Eulerin summia

Kai Kaskela

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014

Tiivistelmä: Kai Kaskela, *Eulerin summia*, matematiikan pro gradu -tutkielma, 37 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2014.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella menetelmiä joilla voidaan laskea niin kutsuttuja Eulerin summia. Eulerin summia ovat Riemannin zeeta-funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ arvoja parillisissa ja positiivisissa kokonaislukupisteissä. Vaikka kyseessä on joukko äärettömiä summia, niin Eulerin summien laskemiseksi on mahdollista johtaa eksplisiittinen kaava. Tämä voidaan tehdä ainakin kahdella eri tavalla, joista tässä tekstissä tarkastellaan lähemmin ainoastaan toista.

Määritellään niin kutsutut *Bernoullin luvut* seuraavasti: Kehitetään funktio $\frac{z}{e^z-1}$ potenssisarjaksi, ja kutsutaan kyseisen potenssisarjan kertoimia Bernoullin luvuiksi B_n. Määritelmän mukaan pätee siis $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$. Manipuloimalla tätä lauseketta sopivasti voidaan löytää seuraava sarjaesitys: $z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. Funktiolle $z \cot z$ on mahdollista johtaa myös seuraavanlainen sarjaesitys: $z \cot z = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{\pi^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$. Potenssisarjat ovat samat täsmälleen silloin kun samaa astetta olevien termien kertoimet ovat samat, joten näistä kahdesta sarjaesityksestä voidaan asettaa termien z^{2m} kertoimet yhtäsuuriksi, ja pienen sieventämisen jälkeen saadaan kaava

$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = -\frac{1}{2} \frac{(-4)^m B_{2m} \pi^{2m}}{(2m)!}.$$

Kaava on oikeastaan hämmästyttävän yksinkertainen ottaen huomioon, että sillä saa laskettua äärettömän määrän äärettömiä summia. Edellä määritellyt Bernoullin luvut voidaan lukujen laskemisen helpottamiseksi määritellä myös rekursion avulla, ja ensimmäisiksi luvuiksi saadaan laskettua $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$ ja $B_4 = -1/30$. Tätä tietoa käyttämällä saadaan edellisen kaavan avulla laskettua kahdeksi ensimmäiseksi Eulerin summaksi $\zeta(2) = \pi^2/6$ ja $\zeta(4) = \pi^4/90$. Mielenkiintoinen huomio on, että mielivaltaisella n esimerkiksi osasumma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ on rationaalinen, mutta raja-arvo on silti transkendenttinen $\pi^2/6$.

Edellisen lisäksi on olemassa useita menetelmiä laskea yksittäisiä Eulerin summia. Esimerkiksi Fourier-analyysi tarjoaa kaksi työkalua: Parsevalin kaavan ja Fourier-sarjan termeittäinintegrointilauseen. Soveltamalla Parsevalin kaavaa

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \tfrac{1}{2} a_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j^2 + b_j^2),$$

missä a_j ja b_j ovat funktion f Fourier-kertoimia esimerkiksi funktioon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ saadaan laskettua $\zeta(4)$.

Fourier-sarja voidaan integroida termeittäin mielivaltaisen välin yli, toisin sanoen pätee

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \tfrac{1}{2} a_0 \, dx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))\, dx,$$

missä a_j ja b_j ovat edelleen funktion f Fourier-kertoimia. Soveltamalla tätä tulosta funktioon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ja integroimalla yli välin $[0, \pi]$ saadaan laskettua $\zeta(2)$.

Sisältö

Johdanto

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on tarkastella menetelmiä joilla voidaan laskea niin kutsuttuja Eulerin summia. Eulerin summia ovat muotoa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ olevat summat, missä eksponentti k on parillinen ja positiivinen kokonaisluku.

Analyysin kursseilla ja oppikirjoissa todistetaan koko joukko lauseita, joilla voi tutkia sarjan suppenemista. Sarjojen summien laskemiseksi ei kuitenkaan ole olemassa mitään yleispätevää menetelmää. Eulerin summien ollessa kyseessä on kuitenkin mahdollista löytää jopa eksplisiittinen kaava jolla saadaan ratkaistua kaikki summat. Tämä kaava johdetaan tässä tutkielmassa kahdella eri tavalla, joista toinen perustuu klassiseen sarjateoriaan ja toinen Fourier-analyysiin. Molemmissa tullaan tarvitsemaan lisäksi niin kutsuttuja Bernoullin lukuja. Lisäksi tutkielmassa esitellään kourallinen erilaisia menetelmiä, joilla saa laskettua yksittäisiä Eulerin summia.

Tässä vaiheessa on hyvä huomauttaa lukijalle, että tutkielman lähestymistapa on joiltain osin ei-perinteinen; yleensä matemaattinen esitystapa noudattaa kaavaa *määritelmä - lause - lause joka todistetaan edellisen lauseen avulla - ...* Tässä työssä kuitenkin välillä *tehdään jotain mielenkiintoista ja vasta sen jälkeen mietitään onko tämä perusteltua.* Esitietoina lukijalta vaaditaan lähinnä sarjateorian perusteiden ymmärrystä, ja tällaisen pohjan omaaville onkin tarjolla mielenkiintoista ja monipuolista sisältöä. Tutkielman ensimmäinen ja toinen luku sopivat kuitenkin vaikeustasonsa puolesta vaikkapa harjaantuneelle lukiolaiselle.

Kahdessa ensimmäisessä luvussa tullaan määritelmien ja pohjatulosten lisäksi tarkastelemaan kahta eri keinoa summan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ laskemiseksi. Luvuissa 3 ja 4 käsitellään yleistä menetelmää laskea Eulerin summia, ja esitellään muuta kiinnostavaa sarjateoriaa. Tutkielma pohjautuu suurimmilta osin Richard Courantin ja Fritz Johnin Introduction to Calculus and Analysis teokseen [**2**] ja Tom M. Apostolin Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus teokseen [**7**]. Lisäksi sarjateorian ja kompleksianalyysin perustulosten lähteinä on käytetty Tero Kilpeläisen Analyysi 3- ja Kompleksianalyysi-luentomonisteita [**4**], [**5**].

LUKU 1

Johdattelua ja määritelmiä

1.1. Määritelmiä

Aloitetaan määrittelemällä Eulerin summat, jonka jälkeen ryhdytään tarkastelemaan niiden laskemista. Ensimmäisenä määriteltävä funktio, Riemannin zeeta-funktio, on muutenkin mielenkiintoinen funktio (se liittyy muun muassa alkulukujen jakaumaan lukusuoralla), mutta tässä tutkielmassa sitä käytetään ainoastaan Eulerin summien määrittelyyn. Lisäksi seuraavassa osoitetaan, että Riemannin zeeta-funktio suppenee koko määrittelyjoukossaan.

MÄÄRITELMÄ 1.1. Määritellään funktio $\zeta\colon]1,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Tätä funktiota kutsutaan *Riemannin zeeta-funktioksi.*

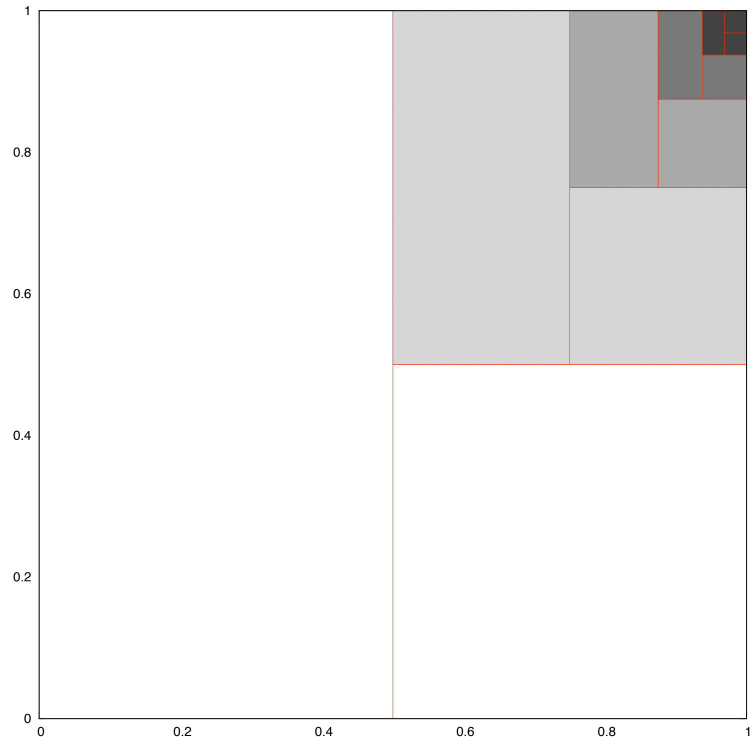
HUOMAUTUS 1.2. Lukusarjan määritelmän mukaan

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s} \right)$$

Ennen kuin jatketaan zeeta-funktion analyyttisempää käsittelyä perustellaan kuvasta katsomalla, että Riemannin zeeta-funktio suppenee muuttujan s arvoilla $s \geq 2$. Vaikka pelkkää kuvaan perustuvaa päättelyä ei tietenkään voi pitää tarkkana perusteluna, niin kuva antaa usein hyviä ideoita sille miten asiat todellisuudessa ovat.

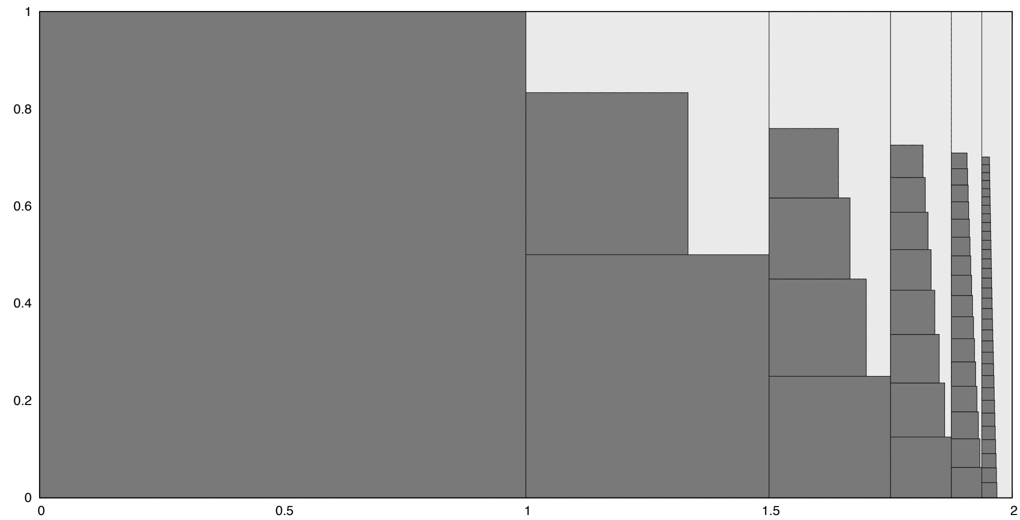
LAUSE 1.3. *Riemannin zeeta-funktio suppenee arvoilla $s \geq 2$.*

TODISTUS. Käytetään todistuksessa apuna tietoa siitä, että geometrinen sarja $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$ suppenee ja sarjan summa on $\sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k = 2$. Perustellaan tämäkin tulos kuvan avulla: Kun tulkitaan sarjan termit ensimmäistä lukuunottamatta pinta-aloiksi niin huomataan, että ne täyttävät neliön jonka sivun pituus on yksi (kuva 1.1). Kun tähän lisätään ensimmäinen termi, saadaan summaksi kaksi. Tutkitaan sitten tapausta $\zeta(2)$. Tarkastellaan suorakulmiota jonka kannan pituus on kaksi ja korkeus yksi. Jaetaan kanta siten, että jakopisteet ovat edellä tarkastellun geometrisen sarjan termien määräämät. Tulkitaan sarjan $\zeta(2)$ termit taas pinta-aloiksi. Sarjan ensimmäinen termi on 1, joten se täyttää puolet suorakulmiosta. Seuraavat termit ovat $1/4$ ja $1/9$. Näiden summa on pienempi kuin $1/4 + 1/4 = 1/2$, mikä on tarkastellun suorakulmion seuraavan lohkon ala. Edelleen sarjan neljä seuraavaa termiä ovat $1/16$, $1/25$, $1/36$ ja $1/49$, joiden summa on taas pienempi kuin $4 \cdot (1/16)$, mikä on suorakulmion seuraava palanen. Näin jatkamalla huomataan, että



Kuva 1.1. Geometrisen sarjan summa pinta-alaksi tulkittuna.

sarjan $\zeta(2)$ summa on pienempää kuin kaksi (kuva 1.2). Kun muuttuja s saa suurempia arvoja kuin kaksi, niin sarjan summa luonnollisesti pienenee. Näin ollen väite on tosi.



Kuva 1.2. Sarjan $\zeta(2)$ summa pinta-alaksi tulkittuna.

$\square$

Perustellaan sama tulos vielä tarkasti. Itse asiassa huomataan, että sarja suppenee vielä hieman suuremmassa joukossa kuin edellä saatiin kuvasta pääteltyä.

LAUSE 1.4. *Riemannin zeeta-funktion määräämä sarja suppenee kaikilla muuttujan s arvoilla joille $s > 1$.*

TODISTUS. Todistetaan funktion suppeneminen käyttämällä *integraalitestiä*, joka on yksi monista lukusarjan suppenemisen tutkimiseen tarkoitetuista testeistä. Integraalitestin idea on seuraavanlainen: Olkoon funktio $f\colon [1,\infty[\ \to [0,\infty[$ jatkuva ja vähenevä funktio, ja $a_n = f(n)$. Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee jos ja vain jos epäoleellinen Riemann-integraali

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

suppenee, eli jos

$$\lim_{c\to\infty}\left(\int_1^{c} f(x)\,dx\right) < \infty$$

Integraalitestin tarkka todistus sivuutetaan tässä tutkielmassa. Se löytyy esimerkiksi Tero Kilpeläisen Analyysi 3-luentomonisteesta ([**4**, 4.15.]). Kuitenkin jo kuvasta katsomalla voidaan löytää intuitiivinen perustelu lauseen toiselle suunnalle; jos integraali suppenee niin sarja suppenee. Tarkastellaan esimerkkinä sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ja funktiota $f\colon [1,\infty[\ \to [0,\infty[$, $f(x) = 1/x$. Funktio f toteuttaa selvästi integraalitestin vaatimat oletukset. Tulkitaan nyt jokainen sarjan termi suorakulmioksi jonka kannan pituus on 1 ja korkeus $1/n$. Asetetaan nämä suorakulmiot sopivasti koordinaatistoon funktion f kuvaajan kanssa (kuva 1.3). Kuvasta nähdään, että suorakulmioiden yhteenlaskettu pinta-ala on pienempi kuin funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä pinta-ala (pois lukien sarjan ensimmäinen termi, joka ei vaikuta suppenevuuteen millään tavalla). Siispä jos funktion f epäoleellinen integraali yli välin $[1,\infty[$ suppenee, niin myös sen "alle jäävän" sarjan täytyy supeta. Muille sarjoille ja vastaaville funktioille voidaan käyttää vastaavaa mallinnusta, ja edellä esimerkkinä käytetty sarja valikoitui havainnollistukseksi lähinnä piirtoteknisistä syistä. Itse asiassa sarja $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (ja vastaavan funktion integraali) ei edes suppene, kuten seuraavassa tullaan osoittamaan.

Ryhdytään nyt tarkastelemaan funktiota $f\colon [1,\infty[\ \to [0,\infty[$, $f(x) = 1/x^s$, $s\in\mathbb{R}$. Funktio f on jatkuva, sekä selvästi myös vähenevä. Nyt pätee

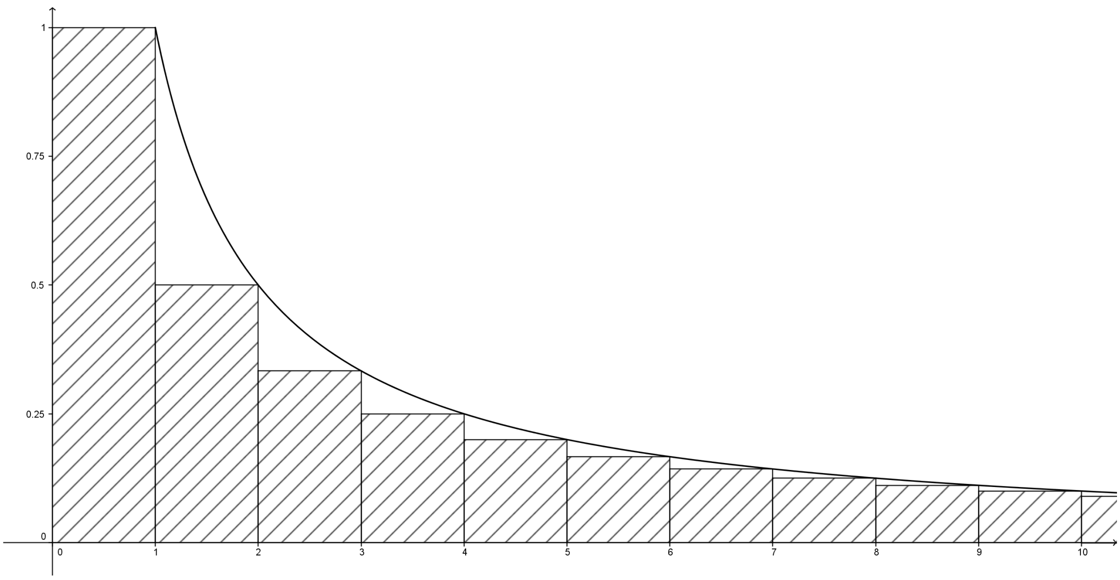
$$\int_1^{c} f(x)\,dx = \int_1^{c}\frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \log c, & \text{jos } s = 1\\ \dfrac{1}{1-s}(c^{1-s}-1), & \text{jos } s \neq 1.\end{cases}$$

Siten integraalin raja-arvolle pätee

$$\lim_{c\to\infty}\left(\int_1^{c}\frac{1}{x^s}\,dx\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1}, & \text{jos } s > 1\\ +\infty, & \text{jos } s \leq 1.\end{cases}$$

Näin ollen integraali

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\,dx$$



KUVA 1.3. Funktion $f(x) = 1/x$ kuvaaja ja sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ summa geometrisesti tulkittuna.

suppenee jos, ja vain jos $s > 1$. Siispä myös vastaava lukusarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ suppenee täsmälleen silloin, kun $s > 1$. Riemannin zeeta-funktion määrittelyjoukko on $]1, \infty[$, joten funktio suppenee koko määrittelyjoukossaan. $\square$

MÄÄRITELMÄ 1.5. Eulerin summiksi kutsutaan Riemannin zeeta-funktion arvoja parillisissa kokonaislukupisteissä $\zeta(2m)$, $m \in \mathbb{Z}_+$.

HUOMAUTUS 1.6. Edellä todistetusta lauseesta seuraa oleellisesti se, että kaikki Eulerin summat ovat suppenevat ja ovat siten äärellisiä.

Vaikka Eulerin summat ovat äärettömiä, niiden arvojen laskemiseen on olemassa useita erilaisia menetelmiä joita tässä tutkielmassa on tarkoitus tarkastella. Aloitetaan laskemalla ensimmäinen Eulerin summa, $\zeta(2)$. Lasku itsessään on helpohko ja sen ymmärtää helposti jos tuntee sinifunktion ja polynomien käyttäytymisen.

1.2. Funktio sinc ja ensimmäinen Eulerin summa

Määritellään funktio sinc : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \\ \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Funktion $\sin(x)$ nollakohdat ovat $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, ja funktiolla $\operatorname{sinc}(x)$ on nyt selvästi samat nollakohdat. Polynomit voidaan tunnetusti esittää tulona nollakohtiensa avulla. *Jos* nyt sinc olisi ”∞-asteinen polynomi”, se voitaisiin esittää samoin tulona, eli muodossa

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= (1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{3\pi}) \ldots \\ &= (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \ldots \end{aligned}$$

Tuloesityksessäkin saadaan selvästi muuttujan x arvolla 0 funktion arvoksi 1, joten sekin ehto on kunnossa. Tarkastellaan nyt tuloesitystä hieman tarkemmin. Muodollisesti, jos tulo kirjoitetaan auki, saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})(1-\frac{x^2}{16\pi^2})\dots \\ &= 1-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x^2}{4\pi^2}-\frac{x^2}{9\pi^2}-\frac{x^2}{16\pi^2}-\dots+\frac{x^4}{4\pi^4}+\frac{x^4}{9\pi^4}+\frac{x^4}{16\pi^4}+\dots-\frac{x^6}{36\pi^6}-\dots\end{aligned}$$

Kun tulo kirjoitetaan auki, huomataan että se sisältää selvästi sarjan

$$-\left(\frac{1}{1^2\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\dots\right)x^2$$

sekä sen lisäksi muuttujan x korkeampia potensseja. Toisaalta, kun käytetään sinifunktion Taylorin kehitelmää, voidaan funktio sinc esittää muodossa

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= \frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\dots\right) \\ &= 1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\dots\end{aligned}$$

Funktio sinc oli alunperin tulkittu polynomiksi, ja kaksi polynomia ovat samat täsmälleen silloin kun samaa astetta olevien muuttujien kertoimet ovat samat. Siispä muuttujan x^2 kertoimille on oltava

$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\frac{1}{16\pi^2}-\dots=-\frac{1}{3!}$$

Kerrotaan yhtälö puolittain vakiolla $-\pi^2$ ja saadaan

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{\pi^2}{3!}=\frac{\pi^2}{6}$$

Eli toisin sanoen

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ensimmäiselle Eulerin summalle on siis nyt saatu laskettua tarkka arvo. Oletuksena oli tosin, että funktio sinc käyttäytyy tekijöihin jaon suhteen kuten polynomi. Tämä tullaan osoittamaan myöhemmin kappaleessa 4.5, kunhan saadaan ensin käyttöön riittävästi tarpeellisia työkaluja. Osa päättelystä on siis vielä tyhjän päällä, mutta jatketaan ja tarkastellaan seuraavaksi toista, hieman tarkempaa tapaa laskea Eulerin summia.

LUKU 2

Kompleksianalyyttinen lähestymistapa

2.1. Alkeisfunktiot kompleksitasossa

Tässä kappaleessa tarkastellaan lyhyesti kompleksilukuihin liittyviä määritelmiä ja tuloksia, joita tarvitaan myöhemmin Eulerin summien käsittelyssä. Muistetaan, että kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ on muotoa $z = x + iy$, missä $x, y \in \mathbb{R}$ ja imaginaariyksikölle i pätee $i^2 = -1$. Sanotaan, että tätä muotoa olevan luvun z reaaliosa on $\mathrm{Re}(z) := x$ ja imaginaariosa $\mathrm{Im}(z) := y$.

Lause 2.1 (de Moivren kaava). *Kaikille luvuille $\theta \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Todistus. Tehdään induktiotodistus muuttujan n suhteen. Kun $n = 1$, on väite triviaalisti tosi. Oletetaan sitten, että väite pätee jollekin kokonaisluvulle $k \in \mathbb{N}$ ja osoitetaan trigonometristen funktioiden summakaavoja hyödyntäen, että väite pätee myös muuttujalle $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta))(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= \cos(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)i\sin\theta + i\sin(k\theta)\cos\theta + i\sin(k\theta)i\sin\theta\\
&= \cos(k\theta)\cos\theta - \sin(k\theta)\sin\theta + i\left(\cos(k\theta)\sin\theta + \sin(k\theta)\cos\theta\right)\\
&= \cos(k\theta + \theta) + i\left(\sin(k\theta + \theta)\right)\\
&= \cos((k+1)\theta) + i\left(\sin((k+1)\theta)\right)
\end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla väite on siis tosi. $\square$

Määritellään sitten kompleksinen eksponenttifunktio sekä hyperboliset funktiot, ja tarkastellaan niihin liittyviä tuloksia. Reaalinen eksponenttifunktio voidaan kehittää Taylorin sarjaksi, ja sarjaesitys on

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Muistetaan lisäksi, että $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, ja niin edelleen. Kun lisäksi muistetaan sinin ja kosinin Taylorin kehitelmät, voidaan formaalisti laskea

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \dots \\ &= (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots) - i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

Kun sovelletaan lisäksi reaalisen eksponenttifunktion laskusääntöä $e^x e^y = e^{x+y}$, on kohtalaisen perusteltua määritellä kompleksinen eksponenttifunktio seuraavalla tavalla:

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Funktio

$$\exp(z) := e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$$

on *kompleksinen eksponenttifunktio.*

Osoitetaan vielä , että myös kompleksiselle eksponenttifunktiolle pätee ominaisuus $e^x e^y = e^{x+y}$. Tämän jälkeen todistetaan lause 2.1 uudestaan, ja huomataan, että uuden työkalun käyttöönotto tarjoaa usein uusia ja tehokkaampia tapoja käsitellä ongelmia.

LEMMA 2.3. *Olkoot luvut $z, w \in \mathbb{C}$ mielivaltaisia ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee*

(i) $e^z e^w = e^{z+w}$
(ii) $(e^z)^n = e^{nz}$

TODISTUS. i) Olkoot $z = x + iy$ ja $w = u + iv$. Väite seuraa suoralla laskulla eksponenttifunktion määritelmästä sekä trigonometristen funktioiden laskusäännöistä:

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x e^u (\cos y + i \sin y)(\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos y \cos v + i \cos y \sin v + i \cos v \sin y - \sin y \sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\cos y \sin v + \sin y \cos v)) \\ &= e^{x+u}(\cos(y + v) + i \sin(y + v)) \\ &= e^{z+w} \end{aligned}$$

Väite ii) seuraa väitteestä i) helpolla induktiolla. □

Nyt huomataan, että lause 2.1 seuraa suoraan edellisen lauseen ii) kohdasta erikoistapauksessa $z = 0 + i\theta$:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = (e^{0+i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Määritellään tässä yhteydessä myös hyperboliset funktiot joita tarvitaan myöhemmin tutkielman kolmannessa luvussa, sillä kompleksitasossa ne liittyvät läheisesti trigonometrisiin funktioihin, kuten seuraavassa huomataan.

MÄÄRITELMÄ 2.4. *Hyperbolinen sini* on funktio $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ja *hyperbolinen kosini* on funktio $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Lisäksi *hyperbolinen tangentti* määritellään luonnollisella tavalla, $\tanh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

LAUSE 2.5. *Hyperbolisille funktioille pätee* $\cosh(ix) = \cos x$ *ja* $\sinh(ix) = i \sin x$.

TODISTUS. Väite seuraa suoraan eksponenttifunktion määritelmästä, kosinin parillisuudesta ($\cos(x) = \cos(-x)$) ja sinin parittomuudesta ($\sin(x) = -\sin(-x)$):

$$\begin{aligned}\cosh(ix) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + i\sin(x) + \cos(-x) + i\sin(-x)\right)\\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

Väitteen toinen osa todistetaan vastaavasti. □

2.2. Ensimmäinen Eulerin summa trigonometriaa ja algebraa hyödyntäen

Tässä kappaleessa lasketaan ensimmäinen Eulerin summa käyttäen apuna edellä todistettuja kompleksianalyysin työkaluja, sekä trigonometristen funktioiden ominaisuuksia. Lisäksi tarvitaan seuraavaksi todistettava lemma, joka antaa yhteyden polynomin juurten ja kertoimien välille.

LEMMA 2.6 (Vietan kaavat). *Mielivaltaisen polynomin* $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *juurille* $x_1, x_2 \ldots, x_n$ *pätee* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

TODISTUS. Polynomi $q(x)$ voidaan esittää juuriensa tulona, ja edelleen laskemalla tulo muodollisesti auki saadaan

$$\begin{aligned}q(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\\ &= a_n\left(x^n + \tfrac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \cdots + \tfrac{a_1}{a_n}x + \tfrac{a_0}{a_n}\right)\\ &= a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)\\ &= a_n\left(x^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n(x_1 x_2 \cdots x_n)\right).\end{aligned}$$

Polynomit ovat samat täsmälleen silloin kun niiden samaa astetta olevien muuttujien kertoimet ovat samat, joten astetta $n-1$ olevien termien kertoimista saadaan $a_{n-1}/a_n = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, ja edelleen kertomalla puolittain vakiolla -1 saadaan väite. □

HUOMAUTUS 2.7. Ylläolevasta lemmasta saadaan tietty muitakin yhteyksiä juurten ja kertoimien välille, esimerkiksi $a_0/a_n = (-1)^n(x_1 x_2 \cdots x_n)$ ja niin edelleen.

Ryhdytään sitten tarkastelemaan Eulerin summan laskemista. Toistaiseksi kiinnitetään kokonaisluku $n > 0$, ja kokonaisluvuille $1 \leq k \leq n$ asetetaan $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$. Ensimmäiseksi käytetään edellä todistettua De-Moivren kaavaa sekä Newtonin binomikaavaa, ja konstruoidaan polynomi jonka juuret ovat $\cot^2(\theta_k) = \cos^2(\theta_k)/\sin^2(\theta_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Merkitään seuraavassa $\theta_k =: \theta$, ja lähdetään etsimään luvulle 0 esitysmuotoa josta löydetään haluttu polynomi:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sin(k\pi) = \sin((2n+1)\theta) = \mathrm{Im}[\cos((2n+1)\theta) + i\sin((2n+1)\theta]\\
&= \mathrm{Im}[(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1}]\\
&= \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\cos^{2n+1-k}\theta\ i^k\sin^k\theta\right]\\
&= \mathrm{Im}\left[\binom{2n+1}{0}\cos^{2n+1}\theta\cdot 1\cdot 1 + \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\theta\ i\sin\theta\right.\\
&+ \left.\binom{2n+1}{2}\cos^{2n-1}\theta\cdot(-1)\cdot\sin^2\theta + \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\theta\cdot(-i)\cdot\sin^3\theta + \ldots\right]
\end{aligned}
$$

Kun muistetaan imaginaariyksikön i potenssien käyttäytyminen, niin ylläolevasta aukikirjoitetusta summalausekkeesta huomataan heti, että summan termit sisältävät imaginaariyksikön ainoastaan parittomilla indeksin k arvoilla. Koska ollaan kiinnostuneita ainoastaan summan imaginaariosasta, niin kaikki parillisilla indekseillä k saatavat termit voidaan karsia pois. Kun lisäksi huomioidaan vakion i potenssien merkinvaihtelu, niin ylläoleva lauseke saadaan kirjoitettua muodossa

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2(n-k)}\theta\sin^{2k+1}\theta\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cos^{2(n-k)}\theta\sin^{2k+1}\theta\frac{\sin^{2(n-k)}\theta}{\sin^{2(n-k)}\theta}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\frac{\cos^{2(n-k)}\theta}{\sin^{2(n-k)}\theta}\sin^{2k+1+2(n-k)}\theta\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}\cot^{2(n-k)}\theta\right)\left(\sin^{2n+1}\theta\right)
\end{aligned}
$$

Koska sinifunktiolle pätee $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \neq 0$ kun $k = 1, \ldots, n$, niin tulon nollasäännön nojalla polynomin

$$
p(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k x^{n-k}
$$

juuret ovat täsmälleen muotoa $\cot^2\theta_k$.

Nyt Vietan kaavojen mukaan polynomille $p(x)$ pätee

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2(\theta_k)} = \sum_{k=1}^{n}\cot^2(\theta_k) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3\cdot 2\cdot(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3},
$$

mistä edelleen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2(\theta_k)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(\theta_k)+\cos^2(\theta_k)}{\sin^2(\theta_k)} = \sum_{k=1}^{n} \big(1+\cot^2(\theta_k)\big) \\ &= n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2(n+1)n}{3}.\end{aligned}$$

Välillä $[0, \frac{\pi}{2}[$ on voimassa myös epäyhtälöpari $\tan x \geq x \geq \sin x$, eli pätee myös $\tan(\theta_k) \geq \theta_k \geq \sin(\theta_k)$. Tarkastellaan näiden lukujen käänteislukuja, jolloin epäyhtälön suunta kääntyy. Tällöin saadaan $\frac{1}{\tan(\theta_k)} \leq \frac{1}{\theta_k} \leq \frac{1}{\sin(\theta_k)}$, mistä edelleen neliöimällä $\frac{1}{\tan^2(\theta_k)} \leq \frac{1}{\theta_k^2} \leq \frac{1}{\sin^2(\theta_k)}$.

Tämä epäyhtälö pätee kaikilla indekseillä k, joten kun lasketaan summa yli indeksien $k = 1, 2, \ldots, n$, niin myös summille pätee kaksoisepäyhtälö

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2(\theta_k)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2(\theta_k)}.$$

Sijoitetaan tähän epäyhtälöön edellä lasketut summat oikean ja vasemman puolen sarjoille, sekä tehdään myös sijoitus $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ kuten alussa asetettiin. Tällöin saadaan

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leq \frac{2(n+1)n}{3}.$$

Kerrotaan tämä epäyhtälö vielä vakiolla $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$ ja saadaan lopulta

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2 2n(n+1)}{3(2n+1)^2}.$$

Kun lasketaan raja-arvot muuttujan n lähestyessä ääretöntä huomataan, että sekä epäyhtälöparin vasemmalla että oikealla puolella olevat osamäärät lähestyvät arvoa $\pi^2/6$. Tällöin suppiloperiaatteen nojalla pätee myös

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ensimmäiselle Eulerin summalle saatiin siis tälläkin tavalla laskettua sama arvo kuin ensimmäisessä osassa. Edellä esitetty päättely ei myöskään sisällä samanlaisia aukkoja kuin ensimmäinen, jossa oletettiin että ”ääretönasteinen polynomi” käyttäytyy samoin kuin tavallinen, äärellistä astetta oleva polynomi. Jatketaan sitten Eulerin summien tarkastelua toisesta näkökulmasta, ja katsotaan saadaanko laskettua ensimmäisen summan, $\zeta(2)$, lisäksi myös muita summia.

LUKU 3

Bernoullin lukuja ja Eulerin summia

Tässä luvussa johdetaan yleinen kaava n. Eulerin summan laskemiseksi. Tämä tehdään tarkastelemalla niin kutsuttuja *Bernoullin lukuja.* Lisäksi sivutuotteena saadaan kaava tangenttifunktion sarjakehitelmälle, jonka tarkka johtaminen tehdään luvun viimeisessä kappaleessa. Ensimmäinen, Bernoullin lukujujen ja Eulerin summien yhteyttä käsittelevä kappale pohjautuu Grahamin, Knuthin ja Patashnikin Concrete Mathematics-teokseen [**1**, 6.5]. Toisesssa kappaleessa, jossa perustellaan tarkasti ensimmäisessä kappaleessa tehtävät päättelyt taas käyttää lähteenä Apostolin Mathematical Analysis-teosta [**7**, 13] sekä Janne Koposen Pro Gradu-tutkielmaa [**6**]. Aloitetetaan kuitenkin määrittelemällä Bernoullin luvut.

3.1. Bernoullin luvut

MÄÄRITELMÄ 3.1 (Bernoullin luvut). Määritellään lukujono $(B_m)_{m=0}^{\infty}$ rekursiivisesti

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = [m=0], \quad \text{kaikille } m \geq 0,$$

missä

$$[m=0] = \begin{cases} 1, & \text{kun } m = 0 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Luvulle B_m, $m > 0$ saadaan lisäksi laskettua eksplisiittinen rekursiolauseke:

$$B_m = -\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k$$

Lasketaan esimerkkinä muutama ensimmäinen Bernoullin luku määritelmää käyttäen:

$$\begin{aligned}
m = 0: \quad & \binom{1}{0} B_0 = B_0 = 1 \\
m = 1: \quad & \binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 1 \cdot 1 + 2B_1 = 0, \quad \text{mistä} \quad B_1 = -\frac{1}{2} \\
m = 2: \quad & \binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1/2) + 3B_2 = 0, \\
& \text{mistä} \quad B_2 = \frac{1}{6} \\
m = 3: \quad & \binom{4}{0} B_0 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{3} B_3 = \\
& = 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1/2) + 6 \cdot (1/6) + 4B_3 = 0, \quad \text{mistä} \quad B_3 = 0.
\end{aligned}$$

Seuraavat Bernoullin luvut saa laskettua vastaavasti, ja muutama niistä löytyy allaolevasta taulukosta.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{-691}{2730}$

Bernoullin luvut voidaan määritellä myös niin sanotun *generoivan funktion* avulla: Kehitetään funktio $\frac{z}{e^z-1}$ potenssisarjaksi, jolloin Bernoullin luvut saadaan esille kyseisen potenssisarjan kertoimista. Tässä vaiheessa epäilevä lukija voi toki miettiä onko kyseisellä funktiolla edes suppenevaa sarjaesitystä? Lisäksi yhteys rekursiivisesti määritellyn lukujonon ja erään potenssisarjan kertoimien välillä saattaa tuntua hieman kaukaa haetulta. Näihin kysymyksiin palataan tarkemmin tämän luvun loppupuolella. Tässä vaiheessa tyydytään uskomaan, että funktiolle $\frac{z}{e^z-1}$ on todella olemassa suppeneva sarjaesitys, ja tämän sarjan kertoimista todella löydetään edellä määritellyn lukujonon termejä. Toisin sanoen pätee

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \tag{3.1}$$

missä luvut B_n ovat Bernoullin lukuja. Miksi samalle lukujonolle sitten tarvitaan kaksi hyvin erilaista määritelmää? Kun käytetään generoivan funktion määritelmää, voidaan Bernoullin luvuilla "laskea" ilman, että tiedetään yhdenkään luvun arvoa (kuten seuraavassa tullaan tekemään). Toisaalta generoivan funktion avulla on erittäin hankala määrätä eksplisiittisesti yhdenkään Bernoullin luvun arvoa, joten tässä rekursiokaava on parempi työkalu. Lähdetään sitten kuitenkin tutkimaan, miten Bernoullin luvut ja Eulerin summat liittyvät toisiinsa, ja palataan Bernoullin lukujen yksityiskohtaisempaan tarkasteluun myöhemmin.

Lisätään yhtälön (3.1) molemmille puolille $\frac{1}{2}z$, jolloin vasemmalta puolelta saadaan

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}, \tag{3.2}$$

missä funktio coth on *hyperbolinen kotangentti*; $\coth z = \cosh z / \sinh z$.

Funktio $\coth(z/2)$ on pariton funktio, ja kun sitä kerrotaan niin ikään parittomalla funktiolla $f(z) = z/2$, saadaan parillinen funktio. Siispä myös funktion

$$g(z) = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \sum_{n\geq 0, n\neq 1}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

täytyy olla parillinen. Määritelmänsä mukaan parilliselle funktiolle pätee koko määrittelyjoukossaan $g(z) = g(-z)$, joten täytyy olla

$$\sum_{n\geq 0, n\neq 1}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0, n\neq 1}^{\infty} B_n \frac{(-z)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0, n\neq 1}^{\infty} B_n \frac{(-1)^n z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0, n\neq 1}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Siis on oltava voimassa $B_n = (-1)^n B_n$ kaikille $n \neq 1$, mistä voidaan päätellä, että $B_n = 0$ jos $n \geq 3$ on pariton. Kaavasta (3.2) saadaan edelleen

$$z \coth z = \frac{2z}{e^{2z}-1} + \frac{2z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Lauseen 2.5 mukaan trigonometristen funktioiden ja hyperbolisten funktioiden välillä pätevät muunnoskaavat

$$\sin z = -i \sinh iz \quad \text{ja} \quad \cos z = \cosh iz.$$

Siispä kotangentille pätee $\cot z = \cos z / \sin z = \cosh iz/(-i \sinh iz) = i \cosh iz / \sinh iz = i \coth iz$, mistä edelleen

$$z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(2iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{3.3}$$

Funktiolle $z \cot z$ pätee myös kaava

$$z \cot z = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2\pi^2 - z^2} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}}.$$

Huomataan, että oikealla oleva sarja sisältää geometrisen sarjan, jolle pätee tunnettu summakaava

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Edelleen $z \cot z$ voidaan siis esittää muodossa

$$z \cot z = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2\pi^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2\pi^2} \right)^n \right)$$

Oletetaan nyt, että summausjärjestyksen muuttaminen on mahdollista, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2\pi^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2\pi^2} \right)^n \right) &= 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2\pi^2} \right)^{n+1} \\
= 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2(n+1)}}{\pi^{2(n+1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2(n+1)}} & \\
= 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{\pi^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}, \quad \text{missä } m = n+1 &
\end{aligned}$$

Summausjärjestyksen muuttaminen todella on sallittua, mutta tarkempi perustelu sivuutetaan tässä tutkielmassa. Karkeasti ottaen idea on sama kuin yksinkertaisen, itseisesti suppenevan sarjan tapauksessa: Edellä tarkastellussa kaksoissarjassa kaikki termit ovat positiivisia ja molemmat sarjat suppenevat, joten summausjärjestystä voidaan muuttaa. Todistus tälle tulokselle ja lisätietoa kaksoissarjoista löytyy kirjallisuudesta (ks. esimerkiksi [**7**, 12-15]).

Nyt ollaan siis tilanteessa, jossa funktiolle $z \cot z$ on saatu kaksi erilaista esitysmuotoa

$$z \cot z = \sum_{m=0}^{\infty} (-4)^m B_{2m} \frac{z^{2m}}{(2m)!} = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{\pi^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}.$$

Huomataan, että molemmista löytyy termi z^{2m}. Potenssisarjat ovat samat täsmälleen silloin, kun vastaavanasteisten termien kertoimet ovat samat, joten merkitään kertoimet yhtäsuuriksi ja pienen sieventämisen jälkeen saadaan lopulta tulos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \zeta(2m) = -\frac{1}{2} \frac{(-4)^m B_{2m} \pi^{2m}}{(2m)!} \tag{3.4}$$

Nyt ollaan siis löydetty yhteys Bernoullin lukujen ja Eulerin summien välille. Kaava on oikeastaan hämmästyttävän yksinkertainen ottaen huomioon sen, että sillä saa laskettua äärettömän määrän äärettömiä summia. Kahdessa edellisessä luvussa saatiin ensimmäisen Eulerin summan arvoksi laskettua $\zeta(2) = \pi^2/6$. Katsotaan antaako tämä Bernoullin lukuja käyttävä menetelmä saman lopputuloksen:

$$\zeta(2 \cdot 1) = -\frac{1}{2} \frac{-4 \cdot (1/6) \cdot \pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ensimmäiselle Eulerin summalle saatiin siis sama arvo kuin edellä. Lasketaan vielä seuraava summa, kun nyt kerran saatiin hieno työkalu tähän tarkoitukseen:

$$\zeta(2 \cdot 2) = -\frac{1}{2} \frac{16 \cdot (1/30) \cdot \pi^4}{24} = \frac{\pi^4}{90}$$

Kuitenkin tämäkin päättely sisältää vielä muutamia aukkoja. Alussa oletettiin, että

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},$$

mikä todistetaankin seuraavaksi. Bernoullin luvut vedettiin myös niin sanotusti hatusta, joten herää myös kysymys mitä nämä luvut ovat ja mistä ne oikein tulevat? Tätä valotetaan hieman myöhemmin, mutta nyt edellä mainittuun todistukseen.

3.2. Lauseita potenssisarjoille ja Bernoullin luvuille

Tässä kappaleessa perustellaan yksityiskohtaisesti, että Bernoullin lukujen määrittely generoivan funktion avulla on järkevää. Aluksi todistetaan kaksi lausetta joiden avulla halutun päättelyn voi tehdä, ja sen jälkeen tutkitaan vielä lyhyesti miten paljon helpommin asiat olisivat jos käytössä olisi kompleksianalyysin kovia tuloksia.

LAUSE 3.2. *Olkoot annettuna kaksi origon suhteen kehitettyä potenssisarjaa:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \textit{missä } z \in B(0; r), \textit{ja}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \textit{missä } z \in B(0; R).$$

Jos kiinnitetylle $z \in B(0;R)$ pätee $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$, niin kyseiselle z pätee

$$f(g(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

missä kertoimet c_k saadaan seuraavasti: Määritellään luvut $b_k(n)$ yhtälöllä

$$g(z)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(n) z^k,$$

jolloin $c_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)$, $\quad k = 0, 1, 2, ...$

Todistus. Oletuksen mukaan valitaan siis z siten, että $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n| < r$. Tällöin pätee myös $|g(z)| < r$, joten saadaan

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k(n) z^k.$$

Nyt jos summausjärjestyksen muuttaminen on mahdollista, saadaan

$$f(g(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_k(n)\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

mikä olikin todistettava väite. Perustellaan vielä, että edellä tehty summausjärjestyksen muuttaminen on sallittua ja todistus on valmis. Tämä tehdään osoittamalla, että sarja $f(g(z))$ suppenee itseisesti, eli että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_n b_k(n) z^k| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k| \tag{3.5}$$

suppenee. Jokainen kerroin $b_k(n)$ on äärellinen summa muotoa

$$b_k(n) = \sum_{m_1+\cdots+m_n=k} b_{m_1} \cdots b_{m_n},$$

ja siten $|b_k(n)| \leq \sum_{m_1+\cdots+m_n=k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$. Toisaalta pätee

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| z^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n) z^k,$$

missä $B_k(n) = \sum_{m_1+\cdots+m_n=k} |b_{m_1}| \cdots |b_{m_n}|$. Kun nyt palataan sarjaan (3.5), saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k(n) z^k| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{\infty} B_k(n) |z^k| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k z^k|\right),\end{aligned}$$

joten sarja todella suppenee. $\square$

Seuraus 3.3. *Olkoon annettuna sarja*

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad \textit{missä } z \in B(0;h),$$

ja jolle $p(0) \neq 0$. *Tällöin on olemassa ympäristö* $B(0;\delta)$ *missä funktiolla* $1/p$ *on olemassa suppeneva sarjakehitelmä*

$$\frac{1}{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n.$$

Todistus. Ilman yleisyyden menettämistä voidaan olettaa, että $p_0 = 1$, jolloin $p(0) = 1$. Olkoon $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |p_n z^n|$, missä $z \in N(0;h)$. Jatkuvuuden nojalla on olemassa ympäristö $B(0;\delta)$ siten, että $|P(z) - 1| < 1$ kun $z \in B(0;\delta)$. Valitaan

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \text{ja}$$

$$g(z) = 1 - p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n,$$

jolloin väite seuraa lauseesta 3.2. □

Näiden kahden lauseen jälkeen ollaan valmiita todistamaan tulos, jota käytettiin edellisen luvun päättelyssä. Esitetään lauseelle kuitenkin myös toinen todistus joka perustuu kompleksianalyysin tuloksiin (ks. [**5**]) jotta huomataan, että tämänkin perustelun voi hoitaa monella eri tavalla. Jälkimmäisessä todistuksessa ei tarvita edellä (pitkästi ja teknisesti) perusteltuja tuloksia, joten voi toki kysyä eikö asia kannattaisi vain hoitaa mahdollisimman yksinkertaisesti ja lyhyesti, ja unohtaa kokonaan ensimmäinen todistus? Kuitenkin myös toisen perustelun taustalla on koko joukko kompleksianalyysin lauseita, joiden sisällyttäminen tähän tutkielmaan olisi myös vaatinut merkittävän määrän sivuja. Lisäksi asioiden tarkastelu eri näkökulmista tukee usein oppimista ja antaa uusia työkaluja myös muiden ongelmien käsittelyyn. Osoitettava tulos on myös todella keskeinen koko luvun teorian kannalta; se perustelee kappaleessa 3.1 tehdyt päättelyt ja siten Eulerin summien laskukaavan paikkansapitävyyden, joten siinäkin mielessä kahden eri todistuksen esittäminen on perusteltua.

Lause 3.4. *Funktiolle* $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ *on olemassa suppeneva sarjaesitys.*

Todistus. Merkitään $g(z) = \frac{e^z-1}{z}$, jolloin $f(z) = 1/g(z)$. Seurauksen 3.3 nojalla riittää osoittaa, että funktiolla $g(z)$ on olemassa suppeneva sarjaesitys. Funktiolla e^z on tunnetusti olemassa sarjaesitys $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, joten saadaan

$$g(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!},$$

joten funktion $g(z)$ sarjakehitelmä suppenee kaikilla muuttujan z arvoilla. □

Todistus. Merkitään taas $g(z) = \frac{e^z-1}{z}$. Funktio e^z on analyyttinen koko kompleksitasossa, joten sillä on olemassa Taylorin sarjakehitelmä origon suhteen: $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Samoin kuin edellä saadaan siis

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$$

Funktion g sarjaesitys suppenee kaikilla muuttujan z arvoilla, joten funktio g on analyyttinen koko määrittelyjoukossaan. Koska lisäksi $\lim_{z\to 0} g(z) = 1$, niin asetetaan $g(0) = 1$ jolloin g on määritelty ja analyyttinen koko kompleksitasossa. Näin ollen funktio $f = 1/g$ on analyyttinen jossain pisteen 0 ympäristössä. Siis funktiolla f on olemassa suppeneva Taylorin sarja origon suhteen. □

Edellä todistetun lauseen jälkeen voidaankin sitten perustellusti asettaa seuraava määritelmä:

MÄÄRITELMÄ 3.5. Olkoon funktion $f(z) = \frac{z}{e^z-1}$ Taylorin kehitelmä origon suhteen

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Tällöin kertoimia B_n kutsutaan *Bernoullin luvuiksi.*

Bernoullin luvut voidaan siis määritellä myös potenssisarjan kertoimista saatavana lukujonona. Osoitetaan vielä, että ylläoleva määritelmä ei ole ristiriidassa ensimmäisen määritelmän kanssa. Toisin sanoen tarkistetaan, että edellä määritellyt luvut todella toteuttavat määritelmän 3.1 rekursioyhtälön.

LAUSE 3.6. *Määritelmän 3.5 mukaiset Bernoullin luvut toteuttavat määritelmän 3.1 rekursioyhtälön.*

TODISTUS. Olkoon $z \neq 0$. Kerrotaan määritelmän 3.5 mukainen generoiva funktio puolittain nimittäjällä $e^z - 1$. Esitetään termi $e^z - 1$ vielä Taylorin sarjana, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} z &= (e^z - 1)\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}\right) \\ &= \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(B_0\frac{1}{0!} + B_1\frac{z}{1!} + B_2\frac{z^2}{2!} + B_3\frac{z^3}{3!} + \dots\right) \\ &= z\left(\frac{B_0}{0!1!}\right) + z^2\left(\frac{B_0}{0!2!} + \frac{B_1}{1!1!}\right) + z^3\left(\frac{B_0}{0!3!} + \frac{B_1}{1!2!} + \frac{B_2}{2!1!}\right) + \dots \\ &+ z^{n+1}\left(\frac{B_0}{0!(n+1)!} + \frac{B_1}{1!n!} + \frac{B_2}{2!(n-1)!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!} + \frac{B_n}{n!1!}\right) + \dots \end{aligned}$$

Sarjat ovat samat täsmälleen silloin kun samanasteisten termien kertoimet ovat samat, joten saadaan aluksi $B_0/(0!1!) = 1$, mistä $B_0 = 1$. Koska kaikkien termin z^n kertoimien täytyy olla nollia kun eksponentti $n \geq 2$, niin termin z^{n+1} kertoimesta saadaan Bernoullin luvulle B_n yhtälö

$$
\begin{aligned}
B_n &= -n!\left(\frac{B_0}{0!(n+1)!}+\frac{B_1}{1!n!}+\frac{B_2}{2!(n-1)!}+\cdots+\frac{B_{n-1}}{(n-1)!2!}\right)\\
&= -\frac{n!}{(n+1)!}\left(\frac{(n+1)!B_0}{0!((n+1)-0)!}+\frac{(n+1)!B_1}{1!((n+1)-1)!}+\frac{(n+1)!B_2}{2!((n+1)-2)!}+\dots\right.\\
&\left.+\frac{(n+1)!B_{n-1}}{(n-1)!((n+1)-(n-1))!}\right)\\
&= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k
\end{aligned}
$$

Ylläoleva lauseke on täsmälleen samaa muotoa, kuin määritelmässä 3.1. Näin ollen generoivan funktion tuottamat luvut B_n todella toteuttavat rekursioyhtälön, eli väite on todistettu. □

3.3. Tangenttifunktion sarjakehitelmä

Nyt kun Bernoullin lukuihin on saatu jonkin verran tuntumaa, niin tarkastellaan tässä luvussa vielä erästä ongelmaa jonka ratkaisemisessa Bernoullin luvut ovat oleellisessa osassa: Tangenttifunktion sarjakehitelmän määrittämistä. Sinin ja kosinin sarjakehitelmille, samoin kuin niiden hyperbolisille vastineille, löytyy kaavakokoelmista siistit lausekkeet joiden johtaminen on myös helppoa. Myös tangenttifunktiolle voi tietysti löytää sarjaesityksen kaavan, mutta siinä vaiheessa herää usein kaksi kysymystä: Mitä ovat luvut B_n ja miten tällainen kaava on saatu johdettua? Ensimmäiseen kysymykseen vastaus tiedetäänkin jo, ja jälkimmäiseen perehdytään seuraavaksi.

Koska $\tan x = \sin x/\cos x$, ja sinin ja kosinin sarjakehitelmät origon suhteen ovat tiedossa, niin lähestytään ongelmaa aluksi yksinkertaisesti jakamalla sarjakehitelmät muodollisesti jakokulmassa:

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x & +\frac{1}{3}x^3 & +\frac{2}{15}x^5 & +\frac{17}{315}x^7+\dots\\
\hline
1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots & x & -\frac{x^3}{3!} & +\frac{x^5}{5!} & -\frac{x^7}{7!}+\dots\\
 & x & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{24}x^5 & -\frac{1}{720}x^7+\dots\\
\cline{2-5}
 & & \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{30}x^5 & +\frac{1}{840}x^7-\dots\\
 & & \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{6}x^5 & +\frac{1}{72}x^7-\dots\\
\cline{3-5}
 & & & \frac{2}{15}x^5 & -\frac{12}{945}x^7+\dots\\
 & & & \frac{2}{15}x^5 & -\frac{4}{60}x^7+\dots\\
\cline{4-5}
 & & & & \frac{17}{315}x^7+\dots
\end{array}
$$

Jo neljästä ensimmäisestä termistä voi arvata, että siistin summakaavan keksiminen pelkkiä kertoimia tuijottamalla ei varmasti onnistu. Luvussa 3.1 löydettiin kuitenkin yhteys kotangenttifunktion ja Bernoullin lukujen välille (yhtälö (3.3)), josta saadaan ensin sarjaesitys kotangentille:

$$\cot z = \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n B_{2n}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$$

Käytetään sitten kotangentin ja tangentin välistä yhteyttä $\tan z = \cot z - 2\cot 2z$, jonka avulla saadaan laskemalla

$$\begin{aligned}
\tan z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n B_{2n}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n B_{2n}\frac{(2z)^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n} B_{2n}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n 2^{2n} B_{2n} 2^{2n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n} B_{2n}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n} 2^{2n} B_{2n}\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n} B_{2n}(1-2^{2n})\frac{z^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}z^{2n-1}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Näin ollaan siis johdettu sarjaesitys myös tangenttifunktiolle. Lasketaan vielä sarjan muutama ensimmäinen termi auki kaavaa käyttäen jotta huomataan, että sarja alkaa samoin kuin jakokulmassa auki laskettuna:

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 + \dots$$

LUKU 4

Fourier-teoriaa ja Eulerin summia

Tässä luvussa johdetaan yleinen kaava Eulerin summille hyödyntämällä Fourier-analyysin tuloksia. Lisäksi esitellään kaksi Fourier-teoriaa hyödyntävää menetelmää, joiden avulla saadaan laskettua Eulerin summia. Lisäksi tutkielman loppuhuipennuksena todistetaan, että kappaleessa 1.2 käytetty tuloesitys sinifunktiolle todella pätee.

4.1. Fourier-sarjojen perusteita

Tarkastellaan aluksi lyhyesti Fourier-sarjoja. Tämän kappaleen tarkoituksena on vastata ensisijaisesti kysymyksiin ”Mikä on Fourier-sarja?”ja ”Miten määrätään funktion f Fourier-sarjaesitys?”. Karkeasti ottaen Fourier-sarjojen ideana on approksimoida funktiota sarjalla, joka muodostuu sinin ja kosinin lineaarikombinaatioista (vrt. esimerkiksi Taylorin sarjat). Määritellään seuraavassa tämä formaalisti:

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integroituva funktio. Funktion f *Fourier-kertoimiksi* kutsutaan lukuja

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos(\frac{j2\pi x}{L})dx \quad \text{ja} \\ b_j &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin(\frac{j2\pi x}{L})dx, \end{aligned}$$

missä $L = b - a$ on funktion määrittelyvälin pituus, ja $j \in \mathbb{Z}_+$. Sarjaa

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos(\frac{j2\pi x}{L}) + b_j\sin(\frac{j2\pi x}{L})\right)$$

kutsutaan funktion f *Fourier-sarjaksi.*

HUOMAUTUS 4.2. (i) Joskus funktion f Fourier sarjasta käytetään merkintää

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos(\frac{j2\pi x}{L}) + b_j\sin(\frac{j2\pi x}{L})\right).$$

Merkintä ”$\sim$”on lähinnä symbolinen, ja tarkoittaa ainoastaan sitä, että oikealla puolella oleva sarja on funktion f Fourier-sarja. Esimerkiksi sarjan suppenevuuteen se ei ota mitään kantaa.

(ii) Jos funktio f on määritelty 2π-mittaisella välillä, niin Fourier-kertoimille ja -sarjalle saadaan miellyttävän siisti esitys

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\cos(jx)dx, \quad b_j = \frac{1}{\pi}\int_a^b f(x)\sin(jx)dx, \quad \text{ja}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\right).$$

Usein Fourier-sarjat myös määritellään 2π-jaksoisille funktioille, ja esimerkiksi tämän tutkielman Fourier-sarjoja koskevissa tuloksissa usein oletetaan funktiot 2π-jaksollisiksi.

Seuraavaksi herää tietysti luonnollinen kysymys siitä milloin Fourier-sarja suppenee, ja voidaanko " $\sim$ "-merkin tilalle asettaa yhtäsuuruusmerkki.

Lause 4.3. *Olkoon f paloittain jatkuva 2π-jaksollinen funktio, jolla on paloittain jatkuvat ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatat. Jos lisäksi epäjatkuvuuspisteissä funktion f arvoille pätee $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, niin funktion f Fourier-sarja*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\right) \tag{4.1}$$

suppenee pisteittäin kohti funktiota f.

Todistus. Lauseen todistus on pitkähkö, tekninen, ja vaatii pohjalleen muutaman aputuloksen. Se sivuutetaan sillä se veisi tutkielmaa liiaksi ohi alkuperäisen aiheen. Tarkka todistus löytyy esimerkiksi Courantin ja Johnin teoksesta Introduction to Calculus and Analysis 1 ([**2**, 8.4.e.]). □

Fourier-sarjojen suppenevuus voidaan osoittaa myös laajemmalle joukolle funktioita:

Lause 4.4. (i) *2π-jaksollisen funktion f Fourier-sarja suppenee pisteittäin kohti funktiota f, jos funktio f on yhden kerran paloittain jatkuvasti derivoituva.*
(ii) *Jos edelleen funktio f on jatkuva, niin suppeneminen on itseistä ja tasaista.*
(iii) *Paloittain jatkuvalla funktiolla suppeneminen on tasaista jokaisella suljetulla välillä, joka ei sisällä epäjatkuvuuspisteitä.*

Todistus. Tämänkin lauseen todistus sivuutetaan, se löytyy samasta teoksesta edellisen kanssa (ks. ([**2**, 8.6.c.]). □

Fourier-sarjoista ja niiden suppenemisesta löytyy lisätietoa esimerkiksi Tom Apostolin Mathematical Analysis teoksesta ([**7**, Kappale 15]) ja lyhyesti Thomsonin, Brucknerin ja Brucknerin teoksesta Elementary Real Analysis ([**9**, 10.8]) . Asiasta syvällisemmin kiinnostuneille voi suositella esimerkiksi Steinin ja Shakarchin Fourier Analysis: an introduction-teosta ([**10**]). Lisäksi on syytä huomauttaa, että vaikka edellä muotoilluissa lauseissa oletetaan funktioiden olevan 2π-jaksollisia, niin vastaavat tulokset yleistyvät L-jaksoisille funktioille, missä L on välin $[a, b] \subset \mathbb{R}$ pituus.

Esimerkki 4.5. Määritetään esimerkkinä Fourier-sarjaesitys funktiolle $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1/2$. Osittaisintegroimalla saadaan Fourier-kertoimiksi a_j

$$\begin{aligned} a_j &= 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \cos(2\pi jx)\ dx = \int_0^1 (2x-1)\cos(2\pi jx)\ dx \\ &= \frac{\sin(\pi j)(\pi j \cos(\pi j) - \sin(\pi j))}{\pi^2 j^2}, \end{aligned}$$

joten $a_j = 0$ koska $\sin(\pi j) = 0$ kaikille $j \in \mathbb{Z}_+$. Koska lausekkeen nimittäjä sisältää indeksin j tulon tekijänä, niin sarjaesityksessä tarvittava kerroin a_0 joudutaan tarkastelemaan erikseen: $a_0 = 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)\cos 0\ dx = 0$. Vastaavasti kertoimiksi b_j saadaan

$$\begin{aligned} b_j &= 2\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \sin(2\pi jx)\ dx = \int_0^1 (2x-1)\sin(2\pi jx)\ dx \\ &= \frac{\cos(\pi j)(\sin(\pi j) - \pi j\cos(\pi j))}{\pi^2 j^2} = \frac{-\pi j(\cos(\pi j))^2}{\pi^2 j^2} \\ &= \frac{-\pi j((-1)^{j-1})^2}{\pi^2 j^2} = -\frac{1}{\pi j}. \end{aligned}$$

Näin ollen funktion f Fourier-sarjalle saadaan esitys

$$f(x) \sim -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi jx)}{j} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \dots\right).$$

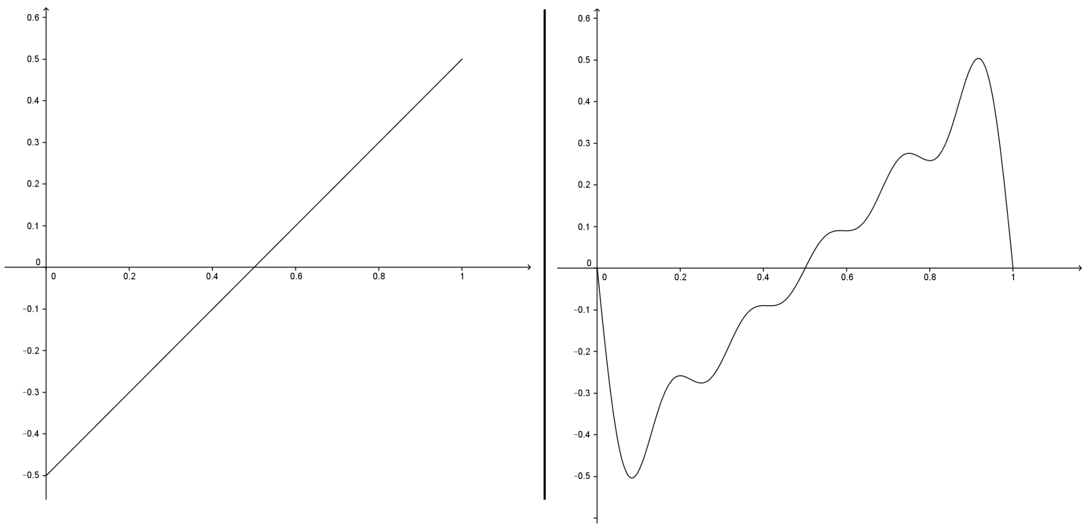
Alla on esitetty vielä rinnakkain funktion f kuvaaja, sekä funktion f Fourier-sarjan viiden ensimmäisen termin summan kuvaaja (kuva 4.1). Kuvasta huomataan, että vaikka summaan on laskettu vasta viisi ensimmäistä termiä, niin käyrä alkaa muistuttaa jo selvästi funktion f kuvaajaa. Intuitiivisesti voidaan päätellä, että kun summaan otetaan lisää ja lisää termejä, niin approksimaatio tarkentuu.

4.2. Bernoullin polynomit

Tässä kappaleessa tarkastellaan niin kutsuttuja Bernoullin polynomeja, sekä johdetaan Fourier-analyysin tuloksin kaava n. Eulerin summan laskemiseksi. Aloitetaan kuitenkin todistamalla muutamia sarjateorian aputuloksia joita tarvitaan myöhemmin. Lisäksi todistetaan mielenkiinnon vuoksi lause 4.11, joka antaa vahvan ehdon tiettyjen trigonometristen sarjojen suppenemiselle. Lauseet 4.6 - 4.10 pohjautuvat lähteeseen [**7**, 12-12], ja Bernoullin polynomeja käsittelevä osuus teokseen [**2**, 8.A.II.1.a].

Lause 4.6. *Olkoot $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujonoja, ja merkitään $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. Tällöin pätee*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k).$$



KUVA 4.1. Funktion $f(x) = x - 1/2$ kuvaaja ja funktion f Fourier-sarjan viiden ensimmäisen termin summan kuvaaja

TODISTUS. Asetetaan $A_0 = 0$, jollon pätee

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} \right)$$

□

HUOMAUTUS 4.7. Lauseesta 4.6 seuraa välittömästi, että jos jono $(A_n b_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ ja sarja $\sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k)$ suppenevat, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ suppenee.

LAUSE 4.8 (Dirichlet'n testi). *Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sarja jonka osasummien muodostama jono on rajoitettu, ja olkoon $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ vähenevä jono joka suppenee kohti nollaa. Tällöin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ suppenee.*

TODISTUS. Merkitään $A_n = a_1 + \cdots + a_n$. Oletuksen mukaan on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $|A_n| \leq M$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, joten $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} = 0$. Edellä todistetun lauseen nojalla riittää siis osoittaa, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1} - b_k)$ suppenee. Koska jono $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ on vähenevä, pätee $|A_k(b_{k+1} - b_k)| \leq M(b_k - b_{k+1})$. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ on teleskooppinen sarja joka suppenee (ks. [**7**, Lause 12-10]), joten myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} M(b_k - b_{k+1})$ suppenee. Näin ollen myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1} - b_k)$ suppenee itseisesti vertailutestin (ks. esim. [**7**, Lause 12-20], [**4**, 4.9]) perusteella. □

LAUSE 4.9. *Kaikille reaaliluvuille $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, pätee*

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} e^{i(n+1)x/2}.$$

TODISTUS. Tarkastellaan ensin ensimmäistä yhtäsuuruutta. Laskemalla huomataan, että

$$(1-e^{ix})\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{n}(e^{ikx} - e^{i(k+1)x}) = e^{ix} - e^{i(n+1)x},$$

mistä väite seuraa jakamalla puolittain termillä $1 - e^{ix}$. Jälkimmäinen yhtäsuuruus saadaan edelleen suoralla laskulla

$$\begin{aligned} e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} &= e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} = e^{ix}\frac{e^{inx/2}(e^{inx/2}-e^{-inx/2})}{e^{ix/2}(e^{ix/2}-e^{-ix/2})} = e^{i(n+1)x/2}\frac{e^{inx/2}-e^{-inx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\ &= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}e^{i(n+1)x/2} \end{aligned}$$

□

Seuraus 4.10. (i) *Edellä todistettu lause antaa ylärajan tarkastellun summan itseisarvolle:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(\cos(kx) + i\sin(kx))\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

(ii) *Kun lisäksi tarkastellaan erikseen reaali- ja imaginääriosat edellisen lauseen tapauksessa, saadaan seuraavat kaavat trigonometrisille funktioille:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right), \quad \text{ja} \\ \sum_{k=1}^{n}\sin(kx) &= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Todistetaan vielä kaksi tulosta, jotka liittyvät trigonometristen sarjojen suppenemiseen. Ensimmäinen on yleisempi tulos tiettyjen trigonometristen sarjojen suppenemiselle, ja toinen on erikoistapaus jota tullaan tarvitsemaan myöhemmin tässä tutkielmassa.

Lause 4.11. *Olkoon väli $I = [\delta, 2\pi - \delta]$, missä $\delta > 0$. Olkoon lisäksi $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ vähenevä jono joka suppenee kohti nollaa. Tällöin jos $x \in I$, niin trigonometrinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty}(\cos(kx) + i\sin(kx))b_k$ suppenee.*

Todistus. Lauseen 4.8 nojalla riittää osoittaa, että sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}(\cos(kx)+\sin(kx))$ osasummien muodostama jono on rajoitettu. Kun $x \in I$, niin edellisen seurauksen 4.10 nojalla pätee

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\cos(kx) + i\sin(kx))\right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \leq M,$$

jollekin luvulle $M \in \mathbb{R}$, joten väite on siis todistettu. □

Lause 4.12. *Sarja*

$$\psi_1(x) := -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi kx)}{k\pi} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \dots\right)$$

suppenee tasaisesti kun $x \in [\delta, 1-\delta]$, *missä* $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

TODISTUS. Tarkastellaan sarjan n. osasummaa $-\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2\pi kx)}{k\pi}$. Merkitään $A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(2\pi kx)$ ja $b_n = \frac{1}{n\pi}$. Lauseen 4.6 nojalla pätee siis

$$|S_n| := \left| -\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2\pi kx)}{k\pi} \right| = (A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k))$$

Olkoon nyt $n > m$, ja tarkastellaan kahden osasumman erotuksien itseisarvoa:

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| &= |A_n b_{n+1} - A_m b_{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n} A_k(b_{k+1} - b_k)| \\ &\leq |A_n||b_{n+1}| + |A_m||b_{m+1}| + \sum_{k=m+1}^{n} |A_k||(b_{k+1} - b_k)| \end{aligned}$$

Käytetään nyt samaa päättelyä kuin edellisen lauseen todistuksessa, jolloin huomataan että kaikille summille $|A_k|$ voidaan löytää yläraja. Siis pätee

$$|S_n - S_m| \leq M b_{n+1} + M b_{m+1} + M \sum_{k=m+1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = M(b_{n+1} + b_{m+1}) + M(b_{m+1} - b_{n+1})$$

Koska lukujono $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti nollaa, niin mielivaltaiselle $\varepsilon > 0$ voidaan löytää indeksi N siten, että $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$ kun $n > m > N$. Näin ollen Cauchyn ehto funktiosarjoille [**4**, 5.2.b] takaa tutkitun sarjan tasaisen suppenemisen.

□

MÄÄRITELMÄ 4.13 (Bernoullin polynomit). Määritellään funktiot $\phi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ rekursiivisesti seuraavilla relaatioilla:

$$\begin{gathered} \phi_n'(x) = \phi_{n-1}(x), \quad \phi_0(x) = 1 \\ \int_0^1 \phi_n(x)\,dx = 0, \quad \text{kun } n > 0. \end{gathered}$$

Ensimmäinen ehto määrää funktiot mielivaltaiselle integroimisvakiolle, ja toinen ehto kiinnittää nämä vakiot. Funktio ϕ_n on selvästi rationaalikertoiminen, astetta n oleva polynomi. Lasketaan esimerkkinä muutama ensimmäinen Bernoullin polynomi auki määritelmää käyttäen. Määritelmän mukaan $\phi_0(x) = 1$, mistä saadaan ensin $\phi_1'(x) = \phi_0(x) = 1$, mistä integroimalla $\phi_1(x) = x + C$, missä $C \in \mathbb{R}$. Toinen määrittelevä ehto kiinnittää vakion C:

$$\int_0^1 \phi_1(x)\,dx = \int_0^1 (x + C)\,dx = \Big/_{0}^{1} \frac{1}{2}x^2 + Cx = \frac{1}{2} + C = 0,$$

mistä $C = -1/2$. Ensimmäisen asteen Bernoullin polynomiksi saadaan siis $\phi_1(x) = x - 1/2$. Lasketaan auki vielä seuraava Bernoullin polynomi: $\phi_2'(x) = \phi_1(x) = x - 1/2$, joten $\phi_2(x) = x^2/2 - x/2 + C$, mistä

$$\int_0^1 \phi_2(x)\,dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + C)\,dx = \Big/_0^1 (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + Cx) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + C = 0,$$

joten vakiolle saadaan arvo $C = 1/12$. Seuraavat polynomit lasketaan vastaavasti. Alla on vielä listattuna viisi ensimmäistä Bernoullin polynomia

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= 1\\
\phi_1(x) &= x - \tfrac{1}{2}\\
\phi_2(x) &= \tfrac{1}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{2}\,x + \tfrac{1}{12}\\
\phi_3(x) &= \tfrac{1}{6}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^2 + \tfrac{1}{12}\,x\\
\phi_4(x) &= \tfrac{1}{24}\,x^4 - \tfrac{1}{12}\,x^3 + \tfrac{1}{24}\,x^2 - \tfrac{1}{720}.
\end{aligned}$$

Kun Bernoullin polynomin asteluku $n > 1$, seuraa määritelmästä selvästi, että

$$\phi_n(1) - \phi_n(0) = \int_0^1 \phi_n'(t)dt = \int_0^1 \phi_{n-1}(t)dt = 0$$

Tästä seuraa, että polynomit ϕ_n, $n > 1$ voidaan laajentaa väliltä $[0,1]$ koko reaaliakselille jaksolliseksi, jatkuvaksi funktioksi ψ_n; niin kutsutuksi Bernoullin funktioksi. Lauseen 4.4 nojalla jokaisella funktiolla ψ_n, $n > 1$ on olemassa tasaisesti kohti funktiota suppeneva Fourier-sarjakehitelmä. Kun $n = 1$, niin funktiota ψ_1 vastaa epäjatkuva funktio joka määritellään siten, että laajennetaan $\phi_1(x)$ koko reaaliakselille, jolloin saadaan 1-jaksollinen funktio joka on epäjatkuva pisteissä $x_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Tämä funktio voidaan esittää Fourier'n sarjana (vrt. esimerkki 4.5)

$$\psi_1(x) \sim -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \dots\right).$$

Lauseen 4.12 nojalla funktion ψ_1 sarjaesitys suppenee tasaisesti. Tämä sarjaesitys on saatu funktion ψ_2 sarjaesityksestä derivoimalla termeittäin. Koska sarjan ψ_2 kaikki funktiot ovat jatkuvasti derivoituvia, ja molemmat sarjat suppenevat tasaisesti välillä $[\delta, 1-\delta]$, niin sarjojen derivoituvuuslauseen (ks. [**4**, 5.3.c]) nojalla summafunktio on jatkuvasti derivoituva ja sen derivaatta on derivaatojen summafunktio. Koska määritelmän mukaan pätee lisäksi $\psi_2' = \psi_1$, niin funktion ψ_1 edellä määrätty Fourier-sarjakehitelmä suppenee kohti funktiota ψ_1, eli pätee

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin 2\pi x}{1} + \frac{\sin 4\pi x}{2} + \frac{\sin 6\pi x}{3} + \dots\right).$$

Myöhemmin todistettavan lauseen 4.15 nojalla Fourier'n sarjaesityksestä funktiolle ψ_1 saadaan edelleen useita kertoja integroimalla

$$\psi_n(t) = (-1)^{(n/2)+1} \cdot \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kt}{k^n}, \quad \text{kun } n \text{ on parillinen, ja}$$

$$\psi_n(t) = (-1)^{(n/2)+1} \cdot \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kt}{k^n}, \quad \text{kun } n \text{ on pariton.}$$

Alkuperäisellä välillä $0 \leq x \leq 1$ funktiot $\psi_n(t)$ ovat identtisiä Bernoullin polynomien $\phi_n(t)$ kanssa. Parillisille n funktio ψ_n on parillinen funktio, ja vastaavasti parittomille n funktio on pariton. Toisin sanoen

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$$

Peräkkäisten Bernoullin polynomien vakiotermit muodostavat erään mielenkiintoisen lukujonon. Vakiotermit voidaan esittää muodossa

$$b_n = \phi_n(0) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & \text{kun } n = 1 \\ \psi_n(0) & \text{kun } n \neq 1. \end{cases}$$

Kun muistetaan sinin ja kosinin nollakohdat, huomataan Fourier-sarjaesityksestä heti, että

$$b_n = 0, \quad \text{kun } n = 3, 5, 7, ..., \text{ ja}$$

$$b_n = (-1)^{(n/2)+1} \cdot \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}, \quad \text{kun } n = 2, 4, 6, ... \tag{4.2}$$

Luvut b_n pienenevät hyvin nopeasti kohti nollaa, kun n kasvaa. Kerrotaan jokaista lukua b_n sopivalla indeksistä n riippuvalla luvulla, ja saadaan näin uusi lukujono $(B_m^*)_{m=1}^{\infty}$, missä

$$B_m^* = (-1)^{m-1}(2m)!\, b_m. \tag{4.3}$$

Luvuille B_m^* pätee $B_m^* = |B_m|$, eli kyseessä on lukujono, joka muodostuu Bernoullin lukujen itseisarvoista. Ylläoleva määritelmä sisältää Riemannin zeetafunktion, joten sen avulla on hankalaa suoraan laskea Bernoullin lukujen itseisarvojen arvoja. Kuitenkin jos Bernoullin luvut kaivetaan vaikkapa määritelmästä 3.1, niin ollaan jälleen tilanteessa, missä on saatu suora laskukaava Eulerin summille. Yhtälöistä (4.2) ja (4.3) saadaan suoraan

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{1}{2}(2\pi)^{2m} b_{2m} = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m}^* = \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}|B_{2m}|$$

Edellisessä osassa johdettiin eri tavalla lähes samanlainen kaava, joka yhdistää Bernoullin luvut ja Eulerin summat. Kyseisellä kaavalla laskettiin kahdelle ensimmäiselle summalle arvot $\zeta(2) = \pi^2/6$ ja $\zeta(4) = \pi^4/90$ Tarkastetaan vielä, että Fourier'n sarjojen avulla johdettu ja vielä edellistä siistimpi kaava antaa saman lopputuloksen:

$$\zeta(2) = \frac{(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} \cdot \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{ja} \quad \zeta(4) = \frac{(2\pi)^4}{2 \cdot 4!} \cdot \left|\frac{-1}{30}\right| = \frac{\pi^4}{90}.$$

Tässä kappaleessa löydettiin siis taas uusi kaava Eulerin summien laskemiseksi. Tarkastellaan seuraavaksi vielä kahta eri menetelmää joilla voi laskea yksittäisiä Eulerin summia.

4.3. Parsevalin kaava

LAUSE 4.14 (Parsevalin kaava). *Olkoon f jatkuva ja 2π-jaksollinen funktio. Tällöin pätee*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j^2 + b_j^2),$$

missä a_j ja b_j ovat funktion f Fourier-kertoimia.

TODISTUS. Todistus vaati pohjalle muutamia Fourier-analyysin tuloksia, joiden sisällyttäminen veisi tutkielmaa liiaksi pois alkuperäisestä aiheesta. Todistus löytyy kirjallisuudesta, esimerkiksi lähteistä [**2**, *8.7.*d.] tai [**7**, Lause 15-22]. □

Parsevalin kaavaa voidaan hyödyntää Eulerin summien laskemisessa. Tarkastellaan funktiota $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Funktion f Fourier-kertoimiksi saadaan laskettua $a_j = \frac{4(-1)^j}{j^2}$ ja $b_j = 0$, kun $j \geq 1$, ja $a_0 = \frac{2\pi}{3}$. Sovelletaan nyt Parsevalin kaavaa funktioon f, jolloin saadaan

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi^4}{9} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{16}{j^4} = \frac{2\pi^4}{9} + 16\zeta(4)$$

Kun lasketaan vasemman puolen integraali auki ja sievennetään hieman, ollaan saatu ratkaistua summan $\zeta(4)$ arvoksi $\zeta(4) = \pi^4/90$. Edelleen käyttämällä Parsevalin kaavaa muihin sopiviin funktioihin saadaan ratkaistua lisää Eulerin summia.

4.4. Fourier-sarjan integrointi

Tasaisesti suppeneva funktiosarja voidaan tunnetusti integroida termeittäin. Tässä kappaleessa osoitetaan, että Fourier-sarjoille pätee vastaava, mutta vielä vahvempi tulos. Lisäksi tätä lausetta hyödyntämällä ratkaistaan eräs Eulerin summa taas uudella menetelmällä.

LAUSE 4.15. *Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva funktio, jolla on muodollinen Fourier-sarjaesitys*

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\right).$$

Tällöin mielivaltaisille pisteille $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ pätee

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\tfrac{1}{2}a_0\,dx + \sum_{j=1}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2}\left(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\right)dx,$$

toisin sanoen funktion Fourier-sarjaesitys voidaan integroida termeittäin.

TODISTUS. Kuten oletuksista huomataan, funktion f Fourier-sarjan integroimiseksi termeittäin ei tarvitse olettaa sarjan tasaista suppenemista; itseasiassa todistuksessa ei tarvita edes tietoa sarjan suppenemisesta kuten seuraavassa huomataan. Määritellään funktio $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x}\left(f(t) - \tfrac{1}{2}a_0\right)dt.$$

Funktio F on selvästi jatkuva, ja sillä on paloittain jatkuva derivaattafunktio. Lisäksi Fourier-kertoimen a_0 määritelmän mukaan saadaan

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \tfrac{1}{2}a_0\right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}a_0\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \pi a_0 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \pi\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right) = 0, \end{aligned}$$

joten pätee $F(\pi) = F(-\pi) = 0$. Siispä funktion F laajennus koko reaaliakselille on jatkuva, joten lauseen 4.4 nojalla funktion Fourier-sarja

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx))$$

suppenee tasaisesti kohti funktiota F. Todetaan vielä, että $F'(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0$ jonka jälkeen osittaisintegroimalla saadaan laskettua funktion F Fourier-kertoimiksi

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(jx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\Big/_{\!-\pi}^{\pi} \frac{\sin(jx)}{j}F(x) - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\frac{\sin(jx)}{j}dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(0 - \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \tfrac{1}{2}a_0\right)\frac{\sin(jx)}{j}dx\right) \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin(jx)}{j}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}a_0\frac{\sin(jx)}{j}\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{j}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)\,dx = -\frac{b_j}{j}, \end{aligned}$$

ja vastaavalla laskulla $B_j = a_j/j$. Tässä luvut a_j ja b_j ovat luonnollisesti funktion f Fourier-kertoimet. Siispä Fourier-sarjaesitystä ja määrätyn integraalin määritelmää hyödyntämällä saadaan

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \sum_{j=1}^{\infty} (A_j\cos(jx_2) + B_j\sin(jx_2)) - \sum_{j=1}^{\infty} (A_j\cos(jx_1) + B_j\sin(jx_1)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j(\cos(jx_2) - \cos(jx_1)) + B_j(\sin(jx_2) - \sin(jx_1))\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[-\frac{b_j}{j}(\cos(jx_2) - \cos(jx_1)) + \frac{a_j}{j}(\sin(jx_2) - \sin(jx_1))\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\Big/_{\!x_1}^{x_2} \left(\frac{a_j}{j}\sin(jx) - \frac{b_j}{j}\cos(jx)\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx))\,dx. \end{aligned}$$

Kun $x_1 < x_2$, niin integraalin laskusääntöjen perusteella pätee lisäksi $\int_{-\pi}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, mistä $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{x_1} f(x)\,dx$. Yhdistämällä edelliset tiedot saadaan siis lopulta

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - \tfrac{1}{2}a_0)\,dx &= \int_{-\pi}^{x_2} (f(x) - \tfrac{1}{2}a_0)\,dx - \int_{-\pi}^{x_1} (f(x) - \tfrac{1}{2}a_0)\,dx = F(x_2) - F(x_1) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))\,dx,\end{aligned}$$

mistä

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \tfrac{1}{2}a_0\,dx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))\,dx,$$

mikä olikin väite. □

Edellä todistetun lauseen 4.15 avulla voidaan siis laskea vaikkapa Eulerin summia. Tarkastellaan funktiota $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Funktiolle f saadaan helposti laskettua Fourier-sarjaesitys

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^j \sin(jx)}{j},$$

jolloin lauseen 4.15 nojalla pätee siis

$$\int_0^{\pi} x\,dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{-2(-1)^j \sin(jx)}{j}\,dx.$$

Laskemalla integraalit ja indeksoimalla yhtälön oikealta puolelta saatava sarja uudestaan havaitaan, että

$$\frac{\pi^2}{2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2(-1)^j(\cos(\pi j) - 1)}{j^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2},$$

mistä saadaan ratkaistua erään sarjan summa: $S' := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \pi^2/8$. Huomataan sitten, että $\zeta(2)$ voidaan hajottaa kahden sarjan summaksi:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + S'.$$

Summa S' ratkaistiin edellä joten ylläolevasta yhtälöstä on helppo ratkaista tuntematon $\zeta(2)$, joka saa arvokseen $\zeta(2) = \pi^2/6$. Hyödyntämällä vastaavaa päättelyä muihin sopivasti valittuihin funktioihin, saadaan edelleen laskettua lisää Eulerin summia.

4.5. Sinifunktion tuloesitys

Ensimmäisessä luvussa tarkasteltiin ensimmäistä Eulerin summaa funktion sinc avulla. Tällöin oletettiin, että kyseisellä funktiolla on olemassa päättymätön tuloesitys

$$\text{(4.4)} \qquad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})\ldots$$

Todistetaan tämä väite seuraavaksi käyttäen apuna Fourier-analyysin tuloksia. Aloitetaan määrittämällä Fourier-sarjaesitys funktiolle $f(x) = \cos(\mu x)$, missä muuttujalle x pätee $-\pi < x < \pi$, ja vakio μ ei ole kokonaisluku. Funktio f on parillinen, joten integraali yli välin $[-a, a]$ on kaksi kertaa integraali yli välin $[0, a]$. Käyttämällä tätä tietoa, sekä trigonometristen funktioiden summakaavoja, saadaan Fourier-kertoimiksi a_j laskettua

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi a_j &= \int_0^\pi \cos(\mu x)\cos(jx)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos[(\mu - j)x] + \cos[(\mu + j)x]\big)dx \\
&= \frac{1}{2} \Big/_{\!0}^{\pi} \left(\frac{\sin[(\mu - j)x]}{\mu - j} + \frac{\sin[(\mu + j)x]}{\mu + j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin[(\mu - j)\pi]}{\mu - j} + \frac{\sin[(\mu + j)\pi]}{\mu + j}\right) \\
&= \frac{\mu(-1)^j}{\mu^2 - j^2}\sin(\mu x)
\end{aligned}
$$

Parillisen ja parittoman funktion tulo on pariton, joten funktio $f(x)\sin(jx)$ on pariton. Parittomalle funktiolle integraali yli välin $[-a, a]$ on nolla, joten Fourier-kertoimiksi b_j saadaan

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(jx)dx = 0$$

Näin ollen funktiolle f saadaan Fourier-sarjaesitys

$$
\begin{aligned}
\cos(\mu x) &= \frac{2\mu\sin(\mu\pi)}{2\pi\mu^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\mu(-1)^j\sin(\mu\pi)}{\pi(\mu^2 - j^2)}\cos(jx) \\
&= \frac{2\mu\sin(\mu\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} - \frac{\cos x}{\mu^2 - 1^2} + \frac{\cos(2x)}{\mu^2 - 2^2} - \frac{\cos 3x}{\mu^2 - 3^2} + \dots\right)
\end{aligned}
$$

Kun funktio f laajennetaan väliltä $[-\pi, \pi]$ koko reaaliakselille, se säilyttää jatkuvuutensa pisteissä $x = \pm\pi$. Kun nyt asetetaan $x = \pi$, jaetaan yhtälön molemmat puolet vakiolla $\sin(\mu\pi)$ ja kirjoitetaan $\mu = x$, niin saadaan yhtälö:

$$\cot(\pi x) = \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2 - 1^2} + \frac{1}{x^2 - 2^2} + \frac{1}{x^2 - 3^2} + \dots\right).$$

Manipuloidaaan lauseketta vielä hieman, ja saadaan

$$\cot(\pi x) - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2 - x^2} + \frac{1}{2^2 - x^2} + \frac{1}{3^2 - x^2} + \dots\right).$$

Nyt jos muuttujalle x pätee $0 < x \leq q < 1$, niin oikean puolen sarjan n. termille pätee

$$\left|-\frac{2x}{\pi(n^2 - x^2)}\right| \leq \left|\frac{2}{2(n^2 - x^2)}\right| = \frac{1}{n^2 - q^2}$$

Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-q^2}$ suppenee selvästi (vrt. 1.4), joten Weierstrassin M-testin (ks. [**4**, 5.4.]) perusteella myös tarkasteltu funktiosarja suppenee itseisesti ja tasaisesti. Tällöin sarjan integrointi voidaan tunnetusti suorittaa termeittäin. Kerrotaan sarjaesityksen molemmat puolet vakiolla π, ja integroidaan puolittain yli välin $[0, x]$, jolloin vasemmalta puolelta saadaan

$$\begin{aligned}
\pi \int_0^x \left(\cot(\pi t) - \frac{1}{\pi t}\right) dt &= \pi \Big/_{0}^{x} \left(\frac{1}{\pi}\log(\sin(\pi t)) - \frac{1}{\pi}\log(\pi t)\right) \\
&= \log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) - \lim_{a\to 0}\log\left(\frac{\sin(\pi a)}{\pi a}\right) \\
&= \log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right),
\end{aligned}$$

ja oikealta puolelta

$$\begin{aligned}
&\pi \int_0^x -\frac{2t}{\pi}\left(\frac{1}{1^2-t^2} + \frac{1}{2^2-t^2} + \dots\right) dt = \int_0^x \frac{-2t}{1^2-t^2}dt + \int_0^x \frac{-2t}{2^2-t^2}dt + \dots \\
&= \Big/_{0}^{x} \log(1^2-t^2) + \Big/_{0}^{x} \log(2^2-t^2) + \dots \\
&= \log\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right) + \log\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right) + \dots = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right).
\end{aligned}$$

Kun yhdistetään nämä tiedot, saadaan lopulta

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\log\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\log\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right) \\
&= \log\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right).
\end{aligned}$$

Luonnollinen logaritmi on injektiivinen funktio, joten voidaan siirtyä tarkastelemaan yllä olevien logaritmien argumentteja. Siispä saadaan

$$\sin(\pi x) = \pi x \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{j^2}\right) = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\cdots,$$

ja näin ollen ollaan löydetty tuloesitys sinifunktiolle. Jos vielä tehdään sijoitus $\pi x = t$, ja jaetaan yhtälö sijoituksen jälkeen puolittain muuttujalla t, niin ollaan kaavan (4.4) tilanteessa, mitä alun perin lähdettiinkin tarkastelemaan. Sinifunktion tuloesityksen voi johtaa myös kompleksianalyysin tuloksia hyödyntämällä (ks. esimerkiksi [**8**, 13.5.]), mutta tähän tutkielmaan Fourier-analyysiä hyödyntävä päättely oli luontevampi valinta. Alusta asti ilmassa roikkunut tulos on siis lopulta saatu perusteltua.

Kirjallisuutta

[1] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth ja Oren Patashnik: *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science.* toinen laitos, Addison-Wesley, 1994.

[2] Richard Courant ja Fritz John: *Introduction to calculus and analysis, volume I*, uusintapainos vuoden 1989 laitoksesta, Classics in Mathematics, Springer, 1999.

[3] John Stillwell: *Mathematics and its history*, toinen laitos, Springer, 2002.

[4] Tero Kilpeläinen: *Analyysi 3: Luentomuistiinpanoja syksyltä 2005.* Jyväskylän yliopisto, luentomoniste, 2005

[5] Tero Kilpeläinen: *Kompleksianalyysi: Luentomuistiinpanoja keväälle 2005.* Jyväskylän yliopisto, luentomoniste, 2006

[6] Janne Koponen: *Bernoullin luvut ja Euler-Maclaurinin summakaava.* Jyväskylän yliopisto, Pro Gradu-tutkielma, 2007

[7] Tom M. Apostol: *Mathematical analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus*, ensimmäinen laitos, Addison-Wesley, 1957

[8] Rolf Nevanlinna ja V. Paatero: *Funktioteoria.* toinen painos, Kustannusosakeyhtiö Otava, 1971

[9] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner ja ANdrew M. Bruckner: *Elementary Real Analysis*, toinen painos, ClassicalRealAnalysis.com, 2008

[10] Elias M. Stein ja Rami Shakarchi: *Fourier analysis: an introduction.* Princeton University Press, 2003.