

Kvadraattinen kuvaus ja ympyrän kierto

Saara Könönen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2014

Tiivistelmä: Saara Könönen, *Kvadraattinen kuvaus ja ympyrän kierto*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 47 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2014.

Tässä tutkielmassa tutustutaan kahteen käyttäytymiseltään erilaiseen diskreettiin dynaamiseen systeemiin: kvadraattiseen (tai logistiseen) kuvaukseen ja ympyrän kiertokuvaukseen. Tarkastelun keskiössä ovat pisteiden radat näissä kuvauksissa. Kvadraattisen kuvauksen $Q_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ dynamiikan osoitetaan olevan melko hyvin ennakoitavissa, kun $0 \leq \mu < 4$. Pohjana tarkasteluille ovat jaksolliset pisteet ja syklit sekä näiden asymptoottinen käyttäytyminen kuvausta iteroitaessa. Lisäksi osoitetaan, että kvadraattinen kuvaus bifurkoi ja kuvaus haarautuu tietyillä vakion μ arvoilla. Kuvaus kahdentuu tihenevästi, kun vakion μ arvo kasvaa, kunnes käyttäytyminen on kaoottista. Kaoottinen alue ei kuitenkaan ole yhtenäinen, vaan välillä käytös tasapainottuu, ja muuttuu jaksolliseksi.

Kvadraattisen kuvauksen osoitetaan myös olevan yhteydessä Cantorin joukkoon. Tutkielmassa osoitetaan, että niiden pisteiden joukko, jotka vakion μ arvolla $\mu \geq 4$ iteroituvat kuvauksella Q_μ välille $[0, 1]$ on Cantorin joukko, eli perfekti, erillinen ja suljettu. Lisäksi osoitetaan, että kvadraattisen kuvauksen dynamiikka on kaoottinen, kun $\mu > 4$. Tällöin dynamiikan ennustaminen on mahdotonta ja sen käyttäytyminen riippuu valitusta alkupisteestä.

Kun tarkastellaan jonkin pisteen rataa ympyrän kierrossa $R_\alpha(x) = xe^{2\pi\alpha}$, osoitetaan että vakion α valinta vaikuttaa käyttäytymiseen merkittävästi. Tutkielmassa osoitetaan, että rationaalinen α tekee pisteen radasta jaksollisen, kun taas irrationaalinen vakion α valinta tekee radasta tiheän. Tutkielman lopuksi osoitetaan Birkhoffin keskiarvolauseen pätevän irrationaaliselle ympyrän kiertokuvaukselle ja osoitetaan irrationaalisen ympyrän kierron olevan yksikäsitteisesti ergodinen.

Avainsanat: dynaaminen systeemi, kvadraattinen kuvaus, logistinen kuvaus, bifurkaatio, ympyrän kierto, Birkhoffin keskiarvo,

Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Kvadraattisen kuvauksen tarkastelua	3
1.1. Kiintopisteet ja jaksolliset pisteet	3
1.2. Kvadraattinen kuvaus	7
Luku 2. Bifurkaatio	11
2.1. Puoleensa vetävät ja hylkivät 2-syklit	11
2.2. 3-syklin synty	17
2.3. Sovelluksia	21
Luku 3. Cantorin joukko ja kaaos	23
3.1. Cantorin joukko	24
3.2. Kaaos	29
Luku 4. Ympyrän kierrot	32
4.1. Ympyrä ja sen kierto	32
4.2. Rationaalinen ja irrationaalinen kierto	34
Luku 5. Birkhoffin keskiarvo	43
Viitteet	48

Johdanto

Diskreetit dynaamiset systeemit keskittyvät tarkastelemaan iteratiivista prosessia, jossa eri tilanteet seuraavat toisiaan: mitä tapahtuu annetulle alkuarvolle, kun sitä kuvataan jollakin kuvauksella ja tästä saatua arvoa kuvataan uudelleen tällä samaisella kuvauksella. Tätä jatketaan ja edeltävä tilanne määrittää aina seuraavan. Dynaamisten systeemien avulla pyritään ennakoimaan ilmiöitä, mutta annetut olosuhteet voivat aiheuttaa sen, että tällainen ennakointi on hyvin vaikeaa tai jopa mahdotonta, jolloin systeemi osoittautuu kaoottiseksi. Vastakohta diskreeteille dynaamisille systeemeille ovat jatkuvat dynaamiset systeemit, jotka eivät tarkastele muutoksia erillisinä tilanteina, vaan jatkuva-aikaisena prosessina.

Dynaamisia prosesseja, diskreetteja ja jatkuvia, esiintyy ympärillämme hyvin monella tapaa ja ajassa muuttuvien ilmiöiden tarkastelu onkin keskeistä monilla tieteenaloilla aina klassisesta mekaniikasta matemaattiseen biologiaan ja ekonomiaan. Monia yhteiskunnassa tapahtuvia ilmiöitä ja niissä tapahtuvia muutoksia pyritään mallintamaan ja ennakoimaan dynaamisten systeemien avulla. Dynaamisten systeemien tutkimuksen juuret ovat jo 1600-luvulla Newtonin mekaniikassa ja aurinkokunnan liikkeen tutkimuksessa, mutta varsinainen läpilyönti tapahtui 1800-luvun lopulla. Tällöin H.J. Poincaré (1854-1912) alkoi ensimmäisenä tutkia epälineaarisia yhtälöryhmiä ja ennen kaikkea ilmiöissä tapahtuvia laadullisia muutoksia sen sijaan, että hän olisi keskittynyt esimerkiksi määrittämään tarkkoja planeettojen paikkoja kullakin ajanhetkellä. Poincaré oli lisäksi ensimmäinen, joka esitti ajatuksen ilmiöiden mahdollisesta kaoottisesta, ennakoimattomasta käyttäytymisestä. 1900 – *luvulla* osoitettiin, että jo yhden muuttujan systeemi voi käyttäytyä kaoottisesti. Dynamiikan sovellukset keskittyivät aluksi pitkälti fysiikkaan ja tekniikan alalle, ja sen myötä kehittyivät monet tekniset laitteet, kuten radio ja laservalo. Tietokone mullisti myös dynamiikan alan ja mahdollisti laskukapasiteetillaan dynaamisten systeemien käsittelyn ennennäkemättömän pitkälle. [16]

Tässä tutkielmassa keskitytään diskreetteihin dynaamisiin systeemeihin ja otetaan tarkastelun kohteeksi kaksi dynamiikaltaan melko erilaista systeemiä. Tämä tutkielma on yksi osoitus siitä, että yksinkertaiseltakin näyttävä kuvaus voi dynamiikaltaan osoittautua hyvinkin monimutkaiseksi. Ensimmäiset kolme lukua käsittelevät *kvadraattisen kuvauksen*

$$Q_\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, Q_\mu(x) = \mu x(1 - x)$$

dynamiikkaa vakion μ eri arvoilla. Tämä kuvaus tunnetaan myös nimellä *logistinen kuvaus*. Ensimmäisessä luvussa tutustutaan kuvauksen dynamiikan ymmärryksen kannalta olennaisiin peruskäsitteisiin, ja tarkastellaan kuvauksen Q_μ jaksollisia pisteitä ja pisteen x rataa vakion μ eri arvoilla. Toisessa luvussa nähdään, kuinka tämä kvadraattinen kuvaus tietyillä vakion μ arvoilla *bifurkoi*, ikään kuin haarautuu, ja synnyttää

aina uusia syklejä. Tässä luvussa osoitetaan lisäksi, että kvadraattisella kuvauksella on 3-sykli ja että tämän 3-syklin olemassa olosta seuraa, että kuvauksella on kaikki n -sykkit. Tämä on erikoistapaus *Sarkovskiin lauseesta*. Kolmannessa luvussa siirrytään tarkastelmaan kvadraattista kuvausta, kun $\mu \geq 4$, ja tutkitaan kvadraattisen kuvauksen yhteyttä Cantorin joukkoon. Lopuksi osoitetaan, että kuvaus Q_μ on kaoottinen, kun $\mu > 4$. Tällöin kuvauksen käyttäytymisen ennakointi osoittautuu mahdottomaksi, toisin kuin aiemmissa tapauksissa.

Ilmiöiden ymmärrystä näissä luvuissa on pyritty helpottamaan erilaisten kaavioiden ja kuvaajien avulla. Joissain tapauksissa päätelmät perustuvatkin pitkälti kuviin ja aiempaan kirjallisuuteen, sillä pisteen x radan ja n -sykliä pisteiden määrittäminen vaatisi tietyillä vakion μ arvoilla useampiasteisten polynomien ratkaisua. Pisteiden x rataa ja syklejä on kuitenkin selvitetty myös laskien, ja olennaisesti laskuprosessi on samanlainen myös muilla vakion μ arvoilla, joskin todistukset ja laskuvaiheet ovat huomattavasti työläämpiä ja pidempiä. Erikseen mainittuja kuvioita lukuun ottamatta kaikki tutkielmassa käytetyt kuvaajat on tehty koodina L^AT_EX-ohjelmiston tikzpicture-pakettia käyttäen.

Toinen dynaaminen systeemi, johon tässä tutkielmassa keskitytään, on *ympyrän kiertokuvaus*

$$R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1, R_\alpha(x) = xe^{2\pi\alpha}$$

ja pisteen x rata tässä kierrossa. Ympyrän kiertoja tarkasteltaessa keskitytään pääasiassa irrationaaliseen kiertoon, jolloin kuvauksessa vakio α on irrationaalinen. Yksi keskeisistä tuloksista tarkasteluissa on, että irrationaalisessa kierrossa pisteen x rata on tiheä. Rationaalisessa ympyrän kierrossa pisteen rata puolestaan on jaksollinen.

Viimeisessä luvussa tutustutaan lyhyesti ergodisuuteen *Birkhoffin keskiarvon* kautta. Ensin osoitetaan Birkhoffin keskiarvon tila- ja aikakeskiarvon yhtäsuuruuden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k) = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$$

pätevän myös ympyrän kierrolle, eli kun valitaan $f = R_\alpha$, ja osoitetaan irrationaalisen ympyrän kierron olevan ergodinen.

Dynaamisiin systeemeihin ovat perehtyneet lukuisat tutkijat ja matemaatikot. Tässä tutkielmassa keskeisinä lähdeveksinä on käytetty muun muassa Hasselblattingin ja Katokin teosta *A First Course in Dynamics* [4], Devaneyn teoksia *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* [2] ja *A First Course in Chaotic Dynamical Systems* [1] sekä Gulickin teosta *Encounters with Chaos And Fractals* [3]. Lisäksi Strogatzin teos *Nonlinear Dynamics and Chaos* [16] on tarjonnut käytännönläheistä näkökulmaa tämän tutkielman ilmiöiden ymmärrykseen. Näiden lisäksi perustason kurssien luentomuistiinpanot sekä aihetta käsittelevät artikkelit ovat luoneet pohjaa asian ymmärrykselle. Kaikki tutkielmassa käytetyt lähteet löytyvät lähdeluettelosta.

Kvadraattisen kuvauksen tarkastelua

Yksinkertaisimmillaan diskreetti dynaaminen systeemi voi olla esimerkiksi pankkitilillä olevan rahasumman kasvumalli $x_n = a \cdot x_{n-1}$. Näin ollen 8% korkoa kasvava pääoman karttumista kuvaava kasvumalli saadaan, kun $a = 1,08$. Tällaisen dynaamisen systeemin käyttäytymistä pystytään siis melko helposti ennakoimaan, mutta on useita dynaamisia systeemejä, jotka niin ikään vaikuttavat yksinkertaisilta systeemeiltä, mutta joiden käyttäytyminen osoittautuu huomattavasti edeltävää monimutkaisemmaksi. Tutkielman kolmessa ensimmäisessä luvussa tutustutaan kvadraattisen kuvauksen

$$Q_\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, Q_\mu(x) = \mu x(1 - x)$$

dynamiikkaan ja tarkastellaan sen iteraattien

$$Q_\mu^k = \underbrace{Q_\mu \circ Q_\mu \circ \cdots \circ Q_\mu}_{k \text{ kpl}}$$

käyttäytymistä vakion $\mu \geq 0$ eri arvoilla. Tämän ensimmäisen luvun aluksi avataan peruskäsitteitä, joiden ymmärrys helpottaa myöhempien ilmiöiden ymmärtämistä ja tämän vasta tämän jälkeen luodaan tarkempi katsaus kvadraattiseen kuvaukseen. Seuraavassa luvussa tutustutaan bifurkaatioon, ikään kuin kuvauksen haarautumiseen, ja kvadraattisen kuvauksen sovelluksiin. Kolmas luku käsittelee kvadraattisen kuvauksen aiemmasta jonkin verran poikkeavaa käyttäytymistä vakion μ arvoilla $\mu \in [4, \infty[$

Tämän luvun tarkasteluissa pääasiallisina lähteinä on käytetty Devaney'n teoksia *A first course in chaotic dynamical systems. Theory and experiment* [1], ja *An introduction to chaotic dynamical systems* [2], Gulickin teosta *Encounters with chaos and fractals* [3] sekä Hasselblattin ja Katokin teosta *A first course in dynamics* [4].

1.1. Kiintopisteet ja jaksolliset pisteet

MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoon $X \subset \mathbb{R}$ ja $f : X \rightarrow X$. Piste $x \in X$ *rata* funktiossa f on

$$\mathcal{O}_f = \{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Täten funktion Q_μ iteraattien tarkastelu johtaa pisteen x radan tarkasteluun. Myöhemmin käy ilmi, että vakion μ valinta vaikuttaa merkittävästi pisteen x radan käyttäytymiseen kvadraattisella kuvauksella.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Piste $p \in X$ on funktion $f : X \rightarrow X$ *kiintopiste*, jos $f(p) = p$. Kiintopiste p on *puoleensavetävä*, jos on olemassa avoin väli $I =]p - \epsilon, p + \epsilon[$ siten, että jos $x \in X$ ja $x \in I$, niin $f^n(x) \rightarrow p$. Kiintopiste p on puolestaan *hylkivä*, jos on olemassa avoin väli $J =]p - \epsilon, p + \epsilon[$ siten, että jos $y \in X$ ja $y \in J$, mutta $y \neq p$, niin $|f(y) - p| > |y - p|$.

HUOMAUTUS 1.3. Graafisesti kiintopisteen määritelmä voidaan tulkita siten, että piste p on kuvauksen f kiintopiste, jos ja vain jos funktion f graafi sivuaa tai leikkaa suoraa $y = x$ pisteessä (p, p) .

LAUSE 1.4. *Olkoon $f : X \rightarrow X$ jatkuva funktio pisteessä p ja olkoon $x \in X$. Oletetaan lisäksi, että pisteen x iteraatit kuuluvat joukkoon X . Jos $f^n(x) \rightarrow p$, kun $n \rightarrow \infty$, niin p on kiintopiste.*

TODISTUS. Oletuksen mukaan $f^n(x) \rightarrow p$, joten $f^{n+1}(x) \rightarrow p$. Koska f on jatkuva pisteessä p , niin $f(f^n(x)) \rightarrow f(p)$. Koska $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, niin $f^{n+1}(x) \rightarrow f(p)$ ja tästä edelleen raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla saadaan, että $f(p) = p$. Siten p on kiintopiste. \square

SEURAUUS 1.5. *Oletetaan, että f on jatkuva funktio suljetulla välillä ja että jono $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ on rajoitettu ja monotoninen. Tällöin on olemassa kiintopiste p siten, että $f^n(x) \rightarrow p$, kun $n \rightarrow \infty$.*

TODISTUS. Seuraa lauseesta 1.3 ja siitä, että rajoitettu monotoninen jono suppenee aina. \square

LAUSE 1.6. *Olkoon $f : X \rightarrow X$ differentioituva funktio ja p sen kiintopiste.*

- (i) *Jos $|f'(p)| < 1$, niin p on puoleensavetävä.*
- (ii) *Jos $|f'(p)| > 1$, niin p on hylkivä.*
- (iii) *Jos $|f'(p)| = 1$, niin p on neutraali, jolloin se voi olla puoleensavetävä, hylkivä tai ei kumpaakaan.*

TODISTUS. Todistetaan ensin (i). Koska $|f'(p)| < 1$, niin derivaatan määritelmästä seuraa, että on olemassa positiivinen vakio $C < 1$ ja avoin väli $I =]p - \epsilon, p + \epsilon[$ siten, että jos $x \in I$ ja $x \neq p$, niin pätee

$$\left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right| \leq C, \quad (1.1)$$

ja siten $|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq C|x - p|$ kaikille $x \in I$. Nyt siis $f(x) \in I$, koska $0 < C < 1$ ja $x \in I$, ja siten $f(x)$ on vähintään yhtä lähellä lukua p kuin luku x on.

Jos $f^n(x) = p$ jollekin $n \in \mathbb{N}$, niin tällöin $f^n(x) \rightarrow p$, kun $n \rightarrow \infty$, ja väite seuraa. Voidaan siis olettaa, että $f^n(x) \neq p$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Induktiolla voidaan osoittaa, että pätee

$$|f^n(x) - p| \leq C^n|x - p| \text{ kaikille } n \geq 1. \quad (1.2)$$

Kun $n = 1$, väite seuraa yhtälöstä (1.1). Oletetaan sitten, että yhtälö (1.2) pätee jollekin $n > 1$. Huomataan, että $f^n(x) \in I$, koska $0 < C^n < C < 1$, ja siten sijoittamalla yhtälöön (1.1) muuttujan x paikalle $f^n(x)$ ja soveltamalla induktio-oletusta (1.2) saadaan

$$|f^{n+1}(x) - p| = |f(f^n(x)) - p| \leq C|f^n(x) - p| \leq C(C|x - p|) = C^{n+1}|x - p|.$$

Koska $C^n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, niin $f^n(x) \rightarrow p$ ja (i) on todistettu. Väitteen (ii) todistus on vastaavanlainen edellisen todistuksen kanssa.

Väitteen (iii) osoittamiseksi käyvät esimerkiksi kuvaukset $f(z) = \arctan z$, jolle $f'(0) = 1$ ja piste 0 on puoleensavetävä kiintopiste, $g(z) = z^2 + \frac{1}{4}$, jolle $g'(\frac{1}{2}) = 1$ ja jolle piste $\frac{1}{2}$ ei ole puoleensavetävä eikä hylkivä, ja kuvaus $h(z) = z^3 + z$, jolle $h'(0) = 1$ ja jolle piste 0 on hylkivä kiintopiste. Osoitetaan näistä toinen ja kolmas.

Piste $p = \frac{1}{2}$ ei ole puoleensavetävä eikä hylkivä, sillä jos valitaan $x > \frac{1}{2}$, niin tällöin $|g(x) - p| = |x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}| = |x^2 - \frac{1}{4}| = |(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})| > |x - \frac{1}{2}|$, koska $|x + \frac{1}{2}| > 1$. Siten kiintopisteen pisteen $p = \frac{1}{2}$ oikealla puolella piste on hylkivä. Kuitenkaan piste p ei ole hylkivä koko välillä $]p - \epsilon, p + \epsilon[$, sillä hylkivän kiintopisteen määritelmä ei täyty, jos $x < \frac{1}{2}$. Tällöin nimittäin $|g(x) - p| = |(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})| < |x - \frac{1}{2}|$. Koska p on hylkivä, kun $x > \frac{1}{2}$, niin tällöin p ei myöskään voi olla puoleensavetävä välillä $] \frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon[$ ja siten piste p ei ole hylkivä eikä puoleensavetävä.

Osoitetaan sitten kolmas. Olkoon $x \in]p - \epsilon, +\epsilon[=] - \epsilon, \epsilon[$, $\epsilon > 0$. Nyt $|h(x) - p| = |h(x) - 0| = |x^3 + x| = |x(x^2 + 1)| > |x| = |x - p|$, ja siten piste $p = 0$ on määritelmän mukaan hylkivä kiintopiste. \square

ESIMERKKI 1.7. Olkoon $\mu > 0$ vakio ja kvadraattinen kuvaus

$$Q_\mu(x) = \mu x(1 - x) = \mu x - \mu x^2, 0 \leq x \leq 1.$$

Etsitään ensin ne vakion μ arvot, joilla 0 on puoleensavetävä kiintopiste, ja sen jälkeen etsitään vakion μ arvot, joilla löydetään muita, nollasta eroavia kiintopisteitä. Selvitetään lisäksi näiden nollasta eroavien kiintopisteiden laatu.

Huomataan ensin, että x on kiintopiste, jos ja vain jos $x = \mu x - \mu x^2$. Nyt piste $x = 0$ on kuvauksen kiintopiste kaikilla $\mu \geq 0$. Riittävä ehto sille, että x on puoleensavetävä kiintopiste on, että $|Q'_\mu(x)| < 1$. Nyt $Q'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ ja siten $Q'_\mu(0) = \mu$, ja tästä huomataan, että 0 on puoleensavetävä kiintopiste, kun $0 < \mu < 1$, ja hylkivä, kun $\mu > 1$.

Osoitetaan vielä, että jos $\mu = 1$, niin 0 on puoleensavetävä: Olkoon $\epsilon > 0$ ja $z \in]0, \epsilon[$. Nyt $Q_1(z) = z - z^2$, missä $0 < z < \epsilon < 1$ ja huomataan, että jono $\{Q_1^n(z)\}_{n=0}^\infty$ on rajoitettu ja vähenevä, sillä $0 < z - z^2 < z < 1$. Siten jono suppenee kohti kiintopistettä 0 ja määritelmän 1.2 mukaan tämä kiintopiste on puoleensavetävä.

Oletetaan sitten, että $x \neq 0$. Tällöin x on kiintopiste, jos ja vain jos

$$x = \mu x - \mu x^2$$

eli

$$1 = \mu - \mu x,$$

mikä edelleen on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$x = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Jos $0 < \mu < 1$, niin $x = 1 - \frac{1}{\mu} < 0$, joten x ei ole määrittelyjoukossa. Siten nollasta eroava kiintopiste $1 - \frac{1}{\mu}$ löytyy vain, jos $\mu > 1$.

Koska

$$Q'_\mu(1 - \frac{1}{\mu}) = \mu - 2\mu(1 - \frac{1}{\mu}) = 2 - \mu,$$

niin kiintopiste $1 - \frac{1}{\mu}$ on puoleensavetävä, jos $1 < \mu < 3$ ja hylkivä jos $\mu > 3$.

Jos $\mu = 3$, niin kiintopiste $1 - \frac{1}{\mu}$ on neutraali.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Jos p on funktion $f : X \rightarrow X$ kiintopiste, niin pisteen p *attraktioallas* (basin of attraction) koostuu niistä pisteistä $x \in X$, joille pätee $f^n(x) \rightarrow p$, kun $n \rightarrow \infty$. Tätä kiintopisteen p attraktioallasta merkitään symbolilla B_p .

ESIMERKKI 1.9. Olkoon $f(x) = x^2$. Kiintopisteen 0 attraktioallas B_0 on $] -1, 1[$, sillä jos $|x| < 1$ niin $f^n(x) = x^{2^n} \rightarrow 0$. Jos taas $|x| \geq 1$, niin $|f^n(x)| \geq 1$, joten $x \notin B_0$.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Olkoon $f : X \rightarrow X$ ja $x_0 \in X$. Piste x_0 on *n-jaksollinen piste*, jos $f^n(x_0) = x_0$ jollekin $n > 0$ ja jos lisäksi $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ ovat eri lukuja. Pisteellä x_0 on siten *n-jaksollinen rata* $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ ja radan pisteet muodostavat *n-syklin*.

ESIMERKKI 1.11. Funktiolla $f(x) = x^2 - 1$ on jaksolliset pisteet 0 ja -1 , sillä $f(0) = -1, f(-1) = 0$. Nämä arvot muodostavat 2-syklin $\{0, -1\}$.

Huom. Kiintopisteet ovat jaksollisia pisteitä, joiden jakson pituus on 1. Lisäksi jos x on funktion f *n-jaksollinen piste*, niin x on funktion f^n kiintopiste, ja tämän vuoksi on luontevaa määritellä puoleensavetävät ja hylkivät jaksolliset pisteet.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Olkoon x funktion f *n-jaksollinen piste*. Piste x on *puoleensavetävä n-jaksollinen piste*, jos x on puoleensavetävä kiintopiste funktiolle f^n . Vastaavasti x on *hylkivä n-jaksollinen piste*, jos se on hylkivä kiintopiste funktiolle f^n .

MÄÄRITELMÄ 1.13. Pisteen x_0 sanotaan olevan *tuleva kiintopiste* tai *tuleva jaksollinen piste* (eventually fixed/periodic point), jos piste x_0 ei ole kiintopiste tai jaksollinen piste, mutta joku piste sen radalla on kiintopiste tai jaksollinen piste. Esimerkiksi 1 on tuleva jaksollinen piste funktiolle $f(x) = x^2 - 1$, koska $f(1) = 0$ ja siten pisteen 1 rata on $1, 0, -1, 0, -1, \dots$. Tällöin esimerkiksi jaksollinen piste 0 on pisteen 1 radalla.

ESIMERKKI 1.14. $x_0 = 1$ on tuleva jaksollinen piste funktiolle $f(x) = x^2 - 1$, koska $f(1) = 0$ ja siten pisteen 1 rata on $1, 0, -1, 0, -1, \dots$. Tällöin esimerkiksi jaksollinen piste 0 on pisteen 1 radalla.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Jos funktio f on jatkuva puoleensavetävässä (vast. hylkivässä) *n-jaksollisessa* pisteessä x_0 , niin jokainen piste radalla $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ on puoleensavetävä (vast. hylkivä) *n-jaksollinen piste*. Tällöin sanotaan, että koko *n-sykli* on puoleensavetävä (vast. hylkivä).

Puoleensavetävän *n-syklin* $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ attraktioallas muodostuu pisteistä x , joille pätee $|f^n(x) - f^{n+k}(x_0)| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, jollekin luonnolliselle luvulle k .

Jaksollisen pisteen x_0 *välitön attraktioallas* on suurin pisteen x_0 sisältämä väli J , jolle pätee $|f^n(x) - f^n(x_0)| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$ kaikille $x \in J$. *n-syklin välitön attraktioallas* on syklin sisältämien pisteiden välittömien attraktioaltaiden yhdiste.

Kahdessa seuraavassa lausessa löydetään keino tunnistaa puoleensavetävä/hylkivä *n-sykli* kuvauksen derivaattaa käyttäen.

LAUSE 1.16. *Olkoon $\{x, y\}$ funktion f 2-sykli. Jos f^2 on differentioituva pisteissä x ja y , niin tällöin pätee*

$$(f^2)'(x) = f'(x)f'(y) = (f^2)'(y).$$

TODISTUS. Koska $\{x, y\}$ on 2-sykli, niin pätee $f(x) = y$, ja ketjusääntöä käyttäen saadaan

$$(f^2)'(x) = (f \circ f)'(x) = [f'(x)][f'(f(x))] = f'(x)f'(y).$$

Koska pätee myös $f(y) = x$, niin $(f^2)'(y) = f'(y)f'(x)$. □

LAUSE 1.17. *Olkoon $\{x, y\}$ funktion f 2-sykli.*

- (i) Jos $|f'(x)f'(z)| < 1$, niin 2-sykli on puoleensavetävä.
(ii) Jos $|f'(x)f'(z)| > 1$, niin 2-sykli on hylkivä.

TODISTUS. Kohdan (i) oletuksen mukaan $|f'(x)f'(z)| < 1$, joten lauseen 1.16 nojalla $|(f^2)'(x)| = |(f^2)'(y)| < 1$ ja siten lauseen 1.6 ja puoleensavetävän jaksollisen pisteen määritelmän nojalla pisteet x ja $y = f(x)$ ovat puoleensavetäviä. Koska syklin molemmat pisteet ovat puoleensavetäviä, niin koko sykli on puoleensavetävä. Kohdan (ii) todistus menee vastaavasti. \square

ESIMERKKI 1.18. Olkoon $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Näytetään, että 2-sykli $\{0, 2\}$ on hylkivä.

Koska $f(0) = 2$ ja $f(2) = 0$, niin $\{0, 2\}$ on 2-sykli. $f'(x) = 2x - 3$ ja $f'(0) = -3$ ja $f'(2) = 1$. Nyt

$$f'(0)f'(2) = -3 \cdot 1 = -3$$

ja siten 2-sykli $\{0, 2\}$ on hylkivä.

1.2. Kvadraattinen kuvaus

Tässä luvussa tutustutaan tarkemmin kvadraattisten kuvausten perheeseen $Q_\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $Q_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. Kuvaus Q_μ tunnetaan myös nimellä logistinen kuvaus. Q_μ on yhden parametrin funktioiden perhe siten, että jokaisella vakion μ arvolla Q_μ on funktio muuttujan x suhteen. Kuvaukset ovat alaspäin aukeavia paraabeleja, jotka leikkaavat x -akselin pisteissä 0 ja 1 ja saavuttavat maksimiarvonsa pisteessä $x = \frac{1}{2}$. Tämä kvadraattinen kuvaus näyttää melko yksinkertaiselta, mutta kun sen dynamikkaa ryhdytään selvittämään tarkemmin, törmätään sen käyttäytymisen monimutkaisuuteen.

Tulevissa tarkasteluissa rajoitamme vakion μ arvot välille $]0, 4]$. Tämä tehdään siksi, että kuvauksen Q_μ ja sen iteraattien arvojen halutaan pysyvän välillä $[0, 1]$. Kuvauksen Q_μ derivaatalle pätee $Q'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ ja siten $Q'_\mu(\frac{1}{2}) = 0$. Koska edelleen $Q''_\mu(x) = -2\mu$, niin tiedetään, että $Q_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4}$ on kuvauksen Q_μ maksimi, jos $\mu \neq 0$. Tämä maksimi $Q_\mu(\frac{1}{2})$ on välillä $[0, 1]$ vain jos $0 < \frac{\mu}{4} \leq 1$ eli $0 < \mu \leq 4$. Piste $x = \frac{1}{2}$ on kuvauksen *kriittinen piste*.

Esimerkissä 1.7 selvitettiin kvadraattisen kuvauksen $Q_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$, kiintopisteitä ja huomattiin, että kuvauksella on yksi kiintopiste, kun $0 < \mu \leq 1$ ja kaksi kiintopistettä, 0 ja $1 - \frac{1}{\mu}$, kun $\mu > 1$. Seuraavaksi pyrimme selvittämään, onko kuvauksella Q_μ mahdollisesti sellaisia jaksollisia pisteitä, jotka eivät ole kiintopisteitä, ja mitkä ovat näiden pisteiden attraktioaltaat.

Jaksollisten pisteiden tarkastelu on jaettu tapauksiin: $0 < \mu \leq 1$, $1 < \mu \leq 2$, $2 < \mu \leq 3$ ja $3 < \mu \leq 4$.

Tapaus $0 < \mu \leq 1$:

Koska $0 < Q_\mu(x) = \mu x(1 - x) < \mu x \leq x$, kun $0 < x < 1$, niin jono $\{Q_\mu^n(x)\}_{n=0}^\infty$ on positiivinen ja vähenevä ja siten seurauksen 1.5 mukaan se konvergoi kiintopisteeseen 0. Piste 0 attraktioallas on koko väli $[0, 1]$ eikä muita jaksollisia pisteitä kiintopistettä 0 lukuunottamatta ole.

Tapaus $1 < \mu \leq 2$:

Tiedetään, että vakion μ ollessa tällä välillä, kuvauksella Q_μ on kaksi kiintopistettä, 0 ja $1 - \frac{1}{\mu}$. Esimerkissä 1.7 todettiin, että kiintopiste 0 on hylkivä, kun $\mu > 1$,

ja kiintopiste $1 - \frac{1}{\mu}$ on puoleensavetävä, kun $1 < \mu \leq 3$. Osoitetaan sitten, että kiintopisteen $1 - \frac{1}{\mu}$ attraktioallas on koko väli $]0, 1[$ ja siten muita jaksollisia pisteitä ei ole. Merkitään jatkossa $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$.

Olkoon $0 < x < p_\mu$. Tällöin

$$\frac{1}{\mu} < (1 - x) \text{ eli } 1 < \mu(1 - x)$$

ja tästä saadaan edelleen

$$x < \mu x(1 - x) = Q_\mu(x).$$

Kun $0 < x < p_\mu \leq \frac{1}{2}$ niin Q_μ on kasvava ja tällöin

$$x < Q_\mu(x) < Q_\mu(p_\mu) = p_\mu.$$

Tästä seuraa, että jono $\{Q_\mu^n(x)\}_{n=0}^\infty$ on rajoitettu ja kasvava, ja seurauksen 1.5 nojalla se konvergoi kiintopisteeseen p_μ . Vastaavalla tavalla voidaan osoittaa, että jono $\{Q_\mu^n(x)\}_{n=0}^\infty$ konvergoi pisteeseen p_μ myös, kun $p_\mu < x < \frac{1}{2}$. Tällöin

$$p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu} < x \text{ eli } \mu(1 - x) < 1 \text{ ja edelleen } Q_\mu(x) = \mu x(1 - x) < x.$$

Kun $p_\mu < x < \frac{1}{2}$, niin $Q_\mu(x) = \mu x(1 - x) < x < \frac{1}{2}$ ja siten Q_μ on vähenevä ja tällöin

$$p_\mu = Q_\mu(p_\mu) < Q_\mu(x) < x < \frac{1}{2}.$$

Tästä seuraa, että jono $\{Q_\mu^n(x)\}_{n=0}^\infty$ on rajoitettu ja vähenevä ja siten se seurauksen 1.5 nojalla konvergoi pisteeseen p_μ . Jos taas $\frac{1}{2} < x < 1$, niin tällöin $0 < Q_\mu(x) \leq \frac{1}{2}$ ja tästä seuraa ylläolevan päättelyn tavoin, että jono $\{Q_\mu^n(x)\}_{n=0}^\infty$ on vähenevä ja siten konvergoi kiintopisteeseen p_μ . Nyt on osoitettu, että kiintopisteen p_μ attraktioallas on koko väli $]0, 1[$ ja siten kiintopisteiden lisäksi kuvauksella Q_μ , $1 < \mu \leq 2$, ei ole muita jaksollisia pisteitä.

Tapaus $2 < \mu \leq 3$:

Kun μ kasvaa arvosta 2 arvoon 3, niin kiintopisteen p_μ arvo kasvaa arvosta $\frac{1}{2}$ arvoon $\frac{2}{3}$. Osoitetaan seuraavaksi, että kun $2 < \mu < 3$, niin pisteen p_μ attraktioallas on jälleen koko väli $]0, 1[$.

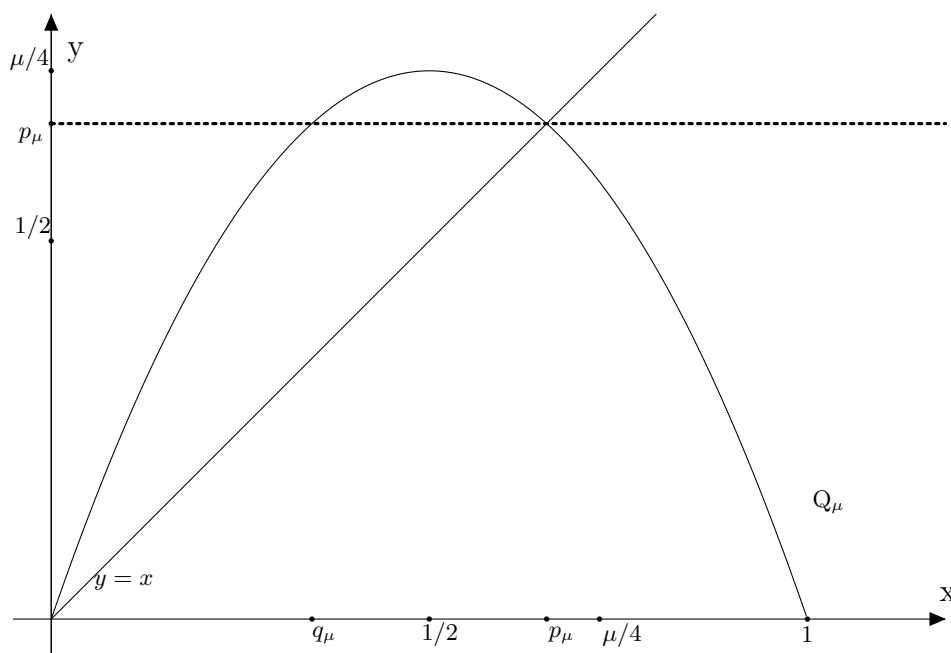
Kiintopiste p_μ sijaitsee nyt pisteen $\frac{1}{2}$ oikealla puolella ja kuten aiemmassa tarkastelussa huomattiin, saa kuvaus Q_μ saa korkeimman arvonsa $\frac{\mu}{4}$ pisteessä $\frac{1}{2}$. Siten Q_μ ei ole enää kasvava koko välillä $[0, p_\mu]$ ja jonon suppenemisestä tällä koko välillä ei voida tehdä päätelmiä jaksollisten pisteiden olemassaolosta.

Olkoon q_μ sellainen luku välillä $]0, \frac{1}{2}[$, jolle pätee $Q_\mu(q_\mu) = Q_\mu(p_\mu)$. Nyt huomataan, että pisteet q_μ ja p_μ sijaitsevat x -akselilla yhtä kaukana pisteestä $\frac{1}{2}$, ja siten

$$\frac{1}{2} - q_\mu = p_\mu - \frac{1}{2} \text{ eli } q_\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}.$$

Osoitetaan ensin, että jos $x \in]0, 1[$, niin tällöin pisteellä x on iteraatti välillä $]q_\mu, p_\mu[$. Jaetaan tarkastelu kolmeen eri tapaukseen.

Valitaan ensin $0 < x < q_\mu$. Kuten kuvasta 1.1 nähdään, niin tällä välillä kuvauksen Q_μ graafi on suoran $y = x$ yläpuolella, ja $x < Q_\mu(x)$ kaikilla $x \in]0, q_\mu]$. Jos oletetaan, että pisteellä x ei ole iteraattia välillä $]q_\mu, p_\mu[$, niin tällöin on oltava $Q_\mu^n(x) \leq q_\mu$ kaikille

KUVA 1.1. Kvadraattinen kuvaus Q_μ , $2 < \mu < 3$.

$n \in \mathbb{N}$. Nyt jono $\{Q_\mu^n(x)\}_{n=0}^\infty$ on kasvava ja rajoitettu ja seurauksen 1.5 nojalla se konvergoi kiintopisteeseen. Kuitenkaan välillä $]0, q_\mu]$ ei ole kiintopisteitä, sillä ainoat kiintopisteet ovat 0 ja $1 - \frac{1}{\mu}$, ja siten voidaan päätellä, että kun $0 < x < q_\mu$, niin pisteellä x on iteraatti, joka on suurempi kuin q_μ .

Olkoon sitten $q_\mu < x \leq p_\mu$. Huomaamalla, että

$$Q_\mu(q_\mu) = \mu \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 1 - \frac{1}{\mu} = p_\mu = Q_\mu(p_\mu),$$

ja muistamalla, että kuvaus Q_μ saa ääriarvonsa pisteessä $\frac{1}{2}$, voidaan nähdä, että

$$p_\mu \leq Q_\mu(x) \leq \frac{\mu}{4} = Q_\mu\left(\frac{1}{2}\right) \text{ kaikilla } x \in]q_\mu, p_\mu[.$$

Lisäksi voidaan osoittaa, että $q_\mu < Q_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right)$: Merkitään ensin

$$h(\mu) = Q_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right) = \frac{\mu^2}{4} - \frac{\mu^3}{16}, \quad 2 < \mu < 3$$

ja selvitetään derivaatan $h'(\mu) = \frac{2\mu}{4} - \frac{3\mu^2}{16}$ nollakohdat. Derivaatalle pätee $h'(\mu) = 0$, kun $\mu = 0$ tai $\mu = 1$. Koska kumpikaan näistä derivaatan nollakohdista ei ole määrittelyvälillä $2 < \mu < 3$ ja koska funktion h arvot välin päätepisteissä ovat $h(2) = \frac{1}{2}$ ja $h(3) = \frac{9}{16}$, niin voidaan päätellä, että $h(\mu)$ on kasvava ja siten pätee

$$h(\mu) = Q_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right) > \frac{1}{2} > q_\mu.$$

Tämän ja sen tiedon kanssa, että Q_μ on vähenevä, kun $\frac{1}{2} < x < 1$, voidaan päätellä, että

$$q_\mu < Q_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right) \leq Q_\mu(x) < p_\mu, \text{ kun } p_\mu < x < \frac{\mu}{4}.$$

Lisäksi, koska $p_\mu < \frac{\mu}{4}$ ja koska Q_μ on vähenevä välillä $[p_\mu, 1]$, niin tiedetään, että $0 < Q_\mu(x) < p_\mu$ kun $\frac{\mu}{4} < x < 1$.

Nyt on osoitettu, että jos $0 < x < 1$, niin pisteellä x on iteraatti välillä $]q_\mu, p_\mu[$. Vielä on osoitettava, että x iteroituu juuri kiintopisteeseen $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$, mikä osoittaa, että muita jaksollisia pisteitä ei ole. Tämän todistamiseksi riittää osoittaa, että $|Q_\mu(y) - p_\mu| < |y - p_\mu|$ jollekin pisteelle $y \in]q_\mu, p_\mu[$, missä y on jokin pisteen x iteraatti välillä $]q_\mu, p_\mu[$, eli $y = Q_\mu^n(x)$, jollekin $n \in \mathbb{N}$.

Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa $z \in]q_\mu, p_\mu[$ siten, että

$$|Q_\mu(y) - p_\mu| = |Q_\mu(x) - Q_\mu(p_\mu)| = |Q'_\mu(z)||y - p_\mu|. \quad (1.3)$$

Koska $|Q'_\mu(q_\mu)| = |\mu - 2\mu(\frac{1}{\mu})| = |\mu - 2| < 1$, kun $2 < \mu < 3$, niin tällöin pätee $|Q'_\mu(z)| < |Q'_\mu(q_\mu)| < 1$, ja siten yhtälöstä (1.3) seuraa, että

$$|Q_\mu(y) - p_\mu| < |y - p_\mu|.$$

Nyt on siis osoitettu, että kuvauksen Q_μ , $2 < \mu < 3$, kiintopisteen $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$ attraktioallas on koko väli $]0, 1[$ ja siten kuvauksella ei ole muita jaksollisia pisteitä. Lisäksi mielivaltaisen pisteen $x \in]0, 1[$ iteraatti lähestyy kiintopistettä p_μ oskilloiden vasemmalta ja oikealta, sillä jos $q_\mu < x < p_\mu[$ niin tällöin $p_\mu < Q_\mu(x) \leq \frac{\mu}{4}$, ja toisaalta, jos $p_\mu < x \leq \frac{\mu}{4}$, niin tällöin $q_\mu < Q_\mu(\frac{\mu}{4}) \leq Q_\mu(x) < p_\mu$.

Tapaus $3 < \mu \leq 4$:

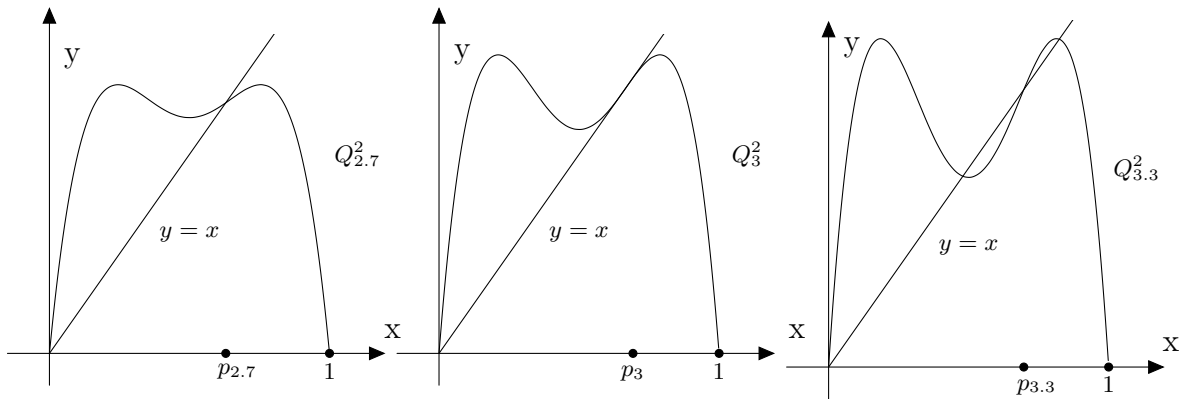
Kun vakion μ arvo ylittää luvun 3, niin kvadraattisen kuvauksen Q_μ iteraatioiden käyttäytyminen muuttuu merkittävästi. Edelleen kuvauksen kiintopisteet ovat 0 ja $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$. Nyt kuitenkin huomataan, että kun $\mu > 3$, niin $|Q'_\mu(p_\mu)| > 1$ ja siten kiintopisteestä p_μ tulee hylkivä. Sanotaan, että kvadraattinen kuvaus *bifurkoi*, kun $\mu = 3$. Seuraavassa luvussa tutustutaan tarkemmin bifurkaatioon ja tutkitaan, mihin välin $]0, 1[$ pisteet iteroituvat kuvauksella Q_μ , kun $\mu > 3$.

LUKU 2

Bifurkaatio

2.1. Puoleensa vetävät ja hylkivät 2-sykli

Kvadraattisen kuvauksen $Q_\mu(x) = \mu x(1-x)$, kun $3 < \mu \leq 4$, dynamiikan selvittämiseksi tarkastellaan ensin kuvausta Q_μ^2 .



KUVA 2.1. Kuvaus Q_μ^2 vakion μ arvoilla 2.7, 3 ja 3.3

Kuvasta 2.1 huomataan, että kun $\mu < 3$, niin suora $y = x$ leikkaa kuvauksen Q_μ^2 graafin kiintopisteessä $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$. Kun taas $\mu = 3$, niin suora $y = x$ on sivuaa kuvausta Q_μ^2 pisteessä (p_μ, p_μ) , ja kun vakion μ arvo ylittää luvun 3, niin suora $y = x$ leikkaa kuvauksen Q_μ^2 graafin neljä kertaa. Tästä nähdään, että kun $\mu > 3$, niin kuvaukselle Q_μ^2 syntyy kaksi uutta kiintopistettä, s_μ ja r_μ , kahden aiemman kiintopisteen, 0 ja p_μ , lisäksi. On kuitenkin muistettava, että nämä ovat nimenomaan toisen iteraatin, Q_μ^2 kiintopisteitä, sillä kuvauksella Q_μ on esimerkin 1.7 mukaan vain edellä mainitut kaksi kiintopistettä 0 ja p_μ , kun $\mu > 1$.

Seuraavassa esimerkissä selvitetään lukujen s_μ ja r_μ numeeriset arvot ja osoitetaan, että $\{s_\mu, r_\mu\}$ on kuvauksen Q_μ 2-sykli eli

$$Q_\mu(s_\mu) = r_\mu$$

ja

$$Q_\mu(r_\mu) = Q_\mu(Q_\mu(s_\mu)) = Q_\mu^2(s_\mu) = s_\mu.$$

ESIMERKKI 2.1. Olkoon $\mu > 3$. Kuvauksella $Q_\mu = \mu x(1-x)$ on 2-sykli $\{s_\mu, r_\mu\}$. Kirjoitetaan jatkossa $s_\mu = s$ ja $r_\mu = r$. Selvitetään ensin lukujen s ja r arvot ja osoitetaan sitten, että nämä todella muodostavat 2-syklin.

Jos s ja r muodostavat 2-syklin $\{s, r\}$, niin tällöin

$$r = Q_\mu(s) = \mu s(1-s) \text{ ja } s = Q_\mu(r) = \mu r(1-r), \tag{2.1}$$

mistä seuraa, että

$$r - s = \mu s(1 - s) - \mu r(1 - r) = \mu(s - r) - \mu(s^2 - r^2).$$

Koska $s \neq r$, niin voidaan jakaa luvulla $(r - s)$, minkä jälkeen saadaan

$$r + s = \frac{1}{\mu} + 1 \text{ tai yhtäpitävästi } r = \frac{1}{\mu} + 1 - s \quad (2.2)$$

Kohdan (2.1) yhtälöistä saadaan nyt

$$r^2 = r\mu s(1 - s) \text{ ja } s^2 = s\mu r(1 - r), \quad (2.3)$$

ja tästä edelleen

$$r^2 - s^2 = \mu sr(r - s).$$

Jaetaan sitten puolittain luvulla $(r - s)$, mistä saadaan

$$r + s = \mu sr. \quad (2.4)$$

Kun yhdistetään kohdat (2.2) ja (2.4), saadaan

$$\frac{1}{\mu} + 1 = r + s = \mu sr = \mu s\left(\frac{1}{\mu} + 1 - s\right),$$

mistä seuraa

$$\mu^2 s^2 - \mu^2 s - \mu s + \mu + 1 = 0$$

$$\mu^2 s^2 - (\mu^2 + \mu)s + \mu + 1 = 0$$

Vastaava toisen asteen yhtälö olisi voitu muodostaa myös muuttujille r . Ratkaistaan yllä oleva yhtälö muuttujan s suhteen, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} s &= \frac{\mu^2 + \mu \pm \sqrt{(\mu^2 + \mu)^2 - 4\mu^2(\mu + 1)}}{2\mu^2} \\ &= \frac{\mu^2 + \mu \pm \mu\sqrt{(\mu^2 - 2\mu - 3)}}{2\mu^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} \pm \frac{1}{2\mu} \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)} \end{aligned}$$

Olkoon s pienempi ja r suurempi luvuista s ja r , jolloin

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)} \text{ ja } r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}.$$

Kun $3 < \mu < 4$, niin tällöin $0 \leq \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)} \leq \sqrt{5}$ ja edelleen $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8} < s < \frac{2}{3}$. Näin ollen $0 < s < 1$. Vastaavalla päättelyllä nähdään, että myös $0 < r < 1$. Lisäksi nähdään, että nämä luvut todella muodostavat 2-syklin $\{s, r\}$ kuvaukselle Q_μ , kun $\mu > 3$:

$$\begin{aligned} Q_\mu(s) &= \mu s(1 - s) \\ &= \mu\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)} \\ &= r. \end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että $Q_\mu(r) = s$.

Nyt siis esimerkin 1.7 nojalla tiedetään, että kvadraattisella kuvauksella Q_μ on kaksi hylkivää kiintopistettä, 0 ja $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$, sekä yksi 2-sykli, $\{s_\mu, r_\mu\}$, kun $\mu > 3$. Muita 2-syklejä kuvauksella Q_μ ei ole, sillä jos olisi jokin toinen 2-sykli, niin tällöin kuvauksella Q_μ^2 olisi kiintopisteiden 0 ja p_μ lisäksi neljä muuta kiintopistettä, kaksi molemmista sykleistä. Jos x on kuvauksen Q_μ^2 kiintopiste, niin täytyy päteä $Q_\mu^2 = x$ ja tällöin $Q_\mu^2 - x$ on neljännen asteen polynomi, jolla on enintään neljä erisuurta juurta. Siten kuvauksella Q_μ ei voi olla kuutta kiintopistettä eikä kuvauksella Q_μ voi siten olla kahta 2-sykliä.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon A joukko, $x, y \in A$ ja $t \in [0, 1]$. Funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on *aidosti konkaavi*, jos $f(tx - (1-t)y) > tf(x) - (1-t)f(y)$.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Piste x_0 on kuvauksen *kriittinen piste*, jos $f'(x_0) = 0$ tai derivaattaa ei ole olemassa tässä pisteessä.

HUOMAUTUS 2.4. Aidosti konkaavin kuvauksen käyrä on kovera, eli jos yhdistetään käyrän kaksi pistettä toisiinsa suoralla, niin pisteiden välillä käyrä jää aina suoran yläpuolelle.

LEMMA 2.5. *Olkoon $I = [a, b]$ ja $f : I \rightarrow I$ aidosti konkaavi ja kahdesti differentioituva kuvaus, jolle pätee $f(a) = f(b) = a$. Tällöin puoleensa vetävän jaksollisen radan attraktioallas sisältää kriittisen pisteen.*

TODISTUS. Jos $f'(a) \leq 1$, niin kuvauksen f aidosta konkaaviudesta seuraa, että $f'(x) < 1$, kun $x > a$, ja siten $f(x) < x$, kun $x > a$. Tällöin I kuuluu pisteen a välittömään attraktioaltaaseen, ja väite seuraa.

Oletetaan sitten, että $f'(a) > 1$. Olkoon x_0 puoleensa vetävä m -jaksollinen piste ja $J =]c, d[$ sen välitön attraktioallas, jonka päätepisteille pätee $c < d$. Bolzanon lauseen nojalla (ks. [7, s. 67]) $f^m(J)$ on väli, joka sisältää pisteen x_0 ja tällöin väli $J \cup f^m(J)$ kuuluu pisteen x_0 välittömään attraktioaltaaseen ja siten $f^m(J) \subset J$.

Tehdään antiteesi: Attraktioallas J ei sisällä kriittistä pistettä. Tällöin yksikään väleistä $f^i(J)$, $0 \leq i \leq m-1$ ei sisällä kriittistä pistettä. Ketjusäännön nojalla f^m on monotoninen välillä J . Oletetaan ensin, että toinen välin J päätepiste kuvautuu toiseksi välin I päätepisteeksi. Koska $f(b) = a$, niin voidaan olettaa että tämä päätepiste on $a \in I$. Kun korvataan piste x_0 sen iteraateilla, voidaan olettaa että a on välin J päätepiste siten, että $c = a$. Koska a on kuvauksen f kiintopiste, siitä että $f'(a) > 1$ seuraa, että $(f^m)'(a) > 1$. Tällöin $(f^m)'$ on positiivinen ja vähenevä välillä $[a, d]$, koska puoleensa vetävä piste x_0 on välillä. Täten $0 < (f^m)'(d) < (f^m)'(x_0) < 1$ joten f^m on vähenevä välillä $[x_0, d]$ ja $d < b$, koska $[a, d]$ ei antiteesin nojalla sisällä kriittistä pistettä. Nyt siis f on vähenevä välillä $[x_0, d + \epsilon]$, mielivaltaisen pienelle $\epsilon > 0$. Tämä on ristiriita, sillä J on attraktioallas ja siten suurin väli, jonka pisteet attraktoituvat pisteeseen x_0 .

Näin ollen kumpikaan päätepisteistä c ja d ei kuvaudu välin I päätepisteiksi. Tämän vuoksi siitä, että $f^m(J) \subset J$ seuraa että $f^m(J) = J$, koska c eikä d kuulu attraktioaltaaseen. Nyt c ja d ovat joko m - tai $2m$ -jaksollisia pisteitä. Ketjusäännön, kuvauksen f konkaaviuden nojalla derivaatat $(f^m)'$ ja $(f^{2m})'$ ovat aidosti monotonisia välillä J ja kuvaukset f^m ja f^{2m} säilyttävät merkkinsä tällä välillä. Derivaattojen

(f^m) ' ja (f^{2m}) ' keskiarvot ovat ± 1 , koska $f^m(J) = J$, joten päätepisteen arvo kuvauksessa on vähemmän kuin 1, sillä aidon konkaaviuden vuoksi kuvaus ei voi olla vakio. Näin ollet ainakin toinen pisteistä c ja d on puoleensa vetävä jaksollinen piste kuvaukselle f . Tämä on mahdotonta, koska tämän pisteen attraktioallas menisi päällekkäin pisteen x_0 välittömän attraktioaltaan J kanssa. \square

LAUSE 2.6. *Olkoon $I = [a, b]$ ja $f : I \rightarrow I$ aidosti konkaavi ja kahdesti differentioituva kuvaus, jolle pätee $f(a) = f(b) = a$. Tällöin kuvauksella f on korkeintaan yksi puoleensa vetävä jaksollinen rata.*

TODISTUS. Koska eri n -sykliä välittömät attraktioaltaat ovat pistevieraita ja koska kuvauksella f on yksi kriittinen piste, niin väite seuraa lemmasta 2.5. \square

SEURAUUS 2.7. *Kvadraattisella kuvauksella Q_μ on korkeintaan yksi puoleensa vetävä jaksollinen rata.*

TODISTUS. $Q_\mu(0) = 0 = Q_\mu(1)$ ja Q_μ on kahdesti differentioituva. Lisäksi Q_μ on aidosti konkaavi, sillä

$$\begin{aligned} Q_\mu(tx - (1-t)y) &= \mu tx(1-tx) + 2\mu tx(1-t)y - (1-t)\mu y(1-y) \\ &> \mu tx(1-tx) - (1-t)\mu y(1-y) = Q_\mu(tx) - (1-t)Q_\mu(y). \end{aligned}$$

Nyt väite seuraa suoraan lauseesta 2.6. \square

Tarkastellaan seuraavaksi, millä vakion μ arvoilla 2-sykli $\{s_\mu, r_\mu\}$ on puoleensavetävä.

LAUSE 2.8. *Olkoon $3 < \mu < 4$. Kvadraattisen kuvauksen Q_μ 2-sykli $\{s_\mu, r_\mu\}$ on puoleensavetävä, kun $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$.*

TODISTUS. Merkitään jälleen $s_\mu = s$ ja $r_\mu = r$. Koska $\{s, r\}$ on 2-sykli ja $Q'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$, niin lauseesta 1.16 seuraa

$$(Q_\mu^2)'(s) = Q'_\mu(s)Q'_\mu(r) = (\mu - 2\mu s)(\mu - 2\mu r) = \mu^2 - 2\mu^2(s+r) + 4\mu^s r.$$

Esimerkin 2.1 merkintöjä ja siinä käytettyjä yhtälöitä hyödyntäen saadaan kirjoitettua yhtälön oikea puoli vain muuttujan μ avulla. Esimerkin 2.1 kohtien (2.2) ja (2.4) avulla saadaan

$$(Q_\mu^2)'(s) = \mu^2 - 2\mu^2\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) + 4\mu\left(\frac{1}{\mu} + 1\right) = -\mu^2 + 2\mu + 4.$$

Nyt $|(Q_\mu^2)'(s)| < 1$, jos ja vain jos $|\mu^2 - 2\mu - 4| = |(\mu - 1)^2 - 5| < 1$. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että $-1 < (\mu - 1)^2 - 5 < 1$, mistä saadaan $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. Siten 2-sykli $\{s, r\}$ on puoleensavetävä, kun $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$. \square

LAUSE 2.9. *Kun $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, niin syklin $\{s_\mu, r_\mu\}$ attraktioallas on koko väli $]0, 1[$, lukuunottamatta kiintopisteitä 0 ja p_μ .*

TODISTUS. Tätä ei osoiteta, mutta todistuksen hahmotelman voi löytää teoksesta [4, s. 303]. Pääpiirteissään todistus on vastaavanlainen kuin tarkasteltaessa jaksollisia pisteitä vakion μ arvoilla $0 < \mu < 3$ edellisessä luvussa. Tässä tapauksessa todistus vain on huomattavasti pidempi. \square

Näistä seuraa, että kun $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, niin kuvauksen Q_μ ainoat jaksolliset pisteet ovat kiintopisteet 0 ja p_μ sekä puoleensavetävän 2-syklin muodostavat pisteet s_μ ja r_μ .

Kun $\mu > 1 + \sqrt{6}$, niin $|(Q_\mu^2)'(s_\mu)| > 1$. Tällöin 2-syklistä $\{s_\mu, r_\mu\}$ tulee hylkivä ja uusi, puoleensavetävä 4-sykli syntyy vastaavalla tavalla kuin tämän luvun alussa kuvattu 2-sykli. Tarkastelussa on nyt kuvauksen 4. iteraatti. Kun $\mu = 1 + \sqrt{6}$, niin suora $y = x$ sivuaa käyrää $Q_{1+\sqrt{6}}^4$ kahdessa pisteessä, s_μ ja r_μ . Kun sitten $\mu > 1 + \sqrt{6}$, niin tämä suora leikkaa kuvauksen Q_μ^4 käyrän 8 kertaa. Näistä kaksi leikkauspisteistä on kuvauksen Q_μ hylkivät kiintopisteet, 0 ja $1 - \frac{1}{\mu}$, ja kaksi pistettä ovat hylkivän 2-syklin muodostavat pisteet s_μ ja r_μ . Neljä muuta pistettä muodostavat puoleensa vetävän 4-syklin. Näiden pisteiden numeerinen määrittäminen tapahtuu vastaavalla tavalla kuin tämän luvun alussa määritetyn 2-syklin pisteiden r_μ ja s_μ määrittäminen.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Parametrisoitujen kuvausten perhe $\{f_\mu\}$ *bifurkoi* pisteessä μ_0 , jos funktion f_μ jaksollisten pisteiden lukumäärä tai laatu (puoleensavetävä/hylkivä) muuttuu, kun vakion μ arvo ylittää arvon μ_0 . Tällöin sanotaan, että piste μ_0 on *bifurkaatiopiste*.

ESIMERKKI 2.11. Nyt tiedetään, että kuvauksella $Q_\mu = \mu x(1-x)$ on bifurkaatiopiste ainakin kohdissa $\mu = 3$ ja $\mu = 1 + \sqrt{6}$, sillä kun $0 < \mu \leq 3$, niin kuvauksella Q_μ on puoleensavetävä kiintopiste $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$, joka muuttuu hylkiväksi, kun $\mu > 3$. Kun $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ niin kuvauksella Q_μ on puoleensavetävä 2-sykli, joka muuttuu hylkiväksi, kun $\mu > 1 + \sqrt{6}$.

Kun vakion μ arvo kasvaa edelleen, 4-syklistä tulee hylkivä ja muodostuu uusi, puoleensavetävä 8-sykli. Aina kun vakion μ arvo ylittää bifurkaatiopisteen, syntyy uusi puoleensavetävä sykli, jonka pituus on kaksinkertainen edelliseen verrattuna. Lisäksi edellinen puoleensavetävä sykli muuttuu hylkiväksi.

Kuten aiemmin huomattiin, kuvauksen Q_μ ensimmäiset bifurkaatiopisteet ovat $\mu_0 = 3$ ja $\mu_1 = 1 + \sqrt{6}$. Voidaan osoittaa - joskin todistus on vaikea - että bifurkaatiopisteille μ_k pätee (ks. [3, s. 46])

$$\mu_{k+1} \approx 1 + \sqrt{3 + \mu_k}.$$

Bifurkaatiopisteiden arvo ei kuitenkaan kasva rajatta, vaan lähestyy *Feigenbaum*in lukua [3, s. 46]

$$\mu_\infty \approx 3,569946\dots$$

Seuraavassa lause kertoo tarkemmin ratojen laadusta ja määrästä ja määrittelee bifurkaation muodon. Tätä lausetta ei todisteta, mutta todistuksen palaset voi löytää Wellington de Melon ja Sebastian van Strienin teoksesta *One-dimensional dynamics* [11].

LAUSE 2.12. *On olemassa jono parametrin μ_k arvoja $\mu_1 = 3, \mu_2 = 1 + \sqrt{6}, \dots$ siten, että kaikille $\mu \in]\mu_{n-1}, \mu_n[$ kuvauksella Q_μ on yksi puoleensavetävä 2^n -jaksollinen rata, kaksi hylkivää kiintopistettä, 0 ja $1 - \frac{1}{\mu}$, sekä yksi hylkivä 2^k -jaksollinen rata, kaikille $k = 1, 2, \dots, n-1$. Kun $\mu = \mu_n$, niin radassa tapahtuu jakson tuplaantumisbifurkaatio.*

Kun vakion μ arvo ylittää luvun $1 + \sqrt{6}$, syklin pisteiden numeeristen arvojen laskeminen käy työlääksi, sillä pisteiden ratkaiseminen edellyttää useampiasteisten

polynomien juurten selvittämistä. Bifurkaatioita tapahtuu yhä tiheämmin vakion μ arvon kasvaessa ja lähestyessä lukua μ_∞ . Bifurkaatiopisteitä ovat selvittäneet muun muassa Bailey ja Broadhurst sekä Gröber, joiden ratkaisut bifurkaatiopisteille μ_3 ja μ_4 löytyvät lyhennettyinä artikkelista [8].

Alla on lueteltuna vakion μ arvoja, joilla syntyy uusia 2^n -syklejä (ks. [16, s. 355]):

$\mu_1 = 3$	2 – sykli
$\mu_2 = 1 + \sqrt{6} = 3,449\dots$	4 – sykli
$\mu_3 = 3,54409\dots$	8 – sykli
$\mu_4 = 3,5644\dots$	16 – sykli
\vdots	
$\mu_\infty = 3,569946\dots$	∞ – sykli

ESIMERKKI 2.13. Laskimen avulla voidaan selvittää - joskin epätarkasti - millä vakion μ arvoilla bifurkaatioita tapahtuu. Tiedetään, että $\frac{1}{2}$ on kuvauksen Q_μ kriittinen piste, sillä tällöin $Q'_\mu(\frac{1}{2}) = 0$. Kun kuvausta Q_μ iteroidaan tässä kriittisessä pisteessä $\frac{1}{2}$ käyttäen eri vakion μ arvoja, voidaan bifurkaatiopisteitä löytää. Tarkkaa bifurkaatiopisteen arvoa ei laskimella saada selville, mutta mutta likiarvoista voidaan päätellä mille välillä vakio μ sijoittuu, kun uusia syklejä syntyy. Kun esimerkiksi $\mu = 2,98$, niin pisteen $x = \frac{1}{2}$ radan kuusi ensimmäistä pistettä ovat

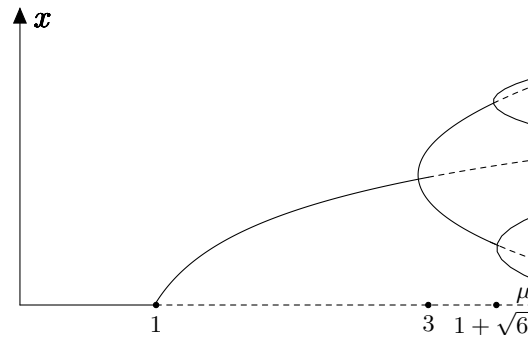
$$0,566; 0,732; 0,585; 0,724; 0,596; 0,718.$$

Kun iterointia jatketaan, näyttävät syklin pisteet lähestyvän lukua $1 - \frac{1}{\mu}$, joka onkin kuvauksen kiintopiste. Kun taas $\mu = 3,02$, niin pisteen $x = \frac{1}{2}$ radan kuusi ensimmäistä pistettä ovat

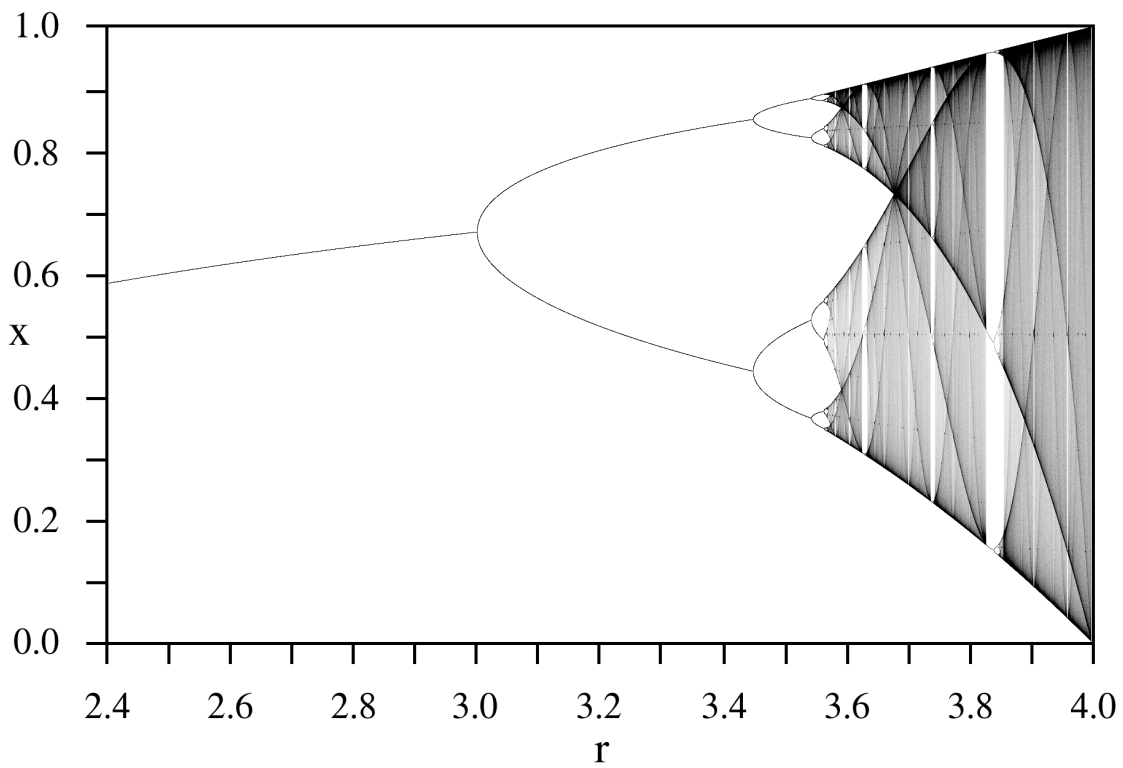
$$0.559; 0,745; 0,574; 0,738; 0,583; 0,734,$$

ja kun iterointia jatketaan huomataan, että iteraatit alkavat lähestyä vuoroin lukuja $0,61\dots$ ja $0,71\dots$. Näin ollen bifurkaatio tapahtuu vakion μ ollessa välillä $]2,98; 3,02[$.

Bifurkaatiota voidaan kuvata bifurkaatiokaavion avulla, jossa vaaka-akselilla on vakion μ arvot ja pystyakselilla muuttujan x arvot. Kun kuvausta Q_μ iteroidaan, alkavat iteraatioiden arvot lähestyä tähän vakioon μ liittyvän syklin pisteitä. Kuvioista 2.2 ja 2.3 nähdään, millä vakion μ arvoilla tuplaantumisbifurkaatioita tapahtuu. Esimerkiksi kuvassa 2.2, kun $\mu = 3$, kuvaaja haarautuu ja nähdään, että kaikilla $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ iteraatioiden arvot alkavat lähestyä kahta pistettä, s_μ ja r_μ . Puolestaan, kun $\mu = 1 + \sqrt{6} \approx 3,449$, niin iteraatiot liikkuvat neljän pisteen välillä. Kun $\mu = \mu_\infty$, syklissä on ∞ määrä pisteitä ja siten aiemmin äärellisestä syklisestä muodostuu äärettömän pitkä sykli. Kaaviossa näkyy yhtenäisellä mustalla viivalla puoleensavetävät kiintopisteet ja katkoviivalla hylkivät kiintopisteet. Esimerkiksi 0 on puoleensavetävä kiintopiste, kun $\mu < 1$, mutta muuttuu hylkiväksi, kun $\mu > 1$. Lisäksi puoleensavetävä 2-sykli muuttuu hylkiväksi juuri silloin, kun puoleensavetävä 4-sykli syntyy.



KUVA 2.2. Bifurkaatiokaavio

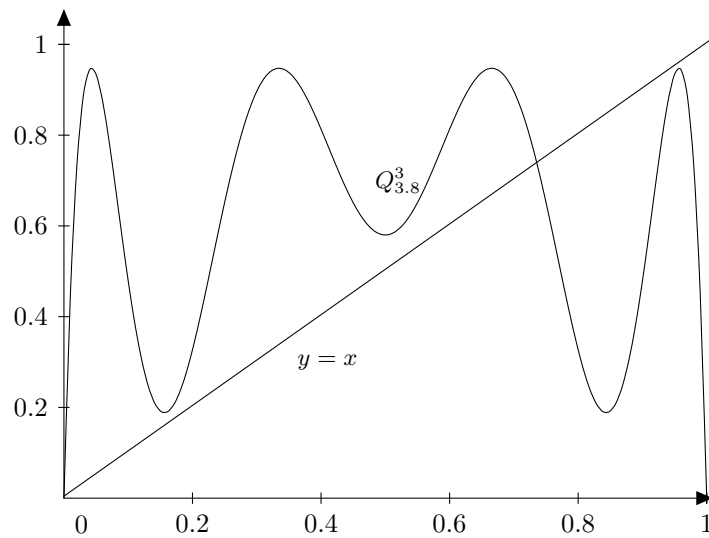


KUVA 2.3. Kuvauksen Q_μ , $2,4 \leq \mu \leq 4$ bifurkaatiokaavio. Kuvassa symbolin μ tilalla on käytetty symbolia r . Kuva lainattu 7.8.2014 sivulta <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7d/LogisticMapBifurcationDiagram.png>

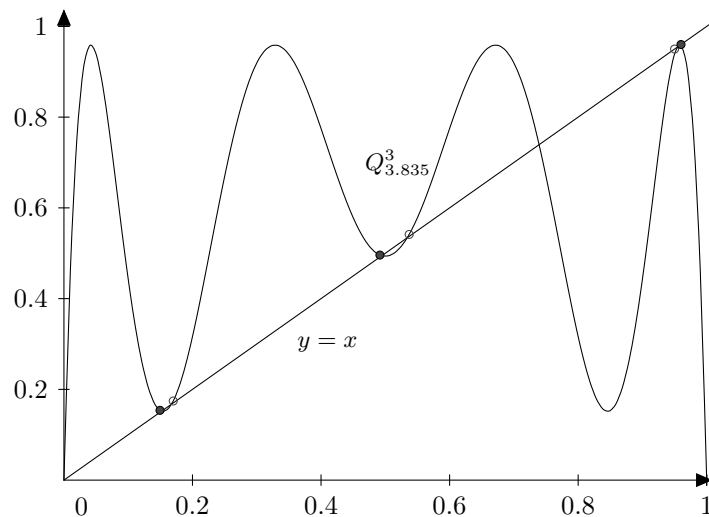
2.2. 3-syklin synty

Mitä sitten tapahtuu, kun $\mu > \mu_\infty$? Tämän selvittämisessä luotetaan pitkälti graafiseen tarkasteluun ja aiempaan kirjallisuuteen, sillä syklien pisteiden numeerinen määrittäminen edellyttäisi jo kolmannen iteraatin Q_μ^3 tapauksessa kahdeksannen asteen polynomien juurten määrittämistä.

Aiemmin huomattiin, että syklin pituus kasvaa, kun vakion μ arvo lähenee lukua $\mu \approx 3,57$. Tämä näkyy bifurkaatiokaaviossa 2.3 tummana alueena, missä syklien pisteet ovat niin lähellä toisiaan, ettei syklejä voi erottaa. Kuitenkin bifurkaatiokaaviosta nähdään myös, kuinka tummien pisteiden keskellä näkyy vaaleampia alueita, joissa iteraatioiden arvot iteraatioiden määrän kasvaessa lähestyvät kolmea pistettä. Tätä aluetta kutsutaan *3-jaksolliseksi ikkunaksi*. Huomattavin tällainen ikkuna on lähellä vakion μ arvoa 3,82. Tarkastellaan seuraavaksi, miten tämä 3-sykli syntyy. Muiden 3-sykliden muodostuminen tapahtuu vastaavasti. Keskeisessä tarkastelussa on kolmas iteraatti Q_μ^3 .



KUVA 2.4. Kuvaus Q_μ^3 vakion μ arvolla 3,8



KUVA 2.5. Kuvaus Q_μ^3 vakion μ arvolla 3,835

Kun tarkastellaan kuvia 2.4 ja 2.5, huomataan, että vakion μ arvon ollessa 3,8 suora $y = x$ leikkaa graafia $Q_{3,8}^3(x)$ vain kahdessa pisteessä, jotka ovat kuvauksen

Q_μ kiintopisteitä. Kuitenkin suora leikkaa kolmannen iteraatin kuvaajaa kahdeksan kertaa, kun $\mu = 3,835$. Näistä kaksi pistettä, 0 ja $1 - \frac{1}{\mu}$, ovat kuvauksen Q_μ kiintopisteet. Kuusi muuta leikkauspistettä ovat olennaisia tarkasteltaessa 3-sykliä. Kuvassa 2.5 näkyvät mustat pisteet muodostavat puoleensavetävän 3-syklin. Näissä pisteissä kulmakerroin on alle 1. Avoimet pisteet puolestaan muodostavat hylkivän 3-syklin kuvaukselle $Q_{3,835}^3$, sillä näissä pisteissä kulmakerroin on enemmän kuin 1. Kuvista 2.4 ja 2.5 voidaan päätellä, että jollain vakion μ arvolla, $3,8 < \mu < 3,835$, kuvaus Q_μ^3 tangentoi suoraa $y = x$. Tällä vakion μ arvolla tapahtuu *tangenttibifurkaatio* ja aivan kuin tyhjästä syntyy 3-sykli, jonka pisteet ovat ne pisteet, joissa suora $y = x$ tangentoi kuvausta Q_μ^3 .

Tämä 3-sykli syntyy, kun $\mu = 1 + \sqrt{8} = 3,82842\dots$. Tämän vakion μ arvon ovat selvittäneet Saha ja Strogatz ja tarkempi ratkaisu tälle löytyy artikkelista [15].

Bifurkaatiokaaviossa 2.3 näkyvän 3-ikkunan sisällä on ikään kuin pienoismalli koko bifurkaatiokaaviosta. Tämä johtuu siitä, että juuri kun tangenttibifurkaatio tapahtuu, suora $y = x$ sivuaa kolmea käyrän Q_μ^3 pistettä ja näissä pisteissä kuvauksen kulmakerroin on $+1$. Kun vakion μ arvo kasvaa ja $\mu > 1 + \sqrt{8}$ kuvauksen Q_μ^3 käyrä jyrkkenee ja kuvauksen kulmakertoimen arvo mustissa pisteissä lähestyy lukua -1 . Kun kulmakerroin on täsmälleen -1 , niin suora $y = x$ leikkaa käyrää Q_μ^3 kahdeksan kertaa kuvan 2.5 tavoin. Nyt kuusi leikkauspistettä (kaikki leikkauspisteet paitsi kiintopisteet 0 ja $1 - \frac{1}{\mu}$) muodostavat kaksi 3-sykliä, joista toinen on puoleensavetävä ja toinen on hylkivä. Jälleen puoleensavetävissä pisteissä kulmakertoimen arvo on $+1$. Vakion μ arvon edelleen kasvaessa käyrä Q_μ^3 jyrkkenee ja kulmakertoimen arvo puoleensavetävissä pisteissä lähestyy lukua -1 . Kun tämä arvo saavutetaan, puoleensavetävät syklit muuttuvat hylkiviksi ja synnyttävät uuden puoleensavetävän $3 \cdot 2^1$ -syklin. Näin ollen uusia puoleensa vetäviä $3 \cdot 2^n$ -syklejä syntyy tuplaantumisbifurkaation tavoin, kun μ kasvaa, ja 3-ikkunan sisällä näkyy bifurkaatiokaavio.

Seuraava lause on merkittävä kvadraattisen kuvauksen iteraatioiden käyttäytymisen ymmärtämiseksi. Se sanoo, että mikäli kuvauksella on 3-sykli, niin sillä on n -sykli myös kaikille muille luonnollisille luvuille n . Tämä on erikoistapaus Sarkovskiiin lauseesta, joka esitellään tämän luvun lopuksi.

LAUSE 2.14. *Olkkoon I suljettu väli ja $f : I \rightarrow I$ jatkuva. Jos funktiolla f on 3-jaksollinen piste, niin tällöin funktiolla f on n -jaksollinen piste kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$*

Tämän todistamiseksi tarvitaan kaksi aputulosta, jotka pohjaavat Bolzanon lauseeseen (ks. [7, s. 67]), joka sanoo että jatkuvalla funktiolla $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle pätee $g(0)g(1) < 0$, on olemassa $x \in]0, 1[$ siten, että $g(x) = 0$.

LEMMA 2.15. *Olkkoon I väli ja $f : I \rightarrow I$ jatkuva kuvaus. Jos $J \subset I$ on väli siten, että $J \subset f(J)$, niin tällöin kuvauksella f on kiintopiste x välillä J .*

TODISTUS. Olkkoon $J = [a, b]$, $a < b$. Koska $J \subset f(J)$, niin tällöin on olemassa $z, w \in J$ siten, että $f(z) \leq a$ ja $f(w) \geq b$. Jos nyt määritellään $g(x) = f(x) - x$, niin $g(z) = f(z) - z \leq a - z \leq 0$ ja $g(w) = f(w) - w \geq 0$. Nyt Bolzanon lauseen nojalla on olemassa $x \in]z, w[$, jolle pätee $g(x) = 0$ eli $f(x) = x$. Näin ollen x on kiintopiste. \square

LEMMA 2.16. *Olkkoon I väli ja $f : I \rightarrow I$ jatkuva kuvaus. Jos $\{I_i \subset I; i = 0, 1, 2, \dots\}$ on joukko välejä siten, että $I_{i+1} \subset f(I_i)$, niin tällöin on olemassa vähenevä jono*

sisäkkäisiä välejä $J_n \subset I_0$, joille pätee $f^n(J_n) = I_n$. Erityisesti on olemassa $x \in I_0$ siten, että $f^i(x) \in I_i$ kaikilla $i \geq 0$.

TODISTUS. Oletuksen mukaan $I_1 \subset f(I_0)$, joten on olemassa väli $J_1 \subset I_0$, jolle pätee $f(J_1) = I_1$. Induktio-oletuksen nojalla $f^i(J_i) = I_i$ kaikille $1 \leq i \leq n$. Koska $I_{n+1} \subset f(I_n)$, niin on olemassa $\tilde{I}_n \subset I_n$ siten, että $f(\tilde{I}_n) = I_{n+1}$. Toisaalta induktio-oletuksesta saadaan $f^n(J_n) = I_n \supset \tilde{I}_n$, jolloin on olemassa väli $J_{n+1} \subset J_n$ siten, että $f^n(J_{n+1}) = \tilde{I}_n$. Näin ollen $f^{n+1}(J_{n+1}) = f(\tilde{I}_n) = I_{n+1}$. Koska välit J_i ovat sisäkkäisiä, niin on olemassa $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ ja koska $f^n(J_n) = I_n$ kaikille $n \geq 0$, niin tällöin $f^i(x) \in I_i$ kaikilla $i \geq 0$. \square

LAUSEEN 2.14 TODISTUS. Olkoon a 3-jaksollinen piste, ja olkoot kaksi muuta syklin pistettä b ja c . Nyt pisteet muodostavat 3-syklin $\{a, b, c\}$, jolle pätee $f(a) = b$, $f(b) = c$ ja $f(c) = a$. Oletetaan sitten, että $a < b < c$, muut tapaukset osoitetaan vastaavasti.

Olkoon $I_0 = [a, b]$ ja $I_1 = [b, c]$. Koska f on jatkuva ja $f(a) = b$ ja $f(b) = c$, niin $I_1 \subset f(I_0)$, ja vastaavasti koska $f(c) = a$, niin $f(I_1) \supset I_0 \cup I_1$. Osoitetaan ensin, että on olemassa n -sykli, kun $n > 3$ ja sen jälkeen näytetään, että on olemassa n -sykli myös, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

Jotta löydetään n -sykli, täytyy soveltaa lemmaa 2.16. Koska $I_1 \subset f(I_1)$, niin tiedetään, että on olemassa suljettu väli $A_1 \subset I_1$ siten, että $f(A_1) = I_1$. Koska $A_1 \subset I_1$ ja koska $f(A_1) = I_1 \supset A_1$. Nyt vastaavalla tavalla voidaan päätellä, että on olemassa suljettu väli $A_2 \subset A_1$, siten, että $f(A_2) = A_1$. Huomataan, että $A_2 \subset A_1 \subset I_1$ ja että $f^2(A_2) = I_1$. Kun tätä jatketaan $n - 2$ kertaa, saadaan joukko suljettuja välejä

$$A_{n-2} \subset A_{n-3} \subset \dots \subset A_2 \subset A_1 \subset I_1$$

siten, että $f(A_i) = A_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n - 2$ ja $f(A_1) = I_1$. Erityisesti $f^{n-2}(A_{n-2}) = I_1$.

Nyt koska $f(I_0) \supset I_1 \supset A_{n-2}$, niin on olemassa myös suljettu väli $A_{n-1} \subset I_0$ siten, että $f(A_{n-1}) = A_{n-2}$. Vastaavalla päättelyllä nähdään, että on olemassa myös suljettu väli $A_n \subset I_1$, jolle pätee $f(A_n) = A_{n-1}$. Kun kaikki tämä yhdistetään, saadaan lemmasta 2.16 $f^n(A_n) = I_1$.

Koska $A_n \subset I_1$, niin lemmän 2.15 nojalla on olemassa piste x_0 , joka on kuvauksen f^n kiintopiste eli piste x_0 on n -jaksollinen. Osoitetaan vielä, että jakso alkaa tästä pisteestä, eikä piste x_0 ole tuleva jaksollinen piste (ks. huomautus 1.13). Koska $f(x_0) \in A_{n-1} \subset I_0$, mutta $f^i(x_0) \in I_1$ kun $i = 2, \dots, n$. Näin ollen ensimmäinen iteraatti on välillä I_0 ja muut iteraatit ovat välillä I_1 . Näin ollen pisteen x_0 jakson pituus on n .

Osoitetaan sitten tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$. Koska $I_1 \subset f(I_1)$, niin välillä I_1 on kiintopiste. Vastaavasti $I_1 \subset f(I_0)$ ja $I_0 \subset f(I_1)$. Näin ollen on olemassa 2-sykli, joka liikkuu välien I_0 ja I_1 välillä vastaavan päättelyn nojalla kuin yllä. \square

Seuraava Sarkovskiin lause osoittaa edellistä lausetta vahvemman tuloksen. Lausetta varten asetetaan luonnollisille luvuille seuraavanlainen järjestys (Sarkovskiin järjestys):

$$\begin{aligned} & 3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \dots \succ \\ & 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ \\ & 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\dots 2^n \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2^1 \succ 1.$$

LAUSE 2.17. (*Sarkovskiin lause*) Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Oletetaan, että kuvauksella f on n -jaksollinen piste. Jos $n \succ k$ Sarkovskiin järjestyksen mukaan, niin tällöin kuvauksella f on myös k -jaksollinen piste.

TODISTUS. Tätä lausetta ei todisteta, mutta pääpiirteissään todistus on vastaavanlainen lauseen 2.14 todistuksen kanssa. Nyt tarkasteltavia välejä on kahden välin sijaan $n-1$ kappaletta. Tarkempi todistus Sarkovskiin lauseelle löytyy esimerkiksi Devaney'n teoksesta [2, s. 63]. \square

HUOMAUTUS 2.18. Sarkovskiin lauseessa lukujen järjestys on olennainen, sillä jos jatkuvalla kuvauksella f on esimerkiksi 5-jaksollinen piste, sillä ei tällöin ole 3-jaksollista pistettä. Osoitetaan tämä. Olkoon $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ paloittain määritelty funktio siten, että

$$f(1) = 3, f(3) = 4, f(4) = 2, f(2) = 5, f(5) = 1$$

ja että funktio on lineaarinen näiden kokonaislukujen välillä. Nyt huomataan, että 1 on 5-jaksollinen piste. Koska

$$f^3([1, 2]) = [2, 5], \quad f^3([2, 3]) = [3, 5] \quad f^3([4, 5]) = [1, 4],$$

niin kuvauksella f^3 ei ole kiintopistettä millään näistä väleistä. Kuitenkin $f^3([3, 4]) = [1, 5]$, joten välillä $[3, 4]$ on ainakin yksi kiintopiste. Koska kuvaukset $f : [3, 4] \rightarrow [2, 4]$, $f : [2, 4] \rightarrow [2, 5]$ ja $f : [2, 5] \rightarrow [1, 5]$ ovat monotonisesti väheneviä, niin f^3 on myös monotonisesti vähenevä välillä $[3, 4]$ ja siten tämä kiintopiste on ainoa kiintopiste ja on siten kuvauksen f kiintopiste, eikä siis ole 3-jaksollinen.

2.3. Sovelluksia

Dynaamisia systeemejä esiintyy useilla tieteenaloilla aina mekaniikasta, ekonomiin ja biologiaan. Kun halutaan tietää jonkin ilmiön käyttäytymisestä pitkällä aikavälillä, voidaan keskittyä tarkastelemaan asetettua matemaattista mallia ja sen muutoksia tietyin aikavälein ajan ollessa diskreetti tai ajan ollessa jatkuva. Kvadrattinen kuvaus

$$Q_\mu = \mu x(1 - x), \quad 0 < \mu < 4,$$

on osoitus siitä, että vaikka dynaaminen systeemi itsessään voi olla hyvinkin yksinkertainen, sen dynamiikka saattaa olla monimutkaista ja kaoottista. Tätä kvadrattista kuvausta voidaan hyödyntää matemaattisessa biologiassa esimerkiksi populaation kasvun tarkastelussa. Oletetaan, että eläinpopulaatiota kasvatetaan laboratoriossa eivätkä siihen siten pääse vaikuttamaan muut luonnon olosuhteet. Olkoon $x_n \geq 0$ populaation koko n . sukupolvessa, eli $x_n = Q_\mu^n(x_0)$, missä x_0 on alkuperäinen populaatio ja μ kyseisen lajin luontainen kasvuaste. Kuvauksen Q_μ graafi on alaspäin aukeava paraabeli, kuten kuvassa 1.1, joka saa maksimiarvonsa $\frac{\mu}{4}$, kun $x = \frac{1}{2}$. Olkoon x_0 alkuperäinen populaatio.

Nyt edellisten lukujen päättelyistä tiedetään, että kun $\mu < 1$, niin $Q_\mu^n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, ja 0 on kiintopiste. Siten laji kokee sukupuuton, kun $\mu < 1$.

Kun $1 < \mu < 3$, niin populaatio kasvaa ja lähestyy lukua $1 - \frac{1}{\mu}$, ja kun $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ niin populaation koko lähestyy kahta pistettä (s_μ, r_μ) oskilloiden niiden välillä siten, että joka toinen populaatio on suurempi ja joka toinen pienempi.

Kun μ edelleen kasvaa, alkavat populaatiot oskilloida ensin 4 pisteen välillä, sitten 8 pisteen, 16 pisteen ja koko ajan jakson tuplaten kaaokseen saakka, joka saavutetaan kun $\mu \approx 3,57$. Tämän jälkeen vakion μ ollessa $1 + \sqrt{8}$ ilmantuu 3-sykli, ja populaation koko oskilloi näiden pisteiden välillä, kunnes vakion arvon kasvaessa se jälleen johtaa kaaokseen.

Cantorin joukko ja kaaos

Aiemmat tarkastelut ovat keskittyneet kvadraattisen kuvauksen Q_μ käyttäytymiseen vakion μ arvoilla välillä $[0, 4[$. Vakion ollessa tällä välillä käyttäytyminen muuttuu vain muutaman kerran. Dynamiikka on helpohkosti pääteltävissä, kun $0 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, sillä tällöin Jaksollinen käyttäytyminen on yksinkertaista ja törmätään vain 1- ja 2-jaksollisiin pisteisiin. Mitä sitten tapahtuu suuremmilla vakion μ arvoilla? Edellisissä luvuissa huomattiin, että vakion μ arvon kasvaessa syntyy uusia 2^n -syklejä, kunnes saavutetaan Faugenbaumin luku. Lisäksi tiedetään, että ja 3-sykli syntyy vakion μ arvolla $1 + \sqrt{8}$.

Tässä luvussa tarkastellaan kuvauksen Q_μ yhteyttä Cantorin joukkoon ja osoitetaan kuvauksen olevan kaoottinen, kun $\mu > 4$. Nyt huomataan, että kun $\mu > 4$ niin kvadraattinen kuvaus ei enää rajoitu välille $[0, 1]$, vaan nyt määritellään $Q_\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Luvun aluksi selvitetään kuvauksen syklien määrää, missä keskeistä on ratkaisujen etsiminen yhtälölle $Q_\mu^n(x) = x$.

Keskeisinä lähdeveoksina tässä luvussa on käytetty Devaney'n teoksia [1] ja [2], Hasselblattin ja Katokin teosta [4], Gulickin teosta [3] sekä Kraftin artikkelia [9].

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon $f : X \rightarrow X$ kuvaus. $P_n(f)$ kertoo kuvauksen f n -jaksollisten pisteiden lukumäärän, eli kuvauksen f^n kiintopisteiden lukumäärän.

Kuvaukselle Q_μ pätee $P_n(Q_\mu) \leq 2^n$, koska kuvauksen Q_μ n . iteraatti on astetta 2^n ja siten yhtälöllä $(Q_\mu)^n(x) = x$ on korkeintaan 2^n ratkaisua. Kompleksitasossa ratkaisuja onkin 2^n , mutta reaalisisille ratkaisuille tämä ei yleisesti päde. Kuitenkin vakiolle $\mu \geq 4$ voidaan osoittaa, että kiintopisteitä on 2^n :

LAUSE 3.2. *Kun $\mu \geq 4$, niin $P_n(Q_\mu) = 2^n$.*

TODISTUS. Koska aina $P_n(Q_\mu) \leq 2^n$, niin riittää osoittaa, että $P_n(Q_\mu) \geq 2^n$. Huomataan ensin, että jos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja $\Delta \subset [0, 1]$ väli siten, että toinen päätepiste kuvautuu luvuksi 0 ja toinen luvuksi 1, niin tällöin kuvauksella f on olemassa kiintopiste välillä Δ .

Nyt $[0, 1] \subset [Q_\mu(0), Q_\mu(\frac{1}{2})]$ ja $[0, 1] \subset [Q_\mu(\frac{1}{2}), Q_\mu(1)]$, joten on olemassa välit $\Delta_0 \subset [0, \frac{1}{2}]$ ja $\Delta_1 \subset [\frac{1}{2}, 1]$, jotka kuvauksella Q_μ kuvautuvat väliksi $[0, 1]$ ja antavat siten kaksi kiintopistettä kuvaukselle Q_μ .

Nollasta eroava kiintopiste on välillä Δ_1 , koska välin oikeapäätepiste on 1 ja kuvautuu luvuksi 0, joten toinen päätepiste kuvautuu luvuksi 1 eikä näin ollen kumpikaan ole kiintopiste. Lisäksi molempien välien Δ_0 ja Δ_1 alkukuvat kuvauksessa Q_μ koostuvat kahdesta välistä, joten kuvauksella Q_μ^2 nämä neljä väliä kuvautuu väliksi $[0, 1]$. Jokainen näistä neljästä välistä sisältää kuvauksen Q_μ^2 kiintopisteen ja jälleen kaikki muut kiintopisteet, paitsi 0, sisältyvät näille väleille siten etteivät mitkään kaksi pistettä ole keskenään samoja.

Kun tätä toistetaan useammille kuvauksen Q_μ iteraateille saadaan 2^n väliä, jotka kuvautuvat kuvauksella Q_μ^n väliksi $[0, 1]$ ja joista jokainen sisältää ainakin yhden kiintopisteen. Näin saadaan 2^n erillistä n -sykliä kuvaukselle Q_μ . \square

3.1. Cantorin joukko

Kun $\mu > 4$ niin kuvauksen Q_μ dynamiikka ei enää tapahdu vain välillä $I = [0, 1]$, sillä esimerkiksi kuvauksen maksimiarvo $Q_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$. Näin ollen jotkut pisteistä kuvautuvat pois väliltä I ensimmäisellä iteraatiolla. Merkitään näiden pisteiden muodostamaa joukkoa A_0 .

Joukko A_0 on avoin väli, jonka keskipiste on $\frac{1}{2}$, ja jonka pisteille pätee: jos $x \in A_0$, niin $Q_\mu(x) > 1$ ja $Q_\mu^2(x) < 0$ ja $Q_\mu^n(x) \rightarrow \infty$. Muut välin $I = [0, 1]$ pisteet pysyvät edelleen välillä I ensimmäisen iteraation jälkeen.

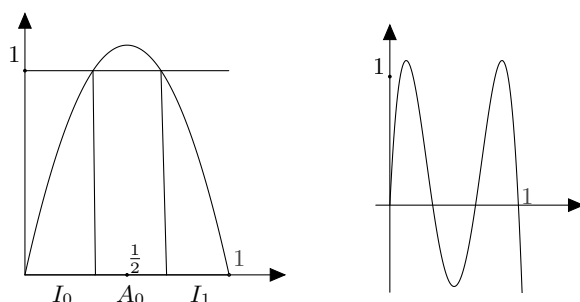
Olkoon sitten joukko $A_1 = \{x \in I : Q_\mu(x) \in A_0\}$ sellainen välin I osajoukko, jonka pisteet kuvautuvat kuvauksessa Q_μ välille A_0 . Näin ollen jos $x \in A_1$, niin $Q_\mu^2(x) > 1$, $Q_\mu^3 < 0$ ja edelleen $Q_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$. Kun tätä jatketaan induktiivisesti, saadaan joukko

$$A_n = \{x \in I : Q_\mu^n(x) \in A_0\}$$

eli

$$A_n = \{x \in I : Q_\mu^i(x) \in I, \text{ kun } i \leq n, \text{ mutta } Q_\mu^{n+1}(x) \notin I\}.$$

Joukko A_n siis sisältää ne pisteet, jotka kuvautuvat pois väliltä I iteraatiolla Q_μ^{n+1} .



KUVA 3.1. Kuvaus Q_μ ja sen toinen iteraatti Q_μ^2 , kun $\mu > 4$.

Koska A_0 on avoin joukko, niin $I \setminus A_0$ muodostuu kahdesta suljetusta välistä I_0 ja I_1 , kuten kuvassa 3.1. Molemmat näistä väleistä kuvautuvat monotonisesti välille I siten, että $Q_\mu(I_0) = I = Q_\mu(I_1)$. Koska $A_0 \subset I$, niin molemmat väleistä I_0 ja I_1 sisältävät avoimen osavälin siten, että tämä osaväli kuvautuu välille A_0 . Nämä kaksi osaväliä muodostavat joukon A_1 .

Nyt joukko $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ koostuu neljästä suljetusta osavälistä, jotka kuvautuvat monotonisesti joko välille I_0 tai välille I_1 . Kuvaus Q_μ^2 kuvaa nämä välit välille I , joten jokainen näistä neljästä välistä sisältää avoimen välin joka kuvauksella Q_μ^2 kuvautuu joukkoon A_0 . Näin ollen näiden neljän välin sisältämät pisteet kuvautuvat pois väliltä I kolmannella iteraatiolla. Tämä on joukko A_2 . Näin jatkamalla saadaan joukko A_n , joka koostuu 2^n erillisestä avoimesta välistä, ja tällöin joukko $I \setminus (A_0 \cup A_1 \cdots \cup A_n)$ muodostuu 2^{n+1} suljetusta välistä, koska $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Lisäksi kuvaus Q_μ^{n+1} kuvaa nämä suljetut välit monotonisesti välille I , sillä kuvauksen Q_μ^{n+1} graafi on näillä väleillä joko kasvava tai vähenevä. Kuvauksen graafissa on 2^n "kumpua". Lisäksi lauseesta 3.2 seuraa, että kuvauksella Q_μ^n on 2^n kiintopistettä.

Kun nyt tarkastellaan niiden pisteiden joukkoa, jotka eivät koskaan iteroidu pois joukosta I eli rekursiivisesti muodostuvaa joukkoa

$$\Lambda_\mu := I \setminus (\cup_{n=0}^{\infty} A_n),$$

huomataan, että se muistuttaa *Cantorin* $\frac{1}{3}$ -joukkoa, jossa suljetulta väliltä $[0, 1]$ on poistetaan avoimia ”keskimmäisiä kolmanneksia”:

ESIMERKKI 3.3. Olkoon $I = [0, 1]$. Poistetaan välin I keskeltä $\frac{1}{3}$ -mittainen avoin väli $J_{1,1} =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Tämän jälkeen poistetaan jäljelle jäävistä kahdesta välistä, $I_{1,1} = [0, \frac{1}{3}]$ ja $I_{1,2} = [\frac{2}{3}, 1]$ keskimmäiset avoimet kolmannekset, eli välit $J_{2,1} =]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ ja $J_{2,2} =]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$. Näiden pituus on $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Nyt jäljelle jää neljä suljettua väliä, joiden keskeltä edelleen poistetaan kolmannekset, ja näin jatketaan poistamalla aina n . vaiheessa 2^n avointa keskimmäistä kolmannesta. Jäljelle jäävien suljettujen välien yhdistettä kutsutaan Cantorin $\frac{1}{3}$ -joukoksi. Tämä joukko on nollamittainen ja poistettujen avointen välien yhteenlaskettu pituus on 1 (ks. esim. [6, s. 64]).

MÄÄRITELMÄ 3.4. Joukko A on *erillinen*, jos se ei sisällä välejä, ja se on *perfekti*, jos jokainen sen piste on kasaantumispiste tai rajapiste.

MÄÄRITELMÄ 3.5. Joukko A on *Cantorin joukko*, jos se on suljettu, erillinen ja perfekti.

Seuraavaksi aiotaan osoittaa, että joukko Λ_μ on Cantorin joukko, kun $\mu > 4$. Teknisistä syistä tarkastellaan ensin tapaus $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

LAUSE 3.6. Jos $\mu > 2 + \sqrt{5}$, niin Λ_μ on Cantorin joukko.

TODISTUS. Kun $\mu > 2 + \sqrt{5}$, niin $|Q'_\mu(x)| = |\mu - 2\mu x| > (2 + \sqrt{5})|(1 - 2x)| > 1$ kaikille $x \in I_0 \cup I_1$. Viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että $x \in I_0 \cup I_1$, vain kun $0 \leq Q_\mu(x) \leq 1$. Kun tästä ratkaistaan x saadaan $0 \leq x \leq \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\mu}}}{2}$ tai $\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\mu}}}{2} \leq x \leq 1$. Näillä muuttujan x arvoilla $|(1 - 2x)| > \frac{1}{2}$ ja siten pätee $|Q'_\mu(x)| > 1$. Näin ollen on olemassa $\lambda > 1$ siten, että $|Q'_\mu(x)| > \lambda$ kaikille $x \in \Lambda_\mu$. Ketjusäännöstä seuraa, että $|(Q_\mu^n)'(x)| > \lambda^n$, kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Osoitetaan ensin, että Λ_μ ei sisällä välejä ja on siten erillinen. Tehdään antiteesi, ja oletetaan että on olemassa väli $[x, y] \in \Lambda_\mu$, missä $x \neq y$. Tällöin $|(Q_\mu^n)'(\alpha)| > \lambda^n$ kaikille $\alpha \in [x, y]$. Valitaan sitten n niin suureksi, että $\lambda^n|y - x| > 1$. Väliarvolauseen nojalla tällöin pätee $|Q_\mu^n(y) - Q_\mu^n(x)| \geq \lambda^n|y - x| > 1$, mistä seuraa että joko $Q_\mu^n(y)$ tai $Q_\mu^n(x)$ sijaitsee välin $I = [0, 1]$ ulkopuolella, mikä on ristiriita. Siten joukko Λ_μ on erillinen.

Koska Λ_μ on sisäkkäisten suljettujen välien leikkaus, niin Λ_μ on suljettu. Osoitetaan sitten, että se on myös perfekti eli jokainen piste on kasautumispiste. Huomataan ensin, että jokaisen välin A_k päätepisteet kuuluvat joukkoon Λ_μ . Nämä päätepisteet iteroituvat lopulta välille A_0 ja edelleen kiintopisteeseen 0 ja pysyvät siten joukossa I .

Jos oletetaan, että on olemassa piste $p \in \Lambda_\mu$ siten, että sen läheisyydessä ei joukossa Λ_μ ole muita pisteitä, niin tällöin jokainen jossain vaiheessa sen lähellä olevista pisteistä iteroituu pois joukosta I . Nämä pisteet kuuluvat silloin johonkin joukoista A_k . Nyt joko välien A_k päätepisteet konvergoivat pisteeseen p tai kaikki pisteen p naapurustossa olleet pisteet kuvautuvat pois väliltä I jollain iteraatiolla. Ensimmäinen

tapaus on selvä, sillä tiedetään, että päätepisteet kuvautuvat pisteeseen 0 ja kuuluvat siten joukkoon Λ_μ . Jälkimmäisessä tapauksessa voidaan olettaa, että $Q_\mu^n(p) = 0$ ja muut pisteen p naapuruston pisteet kuvautuvat negatiiviselle reaaliakselille. Tällöin kuitenkin kuvauksella Q_μ^n on maksimiarvo pisteessä p , koska $(Q_\mu^n)'(p) = 0$. Ketjusäännön nojalla täytyy päteä $Q_\mu'(Q_\mu^i(p)) = 0$ jollain $i < n$, ja täten $Q_\mu^i(p) = \frac{1}{2}$. Tällöin kuitenkin $Q_\mu^{i+1}(p) \notin I$ ja $Q_\mu^n(p) \rightarrow -\infty$, mikä on ristiriidassa oletuksen $Q_\mu^n(p) = 0$ kanssa.

Näin ollen joukko Λ_μ on Cantorin joukko, kun $\mu > 2 + \sqrt{5}$. \square

LAUSE 3.7. *Jos $\mu > 4$, niin Λ_μ on Cantorin joukko.*

TODISTUS. Todistuksesta tapauksessa $\mu \in]4, 2 + \sqrt{5}]$ haastavamman tekee se, ettei nyt voida hyödyntää tietoa $|Q_\mu'(x)| > 1$, joka yllä olevassa todistuksessa oli keskeinen joukon erillisyyden osoittamisessa. Tämän osoittamiseksi tarvitaan liuta lemmoja ja määritelmiä, ja nämä aputulokset esitellään tässä todistuksessa. Kaikkia niitä ei kuitenkaan osoiteta kokonaisuudessaan, vaan täydellisen todistuksen on tehnyt esimerkiksi Kraft artikkelissaan [9].

Joukon perfekiuden todistaminen menee vastaavasti kuin tapauksessa $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Sen sijaan erillisyyden osoittamiseksi tarvitaan nyt lisää tietoa joukon Λ_μ ominaisuuksista, sillä tapauksessa $\mu > 4$ kuvauksen Q_μ derivaatalle pätee $|Q_\mu'(x)| > 1$ joillekin $x \in I_0 \cup I_1$, mutta $|Q_\mu'(x)| \leq 1$ joillekin $x \in I_0 \cup I_1$.

Muistetaan, että $I = Q_\mu^{-1}(I_0 \cup I_1)$, ja yleisesti $A_n = Q_\mu^{-1}(A_{n-1})$, mistä edelleen saadaan $A_n = Q_\mu^{-n}(A_0)$. Nyt joukko Λ_μ voidaan määritellä alkukuvien leikkauksena siten, että

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_\mu^{-n}(I).$$

Joukon erillisyyden osoittamiseksi riittää osoittaa, että joukko Λ_μ on *hyperbolinen*.

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon f C^1 -funktio ja joukko Λ kompakti ja invariantti kuvauksen f suhteen (eli $f(\Lambda) = \Lambda$). Joukko Λ on *hyperbolinen* kuvauksen f suhteen, jos on olemassa vakiot $\lambda > 1$ ja $C > 0$ siten, että $|(f^n)'(x)| \geq C\lambda^n$ kaikille $x \in \Lambda$ ja kaikille $n \geq 1$.

Määritelmän oletuksen kaltaisella joukolla on useita ominaisuuksia, jotka helpottavat joukon osoittamista hyperboliseksi:

LEMMA 3.9. *Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -funktio ja Λ kompakti, invariantti joukko kuvauksen f suhteen. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

- (i) *On olemassa vakiot $C > 0$ ja $\lambda > 1$ siten, että $|(f^n)'(x)| \geq C\lambda^n$ kaikille $x \in \Lambda$ ja kaikille $n \geq 1$.*
- (ii) *On olemassa $N \geq 1$ siten että $|(f^n)'(x)| > 1$ kaikille $x \in \Lambda$ ja kaikille $n \geq N$.*
- (iii) *On olemassa $n_0 \geq 1$ siten että $|(f^{n_0})'(x)| > 1$ kaikille $x \in \Lambda$.*
- (iv) *Kaikille $x \in \Lambda$ on olemassa $n_x \geq 1$, joka voi riippua pisteestä x , siten että $|(f^{n_x})'(x)| > 1$.*

TODISTUS. Katso [9, s. 404]. \square

Ennen hyperbolisuuden osoittamista määritellään vielä *Schwartzin derivaatta*.

MÄÄRITELMÄ 3.10. C^3 -funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Schwartzin derivaatta pisteessä x , missä $f'(x) \neq 0$, on

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

LEMMA 3.11. Kvadraattisen kuvauksen Q_μ Schwartzin derivaatalle pätee

- (i) $SQ_\mu(x) < 0$, kaikille $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
- (ii) $SQ_\mu^n(x) < 0$ kaikille $n > 0$ kaikille $x \in \mathbb{R} \setminus \cup_{i=0}^n Q_\mu^{-i}(\frac{1}{2})$

TODISTUS. Ensimmäinen väite seuraa siitä, että $Q_\mu''' \equiv 0$. Toisen väitteen todistamiseksi tarvitaan ensimmäistä kohtaa sekä seuraavaa lemmaa ja induktiota. \square

LEMMA 3.12. Jos $g'(x) \neq 0$ ja $f'(g(x)) \neq 0$, niin

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x).$$

Eli jos $Sg(x) < 0$ ja $Sf(g(x)) < 0$, niin $S(f \circ g)(x) < 0$.

TODISTUS. Ketjusäännöstä saadaan

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x), \\ (f \circ g)''(x) &= f''(g(x))g'(x)^2 + f'(g(x))g''(x) \text{ ja} \\ (f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))g'(x)^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x). \end{aligned}$$

\square

Schwartzin derivaatta ja sen ominaisuuksia käyttäen voidaan osoittaa seuraavat lemmat:

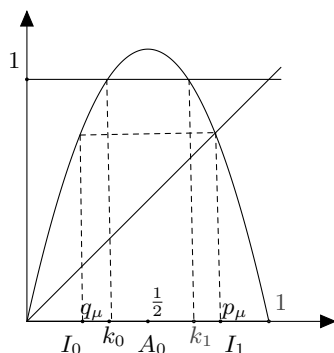
LEMMA 3.13. Jos I on avoin väli ja $Sf < 0$ tällä välillä, niin tällöin kuvauksella f' ei voi olla positiivista lokaalia minimiä eikä negatiivista lokaalia maksimia.

LEMMA 3.14. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $I = [a, b]$ väli ja olkoon f C^3 -kuvaus välillä I . Jos $Sf < 0$ välillä $]a, b[$, niin tällöin $|f'(x)| > \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$ kaikille $x \in]a, b[$.

TODISTUS. Katso [9, s. 405]. \square

Kahdesta edellisestä lemmasta saadaan seuraus:

SEURAUUS 3.15. Välillä $J =]a, b[$ kuvauksella Q'_μ ei ole lokaalia minimiä eikä maksimia, ja $|Q'_\mu(x)| > \min\{Q'_\mu(a), Q'_\mu(b)\}$ kaikille $x \in]a, b[$.



KUVA 3.2. Kuvaus Q_μ , kun $\mu > 4$.

Tiedetään, että kuvauksella Q_μ on kiintopiste $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$, kun $\mu > 2$. Määritellään lisäksi $q_\mu = \frac{1}{\mu}$, vastaavalla tavalla kuin tarkasteltaessa kvadraattisen kuvauksen jaksollisia pisteitä aiemmassa luvussa. Nyt pisteet q_μ ja p_μ sijoittuvat symmetrisesti pisteen $\frac{1}{2}$ suhteen kuten kuvassa 3.2. Piste q_μ sijaitsee välillä I_0 ja p_μ välillä I_1 . Olkoon k_0 välin A_0 vasen päätepiste, ja k_1 sen oikea päätepiste.

Aiemmista tarkasteluista tiedetään, että $Q_\mu(q_\mu) = Q_\mu(p_\mu)$ ja että $|Q'_\mu(p_\mu)| = 2 - \mu < 1$, kun $\mu > 3$. Lisäksi $Q_\mu([q_\mu, k_0]) = Q_\mu([k_1, p_\mu]) = [p_\mu, 1]$. Määritellään sitten väli $J =]q_\mu, k_0[\cup]k_1, p_\mu[$. Nyt jos $x \in J$, niin $Q_\mu(x) \notin J$. Kuitenkin seuraava lemma sanoo, että iteroitaessa piste päättyy välille $[q_\mu, p_\mu[$.

LEMMA 3.16. *Jos $\mu > 4$ ja $x \in J$, niin on olemassa $n \geq 2$ siten, että $Q_\mu^n(x) \in [q_\mu, p_\mu[$.*

LEMMA 3.17. *Kun $\mu > 4$ niin välit $]q_\mu, k_0[$ ja $]k_1, p_\mu[$ ovat lyhyempiä kuin välit $]0, q_\mu[$ ja $]p_\mu, 1[$.*

TODISTUS. Lemmojen 3.16 ja 3.17 todistukset löytyvät artikkelista [9]. \square

Nyt koossa on tarvittavat aputulokset joukon Λ_μ hyperbolisuuden osoittamiseen:

Olkoon $x \in \Lambda_\mu$ ja $x > \frac{1}{2}$. Tapaus $x < \frac{1}{2}$ seuraa kuvauksen Q_μ symmetrisyydestä pisteen $\frac{1}{2}$ suhteen. Nyt siis täytyy löytää $n \in \mathbb{N}$ siten, että $|(Q_\mu^n)'(x)| > 1$. Tämän jälkeen hyperbolisuus seuraa lemmasta 3.9.

Jos $x \geq p_\mu$, niin voidaan valita $n = 1$ ja väite pätee. Jos $x = k_1$, niin $Q_\mu^n(k_1) = 0$, kun $n \geq 2$. Tällöin

$$|(Q_\mu^n)'(k_1)| = |Q'_\mu(k_1)| \cdot |Q'_\mu(1)| \cdot |Q'_\mu(0)|^{n-2} = \mu^{n-1} \sqrt{(\mu^2 - 4\mu)} = \mu^n \sqrt{1 - \frac{4}{\mu}},$$

joka on suurempaa kuin 1 kaikille $n \geq 2$.

Olkoon $x \in]k_1, p_\mu[$. Lemman 3.16 nojalla on olemassa $n \geq 2$ siten, että $Q_\mu^n(x) \in [q_\mu, p_\mu[$. Olkoon $A_{n,j} \subset A_n$ sellainen osaväli, jolle x kuuluu. Nyt $A_{n,j}$ joko kuuluu välille $]k_1, p_\mu[$ tai sitten ei. Tarkastellaan molemmat tapaukset erikseen.

Jos $A_{n,j} \subset]k_1, p_\mu[$, niin kuvaus Q_μ^n kuvaa joukon $A_{n,j}$ monotonisesti välille $[0, 1]$, ja siten väli $A_{n,j}$ voidaan jakaa kolmeen osaväliin $A_{n,j} = J_{n,j} \cup K_{n,j} \cup L_{n,j}$ siten, että $Q_\mu^n(J_{n,j}) = [0, q_\mu]$, $Q_\mu^n(K_{n,j}) = [q_\mu, p_\mu]$, $Q_\mu^n(L_{n,j}) = [q_\mu, 1]$. Koska $J_{n,j}, L_{n,j} \subset A_{n,j} \subset]k_1, p_\mu[$, niin lemmasta 3.17 seuraa, että $|Q_\mu^n(J_{n,j})| > |J_{n,j}|$ ja $|Q_\mu^n(L_{n,j})| > |L_{n,j}|$. Tästä voidaan päätellä että kuvaus Q_μ^n ”venyttää”väliä $A_{n,j}$.

Nyt väliarvolauseen nojalla on $y \in J_{n,j}$ siten, että $|(Q_\mu^n)'(y)| > 1$ ja $z \in L_{n,j}$ siten, että $|(Q_\mu^n)'(z)| > 1$. Kun $x \in]k_1, q_\mu[$, niin $Q_\mu^n(x) \in [q_\mu, p_\mu[$, joten pisteen x täytyy kuulua välin $K_{n,j}$ sulkeumaan, ja tällöin $y \leq x < z$. Koska kuvauksella Q_μ^n ei ole kriittistä pistettä välillä $[y, z]$, niin seurauksen 3.15 nojalla $|(Q_\mu^n)'(x)| > 1$.

Oletetaan sitten, että $A_{n,j}$ ei kuulu välille $]k_1, p_\mu[$. Osaväleille $A_{n,j} = J_{n,j} \cup K_{n,j} \cup L_{n,j}$ pätevät samat ominaisuudet kuin yllä. Koska $x \in]k_1, q_\mu[$, niin joko $J_{n,j}$ tai $L_{n,j}$ sisältyy väliin $[k_1, q_\mu[$. Oletetaan että $J_{n,j}$ kuuluu tälle välille. Koska $A_{n,j} \subset [k_1, 1]$ ja $A_{n,j} \cap [k_1, p_\mu] \neq \emptyset$, niin $p_\mu \in A_{n,j}$. Samalla päättelyllä kuin yllä $|Q_\mu^n(J_{n,j})| > |J_{n,j}|$ niin on olemassa piste $y \in J_{n,j}$ siten, että $|(Q_\mu^n)'(y)| > 1$. Lisäksi $|Q_\mu^n(p_\mu)| > 1$, koska p_μ on hylkivä kiintopiste kun $\mu > 3$. Näin ollen $x \in [y, p_\mu]$ ja kuvauksella Q_μ^n ei ole kriittistä pistettä tällä välillä, joten lemmän 3.15 nojalla $|(Q_\mu^n)'(x)| > 1$.

Nyt on siis osoitettu, että joukko Λ_μ on hyperbolinen, ja tästä johtuen erillinen, ja edelleen Cantorin joukko. \square

3.2. Kaaos

Luvussa 2 tarkastelut keskittyivät kuvauksen Q_μ , $0 < \mu < 4$, jaksollisten pisteiden, erityisesti puoleensa vetävien pisteiden tarkasteluun. Tässä luvussa tutkitaan, miten kuvauksen käyttäytyminen riippuu sen olosuhteista ja oletuksista ja tutustutaan Lyapunovin eksponenttiin, jonka avulla voidaan tehdä päätelmiä dynamiikasta tarkastelemalla iteraatioiden läheisyyksiä.

MÄÄRITELMÄ 3.18. Olkoon J väli ja $f : J \rightarrow J$. Kuvaus f on *riippuvainen alkuperäisistä olosuhteista pisteessä x* , jos on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että kaikille $\delta > 0$ on $y \in J$ ja $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|x - y| < \delta \text{ ja } |f^n(x) - f^n(y)| > \epsilon.$$

HUOMAUTUS 3.19. Määritelmän alkuperäisillä olosuhteilla tarkoitetaan pisteitä x ja y . Jos pisteen x lähellä on piste y siten, että niiden iteraatit loittonevat toisistaan kuvauksessa f , niin kuvaus on riippuvainen alkuperäisistä olosuhteista.

ESIMERKKI 3.20. Olkoon p sellainen n -jaksollinen piste, jolle pätee $|(f^n)'(p)| < 1$. Tällöin kuvaus f ei voi olla riippuvainen olosuhteista pisteessä p . Tämä johtuu siitä, että piste p on kuvauksen f^n puoleensa vetävä kiintopiste. Tällöin pisteen x lähellä olevat pisteet iteroituvat pisteeseen x ja siten etäisyys $|f^n(x) - f^n(y)|$ saadaan mielivaltaisen pieneksi kaikille y jotka ovat pisteen x lähellä.

Tämän esimerkin nojalla kuvaus Q_μ ei ole riippuvainen alkuperäisistä olosuhteista missään jaksollisessa pisteessä p , kun $0 < \mu < \mu_\infty$.

Kuitenkin voidaan osoittaa, että tapauksessa $\mu > 4$ tilanne on erilainen. Tätä varten määritellään Lyapunovin eksponentti:

MÄÄRITELMÄ 3.21. Olkoon J rajoitettu väli, $f : J \rightarrow J$ jatkuvasti differentioituva välillä J ja $x \in J$. Määritellään

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x)|,$$

jos raja-arvo on olemassa. $\lambda(x)$ on kuvauksen f *Lyapunovin eksponentti* pisteessä x . Jos se on riippumaton pisteestä x merkitään vain λ .

HUOMAUTUS 3.22. Lyapunovin eksponentti siis ikään kuin mittaa iteraatioiden aiheuttamaa muutosta pisteen x läheisyydessä. Jos pisteet x ja y ovat lähellä toisiaan ja jos myös niiden iteraatit pysyvät lähekkäin, niin $\lambda(x)$ on logaritmin vuoksi negatiivinen. Jos taas iteraatit erkanevat toisistaan, niin Lyapunovin eksponentti on positiivinen.

ESIMERKKI 3.23. Olkoon $Q_\mu = \mu x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$ ja $0 < \mu < 3$, $\mu \neq 2$. Osoitetaan, että Lyapunovin eksponentti on tällöin $\lambda = \ln|2 - \mu|$.

Kuvauksella Q_μ on kiintopiste $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$, kun $0 < \mu < 3$, ja attraktioallas on väli $]0, 1[$, joten

$$x_k = Q_\mu^k(x) \rightarrow p_\mu,$$

kun $k \rightarrow \infty$. Koska $Q'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$, niin

$$Q'_\mu(x_k) \rightarrow Q'_\mu(p_\mu) = \mu - 2\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu.$$

Koska $\mu \neq 2$, niin

$$\ln|Q'_\mu(x_k)| \rightarrow \ln|2 - \mu|,$$

kun $k \rightarrow \infty$. Olkoon sitten $\epsilon > 0$. Koska logaritmi on jatkuva ja $x_k \rightarrow p_\mu$, niin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että jos $k > N$ niin

$$\ln|2 - \mu| - \epsilon < \ln|Q'_\mu(x_k)| < \ln|2 - \mu| + \epsilon.$$

Edelleen kaikille $n > N$

$$\begin{aligned} \frac{n - N}{n}(\ln|2 - \mu| - \epsilon) &= \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (\ln|2 - \mu| - \epsilon) < \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \ln|Q'_\mu(x_k)| \\ &< \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (\ln|2 - \mu| + \epsilon) = \frac{n - N}{n}(\ln|2 - \mu| + \epsilon). \end{aligned}$$

Kun n on paljon suurempi kuin N , niin $\frac{n+N}{n} \approx 1$, ja siten saadaan

$$\ln|2 - \mu| - \epsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \ln|Q'_\mu(x_k)| < \ln|2 - \mu| + \epsilon.$$

Edelleen, riittävän suurille n saadaan

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \ln|Q'_\mu(x_k)| \right| < \epsilon$$

ja siten

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \ln|Q'_\mu(x_k)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \ln|Q'_\mu(x_k)| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \ln|Q'_\mu(x_k)| \right) \\ &= 0 + \ln|2 - \mu| = \ln|2 - \mu|, \end{aligned}$$

missä $x_k = Q_\mu^k(x)$. Lyapunovin eksponentti on siten riippumaton luvusta x , joten saadaan $\lambda = \ln|2 - \mu|$.

HUOMAUTUS 3.24. Nyt siis kuvaukselle Q_μ , $\ln|2 - \mu| < 0$, kun $1 < \mu < 2$ tai $2 < \mu < 3$, joten $\lambda < 0$ näillä vakion μ arvoilla. Kun $\mu \rightarrow 2$, niin $\lambda \rightarrow -\infty$, joten voidaan päätellä että $\lambda < 0$, kun $\mu \in]1, 3[$.

Samanlaista päättelyä käyttäen kuin edellisessä esimerkissä, voidaan osoittaa, että jos x ei ole (tuleva) jaksollinen piste, niin $\lambda(x) < 0$ myös kun $3 < \mu < \mu_\infty$.

Kun taas $\mu \rightarrow 4$, niin λ oskilloi positiivisten ja negatiivisten arvojen välillä, ja tiedetään ([3, s.85]), että kun $\mu = 4$, niin $\lambda(x) = \ln 2 > 0$, kun $0 < x < 1$ ja x ei ole jaksollinen piste.

Seuraavaaksi voidaan määritellä *kaaos*, joka matematikassa liittyy käyttäytymisen ennakoimattomuuteen. Siten alkuperäiset olosuhteet ja Lyapunovin eksponentti ovat määritelmässä ennakoimattomuuden mittareina.

MÄÄRITELMÄ 3.25. Olkoon $f : J \rightarrow J$, missä J on rajoitettu väli. Kuvaus f on *kaottinen*, jos vähintään toinen seuraavista pätee:

- (i) Kuvauksella f on positiivinen Lyapunovin eksponentti jokaisessa pisteessä $x \in J$, joka ei ole (tuleva) jaksollinen piste
- (ii) Kuvaus f on riippuvainen alkuperäisistä olosuhteista koko joukossa J .

LAUSE 3.26. *Kuvaus Q_μ on kaottinen, kun $\mu > 4$.*

TODISTUS. Koska kuvauksen Q_μ Lyapunovin eksponentti $\lambda = \ln|2-\mu|$ on positiivinen koko välillä $[0, 1]$, kun $\mu > 4$, niin kaottisuus seuraa määritelmän ensimmäisestä kohdasta. \square

Ympyrän kierrot

Aiemmissa luvuissa keskityttiin tarkastelemaan kuvausta, jonka iteraatioiden käyttäytyminen oli melko helposti kuvattavissa, sillä jokainen rata lähestyi kiintopistettä tai jotain jaksollista sykliä. Tässä luvussa siirrytään tarkastelemaan melko erilaista ratojen käyttäytymistä, kun keskiössä ovat ympyrän kierrot. Aluksi kuvataan lyhyesti pisteen rataa ympyrän rationaalisissa kierroissa, minkä jälkeen tarkastelu keskittyy irrationaalilukuihin ja niiden pistiden ratoihin irrationaalisessa kierrossa. Pääasiallisena lähteenä seuraavissa tarkasteluissa on käytetty Hasselblattin ja Katokin teosta [4].

4.1. Ympyrä ja sen kierto

MÄÄRITELMÄ 4.1. Määritellään yksikköympyrä kolmpleksitasossa joukkona

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\phi} | \phi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C},$$

missä kehän pisteet z ovat yhden yksikön päässä ympyrän keskipisteestä. Tätä kutsutaan ympyrän *multiplikatiiviseksi merkinnäksi*.

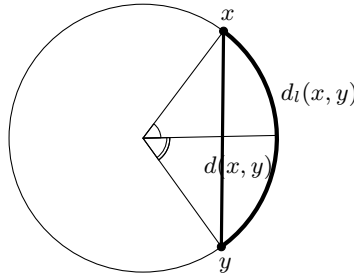
Avattu ympyrä voidaan samaistaa väliksi $[0, 1]$, ja merkitään tätä väliä symbolilla I/\sim . Yleisemmin ympyrän voi kuvata merkinnällä

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Tämän joukon pisteet ovat reaalityyppisten x ekvivalenssiluokkia $x + \mathbb{Z}$: kaksi reaalityyppistä $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kuuluvat samaan ekvivalenssiluokkaan, jos $x_1 = x_2 + k$, jollekin $k \in \mathbb{Z}$. Nyt $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = I/\sim$, sillä välillä $[0, 1]$ on yksi edustaja jokaisesta ekvivalenssiluokasta. Merkintää \mathbb{R}/\mathbb{Z} kutsutaan ympyrän *additiiviseksi merkinnäksi*, ja toisinaan tämä merkintä soveltuu paremmin laskuihin.

Kahden kehäpisteen välisen kaaren pituutta voidaan merkitä symbolilla $d_l(x, y)$ tai symbolilla $l(\Delta)$. Koska ympyrä voidaan samaistaa joukoksi \mathbb{R}/\mathbb{Z} , niin kahden pisteen välinen etäisyys on joukoissa sama. Tällöin isomorfismi $e^{2\pi i\phi} \mapsto \phi$ yhdistää joukot S^1 ja \mathbb{R}/\mathbb{Z} toisiinsa säilyttäen pisteiden välisen etäisyyden. Ympyrän kaaren pituutta kahden kehäpisteen välillä voidaan mitata parametrilla ϕ . Tällöin koko ympyrän kehän pituus on isomorfismin nojalla 1.

HUOMAUTUS 4.2. Kahden kehäpisteen, x ja y välistä matkaa voidaan mitata myös euklidisella metriikalla (ks. esimerkiksi [13, s. 6]) $d_e(x, y) = \{|x - y| : x, y \in \mathbb{R}^2\}$, joka kertoo lyhyimmän etäisyyden näiden pisteiden välillä. Kuvassa 4.1 näkyvät molemmat etäisyysmitat. Vaikka nämä kaksi etäisyysmittaa näyttäisivät olevan hyvin erilaiset, osoittaa seuraava lause, että ne kuitenkin oleellisesti ovat samat.

KUVA 4.1. Kehäpisteiden etäisyydet d ja d_l

MÄÄRITELMÄ 4.3. Metriikat d_e ja d_l ovat *ekvivalentit*, jos identtinen kuvaus ja sen käänteinen kuvaus ovat Lipschitz-jatkuvia näiden metriikoiden välillä. Edelleen identtinen kuvaus on Lipschitz-jatkuva, jos on olemassa vakio C siten, että $d_e(id(x), id(y)) \leq C d_l(x, y)$.

LEMMA 4.4. *Etäisyydet d_e ja d_l ovat keskenään ekvivalentteja.*

TODISTUS. Nyt $d_e(x, y) = 2 \sin(\frac{d_l(x, y)}{2})$, missä $d_l(x, y) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ja $\frac{2t}{\pi} \leq 2 \sin(\frac{t}{2}) \leq t$, kun $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Identtinen kuvaus metriikoiden välillä, $id : (S^1, d_e) \rightarrow (S^1, d_l)$, on Lipschitz-jatkuva vakiolla $C = \frac{\pi}{2}$. Vastaavasti käänteiskuvaus, joka myös on identtinen kuvaus, on Lipschitz-jatkuva vakiolla $C = 1$. \square

Lemman 4.4 nojalla voidaan nyt määritellä kehäpisteiden x ja y välinen etäisyys metriikkana joukossa $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

MÄÄRITELMÄ 4.5. Olkoon x ja y ympyrän kehäpisteitä. Tällöin näiden pisteiden välinen *ympyrän kaaren pituus* on

$$d(x, y) := \min\{|b - a| : a \in x, b \in y\},$$

missä $x, y \in X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x] : x \in \mathbb{R}\}$. Tässä joukko X on kaikkien ekvivalenssiluokkien joukko.

LEMMA 4.6. *Etäisyys $d(x, y)$ on metriikka ekvivalenssiluokkien joukossa $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

TODISTUS. Etäisyys d on selvästi symmetrinen. Lisäksi jos $d(x, y) = 0$, niin $x = y$. Tämän osoittamiseksi huomataan ensin, että metriikka ei muutu, jos valitaan pienin $a \in x$ ja mielivaltainen $b \in y$. Tämä siksi, että lyhyin etäisyys pisteestä b mihin tahansa ekvivalenssiluokan $[x]$ alkioon on sama kuin lyhyin etäisyys ekvivalenssiluokan $[x]$ alkioden ja pisteen b välillä, kun pistettä b siirretään minkä tahansa kokonaisluvun verran. Kuitenkin $\min\{|b - a| : a \in x\}$ saavutetaan ja tällöin $d(x, y) = 0$ vain jos $b \in x$ ja täten on oltava $x = y$.

Osoitetaan sitten, että $d(x, z) \leq d(y, z) + d(x, y)$, kun $x, y, z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Valitaan $a \in x$ ja $b \in y$ siten, että $d(x, y) = |b - a|$. Nyt mille tahansa $c \in z$ pätee

$$d(x, z) \leq |c - a| \leq |c - b| + |b - a| = |c - b| + d(x, y).$$

Väite seuraa, kun valitaan pienin $c \in z$. \square

MÄÄRITELMÄ 4.7. *Ympyrän kiertoa* kulman $2\pi\alpha$ verran merkitään symbolilla R_α , missä $\alpha \in \mathbb{R}$ on rotaatioluku. Multiplikaatiivista merkintää käyttäen kierto on

$$R_\alpha(z) = z z_0, \text{ missä } z_0 = e^{2\pi i \alpha} \text{ ja } z \in S^1,$$

ja additiivista merkintää käyttäen

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}, \text{ missä } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

HUOMAUTUS 4.8. Additiivisessa merkinnässä $(\text{mod } 1)$ tarkoittaa, että luvusta R_α vähennetään kokonaisosa, jotta saadaan edustaja väliltä $[0, 1]$.

Keskeisessä tarkastelussa tässä luvussa ovat juuri ympyrän kiertojen iteraatit, jotka multiplikatiivisen merkinnän mukaan ovat

$$R_\alpha^n(z) = R_{n\alpha}(z) = z_0^n z,$$

ja additiivisen merkinnän mukaan

$$R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod{1}.$$

Rotaatioluvun α valinta vaikuttaa merkittävästi kiertojen dynamiikkaan, sillä rationaalinen α tekee ratojen käyttäytymisestä huomattavasti yksinkertaisempaa kuin irrationaalinen α .

4.2. Rationaalinen ja irrationaalinen kierto

MÄÄRITELMÄ 4.9. Jos $\alpha \in \mathbb{Q}$, niin sanotaan, että R_α on *rationaalinen kierto*. Jos $\alpha \notin \mathbb{Q}$, niin R_α on *irrationaalinen kierto*.

LAUSE 4.10. Olkoon $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ympyrän kierto.

- (i) Jos $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, on rationaalinen, niin kaikille $x \in S^1$ rata $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ on q -jaksollinen.
- (ii) Jos $\alpha \notin \mathbb{Q}$, niin kaikille $z \in S^1$ rata $\mathcal{O}_{R_\alpha}(z)$ on tiheä.

TODISTUS. (i) Olkoon $\alpha = \frac{p}{q}$. Tällöin

$$\begin{aligned} R_\alpha(x) &= x + \frac{p}{q} \pmod{1} \\ R_\alpha^2(x) &= \left(x + \frac{p}{q}\right) + \frac{p}{q} \pmod{1} \\ &\vdots \\ R_\alpha^q(x) &= x + q \cdot \frac{p}{q} = x \pmod{1} \end{aligned}$$

Nyt siis R_α^q on identtinen kuvaus ja q iteraation jälkeen jakso alkaa toistaa itseään.

(ii) Koska α on irrationaalinen, niin ympyrän kierron määritelmästä 4.7 nähdään, että jokaisen pisteen $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ rata on ääretön joukko. Osoitetaan sitten, että positiivinen semirata $\mathcal{O}_{R_\alpha}^+(x)$, $\alpha > 0$, on tiheä.

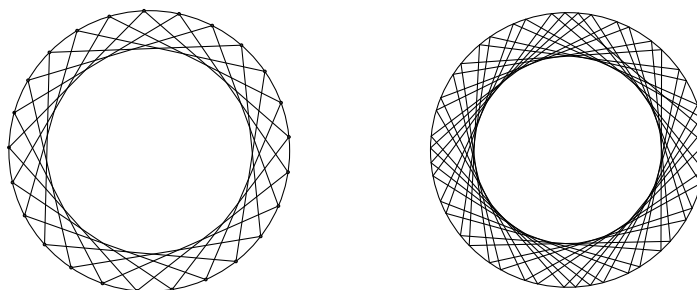
Olkoon $x, z \in S^1$ ja $\epsilon > 0$. Osoitetaan, että z on pisteen x positiivisen semiradan sulkeumassa. Merkinnällä $\lfloor \cdot \rfloor$ tarkoitetaan luvun \cdot kokonaisosaa. Koska pisteen x rata on ääretön ja koska ei ole sellaista $k \geq \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ pisteen joukkoa, missä kaikki radan pisteiden pareittaiset etäisyydet olisivat enemmän kuin ϵ , niin on olemassa $l, m \in \mathbb{N}$ siten, että $l < m \leq \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$ ja joille $d(R_\alpha^m(x), R_\alpha^l(x)) < \epsilon$. Koska R_α^{-l} säilyttää etäisyydet, niin pätee $d(R_\alpha^{m-l}(x), x) < \epsilon$. Tämä etäisyys on riippumaton pisteestä x , sillä jos

valitaan $y \in S^1$, niin $y = R_{y-x}(x)$ ja

$$\begin{aligned} d(R_\alpha^{m-l}(y), y) &= d(R_\alpha^{m-l}(R_{y-x}(x)), R_{y-x}(x)) = d(R_{(m-l)\alpha+y-x}(x), R_{y-x}(x)) \\ &= d(R_{y-x}(R_\alpha^{m-l}(x)), R_{y-x}(x)) = d(R_\alpha^{m-l}(x), x) \end{aligned}$$

Näin ollen m ja l voidaan valita pisteestä x riippumatta.

Valitaan $\theta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ siten, että $\theta = (m-l)\alpha \pmod{1}$. Tällöin $\rho := |\theta| < \epsilon$ ja $R_\alpha^{m-l} = R_\theta$. Olkoon $N = \lfloor \frac{1}{\rho} \rfloor + 1$. Nyt pisteen x positiivisen semiradan osajoukko $\{R_{i\theta}(x) | i = 0, 1, \dots, N\}$ jakaa ympyrän kehän väleihin, joiden pituus on vähemmän kuin $\rho < \epsilon$, joten on olemassa $n \leq N(m-l)$ siten, että $d(R_\alpha^n(x), z) < \epsilon$. \square



KUVA 4.2. Pisteiden jaksollinen rata rationaalisessa ympyrän kierrossa ja segmentti tiheästä radasta irrationaalisessa kierrossa.

ESIMERKKI 4.11. Olkoon $\alpha = \frac{2}{5}$ ja $x = 0$. Pisteiden 0 rata ympyrän kierrossa $R_{\frac{2}{5}}(x) = x + \frac{2}{5} \pmod{1}$ saadaan iteroimalla kierto kuvausta:

$$\begin{aligned} R_{\frac{2}{5}}(0) &= 0 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \pmod{1} \\ R_{\frac{2}{5}}^2(0) &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \pmod{1} \\ R_{\frac{2}{5}}^3(0) &= \frac{6}{5} = \frac{1}{5} \pmod{1} \\ R_{\frac{2}{5}}^4(0) &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \pmod{1} \\ R_{\frac{2}{5}}^5(0) &= \frac{5}{5} = 0 \pmod{1} \end{aligned}$$

Pisteiden 0 rata rationaalisessa kierrossa $R_{\frac{2}{5}}$ on $(0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$. Viidennen iteraation jälkeen jakso alkaa toistaa itseään.

Olkoon sitten $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $x = 0$. Pisteiden 0 rata kierrossa $R_{\sqrt{2}}(x) = x + \sqrt{2} \pmod{1}$ voidaan selvittää vastaavalla tavalla kuin yllä

$$\begin{aligned} R_{\sqrt{2}}(0) &= 0 + \sqrt{2} \approx 0,4142 \pmod{1} \\ R_{\sqrt{2}}^2(0) &= \sqrt{2} + \sqrt{2} \approx 0,8284 \pmod{1} \\ R_{\sqrt{2}}^3(0) &= 3 \cdot \sqrt{2} \approx 0,2426 \pmod{1} \\ R_{\sqrt{2}}^4(0) &= 4 \cdot \sqrt{2} \approx 0,6569 \pmod{1} \\ R_{\sqrt{2}}^5(0) &= 5 \cdot \sqrt{2} \approx 0,0711 \pmod{1} \\ R_{\sqrt{2}}^6(0) &= 6 \cdot \sqrt{2} \approx 0,4853 \pmod{1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pisteiden 0 radan ensimmäiset pisteet irrationaalisessa kierrossa $R_{\sqrt{2}}$ ovat

$$(0, 0,4142, 0,8284, 0,2426, 0,6569, 0,0711, 0,4853\dots)$$

Yllä olevissa laskuissa käytettiin additiivista merkintää ja siten kokonaisuosan vähentämällä kaikki radan pisteet saadaan välille $[0, 1] = S^1$.

HUOMAUTUS 4.12. Koska kierron R_α negatiivinen semirata on sama kuin kierron $R_{-\alpha}$ positiivinen semirata, niin lauseen 4.10 todistuksessa todistettiin radan tiheys myös negatiivisille semiradoille.

MÄÄRITELMÄ 4.13. Joukko $A \subset X$ on invariantti kuvauksen $f : X \rightarrow X$ suhteen, jos kuvaus säilyttää joukon ominaisuudet.

Pisteiden radan tiheys irrationaalisessa ympyrän kierrossa voidaan todistaa myös invarianttiudesta käsin. Jos voidaan osoittaa, että ympyrän kehällä ei ole ympyrän kierron suhteen invarianttia osajoukkoa A , niin tästä seuraa, että pisteen $x \in A$ rata on tiheä irrationaalisessa kierrossa, koska iteraatit täyttävät koko ympyrän. Osoitetaan tämä antiteesillä.

Vaihtoehoton todistus lauseen 4.10 kohdalle (ii):

Oletetaan, että $A \subset S^1$ on invariantti, suljettu joukko. Antiteesi: Rata ei ole tiheä, eli pisteen $x \in A$ radan komplementti sisältää välejä. Nyt komplementti $S^1 \setminus A$ on epätyhjä, invariantti avoin joukko, joka koostuu pistevieraista väleistä. Olkoon I pisin (tai yksi pisimmistä, jos saman mittaisia välejä on useita) näistä väleistä. Koska ympyrän kierto säilyttää pisteiden välisen etäisyyden ja siten välin pituuden, niin välien iteraatit $R_\alpha^n(I)$ eivät mene päällekkäin. Jos välit menisivät päällekkäin, tällöin joukossa $S^1 \setminus A$ olisi jokin väliä I pidempi väli, mikä johtaa ristiriitaan.

Koska α on irrationaalinen, niin mitkään välin I iteraatit eivät voi myöskään yhtyä toisiinsa, sillä muutoin jonkin iteraatin $R_\alpha^n(I)$ päätepiste x kuvautuisi itselleen, jolloin $x + k\alpha = x \pmod{1}$, missä $k\alpha = l$ on kokonaisluku ja $\alpha = \frac{k}{l}$. Tällöin välit $R_\alpha^n(I)$ ovat yhtä pitkiä ja erillisiä, mikä on mahdotonta, koska ympyrän kehän pituus on äärellinen ja välien yhteenlaskettu pituus ei voi olla pidempi kuin ympyrän kehä. Näin ollen antiteesi on väärä ja siten rata on tiheä.

MÄÄRITELMÄ 4.14. Kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on homeomorfismi, jos se on jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus on jatkuva.

MÄÄRITELMÄ 4.15. Homeomorfismi $f : X \rightarrow X$ on *topologisesti transitiivinen*, jos on olemassa piste $x \in X$ siten, että sen rata $\mathcal{O}_f(x) = (f^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ on tiheä joukossa X .

MÄÄRITELMÄ 4.16. Homeomorfismi $f : X \rightarrow X$ on *minimaalinen*, jos jokaisen pisteen $x \in X$ rata on tiheä joukossa X tai yhtäpitävästi jos kuvauksella f ei ole suljettuja invariantteja joukkoja.

LAUSE 4.17. *Ympyrän irrationaalinen kierto on minimaalinen ja siten topologisesti transitiivinen.*

TODISTUS. Ympyrän irrationaalinen kierto $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $R_\alpha(x) = x + \alpha$ on homeomorfismi, sillä jokainen piste kuvautuu eri pisteeksi ja tiheyden nojalla kaikki maalijoukon pisteet tulevat kuvatuksi. Lisäksi se on jatkuva kuvaus, jonka käänteiskuvaus on jatkuva. Väite seuraa lauseesta 4.10. \square

ESIMERKKI 4.18. Osoitetaan, että pisteen 0 rata ympyrän kierrossa R_α , missä

$$\alpha = \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{c}}}$$

jollekin $c > 1$, on tiheä, jos α on irrationaalinen ja jaksollinen, jos α on rationaalinen. Huomaa, että $\alpha \in \mathbb{Q}$ jos ja vain jos $c \in \mathbb{Q}$.

Koska

$$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3} \text{ eli } 3\alpha < 1 < 4\alpha, \quad (4.1)$$

niin pisteen 0 rata on kolmannen iteraation jälkeen ensimmäisen kerran lähempänä lukua 0 kuin millään aiemmista iteraatioista. Ensimmäiset kolme pistettä, α , 2α ja 3α , ovat sijoittuneet tasaisesti ja koska $4\alpha > 1$, niin 3α on lähempänä kokonaislukua kuin aiemmat pisteet α ja 2α . Tarkka etäisyys on

$$\delta := 1 - 3\alpha = 1 - \frac{3}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{c}}} = \frac{1}{5 + \frac{1}{c}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{c}}} = \frac{1}{16 + \frac{3}{c}}.$$

Jotta löydetään seuraava iteraatio, jolla päästään lähemmäs pistettä 0, aloitetaan tarkastelu neljännestä askeleesta. Olkoon $4\alpha = \alpha - \delta \pmod{1}$. Nyt siis kolme α -askelta vie pisteestä α pisteeseen $\alpha - \delta$. Kuinka monta tällaista 3α -askelta tarvitaan, että päästään lähemmäs pistettä 0? Vastaavalla päättelyllä kuin kohdassa 4.1 pitäisi askeleita olla $\frac{\alpha}{\delta}$. Nyt pitäisi siis löytää n , jolle pätee

$$n\delta < \alpha < (n+1)\delta \quad (4.2)$$

Lasketaan askeleiden määrä:

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha}{1-3\alpha} = \frac{\frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{c}}}}{\frac{1}{16 + \frac{3}{c}}} = \frac{\frac{16c+3}{5c+1}}{\frac{c}{16c+3}} = 5 + \frac{1}{c}$$

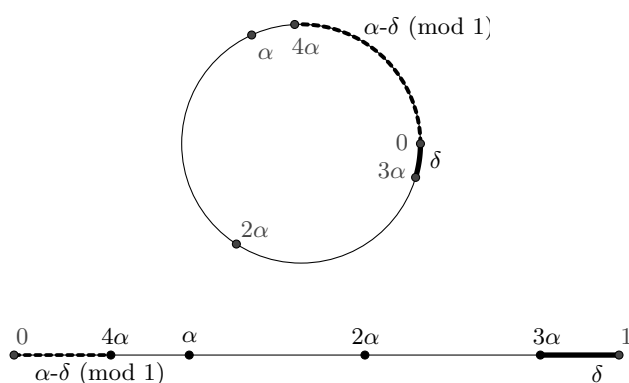
Tämän mukaan 5 3α -askelta vie lähemmäs pistettä 0, kuin mikään aiemmista, sillä nyt $n = 5$ toteuttaa epäyhtälön 4.2:

$$5\delta = \frac{5}{15 + (1 + \frac{3}{c})} = \frac{1}{3 + (\frac{1}{5} + \frac{3}{5c})} < \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} < \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{c}}} = \alpha$$

ja

$$6\delta = \frac{6}{16 + \frac{3}{c}} > \frac{6}{18} = \frac{1}{3} > \alpha$$

Nämä viisi 3α -askelta täyttävät tasaisesti välin $]0, \alpha[$. Kun tämä seuravaksi lähin piste saavutetaan, niin pisteen 0 rata ympyrän kaarella on δ -tiheä ympyrän osajoukko, joka on tasaisesti jakautunut. Seuraavaksi lähimmän askeleen määrittää vakio c , ja luvun α valinnasta voidaan arvata, että seuraavaksi lähimmäksi päästään c iteraation jälkeen. Jos $c = 1000000$, niin tarvitaan 1000000 5δ -askelta, että päästään lähemmäs pistettä 0 kuin missään vaiheessa aiemmin. Tähän tarvitaan noin 15000000 iteraatiota.



KUVA 4.3. Ympyrän kierto $R_\alpha(0)$, missä $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$.

Tästä esimerkistä voidaan päätellä, että pisteen 0 rata on jaksollinen lukuunottamatta pientä virhettä δ . Tämä virhe pysyy iteroitaessa samana, kunnes päästään jälleen lähemmäs pistettä 0, jolloin myös virhe pienenee. Näin irrationaalista kiertoa iteroitaessa, iteraatiot asettuvat tiheästi ympyrän kaarelle.

Edellinen esimerkki osoitti, että pisteen radan tarkastelu irrationaalisessa kierrossa keskittyy selvittämään, kuinka monta kertaa pisteen iteraatio osuu tiettyyn ympyrän osaan. Määritellään seuraavaksi tarkemmin nämä frekvenssit ympyrän kierroille. Jatkossa oletetaan, että α on irrationaalinen.

MÄÄRITELMÄ 4.19. Olkoon $\Delta \subset S^1$ jokin ympyrän kaari, $x \in S^1, \alpha \notin \mathbb{Q}$ ja $n \in \mathbb{N}$.
Funktio

$$F_{\Delta}(x, n) := \text{card}\{k \in \mathbb{Z} | 0 \leq k < n, R_{\alpha}^k(x) \in \Delta\}$$

ilmaisee *frekvenssin*, kuinka moni pisteen x iteraatioista osuu kaarelle Δ , kun tehdään n iteraatiota.

Suhteellinen frekvenssi

$$\frac{F_{\Delta}(x, n)}{n}$$

mittaa kuinka usein iteraatio osuu kaarelle.

ESIMERKKI 4.20. Olkoon $\alpha = \sqrt{2}$, $x = 0$ ja $\Delta = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \subset S^1$. Kun kiertoa iteroidaan 6 kertaa, esimerkin 4.11 nojalla tiedetään, että iteraatiot $R_{\sqrt{2}}(0) \approx 0,4142$ ja $R_{\sqrt{2}}^6(0) \approx 0,4853$ osuvat kaarelle Δ ja siten $F_{\Delta}(0, 6) = 2$. Suhteelliseksi frekvenssiksi saadaan $\frac{F_{\Delta}(0,6)}{6} = \frac{1}{3}$.

HUOMAUTUS 4.21. Koska funktio F_{Δ} ei ole vähenevä ja koska irrationaaliselle α semirata on tiheä, niin hyvin moni pisteen x iteraatioista osuu kaarelle Δ . Näin ollen pätee

$$F_{\Delta}(x, n) \rightarrow \infty, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Määritelmässä 4.1, määriteltiin pisteiden x ja y välisen kaaren Δ pituus symbolilla $l(\Delta)$. Tämä mittaa kaaren pituutta parametrilla ϕ .

LAUSE 4.22. *Olkoon α irrationaalinen ja R_{α} ympyrän irrationaalinen kierto. Olkoot Δ ja Δ' ympyrän kaaria, joille pätee $l(\Delta) < l(\Delta')$. Tällöin on olemassa $N_0 \in \mathbb{N}$ siten, että jos $x \in S^1$, $N \geq N_0$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$F_{\Delta'}(x, n + N) \geq F_{\Delta}(x, n).$$

TODISTUS. Koska positiivinen semirata on tiheä, niin löytyy $N_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $R_{\alpha}^{N_0}(\Delta) \subset \Delta'$. Tällöin siitä, että $R_{\alpha}^n(x) \in \Delta$ seuraa $R_{\alpha}^{n+N_0}(x) \in \Delta'$, ja edelleen

$$F_{\Delta'}(x, n + N) \geq F_{\Delta'}(x, n + N_0) \geq F_{\Delta}(x, n) \text{ kun } N \geq N_0.$$

□

Tähän asti tarkastelluissa lauseissa ja esimerkeissä ei ole ollut väliä, onko kaari avoin, suljettu vai puoliavoin. Kaaren avoimuudella ei ole väliä, kunhan frekvenssien käyttäytyminen rajalla huomioidaan, sillä ero iteraatioiden määrässä avoimen ja suljetun kaaren välillä on enintään kaksi. Oletetaan jatkossa, että tarkasteltavat kaaret ovat vasemmalta suljettuja ja oikealta avoimia.

Tällaisilla puoliavoimilla kaarilla, Δ_1 ja Δ_2 on *additiivisuusominaisuus*: Jos kaari Δ_1 yhtyy kaaren Δ_2 vasempaan laitaan, niin tällöin $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, $\Delta_1 \cup \Delta_2$ on puoliavoin kaari ja

$$F_{\Delta_1}(x, n) + F_{\Delta_2}(x, n) = F_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(x, n).$$

Lisäksi, jos A on yhdistelmä pistevieraita ympyrän kaaria, niin voidaan määritellä

$$F_A(x, n) := \text{card}\{k \in \mathbb{Z} | 0 \leq k < n, R_{\alpha}^k(x) \in A\}. \quad (4.3)$$

Vielä ei tiedetä, onko suhteellisten frekvenssien raja-arvoa olemassa. Seuraavaksi määritellään yläraja-arvo suhteellisille frekvensseille ja kuvataan sen ominaisuuksia.

MÄÄRITELMÄ 4.23. Olkoon A joukko pistevieraita ympyrän kaaria ja $F_A(x, n)$ pisteen x iteraatioiden vierailujen määrä joukossa A . Suhteellisten frekvenssien *yläraja-arvo* on

$$\bar{f}_x(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_A(x, n)}{n}.$$

LAUSE 4.24. *Olkoon A_1 ja A_2 joukkoja, jotka koostuvat pistevieraista ympyrän kaarista. Yläraja-arvo on subadditiivinen, eli pätee*

$$\bar{f}_x(A_1 \cup A_2) \leq \bar{f}_x(A_1) + \bar{f}_x(A_2).$$

Erityisesti, jos $\bigcup_{i=1}^n A_i = S^1$, niin $\sum_{i=1}^n \bar{f}_x(A_i) \geq 1$

TODISTUS. Koska $F_{A_1 \cup A_2}(x, n) \leq F_{A_1}(x, n) + F_{A_2}(x, n)$, niin

$$\bar{f}_x(A_1 \cup A_2) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{A_1 \cup A_2}(x, n)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{A_1}(x, n)}{n} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{A_2}(x, n)}{n}$$

ja edellinen väite seuraa.

Koska $\bigcup_{i=1}^n A_i = S^1$, niin $F_{S^1}(x, n) \geq n$, sillä jokainen pisteen x iteraatio R_α^n osuu johonkin osaan ympyrän kaarta. Siten

$$\sum_{i=1}^n \bar{f}_x(A_i) \geq \bar{f}_x\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bar{f}_x(S^1) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{S^1}(x, n)}{n} \geq \frac{n}{n} = 1$$

□

Lauseesta 4.22 ja määritelmästä 4.23 saadaan seuraus:

SEURAUUS 4.25. *Jos $l(\Delta) < l(\Delta')$, niin $\bar{f}_x(\Delta) \leq \bar{f}_x(\Delta')$.*

TODISTUS. Lauseen 4.22 nojalla pätee

$$F_{\Delta'}(x, n + N) \geq F_\Delta(x, n),$$

missä $x \in S^1$, $N \geq N_0$, ja $N_0, n \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\bar{f}_x(\Delta) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_\Delta(x, n)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\Delta'}(x, n + N)}{n} = \bar{f}_x(\Delta').$$

□

Vastaavalla tavalla voidaan suhteellisille frekvensseille määritellä alaraja-arvo.

MÄÄRITELMÄ 4.26. Olkoon A joukko pistevieraita ympyrän kaaria ja $F_A(x, n)$ pisteen x iteraatioiden vierailujen määrä joukossa A . Suhteellisten frekvenssien *alaraja-arvo* on

$$\underline{f}_x(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F_A(x, n)}{n}$$

HUOMAUTUS 4.27. Joukolle A pätee $F_A(x, n) = n - F_{A^c}(x, n)$, missä A^c on joukon A komplementti $S^1 \setminus A$. Tällöin

$$\bar{f}_x(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{F_A(x, n)}{n} = 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{A^c}(x, n)}{n} = 1 - \underline{f}_x(A^c).$$

Yhdistämällä ylä- ja alaraja-arvot, voidaan tehdä päätelmiä suhteellisten frekvenssien asymptoottisesta käyttäytymisestä. Seuraava lause sanoo, että ylä- ja alaraja-arvot ovat yhtenevät.

LAUSE 4.28. Olkoon $\Delta \subset S^1$ ympyrän kaari ja $x \in S^1$. Tällöin

$$f(\Delta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_\Delta(x, n)}{n} = l(\Delta)$$

ja tämä raja-arvo on tasainen muuttujan x suhteen.

HUOMAUTUS 4.29. Jono $a_n = R_\alpha^n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ on tasaisesti jakautunut, jos jokaiselle $\Delta \subset S^1$ pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = l(\Delta),$$

missä $a_k \in \Delta$. Tämä tarkoittaa, että vierailujen asymptoottiset frekvenssit ovat samannomittaisilla kaarilla samat, riippumatta siitä, missä osassa ympyrää ne sijaitsevat.

Ennen lauseen 4.28 todistamista, osoitetaan lemma, joka sanoo, että iteraatioiden vierailujen määrä on ylhäältä rajoitettu ja siten suhteelliset frekvenssit eivät voi olla liian suuria.

LEMMA 4.30. Jos $l(\Delta) = \frac{1}{k}$, niin tällöin $\bar{f}_x(\Delta) \leq \frac{1}{k-1}$.

TODISTUS. Olkoon $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{k-1}$ pistevieraita kaaria, joista jokaisen pituus on $\frac{1}{k-1}$. Jos $1 \leq i < k$, niin lauseesta 4.22 seuraa, että on olemassa luonnolliset luvut N_i siten, että jos $x \in S^1$, niin

$$F_{\Delta_i}(x, n + N_i) \geq F_\Delta(x, n).$$

Tällöin $F_{\Delta_i}(x, n + N) \geq F_\Delta(x, n)$, missä $N = \max_i N_i$ ja

$$(k-1)F_\Delta(x, n) \leq \sum_{i=1}^{k-1} F_{\Delta_i}(x, n + N).$$

Kun N on kiinnitetty ja $n \rightarrow \infty$, niin saadaan

$$(k-1)\bar{f}_x(\Delta) \leq \bar{f}_x\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \Delta_i\right) = 1$$

ja väite seuraa. □

LAUSEEN 4.28 TODISTUS. Kaarelle Δ ja kiinnitetylle $\epsilon > 0$ löydetään luku k ja ympyrän kaari $\Delta' \supset \Delta$, jonka pituus on $\frac{1}{k} < l(\Delta) + \epsilon$. Nyt lemmän 4.30 nojalla pätee

$$\bar{f}_x(\Delta) < \bar{f}_x(\Delta') < \frac{1}{k-1} < (l(\Delta) + \epsilon) \frac{k}{k-1}.$$

Kun $\epsilon \rightarrow 0$ ja kun $k \rightarrow \infty$, niin $\bar{f}_x(\Delta) \leq l(\Delta)$.

Kun sovelletaan huomautusta 4.27 joukkoon $A = \Delta^c$, niin saadaan vastaavalla päättelyllä osoitettua, että $\underline{f}_x(\Delta) \geq l(\Delta)$.

Nyt on siis osoitettu, että raja-arvo f_Δ on olemassa ja että $f_\Delta = l(\Delta)$. □

ESIMERKKI 4.31. Esimerkin 4.20 tapauksessa saadaan raja-arvoksi kaaren $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \subset S^1$ pituus, eli

$$f(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_\Delta(0, n)}{n} = \frac{1}{4}.$$

Tämän luvun tarkastelut ovat siis osoittaneet, että pisteen x rata irrationaaliseessa kierrossa on tiheä. Tähän asti on tarkasteltu keskenään pistevieraita kaaria, mutta seuraavassa luvussa osoitetaan, että suhteellisten frekvenssien ominaisuudet pätevät mille tahansa joukolle A , jonka reuna on nollamittainen. Pääpaino on Birkoffin keskiarvossa, jonka avulla voidaan selvittää, kuinka mones iteraatti keskimäärin osuu tiettyyn osaan ympyrää.

Birkhoffin keskiarvo

Edellisessä luvussa tarkasteltiin frekvenssejä ja niiden ominaisuuksia, kun Δ oli kaari. Tässä luvussa tullaan osoittamaan, että kaari voidaan korvata millä tahansa Riemann-integroituvalle funktiolla. Frekvenssien määrittelemiseksi tarvitaan aluksi karakteristista funktiota, jonka avulla lause 4.28 voidaan yleistää kaarista joukkoon A , jonka reuna on nollamittainen.

MÄÄRITELMÄ 5.1. Olkoon A äärellinen joukko, joka koostuu ympyrän kaarista. Joukon A *karakteristinen funktio* on

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in A \\ 0 & \text{jos } x \notin A \end{cases}$$

Määritellään sitten iteraatioiden vierailujen frekvenssit ja suhteelliset frekvenssit joukolle A karakteristisen funktion avulla. Tässä F_A on sama kuin kohdassa 4.3.

MÄÄRITELMÄ 5.2. Olkoon A äärellinen joukko ympyrän kaaria. Funktio

$$F_A(x, n) := \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(R_\alpha^k(x))$$

ilmaisee *frekvenssin*, kuinka moni pisteen x iteraatioista osuu joukkoon A , kun tehdään n iteraatiota.

Suhteelliset frekvenssit ovat

$$\frac{F_A(x, n)}{n}.$$

Nyt karakteristisen funktion avulla saadaan kaaren Δ pituudeksi

$$l(\Delta) = \int_{S^1} \chi_\Delta(\phi) d\phi.$$

Tämän avulla voidaan edelleen määritellä suhteellisten frekvenssien raja-arvo ja lauseesta 4.28 saadaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(R_\alpha^k(x)) = \int_{S^1} \chi_\Delta(\phi) d\phi, \quad (5.1)$$

missä Δ on kaari.

Seuraavissa tarkasteluissa huomataan, että karakteristisen funktion χ sijaan ylläolevissa tarkasteluissa voidaan käyttää myös Riemann-integroituvia funktioita. Koska joukon A karakteristinen funktio on Riemann-integroituva täsmälleen silloin, kun joukon reuna ∂A on nollamittainen (ks. [5, s. 23]), niin tarkastelut yleistävät kohdan 5.1.

MÄÄRITELMÄ 5.3. *Birkhoffin keskiarvo-operaattori* B_n yhdistää funktion φ funktion $B_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi \circ R_\alpha^k}{n}$ siten, että

$$B_n(\varphi)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(x)).$$

HUOMAUTUS 5.4. Birkhoffin operaattorille B_n pätee

- (i) B_n on lineaarinen: $B_n(a\varphi + b\psi) = aB_n(\varphi) + bB_n(\psi)$
- (ii) B_n on ei-negatiivinen: Jos $\varphi \geq 0$, niin $B_n(\varphi) \geq 0$. Lisäksi, jos $\varphi > 0$, niin $B_n > 0$.
- (iii) B_n on ei-laajeneva: $\sup_{x \in S^1} B_n(\varphi)(x) \leq \sup_{x \in S^1} \varphi(x)$
- (iv) B_n säilyttää keskiarvon: $\int_{S^1} B_n(\varphi)(\phi) d\phi = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$

LAUSE 5.5.

- (i) *Kaikille sellaisille porraskomplekseille φ , jotka ovat lineaarisia kombinaatioita ympyrän kaarien karakteristisista funktioista, pätee*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi.$$

- (ii) *Kaikille funktioille φ , jotka ovat porraskompleksien tasaisia rajoja, pätee*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi.$$

TODISTUS. (i) Koska φ on lineaarinen kombinaatio karakteristisia funktioita, huomautuksen 5.4 ominaisuudet pätevät myös tässä tapauksessa. Väite seuraa suoraan kohdista 5.1 ja Birkhoffin operaattorin määritelmästä.

- (ii) Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan porraskompleksi φ_ϵ siten, että

$$\sup_{\phi \in S^1} |\varphi(\phi) - \varphi_\epsilon(\phi)| < \epsilon.$$

Kun nyt sovelletaan Birkhoffin operaattorin määritelmään funktiota $\varphi = \varphi_\epsilon + (\varphi - \varphi_\epsilon)$, saadaan kaikille $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi - 2\epsilon &\leq \int_{S^1} \varphi(\phi) - \epsilon d\phi - \epsilon \leq \int_{S^1} \varphi_\epsilon(\phi) d\phi - \epsilon \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi_\epsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi_\epsilon) + \epsilon \\ &= \int_{S^1} \varphi_\epsilon(\phi) d\phi + \epsilon \leq \int_{S^1} \varphi(\phi) + \epsilon d\phi + \epsilon \leq \int_{S^1} \varphi(\phi) d(\phi) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

□

LEMMA 5.6. *Jokainen jatkuva funktio on porraskompleksien tasainen raja. Jokainen funktio, jolla on äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä ja jolla on toispuoleiset raja-arvot näissä pisteissä, on niin ikään porraskompleksien raja.*

TODISTUS. Jokainen jatkuva funktio joukossa S^1 on tasaisesti jatkuva, sillä jokaiselle $\epsilon > 0$ voidaan löytää $n \in \mathbb{N}$ siten, että jokaisella ympyrän kaarella, jonka pituus on $\frac{1}{n}$, funktion saamat arvot tällä välillä ovat alle ϵ päässä toisistaan. Nyt jos S^1 jaetaan n tällaiseen kaareen, niin saadaan porraskompleksi, joka on vakio jokaisella kaarella ja

jonka etäisyys annetusta funktiosta on alle ϵ . Vastaava päättely osoittaa myös lemmän jälkimmäisen osan. \square

Kahdesta edellisestä lauseesta saadaan nyt:

LAUSE 5.7. *Olkoon α irrationaalinen ja φ jatkuva. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$$

Nyt voidaan todistaa merkittävä lause, joka sanoo, että Birkhoffin keskiarvo konvergoi kohti integraalia kaikilla Riemann-integroituville funktioilla ([14, s.8]). Nyt kun muistetaan, että ympyrä S^1 voidaan samaistaa väliksi $I = [0, 1]$, Riemann-integroituvuus soveltuu myös Birkhoffin keskiarvon tarkasteluissa.

MÄÄRITELMÄ 5.8. (*Riemann-integroituvuus*) Rajoitettu funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on *Riemann-integroituva* välillä I , jos sen *alaintegraali*

$$\text{ala} \int_I f := \sup \left\{ \sum(h, I) \mid h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ porrasfunktio, } h \leq f \right\}$$

ja *yläintegraali*

$$\text{ylä} \int_I f := \inf \left\{ \sum(h, I) \mid h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ porrasfunktio, } h \geq f \right\}$$

ovat yhtäsuuret. Tällöin funktion f Riemann-integraali yli välin I on

$$\int_I f := \text{ala} \int_I f = \text{ylä} \int_I f.$$

LAUSE 5.9. *Olkoon α irrationaalinen ja φ Riemann-integroituva. Tällöin*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$$

TODISTUS. Jaetaan S^1 äärelliseen määrään kaaria I_i . Merkitään alempaa Riemann-summaa merkinnällä $\sum_i \min \varphi|_{I_i} l(I_i)$ ja vastaavasti ylempää Riemann-summaa merkinnällä $\sum_i \max \varphi|_{I_i} l(I_i)$. Nämä Riemann-summat voidaan tulkita porrasfunktioiden φ_1 ja φ_2 integraaleiksi, missä $\varphi_1 = \min \varphi|_{I_i}$ ja $\varphi_2 = \max \varphi|_{I_i}$.

Riemann-integroituvuudesta seuraa, että väleihin jakaminen voidaan tehdä niin, että

$$\int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi - \epsilon \leq \int_{S^1} \varphi_1(\phi) d\phi \leq \int_{S^1} \varphi_2(\phi) d\phi \leq \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi + \epsilon$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi - \epsilon &\leq \int_{S^1} \varphi_1(\phi) d\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi_1) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\varphi_2) = \int_{S^1} \varphi_2(\phi) d\phi \leq \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi + \epsilon \end{aligned}$$

Kun $\epsilon \rightarrow 0$, niin väite seuraa. \square

HUOMAUTUS 5.10. Oletus Riemann-integroituvuudesta on olennainen. Valitaan piste x_0 ja määritellään joukko A siten, että se koostuu ympyrän kaarista, joiden pituus 2^{-k+2} ja joiden keskipisteenä $R_\alpha^k(x_0)$, $k \geq 0$ on. Huomataan ensin, että osa joukon A

sisältämistä kaarista menee päällekkäin. Nyt joukon A kaarien yhteenlasketulle pituudelle pätee

$$l(A) = \int_{S^1} \chi_A(\phi) d\phi \leq \frac{1}{2}$$

Kuitenkin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(R_\alpha^k(x)) = 1,$$

koska jokainen iteraatio osuu joukkoon A . Näin ollen lauseen 5.9 väite ei päde. Tämä johtuu siitä, että kuvaus χ_A ei joukon A määrittelystä johtuen ole Riemann-integroituva.

Lauseen 5.9 yhtälössä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(x)) = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$$

yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on keskiarvot. Vasemmalla olevaa raja-arvoa kutsutaan aikakeskiarvoksi ja oikealla olevaa tilakeskiarvoksi.

MÄÄRITELMÄ 5.11. Annetun funktion φ aikakeskiarvo on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(x)).$$

ja integraali

$$\int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$$

on funktion φ tilakeskiarvo

MÄÄRITELMÄ 5.12. Olkoon X kompakti metrinen avaruus ja funktio $f : X \rightarrow X$ jatkuva. Kuvaus f on yksikäsitteisesti ergodinen, jos

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

konvergoi tasaisesti kohti vakiota jokaiselle jRiemann-integroituvalle kuvaukselle φ .

LAUSE 5.13. Olkoon R_α ympyrän kierto, Δ kaari, χ_Δ sen karakteristinen funktio ja olkoon $x \in S^1$. Pisteen x rata ympyrän kierrossa on tasajakautunut jos ja vain jos kaikille $\Delta \subset S^1$ pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\chi_\Delta)(x) = l(\Delta).$$

TODISTUS. Oletetaan ensin, että pisteen x rata on tasaisesti jakautunut. Tällöin huomautuksen 4.29 nojalla pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_\Delta(R_\alpha^k(x)) = l(\Delta).$$

Väite seuraa, sillä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\chi_\Delta)(x) = \int_{S^1} \chi_\Delta(\phi) d\phi = l(\Delta)$$

Käänteinen väite seuraa suoraan oletuksesta ja huomautuksesta 4.29, sillä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\chi_\Delta)(x) = l(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_\Delta(R_\alpha^k(x)).$$

□

LAUSE 5.14. *Olkoon $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ yksikäsitteisesti ergodinen kuvaus ja $x \in S^1$. Tällöin pisteen x rata on tasaisesti jakautunut.*

TODISTUS. Olkoon $\Delta \subset S^1$ kaari. Koska R_α on oletuksen mukaan ergodinen, niin tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(x)) = r,$$

missä $r \in \mathbb{R}$ ja φ on Riemann-integroituva. Nyt Birkhoffin keskiarvon mukaan $r = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$ ja siten väite seuraa lauseesta 5.13. □

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan ergodisuutta rationaalisessa ja irrationaalisessa kierrossa.

ESIMERKKI 5.15. Jos $\alpha \in \mathbb{Q}$, niin tällöin ympyrän kierto R_α ei ole ergodinen: Olkoon $\alpha = \frac{1}{2}$. Käytetään additiivista merkintää ympyrän kierrolle, eli $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ ja valitaan $\varphi(x) = \chi_{[0, \frac{1}{4}[} + \chi_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[}$. Nyt Birkhoffin keskiarvo on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(x)) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{4}[\cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ 0 & \text{kun } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\cup [\frac{3}{4}, 1[\end{cases}$$

Tästä nähdään, ettei aikakeskiarvo ole vakio kaikkialla, joten R_α ei ole ergodinen, kun $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Olkoon sitten $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tällöin lauseen 5.7 mukaan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^k(x)) = \int_{S^1} \varphi(\phi) d\phi$$

ja siten R_α konvergoi kohti vakiota ja on näin ollen ergodinen.

Viitteet

- [1] DEVANEY, R. L.: *A first course in chaotic dynamical systems. Theory and experiment.* Addison Wesley, 1992.
- [2] DEVANEY, R. L.: *An Introduction to chaotic dynamical systems*, 2. painos. Addison Wesley, 1995.
- [3] GULICK, D.: *Enconteurs with chaos and fractals.* CRC Press, 2012.
- [4] HASSELBLATT, B. & KATOK, A.: *A first course in dynamics.* Cambridge University Press, 2003.
- [5] KILPELAINEN, T.: *Analyysi 2.* 2001-2003.
- [6] KILPELAINEN, T.: *Mitta- ja integraaliteoria.* 2004-2005.
- [7] KILPELAINEN, T.: *Analyysi 1.* 2012.
- [8] KOTSIREAS, I. S. & KARAMANOS, K.: *Exact computation of the bifurcation point B_4 of the logistic map and the Bailey-Broadhurst conjectures.* International Journal of Bifurcation and Chaos 14 (7), 2417-2423, 2004.
- [9] KRAFT, R. L.: *Chaos, Cantor sets and hyperbolicity for the logistic maps.* The American Mathematical Monthly 106 (5), 400-408, 1999.
- [10] MAY, R.: *Simple mathematical models with very complicated dynamics.* Nature 261, 459-467, 1976.
- [11] DE MELO, W. & VAN STRIEN, S.: *One-dimensional dynamics.* Springer-Verlag, 1993.
- [12] PARKKONEN, J.: *Johdatus dynaamisiin systeemiin.* 2013.
- [13] PURMONEN, V. T.: *Euklidiset avaruudet.* 2009.
- [14] PURMONEN, V. T.: *Integraalilaskentaa 1.* 2009.
- [15] SAHA, P. & STROGATZ, S. H.: *The birth of period three.* Mathematics Magazine 68 (1), 42-47, 1995.
- [16] STROGATZ, S. H.: *Nonlinear dynamics and chaos.* Addison Wesley, 1994.