HILBERTIN AVARUUKSISTA

Pro gradu -tutkielma

Hannariikka Lehtiniemi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Jyväskylän yliopisto

syksy 2014

TIIVISTELMÄ

Äärettömnulotteiset avaruudet ovat monilta ominaisuuksiltaan samankaltaisia vastaavien äärellisulotteisten avaruuksien kanssa. Useat teoriat ja käsitteet ovat samoja, mutta myös eroja löytyy, eikä kaikkia tuloksia voida yleistää äärettömnulotteisiin tapauksiin. Yksi esimerkki avaruuksista, joiden dimensiona voi olla ääretön, on Hilbertin avaruudet. Hilbertin avaruus on täydellinen sisätuloavaruus eli vektoriavaruus, jossa jokaiselle vektoriparille on määritetty sisätulo. Sisätulo on jatkuva kuvaus, jota merkitään yleensä $(x|y)$ ja sen arvot ovat äärellisiä reaali- tai kompleksilukuja. Esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, \dots, y_n)$ sisätulo on $(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Täydellisyys puolestaan tarkoittaa sitä, että avaruuden kaikki Cauchyn jonot suppenevat kyseisessä avaruudessa. Cauchyn jono on sellainen vektoreiden jono $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $M \in \mathbb{N}$ siten että $\|x_k - x_j\| < \varepsilon$ kaikille $k, j \geq M$.

Hilbertin avaruudet sopivat hyvin äärettömnulotteisten sisätuloavaruuksien tarkasteluun, sillä niillä on monia ominaisuuksia, jotka ovat tunnettuja Euklidisen avaruuden kohdalta. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sisätulo määritellään pistetulona $(x|y) = x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos\gamma$. Koska kosini saa arvoja vain välillä $[-1,1]$, seurauksena on epäyhtälö $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$. Tämä sisätulon ja normin yhteys pätee myös yleisessä sisätuloavaruudessa ja on nimetty Cauchy-Schwarzin epäyhtälöksi. Reaali- ja kompleksilukujen kolmioepäyhtälö $|x + y| \leq |x| + |y|$ yleistyy sisätuloavaruuden vektorien normeille muodossa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Tämäkin kolmioepäyhtälö on tärkeä tulos, sillä sitä hyödynnetään muiden lauseiden todistuksissa, ja se on myös yksi vaadittavista normin ominaisuuksista. Saadaankin osoitettua, että sisätuloavaruuden normi $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$ toteuttaa kyseisen kolmioepäyhtälön. Kun lisäksi tälle kuvaukselle pätee $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ sekä $\| x \| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$, niin se toteuttaa kaikki kolme normilta vaadittavaa ominaisuutta ja on näin hyvin määritelty.

Hyvänä esimerkkinä äärettömnulotteisista sisätuloavaruuksista toimivat jonoavaruudet l^p. Ne koostuvat kaikista sellaisista jonoista $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, joiden normi $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$ on äärellinen. Myös näille äärettömnulotteisille jonoavaruuksille saadaan yleistettyä sekä kolmioepäyhtälöä vastaava Minkowskin epäyhtälö että Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä vastaava Hölderin epäyhtälö. Jonoavaruuksien erikoistapaus on l^2-avaruus, joka on ainoa jonoavaruus, jolle on määritetty sisätulo $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$. Muille jonoavaruuksille

sisätuloa ei voida määritellä, koska niiden tapauksessa sisätuloa määrittelevä sarja voi hajaantua, eikä näin toteuta sisätulon ominaisuuksia. Näin ollen vain l^2-avaruus voisi olla Hilbertin avaruus. Onkin todistettavissa, että jonoavaruus l^2 on vektoriavaruus, jonka kaikille vektoripareille on määritetty sisätulo. Sen lisäksi l^2-avaruus on täydellinen: Voidaan osoittaa, että jos mielivaltainen jono $(x_k) \in l^2$ on Cauchyn jono, niin se suppenee kohti raja-arvoa y, ja myös tämä raja-arvo kuuluu kyseiseen avaruuteen, siis $y \in l^2$. Koska tämä pätee mille tahansa avaruuden l^2 jonolle, niin voidaan sanoa, että l^2 on täydellinen. Lopulta voidaan todeta, että jonoavaruus l^2 on täydellinen sisätuloavaruus eli Hilbertin avaruus.

Hilbertin avaruuksille on aina määritetty sisätulo, joten joukkojen ortogonaalisuus on helposti selvitettävissä: vektorit ovat ortogonaaliset eli toisiaan vastaan kohtisuorassa jos ja vain jos niiden sisätulo on nolla. Vektorien ortogonaalisuus on edellytyksenä myös Pythagoraan lauseessa, joka yleistyy sisätuloavaruuden vektorien normeille muodossa $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ tai $\| \sum_{j=1}^{n} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^2$. Ortogonaalinen joukko on ortonormaali, jos siinä kaikkien vektorien normi on yksi. Edelleen, jos tällainen ortonormaali joukko on sisätuloavaruuden V lineaarisesti riippumaton osajoukko, joka virittää avaruuden V, niin kyseessä on ortonormaali kanta. Hilbertin avaruuden virittävää ortonormaalia kantaa sanotaan Hilbertin kannaksi. Tällöin kantavektorien joukon on oltava maksimaalinen eli se ei saa sisältyä muuhun ortonormaaliin joukkoon. Hilbertin avaruudelle voidaan todistaa ehto, jonka mukaan ortonormaali joukko on Hilbertin kanta jos ja vain jos ainoastaan nollavektori on ortogonaalinen kaikkia tämän joukon vektoreita vastaan. Esimerkiksi joukko $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, missä $e_n = (0,0,\dots,\underbrace{1}_{n:s},\dots,0,\dots) \in l^2$, on Hilbertin kanta jonoavaruudelle l^2: Jos $x \in l^2$ ja $x \perp e_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin tällöin $x = 0$, eli vain nollavektori on kohtisuorassa jokaista vektoria e_n vastaan.

Äärellisulotteisen vektoriavaruuden mielivaltainen vektori x voidaan aina esittää skalaarien ja kantavektorien lineaarikombinaationa muodossa $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Hilbertin avaruudessa tämä on mahdollista myös äärettömänä summana, jonka suppeneminen osoittautuu riippuvan vain skalaareista: sarja $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$. Tällöin tämän vektorin normi saadaan myös kirjoitettua vain skalaarien avulla, mitä kutsutaan Parsevalin yhtälöksi: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

SISÄLTÖ

1. JOHDANTO

Tämän tutkielman tarkoituksena on laajentaa tuttuja äärellisulotteisten avaruuksien käsitteitä sellaisiin avaruuksiin, joiden dimensiona onkin ääretön. Tähän tarkoitukseen sopiva esimerkki on Hilbertin avaruus, jonka ominaisuuksia työssä tarkastellaan. Koska Hilbertin avaruus on täydellinen sisätuloavaruus, niin myös sisätuloavaruus on keskeisessä osassa. Tutkielman tavoitteena ei ole esitellä kokonaista teoriaa, joten esimerkiksi määritelmät ja lauseet on rajattu niihin, joita tässä työssä tarvitaan. Hilbertin avaruuksiin ja erityisesti ääretönulotteisiin avaruuksiin liittyy valtavasti tietoa, teorioita ja sovelluksia. Tämä tutkielma tarjoaa johdantoa aiheeseen ja pohjatiedot käydään läpi tarkasti.

Hilbertin avaruus on täydellinen sisätuloavaruus, sisätuloavaruus on vektoriavaruus varustettuna sisätulolla ja täydellisyyteen vaaditaan suppenevat Cauchyn jonot. Heti alussa esiintyy paljon käsitteitä, jotka täytyy määritellä. Tämän työn luku 2 koostuukin lähinnä määritelmistä, mutta niiden lisäksi saadaan osoitettua tärkeä sisätuloavaruuden normi $\parallel x \parallel = \sqrt{(x|x)}$ hyvin määritellyksi. Tätä ennen esitetään kaksi epäyhtälöä, jotka ovat jossakin muodossa tunnettuja jo esimerkiksi Euklidisen avaruuden tapauksista: Reaalilukujen kolmioepäyhtälö $|x+y| \leq |x| + |y|$ yleistyy sisätuloavaruuden vektorien normeille muodossa $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, joka on myös yksi vaadittavista normin ominaisuuksista. Sisätulon ja normien välinen yhteys näkyy Cauchy-Schwarzin epäyhtälössä $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$, jota puolestaan tarvitaan kolmioepäyhtälön todistamiseen.

Luvussa 3 esitellään yleinen jonoavaruus l^p sekä sen erikoistapaus l^2, joka todistetaan Hilbertin avaruudeksi. Tätä todistusta varten osoitetaan ensin todeksi Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt, jotka ovat itse asiassa luvussa 2 esitettyjen Cauchy-Schwarzin epäyhtälön ja kolmioepäyhtälön yleistykset ääretönulotteisille jonoavaruuksille. Jonoavaruudet ovatkin hyviä esimerkkejä ääretönulotteisista sisätuloavaruuksista, sillä ne ovat melko yksinkertaisia ja selkeitä, jotta lauseiden todistusten ideat tulisivat selväksi ja toimisivat näin mallina muillekin avaruuksille. Luvun 3 lopuksi näytetään vielä esimerkki siitä, että vaikka monet tulokset saadaankin yleistettyä ääretönulotteisiin tapauksiin, niin kaikissa tilanteissa yleistys ei päde: esimerkiksi rajoitetulla jonolla on aina suppeneva osajono, kun kyseessä on äärellisulotteinen avaruus, mutta ääretönulotteisen avaruuden jonolla näin ei välttämättä olekaan.

Viimeinen luku käsittelee Hilbertin avaruuksien tärkeää ominaisuutta, ortogonaalisuutta. Koska Hilbertin avaruuksille on aina määritetty sisätulo, joukkojen ortogonaalisuus on helposti selvitettävissä: vektorit ovat ortogonaaliset eli toisiaan vastaan kohtisuorassa jos ja vain jos niiden sisätulo on nolla. Edelleen, jos ortogonaalisen joukon kaikkien vektorien normi on yksi, on kyseessä ortonormaali joukko. Tämän pohjalta saadaan määriteltyä Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta eli Hilbertin kanta sekä osoitettua, että Hilbertin avaruudessa jokainen vektori on mahdollista esittää tällaisten kantavektorien avulla. Määritelmien lisäksi luvussa 4 tarkastellaan Pythagoraan lausetta uusissa muodoissa ja erityisesti sen toimivuutta ääretönulotteisessa tilanteessa. Lopuksi todistetaan vielä Parsevalin yhtälö, jonka mukaan vektorin normi voidaan ilmaista pelkästään skalaarien avulla: Koska jokainen Hilbertin avaruuden vektori x voidaan esittää skalaarien ja kantavektorien avulla muodossa $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$, niin tällöin normin neliölle saadaan yhtälö $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2$.

Hilbertin avaruuksien sovellukset liittyvät usein kompleksikertoimisiin avaruuksiin, joten pelkkien reaalisten tapausten tarkastelu ei olisi ollut mielekästä. Koska määritelmät ja ominaisuudet ovat kuitenkin yleensä samoja sekä reaali- että kompleksiavaruudessa, niin näille avaruuksille käytetään tässä työssä yhteistä merkintää $\mathbb{K}$ (siis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2. HILBERTIN AVARUUS

Hilbertin avaruus on nimetty David Hilbertin (1862–1943) mukaan. Kun käsitellään ääretönulotteisia avaruuksia, niin juuri Hilbertin avaruuksilla on monia samankaltaisia ominaisuuksia tutun Euklidisen avaruuden kanssa. Useat tulokset saadaankin yleistettyä ääretönulotteisille avaruuksille. Määritellään aluksi tarvittavia käsitteitä ja todistetaan sitten kaksi tärkeää lausetta: Cauchy-Schwarzin epäyhtälö sekä kolmioepäyhtälö normeille.

2.1. Määritelmiä

Määritelmä 2.1.1. *Vektoriavaruus* V on epätyhjä joukko, jolle on määritelty kaksi laskutoimitusta kaikille $x, y \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) *vektoreiden yhteenlasku* on kuvaus $f: V \times V \to V$, merkitään $f(x, y) = x + y$

(ii) *skalaarilla kertominen* on kuvaus $g: \mathbb{K} \times V \to V$, merkitään $g(\lambda, x) = \lambda x$.

Lisäksi näiden kuvausten tulee toteuttaa seuraavat ominaisuudet kaikille $x, y, z \in V$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

(1) $x + y = y + x$

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(3) on olemassa nollavektori $0 \in V$ siten että $x + 0 = x$

(4) on olemassa vastavektori $-x \in V$ siten että $x + (-x) = 0$

(5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

(6) $1x = x$

(7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

Määritelmä 2.1.2. *Sisätulo* vektoriavaruudessa V on kuvaus $f: V \times V \to \mathbb{K}$, merkitään $f(x,y) = (x|y)$, joka toteuttaa seuraavat ominaisuudet kaikille $x, y, z \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$:

(1) $(x|x) \geq 0$ ja

$(x|x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$

(2) $(x|y) = \overline{(y|x)}$

(3) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ ja $(x|\lambda y) = \bar{\lambda}(x|y)$

(4) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$

Huomautus 2.1.3. Merkintä $\bar{z}$ tarkoittaa kompleksiavaruuksissa kompleksikonjugaattia. Jos kyseessä on reaaliavaruus, niin silloin ja vain silloin $\bar{z} = z$.

Huomautus 2.1.4. Määritelmän mukaan sisätulo on äärellinen reaali- tai kompleksiluku. On kuitenkin huomattava, että vektorin sisätulo itsensä kanssa eli $(x|x)$ on aina reaaliluku, myös kompleksiavaruudessa; kohdan (2) perusteella $(x|x) = \overline{(x|x)}$, mikä tarkoittaa Huomautuksen 2.1.3. nojalla sitä, että $(x|x)$ on reaaliluku.

Määritelmä 2.1.5. *Sisätuloavaruus* on vektoriavaruus, jossa jokaiselle vektoriparille on määritetty sisätulo.

Määritelmä 2.1.6. *Normi* vektoriavaruudessa V on kuvaus $f: V \to \mathbb{R}_+$, merkitään $f(x) = \|x\|$, joka toteuttaa seuraavat ominaisuudet kaikille $x, y \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$:

(1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(3) $\|x\| = 0$ jos ja vain jos $x = 0$

Huomautus 2.1.7. Määritelmän mukaan normi on siis aina ei-negatiivinen reaaliluku.

Määritelmä 2.1.8. Sisätuloavaruudessa V vektorin $x \in V$ normi määritellään yhtälöllä $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$.

Huomautus 2.1.9. Lauseessa 2.2.3. todistetaan, että edellä esitetty sisätuloavaruuden normi on hyvin määritelty eli se todella toteuttaa kaikki normilta vaadittavat ominaisuudet.

Määritelmä 2.1.10. Sisätuloavaruudessa V vektoreiden jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $M \in \mathbb{N}$ siten että $\|x_k - x_j\| < \varepsilon$ kaikille $k, j \geq M$.

Vastaavasti lukujono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $a_k \in \mathbb{K}$, on Cauchyn jono, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $M \in \mathbb{N}$ siten että $|a_k - a_j| < \varepsilon$ kaikille $k, j \geq M$.

Määritelmä 2.1.11. Sisätuloavaruudessa V jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *suppenee kohti raja-arvoa* y, merkitään $\lim_{k\to\infty} x_k = y$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $M \in \mathbb{N}$ siten että $\|x_k - y\| < \varepsilon$ kaikille $k \geq M$.

Vastaavasti lukujono $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, missä $a_k \in \mathbb{K}$, suppenee kohti lukua L, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa kokonaisluku $M \in \mathbb{N}$ siten että $|a_k - L| < \varepsilon$ kaikille $k \geq M$.

Määritelmä 2.1.12. Vektoriavaruudessa V sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *osasumma* on $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Jos osasummien jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa $y \in V$, niin tällöin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja sen summa on y:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

Määritelmä 2.1.13. Sisätuloavaruus on *täydellinen*, jos avaruuden jokainen Cauchyn jono suppenee tässä avaruudessa.

Määritelmä 2.1.14. Täydellistä sisätuloavaruutta sanotaan *Hilbertin avaruudeksi*.

Esimerkki 2.1.15. Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on (äärellisulotteinen) Hilbertin avaruus, kun sen vektoreille $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, \dots, y_n)$ on määritelty sisätulo

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

ja normi

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2}.$$

2.2. Sisätuloavaruuden normi ja sisätulon jatkuvuus

Jotta sisätuloavaruuden normi olisi hyvin määritelty, kuvauksen on toteutettava kaikki normin ominaisuudet. Tämän osoittamiseksi todistetaan ensin Cauchy-Schwarzin epäyhtälö sekä kolmioepäyhtälö [3, s. 3; 4, s. 125]. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ vektoreiden sisätulo määritellään tunnetusti pistetulona $(x|y) = x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos \gamma$. Koska kosini saa arvoja vain välillä $[-1,1]$, seurauksena on epäyhtälö $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$. Tämä sisätulon ja normin välinen yhteys pätee myös yleisessä sisätuloavaruudessa.

Lause 2.2.1. (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö) Sisätuloavaruudessa V kaikille vektoreille $x, y \in V$ pätee Cauchy-Schwarzin epäyhtälö

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Todistus. Jos $x = 0$ tai $y = 0$, saadaan $0 \leq 0$ ja epäyhtälö on tosi. Olkoon siis todistuksessa $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Normin määrittelyn ja sisätulon ominaisuuksien perusteella (Määritelmät 2.1.8. ja 2.1.2.) kaikille $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee (2.2.1)

$$\begin{aligned} 0 \leq (x - \lambda y | x - \lambda y) &= (x|x) - \lambda(y|x) - \bar{\lambda}(x|y) + \lambda\bar{\lambda}(y|y) \\ &= \|x\|^2 - \lambda\overline{(x|y)} - \bar{\lambda}(x|y) + |\lambda|^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin epäyhtälö (2.2.1) saadaan muotoon

$$\|y\|^2\lambda^2 - 2(x|y)\lambda + \|x\|^2 \geq 0,$$

joka on siis tavallinen toisen asteen epäyhtälö muuttujan λ suhteen. Merkitään sitä $f(\lambda) := \|y\|^2\lambda^2 - 2(x|y)\lambda + \|x\|^2$. Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten sen pienin arvo löytyy funktion derivaatan nollakohdasta. Ratkaistaan tämä nollakohta:

$$f'(\lambda) = 2\|y\|^2\,\lambda - 2(x|y) = 0,$$

kun

$$2\|y\|^2\,\lambda = 2(x|y)$$

$$\lambda = \frac{(x|y)}{\|y\|^2}.$$

Palataan nyt takaisin reaali- tai kompleksiavaruuteen ja sijoitetaan epäyhtälöön (2.2.1) edellä saatu λ. Käytetään lisäksi tietoa $z\bar{z} = |z|^2$, kun $z \in \mathbb{C}$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - \frac{(x|y)}{\|y\|^2}\overline{(x|y)} - \frac{\overline{(x|y)}}{\|y\|^2}(x|y) + \left|\frac{(x|y)}{\|y\|^2}\right|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

josta edelleen

$$\frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2$$

$$|(x|y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Sisätulon itseisarvo ja normit ovat positiivisia, joten viimeisessä vaiheessa oli mahdollista ottaa molemmilta puolilta neliöjuuri. Koska epäyhtälössä esitetyt vaiheet ovat voimassa kaikille $x, y \in V$, lause on todistettu.

■

Lause 2.2.2. (Kolmioepäyhtälö) Sisätuloavaruudessa V kaikkien vektorien $x, y \in V$ normeille pätee kolmioepäyhtälö

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Todistus. Sisätuloavaruudessa vektorin normi määritellään yhtälöllä $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$. Käytetään lisäksi Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä (Lause 2.2.1.) ja tietoa, että luvulle $z \in \mathbb{C}$ pätee $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ sekä $\operatorname{Re} z \leq |z|$. Näin saadaan

$$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + \overbrace{(y|x)}^{=\overline{(x|y)}} + (x|y) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \overset{\text{C-S}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Koska normit ovat ei-negatiivisia, voidaan ottaa neliöjuuri ja saadaan

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

Nyt on saatu todistettua kolmioepäyhtälö, joten on helppo osoittaa, että sisätuloavaruuden normi on hyvin määritelty.

Lause 2.2.3. Kuvaus $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$, $x \in V$, on sisätuloavaruuden V normi.

Todistus. Osoitetaan, että normin ominaisuudet (Määritelmä 2.1.6.) täyttyvät. Olkoon $x, y \in V$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Tällöin sisätulon ominaisuuksien (Määritelmä 2.1.2.) perusteella

$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x|x)} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(x|x)} = |\lambda|\|x\|$ ja

$\| x \| = \sqrt{(x|x)} = 0$ jos ja vain jos $x = 0$, koska sisätulolle pätee $(x|x) = 0$ jos ja vain jos $x = 0$.

Lisäksi Lauseessa 2.2.2. todistettiin oikeaksi kolmioepäyhtälö $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Siis kuvaus $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$ toteuttaa kaikki vaaditut normin ominaisuudet. Lopuksi todetaan vielä, että sisätulolle pätee aina $\sqrt{(x|x)} \geq 0$, joten normi on ei-negatiivinen reaaliluku ja siis hyvin määritelty.

■

Luvun lopuksi todistetaan vielä sisätulon jatkuvuus [1, s. 57].

Lause 2.2.4. Sisätulo vektoriavaruudessa V on jatkuva kuvaus $V \times V \to \mathbb{K}$.

Todistus. Merkitään sisätulon kuvausta $f: V \times V \to \mathbb{K}, f(x,y) = (x|y)$. Olkoon nyt $x_0 \in V$ ja $y_0 \in V$. Käytetään seuraavassa sisätulon ominaisuuksia Määritelmästä 2.1.2., kolmioepäyhtälöä $|x+y| \leq |x| + |y|$ reaali- ja kompleksiluvuille sekä Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä 2.2.1. Kun lisäksi huomataan, että $x = x - x_0 + x_0$ ja $y = y - y_0 + y_0$ niin tällöin tarkasti laskemalla saadaan

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |(x|y) - (x_0|y_0)|$$

$$= |(x - x_0 + x_0|y - y_0 + y_0) - (x_0|y_0)|$$

$$= |(x - x_0 + x_0|y) + (x - x_0 + x_0|-y_0) + (x - x_0 + x_0|y_0) - (x_0|y_0)|$$

$$= |(x - x_0 + x_0|y - y_0) + (x - x_0 + x_0 - x_0|y_0)|$$

$$= |(x - x_0|y - y_0) + (x_0|y - y_0) + (x - x_0|y_0)|$$

$$\leq |(x - x_0|y - y_0)| + |(x_0|y - y_0)| + |(x - x_0|y_0)| \qquad \text{(kolmioepäyhtälö)}$$

$$\leq \|x - x_0\|\|y - y_0\| + \|x_0\|\|y - y_0\| + \|x - x_0\|\|y_0\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

Jos nyt $x \to x_0$ ja $y \to y_0$, niin $\|x - x_0\| \to 0$ ja $\|y - y_0\| \to 0$, eli koko epäyhtälön oikea puoli lähestyy nollaa ja täten myös $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \to 0$. Tämä tarkoittaa siis sitä, että funktio f eli sisätulon kuvaus on jatkuva.

$\blacksquare$

3. JONOAVARUUDET

Tässä luvussa esitellään ääretönulotteisten jonoavaruuksien käsite ja todistetaan niille tarpeellisia lauseita. Yleisen jonoavaruuden l^p lisäksi käytetään esimerkkinä l^2-avaruutta, joka on tavallaan Euklidisen avaruuden yleistys. Tämä l^2-avaruus saadaankin osoitettua lopulta Hilbertin avaruudeksi. Luvun lopussa annetaan vielä esimerkki äärellis- ja ääretönulotteisten avaruuksien eroista.

3.1. Jonoavaruus l^p

Määritelmä 3.1.1. *Jonoavaruus* l^p, $p \geq 1$, on ääretönulotteinen avaruus, joka koostuu kaikista sellaisista jonoista $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, joiden normi on äärellinen:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty.$$

Jonojen laskutoimitukset määritellään koordinaateittain: Kun $x_n, y_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin kaikille jonoille $(x_n), (y_n) \in l^p$ pätee

$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ja

$\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$.

Jonoavaruudelle l^2 määritetään sisätulo kaavalla

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$

kun $x = (x_n), y = (y_n) \in l^2$. Muille jonoavaruuksille sisätuloa ei määritellä, sillä niiden tapauksessa sisätuloa määrittelevä sarja voi hajaantua, eikä se näin ollen täytä sisätulon ominaisuuksia.

Edellisessä luvussa todistettiin Cauchy-Schwarzin epäyhtälö. Se on yleistettävissä myös jonoavaruuksille sopivaksi Hölderin epäyhtälöksi, jonka avulla jonoavaruuden l^2 sisätulo on helppo osoittaa hyvin määritellyksi. Hölderin epäyhtälöä käytetään myös kolmioepäyhtälöä vastaavan Minkowskin epäyhtälön todistuksessa. Ensin osoitetaan kuitenkin Youngin epäyhtälö [5, s. 7].

Lemma 3.1.2. (Youngin epäyhtälö) Olkoot $p, q > 1$ lukuja siten että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin luvuille $a, b \geq 0$ pätee Youngin epäyhtälö

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Todistus. Koska epäyhtälö on tosi, jos $a = 0$ tai $b = 0$, niin olkoon todistuksessa $a, b > 0$. Oletetaan ensin, että $a^p \leq b^q$. Jaetaan molemmat puolet luvulla $b^q > 0$, jolloin saadaan $\frac{a^p}{b^q} \leq 1$ ja koska $a, b > 0$, saadaan edelleen $0 < \frac{a^p}{b^q} \leq 1$. Tehdään nyt antiteesi ja oletetaan, että

$$ab > \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Jaetaan luvulla $b^q > 0$ ja lasketaan:

$$\frac{ab}{b^q} > \frac{a^p}{pb^q} + \frac{b^q}{qb^q}$$

$$ab^{1-q} > \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

Oletuksen mukaan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, josta saadaan $1 - q = -\frac{q}{p}$. Sijoitetaan tämä edelliseen epäyhtälöön:

$$\frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} > \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

Kirjoitetaan nyt $a = a^{\frac{p}{p}}$ ja otetaan yhteiseksi eksponentiksi $\frac{1}{p}$:

$$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}} > \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

$$0 > -\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

Kun nyt merkitään $\frac{a^p}{b^q} =: x$, saadaan normaali polynomifunktio

$$f(x) := -x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}.$$

Määritetään tämän funktion ääriarvot, jotka sijaitsevat määrittelyvälin päätepisteissä ($0 < \frac{a^p}{b^q} \leq 1$, joten myös $0 < x \leq 1$) tai derivaatan nollakohdissa.

$$f'(x) = -\frac{1}{p}x^{\overbrace{\frac{1}{p}-1}^{=-\frac{1}{q}}} + \frac{1}{p} = -\frac{1}{p}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{q}}} - 1\right)$$

Koska $\frac{1}{p} \neq 0$, niin $f'(x) = 0$ kun

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{q}}} - 1 = 0$$

$$x^{\frac{1}{q}} = 1$$

$$x = 1.$$

Lasketaan funktion f ääriarvot näissä pisteissä:

$$f(0) = \frac{1}{q}$$

$$f(1) = -1^{\frac{1}{p}} + \underbrace{\frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q}}_{=1} = -1 + 1 = 0$$

Funktion f pienin arvo on siis $f(1) = 0$, eli kaikilla $0 < x \leq 1$ pätee $f(x) \geq 0$. Edellä saatiin $f(x) = -x^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}x + \frac{1}{q} < 0$, joten antiteesi on osoitettu vääräksi ja näin ollen

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Alussa oletettiin, että $a^p \leq b^q$. Lause saadaan todistettua vastaavasti, kun $b^q \leq a^p$ eli se pätee kaikille $a, b \geq 0$.

■

Youngin epäyhtälöä käyttäen voidaan todistaa Hölderin epäyhtälö [1, s. 14].

Lause 3.1.3. (Hölderin epäyhtälö) Olkoot $p, q > 1$ lukuja siten että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Olkoon lisäksi $x_j, y_j \in \mathbb{K}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin jonoille $(x_j) \in l^p$ ja $(y_j) \in l^q$ pätee Hölderin epäyhtälö

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j \overline{y}_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Todistus. Merkitään epäyhtälön oikean puolen summia

$$A = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Havaitaan samalla, että $A^p = \sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p$ ja $B^q = \sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^q$. Jos $A = 0$, eli $(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p} = \|x\|_p = 0$, niin normin määritelmän mukaan tällöin on oltava $x = 0$ eli $x_j = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin epäyhtälö on muotoa $0 \leq 0$. Samoin epäyhtälö on tosi, jos $B = 0$. Olkoon siis todistuksessa $A, B > 0$. Merkitään lisäksi $a = \frac{\overbrace{|x_j|}^{\geq 0}}{\underbrace{A}_{>0}}$ ja $b = \frac{\overbrace{|y_j|}^{\geq 0}}{\underbrace{B}_{>0}}$, jolloin $a, b \geq 0$ ja voidaan käyttää Youngin epäyhtälöä (Lemma 3.1.2.):

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Sijoitetaan tähän epäyhtälöön edellä mainitut a ja b sekä käytetään kompleksilukujen laskusääntöjä $|y_j| = |\overline{y_j}|$ ja $|x_j||y_j| = |x_j y_j|$.

$$\frac{|x_j|}{A}\frac{|y_j|}{B} \leq \frac{\left(\frac{|x_j|}{A}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|y_j|}{B}\right)^q}{q}$$

$$\frac{1}{AB}|x_j\overline{y_j}| \leq \frac{1}{p}\frac{|x_j|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_j|^q}{B^q}$$

Koska saatu epäyhtälö pätee kaikilla $j \in \mathbb{N}$, voidaan nyt summata muuttujan j suhteen:

$$\frac{1}{AB}\sum_{j=1}^{\infty}|x_j\overline{y_j}| \leq \frac{1}{p}\frac{1}{A^p}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p}_{=A^p} + \frac{1}{q}\frac{1}{B^q}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^q}_{=B^q}$$

$$\frac{1}{\underbrace{AB}_{>0}}\sum_{j=1}^{\infty}|x_j\overline{y_j}| \leq \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}_{=1}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j\overline{y_j}| \leq AB$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j\overline{y_j}| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

■

Jonoavaruutta l^2 varten esitetään vielä Hölderin epäyhtälön erikoistapaus.

Lause 3.1.4. (Schwarzin epäyhtälö) Kaikille jonoille $(x_j),(y_j) \in l^2$ pätee Schwarzin epäyhtälö

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j\overline{y_j}| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Todistus. Seuraa suoraan Hölderin epäyhtälöstä, kun $p = 2$ ja $q = 2$.

■

Huomautus 3.1.5. Hölderin epäyhtälössä $\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$ ja $\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|y\|_q$ eli epäyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j\overline{y_j}| \leq \|x\|_p\|y\|_q.$$

Samoin Schwarzin epäyhtälö saa muodon

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j\overline{y_j}| \leq \|x\|_2\|y\|_2.$$

Lause 3.1.6. (Minkowskin epäyhtälö) Olkoon $p \geq 1$. Tällöin kaikille jonoille $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in l^p$ pätee Minkowskin epäyhtälö

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Todistus. Jos $p = 1$, niin epäyhtälö on muotoa

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty}|x_j| + \sum_{j=1}^{\infty}|y_j|.$$

Reaali- tai kompleksiluvuille pätee tavallinen kolmioepäyhtälö $|x+y| \leq |x|+|y|$, joka on tosi myös, kun termejä lasketaan yhteen useampia:

$$|x_1+y_1|+|x_2+y_2|+\cdots \leq |x_1|+|y_1|+|x_2|+|y_2|+\cdots$$

eli

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty}|x_j|+\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|.$$

Minkowskin epäyhtälö on siis voimassa, kun $p=1$.

Olkoon tästä eteenpäin todistuksessa $p>1$. Tällöin on olemassa myös luku q siten että $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Tästä edelleen saadaan $p=q(p-1)$. Käytetään seuraavassa kolmioepäyhtälöä ja Hölderin epäyhtälöä (Lause 3.1.3.) sekä tietoa $x=(x^p)^{\frac{1}{p}}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{|x_j+y_j|}_{\leq|x_j|+|y_j|}|x_j+y_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty}|x_j||x_j+y_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{\infty}|y_j||x_j+y_j|^{p-1}$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Jos $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p=0$, niin lause pätee, koska $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p \geq 0$ ja $\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p \geq 0$. Voidaan siis olettaa, että $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p>0$, jolloin myös $\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}>0$, ja näin edellä saatu epäyhtälö voidaan jakaa tällä termillä.

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p}{\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j+y_j\right|^p\right)^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{=\frac{1}{p}}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j+y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Koska todistuksessa käytettiin Hölderin epäyhtälöä, myös sen oletukset on oltava voimassa. Tässä $(x_j) \in l^p$ oletuksen mukaan, mutta lisäksi jonon $\left(\left|x_j+y_j\right|^{p-1}\right)$ on kuuluttava avaruuteen l^q. Osoitetaan [2, s. 55] tätä varten ensin, että $\left(x_j+y_j\right) \in l^p$, kun $(x_j) \in l^p$ ja $(y_j) \in l^p$.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j+y_j\right|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|x_j\right|+\left|y_j\right|\right)^p \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(2\max\{\left|x_j\right|,\left|y_j\right|\}\right)^p = 2^p\sum_{j=1}^{\infty}\max\{\left|x_j\right|^p,\left|y_j\right|^p\}$$

$$\leq 2^p\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^p}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j\right|^p}_{<\infty}\right) < \infty$$

Siis $\left(x_j+y_j\right) \in l^p$. Lisäksi edellisten tulosten perusteella

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left|x_j+y_j\right|^{p-1}\right)^q = \sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j+y_j\right|^{\overbrace{q(p-1)}^{=p}} = \sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j+y_j\right|^p < \infty$$

eli $\left|x_j+y_j\right|^{p-1} \in l^q$ ja näin Hölderin epäyhtälön oletukset ovat voimassa, joten sitä oli mahdollista käyttää todistuksessa.

■

Huomautus 3.1.7. Minkowskin epäyhtälö saadaan kirjoitettua kolmioepäyhtälöä muistuttavaan muotoon

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

3.2. Jonoavaruuden l^2 täydellisyys

Osoitetaan tässä kappaleessa avaruuden l^2 täydellisyys. Lisäksi todistetaan se sisätuloavaruudeksi, jotta lopuksi saadaan todettua, että jonoavaruus l^2 on myös Hilbertin avaruus.

Lause 3.2.1. Jonoavaruus

$$l^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \|x\|_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

on vektoriavaruus.

Todistus. Kaikkien lukujonojen avaruus on vektoriavaruus ja jonoavaruus l^2 on tämän aliavaruus. Näin ollen riittää osoittaa [5, s. 6], että jos $(x_j), (y_j) \in l^2$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin tällöin myös $(\lambda x_j) \in l^2$ ja $(x_j + y_j) \in l^2$. Tarkistetaan nämä ehdot.

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda x_j|^2 = |\lambda|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$$

Toisessa ehdossa käytetään Minkowskin epäyhtälöä (Lause 3.1.6.).

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} < \infty$$

Siis myös $(\lambda x_j) \in l^2$ ja $(x_j + y_j) \in l^2$, joten l^2 on vektoriavaruus. ■

Huomautus 3.2.2. Lause 3.2.1. pätee myös muille jonoavaruuksille, eli kaikki jonoavaruudet l^p ovat vektoriavaruuksia, kun $1 \leq p < \infty$.

Lause 3.2.3. Jonoavaruus l^2 on sisätuloavaruus.

Todistus. Jonoavaruus l^2 on edellisen Lauseen 3.2.1. mukaan vektoriavaruus. Koska sen sisätulo on määritelty tavallisten reaali- tai kompleksilukujen tulon ja summan avulla, voidaan todeta, että se toteuttaa kaikki sisätulon ominaisuudet (Määritelmä 2.1.2.). Lisäksi sisätulo on äärellinen luku, sillä Schwarzin epäyhtälön (Lause 3.1.4.) mukaan sisätuloa määrittelevä sarja suppenee:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \overline{y_n}| \leq \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} < \infty.$$

Sisätulo on siis hyvin määritelty ja jonoavaruus l^2 on näin osoitettu sisätuloavaruudeksi.

∎

Lause 3.2.4. Sisätuloavaruus l^2 on täydellinen.

Todistus. Täydellisyyden määritelmän mukaan on osoitettava, että jokainen Cauchyn jono avaruudessa l^2 suppenee kohti raja-arvoa, joka kuuluu avaruuteen l^2. Osoitetaan siis ensin, että jos avaruuden mielivaltainen jono $(x_k) \in l^2$ on Cauchyn jono, niin se suppenee kohti jotakin raja-arvoa y, ja lisäksi osoitetaan, että tämä raja-arvo kuuluu avaruuteen l^2, siis $y \in l^2$.

Olkoon (x_k) Cauchyn jono avaruudessa l^2.

On huomattava, että avaruuden l^2 jokainen jono on itse lukujono, eli $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3}, \dots)$ kaikilla $k = 1,2, \dots$ Kirjoitetaan selkeyden vuoksi jonot allekkain (vrt. [7, s. 22]):

$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, \dots)$

$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, \dots)$

$\vdots$

$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}, \dots)$

$\vdots$

Valitaan jokaisesta jonosta n:s termi ja osoitetaan, että myös niistä koostuva lukujono $(x_{k,n})_{k=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono (yllä siis n:s sarake). Koska oletuksena oli, että (x_k) on Cauchyn jono, niin täten määritelmän mukaan mille tahansa $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $M \in \mathbb{N}$ siten että $\|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon$ kaikille $k, j \geq M$.

Huomataan nyt, että mille tahansa $i \in \mathbb{N}$ ja $y = (y_1, y_2, \dots) \in l^2$ pätee $|y_i| \leq \|y\|_2$, koska

$$\|y\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_i|^2 + \cdots \geq |y_i|^2.$$

Näin ollen $|x_{k,n} - x_{j,n}| \leq \|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon$ kaikille $k, j \geq M$ eli haluttu jono $(x_{k,n})_{k=1}^{\infty}$ on myös Cauchyn jono. Lisäksi tämä jono on tavallinen reaali- tai kompleksilukujen jono, ja koska avaruudet $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ ovat täydellisiä (ks. esim. [4, s. 28]), niin lukujono $(x_{k,n})_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa y_n, joka kuuluu avaruuteen $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$:

$$\lim_{k \to \infty} x_{k,n} = y_n$$

kaikilla $n \geq 1$, $y_n \in \mathbb{R}$ tai $y_n \in \mathbb{C}$.

Koska tämä pätee kaikilla $n \geq 1$, niin jokaisen sarakkeen muodostama jono suppenee kohti jotakin lukua. Merkitään näiden raja-arvojen muodostamaa jonoa $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$. Siis

$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, \dots)$

$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, \dots)$

$\vdots$

$x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}, \dots)$

$\downarrow$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$

Seuraavaksi on osoitettava, että kyseinen raja-arvo y kuuluu avaruuteen l^2. Koska l^2 on vektoriavaruutena suljettu yhteenlaskun suhteen ja $x_k \in l^2$, niin riittää osoittaa, että erotus $x_k - y \in l^2$ jollekin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin nimittäin myös $y = x_k - (x_k - y)$ kuuluu tähän avaruuteen l^2. Edellä saatiin oletetulle Cauchyn jonolle (x_k) arvio $\|x_k - x_j\|_2 < \varepsilon$, kun $k, j \geq M$. Tästä saadaan

$$\|x_k - x_j\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{j,n}|^2\right)^{1/2} < \varepsilon$$

eli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{j,n}|^2 < \varepsilon^2.$$

Summataan sitten vain äärellinen määrä, $N \in \mathbb{N}$, termejä yhteen. Myös niiden summa on pienempi kuin ε^2:

$$\sum_{n=1}^{N} |x_{k,n} - x_{j,n}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - x_{j,n}|^2 < \varepsilon^2.$$

Koska edellä osoitettiin, että jokainen lukujono $(x_{k,n})_{k=1}^{\infty}$ suppenee kohti raja-arvoa y_n, niin myös $(x_{j,n})$ suppenee kohti lukua y_n, kun $j \to \infty$. Voidaan siis kirjoittaa

$$\sum_{n=1}^{N} |x_{k,n} - y_n|^2 < \varepsilon^2,$$

ja koska $N \in \mathbb{N}$ on mielivaltaisen suuri, niin saadaan $(N \to \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - y_n|^2 < \varepsilon^2.$$

Tämä tarkoittaa siis sitä, että erotus $x_k - y$ kuuluu avaruuteen l^2, sillä sen normi on äärellinen:

$$\|x_k - y\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_{k,n} - y_n|^2\right)^{1/2} < \varepsilon < \infty.$$

Saatiin osoitettua, että raja-arvo y kuuluu avaruuteen l^2. Lopuksi näytetään vielä, että Cauchyn jono (x_k) suppenee juuri kyseistä raja-arvoa kohti.

Edellä osoitettiin jo, että mille tahansa $\varepsilon > 0$ on olemassa $M \in \mathbb{N}$ siten että $\|x_k - y\|_2 < \varepsilon$, kun $k \geq M$. Tämä tarkoittaa raja-arvon määritelmän mukaan sitä, että jono (x_k) suppenee kohti raja-arvoa y. Koska avaruudesta l^2 valittu Cauchyn jono (x_k) on mielivaltainen, voidaan yleistää, että jokainen Cauchyn jono suppenee tässä avaruudessa. Siis sisätuloavaruus l^2 on täydellinen.

■

Lause 3.2.5. Jonoavaruus l^2 on Hilbertin avaruus.

Todistus. Lauseissa 3.2.3. ja 3.2.4. on todistettu, että jonoavaruus l^2 on täydellinen sisätuloavaruus, joten tällöin sen sanotaan olevan Hilbertin avaruus.

■

Tämän luvun alussa todettiin, että jonoavaruus l^2 on tavallaan Euklidisen avaruuden yleistys. Nyt tämän jonoavaruuden esittelyn ja määrittelyjen jälkeen voidaan käyttää sitä esimerkkinä osoittamaan, mitä eroa näillä äärellis- ja äärettönulotteisilla avaruuksilla voi olla.

Esimerkki 3.2.6. Äärellisulotteisessa avaruudessa jokaisella rajoitetulla reaalilukujen jonolla on suppeneva osajono (ks. esim. Bolzano-Weierstrassin lause [4, s. 23]). Tämä ei kuitenkaan päde enää äärettönulotteisessa avaruudessa, sillä esimerkiksi jonoavaruudesta l^2 löytyy helposti rajoitettu jono, jolla ei silti ole suppenevaa osajonoa.

Olkoon $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruuden l^2 jono siten että

$e_1 = (1,0,0,0,\dots)$

$e_2 = (0,1,0,0,\dots)$

$\vdots$

$e_k = (0,\dots 0, \overbrace{1}^{k:s}, 0,\dots)$

$\vdots$

Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\|e_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

joten jono $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ on rajoitettu. Nyt kuitenkin $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ aina kun $n \neq m$, joten määritelmän mukaan (e_n) ei voi olla Cauchyn jono. Tällöin ei myöskään mikään osajono (e_{n_k}) ole Cauchyn jono, eikä näin ollen suppeneva. Siis avaruuden l^2 rajoitetulla jonolla $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ei ole suppenevaa osajonoa.

4. ORTOGONAALISUUS

Ortogonaalisuuden käsite mainitaan usein Hilbertin avaruuksien suurimmaksi eduksi. Hilbertin avaruuksille määritetty sisätulo mahdollistaa sen, että vektorien tai joukkojen ortogonaalisuus on selvitettävissä. Tämän seurauksena avaruuksien tavallisten kantavektorien sijaan voidaan käyttää ortonormaaleja kantoja, ja jokainen vektori Hilbertin avaruudessa voidaan kirjoittaa tämän ortonormaalin eli Hilbertin kannan vektorien avulla. Määritellään aluksi tarvittavat käsitteet ja annetaan esimerkki Hilbertin kannasta. Sen jälkeen saadaan laajennettua tutun Pythagoraan lauseen sisältöä ääretönulotteiseen tapaukseen asti sekä ilmaistua vektorin normi pelkästään skalaarien avulla.

4.1. Ortogonaaliset ja ortonormaalit joukot

Määritelmä 4.1.1. Kaksi vektoria ovat *ortogonaaliset*, jos ne ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Sisätuloavaruudessa V määritellään, että vektorit $x \in V$ ja $y \in V$ ovat ortogonaaliset, jos niiden sisätulo on nolla:

$x \perp y$ jos ja vain jos $(x|y) = 0$.

Määritelmä 4.1.2. Sisätuloavaruuden V osajoukko S on *ortonormaali*, jos kaikki sen vektorit ovat pareittain ortogonaaliset ja jokaisen vektorin normi on yksi:

(1) $(x|y) = 0$ kaikille $x, y \in S$ kun $x \neq y$

(2) $\| x \| = 1$ kaikille $x \in S$.

Määritelmä 4.1.3. Sisätuloavaruuden V vektoreiden jono (e_k) on *ortonormaali jono*, jos se muodostaa ortonormaalin joukon, eli jonon jäsenet ovat keskenään ortogonaalisia ja jokaisen normi on yksi:

(1) $\left(e_j \middle| e_k\right) = 0$ kaikilla $j \neq k$

(2) $\|e_k\| = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

4.2. Hilbertin kanta

Määritelmä 4.2.1. Äärellisulotteisen vektoriavaruuden V *kanta* on kyseisen avaruuden lineaarisesti riippumaton osajoukko, joka virittää avaruuden V.

Toisin sanoen, joukko $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ on vektoriavaruuden V kanta, jos se

(1) on lineaarisesti riippumaton: kaikilla $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on voimassa

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

(2) virittää vektoriavaruuden V: jokainen $x \in V$ voidaan esittää yksikäsitteisesti skalaarien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ja kantavektoreiden lineaarikombinaationa muodossa

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Määritelmä 4.2.2. Äärellisulotteisen sisätuloavaruuden kannan sanotaan olevan *ortonormaali kanta*, jos kantavektoreiden joukko on ortonormaali.

Esimerkki 4.2.3. Joukko $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta, sillä se virittää avaruuden $\mathbb{R}^n$ ja lisäksi sen kaikki vektorit $e_n = (0,0, \dots, \underbrace{1}_{n:s}, \dots, 0)$ ovat lineaarisesti riippumattomat ja ortogonaaliset sekä jokaisen normi on $\|e_n\| = 1$.

Ortonormaalin kannan käsite voidaan yleistää tietyin oletuksin myös ääretönulotteisiin sisätuloavaruuksiin. Määritellään seuraavaksi ortonormaali kanta Hilbertin avaruudelle, joka siis voi olla myös ääretönulotteinen avaruus. Lopuksi osoitetaan lause, joka antaa yhden tavan todistaa joukko Hilbertin kannaksi [2, s. 73], sekä annetaan esimerkki tällaisesta ääretönulotteisesta kannasta.

Määritelmä 4.2.4. Hilbertin avaruuden H *ortonormaali kanta* eli *Hilbertin kanta* on maksimaalinen ortonormaali joukko $S \subset H$, joka virittää avaruuden H.

Maksimaalinen ortonormaali joukko tarkoittaa tässä sitä, että joukko ei sisälly muuhun ortonormaaliin joukkoon. Jos siis $S \subset U$ ja myös U on ortonormaali, niin tällöin $S = U$.

Lause 4.2.5. Olkoon $S \subset H$ ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H. Tällöin S on avaruuden H Hilbertin kanta jos ja vain jos ainoa vektori, joka on ortogonaalinen kaikkia joukon S vektoreita vastaan, on nollavektori.

Todistus. Olkoon $x \in H$ sellainen, että $x \perp S$ eli vektori x on kohtisuorassa kaikkia joukon S vektoreita vastaan.

Oletetaan ensin, että S on Hilbertin kanta. Tehdään antiteesi: $x \neq 0$. Tällöin voidaan valita vektori $\frac{x}{\|x\|}$, joka on myös ortogonaalinen kaikkia joukon S vektoreita vastaan ja lisäksi sen normi on 1. Näin saadaan uusi, laajempi ortonormaali joukko $S \cup \left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$, joten S ei ole enää maksimaalinen ortonormaali joukko eli vastoin oletusta se ei ole Hilbertin kanta. Antiteesi on siis väärä, joten on oltava $x = 0$ kaikilla $x \in H$, joille pätee $x \perp S$.

Oletetaan sitten, että vain nollavektori on ortogonaalinen kaikkia joukon S vektoreita vastaan, eli $x = 0$ kaikilla $x \in H$, joille pätee $x \perp S$. Tällöin mikään muu vektori $y \in H$, joka ei ole nollavektori, ei voi olla ortogonaalinen joukon S vektoreita vastaan. Siis joukko S on maksimaalinen ortonormaali joukko eli Hilbertin kanta.

∎

Esimerkki 4.2.6. Joukko $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ mainittiin Esimerkissä 4.2.3. avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaaliksi kannaksi. Ääretönulotteiselle jonoavaruudelle l^2 ortonormaali kanta on vastaavasti $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä $e_n = (0,0,\dots,\underbrace{1}_{n:s},\dots,0,\dots) \in l^2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan tämä todeksi edellisen Lauseen 4.2.5. avulla. Merkitään vektorin e_n alkioita $(e_{n,1}, e_{n,2}, \dots)$.

Olkoon $x = (x_n) \in l^2$ ja $x \perp e_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin siis ortogonaalisuuden mukaan $(x|e_n) = 0$. Toisaalta jonoavaruudessa l^2 tämä sisätulo on määrittelyn mukaan $(x|e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_{n,k} = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \cdots + x_n \cdot 1 + x_{n+1} \cdot 0 + \cdots = x_n$. Saatiin siis $x_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $x = 0$. Näin ollen $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jonoavaruuden l^2 Hilbertin kanta.

■

Äärellisulotteisen tapauksen tavoin (Määritelmä 4.2.1.) mikä tahansa Hilbertin avaruuden vektori $x \in H$ voidaan kirjoittaa kantavektoreiden äärettömänä lineaarikombinaationa

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$$

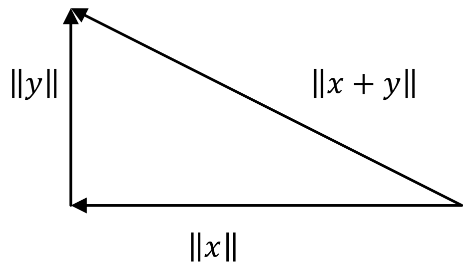
missä $\lambda_k \in \mathbb{K}$ ja $e_k \in S$, kun S on avaruuden H kanta. Tämä sarja on äärettömänäkin hyvin määritelty, mikä tullaan osoittamaan Lauseessa 4.3.6.

4.3. Pythagoraan lause

Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisessa kolmiossa kateettien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö: $x^2 + y^2 = z^2$. Lause pätee myös kääntäen, jolloin sen avulla voidaan selvittää, onko jokin kolmio suorakulmainen. Olennaista tässä on nimenomaan se, että kolmion kaksi sivua on toisiaan vastaan kohtisuorassa. Pythagoraan lause yleistyy myös korkeampiulotteisiin avaruuksiin, jolloin joukon jokaisen vektorin on oltava kohtisuorassa toisia vastaan. Esitetään aluksi Pythagoraan lauseen yleistys sisätuloavaruuksissa.

Lause 4.3.1. Pythagoraan lause on voimassa vektoreiden normille täsmälleen silloin, kun vektorit ovat keskenään ortogonaaliset eli niiden sisätulo on nolla. Toisin sanoen sisätuloavaruuden V vektoreille $x, y \in V$ pätee

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ jos ja vain jos $(x|y) = 0$.



Todistus. Kolmioepäyhtälön todistuksessa Lauseessa 2.2.2. saatiin

$$\| x+y \|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x|y) + \|y\|^2 ,$$

joten

$$\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \Leftrightarrow (x|y) = 0 .$$

■

Edellä todistettiin Pythagoraan lause kahdelle sisätuloavaruuden vektorille. Laajennetaan edelleen lauseen sisältöä koskemaan kaikkia keskenään ortogonaalisia vektoreita äärellisulotteisessa sisätuloavaruudessa.

Lause 4.3.2. Olkoon $\{x_1, \dots, x_n\}$ joukko keskenään ortogonaalisia vektoreita sisätuloavaruudessa. Tällöin

$$\| \sum_{j=1}^{n} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^2.$$

Todistus 1. Todistetaan lause ensin käyttämällä induktiomenetelmää.

Kun $n = 2$, niin edellisen Lauseen 4.3.1. perusteella $\| x_1 + x_2 \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2$.

Oletetaan nyt, että väite pätee, kun $n = k$:

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \| x_j \|^2$$

eli

$$\| x_1 + \cdots + x_k \|^2 = \| x_1 \|^2 + \cdots + \| x_k \|^2.$$

Osoitetaan sitten, että väite pätee tapauksessa $n = k + 1$.

$$\left\| \sum_{j=1}^{k+1} x_j \right\|^2 = \| \underbrace{x_1 + \cdots + x_k}_{=:\,\boldsymbol{u}} + x_{k+1} \|^2 \overset{n=2}{\widehat{=}} \| \boldsymbol{u} \|^2 + \| x_{k+1} \|^2$$

$$= \| x_1 + \cdots + x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2$$

$$\overset{\text{oletus}}{=} \| x_1 \|^2 + \cdots + \| x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2 = \sum_{j=1}^{k+1} \| x_j \|^2.$$

Siis väite on tosi myös, kun $n = k + 1$, joten induktioperiaatteen mukaan lause on todistettu.

Todistus 2. Toisessa todistuksessa käytetään summan ja sisätulon ominaisuuksia [2, s. 70]. Oletetaan, että $x_i \neq x_j$, kun $i \neq j$. Koska vektorit ovat ortogonaalisia, niin sisätulo $(x_j | x_i) = 0$ täsmälleen silloin, kun $x_i \neq x_j$. Sisätulolle on Määritelmän 2.1.2. mukaan voimassa osittelulaki $(x + y | z) = (x | z) + (y | z)$. Näin saadaan

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overbrace{(x_j | x_i)}^{=0,\, kun\ i \neq j}}_{=(x_j | x_j)} = \sum_{j=1}^{n} (x_j | x_j) = \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^2.$$

■

Edellisessä kappaleessa todettiin, että äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa V mikä tahansa vektori $x \in V$ voidaan kirjoittaa skalaarien ja kantavektoreiden lineaarikombinaationa muodossa $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Hilbertin avaruudessa H puolestaan voidaan käyttää äärettömiäkin summia $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$, kun $x \in H$. Kun vektorit saadaan ilmaistua näin kantavektoreiden avulla, niin tällöin vektorin normille saadaan lauseke skalaarikertoimien summana. Tätä varten esitetään ensin äärellisulotteinen Parsevalin yhtälö [6, s.109].

Lause 4.3.3. (Parsevalin yhtälö) Olkoon $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ sisätuloavaruuden V ortonormaali kanta. Olkoon $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ ja $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, missä $\lambda_k,\ \mu_i \in \mathbb{K}$. Tällöin on voimassa Parsevalin yhtälö:

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)\overline{(y|e_k)}$$

eli

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_k}.$$

Todistus. Käytetään hyödyksi sisätulon ja summan ominaisuuksia.

$$(x|y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i}\, \underbrace{(e_k|e_i)}_{\substack{=0,\\ kun\ i\neq k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\overline{\mu_k}\, \underbrace{(e_k|e_k)}_{=1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{\mu_k}.$$

■

Seuraus 4.3.4. Olkoon edellisen Lauseen 4.3.3. oletukset voimassa. Parsevalin yhtälöstä saamme vektorin x normin neliölle lausekkeen

$$\|x\|^2 = (x|x) = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)\overline{(x|e_k)} = \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2.$$

Tietyin ehdoin edellinen tulos saadaan voimaan myös ääretönulotteisessa Hilbertin avaruudessa. Sen osoittamiseksi todistetaan ensin Besselin epäyhtälö [1, s. 76].

Lause 4.3.5. (Besselin epäyhtälö) Olkoon $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa H. Tällöin kaikilla $x \in H$ pätee

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Todistus. Merkitään $y = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$, koska näin vektorit y ja $x - y$ ovat ortogonaaliset: Lasketaan sisätulo termeittäin kaikille $i = 1, \dots, n$, jolloin sisätuloksi saadaan nolla.

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k \middle| e_i \right) = (x|e_i) - \sum_{k=1}^{n} (x|e_k) \underbrace{(e_k|e_i)}_{\begin{cases} =0, kun\ k \neq i \\ =1, kun\ k = i \end{cases}} = (x|e_i) - (x|e_i) = 0.$$

Nyt voidaan käyttää Pythagoraan lausetta 4.3.1. ja saadaan epäyhtälö (4.3.5)

$$\|x\|^2 = \|(x - y) + y\|^2 = \underbrace{\|x - y\|^2}_{\geq 0} + \|y\|^2 \geq \|y\|^2$$

Seuraavaksi voidaan käyttää laajennettua Pythagoraan lausetta 4.3.2, sillä ortonormaalissa jonossa jokainen vektori e_i on kohtisuorassa vektoria e_j vastaan, kun $i \neq j$. Lisäksi jokaisen vektorin normi $\|e_j\| = 1$ ja kertoimet $(x|e_j)$ ovat skalaareja. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \|y\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k \right\|^2 &= \|(x|e_1)e_1 + \dots + (x|e_n)e_n\|^2 \\ &= \|(x|e_1)e_1\|^2 + \dots + \|(x|e_n)e_n\|^2 \\ &= |(x|e_1)|^2 \underbrace{\|e_1\|^2}_{=1} + \dots + |(x|e_n)|^2 \underbrace{\|e_n\|^2}_{=1} = |(x|e_1)|^2 + \dots + |(x|e_n)|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2. \end{aligned}$$

Kun nyt sijoitetaan tämä epäyhtälöön (4.3.5), niin saadaan Besselin epäyhtälön äärellinen versio:

$$\sum_{k=1}^{n} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Annetaan vielä summan ylärajan lähestyä ääretöntä, jolloin lopulta saadaan (koska $x \in H$ ei riipu k:sta)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x|e_k)|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|(x|e_k)|^2 \leq \lim_{n\to\infty}\|x\|^2 = \|x\|^2.$$

■

Nyt saadaan lopuksi esitettyä ns. ääretönulotteinen Pythagoraan lause eli Parsevalin yhtälö ja ehto ääretönulotteisen sarjan suppenevuudelle [5, s. 106; 7, s. 34].

Lause 4.3.6. Olkoon $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa H ja olkoon $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ lukujono, siis $\lambda_k \in \mathbb{K}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin sarja

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k \text{ suppenee jos ja vain jos } \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2 < \infty.$$

Lisäksi tällöin

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2}$$

eli

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2.$$

Todistus. Äärellisulotteisessa tapauksessa kaikille $n > j \geq 1$ saadaan Seurauksen 4.3.4. perusteella yhtälö (4.3.6)

$$\left\|\sum_{k=j}^{n}\lambda_k e_k\right\| = \sqrt{\sum_{k=j}^{n}|\lambda_k|^2}$$

Oletetaan ensin, että $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2 < \infty$. Tällöin, olkoon $\varepsilon > 0$, voidaan valita sellainen $M \in \mathbb{N}$, jolle

$$\sum_{k=M+1}^{\infty}|\lambda_k|^2 < \varepsilon^2.$$

Olkoon $n \geq m \geq M$ ja sarjan osasumma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Tällöin

$$\|s_n - s_m\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \overset{(4.3.6.)}{=} \sqrt{\underbrace{\sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2}_{<\varepsilon^2}} < \varepsilon,$$

joten Määritelmän 2.1.10. mukaan (s_n) on siis Cauchyn jono. Koska Hilbertin avaruus H on täydellinen, niin avaruuden jokainen Cauchyn jono suppenee siinä avaruudessa. Siis osasummien jono $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee, mikä Määritelmän 2.1.12. mukaan osoittaa sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenevuuden.

Oletetaan sitten, että sarja $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee. Lasketaan ensin sisätulo, kun $n \geq m \geq 1$.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \middle| e_m\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{(e_k|e_m)}_{\begin{cases} =0, kun\ k \neq m \\ =1, kun\ k = m \end{cases}} = \lambda_m.$$

Sisätulon jatkuvuuden (Lause 2.2.4.) perusteella saadaan äärettömälle sarjalle sisätulo

$$(x|e_m) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \middle| e_m\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \middle| e_m\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda_m = \lambda_m.$$

Nyt voidaan käyttää Besselin epäyhtälöä (Lause 4.3.5.), jolloin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty,$$

koska oletuksena oli, että sarja $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee.

On saatu todistettua, että sarja $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee jos ja vain jos $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$.

Viimeisenä osoitetaan vielä ns. Parsevalin yhtälö (tätä nimeä käytetään joskus myös muiden yhtälöiden yhteydessä).

Koska äärellisulotteinen tapaus (4.3.6) on voimassa kaikille $n > j \geq 1$, niin valitaan nyt $j = 1$ ja annetaan n:n lähestyä ääretöntä:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2}$$

eli

$$\left\| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k}_{=x} \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2}.$$

Näin saatiin normin neliölle yhtälö myös äärettömän sarjan tapauksessa:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

■

Lähteet

[1] Astala, K., Piiroinen P., Tylli, H. *Funktionaalianalyysin peruskurssi.* 2006. mathstat.helsinki.fi/kurssit/FApk/luennot/fa.pdf, viitattu 30.6.2014.

[2] Cheney, W. *Analysis for Applied Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[3] Conway, J. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[4] Davidson, K., Donsig, A. *Real Analysis and Applications.* Springer Science+Business Media, New York, 2010.

[5] Debnath, L., Mikusinski, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications.* Academic Press, San Diego, 1990.

[6] Kahanpää, L., Hannukainen, M. *Lineaarinen algebra ja geometria*. Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 1999.

[7] Young, N. *An introduction to Hilbert space.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.