theta+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)\theta)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2}.$$
Funktion g integraalifunktiolle G on
$$G(\theta)-c_0\theta=\frac{1}{2}|\theta|\theta-\frac{\pi}{2}\theta=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\theta)}{(2n-1)^3},$$
joten
$$G(\theta)=\frac{\pi}{2}\theta-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\theta)}{(2n-1)^3}.$$

Lauseen 3.1 avulla saadaan tulos koskien Fourier-sarjan tasaista ja itseistä suppenemista:

3.1. Fourier-sarjan tasainen ja itseinen suppeneminen

LAUSE 3.7. *Jos f on 2π-jaksoinen, jatkuva ja paloittain jatkuvasti derivoituva funktio, niin sen Fourier-sarja on itseisesti ja tasaisesti suppeneva.*

TODISTUS. Olkoot c_n ja c'_n funktioiden f ja f' Fourier-kertoimet. Lauseen 3.1 mukaan $c_n=c'_n/in$, kun $n\neq 0$, joten
$$|c_n|\leq\frac{1}{2}(|c'_n|^2+|n|^{-2}).$$
Koska f' on paloittain jatkuva, niin Besselin epäyhtälön mukaan sarja $\sum|c'_n|^2$ suppenee. Koska myös sarja $\sum_{-\infty}^{\infty}|n|^{-2}$ suppenee, niin $\sum|c_n|$ suppenee. Nyt $|c_ne^{in\theta}|=|c_n|$, joten funktion f Fourier-sarja $\sum c_ne^{in\theta}$ suppenee itseisesti. Lisäksi, koska $\sum|c_n|<\infty$, niin Weierstrassin M-testin 2.4 nojalla Fourier-sarja suppenee tasaisesti. □

LUKU 4

Fourier-sarjat ja $L^2([-\pi, \pi])$ -avaruus

Luvussa 1 määriteltiin Fourier-sarja integroituvalle, jaksolliselle funktiolle. Perustellaan määrittely samaistamalla funktiot lineaariavaruuden vektoreihin, jotka voidaan esittää summana ortonormaalin kannan avulla. Tässä luvussa osoitetaan, että joukko $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ on ortonormaali kanta neliöintegroituvien funktioiden avaruudelle $L^2([-\pi, \pi])$, toisin sanoen jokaiselle funktiolle $f \in L^2([-\pi, \pi])$ on

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

missä kertoimet c_n saadaan sisätulosta $\langle f, e^{inx} \rangle$ ja yhtäsuuruus tarkoittaa sarjan suppenemista L^2-normissa.

4.1. Lineaariavaruuden määritelmiä

MÄÄRITELMÄ 4.1. Kunnan F joukko V varustettuna yhteen- ja kertolaskuoperaatioilla on *vektori-* eli *lineaariavaruus*, jos se toteuttaa ehdot 1-9 kaikilla vektoreilla a, b, $c \in V$ ja skalaareilla α, $\beta \in F$:

(1) $a + b \in V$

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(3) $a + b = b + a$

(4) on olemassa nolla-alkio $\mathbf{0}$, jolle $a + \mathbf{0} = a$

(5) jokaiselle vektorille a löytyy vasta-alkio $-a$, jolle $a + (-a) = \mathbf{0}$

(6) $\alpha a \in V$

(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

(8) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

(9) $\mathbf{1} \cdot a = a$, missä $\mathbf{1}$ on kunnan F neutraalialkio.

ESIMERKKI 4.2. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ skalaarikuntanaan $\mathbb{R}$ ja n-uloitteinen kompleksiavaruus $\mathbb{C}^n$ skalaarikuntanaan $\mathbb{C}$ ovat lineaariavaruuksia.

Kun lineaariavaruuteen liitetään sisätulon käsite, voidaan esimerkiksi määrittää avaruuden alkion normi tai alkioiden välinen kulma ja etäisyys. Euklidisessa avaruudessa määritellään *sisätulo* asettamalla $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, vektorin $x \in \mathbb{R}^n$ *normi* $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ ja vektorien x ja y etäisyys eli *metriikka* $d(x, y) = \|x - y\|$. Vektorilla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on esitys $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $x_i = \langle x, e_i \rangle$, missä vektorit e_i muodostavat *ortonormaalin kannan* avaruuteen $\mathbb{R}^n$, toisin sanoen $\langle e_j, e_k \rangle = 0$, kun $j \neq k$ ja $\langle e_j, e_k \rangle = 1$, kun $j = k$. Jos vektoreille x ja y, $x \neq y$, on $\langle x, y\rangle = 0$, niin ne ovat *ortogonaaliset* ja tällöin merkitään $x \perp y$. Vektorille x voidaan muodostaa esitys myös ortogonaalisen kannan $\{u_i\}_{i=1}^n$ suhteen, tällöin $x = \sum_{i=1}^n a_i u_i$, missä $a_i = \langle x, u_i\rangle / \|u_i\|^2$. Vastaavasti n-uloitteisen kompleksiavaruuden $\mathbb{C}^n$ sisätulo on $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$ ja vektorille $a \in \mathbb{C}^n$ määritellään normi $\|a\| = \langle a, a\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}$.

MÄÄRITELMÄ 4.3. Avaruuden $V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|) \subset F$ sisätulolla on ominaisuudet:

(*i*) $\langle x, x\rangle \geq 0$ ja $\langle x, x\rangle > 0$, kun $x \neq 0$ (positiivinen definiittisyys)

(*ii*) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (konjugaattisymmetrisyys)

(*iii*) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$, kun $\alpha, \beta \in F$ (bilineaarisuus)

ja normille pätee:

(*iv*) $\|x\| \geq 0$ ja $\|x\| > 0$, kun $x \neq 0$

(*v*) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, kun $\alpha \in F$ (homogeenisuus)

(*vi*) kaikille $x, y \in V$ on $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (kolmioepäyhtälö). .

Lisäksi ortogonaalisuuden käsitteestä voidaan johtaa seuraavat tulokset:

LEMMA 4.4. *Olkoon x ja y alkioita sisätuloavaruudessa $V = (V, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$. Tällöin on voimassa*

(*i*) Pythagoraan lause*: jos x ja y ovat ortogonaaliset, niin*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(*ii*) Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö*: kaikille $x, y \in V$ on*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Avaruudet $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$ ovat äärellisulotteisia, mutta Fourier-sarjoja käsiteltäessä tarvitaan ääretönulotteisia lineaariavaruuksia:

ESIMERKKI 4.5. Lineaariavaruus ℓ^2 on kompleksiarvoisten, *neliösummautuvien* jonojen ääretönulotteinen avaruus: jos jono $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty} \in \ell^2$, niin $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Sisätulon jonojen $A = \{a_n\}$ ja $B = \{b_n\}$ välille antaa itseisesti suppeneva sarja $\langle A, B\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n$ ja normi on siten $\|A\| = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$. [**5**, s. 73-74].

4.2. Neliöintegroituvien funktioiden avaruus $L^2([-\pi,\pi])$

MÄÄRITELMÄ 4.6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Luku

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ on } n\text{-uloitteinen väli kaikilla } k \in \mathbb{N}\right\},$$

missä $\ell(I_k)$ on välin I_k geometrinen mitta, on joukon A *Lebesguen ulkomitta*. Joukko A on *Lebesgue-mitallinen*, jos

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset \mathbb{R}^n$$

ja tällöin sen *Lebesguen mitta* on $m(A) = m^*(A)$.

MÄÄRITELMÄ 4.7. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Joukolla A määritelty funktio f on Lebesgue-mitallinen, jos kaikilla $a \in \mathbb{R}$ alkukuva

$$f^{-1}(]a,\infty]) = \{x \in A : f(x) > a\}$$

on mitallinen.

MÄÄRITELMÄ 4.8. Olkoon $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ mitta-avaruus, missä $\mathcal{M}$ on Lebesgue-mitallisten joukkojen luokka ja m on Lebesguen mitta. Tällöin määritellään *Lebesgue-avaruus*

$$L^p = L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ on mitallinen ja } \|f\|_p < \infty\}, \quad \text{missä}$$

L^p-avaruuden normi on

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \quad \text{ja} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Kun $p = \infty$, niin

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \inf\big\{M \in \mathbb{R} \,\big|\, m\big(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > M\}\big) = 0\big\} \quad \text{ja}$$

$$L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ on mitallinen ja } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Funktiota $f \in L^1$ sanotaan (*Lebesgue-*)*integroituvaksi* ja funktiota $f \in L^2$ *neliöintegroituvaksi*.

Lebesgue-avaruuksista L^2 on ainoa, jolle voidaan asettaa sisätulo, joka antaa vastaavan L^p-normin. Kun valitaan tarkasteltavaksi funktiot, jotka ovat neliöintegroituvia välillä $[-\pi,\pi]$, voidaan sisätulo painottaa kertoimella $1/2\pi$:

MÄÄRITELMÄ 4.9. Avaruus $L^2([-\pi,\pi])$ on välillä $[-\pi,\pi]$ neliöintegroituvien funktioiden joukko, toisin sanoen funktio $f \in L^2([-\pi,\pi])$ on Lebesgue-mitallinen ja

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} < \infty.$$

Asetetaan avaruuteen $L^2([-\pi,\pi])$ sisätulo

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x.$$

Funktiot f ja g ovat *ortogonaaliset* välillä $[-\pi,\pi]$, jos $\langle f, g\rangle = 0$. Funktiojono $\{\varphi_n\}$ on ortogonaalinen, jos $\langle \varphi_m, \varphi_n\rangle = 0$, kun $m \neq n$, ja *ortonormaali* jos lisäksi $\|\varphi_n\| = 1$ kaikilla n. Lisäksi määritetään avaruudelle $L^2([-\pi,\pi])$ *metriikka* eli funktioiden f ja g etäisyys

$$\|f - g\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Siten funktio f_k suppenee L^2-normin suhteen funktioon f, jos

$$\|f - f_k\|_2 \to 0, \quad \text{eli} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_k(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

HUOMAUTUS 4.10. Avaruudessa L^p ominaisuudesta $\|f(x)\|_p = 0$ seuraa, että $f(x) = 0$ *melkein kaikilla* x:

MÄÄRITELMÄ 4.11. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *nollamittainen*, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa jono avoimia välejä $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pituuksinaan ℓ_k siten, että $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} < \epsilon$. Jos jokin väite pätee nollamittaista joukkoa lukuunottamatta kaikille $x \in \mathbb{R}$, niin väite on totta *melkein kaikkialla* tai *melkein kaikilla* x, merkitään m.k. x.

MÄÄRITELMÄ 4.12. Sisätuloavaruus $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ on *Hilbertin avaruus*, jos
(i) Sisätulolla ja normilla on määritelmän 4.3 ominaisuudet, ja
(ii) $\mathcal{H}$ on *täydellinen*; jokainen Cauchy-jono suppenee normin suhteen raja-arvoon $x \in \mathcal{H}$.

Esimerkiksi avaruudet $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ja ℓ^2 varustettuina sisätulolla ovat Hilbertin avaruuksia.

LAUSE 4.13. *Neliöintegroituvien funktioiden avaruus $L^2([-\pi,\pi])$ on Hilbertin avaruus.*

TODISTUS. Katso [**6**, s. 159-160]. □

Joukko $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty} \in L^2([-\pi,\pi])$, $e_n(x) = e^{inx}$, on ortonormaali, sillä

$$\langle e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{kun } m = n \\ 0 & \text{kun } m \neq n. \end{cases}$$

Jos $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ virittää avaruuden $L^2([-\pi,\pi])$, eli sen alkioiden äärelliset lineaarikombinaatiot ovat tiheässä välillä $[-\pi,\pi]$ neliöintegroituvien funktioiden avaruudessa, niin $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ on *ortonormaali kanta* avaruudessa $L^2([-\pi,\pi])$. Tällöin voidaan olettaa, että kaikille funktioille $f \in L^2([-\pi,\pi])$ on

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e_n,$$

jollain $c_n \in \mathbb{C}$, missä yhtäsuuruus tarkoittaa sarjan suppenemista L^2-normin suhteen. Jos oletetaan lisäksi, että voidaan ottaa sisätulo termeittäin yhtälön molemmilta puolilta funktion e_j kanssa, saadaan joukon $\{e_n\}$ ortonormaaliuden nojalla

$$\langle f, e_j\rangle = c_j \quad \text{kaikilla } j,$$

mikä on sama esitys kuin funktion f Fourier-sarjalla.

Todistetaan, että tämä pätee, eli funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ Fourier-sarja suppenee L^2-normin suhteen funktioon f, toisin sanoen

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_k(f;x)|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

LEMMA 4.14. *Jos f on trigonometrinen polynomi, $f = \sum_{|n|\le k} c_n e_n \in L^2([-\pi,\pi])$, niin*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{|n|\le k} |c_n|^2.$$

TODISTUS. Kirjoitetaan funktio f muodossa

$$f = f - \sum_{|n|\le k} c_n e_n + \sum_{|n|\le k} c_n e_n.$$

Koska $f - \sum_{|n|\le k} c_n e_n = 0$, niin $f - \sum_{|n|\le k} c_n e_n \perp \sum_{|n|\le k} c_n e_n$ ja Pythagoraan lauseen nojalla

$$\|f\|_2^2 = \left\| f - \sum_{|n|\le k} c_n e_n \right\|_2^2 + \left\| \sum_{|n|\le k} c_n e_n \right\|_2^2 = \sum_{|n|\le k} |c_n|^2 \|e_n\|_2^2 = \sum_{|n|\le k} |c_n|^2. \qquad \square$$

LAUSE 4.15. *Seuraavat ortonormaalin joukon $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$ ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

(*i*) *Joukon $\{e_n\}$ äärelliset lineaarikombinaatiot ovat tiheässä avaruudessa $\mathcal{H}$,*

toisin sanoen kaikille $f \in \mathcal{H}$ on olemassa jono $\{g_k\} = \sum_{n=1}^{k} a_n e_n \in \mathcal{H}$ siten,

että $\|f - g_k\| \to 0$, kun $k \to \infty$.

(*ii*) *Jos $f \in \mathcal{H}$ ja $\langle f, e_j\rangle = 0$ kaikille j, niin $f = 0$.*

(*iii*) *Jos $f \in \mathcal{H}$ ja $S_k(f) = \sum_{n=1}^{k} c_n e_n$, missä $c_n = \langle f, e_n\rangle$, niin osasummat $S_k(f)$ suppenevat normin suhteen funktioon f, kun $k \to \infty$.*

(*iv*) *Jos $c_n = \langle f, e_n\rangle$, niin $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$.*

TODISTUS. (*i*) $\to$ (*ii*): Olkoon $f \in \mathcal{H}$, jolle $\langle f, e_j\rangle = 0$ kaikille j, ja olkoon $\{g_k\} \in \mathcal{H}$ funktioiden e_n äärellinen lineaarikombinaatio, jolle $\|f - g_k\| \to 0$, kun $k \to \infty$. Tällöin $\langle f, g_k\rangle = 0$ kaikilla n ja siten Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä seuraa

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle f, f - g_k\rangle \le \|f\|\|f - g_k\| \quad \text{kaikille } k.$$

Kun $k \to \infty$, niin saadaan $\|f\|^2 \le 0$ eli $\|f\|^2 = 0$ ja siten $f = 0$.
(*ii*) $\to$ (*iii*): Olkoon $f \in \mathcal{H}$, jolle

$$S_k(f) = \sum_{n=1}^{k} c_n e_n, \qquad \text{missä } c_n = \langle f, e_n\rangle.$$

Osoitetaan ensin, että $S_k(f)$ suppenee johonkin funktioon $g \in \mathcal{H}$. Huomataan, että $(f - S_k(f) \perp S_k(f))$, joten Pythagoraan lauseesta ja lemmasta 4.14 seuraa

$$\|f\|^2 = \|f - S_k(f)\|^2 + \|S_k(f)\|^2 = \|f - S_k(f)\|^2 + \sum_{n=1}^{k} |c_n|^2. \tag{4.1}$$

Siten $\|f\|^2 \ge \sum_{n=1}^{k} |c_n|^2$ ja kun $k \to \infty$, niin saadaan *Besselin epäyhtälö* (vrt. lause 2.9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \le \|f\|^2,$$

mikä tarkoittaa, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ suppenee. Tällöin

$$\|S_k(f) - S_m(f)\|^2 = \sum_{n=m+1}^{k} |c_n|^2, \quad \text{kun } k > m,$$

toisin sanoen $\{S_k(f)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{H}$ on Cauchy-jono. Koska Hilbertin avaruus $\mathcal{H}$ on täydellinen, niin on olemassa $g \in \mathcal{H}$ siten, että $S_k(f)$ suppenee funktioon g, kun $k \to \infty$.

Kiinnitetään $j \in \mathbb{N}$. Kun $k \geq j$, niin $\langle f - S_k(f), e_j \rangle = c_j - c_j = 0$. Koska $S_k(f)$ suppenee funktioon g, niin

$$\langle f - g, e_j \rangle = 0 \quad \text{kaikilla } j.$$

Siten oletuksen (ii) nojalla $f = g$ ja väite on todistettu.
$(iii) \to (iv)$: Kun $k \to \infty$, niin yhtälöstä 4.1 seuraa

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

$(iv) \to (i)$: Yhtälöstä 4.1 seuraa $\|f - S_k(f)\| \to 0$, kun $k \to \infty$ ja koska osasummat $S_k(f)$ ovat joukon $\{e_n\}$ alkioiden äärellisiä lineaarikombinaatioita, niin väite pätee. □

Jotta lausetta 4.15 voitaisiin soveltaa avaruudelle $L^2([-\pi,\pi])$ ja ortonormaalille joukolle $\{e^{inx}\}$, on osoitettava, että kohta (i) pätee, mistä seuraa muiden kohtien paikkansapitävyys.

LAUSE 4.16. *Välillä $[-\pi,\pi]$ jatkuvien funktioiden joukko $C([-\pi,\pi])$ on tiheä avaruudessa $L^2([-\pi,\pi])$.*

TODISTUS. Katso [**7**, s. 69]. □

LAUSE 4.17. *Trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $L^2([-\pi,\pi])$.*

TODISTUS. Olkoon $f \in L^2([-\pi,\pi])$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa välillä $[-\pi,\pi]$ jatkuva funktio g siten, että

$$\|f - g\|_2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Fejérin lauseen 2.27 mukaan trigonometriset polynomit ovat tiheässä jatkuvien, 2π-jaksoisten funktioiden joukossa ja siten myös joukossa $C([-\pi,\pi])$. On siis olemassa trigonometrinen polynomi

$$T(x) = \sum_{n=-k}^{k} a_n e^{inx}, \quad \text{jolle} \quad \|g - T\|_2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Siten $\|f - T\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - T\|_2 < \epsilon$, mistä väite seuraa. □

LAUSE 4.18. *Olkoon $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Tällöin on voimassa:*
(i) *Parsevalin yhtälö:*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \quad \textit{missä } c_n = \langle f, e_n \rangle.$$

(ii) Rieszin-Fischerin lause: Funktiolle $f \in L^2([-\pi,\pi])$ *on*

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e_n, \quad \textit{missä } c_n = \langle f, e_n \rangle,$$

jos ja vain jos

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

(iii) Funktion f Fourier-sarja suppenee L^2*-normin suhteen funktioon* f*, toisin sanoen*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_k(f;x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0, \quad \textit{kun } k \to \infty.$$

Todistus. Sovelletaan lausetta 4.15 tapaukseen $\mathcal{H} = L^2([-\pi,\pi])$. Lauseen 4.17 mukaan kohta 4.15 (i) on totta ja siten lause 4.15 pätee kokonaisuudessaan. Kohdasta (iv) seuraa tällöin Parsevalin yhtälö.

(iii): Erotuksen $f - S_k(f) \in L^2([-\pi,\pi])$ Fourier-sarja on $\sum_{|n|>k} c_n e_n$, joten Parsevalin yhtälöstä seuraa

$$\|f - S_k(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_k(f;x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{|n|>k} |c_n|^2 \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

(ii): Jos $\{c_n\} \in \ell^2$, niin $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ ja tällöin osasummajono $\{S_k\} = \sum_{|n|<k} c_n e_n$ on Cauchy-suppeneva, eli $\|S_k - S_m\|_2^2 \to 0$, kun $k, m \to \infty$. Avaruuden $L^2([-\pi,\pi])$ täydellisyydestä seuraa, että on olemassa funktio $f \in L^2([-\pi,\pi])$ siten, että $\|f - S_k\|_2 \to 0$, kun $k \to \infty$. Kun $k \geq n$, niin

$$\langle f, e_n \rangle = \langle f - S_k, e_n \rangle + \langle S_k, e_n \rangle = \langle f - S_k, e_n \rangle + c_n$$

ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöstä seuraa

$$\langle f - S_k, e_n \rangle \leq \|f - S_k\|_2 \|e_n\|_2 = \|f - S_k\|_2 \to 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Siten $\langle f, e_n \rangle = c_n$.
Jos $f = \sum c_n e_n$, niin Parsevalin yhtälöstä seuraa $\|f\|_2 = \sum |c_n|^2 < \infty$. □

Rieszin-Fischerin lauseen mukaan avaruuksien $L^2([-\pi,\pi])$ ja ℓ^2 välillä on bijektiivinen kuvaus, eli jokainen $f \in L^2([-\pi,\pi])$ vastaa Fourier-kerroinjonoa, joka on avaruuden ℓ^2 alkio. Parsevalin yhtälön mukaan tämä kuvaus säilyttää sisätulon, joten se on *isometrinen isomorfismi*. Voidaan lisäksi näyttää, että kaikki ääretönulotteiset Hilbert-avaruudet ovat isometrisesti isomorfisia avaruuden ℓ^2 kanssa.

Luvussa 2 käsiteltiin Fourier-sarjojen Abel- ja Cesàro-summia ja näytettiin, että jatkuvalle funktiolle nämä summat suppenevat tasaisesti funktioon, kun taas osasummien tasainen suppeneminen vaatii funktion jatkuvasti derivoituvuutta. Seuraavan tuloksen mukaan Fourier-sarjan osasumma S_k on kuitenkin yksikäsitteisesti *paras approksimaatio* funktiolle korkeintaan k:n asteen trigonometristen polynomien joukosta:

LAUSE 4.19 (Paras approksimaatio). *Olkoon* $T_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} a_n e_n$ *korkeintaan* k*:n asteen trigonometrinen polynomi ja* $S_k(x)$ *funktion* $f \in L^2([-\pi,\pi])$ *Fourier-sarjan osasumma. Tällöin*

$$\|f - S_k\|_2 \leq \|f - T_k\|_2$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $T_k(x) = S_k(x)$.

TODISTUS. Selvästi $f - S_k \perp P_k$, missä P_k on korkeintaan k:n asteen trigonometrinen polynomi, joten koska

$$f - T_k = f - S_k + \sum_{n=-k}^{k} b_n e_n,$$

missä $b_n = c_n - a_n$, niin Pythagoraan lauseesta seuraa

$$\|f - T_k\|_2^2 = \|f - S_k\|_2^2 + \left\| \sum_{n=-k}^{k} b_n e_n \right\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \|f - S_k\|_2 \leq \|f - T_k\|_2$$

ja yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $c_n = a_n$ kaikilla $|n| \leq k$. □

Osoitetaan Parsevalin yhtälölle 4.18 (i) yleistys:

SEURAUS 4.20. *Jos funktioilla* $f, g \in L^2([-\pi,\pi])$ *on Fourier-sarjat* $\sum c_n e_n$ *ja* $\sum d_n e_n$*, niin*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \overline{d_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

TODISTUS. Soveltamalla Parsevalin yhtälöä funktioihin $f + g$, f ja g saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + g(x)|^2\, \mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n + d_n|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (|c_n|^2 + 2\, \mathrm{Re}\, c_n \overline{d_n} + |d_n|^2) \text{ ja toisaalta}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) + g(x)|^2\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|^2 + 2\, \mathrm{Re}\, f(x)\overline{g(x)} + |g(x)|^2)\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 + \mathrm{Re}\, \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x + \sum_{-\infty}^{\infty} |d_n|^2. \end{aligned}$$

Siten

$$\mathrm{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \overline{d}_n = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Vastaavasti voidaan näyttää, että imaginääriosat ovat yhtäsuuret, mistä väite seuraa. □

Fourier-sarjojen suppenemista koskeva teoria on laaja Fourier-analyysin osa-alue, josta käsiteltiin tässä tutkielmassa muutamia päätuloksia. Esitetään vielä tulos pisteittäisestä suppenemisesta L^2-avaruudessa, minkä Lennart Carleson todisti vuonna 1966 ja Richard Hunt täydensi L^p-avaruuteen kaikille $p > 1$:

LAUSE 4.21. *Jos* $f \in L^2([-\pi,\pi])$*, niin* $S_k(f;x) \to f(x)$ *melkein kaikilla* $x \in [-\pi,\pi]$*, kun* $k \to \infty$.

LUKU 5

Fourier-muunnoksesta

5.1. Johdanto

Edellisessä luvussa näytettiin, että avaruuden $L^2([-\pi,\pi])$ funktiot voidaan esittää ortonormaalien kantafunktioiden e^{inx} sarjakehitelmänä. Kun kokonaisluvut ja summat korvataan niiden "jatkuvilla vastineilla" eli reaaliluvuilla ja integraaleilla, voidaan myös tietyt jaksottomat funktiot esittää funktioiden $e^{i\xi x}$, $\xi \in \mathbb{R}$, avulla koko reaalilukuakselilla.

Olkoon funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Oletetaan, että funktiolle voidaan muodostaa Fourier-sarja välille $[-\ell,\ell]$ kaikilla $\ell > 0$ siten, että

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n x/\ell}, \quad \text{missä} \quad c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\pi n x/\ell}\,\mathrm{d}x.$$

Sijoitetaan $\Delta\xi = \pi/\ell$ ja $\xi_n = n\Delta\xi = n\pi/\ell$, jolloin saadaan

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\xi_n x}\Delta\xi, \quad \text{missä} \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\xi_n x}\,\mathrm{d}x.$$

Oletetaan, että f saa arvon nolla, kun $|x| \ge \ell$, jolloin

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\xi_n x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi_n x}\,\mathrm{d}x =: \widehat{f}(\xi_n) \quad \text{ja}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi_n)e^{i\xi_n x}\Delta\xi, \quad \text{kun } |x| < \ell.$$

Riemannin integraalin määritelmän nojalla, kun $\ell \to \infty$, niin $\Delta\xi \to 0$ ja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi, \quad \text{missä} \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x. \tag{5.1}$$

Ylläoleva päättely on melko suoraviivainen, mutta tulos on paikkansapitävä tietynlaisille funktioille, kuten myöhemmin todistetaan. Funktio $\widehat{f}$ on funktion f *Fourier-muunnos* ja yhtälöä 5.1 sanotaan *Fourier-käänteismuunnokseksi* tai *Fourier-integraaliksi.*

5.2. Määritelmiä ja tuloksia

MÄÄRITELMÄ 5.1. Funktion $f \in L^1$ *Fourier-muunnos* on

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

Integraali (5.2) on hyvin määritelty, sillä lauseessa 5.19 näytetään, että $|\widehat{f}| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1 < \infty$.

Joissain tilanteissa muunnoksesta käytetään myös merkintää $\mathscr{F}[f(x)] = \widehat{f}(\xi)$ ja jatkossa integraali voidaan kirjoittaa ilman raja-arvoja; $\int_{-\infty}^{\infty} = \int$.

Seuraavaksi esitetään Lebesgue-integraaliin liittyviä tuloksia, jotka ovat oleellisia Fourier-muunnoksen teoriassa:

Lause 5.2 (Fubinin lause). [**3**, s. 67]. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Tällöin $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x,y)$ on Lebesgue-integroituva melkein kaikilla $y \in \mathbb{R}$ ja vastaavasti $f_x(y) \in L^1$ m.k. $x \in \mathbb{R}$. Siten funktiot*

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(y)\,\mathrm{d}y$$

ovat olemassa m.k. y ja x. Lisäksi $F, G \in L^1(\mathbb{R})$ ja

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Lause 5.3 (Monotonisen suppenemisen lause). [**3**, s. 50-51]. *Olkoot $f_n(x) \in L^1$ epänegatiivisia funktioita, joille $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ m.k. x kaikilla $n \geq 1$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ m.k. x. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Lause 5.4 (Dominoidun suppenemisen lause). [**3**, s. 55]. *Olkoot $f_n(x) \in L^1$ funktioita siten, että $f_n(x) \to f(x)$ m.k. x, kun $n \to \infty$. Jos $g \in L^1$ ja $|f_n(x)| \leq g(x)$ m.k. x kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $f \in L^1$ ja*

$$\int |f_n - f| \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty \text{ ja siten}$$

$$\int f_n \to \int f, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Seuraus 5.5. [**3**, s. 55]. *Olkoot $f_n(x) \in L^1$ siten, että $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| < \infty$. Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee m.k. funktioon avaruudessa L^1 ja*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause 5.6 (Hölderin epäyhtälö). [**3**, s. 182]. *Jos $1 \leq p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$ niin mitallisille funktioille f ja g on*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lause 5.7 (Minkowskin epäyhtälö). [**3**, s. 183]. *Jos $1 \leq p < \infty$ ja $f, g \in L^p$, niin*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Lause 5.8 (Minkowskin epäyhtälö integraaleille). [**3**, s. 194]. *Olkoon $f \in L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Jos $f \geq 0$ ja $1 \leq p < \infty$, niin*

$$\left\| \int f(\,.\,,y)\,\mathrm{d}y \right\|_p \leq \int \|f(\,.\,,y)\|_p\,\mathrm{d}y.$$

MÄÄRITELMÄ 5.9. Joukon A *karakteristinen funktio* on

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A \\ 0, & \text{kun } x \notin A. \end{cases}$$

Funktio χ_A on mitallinen, jos ja vain jos A on mitallinen.

MÄÄRITELMÄ 5.10. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ on *yksinkertainen*, jos on olemassa mitalliset, pistevieraat joukot A_j, joiden yhdiste on $\mathbb{R}$, ja luvut $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$, siten, että

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Yksinkertainen funktio on mitallinen.

LAUSE 5.11. *Yksinkertaiset funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$ kaikille $1 \leq p < \infty$.*

TODISTUS. Katso [**3**, s. 183]. □

MÄÄRITELMÄ 5.12. Joukolla A määritellyn funktion f *kantaja* on joukko

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}.$$

Jatkuva funktio f kuuluu avaruuteen $C_c(\mathbb{R})$, jos sen kantaja on kompakti - sanotaan, että f on *kompaktikantajainen*.

LAUSE 5.13. *$C_c(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.*

TODISTUS. Katso [**3**, s. 217]. □

MÄÄRITELMÄ 5.14. Olkoon f funktio avaruudessa $\mathbb{R}$. Tällöin kaikille $y \in \mathbb{R}$ funktion f *translaatio* on

$$\tau_y f(x) = f(x - y)$$

ja $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$, kun $1 \leq p < \infty$.

LAUSE 5.15. *Kun $1 \leq p < \infty$, niin translaatio on jatkuva L^p-normin suhteen, toisin sanoen, jos $f \in L^p$ ja $z \in \mathbb{R}$, niin $\lim_{y \to 0} \|\tau_{y+z} f - \tau_z f\|_p = 0$.*

TODISTUS. Katso [**3**, s. 238]. □

LEMMA 5.16. *Funktioiden $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ välinen* konvoluutio *on funktio $f * g$,*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) \,\mathrm{d}y.$$

Konvoluutiolla on ominaisuudet:

(*i*) $f * g = g * f$

(*ii*) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(*iii*) $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$ *kaikille* $z \in \mathbb{R}$

(*iv*) *Jos* $A = \overline{\{x + y : x \in \mathrm{supp}(f), y \in \mathrm{supp}(g)\}}$, *niin* $\mathrm{supp}(f * g) \subset A$.

TODISTUS. Todistetaan kohdat (*iii*) ja (*iv*):
(*iii*):

$$\tau_z(f*g)(x) = \int f(x-z-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int \tau_z f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (\tau_z f)*g(x)$$

ja (*i*)-kohdan nojalla

$$\tau_z(f*g) = \tau_z(g*f) = (\tau_z g)*f = f*(\tau_z g).$$

(*iv*):
Jos $x \notin A$, niin kaikilla $y \in \operatorname{supp}(g)$ on $x-y \notin \operatorname{supp}(f)$ ja siten $f(x-y)g(y) = 0$ ja $(f*g)(x) = 0$. $\square$

LAUSE 5.17 (Youngin epäyhtälö). *Jos $f \in L^1$ ja $g \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, niin $(f*g)(x)$ on olemassa melkein kaikilla x, $f*g \in L^p$ ja $\|f*g\|_p \le \|f\|_1\|g\|_p$.*

TODISTUS. Minkowskin epäyhtälöstä integraaleille saadaan

$$\|f*g\|_p = \left\|\int f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right\|_p \le \int |f(y)|\|\tau_y g(x)\|_p\,\mathrm{d}y = \|f\|_1\|g\|_p < \infty. \quad \square$$

5.3. Fourier-muunnos $L^1(\mathbb{R})$-avaruudessa

LAUSE 5.18. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{C}$ ja $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin on voimassa:*

(*i*) $\mathscr{F}[af(x) + bg(x)] = a\widehat{f}(\xi) + b\widehat{g}(\xi)$.

(*ii*) $\mathscr{F}\left[f(x)e^{i\alpha x}\right] = \widehat{f}(\xi-\alpha)$ *ja* $\mathscr{F}[f(x-\alpha)] = \widehat{f}(\xi)e^{-i\alpha\xi}$.

(*iii*) *Kun* $\lambda > 0$, *niin* $\mathscr{F}[f(x/\lambda)] = \lambda\widehat{f}(\lambda\xi)$ *ja* $\mathscr{F}[\lambda f(\lambda x)] = \widehat{f}(\xi/\lambda)$.

(*iv*) *Jos* $g \in L^1$ *niin* $\mathscr{F}[(f*g)(x)] = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

(*v*) $\mathscr{F}\left[\overline{f(-x)}\right] = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.

(*vi*) *Jos* $f \in C^1$ *ja* $f' \in L^1$, *niin* $\mathscr{F}[f'(x)] = i\xi\widehat{f}(\xi)$.
Jos $xf(x)$ *on integroituva, niin* $\mathscr{F}[xf(x)] = i\widehat{f}'(\xi)$.

Kohtien (*iv*) ja (*vi*) mukaan Fourier-muunnos vaihtaa konvoluution ja derivoinnin kertolaskuksi.

TODISTUS. Todistetaan kohdat (*ii*), (*iv*) ja (*vi*). Muut kohdat saadaan vastaavasti Fourier-muunnoksen määritelmästä.
(*ii*):

$$\mathscr{F}\left[f(x)e^{i\alpha x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-ix(\xi-\alpha)}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi-\alpha) \quad \text{ja}$$

$$\mathscr{F}[f(x-\alpha)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x-\alpha)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)e^{-i\xi(x-\alpha)}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi)e^{-i\alpha\xi}.$$

(*iv*): Fubinin lausetta käyttäen saadaan

$$\mathscr{F}[(f*g)(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint f(x-y)g(y)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint f(x-y)e^{-i\xi(x-y)}g(y)e^{-i\xi y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint f(z)e^{-i\xi z}g(y)e^{-i\xi y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \quad (\text{muuttujanvaihdos } z=x-y)\\
&=\sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).
\end{aligned}
$$

(vi): Osittaisintegroimalla saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f'(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big/_{-N}^{N} f(x)e^{-i\xi x} + \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\\
&\to 0 + i\xi\widehat{f}(\xi), \quad \text{kun } N\to\infty,
\end{aligned}
$$

ja, koska $xe^{-i\xi x} = i(d/d\xi)e^{-i\xi x}$, niin

$$
\mathscr{F}[xf(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int xf(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\xi}\int f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = i\widehat{f}'(\xi). \qquad \square
$$

Lause 5.19. *Olkoon $f \in L^1$. Tällöin*

(i) $\widehat{f}$ *on rajoitettu:* $|\widehat{f}\,| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$ *ja* .

(ii) $\widehat{f}$ *on tasaisesti jatkuva avaruudessa* $\mathbb{R}$.

Todistus. (i): Fourier-muunnoksen määritelmästä seuraa

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\right|\\
&\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\left|e^{-i\xi x}\right|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1.
\end{aligned}
$$

(ii): Koska

$$
\begin{aligned}
|\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x})\,\mathrm{d}x\right|\\
&\le \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1,
\end{aligned}
$$

niin dominoidun suppenemisen lauseen nojalla $\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi) \to 0$, kun $h \to 0$. $\square$

Lemma 5.20 (Riemann-Lebesguen lemma). *Kun $f \in L^1(\mathbb{R})$, niin*

$$
\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi) = 0.
$$

Todistus. Karakteristiselle funktiolle $\chi_A \in L^1$, missä $A = [a,b]$, on

$$
\begin{aligned}
\widehat{\chi_A}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_A(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-i\xi\sqrt{2\pi}}(e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a})\\
&\to 0, \quad \text{kun } |\xi| \to \infty.
\end{aligned}
$$

Fourier-muunnoksen lineaarisuuden nojalla tulos pätee kaikille yksinkertaisille funktioille.

Olkoon $f \in L^1$ ja $\epsilon > 0$. Koska yksinkertaiset funktiot ovat tiheässä avaruudessa

L^1, niin on olemassa yksinkertainen funktio $\varphi \in L^1$ siten, että $\|f-\varphi\|_1 < \epsilon\sqrt{2\pi}$. Tällöin Fourier-muunnoksen lineaarisuuden ja lauseen 5.19 kohdan (i) nojalla

$$\begin{aligned}\big|\widehat{f}(\xi)\big| &\le \big|\widehat{f}(\xi)-\widehat{\varphi}(\xi)\big| + \big|\widehat{\varphi}(\xi)\big| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big\|f(x)-\varphi(x)\big\|_1 + \big|\widehat{\varphi}(\xi)\big| \\ &< \epsilon + \big|\widehat{\varphi}(\xi)\big|, \quad \text{joten}\end{aligned}$$

$$\limsup_{|\xi|\to\infty}\big|\widehat{f}(\xi)\big| < \epsilon + \limsup_{|\xi|\to\infty}\big|\widehat{\varphi}(\xi)\big| = \epsilon.$$

Koska ϵ on mielivaltainen, väite on todistettu. □

Tavoitteena on todistaa käänteismuunnoslause: kun $f \in L^1$ ja $\widehat{f} \in L^1$, niin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{m.k. } x.$$

Käytetään apuna *silottajafunktiota* ϕ_t:
Olkoon $\phi \in L^1$ ja asetetaan

$$\phi_t(x) = t^{-1}\phi(t^{-1}x), \quad \text{kun } t > 0.$$

Tällöin $\int_{\mathbb{R}}\phi_t$ on riippumaton vakiosta t:

$$\int \phi_t = \int \phi(t^{-1}x)t^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \phi(y)t^{-1}\,t\,\mathrm{d}(y) = \int \phi(y)\,\mathrm{d}y.$$

LAUSE 5.21. *Olkoon $\phi \in L^1$, $\phi_t(x) = t^{-1}\phi(t^{-1}x)$ ja $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,\mathrm{d}x = a$. Jos $f \in L^p$, $1 \le p < \infty$, niin*

$$f * \phi_t \to af$$

L^p-normin suhteen, kun $t \to 0$.

TODISTUS. Koska

$$\begin{aligned}f*\phi_t(x) - af(x) &= \int f(x-y)\phi_t(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\int\phi_t(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int[f(x-y)-f(x)]\phi_t(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int[f(x-tz)-f(x)]\phi(z)\,\mathrm{d}z \quad (\text{muuttujanvaihdos } y = tz) \\ &= \int[\tau_{tz}f(x)-f(x)]\phi(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

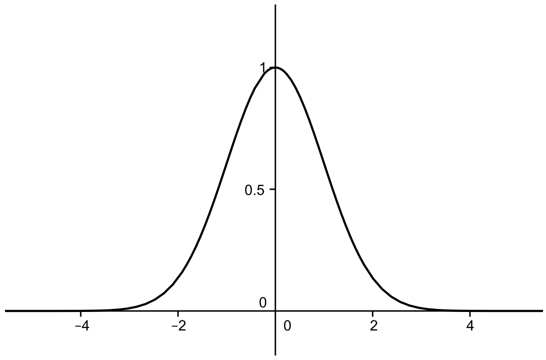
niin Minkowskin epäyhtälöstä integraaleille seuraa

$$\|f*\phi_t - af\|_p \le \int \|\tau_{tz}f - f\|_p|\phi(z)|\,\mathrm{d}z.$$

Koska $\tau_y f$ on jatkuva ja $\|\tau_{tz}f - f\|_p \le 2\|f\|_p$, niin $\|\tau_{tz}f-f\|_p \to 0$, kun $t \to 0$ kaikilla z. Väite seuraa siten dominoidun suppenemisen lauseesta. □

Silottajafunktioksi valitaan eräs *Gaussin ydin* (kellokäyrä), joka on muotoa

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$



KUVA 5.1. Gaussin ydin $e^{-x^2/2}$.

LEMMA 5.22. *Gaussin ytimelle* $e^{-x^2/2}$ *on*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} = 1.$$

TODISTUS. Integroidaan napakoordinaattimuunnoksen avulla:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r\\ &= \lim_{N\to\infty} -2\pi e^{-N^2/2} + 2\pi e^0 = 2\pi.\end{aligned}$$

□

LAUSE 5.23. *Jos* $f(x) = e^{-x^2/2}$, *niin* $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$.

TODISTUS. Määritellään

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Koska $f'(x) = -xf(x)$, niin lauseen 5.18 kohdasta (vi) seuraa

$$F'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \quad \text{ja}$$

$$F'(\xi) = i(i\xi)\widehat{f}(\xi) = -\xi F(\xi)$$

Jos määritellään $G(\xi) = F(\xi)e^{\xi^2/2}$, niin $G'(\xi) = 0$ ja siten G on vakio. Koska lemmasta 5.22 seuraa $F(0) = 1$, niin $G(\xi) \equiv 1$ ja siten $F(\xi) = e^{-\xi^2/2}$. □

Fourier-muunnoksen lineaarisuudesta ja skaalausominaisuudesta (lause 5.18 (i) ja (iii)) saadaan:

SEURAUS 5.24. *Jos* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2x^2/2}$, *missä* $t > 0$, *niin* $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-1}e^{-\xi^2/2t^2}$.

LEMMA 5.25. *Jos $f, g \in L^1$, niin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\, \mathrm{d}x.$$

TODISTUS. Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x \right) g(\xi) \mathrm{d}\xi \\ &= \int f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(\xi) e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x \\ &= \int f(x)\widehat{g}(x)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

LAUSE 5.26 (Fourier-käänteismuunnos). *Jos $f \in L^1$, $\widehat{f} \in L^1$ ja*

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi,$$

niin h on jatkuva ja $f(x) = h(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Olkoon $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ ja

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi x} e^{-t^2\xi^2/2}.$$

Tällöin seurauksesta 5.24 ja ominaisuudesta $\mathscr{F}\left[f(x)e^{i\alpha x}\right] = \widehat{f}(\xi - \alpha)$ saadaan

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1} e^{-(x-y)^2/2t^2} = \phi_t(x-y) = t^{-1}\phi\left(t^{-1}(x-y)\right),$$

missä $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Lemman 5.25 nojalla

$$\begin{aligned}\int \widehat{f}(\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2\xi^2/2}\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int f(y)\widehat{g}(y)\, \mathrm{d}y = \int f(y)\phi_t(x-y)\, \mathrm{d}y = (f * \phi_t)(x).\end{aligned}$$

Koska lemman 5.22 mukaan

$$\int \phi(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = 1,$$

niin lauseen 5.21 nojalla $f * \phi_t \to f$ L^1-normin suhteen, kun $t \to 0$. Toisaalta, koska $\widehat{f} \in L^1$, niin dominoidun suppenemisen lauseesta seuraa

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} e^{-t^2\xi^2/2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi = h(x).$$

Siten $f(x) = h(x)$ melkein kaikilla x ja funktio h on Fourier-muunnoksena jatkuva.

□

SEURAUS 5.27. *Jos $f \in L^1$ ja $\widehat{f}(\xi) = 0$ kaikilla ξ, niin $f(x) = 0$ m.k. x.*

HUOMAUTUS 5.28. Käänteismuunnosta voidaan merkitä symbolilla $\mathscr{F}^{-1}$, jolloin lause 5.26 saa muodon $\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}[f(x)]) = f(x)$ m.k. $x \in \mathbb{R}$, jos $f, \widehat{f} \in L^1$. Lisäksi huomataan, että $\mathscr{F}^{-1}[f(x)] = \widehat{f}(-x)$.

Huomautus 5.29. Fourier-muunnospareiksi voidaan valita myös esimerkiksi

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi$$

tai

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

5.4. Fourier-muunnos $L^2(\mathbb{R})$-avaruudessa

Seuraavaksi näytetään, että Fourier-muunnos voidaan määritellä myös neliöintegroituville funktioille asettamalla $\mathscr{F}[f] = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}_0[f_n]$, missä $\mathscr{F}_0$ on L^1-avaruuden Fourier-muunnos. Tutkitaan aluksi sileiden ja nopeasti vähenevien funktioiden Fourier-muunnosta:

Määritelmä 5.30. Funktio f kuuluu avaruuteen $C_c^\infty(\mathbb{R})$, jos se on kompaktikantajainen C^∞-funktio.

Esimerkiksi funktio ψ,

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp[(x^2-1)^{-1}] & \text{kun } |x| < 1 \\ 0 & \text{kun } |x| \geq 1, \end{cases}$$

on C_c^∞-funktio.

Lause 5.31. *Olkoon $1 \leq p \leq \infty$. jos $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in C_c^m(\mathbb{R})$, $0 \leq m \leq \infty$, niin $f * g \in C^m(\mathbb{R})$ ja $D^\ell(f*g) = f * D^\ell g$ kaikilla $|\ell| \leq m$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $f * g$ on jatkuva, kun $f \in L^p$ ja $g \in C_c^0$: Olkoon q siten, että $1/p + 1/q = 1$ ja $h \in \mathbb{R}$, tällöin Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x+h-y)g(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y+h)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)[g(y+h)-g(y)]\,\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \|f\|_p \|\tau_h g - g\|_q. \end{aligned}$$

Lauseen 5.15 mukaan $\|\tau_h g - g\|_q \to 0$, kun $h \to 0$. Kun $p = 1$, niin $\|\tau_h g - g\|$ suppenee nollaan, kun $h \to 0$, koska g on tasaisesti jatkuva. Siis $f * g$ on jatkuva.
Olkoon $m = 1$ ja olkoon $t > 0$. Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $s \in [0,t]$ siten, että

$$\begin{aligned} \frac{(f*g)(x+t) - (f*g)(x)}{t} &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{g(x+t-y) - g(x-y)}{t}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)D(g(x+s-y))\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Kun $t \to 0$, niin $D(g(x+s-y)) \to D(g(x-y))$ tasaisesti. Koska $g' \in C_c^0$, niin integraali suppenee funktioon $f * Dg$. Siten $D(f*g)$ on olemassa, $D(f*g) = f * Dg$ ja tapauksen $m = 0$ nojalla $f * g \in C^1$. Todistus yleiselle m seuraa induktiolla. □

LAUSE 5.32. *$C_c^\infty(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$.*

TODISTUS. Olkoon $f \in L^p$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin lauseen 5.13 nojalla on olemassa funktio $g \in C_c$, jolle on $\|f - g\|_p < \epsilon/2$. Olkoon $\phi \in C_c^\infty$ siten, että $\int \phi = 1$. Voidaan valita esimerkiksi $\phi = (\int \psi)^{-1}\psi$, missä ψ on määritelmän 5.30 funktio. Merkitään kuten aiemmin $\phi_t(x) = t^{-1}\phi(t^{-1}x)$. Tällöin lemman 5.16 kohdan (iv) mukaan $\operatorname{supp}(g * \phi_t)$ on kompakti ja siten lauseesta 5.31 seuraa, että $(g * \phi_t) \in C_c^\infty$. Lauseen 5.21 nojalla on olemassa $t > 0$, jolle $\|g * \phi_t - g\|_p < \epsilon/2$. Siten $\|f - g * \phi_t\|_p \le \|f - g\|_p + \|g * \phi_t - g\|_p < \epsilon$. □

MÄÄRITELMÄ 5.33. *Schwartzin avaruuteen $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ kuuluvat C^∞-funktiot, jotka ovat nopeasti väheneviä*, toisin sanoen

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty : \|f\|_{k,\ell} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \left| f^{(\ell)}(x) \right| < \infty \text{ kaikilla } k, \ell \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Määritelmästä seuraa, että kaikilla n on olemassa vakio C_n siten, että $|f(x)| \le C_n(1+|x|^2)^{-n}$. Esimerkiksi Gaussin ydin $e^{-x^2/2}$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ja selvästi $C_c^\infty \subset \mathcal{S} \subset L^p$. Metriikalla

$$d(f, g) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} 2^{-(k+\ell)} \frac{\|f - g\|_{k,\ell}}{1 + \|f - g\|_{k,\ell}}$$

varustettuna $\mathcal{S}$ on täydellinen topologinen vektoriavaruus. Lisäksi todetaan, että $\mathcal{S}$ on suljettu derivoinnin ja polynomeilla kertomisen suhteen: jos $f \in \mathcal{S}$, niin

$$f^{(\ell)}(x) \in \mathcal{S} \quad \text{ja} \quad x^k f(x) \in \mathcal{S} \quad \text{kaikilla } k, \ell \in \mathbb{N}.$$

SEURAUS 5.34. *$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$.*

LAUSE 5.35. *Fourier-muunnos $\mathscr{F}$ on isomorfismi avaruudelta $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ itselleen.*

TODISTUS. Fourier-muunnos on lineaarinen lauseen 5.18 kohdan (i) mukaan. Osoitetaan, että $\mathscr{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$: Jos $f \in \mathcal{S} \subset L^1$, niin sen Fourier-muunnos on rajoitettu lauseen 5.19 mukaan ja siten

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi|^k \left| \widehat{f}^{(\ell)}(\xi) \right| < \infty \quad \text{kaikilla } k, \ell \in \mathbb{N}_0,$$

koska

$$\xi^k \widehat{f}^{(\ell)}(\xi) = \mathscr{F}\Big[\underbrace{(-i)^k D^k[(-ix)^\ell f(x)]}_{\in\mathcal{S}} \Big],$$

sillä lauseen 5.18 kohta (vi) yleistyy muotoon $\mathscr{F}[f^{(\ell)}(x)] = (i\xi)^\ell \widehat{f}(\xi)$ ja $\mathscr{F}[x^k f(x)] = i^k \widehat{f}^{(k)}(\xi)$. Siis $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. Jos $f, f_n \in \mathcal{S}$, niin $f_n \to f$ avaruuden $\mathcal{S}$ metriikan suhteen, jos ja vain jos $\|f - f_n\|_{k,\ell} \to 0$, kun $n \to \infty$. Nyt

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{k,\ell} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi|^k |\widehat{f}^{(\ell)}(\xi)| \\ &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| (1 + |x|^2)^2 D^k[x^\ell f(x)] \right|, \quad \text{missä} \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^{-2}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Kun epäyhtälöön 5.3 sijoitetaan $f - f_n$, seuraa dominoidun suppenemisen lauseesta $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$, kun $f_n \to f$. Siis $\mathscr{F}$ on jatkuva avaruudessa $\mathcal{S}$ ja niin on myös käänteiskuvaus $\mathscr{F}^{-1}[f(x)] = \widehat{f}(-x)$. □

Seuraavan lemman avulla Fourier-muunnos voidaan laajentaa avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$:

LEMMA 5.36. *Olkoon $\mathcal{H}_1$ ja $\mathcal{H}_2$ Hilbert-avaruuksia normeinaan $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$. Olkoon $\mathcal{A}$ avaruuden $\mathcal{H}_1$ tiheä aliavaruus ja $T_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{H}_2$ lineaarikuvaus, jolle $\|T_0(f)\|_2 \le c\|f\|_1$, kun $f \in \mathcal{A}$. Tällöin T_0 laajenee yksikäsitteisesti kuvaukseksi $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, jolle $\|T(f)\|_2 \le c\|f\|_1$ kaikille $f \in \mathcal{H}_1$ ja $T(f) = \lim_{n\to\infty} T_0(f_n)$, kun $\{f_n\} \in \mathcal{A}$ ja $f_n \to f$ joukossa $\mathcal{H}_1$.*

TODISTUS. Olkoon $f \in \mathcal{H}_1$ ja olkoon $\{f_n\} \in \mathcal{A}$ jono, joka suppenee alkioon f. Tällöin

$$\|T_0(f_n) - T_0(f_k)\|_2 \le c\|f_n - f_k\|_1 \to 0, \quad \text{kun } n, k \to \infty,$$

joten raja-arvo $\lim_{n\to\infty} T_0(f_n)$ on olemassa. Osoitetaan, että raja-arvo on yksikäsitteinen:

Olkoon $\{g_n\} \in \mathcal{A}$ toinen jono, joka suppenee alkioon $f \in \mathcal{H}_1$. Tällöin oletuksen nojalla

$$\|T_0(f_n) - T_0(g_n)\|_2 \le c\|f_n - g_n\|_1$$

ja, koska $\|f_n - g_n\|_1 \le \|f_n - f\|_1 + \|f_n - g_n\|_1$, niin $\|T_0(f_n) - T_0(g_n)\|_2 \to 0$, kun $n \to \infty$.

Lisäksi kaikilla $f \in \mathcal{H}_1$ on

$$\|T(f)\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|T_0(f_n)\|_2 \le \lim_{n\to\infty} c\|f_n\|_1 = c\|f\|_1.$$

Laajennuksen yksikäsitteisyys seuraa avaruuden $\mathcal{A}$ tiheydestä avaruudessa $\mathcal{H}_1$. □

Sovelletaan lemmaa 5.36 tapauksessa $\mathcal{H}_1 = L^2 = \mathcal{H}_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ ja T_0 on avaruudessa L^1 määritelty Fourier-muunnos, jota merkitään nyt $\mathscr{F}_0$:

LAUSE 5.37 (Plancherelin lause). *Fourier-muunnoksella $\mathscr{F}_0 : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ on yksikäsitteinen laajennus isometriseksi isomorfismiksi $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$,*

$$\mathscr{F}[f(x)] = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}_0[f_n(x)] \quad (\textit{raja-arvo } L^2\textit{-mielessä})$$

ja erityisesti

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2 \quad \textit{kaikille } f \in L^2.$$

TODISTUS. Olkoon $f, g \in \mathcal{S} \subset L^1$, tällöin myös $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S} \subset L^1$. Asetetaan $h = \overline{\widehat{g}}$. Käänteismuunnoslauseen mukaan on

$$\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{\widehat{g}(x)} e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{\widehat{g}(x) e^{i\xi x}}\, \mathrm{d}x = \overline{g(\xi)}.$$

Lemman 5.25 nojalla

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \int f(x)\widehat{h}(x)\, \mathrm{d}x = \int \widehat{f}(\xi)h(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle$$

ja kun $f = g$, niin $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Lemman 5.36 nojalla $\mathscr{F}_0$ laajenee yksikäsitteisesti avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ Fourier-muunnokseksi $\mathscr{F}$ ja $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ kaikille $f \in L^2$. Käänteismuunnokselle $\mathscr{F}_0^{-1}$ on selvästi myös $\|\mathscr{F}_0^{-1}[f]\|_2 = \|f\|_2$ ja se voidaan laajentaa avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$ määrittelemällä $\mathscr{F}^{-1}[f(x)] = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}_0^{-1}[f_n(x)]$, missä raja-arvo otetaan L^2-normissa. Kun $f \in L^2$, voidaan valita jono $\{f_n\} \in \mathcal{S}$, jolle $\|f - f_n\|_2 \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin

$$f_n = \mathscr{F}_0^{-1}\mathscr{F}_0[f_n] = \mathscr{F}_0\mathscr{F}_0^{-1}[f_n]$$

ja, kun $n \to \infty$, niin

$$f = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}[f],$$

siis $\mathscr{F}^{-1}$ on muunnoksen $\mathscr{F}$ käänteiskuvaus. □

Seuraavan lauseen mukaan L^1- ja L^2-avaruuksien Fourier-muunnokset yhtyvät, kun $f \in L^1 \cap L^2$:

LAUSE 5.38. *Jos $f \in L^1 \cap L^2$, niin $\mathscr{F}_0[f] = \mathscr{F}[f]$.*

TODISTUS. Olkoon $f \in L^1 \cap L^2$. Tällöin on olemassa jono $\{f_n\} \in \mathcal{S}$, joka suppenee funktioon f sekä L^1- että L^2-normissa. Nyt $\widehat{f_n} = \mathscr{F}_0[f_n] \to \mathscr{F}[f]$ L^2-normin suhteen, kun $n \to \infty$, joten on olemassa osajono, joka suppenee funktioon $\mathscr{F}[f]$ melkein kaikkialla. Lisäksi

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f\|_1,$$

joten $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ kaikkialla, kun $n \to \infty$. □

HUOMAUTUS 5.39. Funktiolle $f \in L^2$ voidaan valita jono $\{f_n\} \in L^1 \cap L^2$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| < n \\ 0 & |x| \geq n, \end{cases}$$

jolle $f_n \to f$ L^2-normissa, kun $n \to \infty$, ja siten $\mathscr{F}[f_n] \to \mathscr{F}[f]$. Siis

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x)e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x,$$

missä raja-arvo otetaan L^2-mielessä.

Lopuksi esitetään tulos, joka antaa yhteyden Fourier-sarjoille ja Fourier-integraalille: Funktiosta $f \in L^1(\mathbb{R})$ saadaan 2π-jaksoinen funktio F_1, kun asetetaan

$$F_1(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n).$$

Toisaalta, jos funktion f Fourier-muunnos $\widehat{f}$ rajoitetaan kokonaislukujen joukkoon, saadaan käänteismuunnoksesta sarja

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx},$$

joka on myös 2π-jaksoinen. Poissonin summakaavan mukaaan $F_1 = F_2$:

LAUSE 5.40 (Poissonin summakaava). *Jos funktioille $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ on $|f(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\delta}$ ja $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-1-\epsilon}$, joillakin $C, \epsilon, \delta > 0$, niin*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}.$$

Erityisesti, kun $x = 0$, niin

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

TODISTUS. Fourier-sarjan yksikäsitteisyyden nojalla riittää näyttää, että sarjoilla on samat Fourier-kertoimet. Selvästi yhtälön oikeanpuoleisen sarjan m:s kerroin on $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}(m)$. Merkitään $g(x) = \sum f(x + 2\pi n)$, tällöin

$$\begin{aligned}\|g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \,\mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + 2\pi n)| \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(-1-2n)\pi}^{(1-2n)\pi} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \|f\|_1 < \infty,\end{aligned}$$

siis $g \in L^1$. Koska

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| g(x)e^{-imx} \right| \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$$

niin dominoidun suppenemisen lauseen nojalla summauksen ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa ja funktion g Fourier-kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n)e^{-imx} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + 2\pi n)e^{-imx} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-imy} \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(m).\end{aligned}$$

Koska $|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-1-\delta}$, niin

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(m)| \leq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (1 + \xi)^{-1-\delta} \,\mathrm{d}\xi < \infty,$$

joten sarja $1/\sqrt{2\pi} \sum \widehat{f}(n)e^{inx}$ suppenee itseisesti ja tasaisesti. Tällöin

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. □

LUKU 6

Sovelluksia

6.1. Jatkuva, ei-missään derivoituva funktio

Vuonna 1861 Bernhard Riemann esitti, että jatkuva funktio $R(x)$,

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2}$$

ei ole derivoituva missään pisteessä. Yrittäessään todistaa Riemannin väitettä Karl Weierstrass kehitti ensimmäisen julkaistun ja varmistetun esimerkin jatkuvasta, ei-missään derivoituvasta funktiosta. Vuonna 1872 hän todisti, että tälläinen funktio on

$$W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x),$$

jos $0<b<1$, a on pariton kokonaisluku, $a>1$ ja $ab>1+3\pi/2$. Joseph Gerver osoitti vuonna 1969, että Riemannin funktio $R(x)$ on itse asiassa derivoituva kaikissa pisteissä $\pi p/q$, missä p ja q ovat parittomia kokonaislukuja, ja ei-derivoituva muualla.

Seuraavaksi näytetään erään Weierstrassin funktion ei-derivoituvuus:

Lause 6.1. *Jos $0<\alpha\leq 1$, niin funktio*

$$f_\alpha=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n\alpha}e^{i2^nx}$$

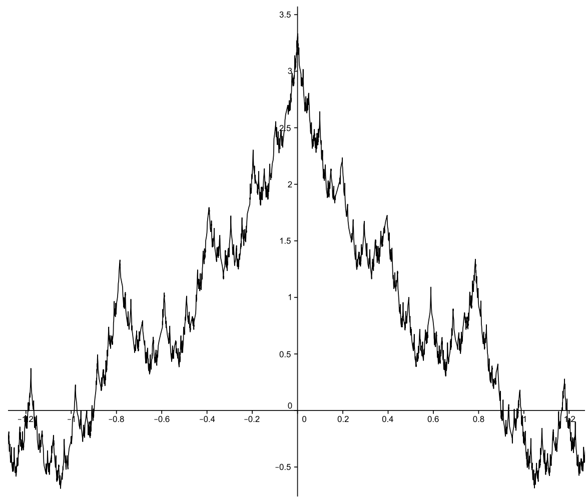
on jatkuva, mutta ei-missään derivoituva.

Sarja voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{m=2^n}^{\infty}m^{-\alpha}e^{imx},\quad \text{missä } n\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

joka on Fourier-sarja kertoiminaan $c_m=m^{-\alpha}$, $m=2^n$. Kerroin c_m saa siis nollasta eroavia arvoja vain, kun m on muotoa $2^n=1,2,4,8,16,\ldots$. Kertoimet ovat "harvassa", tarkemmin määriteltynä lukujono $\{2^n\}$ ja sarja $\sum 2^{-n\alpha}e^{i2^nx}$ ovat *lakunaariset*: lukujono $\{\lambda_n\}$ on lakunaarinen, jos sille löytyy vakio $q>1$ siten, että $\lambda_{n+1}>q\lambda_n$ kaikille n. Tämä on ratkaiseva ominaisuus funktion ei-derivoituvuudelle.

Voidaan valita funktio $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ siten, että $\widehat{\phi}(\xi)\in C^\infty$, $\widehat{\phi}(1)=1/\sqrt{2\pi}$ ja $\widehat{\phi}(\xi)=0$, kun $\xi\notin]1/2,2[$. Esimerkiksi asetetaan $\widehat{\phi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(2-\frac{1}{(2-\xi)(\xi-1/2)}\right)$, kun $\xi\in]1/2,2[$. Tällöin $\phi(x)$ on jatkuva ja funktio $x^k\phi(x)$ on rajoitettu kaikilla $k\in\mathbb{N}_0$.



KUVA 6.1. Funktion f_α reaaliosan osasumma $S_{50} = \sum_{n=0}^{50} 2^{-n\alpha} \cos 2^n x$, kun $\alpha = 1/2$.

Siten $\phi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\, \widehat{\phi}(0) = 0$.
Määritetään konvoluutio

$$2^k \phi(2^k x) * f_\alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^k \phi(2^k x) f_\alpha(y - x)\, \mathrm{d}x,$$

joka Youngin epäyhtälön mukaan on avaruudessa L^∞, koska $f_\alpha \in L^\infty$ ja $\phi \in L^1$.

LAUSEEN 6.1 TODISTUS (JOHNSEN). Weierstrassin M-testin nojalla f_α on tasaisesti suppeneva ja siten jatkuva ja rajoitettu funktio.

Dominoidun suppenemisen lausetta käyttäen voidaan vaihtaa integroinnin ja summauksen järjestys:

$$\begin{aligned} 2^k \phi(2^k x) * f_\alpha(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^k \phi(2^k x) \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} 2^{-n\alpha} e^{i2^n (y-x)}\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n y} \int_{-\infty}^{\infty} 2^k \phi(2^k x) e^{-i2^n x}\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n y} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) e^{-iz2^{n-k}}\, \mathrm{d}z \quad (\text{muuttujanvaihdos } 2^k x = z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n y} \sqrt{2\pi}\, \widehat{\phi}(2^{n-k}) = 2^{-k\alpha} e^{i2^k y} \sqrt{2\pi}\, \widehat{\phi}(1) = 2^{-k\alpha} e^{i2^k y}, \end{aligned}$$

sillä $\widehat{\phi}(2^{n-k}) = 1/\sqrt{2\pi}$, kun $n = k$ ja muilla $n \in \mathbb{N}_0$ se saa arvon 0.

Koska $f_\alpha(y) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)\, \mathrm{d}z = 0$, niin

$$\begin{aligned} 2^{-k\alpha} e^{i2^k y} = 2^k \phi(2^k x) * f_\alpha(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^k \phi(2^k x) f_\alpha(y - x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) f_\alpha(y - 2^{-k} z)\, \mathrm{d}z \quad (\text{muuttujanvaihdos } 2^k x = z) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)(f_\alpha(y - 2^{-k}z) - f_\alpha(y))\,\mathrm{d}z.$$

Jos f_α olisi derivoituva kohdassa y, niin $F(h) = \frac{1}{h}(f_\alpha(y+h)-f_\alpha(y)) \in L^\infty$ olisi jatkuva funktio, jolle $F(0) = f'_\alpha(y)$. Tällöin dominoidun suppenemisen lauseen nojalla

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(-2^{-k}z)z\phi(z)\,\mathrm{d}z = -2^{(1-\alpha)k}e^{i2^k y}$$
$$\to f'_\alpha(y)\int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)\,\mathrm{d}z = f'_\alpha(y)i\widehat{\phi}\,'(0) = 0, \quad \text{kun } k \to \infty.$$

Tästä seuraa $1 - \alpha < 0$, mikä on ristiriidassa oletuksen $0 < \alpha \le 1$ kanssa. □

Funktion f_α reaali- ja imaginääriosat $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha}\cos 2^n x$ ja $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} i \sin 2^n x$ ovat myös ei-missään derivoituvia, jatkuvia funktioita, katso kuva 6.1.

6.2. Weierstrassin approksimaatiolause

Weierstrassin approksimaatiolauseen mukaan kompaktilla välillä jatkuvaa kompleksiarvoista funktiota voidaan approksimoida tasaisesti polynomilla, eli polynomit ovat tiheässä jatkuvien funktioiden avaruudessa $C([a,b],\mathbb{C})$.

LAUSE 6.2 (Weierstrassin approksimaatiolause). *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Tällöin sitä voidaan approksimoida tasaisesti välin $[a,b]$ polynomilla. Toisin sanoen, kun $\epsilon > 0$, on olemassa polynomi P siten, että*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P(x)| < \epsilon.$$

TODISTUS. Todistetaan lause ensin tapauksessa $[a,b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:
Laajennetaan f välin $[-\pi,\pi]$ jatkuvaksi funktioksi F siten, että $F(x) = f(x)$, kun $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ja $F(-\pi) = F(\pi) = 0$. Joukossa $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ F saa arvon kuvapisteitä $F(-\pi)$ ja $F(-\frac{\pi}{2})$ sekä $F(\frac{\pi}{2})$ ja $F(\pi)$ yhdistäviltä janoilta. Tämän jälkeen F voidaan laajentaa jatkuvaksi, 2π-jaksoiseksi funktioksi joukossa $\mathbb{R}$ ja sille voidaan määrittää Fourier-sarja.
Olkoon $\epsilon > 0$. Fejérin lauseen 2.27 nojalla on olemassa trigonometrinen polynomi

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad \text{jolle}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - T(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Koska eksponenttifunktiolla e^{ikx} on kompaktilla välillä tasaisesti suppeneva Taylorin sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ikx)^k}{k!}$, niin on olemassa polynomi P siten, että

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |T(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Näin saadaan

$$\sup_{|x|\le\pi/2} |f(x) - P(x)| = \sup_{|x|\le\pi/2} |F(x) - P(x)| < \epsilon.$$

Olkoon f jatkuva funktio välillä $[a,b]$. Määritellään joukkojen $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ja $[a,b]$ välille bijektio $\ell(t) = \frac{b-a}{\pi}t + \frac{b+a}{2}$, jolle on $\ell(-\pi/2) = a$ ja $\ell(\pi/2) = b$. Tällöin kuvauksen

käänteisfunktio on $\ell^{-1} : [a,b] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\ell^{-1}(x) = \frac{\pi}{b-a}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)$.
Yhdistetty funktio $f \circ \ell$ on jatkuva välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, joten edellisen päättelyn nojalla on olemassa polynomi Q, jolle

$$\sup_{t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |f(\ell(t)) - Q(t)| < \epsilon.$$

Jos nyt asetetaan $P(x) = Q(\ell^{-1}(x)) = Q\left(\frac{\pi}{b-a}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)\right)$, niin P on polynomi ja

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \epsilon. \qquad \square$$

6.3. Isoperimetrinen epäyhtälö

MÄÄRITELMÄ 6.3. Suljetun välin $[a,b] \subset \mathbb{R}$ jatkuva kuvaus γ,

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

on *polku* joukossa $\mathbb{R}^2$. Polun kuva eli *käyrä* $\Gamma = \gamma([a,b])$ on pistejoukko tasossa $\mathbb{R}^2$. Käyrä Γ on *yksinkertainen*, jos se ei leikkaa itseään, toisin sanoen $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ kaikilla $u \neq v \in [a,b]$, ja *suljettu*, jos päätepisteet yhtyvät, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

MÄÄRITELMÄ 6.4. Jos käyrä Γ on polun $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ parametrisaatio, niin sen *pituus* ℓ on

$$\ell = \int_a^b |\gamma'(s)| \,\mathrm{d}s = \int_a^b (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{1/2} \,\mathrm{d}s.$$

Käyrän pituus ei riipu parametrisaatiosta, koska jos $\gamma(s(t)) = \eta(t)$, niin muuttujanvaihdoksen ja ketjusäännön avulla saadaan

$$\ell = \int_a^b |\gamma'(s)| \,\mathrm{d}s = \int_c^d |\gamma'(s(t))||s'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_c^d |\eta'(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Käyränpituuden funktio

$$\varphi(t) = \int_a^t |\gamma'(s)| \,\mathrm{d}s$$

on jatkuva, paloittain jatkuvasti derivoituva ja aidosti kasvava funktio välillä $[a,b]$. Siten sillä on käänteisfunktio $\varphi^{-1}(s)$, joka on määritelty välillä $[0,\ell]$, missä $\ell = \varphi(b)$ on käyrän pituus välillä $[a,b]$, ja voidaan määritellä:

MÄÄRITELMÄ 6.5. Käyrän *parametrisaatio kaarenpituuden suhteen* on $\eta(s) = \gamma(\varphi^{-1}(s))$, $s \in [0,\ell]$ ja tällöin $|\eta'(s)| = 1$ kaikilla s.

LAUSE 6.6. *Käyrän Γ rajaama pinta-ala A tasolla $\mathbb{R}^2$ on*

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\int_\Gamma (x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_a^b x(s)y'(s) - y(s)x'(s) \,\mathrm{d}s\right|. \end{aligned}$$

TODISTUS. Katso [**2**, s. 223] $\square$

LAUSE 6.7 (Isoperimetrinen epäyhtälö). *Olkoon Γ yksinkertainen, suljettu käyrä kompleksitasossa. Olkoon ℓ käyrän Γ pituus ja A käyrän rajaaman alueen pinta-ala. Tällöin*

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos Γ on ympyrä.

TODISTUS. Olkoon $z \mapsto \delta z$ kuvaus kompleksitasolta $\mathbb{C}$ itselleen. Koska käyrän pituus δ-kertaistuu ja pinta-ala δ^2-kertaistuu kuvauksessa, niin todistus voidaan rajata tapaukseen $\ell = 2\pi$. Jos $\ell \neq 2\pi$, niin kuvaus $z \mapsto \delta z$ palauttaa tilanteeseen $\ell = 2\pi$, kun valitaan $\delta = 2\pi/\ell$.
Nyt väite saa muodon: jos $\ell = 2\pi$, niin $A \leq \pi$ ja yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos Γ on ympyrä.
Olkoon $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, käyrän Γ parametrisaatio kaarenpituuden suhteen, toisin sanoen $|\gamma'(s)| = (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{1/2} = 1$ kaikilla $s \in [0, 2\pi]$. Siten $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ ja

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2)\,\mathrm{d}s = 1. \tag{6.1}$$

Koska käyrä on suljettu, niin funktiot $x(s)$ ja $y(s)$ ovat 2π-jaksoisia ja niillä on Fourier-sarjat

$$x(s) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{ins} \quad \text{ja} \quad y(s) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n e^{ins}.$$

Lauseen 3.1 nojalla derivaattafunktioilla on Fourier-sarjat

$$x'(s) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n in e^{ins} \quad \text{ja} \quad y'(s) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} d_n in e^{ins}.$$

Soveltamalla Parsevalin yhtälöä (lause 4.18 (i)) kohtaan 6.1 saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2)\,\mathrm{d}s = \sum_{-\infty}^{\infty} |n|^2(|c_n|^2 + |d_n|^2) = 1. \tag{6.2}$$

Koska $x(s)$ ja $y(s)$ ovat reaaliarvoisia funktioita, niin $c_n = \overline{c}_{-n}$ ja $d_n = \overline{d}_{-n}$, joten Parsevalin yhtälön yleisestä muodosta (seuraus 4.20) ja lauseen 6.6 pinta-alan yhtälöstä seuraa

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_a^b x(s)y'(s) - y(s)x'(s)\,\mathrm{d}s\right| = \pi\left|\sum_{-\infty}^{\infty} n\left(c_n\overline{d}_n - d_n\overline{c}_n\right)\right|.$$

Huomataan, että

$$|c_n\overline{d}_n - d_n\overline{c}_n| \leq 2|c_n||d_n| \leq |c_n|^2 + |d_n|^2$$

ja, koska $|n| \leq |n|^2$, niin kohdasta 6.2 seuraa, että

$$\begin{aligned} A = \pi\left|\sum_{-\infty}^{\infty} n\left(c_n\overline{d}_n - d_n\overline{c}_n\right)\right| &\leq \pi\sum_{-\infty}^{\infty} |n||c_n\overline{d}_n - d_n\overline{c}_n| \\ &\leq \pi\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\left(|c_n|^2 + |d_n|^2\right) \leq \pi\sum_{-\infty}^{\infty} |n|^2\left(|c_n|^2 + |d_n|^2\right) = \pi. \end{aligned}$$

Kun $A = \pi$, niin on oltava $|c_n\overline{d}_n - d_n\overline{c}_n| = 2|c_n||d_n| = |c_n|^2 + |d_n|^2$ ja $|n| = |n|^2$ eli $|n| \leq 1$. Tällöin

$$x(s) = c_{-1}e^{-is} + c_0 + c_1e^{is} \quad \text{ja} \quad y(s) = d_{-1}e^{-is} + d_0 + d_1e^{is},$$

missä $c_{-1} = \overline{c}_1$ ja $d_{-1} = \overline{d}_1$. Kohdan 6.2 mukaan $2(|c_1|^2+|d_1|^2) = 1$ ja yhtäsuuruudesta $2|c_1||d_1| = |c_1|^2 + |d_1|^2$ seuraa, että $|c_1| = |d_1| = 1/2$. Siis c_1 ja d_1 voidaan kirjoittaa muodossa

$$c_1 = \frac{1}{2}e^{i\alpha} \quad \text{ja} \quad d_1 = \frac{1}{2}e^{i\beta}, \quad \alpha, \beta \in [-\pi, \pi].$$

Nyt, koska $2|c_1\overline{d}_1 - d_1\overline{c}_1| = 1$, niin

$$\begin{aligned} 2\left|\frac{1}{2}e^{i\alpha} \cdot \frac{1}{2}e^{-i\beta} - \frac{1}{2}e^{i\beta} \cdot \frac{1}{2}e^{-i\alpha}\right| &= \frac{1}{2}\left|e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}\right| \\ &= |\sin(\alpha - \beta)| = 1. \end{aligned}$$

Siten $\alpha - \beta = k\pi/2$, k on pariton kokonaisluku, ja

$$\begin{aligned} x(s) &= c_0 + \frac{1}{2}e^{-i\alpha}e^{-is} + \frac{1}{2}e^{i\alpha}e^{is} \\ &= c_0 + e^{-i(\alpha+s)} + e^{i(\alpha+s)} = c_0 + \cos(\alpha + s) \quad \text{ja} \\ y(s) &= d_0 + \cos(\beta + s) = d_0 \pm \sin(\alpha + s). \end{aligned}$$

Siis $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ parametrisoi ympyrän, kun $A = \pi$.
Todistuksen toinen suunta on selvä, koska jos käyrä Γ on ympyrä, jonka piiri on 2π, niin sen rajaama pinta-ala on π. □

6.4. Dirichlet'n ongelma yksikkökiekossa

Lämpöyhtälö kuvaa muun muassa kappaleen lämpötilan muuttumista lämmönjohtumisen seurauksena. Kaksiuloitteisessa tapauksessa – kuten tutkittaessa neliön muotoisen metallilevyn lämpötilan muutosta – lämpöyhtälö saa muodon

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

missä funktio $u(x, y, t)$ kuvaa lämpötilaa pisteessä (x, y) ajanhetkellä t, ja kerroin $\alpha = \kappa/\rho c_p$ riippuu kappaleen lämmönjohtavuudesta κ, tiheydestä ρ ja ominaislämpökapasiteetista c_p. Tietyn ajan kuluttua systeemi saavuttaa tasapainotilan eli $\partial u/\partial t = 0$ ja lämpöyhtälö on ajasta riippumaton:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Laplace-operaattorin $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ avulla lämpöyhtälö ilmaistaan muodossa

$$\triangle u = 0$$

ja yhtälön ratkaisuja kutsutaan *harmonisiksi* funktioiksi.

Dirichlet'n ongelmassa on löydettävä lämpöyhtälön ratkaisu $u(x, y)$ yksikkökiekossa siten, että u toteuttaa jatkuvan, 2π-jaksoisen funktion f määräämät reuna-arvot yksikkökiekon reunalla. Napakoordinaatein (r, θ), $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, ilmaistuna yksikkökiekko on $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r < 1\}$ ja reunaehto on siten $u(1, \theta) = f(\theta)$.

Lämpöyhtälö saadaan ketjusäännön nojalla muotoon

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Laventamalla yhtälö puolittain kertoimella r^2 saadaan

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Etsitään ratkaisua muuttujien separoinnin avulla sijoittamalla yrite

$$u(r,\theta) = F(r)G(\theta)$$

lämpöyhtälöön, jolloin saadaan

$$\frac{r^2F''(r) + rF'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}.$$

Koska yhtälön molemmat puolet riippuvat eri muuttujista, on olemassa vakio λ, jolle

$$\begin{cases} G''(\theta) + \lambda G(\theta) = 0 \\ r^2F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0. \end{cases}$$

Koska funktio $G(\theta)$ on 2π-jaksoinen, niin on oltava $\lambda \geq 0$, $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, ja siten

$$G(\theta) = A_0 \cos n\theta + B_0 \sin n\theta$$

tai yhtäpitävästi

$$G(\theta) = Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}.$$

Kun $\lambda = n^2$ ja $n \neq 0$, niin funktion $F(r)$ ratkaisuja ovat $F(r) = r^n$ ja $F(r) = r^{-n}$. Jos taas $n = 0$, niin $F(r) = 1$ ja $F(r) = \log r$ ovat ratkaisuja. Jos $n > 0$, niin r^{-n} kasvaa rajatta, kun $r \to 0$ ja siten $F(r)G(\theta) \to \infty$, kun $r \to 0$. Samoin käy, kun $n = 0$ ja $F(r) = \log r$, joten nämä ratkaisuvaihtoehdot hylätään. Siten ratkaisufunktioita ovat

$$u_n(r,\theta) = r^{|n|}e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ja lineaarisuuden nojalla yleinen ratkaisu saadaan superpositiona:

$$u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Reunaehdosta seuraa

$$u(1,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} = f(\theta),$$

joten ratkaisu $u(r,\theta)$ on Poissonin ytimen $\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$ ja funktion f konvoluutio.

6.5. Dirichlet'n ongelma puolitasossa

Ratkaistaan lämpöyhtälö

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ylemmässä puolitasossa $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$, kun reunaehtona on $u(x,0) = f(x)$ ja $u(x,y)$ on rajoitettu kaikille $y > 0$. Oletetaan lisäksi, että kaikille kiinteille y kuvaus $x \mapsto u(x,y)$ kuuluu avaruuteen $L^1(\mathbb{R})$, joten voidaan tehdä Fourier-muunnos muuttujan x suhteen, merkitään $\mathscr{F}_x$:

$$\widehat{u}(\xi, y) := \mathscr{F}_x[u(x,y)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x.$$

Koska $\mathscr{F}_x\left[\partial^2 u/\partial x^2\right] = -\xi^2 \mathscr{F}_x[u] = -\xi^2 \widehat{u}(\xi,y)$, niin lämpöyhtälön Fourier-muunnos on

$$-\xi^2 \widehat{u}(\xi,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{u}(\xi,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{u}(\xi,y) = \xi^2 \widehat{u}(\xi,y),$$

jos oletetaan, että $\mathscr{F}_x\left[\partial^2 u/\partial y^2\right] = \partial^2/\partial y^2 \mathscr{F}_x[u]$. Kun kiinnitetään ξ, niin kyseessä on differentiaaliyhtälö muuttujan y suhteen ja sen yleinen ratkaisu on

$$\widehat{u}(\xi,y) = A(\xi) e^{-y\xi} + B(\xi) e^{y\xi}.$$

Jotta $\widehat{u}$ olisi rajoitettu, kun $y > 0$, on oltava $A(\xi) = 0$, kun $\xi < 0$ ja $B(\xi) = 0$, kun $\xi > 0$. Siten $\widehat{u}(\xi,y) = C(\xi) e^{-y|\xi|}$, missä $C(\xi) = A(\xi) + B(\xi)$. Koska reunaehdon $u(x,0) = f(x)$ Fourier-muunnos muuttujan x suhteen on $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi)$, niin $C(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ ja

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi) e^{-y|\xi|}.$$

Kun $y > 0$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|\xi|} e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{i(x+iy)\xi} \, \mathrm{d}\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{i(x-iy)\xi} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big/_0^N \frac{e^{i(x+iy)\xi}}{i(x+iy)} + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big/_{-N}^0 \frac{e^{i(x-iy)\xi}}{i(x-iy)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{i(x+iy)} + \frac{1}{i(x-iy)} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{(x^2+y^2)} =: \mathcal{P}_y(x),
\end{aligned}$$

missä $\mathcal{P}_y$ on ylemmän puolitason *Poissonin ydin*. Käänteismuunnoslauseen nojalla

$$e^{-y|\xi|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(x) e^{-i\xi x} \mathrm{d}x,$$

joten $\widehat{u}(\xi,y)$ voidaan esittää konvoluution Fourier-muunnoksena

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi) \widehat{\mathcal{P}}_y(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}[(f * \mathcal{P}_y)(x)]$$

ja lämpöyhtälön ratkaisuksi saadaan

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * \mathcal{P}_y)(x) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2}\,\mathrm{d}t,$$

mikä tunnetaan *Poissonin integraalikaavana* ylemmälle puolitasolle.

Lähdeluettelo

[1] Richard Courant ja Fritz John: *Introduction to Calculus and Analysis I.* Springer-Verlag, 1999.

[2] Gerald B. Folland: *Advanced Calculus.* Prentice Hall, 2002.

[3] Gerald B. Folland: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2. painos. John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[4] Jon Johnsen: *Simple Proofs of Nowhere-Differentiability for Weierstrass's Function and Cases of Slow Growth.* Journal of Fourier Analysis and Applications 16 (1), ss. 17-33, 2010. Viitattu 10.1.2015. http://people.math.aau.dk/~jjohnsen/Articles/WEBfiler/nowhere.pdf

[5] Elias M. Stein ja Rami Shakarchi: *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press, 2003.

[6] Elias M. Stein ja Rami Shakarchi: *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces.* Princeton University Press, 2004.

[7] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis.* 3. painos. McGraw-Hill, 1987.

[8] Antoni Zygmund: *Trigonometric Series, Vol I & II.* 3. painos. Cambridge University Press, 2002.