KÄYRÄN PITUUS METRISESSÄ AVARUUDESSA

Hanna Männistö

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014

Sisältö

Johdanto

Tämän matematiikan opettajalinjan pro gradu –tutkielman tarkoituksena on tutkia käyrän pituutta metrisessä avaruudessa, tutustua pituusavaruuksiin sekä selvittää, millä oletuksilla kahden pisteen välillä on lyhin käyrä. Vaikka tutkielma onkin opettajalinjan gradu, niin käsiteltävät asiat eivät varsinaisesti liity koulumatematiikkaan. Tämä siksi, että koin oman kandidaatin tutkielmani aiheen (Käyrän pituus, lähde [6]) niin mielenkiintoiseksi, että halusin jatkaa samasta aiheesta. Tutkielma on siis tavallaan jatkoa kandidaatin tutkielmalleni. Tutkielma laajentaa ja syventää käyrän pituuteen liittyviä asioita –nyt siirrytään avaruudesta $\mathbb{R}^n$ metrisiin avaruuksiin ja samalla pois koulumatematiikan maailmasta.

Monet kirjoitelman tulokset tuntuvat hyvin samanlaisilta kuin vastaavat tulokset euklidisessa avaruudessa, mikä saattaa helpottaa asioiden hahmottamista. Tässä piilee kuitenkin vaara. Huomasin itsekin asioita opiskellessani ja kirjoittaessani, että liian yksinkertainen ajattelu johti usein virheelliseen päättelyyn. Ero kandidaatin työhöni on siis selvä. Eron ja samankaltaisuuden voi huomata erityisesti tämän työn viimeisessä luvussa, jossa käsitellään metristä derivaattaa. Alunperin en ollut edes suunnitellut metrisen derivaatan käsittelemistä tässä työssä, mutta viime metreillä päätin kuitenkin käsitellä asiaa lyhyesti. Sen lisäksi, että aihe on mielenkiintoinen, se ikään kuin näyttää yhteyden kandidaatin työni päätulokseen. Kandidaatin työni tunteminen auttaakin tämän kirjoitelman ymmärtämisessä, mutta välttämätöntä se ei ole. Varsinaisina esitietoina ovat matematiikan perus- ja aineopinnot, erityisesti analyysiin ja metrisiin avaruuksiin liittyvät kurssit.

Omaa työskentelyäni vaikeutti aluksi esitietojen puute, sillä en ole käynyt kursseja Topologia I ja Mitta- ja integraaliteoria I. Koska niissä kuitenkin on paljon välttämätöntä esitietoa, jouduin aloittamaan graduni tekemisen kurssin Topologia I itsenäisellä opiskelulla (lähde [4]). Vaikeuksia aiheuttivat ajoittain myös lähdekirjallisuuden virheet. Erityisesti lähteen [3], joka on tämän työn päälähde, esimerkeissä ja todistuksissa oli huomattavan paljon virheitä. Ehkä paras esimerkki tästä on lähteen [3] esimerkki 1.4.1 (i), joka on tämän kirjoitelman Esimerkki 4.4 (b). Siitä löytyi loppujen lopuksi niin paljon virheitä, että oikeaksi osoittautui lähinnä tehtävän anto. Toisaalta virheet lähdekirjallisuudessa pakottivat tarkkaan työskentelyyn. Samalla ne lisäsivät omaa osuuttani työn tekemisessä. Myös muutamat lähdekirjallisuuden englanninkieliset termit aiheuttivat päänvaivaa; esimerkiksi termeille *geodeesinen viiva* ja *suora viiva* (Määritelmä 3.10) en löytänyt suomenkielisiä vastineita, joten ne ovat vapaita suomennoksia. Hankalaksi koin myös tekniikan soveltamisen, minkä vuoksi päädyinkin piirtämään gradussani olevat kuvat omin käsin.

Ensimmäisen luvun lähteenä toimi lähde [4], luvun 4.1 (Metrinen derivaatta) lähde [5]. Muuten päälähteenä on lähde [3], mutta joihinkin todistuksiin hain täydennystä tai vaihtoehtoisen tavan lähteestä [1]. Topologian itsenäisen opiskelun lisäksi hankin pohjatietoa lähteestä [2]. Itse en luonnollisestikaan ole keksinyt uusia lauseita, ja kaikki tässä gradussa oleva tieto löytyykin lähdekirjallisuudesta. Kuitenkin lähes jokaiseen todistukseen olen tehnyt lisää välivaiheita, ja jotkut todistukset olen tehnyt kokonaan itse. Myös suurimpaan osaan esimerkkejä olen tehnyt täydennyksiä.

Ensimmäinen luku on johdantoa varsinaiseen aiheeseen, ja siinä tutustutaan metrisien avaruuksien perusteisiin. Luvun tärkein asia on metrisen avaruuden (X, d) määritelmä (Määritelmä 1.1). Kun halutaan todistaa, että jokin avaruus on metrinen avaruus, on osoitettava, että kaikilla $x, y, z \in X$ metriikka d toteuttaa seuraavat kolme ehtoa: (1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (2) $d(x, y) = d(y, x)$, (3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$. Esimerkissä 1.7 vertaillaan ympyrän käyttäytymistä eri metriikoissa. Viimeistään tämä esimerkki selventää, mikä ero avaruudella $\mathbb{E}^n$ (avaruus $\mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella metriikalla) ja metrisellä avaruudella (X, d) on. Esimerkin 1.5 (b)-kohdan ratkaisun olen tehnyt kokonaan itse, muihin esimerkkeihin lähinnä välivaiheita.

Toisessa luvussa päästään itse aiheeseen eli käyrän pituuteen. Polku, käyrä ja jako määritellään samoin kuin euklidisessa avaruudessa. Käyrän pituus saadaan rajankäynnin avulla. Jos σ on mikä tahansa välin $[a, b]$ jako, niin käyrän $\gamma : [a, b] \to X$ pituus on $L(\gamma) = \sup_\sigma \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$. Määritelmää seuraa joukko hyödyllisiä ominaisuuksia ja lauseita, kuten käyrän pituuden additiivisuus ja yhdistetty polku. Useissa todistuksissa hyödynnettävä Lause 2.7 näyttää, että käyrän pituus on alhaalta rajoitettu päätepisteidensä etäisyydellä. Polku γ on parametrisoitu käyrän pituudella (Määritelmä 2.18), jos kaikilla $u, v \in [a, b], u \leq v$, pätee $L(\gamma_{|[u,v]}) = v - u$. Tämä ominaisuus on tärkeässä roolissa luvussa 3, kun käsitellään geodeeseja. Parametrin vaihdon (Määritelmä 2.13) avulla saadaan toinen erittäin tärkeä ominaisuus, suhteellisesti käyrän pituudella parametrisoitu polku. Lauseen 2.21 mukaan suhteellisesti käyrän pituudella parametrisoitu polku $\gamma : [0, 1] \to X$ on $L(\gamma)$-Lipschitz. Myös tämän lauseen sekä Seurauksen 2.22 tärkeys tulee esiin myöhemmin, sillä niitä tarvitaan tutkielman päätuloksen, lyhimmän käyrän olemassaolon, todistamisessa.

Kolmannessa luvussa käsitellään kahta metrisien avaruuksien erikoistapausta, pituusavaruuksia ja geodeesisia avaruuksia. Metristä avaruutta kutsutaan pituusavaruudeksi, jos kaikilla $x, y \in X$ on $d(x, y) = \inf_\gamma L(\gamma)$, missä infimum otetaan yli pisteitä x ja y yhdistävien käyrien. Aluksi todistetaan, että pituusmetriikka todella on metriikka (Lause 3.3). Todistus noudattaa lähteen [3] todistusta, mutta tähän työhön on lisätty jonkin verran välivaiheita. Lähteen [3] todistuksessa ehdot (2) ja (3) kuitattiin muutamalla rivillä. Myös kolmioepäyhtälön todistamisessa oli oikaistu useissa kohdissa. Lausetta 3.3 seuraa joukko pituusavaruuteen liittyviä lauseita.

Luku 3 jatkuu geodeesien ja yksikäsitteisten geodeesien käsittelyllä sekä vertailemalla pituusavaruuksia ja geodeeseja. Geodeesiksi kutsutaan etäisyydet säilyttävää polkua γ. Geodeesinen avaruus puolestaan on metrinen avaruus, jossa kahden pisteen välille löytyy aina geodeesi. Geodeesisuuden todistaminen määritelmää käyttäen on usein hankalaa tai jopa mahdotonta. Myöhemmin tässä tutkielmassa todistetaan tulos (Seuraus 4.16), joka antaa suoraan geodeesisuuden, mutta ennen sitä täytyy tyytyä muihin keinoihin. Hyödylliseksi osoittautuu Lause 3.14. Entistä hyödyllisemmäksi sen tekee Lause 3.12, jossa todistetaan, että geodeesinen avaruus on aina pituusavaruus. Nyt näitä kahta lausetta soveltaen voidaan usein osoittaa, että jokin avaruus on pituusavaruus. Kuten usein lähteen [3] todistuksissa, niin myös tässä todistuksessa polun parametrisointia käyrän pituudella pidetään itsestään selvänä, joten Lauseen

3.12 todistukseen on jälleen lisätty joitakin osia. Esimerkissä 3.15 esitellään joukko erilaisia avaruuksia, joista osa on sekä geodeesisia avaruuksia että pituusavaruuksia, osa ei kumpaakaan. Euklidinen avaruus, josta on poistettu äärellinen määrä pisteitä, on pelkästään pituusavaruus. Tämän todistuksen olen tehnyt kokonaan itse.

Tämän tutkielman kolmessa ensimmäisessä luvussa on paljon määritelmiä, lauseita ja esimerkkejä, jotka toki ovat jo sinänsä kiinnostavia, mutta suurin osa niistä on oikeastaan tähdännyt tämän gradun päätuloksen todistamiseen. Luvun 4 alkupuolella luodaan vielä pohjateoriaa, kunnes Lauseessa 4.15 vihdoin todistetaan, millä ehdoilla kahden pisteen välille löytyy lyhin käyrä. Luvussa 4 käsitellään hieman erilaista metristä avaruutta kuin aiemmissa luvuissa, joissa mitattiin kahden pisteen välistä etäisyyttä. Nyt siirrytään polkujen avaruuteen, jolloin mitattavaksi tuleekin avaruuden X kahden eri polun etäisyys. Metriikaksi tähän polkujen avaruuteen valitaan tasaisen suppenemisen metriikka: $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t\in[a,b]} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Jos avaruus X on täydellinen, niin myös vastaava polkujen avaruus on täydellinen. Tämän osoittaa lause 4.3, jonka todistusta ei ollut ollenkaan lähdekirjallisuudessa.

Tämän gradun päätulos kertoo, että sellaisessa suoristuvasti yhtenäisessä metrisessä avaruudessa, jossa suljetut pallot ovat kompakteja, kaikille $x, y \in X$ löytyy niitä yhdistävä käyrä, jolle

$$L(\gamma_{xy}) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \textit{ yhdistää pisteet } x \textit{ ja } y\}.$$

Itse päätuloksen todistus on melko yksinkertainen ja lyhyt, ja se tehdään todistamalla epäyhtälö molempiin suuntiin. Lausetta edeltää kuitenkin monta lemmaa ja lausetta, jotka ovat todistuksen kannalta välttämättömiä. Näihin lauseisiin liittyy vahvasti kuvauksen puolijatkuvuus alhaalta (Määritelmä 4.5). Työssä todistetaan, että myös polun pituusfunktio on alhaalta puolijatkuva. Sitä ja muutamaa muuta lemmaa ja lausetta apua käyttäen saadaan tulos, jonka mukaan $L(\gamma) \leq \lim_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n)$ ($(\gamma_n)_{n\geq 0}$ on kohti polkua γ tasaisesti suppeneva polkujono). Tästä tuloksesta saadaan epäyhtälön toinen puoli. Toista puolta varten todistetaan Lemma 4.14, jonka todistamiseen on lisätty jälleen joitakin välivaiheita. Todistuksessa käytetään Ascolin lausetta, mutta koska todistus on jo valmiiksi melko työläs, niin Ascolin lauseen todistus sivuutetaan tässä työssä.

Aivan lopuksi käsitellään metristä derivaattaa. Määritelmää seuraa kaksi esimerkkiä, jotka ovat lähteestä [5], mutta joiden ratkaisut olen tehnyt itse. Viimeisenä asiana esitellään tulos (Lause 4.20), jota ei tässä työssä kuitenkaan lyhyttä selostusta lukuun ottamatta todisteta. Sen mukaan $L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|(t)dt$, missä $|\dot{\gamma}|(t)$ on polun γ metrinen derivaatta. Sen lisäksi, että tämä on hyödyllinen tulos, se luo yhteyden kandidaatin työhöni. Tämän pro gradu -tutkielman tekeminen sai alkusysäyksensä kandidaatin työni päätuloksesta, ja Lause 4.20 tavallaan sulkee ympyrän. Tutkielma on siis hyvä päättää tähän tulokseen. Jos kuitenkin tekisin sille joskus jatkoa, niin tulisin todennäköisesti tutkimaan, pystyttäisiinkö lukion pitkässä matematiikassa käsittelemään joitakin käyrän pituuteen ja metrisiin avaruuksiin liittyviä asioita.

LUKU 1

Metrisistä avaruuksista

Tässä luvussa määritellään *metriikka* ja *metrinen avaruus* sekä käydään läpi muutamia esimerkkejä, joiden tarkoituksena on hieman selventää käsitteitä. Erityisesti Esimerkki 1.5 auttaa ymmärtämään, mikä ero on metrisillä avaruuksilla ja tavallisella euklidisella avaruudella.

Määritelmä 1.1. Olkoon X joukko ja olkoon $d : X \times X \to [0, \infty)$ kuvaus. Kuvaus d on *metriikka* joukossa X, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

(1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
(2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Lukua $d(x, y)$ kutsutaan pisteen x *etäisyydeksi* pisteestä y.

Määritelmä 1.2. *Metrinen avaruus* on pari (X, d), jossa X on joukko ja d jokin joukossa X määritelty metriikka. Joukon X alkioita kutsutaan joukon X *pisteiksi*.

Määritelmä 1.3. Olkoon d metriikka avaruudessa X ja olkoon $A \subset X$ joukko. Tällöin metriikan d rajoittuma $d_A = d_{A \times A}$ on metriikka joukossa A ja (A, d_A) on metrinen avaruus. Metriikkaa d_A kutsutaan metriikan d *indusoimaksi* metriikaksi joukossa A.

Huomautus 1.4.
(1) Koska tässä tutkielmassa keskitytään metrisiin avaruuksiin, niin jatkossa ilman erikseen mainintaakin lyhyempi merkintä X tarkoittaa aina metristä avaruutta ja d jotain määriteltyä metriikkaa.
(2) Jatkossa, kun käsitellään metrisen avaruuden osajoukkoja metrisinä avaruuksina, käytetään aina indusoitua metriikkaa, jolloin $(A, d_A) = (A, d)$.

Esimerkki 1.5.
(a) Olkoon $(\mathbb{E}, |\cdot|)$ normiavaruus. Tällöin $d(x, y) = |x - y|$ on metriikka, sillä Määritelmän 1.1 ehdot täyttyvät:
Olkoot $x, y, z \in \mathbb{E}$. Tällöin normin ominaisuuksista seuraa, että

(1) $d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$
(2) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
(3) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Koska d on metriikka avaruudessa $\mathbb{E}$, niin $(\mathbb{E}, |\cdot|)$ on metrinen avaruus.
Jos $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ ja $|\cdot|$ on euklidinen normi, niin kyseessä on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *tavallinen* eli *euklidinen* metriikka

$$d(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Olkoon X joukko. Asetetaan

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \neq y \\ 0 & \text{kun } x = y. \end{cases}$$

Tällöin, jos $x \neq y$, $x \neq z$ ja $y \neq z$, niin

(1) $\delta(x,z) = 1 \leq 1 + 1 = \delta(x,y) + \delta(y,z)$
(2) $\delta(x,y) = 1 = \delta(y,x)$.

Jos taas $x = y$, niin $\delta(x,y) = 0$. Koska $\delta(x,y) = 0$ vain jos $x = y$, niin myös ehto (3) täyttyy. Jos kaikki pisteet x, y, z tai kaksi niistä ovat samoja, niin myös tällöin ehto (1) täyttyy.
Siis (X, δ) on metrinen avaruus. Näin määriteltyä metriikkaa δ kutsutaan $\{0,1\}$-metriikaksi tai diskreetiksi metriikaksi.

(c) Olkoon $(\mathbb{R}, d)$ metrinen avaruus, missä d on euklidinen metriikka $|\cdot|$ ja olkoon $Z = \mathrm{raj}(D, \mathbb{R})$, $D \neq \emptyset$, kaikkien rajoitettujen kuvausten $f : D \to \mathbb{R}$ joukko. Asetetaan lisäksi

$$e(f,g) = \sup_{x \in D} d(f(x), g(x)),$$

kun $f, g \in Z$. Nyt (Z, e) on metrinen avaruus ja metriikkaa e kutsutaan joukon Z sup-metriikaksi. Todistetaan, että e on metriikka:
Olkoot $f, g, h \in Z$. Tällöin

$$\begin{aligned}(1)\ e(f,h) &= \sup_{x \in D} d(f(x), h(x)) = \sup_{x \in D} |f(x) - h(x)| = \sup_{x \in D} |(f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x))| \\ &\leq \sup_{x \in D}(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \leq \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in D} |g(x) + h(x)| \\ &= \sup_{x \in D} d(f(x), g(x))) + \sup_{x \in D} d(g(x), h(x)) = e(f,g) + e(g,h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ e(f,g) &= \sup_{x \in D} d(f(x), g(x)) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in D} |g(x) - f(x)| = \sup_{x \in D} d(g(x), f(x)) \\ &= e(g,f)\end{aligned}$$

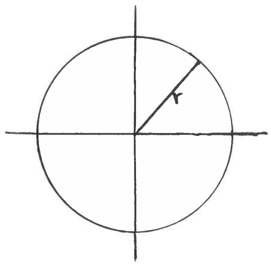
$$\begin{aligned}(3)\ e(f,g) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \in D} d(f(x), g(x)) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \\ &\Leftrightarrow f = g,\end{aligned}$$

joten Määritelmän 1.1 ehdot täyttyvät.

Huomautus 1.6. Käsiteltäessä metrisiä avaruuksia on oltava tarkkana, millainen metriikka on määritelty. On syytä korostaa, ettei aina edes avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ole käytössä euklidinen metriikka. Seuraavan esimerkin avulla selviää hyvin, kuinka paljon vaikutusta annetulla metriikalla on. Kuten esimerkistä huomataan, metrisen avaruuden pallo ei aina ole pyöreä, vaikka se määritellään kin samoin kuin euklidisessa avaruudessa:
Jos $x \in X$ ja $r > 0$, niin pistejoukko $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ muodostaa avoimen r-säteisen, x-keskeisen pallon metriseen avaruuteen X.

ESIMERKKI 1.7. Tarkastellaan tason $\mathbb{R}^2$ origokeskeisen, r-säteisen, $r > 0$, ympyrän $S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(0, x) = r\}$ käyttäytymistä, kun metriikkaa muutetaan.

(a) Olkoon d euklidisen normin $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ määrittelemä metriikka. Tällöin $x \in S(0, r) \Leftrightarrow |x| = r \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$, eli $S(0, r)$ on tavallinen pyöreä r-säteinen ympyrä.

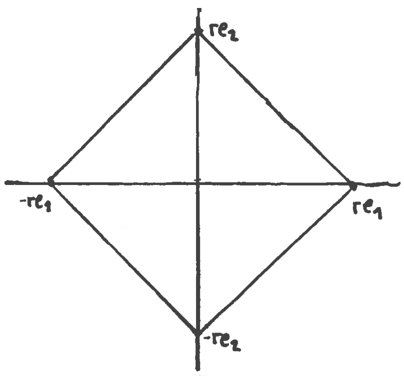


(b) Kun d_1 on normin

$$|x|_1 = |x_1| + |x_2|$$

määrittelemä metriikka, niin $x \in S(0, r)$ kun $|x_1| + |x_2| = r$. Tarkastellaan tilannetta erikseen kaikissa tason neljänneksissä:
(i) Jos $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \geq 0$, niin $|x_1| + |x_2| = r \Leftrightarrow x_1 + x_2 = r$, ja pisteet x muodostavat janan, jonka päätepisteet ovat $re_1 = (r, 0)$ ja $re_2 = (0, r)$.
(ii) Jos $x_1 \leq 0$ ja $x_2 \geq 0$, niin $|x_1| + |x_2| = r \Leftrightarrow -x_1 + x_2 = r$. Nyt pisteet x sijaitsevat janalla, jonka päätepisteet ovat $-re_1 = (-r, 0)$ ja $re_2 = (0, r)$.
(iii) Tapauksessa $x_1 \leq 0$ ja $x_2 \leq 0$ pisteet x sijaitsevat janalla, jonka päätepisteet ovat $-re_1 = (-r, 0)$ ja $-re_2 = (0, -r)$.
(iv) Kun $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \leq 0$, niin pisteet x muodostavat janan, jonka päätepisteet ovat re_1 ja $-re_2$.
Näin ollen metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ympyrä $S(0, r)$ onkin neliö, jonka kärkipisteet ovat re_1, re_2, $-re_1$ ja $-re_2$.
Tilanne yleistyy suoraan avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kun määritellään ℓ^1-normi asettamalla

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

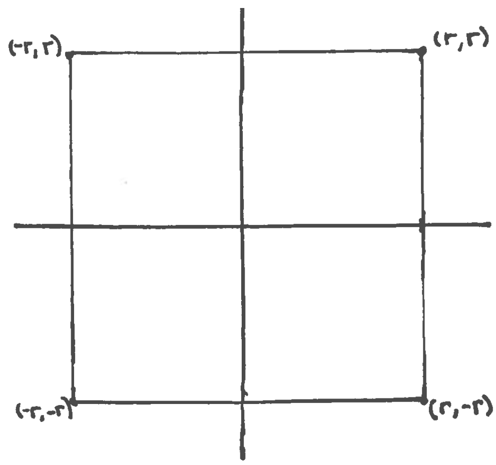


(c) Olkoon d_0 sup-normin

$$|x|_0 = \max\{|x_j| : j = 1, 2\}$$

määrittelemä metriikka. Tällöin $x \in S(0,r)$, kun $\max\{|x_1|, |x_2|\} = r$. Myös tätä tilannetta täytyy tarkastella osissa:
(i) $-r < x_1 < r$ ja $x_2 \geq 0$: $\max\{|x_1|, |x_2|\} = r \Leftrightarrow |x_2| = r \Leftrightarrow x_2 = r$.
(ii) $-r < x_1 < r$ ja $x_2 \leq 0$: $\max\{|x_1|, |x_2|\} = r \Leftrightarrow |x_2| = r \Leftrightarrow x_2 = -r$.
(iii) $-r < x_2 < r$ ja $x_1 \geq 0$: $\max\{|x_1|, |x_2|\} = r \Leftrightarrow |x_1| = r \Leftrightarrow x_1 = r$.
(iv) $-r < x_2 < r$ ja $x_1 \leq 0$: $\max\{|x_1|, |x_2|\} = r \Leftrightarrow |x_1| = r \Leftrightarrow x_1 = -r$.
(v) $x_1 = \pm r$ ja $x_2 = \pm r$: $\max\{|x_1|, |x_2|\} = r \Leftrightarrow x = (r,r), x = (-r,r), x = (-r,-r)$ tai $x = (r,-r)$.
Siis myös metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^2, d_0)$ ympyrä $S(0,r)$ on neliö, mutta nyt kärkipiseet ovat $(r,r), (-r,r), (-r,-r)$ ja $(r,-r)$. Metriikkaa d_0 kutsutaan myös d_∞-metriikaksi.
Myös tämä tilanne yleistyy avaruuteen $\mathbb{R}^n$, kun määritellään ℓ^∞-normi asettamalla

$$|x|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_i|\}.$$



(d) Tarkastellaan sitten metristä avaruutta $(\mathbb{R}^2, \delta)$, missä δ on Esimerkissä 1.5 (b) määritelty $\{0,1\}$-metriikka. Näin määritelty metrinen avaruus poikkeaa selvästi edellisistä esimerkeistä. Koska $\delta(x_1,x_2) = 1$ tai $\delta(x_1,x_2) = 0$ kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$, niin tilannetta täytyy tarkastella kahdessa osassa riippuen säteen $r > 0$ arvosta:
(i) $r \neq 1$: $x \in S(0,r) \Leftrightarrow \delta(x,0) = r$. Koska $\delta(x,0) = 0$ tai $\delta(x,0) = 1$, niin $S(0,r) = \emptyset$.
(ii) $r = 1$: $x \in S(0,r) \Leftrightarrow \delta(x,0) = r \Leftrightarrow \delta(x,0) = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Näin ollen, kun avaruus $\mathbb{R}^2$ varustetaan diskreetillä metriikalla, ympyrä on joko tyhjä joukko tai taso, josta on poistettu origo.

Ennen kuin päästään käsittelemään käyrien pituuksia metrisissä avaruuksissa, käsitellään vielä lyhyesti joitakin metrisen avaruuden tärkeitä ominaisuuksia. Koska avoimet ja suljetut joukot (Määritelmä 1.8) sekä kompaktius (Määritelmä 1.11) määritellään metrisessä avaruudessa samaan tapaan kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niitä ei käsitellä tässä tutkielmassa sen tarkemmin. Myös funktion jatkuvuus määritellään samalla tavalla kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$, joka on varustettu euklidisella metriikalla. Todistetaan kuitenkin Lause 1.12, koska siitä saadaan useissa todistuksissa tarvittava tärkeä ominaisuus, joka sekin on tuttu tulos avaruudesta $\mathbb{R}^n$.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Joukko $U \subset X$ on *avoin*, jos kaikilla $x \in U$ löytyy avoin pallo $B(x, r)$, joka sisältyy joukkoon U. Joukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos sen komplementti $X \backslash F$ on avoin.

HUOMAUTUS 1.9.
(1) Joukon avoimuus riippuu annetusta metriikasta: Jos d ja d' ovat kaksi eri metriikkaa ja $U \subset X$, niin on mahdollista, että $U \subset (X, d)$ on avoin, mutta $U \subset (X, d')$ ei.
(2) Tyhjä joukko $\emptyset$ on aina avoin metrisessä avaruudessa.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Olkoon $A \subset X$ ja olkoon $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Jos

$$A \subset \bigcup_i D_i,$$

missä $D_i \in \mathcal{D}$, niin $\mathcal{D}$ on joukon A *peite*. Jos kaikki peitteen $\mathcal{D}$ jäsenet ovat avoimia joukkoja, niin $\mathcal{D}$ on joukon A *avoin peite*.

MÄÄRITELMÄ 1.11. Joukko $A \subset X$ on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

LAUSE 1.12. *Olkoon* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *ja olkoon* $f : [a, b] \to X$ *jatkuva kuvaus. Tällöin* f *on tasaisesti jatkuva.*

TODISTUS. Olkoon $[a, b] \subset \mathbb{R}$ suljettu väli ja olkoon $f : \mathbb{R} \to X$ jatkuva kuvaus. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että $f : [a, b] \to X$ ei ole tasaisesti jatkuva. Antiteesin nojalla on olemassa $\epsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$ löytyy sellaiset $x, y \in [a, b]$, että $d(f(x), f(y)) \geq \epsilon$, vaikka $|x - y| < \delta$.
Valitaan $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}$. Nyt kaikilla n on pisteet $x_n, y_n \in [a, b]$ siten, että
$|x_n - y_n| < 1/n$ ja

$$d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon.$$

Koska rajoitetulla lukujonolla on aina suppeneva osajono ja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ on kompakti, niin on olemassa jonon (x_n) osajono (x'_n), joka suppenee kohti pistettä $x_0 \in [a, b]$. Koska tällöin $|x'_n - y_n| < 1/n$, niin myös jonon (y_n) vastaava osajono (y'_n) suppenee kohti pistettä x_0.
Toisaalta, koska f on jatkuva, niin

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(y'_n),$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} d(f(x'_n), f(y'_n)) = 0.$$

Tämä on kuitenkin ristiriidassa antiteesin kanssa, sillä $d(f(x'_n), f(y'_n)) \geq \epsilon$.
Siis antiteesi on epätosi ja f on tasaisesti jatkuva. □

HUOMAUTUS 1.13. Lause 1.12 pätee myös yleisemmin: Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja olkoon $f : X \to Y$ kuvaus. Jos K on avaruuden X kompakti osajoukko ja kuvaus $f_{|K}$ on jatkuva, niin $f_{|K}$ on tasaisesti jatkuva.

LUKU 2

Käyrän pituus

Luvussa 1 käytiin läpi metrisien avaruuksien käsitteitä, jotka liittyvät aina kahden pisteen etäisyyteen. Aivan kuten euklidisessa avaruudessa, myös metrisissä avaruuksissa *käyrän pituuteen* päästään käsiksi rajankäynnin avulla. Tässä luvussa määritellään *käyrän pituus* ja siihen liittyviä käsitteitä, käydään läpi muutamia esimerkkejä sekä esitellään myöhemmissä luvuissa tarvittavia ominaisuuksia. Osa tuloksista näyttää hyvin samanlaisilta kuin vastaavat tulokset euklidisessa avaruudessa, mutta on syytä korostaa, että metrinen avaruus (X, d) ei ole sama asia kuin euklidisella normilla varustettu avaruus $\mathbb{R}^n$, joka on vain yksi esimerkki metrisistä avaruuksista.

Määritelmä 2.1. Metrisen avaruuden *polku* on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \to X$, missä $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Jos $\gamma(a) = x$ ja $\gamma(b) = y$, sanotaan, että x ja y ovat polun γ päätepisteet, ja että γ yhdistää pisteet x ja y. Polun kuvajoukko $\gamma([a, b])$ on *käyrä* metrisessä avaruudessa X.

Määritelmä 2.2. Olkoon $[a, b], a < b$, kompakti reaaliakselin väli. Tällöin välin $[a, b]$ äärellinen osajoukko $\sigma = (t_i)_{i=0,\ldots,n}, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, on siihen liittyvä *jako*.
Jaon σ *moduli* on luku

$$|\sigma| = \sup_{i=0,\ldots,n-1} (t_{i+1} - t_i).$$

Määritelmä 2.3. Käyrän $\gamma : [a, b] \to X$ *pituus* $L(\gamma)$ on

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

missä supremum otetaan yli kaikkien välin $[a, b]$ jakojen $\sigma = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$.
Käyrä γ on *suoristuva*, jos $L(\gamma) < \infty$.

Huomautus 2.4. Englannin kielisessä kirjallisuudessa sana *path* tarkoittaa usein sekä polkua että käyrää. Vaikka suomen kielessä *polku* onkin kuvaus ja *käyrä* kuvajoukko, niin tässä tutkielmassa, kuten usein suomenkielisisessä kirjallisuudessa, ne tarkoittavat yleensä samaa asiaa. Tämä käsitteiden sekoittuminen ei kuitenkaan johda väärinkäsityksiin.

Määritelmä 2.5. Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku metrisessä avaruudessa X ja olkoon σ välin $[a, b]$ jako. Polun γ *kokonaisheilahtelu jaolla* σ on luku

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Huomautus 2.6. Käyrän γ pituutta voidaan nyt merkitä lyhyemmin

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} V_\sigma(\gamma).$$

Tästä merkinnästä on hyötyä jatkossa.

Ennen esimerkkejä esitellään myöhemmissäkin luvuissa tarvittavia käyrän pituuteen liittyviä ominaisuuksia sekä niiden todistamiseen tarvittavia lauseita.

Lause 2.7. *Käyrän pituus on alhaalta rajoitettu päätepisteidensä etäisyydellä. Toisin sanoen, jos $\gamma : [a,b] \to X$ on polku, jonka päätepisteet ovat x ja y, $x, y \in X$, niin $d(x,y) \leq L(\gamma)$.*

Todistus. Valitaan kaikista välin $[a,b]$ jaoista jako $\{a,b\}$. Tällöin kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$d(x,y) = d(\gamma(a), \gamma(b)) \leq \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = L(\gamma).$$

□

Lause 2.8. *Käyrän $\gamma : [a,b] \to X$ pituus on nolla jos ja vain jos γ on vakiopolku.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $L(\gamma) = 0$.
Olkoon $\sigma = \{a, t, b\}$, $t \in]a,b[$, välin $[a,b]$ jako. Tällöin

$$V_\sigma(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(t)) + d(\gamma(t), \gamma(b)) \leq L(\gamma) = 0.$$

Koska $d(\gamma(a), \gamma(t)) \geq 0$ ja $d(\gamma(t), \gamma(b)) \geq 0$, on oltava sekä $d(\gamma(a), \gamma(t)) = 0$ että $d(\gamma(t), \gamma(b)) = 0$. Tästä seuraa, että $\gamma(a) = \gamma(t) = \gamma(b)$ kaikilla $t \in]a,b[$, joten γ on vakiopolku.

Oletetaan sitten, että γ on vakiopolku.
Koska γ on vakiopolku, on olemassa sellainen $x_0 \in X$, että $\gamma(t) = x_0$ kaikilla $t \in [a,b]$. Määritelmän 2.3 merkinnöin saadaan

$$L(\gamma) = \sup_{\sigma} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sup_{\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} d(x_0, x_0) = 0.$$

□

Hyvin tavallinen ja itsestään selvältä tuntuva tulos on käyrän pituuden additiivisuus (Lause 2.10), joka voidaan todistaa kahdella eri tavalla. Helpompaa olisi todistaa Lause 2.10 kuten euklidisessa avaruudessa, mutta koska sen kaltainen todistus tehtiin jo kandidaatin tutkielmassani, esitetään tässä työssä vaihtoehtoinen, joskin monimutkaisempi todistus. Sitä varten todistetaan seuraava tulos (Lemma 2.9), joka muistuttaa euklidisen avaruuden murtoviiva-approksimaatiota. Lemmaa 2.9 tarvitaan myös Lauseen 2.17 todistamiseen.

Lemma 2.9. *Kaikilla poluilla $\gamma : [a,b] \to X$ käyrän pituus on*

$$L(\gamma) = \lim_{|\sigma| \to 0} V_\sigma(\gamma).$$

TODISTUS. Koska Huomautuksesta 2.6 seuraa, että

$$L(\gamma) \geq \lim_{|\sigma|\to 0} V_\sigma(\gamma),$$

niin riittää osoittaa, että

$$L(\gamma) \leq \lim_{|\sigma|\to 0} V_\sigma(\gamma).$$

Olkoon $M \in \mathbb{R}$ siten, että $M < L(\gamma)$. Näytetään, että löytyy sellainen reaaliluku $\eta > 0$, että kaikilla jaoilla σ, joilla $|\sigma| < \eta$, pätee $M \leq V_\sigma(\gamma)$.
Oletetaan ensin, että $L(\gamma) < \infty$. Olkoot $\epsilon = (L(\gamma) - M)/2$, $M' = M + \epsilon$ ja $\tau = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ välin $[a, b]$ sellainen jako, jolla $M + \epsilon < V_\tau(\gamma)$. Tällainen jako löytyy, sillä jos kaikilla välin $[a, b]$ jaoilla σ olisi $V_\sigma(\gamma) \leq M + \epsilon$, niin myös $\sup_\sigma V_\sigma(\gamma) \leq M + \epsilon$. Tästä taas seuraisi, että

$$\begin{aligned} L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma) &\leq M + \epsilon = M + (L(\gamma) - M)/2 \\ &= (L(\gamma) + M)/2 < 2L(\gamma)/2 = L(\gamma), \end{aligned}$$

mikä on ristiriita.
Jos $L(\gamma) = \infty$, niin $M + \epsilon < L(\gamma)$ kaikilla $\epsilon > 0$, joten voidaan valita mikä tahansa $\epsilon > 0$.
Koska $\gamma : [a, b] \to X$ on Lauseen 1.12 nojalla tasaisesti jatkuva, niin löydetään sellainen $\eta \in \mathbb{R}$, että

$$0 < \eta < \frac{1}{4} \min_{i=0,\ldots,n-1} (t_{i+1} - t_i),$$

ja että kaikilla $u, v \in [a, b], |u - v| \leq \eta$, pätee

$$d(\gamma(u), \gamma(v)) \leq \frac{\epsilon}{2(n-1)}.$$

Olkoon sitten σ välin $[a, b]$ sellainen jako, jolla $|\sigma| < \eta$. Olkoon lisäksi kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ piste t'_i jaon σ se jakopiste, joka on lähimpänä jaon τ jakopistettä t_i, mutta on sitä pienempi tai yhtä suuri. Vastaavasti olkoon $t''_i \in \sigma$ jakopisteen t_i lähin piste, joka on sitä suurempi. Koska $|\sigma| < \eta$, niin kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ pätee nyt $t_i < t''_i < t'_{i+1} \leq t_{i+1}$.
Tarkastellaan sitten välin $[a, b]$ jakoa $\sigma \cup \tau$. Nyt

$$\begin{aligned} V_{\sigma\cup\tau}(\gamma) - V_\sigma(\gamma) &= \sum_{i=1}^{n-1} (d(\gamma(t'_i), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), \gamma(t''_i)) - d(\gamma(t'_i), \gamma(t''_i))) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} (d(\gamma(t'_i), \gamma(t_i)) + d(\gamma(t_i), \gamma(t''_i))) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\frac{\epsilon}{2(n-1)} + \frac{\epsilon}{2(n-1)}\Big) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon}{n-1} = (n-1)\frac{\epsilon}{n-1} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Siten $V_{\sigma\cup\tau}(\gamma) \leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon$.
Koska $\tau \subset \sigma \cup \tau$, niin kolmioepäyhtälöstä seuraa, että $V_\tau(\gamma) \leq V_{\sigma\cup\tau}(\gamma) \leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon$. Näin ollen

$$M + \epsilon < V_\tau(\gamma) \leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon,$$

eli $M \leq V_\sigma(\gamma)$. □

Nyt käyrän pituuden additiivisuus on helppo todistaa.

LAUSE 2.10. *Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku. Tällöin kaikilla $c \in [a, b]$ on*

$$L(\gamma) = L(\gamma_{|[a,c]}) + L(\gamma_{|[c,b]}).$$

TODISTUS. Olkoon $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ sellainen jono välin $[a, b]$ jakoja, joilla $c \in \sigma_n$ kaikilla $n \geq 0$ ja joilla $|\sigma_n| \to 0$, kun $n \to \infty$. Olkoot sitten kaikilla $n \geq 0$

$$\sigma'_n = \sigma_n \cap [a, c] \text{ ja } \sigma''_n = \sigma_n \cap [c, b].$$

Koska nyt σ'_n on välin $[a, c]$ ja σ''_n välin $[c, b]$ jako, niin

$$V_{\sigma_n}(\gamma) = V_{\sigma'_n}(\gamma_{|[a,c]}) + V_{\sigma''_n}(\gamma_{|[c,b]})$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} |\sigma'_n| = \lim_{n\to\infty} |\sigma''_n| = 0.$$

Lemman 2.9 nojalla saadaan tällöin

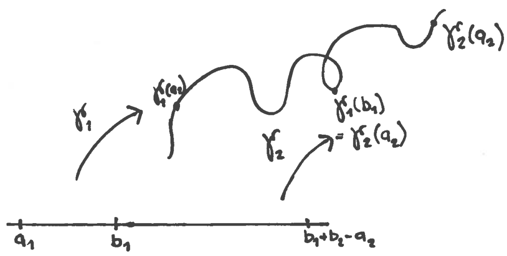
$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \lim_{|\sigma|\to 0} V_\sigma(\gamma) = \lim_{n\to\infty} V_{\sigma_n}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} (V_{\sigma'_n}(\gamma_{|[a,c]}) + V_{\sigma''_n}(\gamma_{|[c,b]})) \\ &= \lim_{n\to\infty} V_{\sigma'_n}(\gamma_{|[a,c]}) + \lim_{n\to\infty} V_{\sigma''_n}(\gamma_{|[c,b]}) = \lim_{|\sigma|\to 0} V_\sigma(\gamma_{|[a,c]}) + \lim_{|\sigma|\to 0} V_\sigma(\gamma_{|[c,b]}) \\ &= L(\gamma_{|[a,c]}) + L(\gamma_{|[c,b]}). \end{aligned}$$

□

MÄÄRITELMÄ 2.11. Olkoot $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to X$ ja $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to X$ polkuja siten, että $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Kun määritellään polku $\gamma : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to X$ asettamalla

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{kun } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & \text{kun } t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2], \end{cases}$$

niin polku γ on polkujen γ_1 ja γ_2 *yhdistetty polku.*



Vastaava määrittely pätee myös yleisemmin: Jos $(\gamma)_{i=1}^{n-1}, \gamma_i : [a_i, b_i] \to X$, on äärellinen jono polkuja siten, että kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n-1$ pätee $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$, niin induktiivisesti määrittelemällä saadaan polkujen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ yhdistetty polku γ_n.

LAUSE 2.12. *Jos γ on polkujen γ_1 ja γ_2 yhdistetty polku, niin*

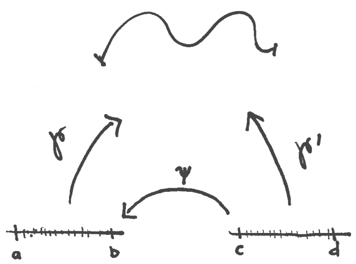
$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

Todistus. Olkoot γ, γ_1 ja γ_2 kuten Määritelmässä 2.11.
Koska $b_1 \in [a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ ja $\gamma(b_1) = \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, niin Lauseesta 2.10. seuraa, että

$$L(\gamma) = L(\gamma_{|[a_1,b_1]}) + L(\gamma_{|[b_1,b_1+b_2-a_2]}) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

□

Määritelmä 2.13. Olkoot $\gamma : [a, b] \to X$ ja $\gamma' : [c, d] \to X$ polkuja. Jos on olemassa sellainen monotoninen ja surjektiivinen kuvaus $\psi : [c, d] \to [a, b]$, jolla $\gamma' = \gamma \circ \psi$, niin ψ on kuvauksen γ parametrin vaihto.



Lause 2.14. *Olkoot $\gamma : [a, b] \to X$ ja $\gamma' : [c, d] \to X$ polkuja sekä ψ niiden välinen parametrin vaihto. Tällöin $L(\gamma) = L(\gamma')$.*

Todistus. Todistetaan ensin, että $L(\gamma') \geq L(\gamma)$.
Olkoon $\psi : [c, d] \to [a, b]$ polkujen γ ja γ' välinen parametrin vaihto. Liitetään jokaiseen välin $[a, b]$ jakoon $\sigma = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ välin $[c, d]$ jako $\sigma' = (t'_i)_{i=0,\ldots,n}$ valitsemalla kaikilla $i = 0, \ldots, n$ piste (t'_i) joukosta $\psi^{-1}(t_i)$. Koska ψ on surjektio, tällainen piste löytyy kaikilla $i = 0, \ldots, n$. Nyt

$$\begin{aligned}
V_{\sigma'}(\gamma') &= \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma'(t'_i), \gamma'(t'_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma \circ \psi(t'_i), \gamma \circ \psi(t'_{i+1})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(\psi(t'_i)), \gamma(\psi(t'_{i+1}))) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(\psi(\psi^{-1}(t_i))), \gamma(\psi(\psi^{-1}(t_{i+1})))) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = V_\sigma(\gamma),
\end{aligned}$$

joten jos τ' on mikä tahansa välin $[c, d]$ jako, niin Määritelmän 2.3 nojalla

$$L(\gamma') = \sup_{\tau'} V_{\tau'}(\gamma') \geq V_{\sigma'}(\gamma') = V_\sigma(\gamma).$$

Koska tämä pätee jokaisella välin $[a, b]$ jaolla σ, niin

$$L(\gamma') \geq \sup_\sigma V_\sigma(\gamma) = L(\gamma),$$

eli $L(\gamma') \geq L(\gamma)$.
Todistetaan sitten, että $L(\gamma) \geq L(\gamma')$.

Olkoon σ' välin $[c,d]$ jako, jolloin $\sigma = \psi(\sigma')$ on välin $[a,b]$ jako. Koska ψ on monotoninen kuvaus, niin vastaava lasku kuin yllä näyttää, että $V_{\sigma'}(\gamma') = V_\sigma(\gamma)$. Siten, jos τ on mikä tahansa välin $[a,b]$ jako, niin

$$L(\gamma) = \sup_\tau V_\tau(\gamma) \geq V_\sigma(\gamma) = V_{\sigma'}(\gamma').$$

Ottamalla supremum yli kaikkien välin $[c,d]$ jakojen σ', saadaan $L(\gamma) \geq L(\gamma')$. Siis $L(\gamma) = L(\gamma')$. □

LAUSE 2.15. *Olkoot $\gamma : [a,b] \to X$ ja $\bar{\gamma} : [a,b] \to X$ toistensa käänteispolkuja, toisin sanoen $\bar{\gamma}(t) = \gamma(b+a-t)$. Tällöin $L(\bar{\gamma}) = L(\gamma)$.*

TODISTUS. Esitetään Lauseelle 2.15 kaksi vaihtoehtoista todistusta. Ensimmäisessä tulokseen päästään suoralla laskulla, toisessa puolestaan hyödynnetään Lausetta 2.14.
(1) Määritelmän 2.3 merkinnöin ja summausjärjestystä muuttaen saadaan

$$\begin{aligned}
L(\bar{\gamma}) &= \sup_\sigma V_\sigma(\bar{\gamma}) = \sup_\sigma \sum_{i=0}^{n-1} d(\bar{\gamma}(t_i), \bar{\gamma}(t_{i+1})) \\
&= \sup_\sigma \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(b+a-t_i), \gamma(b+a-t_{i+1})) \\
&= \sup_\sigma \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma) \\
&= L(\gamma).
\end{aligned}$$

(2) Käytetään Lauseen 2.14 valintoja siten, että $[c,d] = [a,b]$, $\gamma' = \bar{\gamma}$ ja $\psi(t) = b+a-t$. Nyt tilanne vastaa väitettä, ja tulos saadaan suoraan Lauseesta 2.14. □

MERKINTÄ 2.16. Merkitään jatkossa $\gamma_t = \gamma_{|[a,t]}$, toisin sanoen, jos $\gamma : [a,b] \to X$ on polku ja $t \in [a,b]$, niin γ_t on polun γ rajoittuma välille $[a,t]$.

LAUSE 2.17. *Jos $\gamma : [a,b] \to X$ on suoristuva polku, niin välillä $[a,b]$ määritelty kuvaus $t \mapsto L(\gamma_t)$ on kasvava ja jatkuva.*

TODISTUS. Olkoot $t', t'' \in [a,t]$ siten, että $t' \leq t''$. Käyrän pituuden additiivisuudesta seuraa, että $L(\gamma_{t''}) = L(\gamma_{t'}) + L(\gamma_{|[t',t'']})$, joten

$$0 \leq L(\gamma_{|[t',t'']}) = L(\gamma_{t''}) - L(\gamma_{t'}), \text{eli } L(\gamma_{t'}) \leq L(\gamma_{t''}).$$

Siis kuvaus $t \mapsto L(\gamma_t)$ on kasvava.

Todistetaan sitten, että kuvaus $t \mapsto L(\gamma_t)$ on jatkuva.
Olkoon $\epsilon > 0$. Lemman 2.9 ja polun γ tasaisen jatkuvuuden nojalla (Lause 1.12) on olemassa sellainen $\eta > 0$, että seuraavat ehdot täyttyvät:

(1) Kaikilla välin $[a,b]$ jaoilla σ, joilla $|\sigma| \leq \eta$, pätee

$$L(\gamma) - V_\sigma(\gamma) = \lim_{|\sigma| \to 0} V_\sigma(\gamma) - V_\sigma(\gamma) \leq \epsilon/2$$

eli $L(\gamma) \leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon/2$.

(2) Kaikilla $u, v \in [a, b]$, joilla $|v - u| \leq \eta$, on
$$d(\gamma(u), \gamma(v)) \leq \epsilon/2.$$
Olkoot nyt $u, v \in [a, b]$ siten, että $0 \leq v - u \leq \eta$, sekä σ välin $[a, b]$ sellainen jako, jolla $|\sigma| \leq \eta$ ja jolla $\sigma \cap [u, v] = \{u, v\}$. Olkoot lisäksi $\sigma_1 = \sigma \cap [a, u]$ ja $\sigma_2 = \sigma \cap [v, b]$. Tällöin
$$\begin{aligned}
L(\gamma_{|[a,u]}) + L(\gamma_{|[u,v]}) + L(\gamma_{|[v,b]}) &= L(\gamma) \\
&\leq V_\sigma(\gamma) + \epsilon/2 \qquad \text{ehto (1)} \\
&= V_{\sigma_1}(\gamma_{|[a,u]}) + d(\gamma(u), \gamma(v)) + V_{\sigma_2}(\gamma_{|[v,b]}) + \epsilon/2 \\
&\leq V_{\sigma_1}(\gamma_{|[a,u]}) + \epsilon/2 + V_{\sigma_2}(\gamma_{|[v,b]}) + \epsilon/2 \qquad \text{ehto (2)} \\
&\leq L(\gamma_{|[a,u]}) + L(\gamma_{|[v,b]}) + \epsilon,
\end{aligned}$$
joten $L(\gamma_{|[u,v]}) \leq \epsilon$.
Nyt käyrän pituuden additiivisuudesta seuraa, että
$$|L(\gamma_u) - L(\gamma_v)| = L(\gamma_{|[u,v]}) \leq \epsilon,$$
mikä todistaa kuvauksen $t \mapsto L(\gamma_t)$ jatkuvuuden. □

MÄÄRITELMÄ 2.18. Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ suoristuva polku. Polku γ on *parametrisoitu käyrän pituudella*, jos kaikilla $u, v \in [a, b], u \leq v$, pätee
$$L(\gamma_{|[u,v]}) = v - u.$$

HUOMAUTUS 2.19. Jos polku $\gamma : [a, b] \to X$ on parametrisoitu käyrän pituudella, niin $L(\gamma) = b - a$.

MÄÄRITELMÄ 2.20. Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku. Sanotaan, että γ on *parametrisoitu suhteellisesti käyrän pituudella*, jos γ on joko vakiopolku tai on olemassa sellainen käyrän pituudella parametrisoitu polku $\gamma' : [c, d] \to X$, jolla $\gamma = \gamma' \circ \psi$ ja kuvaus $\psi : [a, b] \to [c, d]$ on määritelty asettamalla kaikilla $x \in [a, b]$
$$\psi(x) = \frac{(d - c)x + (bc - ad)}{b - a}.$$

LAUSE 2.21. *Jos $\gamma : [0, 1] \to X$ suhteellisesti käyrän pituudella parametrisoitu polku, niin γ on $L(\gamma)$-Lipschitz.*

TODISTUS. Jos γ on vakiopolku, niin kaikilla $u, v \in [0, 1], u \leq v$, on
$$d(\gamma(u), \gamma(v)) = 0 \leq L(\gamma)(v - u),$$
joten γ on $L(\gamma)$-Lipschitz.
Oletetaan sitten, että $\gamma = \gamma' \circ \psi$, missä $\gamma' : [c, d] \to X$ on käyrän pituudella parametrisoitu polku ja $\psi : [0, 1] \to [c, d]$ kuvauksien γ ja γ' välinen parametrin vaihto, eli $\psi(x) = (d - c)x + c$.
Olkoot $u, v \in [0, 1], u \leq v$. Tällöin $\psi(u), \psi(v) \in [c, d], \psi(u) \leq \psi(v)$, ja $L(\gamma'_{|[\psi(u),\psi(v)]}) = \psi(v) - \psi(u)$. Lisäksi $L(\gamma') = d - c$, jolloin Lauseen 2.7 nojalla saadaan
$$\begin{aligned}
d(\gamma(u), \gamma(v)) &= d(\gamma' \circ \psi(u), \gamma' \circ \psi(v)) = d(\gamma'(\psi(u)), \gamma'(\psi(v))) \\
&\leq L(\gamma'_{|[\psi(u),\psi(v)]}) = \psi(v) - \psi(u) \\
&= (d - c)v + c - ((d - c)u + c) = (d - c)(v - u) \\
&= L(\gamma')(v - u).
\end{aligned}$$

Koska Lauseen 2.14 nojalla $L(\gamma) = L(\gamma')$, niin

$$d(\gamma(u), \gamma(v)) \leq L(\gamma)(v - u),$$

eli γ on $L(\gamma)$-Lipschitz. □

SEURAUS 2.22. *Jos polku γ on määritelty välillä $[a, b]$ ja muut oletukset ovat samat kuin Lauseessa 2.21, niin γ on $\frac{L(\gamma)}{b-a}$-Lipschitz.*
Lisäksi, jos $L(\gamma) \leq M$, niin γ on M-Lipschitz.

TODISTUS. Todistus etenee muuten samoin kuin edellä, mutta nyt

$$\psi(x) = \frac{(d - c)x + (bc - ad)}{b - a},$$

joilloin

$$\begin{aligned} d(\gamma(u), \gamma(v)) &\leq \frac{(d - c)v + (bc - ad)}{b - a} - \frac{(d - c)u + (bc - ad)}{b - a} \\ &= \frac{(d - c)(v - u)}{b - a} = \frac{L(\gamma)}{b - a}(v - u). \end{aligned}$$

Jos $L(\gamma) \leq M$ ja $b - a \geq 1$, niin $d(\gamma(u), \gamma(v)) \leq M(v - u)$. Jos taas $0 < b - a < 1$, niin väite seuraa suoraan Lauseesta 2.21. □

Luvun 2 päätteeksi käydään vielä läpi kaksi esimerkkiä, jotka havainnollistavat kahta hyvin erilaista tilannetta metrisessä avaruudessa: (a)-kohdassa lasketaan käyrän pituus, (b)-kohdan esimerkki puolestaan osoittaa, että kaikki käyrät eivät suinkaan ole suoristuvia.

ESIMERKKI 2.23.

(a) (Janapolku) Integraalilaskennan kursseilla ja kandidaatin tutkielmassani laskettiin janapolun pituus tavallisella normilla varustetussa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ helposti kaavalla

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Lasketaan janapolun pituus nyt tämän tutkielman tuloksia hyödyntäen:
Olkoot siis X normiavaruus ja $\gamma : [0, 1] \to X, \gamma(t) = (1 - t)x + ty$, pisteitä x ja y yhdistävä janapolku. Kaikilla $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 \leq t_2$, pätee

$$\begin{aligned} d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) &= \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| \\ &= \|(1 - t_1)x + t_1 y - (1 - t_2)x - t_2 y\| \\ &= \|(t_2 - t_1)x - (t_2 - t_1)y\| \\ &= (t_2 - t_1)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Olkoon sitten $\sigma_0 = (t_i)_{i=0,\dots,n}$ välin $[0,1]$ jako. Nyt edellisen yhtälön nojalla on

$$\begin{aligned} V_{\sigma_0}(\gamma) &= \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\|x - y\| = \|x - y\| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \\ &= \|x - y\|, \end{aligned}$$

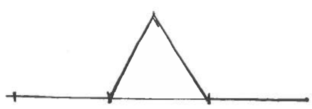
joten janapolun γ kokonaisheilahtelu $V_\sigma(\gamma)$ ei riipu välin $[0,1]$ jaon valinnasta. Määritelmästä 2.3 saadaan nyt

$$L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma) = \|x - y\|,$$

mikä on yhtenevä tutun tuloksen kanssa.

Koska sekä euklidinen avaruus että normiavaruus ovat metrisiä avaruuksia, pätevät niissä tietenkin myös muut tämän tutkielman tulokset. Itseasiassa kaikki kandidaatin tutkielmassani esitetyt tulokset on johdettavissa tämän tutkielman tuloksista — ne ovat vain yksinkertaisempia erikoistapauksia.

(b) (Von Kochin käyrä) Olkoon $(\gamma_n)_{n\geq 0}, \gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, jono käyriä, joka suppenee tasaisesti kohti käyrää $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Olkoon lisäksi $\sigma_n = \{\frac{i}{4^n}, i = 0, \dots, 4^n\}, n \geq 0$, välin $[0,1]$ jako. Suoristumattomaksi osoittautuvaa käyrää γ kutsutaan Von Kochin käyräksi tai Lumihiutalekäyräksi, kun jono $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ määritellään seuraavasti:
Olkoon $\gamma_0(t) = (t, 0)$ kaikilla $t \in [0,1]$. Määritellään sitten kaikilla $n \geq 0$ polku γ_n siten, että γ_n on lineaarinen kaikilla jaon σ_n osaväleillä kuten kuvassa 2.1.



KUVA 2.1

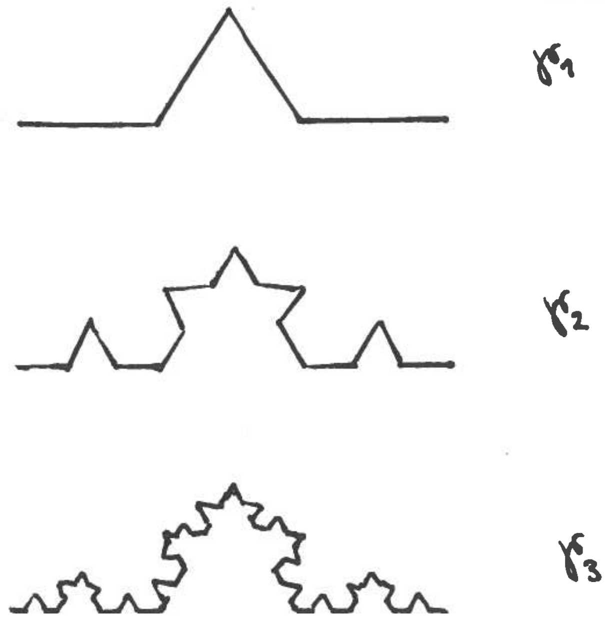
Polku γ_{n+1} saadaan polusta γ_n jakamalla ensin jaon σ_n jokainen osaväli kolmeen yhtä pitkään osaan, ja määrittelemällä γ_{n+1} jokaisella uudella osavälillä samoin kuin γ_n määriteltiin (kuva 2.2).
Selvästi kaikilla $n \geq 0$ on $L(\gamma_{n+1}) = 4/3L(\gamma_n)$.

Osoitetaan vielä, että Von Kochin käyrä $\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$ on suoristumaton. Tarkastellaan edelleen jakoa $\sigma_n = \{\frac{i}{4^n}, i = 0, \dots, 4^n\}$. Nyt

$$V_{\sigma_n}(\gamma) = V_{\sigma_n}(\gamma_n) = (4/3)^n,$$

joten

$$L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma) \geq V_{\sigma_n}(\gamma) = (4/3)^n \longrightarrow \infty, \text{kun } n \to \infty.$$



Kuva 2.2. Lumihiutalekäyrä.

LUKU 3

Pituusavaruudet ja geodeesit

Tässä luvussa tutustutaan kahteen metrisien avaruuksien erikoistapaukseen: pituusavaruuksiin ja geodeesisiin avaruuksiin. Lukua 3 voidaan sinänsä pitää hieman erillisenä lukuna, että sen tuloksia ei varsinaisesti tarvita viimeisessä luvussa eikä siten myöskään tutkielman päätuloksen (Lause 4.15) todistamisessa. Päinvastoin, Lause 4.15 ja Seuraus 4.16 antavat geodeesisuuden, joten luku 3 voisi siksi sijoittua aivan yhtä hyvin viimeiseksi luvuksi. Koska pituusavaruudet ja geodeesit ovat kuitenkin mielenkiintoisia erikoistapauksia metrisistä avaruuksista, ja koska ne liittyvät vahvasti käyrän pituuteen, tämä luku sopii hyvin luvun 2 jatkoksi.

3.1. Pituusavaruudet

MÄÄRITELMÄ 3.1. Metrinen avaruus X on *suoristuvasti yhtenäinen*, jos kaikilla $x, y \in X$ löytyy sellainen suoristuva käyrä $\gamma : [a, b] \to X$, että $\gamma(a) = x$ ja $\gamma(b) = y$.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Metrinen avaruus (X, d) on *pituusavaruus*, jos kaikilla $x, y \in X$ on

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

missä infimum otetaan yli pisteitä x ja y yhdistävien käyrien.
Pituusavaruuden näin määriteltyä metriikkaa d kutsutaan *pituusmetriikaksi* tai *polkumetriikaksi.*

Jotta edellisestä määritelmästä olisi hyötyä, niin todistetaan seuraavaksi, että pituusmetriikka todella on metriikka. Sitä varten tehdään ensin kuitenkin seuraava määritelmä:
Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Määritellään kuvaus $d_\ell : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ asettamalla

$$d_\ell(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

missä infimum otetaan yli pisteitä x ja y yhdistävien käyrien.

LAUSE 3.3. *Olkoon (X, d) suoristuvasti yhtenäinen metrinen avaruus. Tällöin d_ℓ on metriikka ja (X, d_ℓ) on siis pituusavaruus. Lisäksi $d(x, y) \leq d_\ell(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$.*

TODISTUS. Olkoot $x, y \in X$ ja olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ niitä yhdistävä polku. Koska Lauseen 2.7 nojalla on $d(x, y) \leq L(\gamma)$, niin ottamalla infimum yli kaikkien pisteitä x ja y yhdistävien käyrien, saadaan

$$d(x, y) \leq \inf_{\gamma} L(\gamma) = d_\ell(x, y),$$

mikä todistaa väitteen toisen osan.
Todistetaan sitten ensimmäinen väite. Pituusmetriikka $d_\ell(x, y)$ on metriikka, jos Määritelmän 1.1 ehdot (1)–(3) täyttyvät.

(1) Olkoot $x, y, z \in X$ ja olkoon $\epsilon > 0$. Olkoot lisäksi $\gamma : [a, b] \to X$ ja $\gamma' : [a', b'] \to X$ sellaisia polkuja, että γ yhdistää pisteet x ja y, ja γ' pisteet y ja z. Oletetaan vielä, että poluille γ ja γ' pätee

$$L(\gamma) \leq d_\ell(x, y) + \epsilon/2 \text{ ja } L(\gamma') \leq d_\ell(y, z) + \epsilon/2.$$

Määritellään nyt polku $\gamma'' : [a, b + b' - a'] \to X$ asettamalla

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{kun } t \in [a, b] \\ \gamma'(t - b + a') & \text{kun } t \in [b, b + b' - a']. \end{cases}$$

Nyt $\gamma''(a) = x$ ja $\gamma''(b + b' - a') = z$. Lisäksi $y = \gamma(b) = \gamma''(b) = \gamma'(a)$, joten γ'' yhdistää pisteet x ja z.
Määritellään sitten kuvaus $\psi : [b, b + b' - a'] \to [a', b']$ asettamalla $\psi(t) = t - b + a'$. Tällöin

$$\gamma''_{|[b,b+b'-a']}(t) = \gamma'(t - b + a') = \gamma'(\psi(t)) = \gamma' \circ \psi(t),$$

joten ψ on polkujen $\gamma''_{|[b,b+b'-a']}$ ja γ' välinen parametrin vaihto. Siten Lauseen 2.14 nojalla on $L(\gamma''_{|[b,b+b'-a']}) = L(\gamma')$.
Lisäksi, koska $\gamma''_{|[a,b]} = \gamma$, niin $L(\gamma''_{|[a,b]}) = L(\gamma)$.
Nyt käyrän pituuden additiivisuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned} L(\gamma'') &= L(\gamma''_{|[a,b]}) + L(\gamma''_{|[b,b+b'-a']}) = L(\gamma) + L(\gamma') \\ &\leq d_\ell(x, y) + \epsilon/2 + d_\ell(y, z) + \epsilon/2 \\ &= d_\ell(x, y) + d_\ell(y, z) + \epsilon. \end{aligned}$$

Ottamalla sitten infimum yli kaikkien pisteitä x ja z yhdistävien käyrien α saadaan

$$d_\ell(x, z) = \inf_\alpha L(\alpha) \leq L(\gamma'') \leq d_\ell(x, y) + d_\ell(y, z) + \epsilon.$$

Koska tämä pätee kaikilla $\epsilon > 0$, niin

$$d_\ell(x, z) \leq d_\ell(x, y) + d_\ell(y, z),$$

mikä todistaa kolmioepäyhtälön.

(2) Olkoot $x, y \in X$, $\epsilon > 0$ ja γ sellainen pisteet x ja y yhdistävä polku, että $L(\gamma) < d_\ell(x, y) + \epsilon$. Liitetään sitten pisteet x ja y yhdistävään polkuun $\gamma : [a, b] \to X$ sellainen polku $\bar{\gamma} : [a, b] \to X$, että kaikilla $t \in [a, b]$ on $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$.
Tällöin $\bar{\gamma}$ on polun γ käänteispolku, joten se yhdistää pisteet y ja x. Koska lisäksi Lauseen 2.15 nojalla on $L(\bar{\gamma}) = L(\gamma)$, niin

$$d_\ell(y, x) \leq L(\bar{\gamma}) = L(\gamma) < d_\ell(x, y) + \epsilon.$$

Tästä seuraa, että $d_\ell(y, x) \leq d_\ell(x, y)$.
Vaihtamalla pisteiden x ja y roolit saadaan epäyhtälö $d_\ell(x, y) \leq d_\ell(y, x)$.
Siis $d_\ell(x, y) = d_\ell(y, x)$.

(3) Oletetaan ensin, että $d_\ell(x, y) = 0$. Koska $d(x, y) \leq d_\ell(x, y)$, niin $0 \leq d(x, y) \leq d_\ell(x, y) = 0$, joten $d(x, y) = 0$. Koska d on metriikka, niin Määritelmän 1.1 ehdon (3) nojalla $x = y$.

Olkoon sitten $x = y$. Nyt lyhyin pisteitä x ja y yhdistävä polku on vakiopolku $\gamma : [a, b] \to X, \gamma(t) = x$, jolloin Lauseen 2.8 nojalla on $L(\gamma) = 0$. Siten

$$d_\ell(x, y) = \inf_\gamma L(\gamma) = 0, \text{eli } d_\ell(x, y) = 0.$$

□

Huomautus 3.4. Olkoon (X, d) suoristuvasti yhtenäinen metrinen avaruus. Tällöin (X, d) on pituusavaruus jos ja vain jos $d_\ell = d$, minkä seuraava päättelyketju helposti osoittaa:
Oletetaan ensin, että (X, d) on pituusavaruus. Pituusavaruuden määritelmän nojalla kaikilla $x, y \in X$ on

$$d(x, y) = \inf_\gamma L(\gamma) = d_\ell(x, y),$$

joten $d_\ell = d$.
Oletetaan sitten, että $d_\ell = d$. Tällöin kaikilla $x, y \in X$ on

$$d(x, y) = d_\ell(x, y),$$

joten $d(x, y) = \inf_\gamma L(\gamma)$. Siis (X, d) on pituusavaruus.

Lause 3.5. *Olkoon (X, d) suoristuvasti yhtenäinen metrinen avaruus. Tällöin identtinen kuvaus $i : (X, d_\ell) \to (X, d)$ on jatkuva.*

Todistus. Olkoot $x, y \in X$. Tällöin Lauseesta 3.3 seuraa, että

$$d(i(x), i(y)) = d(x, y) \leq d_\ell(x, y),$$

mistä väite seuraa helposti. □

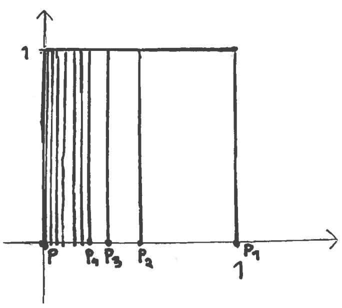
Sovellettaessa näitä tuloksia täytyy kuitenkin olla tarkkana, sillä identtinen kuvaus $i : (X, d) \to (X, d_\ell)$ ei välttämättä ole jatkuva, kuten seuraavat esimerkit osoittavat.

Esimerkki 3.6.

(a) Olkoon $X \subset \mathbb{E}^2$ metrinen avaruus, missä

$$X = ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \bigcup_{n \geq 1} (\{1/n\} \times [0, 1]),$$

ja missä käytetään avaruudesta $\mathbb{E}^2$ indusoitua metriikkaa d.
Tarkastellaan sitten avaruuden X pistejonoa $(p_n)_{n \geq 1}$, missä $p_n = (1/n, 0)$ kaikilla $n \geq 1$. Olkoon lisäksi $p = (0, 0)$ ja olkoon $\gamma_n : [a, b] \to X$ pisteet p_n ja p yhdistävä polku.



Nyt
$$d(p_n, p) \to 0, \text{ kun } n \to \infty,$$
mutta koska $L(\gamma_n) > 2$ kaikilla $n \geq 1$, niin
$$d_\ell(p_n, p) = \inf_\gamma L(\gamma) \geq 2 \text{ kaikilla } n \geq 1.$$
Siis identtinen kuvaus $i : (X, d) \to (X, d_\ell)$ ei ole jatkuva.

(b) Olkoon $(\mathbb{Q}, d)$ metrinen avaruus, missä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko ja d avaruudesta $\mathbb{R}$ indusoitu euklidinen metriikka. Olkoot $q_i, q_j \in \mathbb{Q}, i \neq j$. Tällöin
$$d(q_i, q_j) = |q_i - q_j| < \infty,$$
kun taas
$$d_\ell(q_i, q_j) = \infty,$$
sillä avaruudessa $(\mathbb{Q}, d)$ ei ole yhtään pisteet q_i ja q_j yhdistävää polkua.

Lause 3.7. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ suoristuva polku avaruudessa (X, d). Tällöin γ on polku myös avaruudessa (X, d_ℓ).*

Todistus. Olkoot $t, t_0 \in [a, b]$ ja olkoon γ mikä tahansa pisteet $\gamma(t_0)$ ja $\gamma(t)$ yhdistävä polku. Tällöin käyrän pituuden additiivisuudesta seuraa, että
$$d_\ell(\gamma(t_0), \gamma(t)) = \inf_{\gamma'} L(\gamma') \leq L(\gamma_{|[t_0,t]}) = |L(\gamma_{|[a,t]}) - L(\gamma_{|[a,t_0]})|,$$
missä infimum otetaan yli pisteet $\gamma(t)$ ja $\gamma(t_0)$ yhdistävien polkujen.
Koska kuvaus $t \mapsto L_t$ on Lauseen 2.17 nojalla jatkuva, niin
$$|L(\gamma_{|[a,t]}) - L(\gamma_{|[a,t_0]})| \to 0, \text{ kun } t \to t_0,$$
joten
$$d_\ell(\gamma(t_0), \gamma(t)) \to 0, \text{ kun } t \to t_0.$$
Tämä osoittaa, että kuvaus $\gamma : [a, b] \to (X, d_\ell)$ on jatkuva, ja siten polku avaruudessa (X, d_ℓ). □

Lause 3.8. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ polku avaruudessa (X, d_ℓ). Tällöin γ on polku myös avaruudessa (X, d) ja $L_d(\gamma) = L_{d_\ell}(\gamma)$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että γ on polku avaruudessa (X, d).
Olkoot $t_i, t_j \in [a, b]$. Lauseesta 3.5 saadaan
$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t_j)),$$
joten γ on jatkuva myös avaruudessa (X, d). Tämä todistaa ensimmäisen väitteen.
Todistetaan sitten, että $L_d(\gamma) = L_{d_\ell}(\gamma)$.
Olkoon $\sigma = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ välin [a,b] jako. Lauseiden 3.5 ja 3.3 nojalla kaikilla $i = 0, \ldots, n$ on $d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$, joten
$$V_\sigma^d(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = V_\sigma^{d_\ell}(\gamma).$$
Siten
$$L_d(\gamma) = \sup_{\sigma'} V_{\sigma'}^d(\gamma) \leq \sup_{\sigma''} V_{\sigma''}^{d_\ell}(\gamma) = L_{d_\ell}(\gamma).$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} V_\sigma^{d_\ell}(\gamma) &= \sum_{i=0}^{n-1} d_\ell(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{\gamma_i} L_d(\gamma_i) \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} L_d(\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}) = L_d(\gamma), \end{aligned}$$

missä infimum otetaan yli pisteet $\gamma(t_i)$ ja $\gamma(t_{i+1})$ yhdistävien polkujen γ_i, joten

$$L_{d_\ell}(\gamma) = \sup_{\sigma'} V_{\sigma'}^{d_\ell}(\gamma) \le L_d(\gamma).$$

On siis oltava $L_d(\gamma) = L_{d_\ell}(\gamma)$. □

LAUSE 3.9. *Olkoon (X, d) suoristuvasti yhtenäinen metrinen avaruus. Tällöin (X, d_ℓ) on pituusavaruus ja $(d_\ell)_\ell = d_\ell$.*

TODISTUS. Olkoot $x, y \in X$ ja olkoon γ pisteitä x ja y yhdistävä polku avaruudessa (X, d). Todistuksen yleisyys ei kärsi, jos tarkastellaan vain suoristuvia polkuja; olkoon γ siis suoristuva polku. Lauseen 3.7 nojalla γ on polku avaruudessa (X, d_ℓ), jolloin Lauseesta 3.8 saadaan, että $L_{d_\ell}(\gamma) = L_d(\gamma)$. Siten

$$d_\ell(x, y) = \inf_\gamma L_d(\gamma) = \inf_\gamma L_{d_\ell}(\gamma),$$

mikä pituusavaruuden määritelmän nojalla tarkoittaa, että (X, d_ℓ) on pituusavaruus. Lisäksi, koska pituusavaruus on aina suoristuvasti yhtenäinen, niin Huomautuksesta 3.4 seuraa, että $(d_\ell)_\ell = d_\ell$. □

3.2. Geodeesit

Seuraavaksi käsitellään *geodeesisia avaruuksia* (Määritelmä 3.11) ja niihin liittyviä ominaisuuksia. Osoittautuu, että geodeesinen avaruus on aina pituusavaruus (Lause 3.12), ja siten mielenkiintoinen erityistapaus pituusavaruuksista. Näitä kahta avaruutta vertaillaan esimerkkien avulla.

MÄÄRITELMÄ 3.10. *Geodeesinen polku*, lyhyemmin *geodeesi*, on etäisyydet säilyttävä polku $\gamma : [a, b] \to X$, toisin sanoen, γ on geodeesi, jos

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$$

kaikilla $t_1, t_2 \in [a, b]$.

Erityisesti, jos $\gamma : [a, b] \to X$ on pisteet x ja y yhdistävä geodeesi, niin

$$d(x, y) = d(\gamma(a), \gamma(b)) = |a - b| = b - a.$$

Geodeesinen säde on etäisyydet säilyttävä kuvaus $\gamma : [0, \infty[\to X$, *geodeesinen viiva* puolestaan etäisyydet säilyttävä kuvaus $\gamma : \mathbb{R} \to X$.
Geodeesinen jana $[x, y]$ metrisessä avaruudessa X on geodeesin kuva $\gamma([a, b])$, *suora viiva* on geodeesisen viivan kuva.

MÄÄRITELMÄ 3.11. Metrinen avaruus X on *geodeesinen avaruus*, jos kaikilla $x, y \in X$ löytyy niitä yhdistävä geodeesi.

Lause 3.12. *Geodeesinen avaruus on pituusavaruus.*

Todistus. Olkoon X geodeesinen avaruus ja olkoot $x, y \in X$. Määritelmän 3.11 nojalla löytyy pisteet x ja y yhdistävä geodeesi $\gamma_0 : [a, b] \to X$. Geodeesin määritelmästä puolestaan saadaan

$$d(x, y) = d(\gamma_0(a), \gamma_0(b)) = |a - b| = b - a.$$

Olkoot sitten $u, v \in [a, b], a \leq u < v \leq b$. Koska γ_0 on geodeesi, niin kaikilla välin $[u, v]$ jaoilla $\sigma = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ pätee

$$V_\sigma(\gamma_{0|[u,v]}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma_0(t_i), \gamma_0(t_{i+1})) = \sum_{i=0}^{n-1} |t_i - t_{i+1}| = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = v - u.$$

Tällöin

$$L(\gamma_{0|[u,v]}) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma_{0|[u,v]}) = v - u,$$

joten γ_0 on parametrisoitu käyrän pituudella.
Kun valitaan $u = a$ ja $v = b$, saadaan

$$L(\gamma_0) = b - a.$$

Koska tämä pätee millä tahansa pisteet x ja y yhdistävällä geodeesilla γ, niin edellisestä yhtälöstä ja geodeesin määritelmästä saadaan

$$d(x, y) = b - a = L(\gamma_0) \geq \inf_\gamma L(\gamma).$$

Toisaalta aina on

$$d(x, y) \leq \inf_\gamma L(\gamma),$$

joten $d(x, y) = \inf_\gamma L(\gamma)$, mikä osoittaa, että X on pituusavaruus. □

Huomautus 3.13. Lause 3.12 ei päde toisin päin: Pituusavaruus ei ole aina geodeesinen avaruus. Tämän osoittaa Esimerkin 3.15 (c)-kohta.

Metrisen avaruuden todistaminen geodeesiseksi avaruudeksi pelkän määritelmän avulla voi joskus olla hankalaa. Todistaminen on kuitenkin huomattavasti helpompaa seuraavaksi todistettavan Lauseen 3.14 avulla.

Lause 3.14. *Olkoon $\gamma : [a, b] \to X$ käyrän pituudella parametrisoitu polku. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*
(i) γ on geodeesi;
(ii) kaikilla $u, v \in [a, b], u \leq v$, pätee

$$d(\gamma(a), \gamma(v)) = d(\gamma(a), \gamma(u)) + d(\gamma(u), \gamma(v));$$

(iii) $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$.

Todistus. Tehdään todistus kolmessa osassa.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Koska γ on geodeesi, niin kaikilla $u, v \in [a, b], u \leq v$, on

  $$d(\gamma(a), \gamma(v)) = v - a = v - u + u - a = d(\gamma(u), \gamma(v)) + d(\gamma(a), \gamma(u)).$$

- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Olkoon $\sigma = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ välin $[a,b]$ jako. Soveltamalla ehtoa (ii) $(n-2)$ kertaa, saadaan

$$\begin{aligned} V_\sigma(\gamma) &= \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\ &= d(\gamma(a), \gamma(t_1)) + d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + \ldots + d(\gamma(t_{n-1}), \gamma(b)) \\ &= d(\gamma(a), \gamma(t_2)) + d(\gamma(t_2), \gamma(t_3)) + \ldots + d(\gamma(t_{n-1}), \gamma(b)) \\ &= \ldots = d(\gamma(a), \gamma(t_{n-1})) + d(\gamma(t_{n-1}), \gamma(b)) \\ &= d(\gamma(a), \gamma(b)), \end{aligned}$$

  joten

$$L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

- $(iii) \Rightarrow (i)$: Olkoot $u, v \in [a,b], u \leq v$. Tällöin ehdon (iii), kolmioepäyhtälön ja käyrän pituuden additiivisuuden nojalla on

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= d(\gamma(a), \gamma(b)) \\ &\leq d(\gamma(a), \gamma(u)) + d(\gamma(u), \gamma(v)) + d(\gamma(v), \gamma(b)) \\ &\leq d(\gamma(a), \gamma(u)) + L(\gamma_{|[u,v]}) + d(\gamma(v), \gamma(b)) \\ &\leq L(\gamma_{|[a,u]}) + L(\gamma_{|[u,v]}) + L(\gamma_{|[v,b]}) \\ &= L(\gamma), \end{aligned}$$

  joten epäyhtälöiden on oltava yhtälöitä. Tästä puolestaan seuraa, että

$$L(\gamma_{|[u,v]}) = d(\gamma(u), \gamma(v)).$$

  Koska γ on oletuksen nojalla käyrän pituudella parametrisoitu, niin $L(\gamma_{|[u,v]})) = v - u$. Siten

$$d(\gamma(u), \gamma(v)) = L(\gamma_{|[u,v]}) = v - u,$$

  mikä osoittaa, että γ on geodeesi.

□

Esimerkki 3.15.

(a) Euklidiset avaruudet $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), n \geq 1$, ovat geodeesisia avaruuksia ja Lauseen 3.12 nojalla siis myös pituusavaruuksia:
Olkoot $x, y \in \mathbb{E}^n$ ja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}^n$ janapolku, eli $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ kaikilla $t \in [0,1]$. Tällöin γ yhdistää pisteet x ja y. Lisäksi Esimerkin 2.23 (a)-kohdasta saadaan

$$d(x,y) = \|x - y\| = L(\gamma).$$

Kun tehdään parametrin vaihto johonkin käyrän pituudella parametrisoituun polkuun, niin Lause 3.14 todistaa väitteen.

(b) Normiavaruudet ovat geodeesisia avaruuksia: Geodeesiksi käy selvästi janapolku, kuten euklidisissa avaruuksissa.

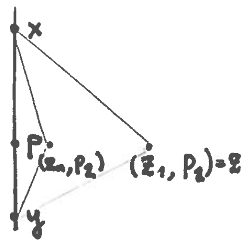
(c) Euklidinen avaruus $\mathbb{E}^n, n \geq 2$, josta on poistettu äärellinen määrä pisteitä, on

pituusavaruus, mutta ei geodeesinen avaruus:
Olkoon $\mathbb{E}^n \backslash \{p\}$ n-ulotteinen euklidinen avaruus, josta on poistettu piste $p = (p_1, p_2)$ ja olkoot $x, y \in \mathbb{E}^n \backslash \{p\}, x \neq y$. Tarkastellaan tilannetta, jossa piste p on pisteitä x ja y yhdistävällä janalla; $p \in [x, y]$. Koska $[x, y] \notin \mathbb{E}^n \backslash \{p\}$, ja koska janapolku on ainut geodeesi avaruudessa $\mathbb{E}^n$, niin avaruudesta $\mathbb{E}^n \backslash \{p\}$ ei löydy yhtään geodeesia, joka yhdistäisi pisteet x ja y.
Pituusavaruuden määritelmän ehto sen sijaan täyttyy:
Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbb{E}^n \backslash \{p\}$ pisteet x ja y yhdistävä polku. Valitaan avaruudesta $\mathbb{E}^n \backslash \{p\}$ piste $z = (z_1, p_2), z_1 \neq p_1$. Tällöin

$$d(x, z) + d(z, y) = \|x - z\| + \|z - y\| \to \|x - y\|, \text{ kun } z_1 \to p_1.$$

Jos nyt valitaan γ siten, että se on yhdiste janoista $[x, z]$ ja $[z, y]$, niin saadaan

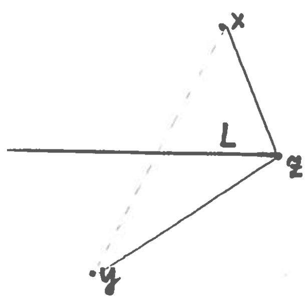
$$d(x, y) = \|x - y\| = \inf_{\gamma} L(\gamma).$$



(d) Euklidinen avaruus $\mathbb{E}^n, n \geq 1$, josta on poistettu avoin jana L, ei puolestaan ole edes pituusavaruus:
Olkoot $x, y \in \mathbb{E}^n \backslash L$ siten, että jana L sijaitsee pisteiden x ja y välissä. Koska janapolku (tai yhdistetty janapolku) on lyhyin kahta pistettä yhdistävä polku euklidisessa avaruudessa, niin lyhyin pisteitä x ja y yhdistävä polku avaruudessa $\mathbb{E}^n \backslash L$ on yhdistetty janapolku γ, joka kulkee janan L jomman kumman päätepisteen kautta. Olkoon tämä piste $z, z \in \mathbb{E}^n \backslash L$. Nyt

$$d(x, y) = \|x - y\| < \|x - z\| + \|z - y\| = L(\gamma),$$

joten $\mathbb{E}^n \backslash L$ ei ole pituusavaruus.

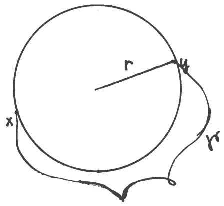


(e) Euklidinen avaruus $\mathbb{E}^n, n \geq 2$, josta on poistettu avoin r-säteinen pallo, ei myöskään ole pituusavaruus eikä geodeesinen avaruus:
Olkoon $B \subset \mathbb{E}^n$ avoin r-säteinen pallo, $S = \partial B$ ja $x, y \in S \subset \mathbb{E}^n \backslash B$ siten, että pisteet x ja y sijaitsevat vastakkain. Olkoon lisäksi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{E}^n \backslash B$ pisteet x ja y yhdistävä

polku. Selvästi lyhyin tällainen polku kulkee pallon reunaa S pitkin, jolloin sen pituus on alhaalta rajoitettu luvulla πr, ja siten kaikilla poluilla γ on $L(\gamma) \geq \pi r$. Kuitenkin on $d(x,y) = \|x-y\| = 2r$, joten

$$d(x,y) = 2r \neq \pi r = \inf_{\gamma} L(\gamma).$$

Siis $\mathbb{E}^n \backslash B$ ei ole pituusavaruus.



(f) Tarkastellaan avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$ yksikköpallon kuorta S^n. Olkoot $x, y \in S^n$ ja olkoon α pisteiden x ja y välinen kulma. Jos määritellään metriikka d asettamalla $d(x,y) = \alpha$, niin (S^n, d) on geodeesinen avaruus:
Olkoon $\gamma : [a,b] \to S^n$ pisteitä x ja y yhdistävä polku. Lyhyin tällainen polku kulkee kulmaa α vastaavaa kaarta pitkin, josta tiedetään, että sen pituus on α. Kun valitaan tämä polku, saadaan

$$L(\gamma) = \alpha = d(x,y),$$

joten Lauseen 3.14 nojalla (S^n, d) on sekä geodeesinen avaruus että pituusavaruus. Sen sijaan, jos metriikaksi d valitaan avaruudesta $\mathbb{R}^{n+1}$ indusoitu euklidinen metriikka, niin pallon kuori S^n ei ole geodeesinen avaruus, koska

$$L(\gamma) \geq \alpha > 2\sin\frac{\alpha}{2} = \|x-y\| = d(x,y).$$

3.3. Yksikäsitteiset geodeesit

MÄÄRITELMÄ 3.16. Metrinen avaruus X on *yksikäsitteisesti geodeesinen*, jos kaikilla $x, y \in X$ löytyy täsmälleen yksi pisteet x ja y yhdistävä geodeesi.

MÄÄRITELMÄ 3.17. Metrisen avaruuden X osajoukko A on *geodeesisesti konveksi*, jos kaikilla $x, y \in A$ löytyy sellainen pisteet x ja y yhdistävä geodeesi, että geodeesinen jana $[x,y]$ sisältyy joukkoon A.

Kuten Esimerkissä 3.15 todettiin, sekä euklidiset avaruudet että normiavaruudet ovat geodeesisia avaruuksia. Selvästi euklidiset avaruudet ovat yksikäsitteisesti geodeesisia, sillä janapolku on ainut geodeesi avaruudessa $\mathbb{E}^n$. Sen sijaan normiavaruudet eivät välttämättä aina ole yksikäsitteisesti geodeesisia. Lause 3.19 kuitenkin osoittaa, että tietyin ehdoin myös normiavaruus on yksikäsitteisesti geodeesinen. Todistetaan ensin kuitenkin todistuksessa hyödynnettevä lemma.

LEMMA 3.18. *Normiavaruus V on yksikäsitteisesti geodeesinen, jos ja vain jos kaikilla $v, v', v'' \in V$ ehdosta $d(v,v') + d(v',v'') = d(v,v'')$ seuraa, että on olemassa $t \in [0,1]$ siten, että $v' = (1-t)v + tv''$.*

TODISTUS. Oletetaan, että kaikilla $v, v', v'' \in V$ ehdosta
$d(v,v') + d(v',v'') = d(v,v'')$ seuraa, että on olemassa $t \in [0,1]$ siten, että
$v' = (1-t)v + tv''$. Olkoot $v, v'' \in V$. Nyt jana $\{(1-t)v + tv'', t \in [0,1]\}$ on pisteet v ja v''

yhdistävä geodeesinen jana. Lauseesta 3.14 saadaan, että $d(v,v')+d(v',v'') = d(v,v'')$, jolloin oletuksesta seuraa, että piste v' on janalla $\{(1-t)v+tv'', t \in [0,1]\}$. Siten tämä jana on ainoa pisteet v ja v'' yhdistävä geodeesinen jana avaruudessa V.
Toinen suunta on selvä. □

LAUSE 3.19. *Normiavaruus V on yksikäsitteisesti geodeesinen jos ja vain jos yksikköpallo $B(0,1) \subset V$ on aidosti konveksi, toisin sanoen, jos ehdosta $\|u_1\| = \|u_2\| = 1, u_1 \neq u_2$, seuraa, että $\|(1-t)u_1 + tu_2\| < 1$ kaikilla $t \in]0,1[$.*

TODISTUS. Lemman 3.18 nojalla V on yksikäsitteisesti geodeesinen, jos ja vain jos kaikilla $v, v', v'' \in V$ ehdosta $d(v,v') + d(v',v'') = d(v,v'')$ seuraa, että $v' \in [v, v'']$, eli $v' = (1-t)v + tv''$ jollain $t \in [0,1]$.
Merkitään $v_1 = v' - v$ ja $v_2 = v'' - v'$, jolloin

$$\begin{aligned} d(v,v') + d(v',v'') &= d(v,v'') \\ \Leftrightarrow \|v'-v\| + \|v''-v'\| &= \|v''-v\| \\ \Leftrightarrow \|v_1\| + \|v_2\| &= \|v_1+v_2\|. \end{aligned}$$

Nyt V on yksikäsitteisesti geodeesinen, jos ja vain jos

$$\|v_1+v_2\| < \|v_1\| + \|v_2\|$$

aina kun v_1 ja v_2 ovat lineaarisesti riippumattomia vektoreita.
Merkitään sitten $v_i = a_i u_i$, missä $a_i = \|v_i\|$ ja $i = 1,2$. Olkoon lisäksi $t = a_1/(a_1+a_2)$, jolloin $1-t = a_2/(a_1+a_2)$. Nyt

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 = a_1u_1 + a_2u_2 &= \frac{(a_1+a_2)a_1}{a_1+a_2}u_1 + \frac{(a_1+a_2)a_2}{a_1+a_2}u_2 \\ &= (a_1+a_2)\Big(\frac{a_1}{a_1+a_2}u_1 + \frac{a_2}{a_1+a_2}u_2\Big) \\ &= (a_1+a_2)(tu_1 + (1-t)u_2), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \|v_1+v_2\| &= \|(a_1+a_2)(tu_1+(1-t)u_2)\| \\ &= \|(\|v_1\|+\|v_2\|)(tu_1+(1-t)u_2)\| \\ &= (\|v_1\|+\|v_2\|)\|tu_1+(1-t)u_2\|. \end{aligned}$$

Siten $\|v_1+v_2\| < \|v_1\| + \|v_2\|$ jos ja vain jos $\|tu_1 + (1-t)u_2\| < 1$. Koska $\|u_i\| = \|(v_i/\|v_i\|)\| = 1$, niin tämä todistaa väitteen. □

Esimerkissä 1.7 tarkasteltiin, kuinka metriikan valinta vaikuttaa ympyrän muotoon. Tarkastellaan seuraavaksi Esimerkin 1.7 (b)- ja (c)-kohtien normeja ja todistetaan edellisen lauseen avulla, että normiavaruudet $(\mathbb{R}^n, \ell^1)$ ja $(\mathbb{R}^n, \ell^\infty)$ eivät ole yksikäsitteisesti geodeesisia, vaikka normiavaruus $(\mathbb{R}^n, \ell^p), 1 < p < \infty$, sitä onkin (todistus sivuutetaan, katso esimerkiksi lähde [3] Prop. 7.3.2.).

Esimerkki 3.20.

(a) Olkoot $u_1 = (1,0)$ ja $u_2 = (0,1)$ vektoreita avaruudessa $(\mathbb{R}^2, d_1)$. Tällöin $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$, mutta

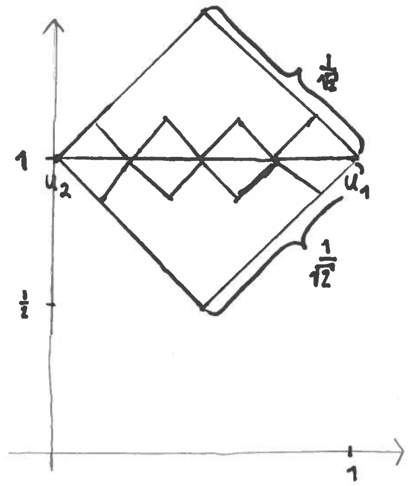
$$\begin{aligned}\|(1-t)u_1 + tu_2\| &= \|(1-t)(1,0) + t(0,1)\| = \|(1-t,0) + (0,t)\| \\ &= \|(1-t,t)\| = |1-t| + |t| \\ &= 1 - t + t = 1\end{aligned}$$

kaikilla $t \in]0,1[$, joten yksikköpallo $B(0,1)$ ei ole aidosti konveksi. Siis normiavaruus $(\mathbb{R}^2, \ell^1)$ ei ole yksikäsitteisesti geodeesinen Lauseen 3.19 nojalla. Pisteet u_1 ja u_2 yhdistäviä lyhimpiä geodeeseja, siis geodeeseja, joiden pituus on 1, löytyy itseasiassa ääretön määrä: Minkä tahansa porraskuvaajan, eli kuvaajan, jonka graafi muodostaa "portaat", pituus on 1.

(b) Olkoot $u_1 = (1,1), u_2 = (0,1) \in (\mathbb{R}^2, d_\infty)$. Nyt $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$, mutta

$$\begin{aligned}\|(1-t)u_1 + tu_2\| &= \|(1-t)(1,1) + t(0,1)\| = \|(1-t,1-t) + (0,t)\| \\ &= \|(1-t,1)\| = \max\{|(1-t)|, |1|\} = 1\end{aligned}$$

kaikilla $t \in]0,1[$. Näin ollen myöskään normiavaruuden $(\mathbb{R}^2, \ell^\infty)$ yksikköpallo ei ole konveksi, eikä $(\mathbb{R}^2, \ell^\infty)$ siten yksikäsitteisesti geodeesinen. Pisteet u_1 ja u_2 yhditäviä lyhimpiä geodeeseja löytyy ääretön määrä, kuten kuva osoittaa.



LUKU 4

Polkujen avaruus

Luku 4 on tämän tutkielman viimeinen luku, ja siinä todistetaan koko tutkielman päätulos, eli lyhimmän käyrän olemassaolo (Lause 4.15). Ennen sitä täytyy kuitenkin määritellä useita polkujen rajankäyntiin liittyviä käsitteitä sekä todistaa muutama tärkeä lause. Lisäksi joitakin lauseita edeltää lemma, jonka avulla lause todistetaan. Aivan lopuksi käsitellään vielä lyhyesti *metristä derivaattaa* (Luku 4.1.). Aloitetaan määrittelemällä polkujen avaruus, ja kuinka sinne saadaan metriikka:

Merkitään

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}([a,b],X) = \{\gamma \mid \gamma : [a,b] \to X \text{ on polku}\},$$

ja kutsutaan sitä polkujen avaruudeksi.
Määritellään lisäksi polkujen avaruuteen metriikka d asettamalla kaikilla $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}$

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [a,b]} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Tätä metriikkaa kutsutaan tasaisen suppenemisen metriikaksi, ja se todella on metriikka. Todistus ei eroa oleellisesti Esimerkin 1.5 (c)-kohdan todistuksesta.

Määritelmä 4.1. Metrisen avaruuden (X,d) jono (x_n) on *Cauchy-jono* (tai lyhyesti *Cauchy*), jos kaikilla $\epsilon > 0$ löytyy sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_k) < \epsilon$, kun $n \geq n_0$ ja $k \geq n_0$.

Määritelmä 4.2. Metrinen avaruus (X,d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Lause 4.3. *Jos metrinen avaruus (X,d) on täydellinen, niin myös polkujen avaruus $\mathcal{C} = \mathcal{C}([a,b],X)$ varustettuna metriikalla d_S on täydellinen.*

Todistus. Olkoon (γ_n) Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{C}$. Tällöin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n, k \geq n_0$ pätee

$$d_S(\gamma_n, \gamma_k) = \sup_{t \in [a,b]} d(\gamma_n(t), \gamma_k(t)) < \epsilon.$$

Nyt kaikilla $t \in [a,b]$ ja kaikilla $n, k \geq n_0$ on

$$d(\gamma_n(t), \gamma_k(t)) \leq \sup d(\gamma_n(t), \gamma_k(t)) < \epsilon,$$

joten $(\gamma_n(t))_n \subset X$ on Cauchy-jono kaikilla $t \in [a,b]$. Koska avaruus X on täydellinen, niin Määritelmän 4.2 nojalla jono $(\gamma_n(t))_n$ suppenee, eli kaikilla $t \in [a,b]$ löytyy sellainen piste $x_t \in X$, jolla $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = x_t$. Määritellään sitten kuvaus γ siten, että $\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t)$. Tällöin

$$d(\gamma_n, \gamma) = \sup_{t \in [a,b]} d(\gamma_n(t), \gamma(t)) < \epsilon,$$

joten (γ_n) suppenee tasaisesti kohti polkua γ. Kurssilla Analyysi 3 on todistettu, että tasaisesti suppenevan funktiojonon $(f_n)_n$ rajafunktio on jatkuva, jos f_n on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten, koska γ_n on polkuna jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin myös γ on jatkuva. Siis $\gamma \in \mathcal{C}$ eli polkujen avaruus $\mathcal{C}$ on täydellinen. $\square$

Edellisessä luvussa todistettiin (Lause 2.17), että jos γ on suoristuva, niin kuvaus $t \mapsto L(\gamma_t)$ on jatkuva. Kun lähtöavaruutena on reaaliakselin suljetun välin sijasta polkujen avaruus, niin tilanne muuttuu: Kuvaus $L : \mathcal{C} \to [0, \infty[\cup \{\infty\}, \gamma \mapsto L(\gamma)$, ei välttämättä ole jatkuva, kuten seuraavat esimerkit osoittavat:

Esimerkki 4.4.

(a) Määritellään kaikilla $n \geq 1$ polku $\gamma_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{n} \cos(n^2 t).$$

Kun t käy läpi välin $[0, \pi]$, niin $\cos(n^2 t)$ vaihtelee n^2 kertaa arvojen 1 ja -1 välillä, jolloin

$$L(\cos(n^2 t)) \geq n^2 |-1-1| = 2n^2.$$

Siten

$$L(\gamma_n) \geq \frac{1}{n} \cdot 2n^2 = 2n,$$

joten $L(\gamma_n) \to \infty$, kun $n \to \infty$.
Olkoon sitten $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \gamma(t) = 0$ kaikilla $t \in [0, \pi]$, polku. Koska

$$\begin{aligned} d_S(\gamma_n, \gamma) &= \sup_{t \in [0,\pi]} d(\gamma_n(t), \gamma(t)) = \sup_{t \in [0,\pi]} d(\gamma_n(t), 0) \\ &= \sup_{t \in [0,\pi]} \left|\frac{1}{n} \cos(n^2 t)\right| = \sup_{t \in [0,\pi]} \frac{1}{n} |\cos(n^2 t)| \\ &\leq \frac{1}{n} \to 0, \end{aligned}$$

kun $n \to \infty$, niin jono $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ suppenee tasaisesti kohti kuvausta γ. Kuitenkin Lauseen 2.8 nojalla $L(\gamma) = 0$, joten

$$L(\gamma_n) \not\to L(\gamma),$$

mikä osoittaa, että pituusfunktio L ei ole jatkuva.

(b) Määritellään tasoon $\mathbb{R}^2$ pistejono asettamalla kaikilla $n \geq 0$

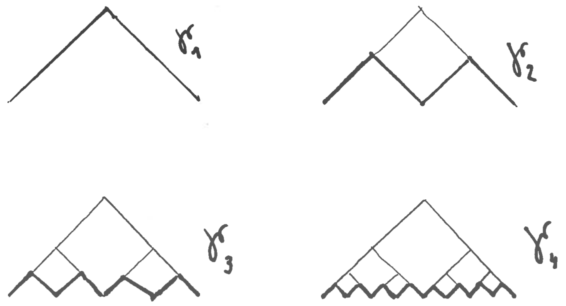
$$\left(\frac{p}{2^n}, \frac{\epsilon(p)}{2^n}\right) (0 \leq p \leq 2^n),$$

missä $\epsilon(p) = 0$, kun p on parillinen ja $\epsilon(p) = 1$, kun p on pariton.
Olkoon $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$, sellainen paloittain affiini kuvaus, jonka graafi on yhdiste janoista, joiden päätepisteet ovat edellä määritellyn pistejonon perättäisiä pisteitä.
Määritellään sitten kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $t \in [0,1]$ kuvaus $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$\gamma_n(t) = (t, F_n(t)).$$

Kuva 4.1 havainnollistaa, miltä polkujen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ja γ_4 kuvat näyttävät.
Nyt polkujono (γ_n) suppenee kohti polkua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, 0)$, jonka pituus on 1. Kuitenkin kaikilla $n \geq 0$ on $L(\gamma_n) = \sqrt{2}$, joten

$$L(\gamma_n) \not\to L(\gamma).$$



KUVA 4.1

MÄÄRITELMÄ 4.5. Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $x_0 \in X$. Kuvaus $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on *alhaalta puolijatkuva pisteessä* x_0, jos kaikilla $m \in \mathbb{R}$, $m < f(x_0)$, löytyy sellainen pisteen x_0 ympäristö W, että kaikilla $x \in W$ on $m \leq f(x)$. Kuvaus f on *alhaalta puolijatkuva*, jos se on alhaalta puolijatkuva kaikissa pisteissä $x \in X$.

HUOMAUTUS 4.6. On selvää, että jos kuvaus f on jatkuva, niin se on myös alhaalta puolijatkuva.

LEMMA 4.7. *Olkoon $\mathcal{I}$ jokin indeksijoukko ja olkoon $\{f_i : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\}_{i \in \mathcal{I}}$ joukko kuvauksia. Olkoon lisäksi kuvaus $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, f(x) = \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x)$, kaikilla $x \in X$. Jos f_i on alhaalta puolijatkuva pisteessä $x_0 \in X$ kaikilla $i \in \mathcal{I}$, niin myös f on alhaalta puolijatkuva pisteessä x_0.*

TODISTUS. Koska $f(x_0) = \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x_0)$, niin kaikilla $m < f(x_0)$ on olemassa $i_0 \in \mathcal{I}$ siten, että $m < f_{i_0}(x_0)$. Koska f_{i_0} on alhaalta puolijatkuva pisteessä x_0, niin löydetään sellainen pisteen x_0 ympäristö W, että kaikilla $x \in W$ on $m \leq f_{i_0}(x)$. Siten kaikilla $x \in W$ pätee

$$m \leq f_{i_0}(x) \leq \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) = f(x),$$

eli $m \leq f(x)$. Siis myös f on alhaalta puolijatkuva pisteessä x_0. □

LAUSE 4.8. *Polun pituusfunktio $L : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma)$, missä $V_\sigma(\gamma)$ on Määritelmän 2.5 antama kokonaisheilahtelu, on alhaalta puolijatkuva.*

TODISTUS. Olkoon $\sigma = (t_i)_{i=0,\ldots,n}$ välin $[a, b]$ jako ja olkoon $t_i \in [a, b]$. Määritellään kuvaukset $\Gamma_i : \mathcal{C} \to X$ ja $V_\sigma : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$\Gamma_i(\gamma) = \gamma(t_i) \text{ ja } V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Todistetaan ensin, että kuvaus V_σ on alhaalta puolijatkuva.
Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin löytyy $\delta > 0$ siten, että kaikilla $\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}$, joilla $d(\gamma, \gamma')_S < \delta$, on

$$\begin{aligned} d(\Gamma_i(\gamma), \Gamma_i(\gamma')) = d(\gamma(t_i), \gamma'(t_i)) &\leq \sup_{t \in [a,b]} d(\gamma(t), \gamma'(t)) \\ &= d(\gamma, \gamma')_S < \epsilon, \end{aligned}$$

kun valitaan $\delta = \epsilon$. Siis Γ_i on jatkuva kaikilla $i = 0, \ldots, n$. Näin ollen myös kuvaus V_σ on jatkuvien kuvausten äärellisenä summana jatkuva, ja siten myös alhaalta puolijatkuva.
Koska L on alhaalta puolijatkuvien kuvausten pienin yläraja, niin Lemman 4.7 nojalla myös se on alhaalta puolijatkuva. □

LEMMA 4.9. *Olkoon X metrinen avaruus ja olkoon $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sellainen kuvaus, joka on alhaalta puolijatkuva jossakin pisteessä $x \in X$. Olkoon lisäksi $(x_n)_{n \geq 0}$ pistejono, joka suppenee kohti pistettä x. Tällöin*

$$f(x) \leq \lim_{n \to \infty} \inf f(x_n).$$

TODISTUS. Olkoon $x \in X$ piste, jossa f on puolijatkuva. Tällöin kaikilla $m < f(x)$ löytyy sellainen pisteen x ympäristö $W \subset X$, että kaikilla $y \in W$ on $m \leq f(y)$.
Koska $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $x_n \in W$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joilla $n \geq n_0$. Siten $m \leq f(x_n)$ kaikilla $n \geq n_0$, jolloin

$$f(x) \leq \lim_{n \to \infty} \inf f(x_n).$$

□

HUOMAUTUS 4.10. Edellisessä lemmassa vaadittiin jonon (x_n) suppenemista, mutta Lauseessa 4.11 jonolta (γ_n) vaaditaan tasaista suppenemista. Ero johtuu funktioiden maaliavaruuksien erilaisista metriikoista – polkuavaruudessa $\mathcal{C}$ käytettävä metriikka johtaa tasaiseen suppenemiseen.

LAUSE 4.11. *Olkoon $(\gamma_n)_{n \geq 0}$, $\gamma_n : [a, b] \to X$, sellainen polkujono, joka suppenee tasaisesti kohti polkua $\gamma : [a, b] \to X$. Tällöin*

$$L(\gamma) \leq \lim_{n \to \infty} \inf L(\gamma_n).$$

TODISTUS. Lauseen 4.8 nojalla polun pituusfunktio $L : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma)$, on alhaalta puolijatkuva. Lisäksi, koska $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ suppenee tasaisesti kohti polkua γ (eli suppenee metriikassa d_S), niin saadaan Lemman 4.9 tilanne. Siten

$$L(\gamma) \leq \lim_{n \to \infty} \inf L(\gamma_n).$$

□

Jotta pystytään todistamaan tämän tutkielman päätulos (Lyhimmän käyrän olemassaolo, Lause 4.15), tarvitaan vielä yksi aputulos (Lemma 4.14), jonka todistamiseen puolestaan tarvitaan Ascolin nimeä kantavaa lausetta. Ascolin lauseen todistaminen sivuutetaan tässä työssä, mutta todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3] (Thm. 1.4.9.). Seuraavaksi kuitenkin esitellään Ascolin tulos sekä siihen liittyvä määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 4.12. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, ja olkoot $f_n : [a, b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, kuvauksia. Kuvausjono $(f_n)_{n\geq 0}$ on *tasaisesti yhtäjatkuva*, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\eta > 0$ siten, että kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $x, y \in [a, b]$, joilla $|x - y| < \eta$, pätee

$$d(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon.$$

LAUSE 4.13. (Ascoli) *Olkoon X sellainen metrinen avaruus, jossa suljetut pallot ovat kompakteja. Olkoot lisäksi $f_n : [a, b] \to X$, $n \in \mathbb{N}$, kuvauksia siten, että $(f_n)_{n\geq 0}$ on sellainen tasaisesti yhtäjatkuva kuvausjono, joka on rajoitettu kaikilla $y \in [a, b]$. Tällöin löytyy sellainen jonon (f_n) osajono, joka suppenee tasaisesti kohti tasaisesti jatkuvaa kuvausta $f : [a, b] \to X$.*

LEMMA 4.14. *Olkoon X sellainen metrinen avaruus, jossa suljetut pallot ovat kompakteja, ja olkoon $M \geq 0$. Olkoon lisäksi $\gamma_n : [a, b] \to X$ kaikilla $n \geq 0$ sellainen suhteellisesti käyrän pituudella parametrisoitu polku, jolla $L(\gamma_n) \leq M$. Oletetaan vielä, että avaruuden X osajoukko $\{\gamma_n(a), n \geq 0\}$ on rajoitettu. Tällöin löytyy jonon $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ sellainen osajono, joka suppenee tasaisesti kohti polkua γ. Lisäksi on $L(\gamma) \leq M$.*

TODISTUS. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska γ_n on Seurauksen 2.22 nojalla $\frac{M}{b-a}$-Lipschitz kaikilla $n \geq 0$, niin valitsemalla $\eta < \epsilon(b - a)/M$ saadaan kaikilla $x, y \in [a, b]$, joilla $|x - y| < \eta$,

$$d(\gamma_n(x), \gamma_n(y)) \leq \frac{M}{b-a}|x - y| < \frac{M}{b-a} \cdot \eta < \frac{M}{b-a} \cdot \frac{\epsilon(b-a)}{M} = \epsilon.$$

Näin ollen kuvausjono $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ on tasaisesti yhtäjatkuva.
Koska jono $(\gamma_n(a))_{n\geq 0}$ on rajoitettu, ja koska suljetut pallot ovat kompakteja avaruudessa X, niin voidaan olettaa, että jono $(\gamma_n(a))_{n\geq 0}$ suppenee. Oletus voidaan tehdä, sillä jos suljetut pallot ovat kompakteja, niin rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono. Siten, jos $(\gamma_n(a))_{n\geq 0}$ ei suppene, niin jonolla $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ on vähintään suppeneva osajono, jota voidaan tarkastella. Olkoon nyt x tämän suppenevan jonon rajapiste, eli $x = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(a)$. Koska $(\gamma_n(a))_n$ on suppenevana jonona rajoitettu, niin $d(x, \gamma_n(a)) \leq N$ jollain $N > 0$. Nyt Seurauksen 2.22 nojalla kaikilla $n \geq 0$ ja kaikilla $t \in [a, b]$ pätee

$$\begin{aligned} d(x, \gamma_n(t)) &\leq d(x, \gamma_n(a)) + d(\gamma_n(a), \gamma_n(t)) \leq N + \frac{L(\gamma_n)}{b-a}|t - a| \\ &\leq N + \frac{M}{b-a}|t - a| \leq N + \frac{M}{b-a}(b - a) = N + M. \end{aligned}$$

Siten jono $(\gamma_n(t))_{n\geq 0}$ on rajoitettu kaikilla $t \in [a, b]$. Nyt Ascolin lauseen nojalla on olemassa sellainen jonon $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ osajono, joka suppenee tasaisesti kohti polkua γ. Lauseesta 4.11 saadaan tällöin

$$L(\gamma) \leq \lim_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n) \leq M.$$

□

LAUSE 4.15. (Lyhimmän käyrän olemassaolo) *Olkoon X sellainen suoristuvasti yhtenäinen metrinen avaruus, jossa suljetut pallot ovat kompakteja. Tällöin kaikille $x, y \in X$ löytyy sellainen pisteet x ja y yhdistävä käyrä γ_{xy}, jolle*

$$L(\gamma_{xy}) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ yhdistää pisteet } x \text{ ja } y\}.$$

TODISTUS. Olkoot $x, y \in X$ ja olkoon $\alpha = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ yhdistää pisteet } x \text{ ja } y\}$. Olkoon lisäksi $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ sellainen polkujono, että γ_n yhdistää pisteet x ja y kaikilla $n \geq 0$, ja että $L(\gamma_n) \to \alpha$, kun $n \to \infty$.
Todistuksen yleisyys ei kärsi, jos oletetaan, että γ_n on suhteellisesti käyrän pituudella parametrisoitu, ja että lähtöjoukko on väli $[0, 1]$. Nyt Lemman 4.14 nojalla löytyy sellainen jonon $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ osajono, joka suppenee tasaisesti kohti polkua γ. Koska

$$\gamma(0) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(0) = x \text{ ja } \gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(1) = y,$$

niin myös γ yhdistää pisteet x ja y. Merkitään tätä polkua $\gamma = \gamma_{xy}$. Lauseen 4.11 nojalla saadaan nyt

$$L(\gamma_{xy}) \leq \lim_{n\to\infty} \inf L(\gamma_n) = \alpha.$$

Lisäksi luvun α määrittelystä saadaan

$$\alpha = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ yhdistää pisteet } x \text{ ja } y\} \leq L(\gamma_{xy}).$$

Siten $\alpha \leq L(\gamma_{xy}) \leq \alpha$, eli $L(\gamma_{xy}) = \alpha$. □

SEURAUS 4.16. (Hopf-Rinow) *Jos X on sellainen pituusavaruus, jossa suljetut pallot ovat kompakteja, niin X on geodeesinen avaruus.*

TODISTUS. Pituusavaruuden määritelmän nojalla kaikilla $x, y \in X$ on

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

missä infimum otetaan yli pisteitä x ja y yhdistävien käyrien. Siis X on suoristuvasti yhtenäinen. Siten Lauseen 4.15 nojalla kaikille $x, y \in X$ löytyy niitä yhdistävä käyrä γ_{xy}, jolle

$$L(\gamma_{xy}) = \inf\{L(\gamma) : \gamma \text{ yhdistää pisteet } x \text{ ja } y\}.$$

Nyt pituusavaruuden määritelmän nojalla $L(\gamma_{xy}) = d(x, y)$. Kuten Lauseen 4.15 todistuksessa, voidaan nytkin olettaa, että γ_{xy} on suhteellisesti käyrän pituudella parametrisoitu, jolloin Lauseesta 3.14 seuraa, että X on geodeesinen avaruus. □

4.1. Metrinen derivaatta

Tämän tutkielman viimeinen käsiteltävä aihe on *metrinen derivaatta*, jonka määritelmä näyttää hyvin samanlaiselta kuin tavallisen derivaatan määritelmä euklidisessa avaruudessa. Aiheeseen ei paneuduta tässä työssä kovin syvällisesti; määritelmän ja lyhyen esimerkin lisäksi esitellään vain yksi lause (Lause 4.20), jota sitäkään ei todisteta. Lause 4.20 on kuitenkin sikäli mielenkiintoinen, että se muistuttaa derivaatan integraalin ja käyrän pituuden yhtäsuuruutta avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mikä oli kandidaatin tutkielmani päätulos (Lause 6). Lisäksi Lause 4.20 todistaa, että metrinen derivaatta on lähes aina olemassa — myös pisteissä, joissa derivoitava polku ei välttämättä ole differentioituva.

MÄÄRITELMÄ 4.17. Olkoon $\gamma : [a,b] \to X$ polku ja olkoon $t \in]a,b[$. Jos raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h),\gamma(t))}{|h|}$$

on olemassa, niin se on polun γ *metrinen derivaatta pisteessä* t, ja siitä käytetään merkintää $|\dot{\gamma}|(t)$.

HUOMAUTUS 4.18. Metrinen derivaatta ei välttämättä vastaa tavallista derivaattaa, minkä seuraavat esimerkit osoittavat. Esimerkin 4.19 b)-kohta on myös osoitus siitä, että metrinen derivaatta voi olemassa, vaikka polku ei olisikaan differentioituva.

ESIMERKKI 4.19.

(a) Olkoon $(\mathbb{R}^n, d)$ metrinen avaruus, missä d on normin $\|\cdot\|$ indusoima metriikka. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sellainen polku, joka on differentioituva pisteessä $t_0 \in]a,b[$. Nyt

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t_0+h),\gamma(t_0))}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)\|}{|h|} = \left\|\frac{d\gamma}{dt}(t_0)\right\| = \|\gamma'(t_0)\|,$$

eli metrinen derivaatta pisteessä t_0 on tavallisen derivaatan normi pisteessä t_0.

(b) Olkoon (V,d) normiavaruus, missä d on normin indusoima metriikka, ja olkoon $v \in V$. Määritellään polku $\gamma : [-1,1] \to V$ asettamalla $\gamma(t) = |t|v$ kaikilla $t \in [-1,1]$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h),\gamma(t))}{|h|} &= \lim_{h\to 0} \frac{\|\gamma(t+h),\gamma(t)\|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\||t+h|v-|t|v\|}{|h|} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\|v(|t+h|-|t|)\|}{|h|} = \|v\| \lim_{h\to 0} \left\|\frac{|t+h|-|t|}{h}\right\| \\
&= \|v\| = |\dot{\gamma}|(t).
\end{aligned}$$

Metrinen derivaatta on siis olemassa kaikilla $t \in [-1,1]$, vaikka γ ei ole differentioituva pisteessä $t = 0$.

LAUSE 4.20. *Jos $\gamma : [a,b] \to X$ on Lipschitz-jatkuva polku, niin sillä on nollamittaisen joukon ulkopuolella metrinen derivaatta kaikilla $t \in [a,b]$. Lisäksi*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|(t)dt.$$

TODISTUS. Todistus sivuutetaan, sillä siinä esiintyy niin runsaasti tuloksia, joita ei varsinaisesti voida edellyttää esitiedoiksi tähän tutkielmaan. Koska omiin esitietoihini ei myöskään kuulu esimerkiksi Lebesguen mielessä määritelty mitta, niin Lauseen 4.20 muotoilu on myös hieman erilainen kuin lähteessä [5] (Thm. 4.1.6.): ”nollamittaisen joukon ulkopuolella” on alkuperäisessä lauseessa muotoa ”reaaliakselilla määritellyn Lebesguen mitan mielessä melkein kaikilla pisteillä”. Todistuksen voi lukea kokonaisuudessaan esimerkiksi lähteestä [5] (Thm. 4.1.6.), mutta esitellään nyt kuitenkin lyhyesti siinä esiintyviä tuloksia:
Todistuksessa määritellään apufunktio $\varphi_n(t) := d(\gamma(t), x_n)$, missä $\{x_n\}$ on tiheä jono käyrällä $\gamma([a,b])$. Sen jälkeen hyödynnetään rajankäyntejä sekä Lipschitz-funktioiden ominaisuuksia, kuten Rademacherin lausetta ja Lebesgue pisteitä. Lopuksi käyrän

pituuden ja derivaatan integraalin yhtäsuuruuteen päädytään Fatoun lemman avulla hieman samankaltaisesti kuin euklidisessa avaruudessa (kandidaatin tutkileman Lause 6), eli todistamalla epäyhtälö molempiin suuntiin. □

HUOMAUTUS 4.21. Jos polku on suoristuva, niin metrinen derivaatta on todella olemassa lähes aina, sillä vaatimus polun Lipschitz-jatkuvuudesta ei ole kovin rajoittava: Polun parametrisointi suhteellisesti käyrän pituudella sekä Seuraus 2.22 takaavat Lipschitz-jatkuvuuden.

HUOMAUTUS 4.22. Esimerkin 4.19 a)-kohta osoittaa Lauseen 4.20 ja kandidaatin tutkielmani Lauseen 6 yhteyden:
Jos polku $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ on differentioituva, niin

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|(t)dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt.$$

Kirjallisuutta

[1] Bridson, M. ja Haefliger, A.: *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] Bruckner, A. M., Bruckner, J. M. ja Thomson B.S.: *Real Analysis*, Second Edition.

[3] Papadopoulos, A.: *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2005.

[4] Väisälä, J.: *Topologia 1*, Limes ry, 1. painos, 1999.

[5] Ambrosio, L. ja Tilli, P.: *Topics on Analysis in Metric Spaces*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 25, Pisa, 2004.

[6] Hanna Männistö: *Käyrän pituus*, Luonnonotieteiden kandidaatin tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2010.