Author(s): Hiltunen, Jenna; Hähkiöniemi, Markus

Title: Tapaustutkimus 7.-luokkalaisten algebrallisesta yleistämisestä

Year: 2015

Version: publishedVersion

Please cite the original version:

Hiltunen, J., & Hähkiöniemi, M. (2015). Tapaustutkimus 7.-luokkalaisten algebrallisesta yleistämisestä. In M. Kauppinen, M. Rautiainen, & M. Tarnanen (Eds.), Elävä ainepedagogiikka : Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014 (pp. 138-154). Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry. Ainedidaktisia tutkimuksia, 9. http://hdl.handle.net/10138/154156

Tapaustutkimus 7.-luokkalaisten algebrallisesta yleistämisestä

JENNA HILTUNEN JA MARKUS HÄHKIÖNIEMI

jenna.hiltunen@jyu.fi

Jyväskylän yliopisto, koulutuksen tutkimuslaitos

Tiivistelmä

Algebra on suomalaisten oppilaiden heikko alue. Toisaalta tutkimukset viittaavat siihen, että oppilaat voivat muodostaa algebrallisia ideoita tavanomaista aikaisemmin. Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia algebrallisia ideoita oppilaat muodostavat tutkiessaan funktioita 7. luokalla. Tutkimuksessa toteutettiin kahden oppitunnin opetusjakso lineaarisista ja epälineaarisista funktioista. Tunnit videoitiin, oppilaiden puhe nauhoitettiin ja oppilaiden kirjalliset tuotokset kerättiin. Tulosten mukaan oppilaat näyttivät olevan valmiita funktioiden käsittelyyn ja he muodostivat useita matemaattisia ideoita funktioista. Oppilaiden välillä oli kuitenkin eroja. Joillekin lineaariset funktiot olivat sopivan haastavia, toiset taas pystyivät tutkimaan jopa epälineaarisia funktioita. Oppilaat näyttävät tarvitsen aikaa ja mahdollisuuksia funktio-käsitteen keskeisten ideoiden pohtimiseen ilman formaaliuden vaatimusta. Oppilaat myös hyötyvät omien merkintöjen käyttämiseen rohkaisemisesta.

Avainsanat

Algebrallinen ajattelu, matemaattinen ajattelu, tutkiva oppiminen

Johdanto

Algebra oli suomalaisten 8. luokkalaisten heikoin sisältöalue TIMSS 2011 -tutkimuksessa ja suomalaiset menestyivät vain hieman kansainvälistä keskiarvoa paremmin (Kupari, Vettenranta & Nissinen, 2012). Samankaltaisia tuloksia on saatu myös muissa tutkimuksissa (esim. Rautopuro, 2013). Sekä kansainvälisesti (ks. Kieran, 2007), että kansallisesti (ks. Hassinen, 2006) algebran opetusta on ehdotettu kehitettävän enemmän ymmärtämistä ja ajattelua painottavammaksi lausekkeiden sieventämissääntöjen ja muun symbolimanipulaation sijaan.

Algebran oppiminen voitaisiin aloittaa yhtälöiden sijaan funktioita tarkastelemalla (esim. Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006). On olemassa näyttöä siitä, että oppilaat voivat muodostaa algebrallisia ideoita tavanomaista aikaisemmin (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Carraher ym., 2006; Cooper & Warren, 2008; Francisco & Hähkiöniemi, 2012; Rivera & Becker, 2008; Warren, Cooper, & Lamb, 2006). Jopa 3. luokkalaiset voivat muodostaa algebrallisia ideoita funktioista (esim. Carraher ym., 2008). Varhaista algebran opetusta käsittelevissä tutkimuksissa on useimmiten lähestytty funktioita kuviojonojen kautta siten, että oppilailta kysytään esimerkiksi millainen on jonon 100. tai mikä tahansa kuvio. Useimmat tutkimukset ovat keskittyneet lineaarisiin funktioihin ja vain muutamissa on tutkimuksissa on tarkasteltu epälineaaristen funktioiden oppimista (Amit & Neria, 2008; Francisco & Hähkiöniemi, 2011).

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia algebrallisia ideoita oppilaat muodostavat, kun lineaarisia ja epälineaarisia funktioita opetetaan tavanomaista aiemmin. Algebrallisista ideoista keskitytään erityisesti oppilaiden algebrallisten yleistysten muodostumiseen ja funktioiden merkitsemiseen. Tämä tapaustutkimus on osa kansainvälistä tutkimussuuntausta, jossa pyritään selvittämään, miten algebraa ja erityisesti funktioita voitaisiin opettaa tavanomaista aikaisemmin. Tutkimuksen tulokset auttavat ymmärtämään moninaisia tapoja muodostaa ja merkitä algebrallisia yleistyksiä sekä lineaaristen että harvemmin tarkasteltujen epälineaaristen funktioiden kohdalla. Tarkoitus ei ole tarkastella opetussuunnitelman rakentumista vaan kansainvälisesti kiistanalaisia oletuksia algebran oppimisen etenemisestä.

Algebrallinen ajattelu kuviojonotehtävissä

Oppilaiden on havaittu kehittävän kuviojonotehtävissä sekä rekursiivisia että eksplisiittisiä sääntöjä (esim. Carraher ym., 2008). Rekursiivisessa säännössä jonon jäsen saadaan edellisen jäsenen avulla. Eksplisiittinen sääntö taas ilmaisee, miten voidaan määrittää mikä tahansa jonon jäsen. Radfordin (2010) mukaan eksplisiittisten sääntöjen muodostaminen on algebrallista yleistämistä. Hänen mukaansa algebrallinen yleistys voidaan ilmaista symbolein (esim. $2x + 1$), kontekstiin viitaten (esim. leveys kerrotaan kahdella ja tähän lisätään 1) tai yksittäisen tapauksen avulla (esim. $2 \cdot 100 + 1$). Jälkimmäinen näistä vastaa geneeristä matemaattista päättelyä, jossa käytetään tiettyä lukua, mutta päättely toimii samoin millä tahansa luvulla.

Useissa tutkimuksissa on havaittu, että rekursiiviset säännöt esiintyvät oppilaiden keskuudessa yleisemmin kuin eksplisiittiset (esim. Carraher ym., 2008).

Rekursiivisia sääntöjä pidetään hyödyllisinä ajattelumuotoina edetessä kohti eksplisiittisiä sääntöjä (Carraher ym., 2008; Francisco & Hähkiöniemi, 2012). Kuitenkin on myös näyttöä siitä, että rekursiivinen ajattelu voi jopa haitata eksplisiittisten sääntöjen muodostamista (Amit & Neria, 2008).

Funktioita muodostaessaan oppilaiden on havaittu hyödyntävän monia erilaisia representaatioita eli esitysmuotoja kuten taulukoita, kuvaajia, sanallisia sääntöjä ja symbolein ilmaistuja kaavoja (Kieran, 2007). Moninaisten representaatioiden käyttämisen nähdään edistävän oppimista ja oppilaita tulisi rohkaista kehittämään omia merkintöjään (Cooper & Warren, 2008).

Menetelmät

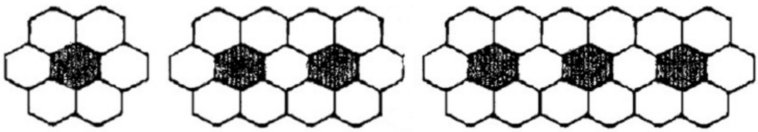
Aineiston keruu

Tutkimusaineisto kerättiin kahdella peräkkäisinä päivinä pidetyillä 45 minuutin oppitunneilla. Tutkimuksessa haluttiin yksityiskohtaista tietoa vain muutaman oppilaan matemaattisesta ajattelusta ja toiminnasta, joten oppitunneille valittiin viisi 7. luokkalaista oppilasta samasta matematiikan opetusryhmästä. Heille ei ollut opetettu vielä funktioita. Oppilaat työskentelivät oppitunneilla kahdessa ryhmässä siten, että toisessa ryhmässä oli kolme tyttöä ja toisessa kaksi poikaa. Kummankin ryhmän puhe nauhoitettiin sanelimilla. Lisäksi tyttöjen ryhmän työskentely videoitiin. Tämän lisäksi kaikki oppitunnilla tuotettu kirjallinen materiaali kerättiin talteen.

Oppitunnit suunniteltiin tutkivan matematiikan oppimisen mukaisesti (ks. Hähkiöniemi, 2011). Oppilaita rohkaistiin ajattelemaan ja tutkimaan, vältettiin antamasta heille suoria ohjeita ja ohjattiin heitä perustelemaan ratkaisunsa. Tunti alkoi opettajan alustuksella, jonka jälkeen oppilaat ratkoivat ongelmia ryhmissä ja lopuksi käytiin yhteinen keskustelu ratkaisuista kooten tunnin keskeiset ideat.

Tehtävät valittiin tunneille siten, että ne etenivät tutusta asiasta kohti vaikeampia, omaa oivaltamista vaativia asioita. Kuvioissa 1 ja 2 on ensimmäisellä tunnilla käsitellyt tehtävät. Molemmissa tehtävissä kuviojonon 10. kuvion laattojen määrä oli laskettavissa monella eri tavalla, kuten piirtämällä tai taulukoimalla laattojen määriä, mutta laattojen määrä oli kuitenkin hieman työläs selvittää ilman kaavaa. C-kohdissa oppilaille oli tarkoituksella jätetty vapaus päättää haluavatko he selittää laskutavan sanallisesti tai matemaattisin merkinnöin. Tehtävien D-kohdat ohjasivat muodostamaan matemaattisemman ilmaisun, kuitenkin siten, että oppilailla oli vapaus käyttää omia merkintöjään.

1)



A) Kuinka monta valkoista laattaa olisi seuraavassa kuviossa?

B) Kuinka monta valkoista laattaa tarvitaan kuvioon 10?

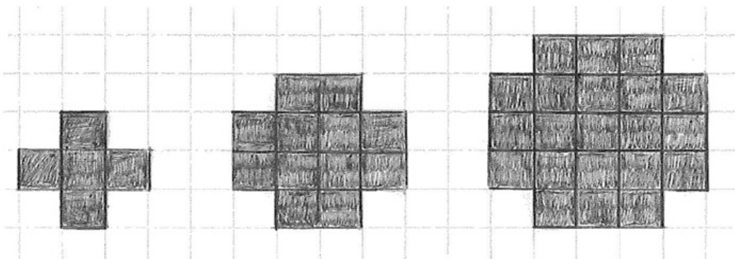
C) Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion valkoisten laattojen määrä tässä ketjussa.

D) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea valkoisten laattojen määrä, kun mustia laattoja on tietty määrä.

E) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä paljonko valkoisia laattoja tarvitaan tietyn kokoiseen laatoitukseen.

Kuvio 1. Kuviojonotehtävä 1. asteen funktion muodostamisesta (esim. 5x + 1)

2)



A) Kuinka monta mustaa laattaa olisi seuraavassa kuviossa?

B) Kuinka monta mustaa laattaa tarvitaan kuvioon 10?

C) Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion mustien laattojen määrä tässä ketjussa.

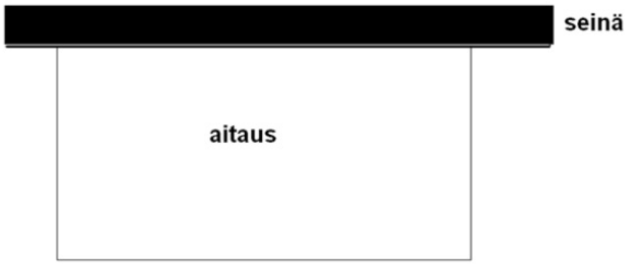
D) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea mustien laattojen määrä missä tahansa kuviossa.

E) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä paljonko mustia laattoja tarvitaan kuhunkin kuvioon.

Kuvio 2. Kuviojonotehtävä 2. asteen funktion muodostamisesta (esim. $x^2 + 4x$)

Toisella tunnilla oppilaiden tehtävänä oli muodostaa kana-aitauksen pinta-alan lauseke (esim. $-2x^2 + 13x$) eli 2. asteen funktio (kuvio 3). Kaavan kirjoittamiseen johdateltiin A-kohdassa pyytämällä laskemaan aitauksen pinta-ala, kun seinästä lähtevän sivun pituus on 5 metriä. Tämän jälkeen kysyttiin yleistä sääntöä ja kaavaa sekä funktion kuvaajaa. D-kohdassa kysyttiin jo funktion suurinta arvoa ja E-kohdassa pisteitä, joissa funktio saa tietyn arvon.

3) Hempalla on 13 metriä kanaverkkoa, josta hän aikoo rakentaa kanoilleen suorakulmionmuotoisen aitauksen kanalan seinän viereen.



A) Jos aitauksen seinästä lähtevän sivun pituus on 5 metriä, niin kuinka suuri aitauksen pinta-ala on tällöin?

B) Keksi tapa, jolla voidaan laskea aitauksen pinta-ala, kun seinästä lähtevän sivun pituus tiedetään? Miten tämän voi kirjoittaa kaavana?

C) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä kuinka suuri aitauksen pinta-ala on, kun seinästä lähtevän sivun pituus tiedetään.

D) Hemppa haluaa vain parasta kanoilleen ja toivoo, että aitauksesta tulisi mahdollisimman iso vaikka kanaverkkoa on käytettävissä 13m. Miten aitauksen mitat olisi valittava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

E) Kuinka pitkiä sivujen täytyy olla, jotta aitauksen pinta-ala olisi 18 neliömetriä?

Kuvio 3. Kana-aitaustehtävä

Aineiston analyysi

Aineiston analyysissa sovellettiin Powellin, Franciscon ja Maherin (2003) kehittämää matemaattisen ajattelun videoanalyysimenetelmää. Aluksi aineistoon tutustuttiin katsomalla videot läpi. Jo tässä vaiheessa kiinnitettiin huomiota mielenkiintoisiin kohtiin, kuten sellaisiin, joissa esiintyi oppilaiden erilaisia ajattelutyylejä tai ratkaisutapoja. Lisäksi huomio kiinnitettiin oppilaiden merkintätapoihin ja ongelmakohtiin. Tämän jälkeen videot katsottiin uudelleen tarkemmin ja kirjoitettiin kuvaus videon tapahtumista. Videoilta valittiin tutkimuksen kannalta olennaisia kohtia, jotka litteroitiin tarkemmin sanasta sanaan. Videoiden tapahtumia täydennettiin litteroimalla myös ääninauhojen tapahtumia, joista poimittiin oleelliset kohdat ja videomateriaalilla heikosti kuuluvia osuuksia. Koska videokuvaaja kuvasi lähinnä tyttöjen ryhmää, tapahtui poikaryhmän tapahtumien litterointi pääasiassa ääninauhojen pohjalta. Litteroiduista kohdista sekä vastaavista videoista kirjattiin oppilaiden erilaiset ajattelutyylit sekä representaatiot. Myös oppilaiden kirjalliset tuotokset huomioitiin analyysissa.

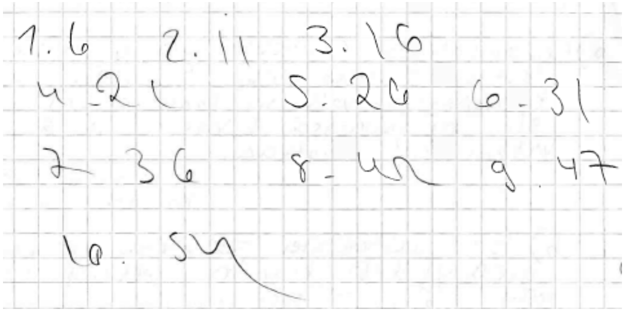
Oppilaiden ajattelua tulkittaessa pääteltiin, näkevätkö oppilaat kuvion tietyllä tavalla, ymmärtävätkö oppilaat kuvion koskevan mitä tahansa lukua ja ilmaisevatko oppilaat säännön rekursiivisessa, eksplisiittisessä vai jossain muussa muodossa. Analyysissä kiinnitettiin erityisesti huomiota oppilaiden erilaisiin ajattelumalleihin ja tehtävien ratkaisumenetelmiin. Lopuksi oppitunttien tapahtumista kirjoitettiin aihepiireittäin kronologisesti etenevä kertomus.

Tulokset

Lineaarinen kuviojono

Tyttöjen ryhmässä huomattiin, että valkoisia laattoja tulee aina viisi lisää uuteen kuvioon. Neljännessä kuviossa he laskivat olevan 16 + 5 = 21 valkoista laattaa. He kirjasivat vastauksen seuraavasti: ”Ensimmäisessä kukassa on 6 valkoista laattaa. Aina kun lisätään yksi lisää tulee 5 valkoista laattaa.” Tämä on sanallinen rekursiivinen sääntö.

Selvittääkseen 10. kuvion laattojen määrän, tytöt muodostivat luettelon kuvioiden valkoisten laattojen lukumääristä (kuvio 4). Tämä vastaa taulukon tekemistä ja on numeerinen rekursiivinen sääntö vaikka sisältääkin laskuvirheen. Oikea vastaus löytyi lopulta summaamalla oikea määrä viitosia laskimen avulla. Tämä olisi jo lähellä eksplisiittistä sääntöä, jos lisättävien viitosten määrään kiinnittäisi huomiota ja muuttaisi yhteenlaskun kertolaskuksi. Tämän vuoksi opettaja ohjasikin oppilaita selvittämään seuraavaksi kuinka monta valkoista laattaa olisi 100. kuviossa. Tässä vaiheessa tytöt kuitenkin ajattelivat rekursiivisesti, minkä Niina tiivisti lauseeseen ”plussaan edelliseen tulokseen viis” ja Siiri lauseeseen ”alkukuviossa on kuus valkoista, sit lisätään aina viis, viis, viis, viis …”.



Kuvio 4. Numeerinen rekursiivinen sääntö

Opettajan kysymysten avulla tytöt lähestyivät eksplisiittistä sääntöä:

> *Opettaja: Siis eli yhtä mustaa laattaa kohden liittyy viis palasta, mutta onko sillon kaikki valkeet palaset siinä kuviossa?*
>
> *Siiri: Ei.*
>
> *Opettaja: Montako puuttuu?*
>
> *Siiri: Yks. Eiku...*
>
> *Opettaja: Miks yks?*
>
> *Siiri: Tai siis ku... tuossa alussa on kuus, sit niitä lisätään vaan viis siihen.*
>
> *Niina: Hei, jos siinä eka on 99 mustaa palasta ja niitä kohden viis valkosta plus yks musta ja kuus valkosta.*
>
> *Ilona: Täh?*
>
> *Niina: Jos pitää olla sadas kuvio, siinä on sata mustaa kuiteski, niin eka 99 mustaa ja niitä kohden tota viis valkosta jokasta plus yks musta ja sitä kohden kuus valkosta.*

Tässä tytöt päätyvät sanalliseen sääntöön 100. kuvion valkoisten laattojen selvittämiseksi. Sääntö vastaa laskua $99 \cdot 5 + 6$ ja toimii vaikka 100. kuvion sijaan kysyttäisiin *n*. kuviota ($(n - 1) \cdot 5 + 6$). Siten kyseessä oli sanallinen geneerinen sääntö. Tämän jälkeen tytöt siirtyivät opettajan kehotuksesta pohtimaan säännön yleistämistä:

> *Siiri: Eihän siinä sanota, että pitäs laskee valkoset ja mustat erikseen. . . Seittemän palaa plus x kertaa kuus.*
>
> *Niina: Miks kertaa kuus? Mikä se x on?*
>
> *Ilona: No se on joku luku.*
>
> *Siiri: No kato, tiätsä se, x on se niinku kuinka monta kuka käyttää sitä, niin monta se tarvii siihen. Se on x on niinku se määrä mitä se tarvii siihen. [Tauko.] Eka sillein seittemän palaa plus x kertaa kuus, koska aina lisätään kuus palaa yhteensä ja se x on niin paljon kuin niitä tarvitaan... kuinka monta tarvitaan kuvioita... Montaa kuvioo tarvitaan, niin se x kuvaa sitä.*

Yllä olevassa kohdassa Siiri otti laskuihin mukaan mustat laatat ja muodosti sanallisen eksplisiittisen säännön. Tytöt myös keskustelivat muuttujan x merkityksestä. Opettajan avustamana Siiri huomasi, että muuttujan x paikalle ei kuulukaan sijoittaa kuvion järjestyslukua:

> *Siiri: Onkse aina ku sillei, että aina ku sillei niin ku [hakee sanoja] tarvitaan joku sadan laatan määrä, siitä vähennetään yks ja sit tää toimis tää mun taktiikka?*
>
> *[…]*
>
> *Siiri: Eli niin monta kuviota kuin tarvitaan ja sit siitä miinustetaan yks ja käytetään tota [kaavaa].*
>
> *Opettaja: Pystysit sä kirjottamaan sen tällasena kaavana, että mistä sä vähennät sen yhen?*
>
> *Siiri: No eli tähän perään miinus yks... ei... se on johonkin tähän väliin, eikö ookkin?*
>
> *Niina: Onks se kuus plus x miinus yks kertaa viis?*

Tytöt kirjoittivat lopulta kaavan muodossa $(6 + x - 1) \cdot 5$, jolla he tarkoittivat kaavaa $6 + (x - 1) \cdot 5$. Tästä huomataan, että sulkeiden käyttö ei ole oppilailla täysin hallussa, mutta tytöt osaisivat luultavasti käyttää kaavaansa tarkoittamallaan tavalla.

Poikien työskentely eteni huomattavasti nopeammin kuin tyttöjen. Antti huomasi heti alussa, että seuraavaan kuvioon tulee aina viisi valkoista laattaa lisää. Antti selitti Eerolle, että kuvioilla on aina yksi yhteinen laatta. Ilmeisesti Antti näki kuvioiden muodostuvan useista kukkamaisista kuvioista, joita yhdistää valkoinen laatta kahden mustan laatan välissä. Antti laski paperista, että kolmannessa kuviossa on 16 laattaa ja siihen täytyy lisätä 5, jolloin saadaan neljännen kuvion laattojen määrä.

Selvittäessään 10. kuvion valkoisten laattojen määrää pojat eivät enää käyttäneet rekursiivista sääntöä. Sen sijaan Antti selitti suullisesti laskeneensa $10 \cdot 5$ ja lisänneensä siihen yhden. Tässä vaiheessa pojat olivat siis muodostaneet sanallisen geneerisen säännön.

Tämän jälkeen Antti kirjoitti sanallisen eksplisiittisen säännön: ”Jokaisen mustan laatan kanssa tulee viisi valkoista laattaa ja siihen lisätään yksi päätylaatta.” Seuraavassa tehtävän alakohdassa, jossa kysyttiin kaavaa, Antti kirjoitti osittain symboleja käyttäen eksplisiittisen säännön (kuvio 5). Antti käytti muuttujana sanallista ilmaisua ”mustien laattojen määrä”. Antti oli pojista johtavammassa asemassa ja kehitti ratkaisut Eeroa nopeammin. Antti kuitenkin selitti ja perusteli ideansa Eerolle. Eero ymmärsi todennäköisesti Antin esittämät ideat, mutta ei välttämättä sisäistänyt aivan kaikkia asioita samalla tavalla kuin Antti.

Kuvio 5. Osittain symbolinen eksplisiittinen sääntö d-kohdassa

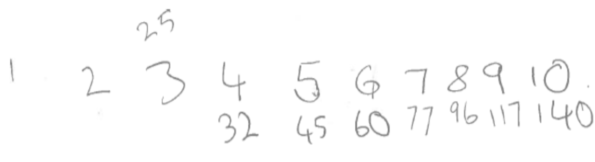
Tyttöjen ja poikien ryhmät päätyivät siis kahteen erilaiseen sääntöön. Yhteisessä keskustelussa ryhmät vertasivat sääntöjään. Erityisesti opettaja ohjasi oppilaat kiinnittämään huomiota sääntöjen kirjoittamiseen. Tyttöjen kaavasta huomattiin sulkeiden käytön ongelmallisuus ja korjattiin tilanne kirjoittamalla Niinan ehdotuksen mukaisesti sääntö muotoon $6 + (x - 1) \cdot 5$. Tytöt ehdottivat poikien kaavan kirjoittamista muotoon $x \cdot 5 + 1$. Taululle kirjoitettiin *mustien laattojen* *määrä* · 5 + 1 = *x* · 5 + 1. Opettaja kertoi oppilaille, että matematiikassa todellakin käytetään usein tuntemattoman merkitsemiseen x-kirjainta. Tästä huolimatta pojat eivät omaksuneet tätä merkintätyyliä jatkossa itselleen, vaan jatkoivat muuttujan merkitsemistä sanallisesti.

Epälineaarinen kuviojono

Tyttöjen ryhmä ei ehtinyt edetä toiseen tehtävään asti, joten tutkimusmateriaalia kyseisestä tehtävästä saatiin vain poikien ryhmältä. Antti huomasi hetken miettimisen jälkeen, että kuvioon lisättävien laattojen määrä lisääntyy aina kahdella. Pojat miettivät ja tarkastelivat, päteekö sääntö kysymyspaperissa jo valmiina oleville kuvioille ja päätyivät lopulta siihen, että neljännessä kuviossa olisi 32 laattaa. Antti kertoi sanallisesti kuinka hän päätyi vastaukseen:

> *”Tässä on 7 enemmän kun tässä ja tässä on 9 enemmän kun tässä. Ja sitten tulee 11 lisää. Ja kun tää oli 21, niin tulee 32. Ja sit siihen seuraavaan lisättäis 13.”*

Antin selityksestä käy ilmi, että hän ajatteli lukujonoa 7, 9, 11, 13, …, jonka mukaan kuvioiden laattojen lukumäärä kasvaa. Siten kyseessä oli numeerinen rekursiivinen sääntö, joka vastaa lukujen taulukointia. 10. kuvion laattojen määrän selvittämiseksi molemmat pojat myös kirjoittivat taulukon näkyviin (kuvio 6). Tämän jälkeen he kirjoittivat säännön muodoissa ”Lisättävien laattojen määrään lisätään aina 2” ja ”Lisättyjen laattojen määrä + 2”. Näin ollen he olivat muodostaneet sanallisen rekursiivisen säännön.



Kuvio 6. Numeerinen rekursiivinen sääntö

Opettaja ohjasi poikia pois rekursiivisesta ajattelutavasta kysymällä sadannen kuvion laattojen lukumäärää. Antti selitti tehtävän vaikeutta sillä, että ensimmäisessä tehtävässä laattoja tuli tasainen määrä, mutta tässä tehtävässä tuli aina eri määrä. Antti oli siis huomannut oleellisen eron näiden kahden tehtävän välillä. Opettaja neuvoi oppilaita miettimään pinta-aloja, jonka jälkeen Antti keksi täydentää kuvion neliöksi lisäämällä jokaiseen tyhjään kulmaan laatan. He kokeilivat laskua $6 \cdot 6 - 4$ neljännelle kuviolle ja huomasivat kaavan toimivan. Näin ollen pojat olivat muodostaneet symbolisen geneerisen säännön.

Tämän jälkeen molemmat pojat kirjoittivat kaavan muodossa ”kuvion numero + 2 · kuvion numero + 2 – 4”. Näin he olivat muodostaneet osittain symbolisen eksplisiittisen säännön. Tässäkin tapauksessa säännön merkinnät ovat puutteelliset sulkeiden puuttumisen vuoksi, mutta oppilaat kuitenkin tarkoittivat täysin oikeaa sääntöä, joka symbolein ilmaistuna olisi $(x + 2) \cdot (x + 2) - 4$.

Jatkuva epälineaarinen funktio

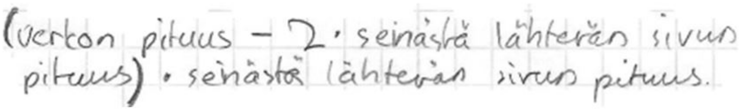
Tässä tehtävässä tytöillä oli keskittymisvaikeuksia. He ratkaisivat nopeasti a-kohdan, jossa toiseksi sivun pituudeksi oli annettu 5. Tämän jälkeen pääasiassa vain Niina pohti tehtävää pidemmälle. Hän muodosti piirin perusteella kaksi erilaista yhtälöä: $x \cdot 2 + y = 13$ m ja $13 - x \cdot 2 = y$, joissa x ja y ovat sivujen pituudet. Lisäksi Niina ehdotti pinta-alalle kaavaa $x \cdot y$, mutta ei ehtinyt tämän pidemmälle.

Pojat päättelivät a-kohdassa toisen sivun pituudeksi kolme ja laskivat pinta-alaksi $5 \cdot 3 = 15$. Tehtävän b-kohtaan, jossa kysyttiin kaavaa, Antti keksi seuraavan idean:

> *Eiks tää kaava ois niinku sillai, että kaks kertaa viis miinus 13 ja sitten se vastaus otetaan siitä ja se kerrotaan sen sivun pituuden kanssa ja siitä tulee pinta-ala? … Eikun 13 miinus kaks kertaa viis...*

Näin ollen Antti oli muodostanut sanallisen geneerisen säännön. Hän myös merkitsi symbolisen geneerisen säännön: $(13 \text{ m} - 2 \cdot 5) \cdot 5 = 15 \text{ m}^{2.}$

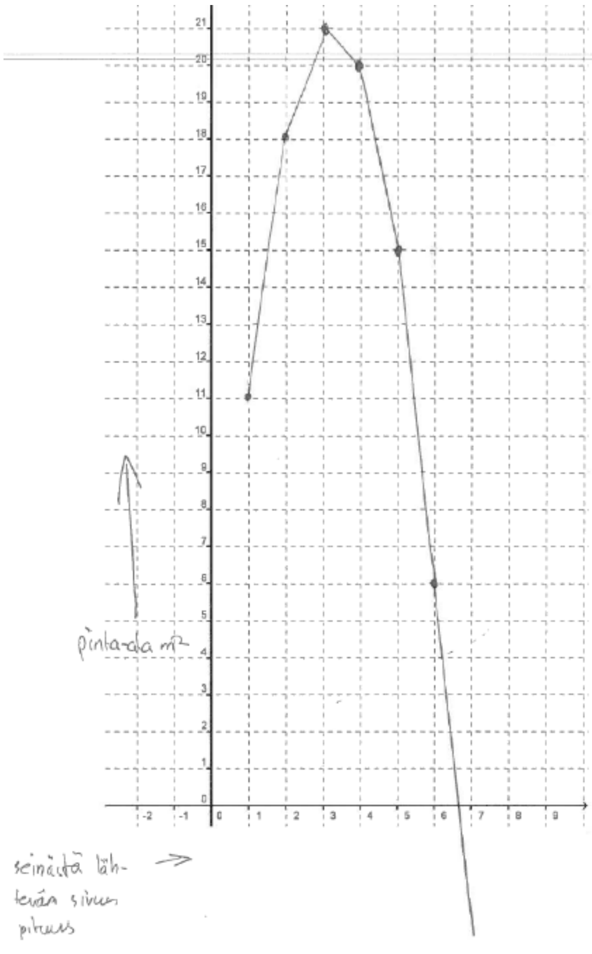
Tämän jälkeen Antti kysyi opettajalta pitäisikö kaava tehdä tapauksessa, jossa verkon pituutta ei tiedetä. Geneerinen sääntö auttoi varmasti myös yleisen lausekkeen muodostamisessa, koska Antti esitti nopeasti sanallisen eksplisiittisen säännön: ”Sithän se ois niinkun verkon pituus miinus kaks kertaa seinästä lähtevän sivun pituus?” Molemmat pojat myös merkitsivät osittain symboleja käyttäen eksplisiittisen säännön (kuvio 7).


(verkon pituus – 2 · seinästä lähtevän sivun pituus) · seinästä lähtevän sivun pituus.

Kuvio 7. Osittain symbolinen eksplisiittinen sääntö

Vaikka Niina ei ehtinytkään itse ratkaista tätä tehtävää, niin hän ilmeisesti ymmärsi, kun tunnin lopussa käytiin yhdessä läpi poikien kehittämä sääntö. Tällöin Niina osasi kertoa, että poikien kaavassa seinästä lähtevän sivun pituus oli muuttuja, jota voitiin merkitä lyhyemmin kirjaimella x. Opettaja kirjoitti taululle Niinan sanelun mukaan poikien säännön muotoon $(13 - 2 \cdot x) \cdot x$, joka on symbolinen eksplisiittinen sääntö.

Pojat esittivät säännön myös graafisesti (kuvio 8) ja määrittivät kuvasta pinta-alan suurimmaksi arvoksi 21 m^2. Tähän sisältyy jo funktion suurimman arvon olennainen idea, joka tavanomaisesti käsitellään lukiossa. Tosin vastaus itsessään ei ole täysin oikein, koska pojat eivät huomioineet muita kuin kokonaislukuarvoja.



Kuvio 8. Graafinen sääntö

Pohdinta

Tulosten mukaan oppilaat näyttivät olevan valmiita funktioiden tarkasteluun. He tarkastelivat useita algebrallisia ideoita kuten muuttujan merkitystä ja erilaisia merkintöjä sekä algebrallista yleistämistä ja lausekkeiden merkintöjä. Siten tutkimuksen tulokset tukevat aiempia tutkimuksia, joissa algebraa on havaittu voitavan opettaa tavanomaista aiemmin (Carraher ym., 2008; Carraher ym., 2006;

Cooper & Warren, 2008; Rivera & Becker, 2008; Warren ym., 2006). Tutkimuksessa käytetyt tehtävät oli tarkoituksella laadittu haastaviksi, jotta voidaan tutkia kuinka syvällisiin päättelyihin oppilaat etenevät. Kolmas tehtävä on jopa tyypillinen lukion matematiikan ääriarvosovellus.

Oppilaiden välillä oli myös eroja. Toiselle ryhmälle lineaarinen funktio tuntui riittävän haastavalta, kun taas toinen ryhmä käsitteli epälineaarisia funktioita. Tyttöjen osalta on huomattava, että heille ei aikarajoitteiden takia ollut edes mahdollisuutta ratkaista tehtävää 2, jossa oli epälineaarinen funktio. Poikien välillä oli myös eroja, sillä Antti tuntui keksivän suurimman osan ryhmän ideoista. Kuitenkin oppilaat myös keskustelivat ja selittävät toisilleen ideoita. Huomattavaa on myös, että koontivaiheessa oppilaat pystyivät tarkastelemaan toistensa ideoita vaikka eivät olleetkaan ehtineet ratkaista tehtävää itse.

Yksi syy oppilaiden rikkaisiin ideoihin oli ilmeisesti se, että heidän annettiin käyttää omia merkintöjään vaikka ne olivatkin puutteellisia (esim. sulkeiden käyttö). Aiemmissakin tutkimuksissa on esitetty, että opetuksessa tulisi keskittyä algebrallisiin ideoihin merkintöjen sijaan (esim. Hassinen, 2006; Kieran, 2007). Mikäli liian nopeasti siirrytään symboleilla esitettyihin sääntöihin jäävät ne oppilaille merkityksettömiksi ulkoaopittaviksi säännöiksi. Sen sijaan oppilaat tarvitsevat aikaa ja mahdollisuuksia muodostaa omia ideoitaan ilman formaaliuden vaatimusta. Esimerkiksi oppilaiden omat epäformaalit merkinnät muuttujalle ovat rikkaus, joiden avulla voidaan ymmärtää, mitä muuttuja tarkoittaa.

Aiemmissa tutkimuksissa on esiintynyt eriäviä mielipiteitä rekursiivisten sääntöjen hyödyllisyydestä. Toiset tutkijat ovat esittäneet rekursiivisen ajattelutavan olevan jopa haitallinen (esim. Amit & Neria, 2008), kun taas toiset pitävät sitä hyödyllisenä (esim. Carraher ym., 2008; Francisco & Hähkiöniemi, 2012). Tässä tutkimuksessa rekursiivisen ajattelutavan hyödyllisyys tai haitallisuus jäi epäselväksi. Toisaalta rekursiivinen ajattelutapa auttoi oppilaita pääsemään alkuun ja hahmottamaan tilanteen. Siitä ei kuitenkaan tuntunut olevan välitöntä hyötyä eksplisiittisen säännön muodostamisessa.

Sen sijaan tässä tutkimuksessa huomattiin geneerisen säännön auttavan eksplisiittisen säännön muodostamisessa. Kaikissa tapauksissa ennen eksplisiittisen säännön muodostamista oppilaat keksivät geneerisen säännön. Erityisen hyvin geneerisen säännön hyödyllisyys ilmenee 3. tehtävässä, jossa Niina laski puuttuvan sivun pituuden erikseen, kun taas Antti yhdisti sen pinta-alan laskemiseen ($(13 \text{ m} - 2 \cdot 5) \cdot 5 = 15 \text{ m}^2$), josta oli helppo muuttaa sivun pituuden tilalle muuttuja. Radfordin (2010) mukaan tällainen geneerinen sääntö onkin jo yksi algebrallisen yleistämisen muoto. Tämäkin korostaa sitä, että oppilaita ei voi pakottaa aloittamaan suoraan formaalista muuttujan käytöstä, vaan sitä pitää pohjustaa esimerkiksi geneerisellä ajattelulla ja omien merkintöjen luomisella muuttujalle.

Tutkimuksen tuloksia tulkittaessa on huomioitava, että kyseessä on muutaman oppilaan tapaustutkimus. Tulokset auttavat ymmärtämään, millaista algebrallista ajattelua oppilaat voivat harjoittaa tällaisessa lähestymistavassa. Jatkotutkimuksissa voitaisiin keskittyä laadullisen tutkimuksen keinoin kehittämään tässä esitettyä lähestymistapaa ja tarkastelemaan oppilaiden ajattelutapoja tai muodostamaan määrällistä tietoa oppilaiden algebrallisesta ajattelusta ja sen yhteyksistä opetukseen.

Lähteet

Amit, M. & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 111–129.

Carraher, D. W., Martinez, M., & Schliemann, D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 3–22.

Carraher, D. W., Schliemann, D., Brizuela, M. B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.

Cooper, T., & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 23–37.

Francisco, J. & Hähkiöniemi, M. (2012). Students' ways of reasoning about nonlinear functions in Guess-My-Rule games. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10(5), 1001–1021.*

Hassinen, S. (2006). *Idealähtöistä koulualgebraa, IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla.* Helsingin yliopisto. Käyttäytymistieteellinen tiedekunta. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274.

Hähkiöniemi, M. (2011). Johdatus GeoGebra-avusteiseen tutkivaan matematiikkaan. Teoksessa M. Hähkiöniemi (toim.), *Geogebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa: tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta* (ss. 4–13). Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto. https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/37131/978-951-39-4623-4.pdf. [Luettu 27.2.2014].

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Teoksessa F. K. Lester Jr. (toim.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (ss. 707–762). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics, Information Age.

Kupari, P., Vettenranta, J. & Nissinen, K. (2012). *Oppijalähtöistä pedagogiikkaa etsimään. Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa.* Jyväskylän yliopistopaino, Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopisto.

Powell, A., Francisco, J., & Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405–435.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4(2), 37–62.*

Rautopuro, J. (toim.) (2013). Hyödyllinen pakkolasku. Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012. Opetushallitus.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 40*(1), 65–82.

Warren, E., Cooper, T., & Lamb, J. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 208–223.

Abstract

Algebra is a weak area of mathematics for Finnish students. At the same time several studies suggest that students are able to construct algebraic ideas earlier than usual. The aim of this research is to find out what kind of algebraic ideas students construct when studying functions in the 7th grade. In this study, two lessons about linear and non-linear functions were implemented. The lessons were videotaped, students' talk was audio-recorded and written products were collected. According to the results, the students seemed to be ready for considering functions and they built several mathematical ideas about functions. However, there were differences between the students. For some, linear functions were sufficiently challenging, while others were even able to study non-linear functions. It appears that students need time and opportunities to construct key ideas of the concept of function before being taught the formal ideas. Students also benefit if they are encouraged to use their own notation.

Keywords

Algebraic thinking, mathematical thinking, inquiry learning