Ryhmä SO(3) ja sen lineaariset redusoitumattomat esitykset

Ilari Korhonen

Matematiikan Pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2014

Tiivistelmä: Korhonen Ilari, *Ryhmä* SO(3) *ja sen lineaariset redusoitumattomat esitykset*, matematiikan Pro gradu -tutkielma, 55 s., Jyväskylän Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2014.

Ryhmät ovat yksinkertaisina mutta elegantteina algebrallisina rakenteina jo pitkään olleet keskeinen osa niin puhdasta kuin sovellettuakin matematiikkaa. Erityisesti ryhmät soveltuvat erilaisten *symmetrioiden* esittämiseen. Ryhmien esitysteoriassa voidaan ryhmien rakennetta koskevia ongelmia palauttaa *lineaarialgebran* ongelmiksi, jotka ovat hyvin ratkaistavissa. Tämä tapahtuu kuvaamalla ryhmä *homomorfisesti* lineaarikuvausten ryhmään. Osoittautuu myös mielenkiintoiseksi tutkia jo itsessään lineaarikuvauksista muodostuvien ryhmien epätriviaaleja lineaarisia esityksiä.

Erityisen tarkastelun kohteena tutkielmassa on *klassinen matriisiryhmä* SO(3), joka siis koostuu avaruuden $\mathbb{R}^3$ rotaatiokuvauksista. Ryhmä SO(3) muiden klassisten matriisiryhmien tapaan on erityisesti ns. *Lien ryhmä*, ts. *sileä monisto* siten, että ryhmän operaatio ja käänteisalkion muodostaminen ovat vastaavassa mielessä *sileitä kuvauksia* (Sophus Lie, 1842 - 1899). Monistoja puolestaan voidaan luonnehtia käyrien ja pintojen yleistyksiksi. Tarkemmin ilmaistuna monisto on *topologinen avaruus*, joka on *lokaalisti euklidinen*, ts. jokaisella pisteellä on ympäristö, joka on *homeomorfinen* jonkin euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimen joukon ts. *kartan* kanssa. Monisto on *sileä*, jos siirtymät karttojen välillä ovat avaruuden $\mathbb{R}^n$ sileitä kuvauksia.

Lien ryhmät ovat merkillisiä monistoja siinäkin mielessä, että niiden geometria on pitkälti kuvattavissa algebrallisesti ns. *Lien algebran* avulla. Osoittautuu, että tämä Lien ryhmää *vastaava* Lien algebra saadaan aina moniston *tangenttiavaruudesta* neutraalialkiolle. Riittävän siististä tapauksessa koko ryhmän geometria määräytyy pelkästään sitä vastaavasta Lien algebrasta. Kuitenkin aina *neutraalialkion sisältävä yhtenäinen komponentti* määräytyy Lien ryhmää vastaavasta Lien algebrasta.

Lien ryhmien esitysteoria eroaa hieman *äärellisten* ryhmien esitysteoriasta, sillä ryhmän rakenteen säilymisen homomorfismissa lisäksi vaaditaan moniston *sileän struktuurin* säilymistä. Lisäksi useat Lien ryhmät, kuten SO(3), ovat *kompakteja*. Tämä tarkoittaa puolestaan sitä, että käyttöön saadaan myös *kompaktien topologisten ryhmien* esitysteorian tulokset, kuten *unitaaristen* esitysten olemassaolo ja *Peterin ja Weylin lause* (Hermann Weyl, 1885 - 1955 sekä hänen oppilaansa Fritz Peter, 1899 - 1949). Nämä perustuvat pohjimmiltaan ns. *Haarin mitan* (Alfréd Haar, 1885 - 1933) olemassaoloon kaikilla *lokaalisti kompakteilla topologisilla ryhmillä*, joita kompaktit ryhmät tietysti ovat.

Tutkielman päätuloksena esitetään ryhmän SO(3) redusoitumattomien esitysten konstruktio, sekä todistus sille, että kaikki muut redusoitumattomat esitykset ovat ekvivalentteja tälle konstruktiolle. Konstruktiossa päädytään ns. *palloharmonisiin* funktioihin.

Päiväys: 15. toukokuuta 2014

Sisältö

JOHDANTO

Lien ryhmät *sileinä monistoina* ovat mielenkiintoisia paitsi algebran myös analyysin näkökulmasta. Tässä tutkielmassa esitetyt tulokset antavat mielenkiintoisia yhteyksiä näiden kahden hyvinkin erilaisen matematiikan osa-alueen välille.

Tutkielmassa perehdytään aluksi Lien ryhmiä yleisempiin *topologisiin ryhmiin* ja erityisesti niiden *suljettuihin* ja *kompakteihin* aliryhmiin. Yleisellä tasolla esitellään myös Lien ryhmät sekä niihin oleellisella tavalla liittyvät *Lien algebrat*.

Erityisesti tutkielmassa paneudutaan ns. *klassisiin matriisiryhmiin*, joista erityisen tarkastelun kohteena ovat ryhmät $\mathrm{SO}(3)$ ja $\mathrm{SU}(2)$, jotka liittyvät läheisesti toisiinsa.

Tutkielmassa myös esitellään Lien ryhmien esitysteoriaa ja lisäksi myös kompaktien ryhmien esitysteoriaa. Erityisen tarkastelun alle otetaan kompaktin Lien ryhmän $\mathrm{SO}(3)$ *redusoitumattomat* esitykset. Nämä löytyvätkin hyvin erikoisella tavalla.

Palloharmoniset funktiot löydettiin Laplacen yhtälön (Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827)

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = 0$$

ratkaisujen kautta. Mikäli ratkaisut esitetään *pallokoordinaateissa*, voidaan ne erityisesti esittää ns. *separoidussa* muodossa, toisin sanoen

$$f(r, \theta, \phi) = R(r)\, Y(\theta, \phi)\,,$$

missä R on *säteestä* eli etäisyydestä origoon riippuva osa ja $Y(\theta, \phi)$ on *kulmakoordinaateista* riippuva osa. Osoittautuu, että *Laplace-operaattori*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

on niin sanotusti *rotaatiosymmetrinen*, ts. jos funktio f on *harmoninen* eli $\Delta f = 0$, on myös kuvaus $f \circ T$ harmoninen, kun $T \in \mathrm{SO}(3)$. Tämä johtuu tietysti siitä, että lineaarikuvaus T on avaruuden $\mathbb{R}^3$ rotaatio, ts. ortogonaalinen kannanvaihto siten, että akselien orientaatio säilyy.

Tästä johtuen ryhmän SO(3) *redusoitumattomat* esitykset palautuvat harmonisten homogeenisten polynomien avaruuksiin, joiden rajoittumia yksikköpalloon $\mathbb{S}^2$ palloharmoniset funktiot ovat. Tutkielman lopussa konstruoidaan ryhmän SO(3) redusoitumattomat esitykset ja osoitetaan, että oleellisesti muita ei ole, toisin sanoen kaikki muut redusoitumattomat esitykset ovat *ekvivalentteja* tälle konstruktiolle.

Luku 1

Lien ryhmät ja Lien algebrat

1.1 Topologiset ryhmät

Ryhmästä saadaan topologinen avaruus varustamalla se jollakin topologialla. Tällöin ryhmään saadaan erityisesti jatkuvat kuvaukset ja näin päädytään *topologisen ryhmän* käsitteeseen.

Määritelmä 1.1.1. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja $\mathcal{T}$ joukon G topologia siten, että pari $(G, \mathcal{T})$ on Hausdorff-avaruus. Ryhmä G topologialla $\mathcal{T}$ varustettuna, ts. $(G, \cdot, \mathcal{T})$ on *topologinen ryhmä*, jos kuvaukset

$$G \times G \to G : (g, h) \mapsto g \cdot h \quad \forall\, g, h \in G$$

ja

$$G \to G : g \mapsto g^{-1} \quad \forall\, g \in G$$

ovat jatkuvia topologian $\mathcal{T}$ mielessä.

Topologisen ryhmän määritelmässä olevasta topologian Hausdorff-ehdosta voitaisiin luopua ilman että topologisen ryhmän käsite olennaisesti muuttuisi. Mikäli näin tehtäisiin, voitaisiin kuitenkin jokaisesta *(ei-Hausdorff)* topologisesta ryhmästä *kanonisella* tavalla konstruoida Hausdorff topologinen ryhmä. Tästä syystä toisinaan kirjallisuudessa, kuten esimerkiksi teoksessa [Far08] käytetään vain näennäisesti yleisempää määritelmää.

Määritelmä 1.1.2. Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä. Joukon G *diskreetillä topologialla* $\mathcal{T} = \mathcal{P}(G)$ varustettu topologinen ryhmä $(G, \cdot, \mathcal{T})$ on *diskreetti topologinen ryhmä.*

Edellisen määritelmän mukaan siis *jokainen* ryhmä itse asiassa on (diskreetti) topologinen ryhmä, ko. joukon diskreetillä topologialla varustettuna.

Suljetut aliryhmät ovat topologisten ryhmien aliryhmistä merkittävä erityistapaus.

Lause 1.1.3. *Olkoon* $(G, \cdot)$ *topologinen ryhmä.*
i) Jos H *on ryhmän* G *avoin aliryhmä, on* H *myös suljettu.*
ii) Neutraalialkion sisältävä yhtenäinen komponentti G_0 *on suljettu normaali aliryhmä.*

Todistus. *i*) Olkoon $H \subset G$ avoin aliryhmä ja $g \in G \setminus H$. Selvästi kuvaus $G \to G : g' \mapsto gg'$ on homeomorfismi ja siten avoin kuvaus. Näin ollen joukko gH on pisteen g ympäristö joukossa G. Koska aliryhmän H sivuluokat ovat pistevieraita ja $eH = H$ on yksi niistä, pätee $gH \subset G \setminus H$. Saadaan siten

$$G \setminus H = \bigcup_{g \in G \setminus H} gH ,$$

joka on siis avointen joukkojen yhdisteenä avoin ja siten H on suljettu.

ii) Olkoon $g_0 \in G_0$. Tällöin $g_0^{-1} G_0$ on yhtenäisen joukon kuvana jatkuvassa kuvauksessa yhtenäinen ja selvästi $e \in g_0^{-1} G_0$. Siis on $g_0^{-1} G_0 \subset G_0$ ja siten G_0 on ryhmän G aliryhmä. Edelleen, jos $g \in G$, on joukko $g\, G_0\, g^{-1}$ selvästi yhtenäinen ja sisältää neutraalialkion e. On siis oltava, että $g\, G_0\, g^{-1} \subset G_0$ ja siten G_0 on normaali aliryhmä. Lisäksi G_0 on komponenttina suljettu. □

1.2 Lineaariset ryhmät

Kääntyvistä lineaarikuvauksista muodostuvia ryhmiä kutsutaan *lineaarisiksi ryhmiksi.* Niistä yleisin eli vektoriavaruuden kaikkien kääntyvien lineaarikuvausten joukko kuvausten yhdistämisoperaatiolla varustettuna on vektoriavaruuden *yleinen lineaarinen ryhmä.*

Määritelmä 1.2.1. Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus kerroinkuntanaan $\mathbb{K}$. Tällöin vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ *yleinen lineaarinen ryhmä* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ on lineaarikuvausten avaruuden $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ osajoukko

$$\mathrm{GL}(\mathcal{V}) = \{\, T : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \mid T \,\text{on lineaarinen bijektio}\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{V}) = \{\, L : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \mid L \text{ lineaarinen}\,\} ,$$

kuvausten yhdistämisoperaatiolla varustettuna.

Lineaarikuvausten avaruudet ovat luonnollisella tavalla isomorfisia matriisiavaruuksien kanssa.

Määritelmä 1.2.2. Olkoon $\mathbb{K}$ joko reaalilukujen kunta $\mathbb{R}$ tai kompleksilukujen kunta $\mathbb{C}$ ja $n \geq 2$. Joukko $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on $\mathbb{K}$-alkioisten $n \times n$ neliömatriisien vektoriavaruus, ts.

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \left\{\, (a_{ij})_{n\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{K} \,\right\} ,$$

matriisien summan ja skalaarimonikerran mielessä.

Neliömatriisien avaruus on selvästi normiavaruus euklidisella eli Hilbert-Schmidt -normilla varustettuna. Lisäksi normilta voidaan edellyttää yhteensopivuutta matriisien tulon kanssa, jolloin päädytään erityisen *matriisinormin* määritelmään.

Määritelmä 1.2.3. Avaruudessa $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ määritelty normi $\|\cdot\|$ on *matriisinormi*, mikäli se on *submultiplikatiivinen*, toisin sanoen

$$\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \| \ ,$$

kaikilla $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Vektoriavaruuden normi indusoi ns. *operaattorinormin* neliömatriisien avaruuteen.

Määritelmä 1.2.4. Vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ normin $\|\cdot\|$ avaruuteen $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ indusoima *operaattorinormi* $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ määritellään siten, että

$$\| A \|_{\mathrm{op}} = \sup_{\| x \| = 1} \| Ax \| \ ,$$

kaikilla $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Lause 1.2.5. *Operaattorinormi $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ on matriisinormi avaruudessa $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Todistus. Operaattorinormi on selvästi normi. Riittää osoittaa submultiplikatiivisuus. Olkoon $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Voidaan olettaa, että $Bx \neq 0$ jollakin $x \in \mathbb{K}^n$. Saadaan

$$\begin{aligned} \| AB \|_{\mathrm{op}} &= \sup_{\| x \|=1} \| (AB)x \| = \sup_{\substack{\| x \|=1 \\ Bx\neq 0}} \| Bx \| \frac{\| A(Bx) \|}{\| Bx \|} = \sup_{\substack{\| x \|=1 \\ Bx\neq 0}} \| Bx \| \left\| A \left(\frac{Bx}{\| Bx \|} \right) \right\| \\ &= \sup_{\| x \|=1} \| Bx \| \, \| Ax \| \leq \sup_{\| x \|=1} \| Ax \| \sup_{\| x \|=1} \| Bx \| = \| A \|_{\mathrm{op}} \| B \|_{\mathrm{op}} \ . \end{aligned}$$

□

Tarkastellaan nyt vektoriavaruuksien $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^n$ yleisiä lineaarisia ryhmiä sekä niiden aliryhmiä. Sellaisia ovat mm. niinsanotut *klassiset matriisiryhmät*.

Määritelmä 1.2.6. Olkoon $n \geq 2$. Tällöin $n \times n$ *klassiset matriisiryhmät* ovat
i) reaalinen ja kompleksinen yleinen lineaarinen ryhmä

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{ja} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

ii) reaalinen ja kompleksinen erityinen lineaarinen ryhmä

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \} \ \text{ ja } \ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1 \}$$

iii) ortogonaaliryhmä

$$\mathrm{O}(n) = \left\{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^{-1} = A^t \right\}$$

iv) erityinen ortogonaaliryhmä

$$\mathrm{SO}(n) = \{ A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1 \}$$

v) unitaariryhmä

$$\mathrm{U}(n) = \left\{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; A^{-1} = A^\dagger \right\}$$

vi) erityinen unitaariryhmä

$$\mathrm{SU}(n) = \{ A \in \mathrm{U}(n) \mid \det(A) = 1 \}$$

Edellä matriisin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ transpoosista käytetään merkintää A^t. Vastaavasti kompleksisen matriisin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *hermiittinen transpoosi* eli ns. *adjungaattimatriisi* on $A^\dagger = (A^*)^t = (a_{ij}^*)^t$, missä edelleen kompleksikonjugaatista käytetään merkintää *.

On selvää, että edellä määritellyt joukot todellakin ovat ryhmiä. Sen lisäksi osoittautuu, että matriisien tulo ja kääntäminen ovat jatkuvia kuvauksia matriisiavaruuden normien määräämän *normitopologian* mielessä. Täten kyseiset joukot ovat itse asiassa topologisia ryhmiä normitopologialla varustettuna.

Lause 1.2.7. *Matriisitulo on jatkuva kuvaus avaruuden $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ normitopologian mielessä.*

Todistus. Olkoon $\|\cdot\|$ jokin matriisinormi avaruudessa $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Olkoon edelleen (A_k) ja (B_k) normin $\|\cdot\|$ mielessä suppenevia jonoja avaruudessa $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ siten, että

$$A_k \to A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{ja} \quad B_k \to B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

kun $k \to \infty$. Normiavaruudessa suppeneva jono on rajoitettu, joten on $M > 0$ siten, että $\| A_k \| \leq M$, kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Nähdään, että $A_k B_k \to AB$, kun $k \to \infty$, sillä

$$\begin{aligned}
\| A_k B_k - AB \| &= \| A_k B_k - A_k B + A_k B - AB \| \\
&\leq \| A_k (B_k - B) \| + \| (A_k - A) B \| \\
&\leq \| A_k \| \, \| B_k - B \| + \| A_k - A \| \, \| B \| \\
&\leq M \| B_k - B \| + \| A_k - A \| \, \| B \| \to 0,
\end{aligned}$$

kun $k \to \infty$. Matriisitulo on siis jatkuva matriisinormin $\|\cdot\|$ määräämässä topologiassa.

Äärellisulotteisen vektoriavaruuden kaikki normit ovat ekvivalentteja ja siten määräävät siis saman topologian, normitopologian. Matriisitulo on siten jatkuva kuvaus normitopologiassa. □

Matriisien tulon jatkuvuuden lisäksi tullaan osoittamaan, että vastaavasti matriisin kääntäminen on jatkuva kuvaus normitopologiassa. Osoitetaan ensin seuraava merkittävä aputulos.

Lemma 1.2.8. *Olkoon* $\| \cdot \|$ *jokin matriisinormi avaruudessa* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Oletetaan, että* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *siten, että* $\| M \| < 1$. *Tällöin* $I + M$ *on kääntyvä ja käänteismatriisille* $(I+M)^{-1}$ *pätee*

$$\left\| (I+M)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \| M \|} .$$

Todistus. Osoitetaan, että

$$(I+M)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k M^k .$$

Osoitetaan ensin sarjan suppeneminen. Jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ saadaan

$$\left\| (-1)^k M^k \right\| = \left\| M^k \right\| = \left\| M M^{k-1} \right\| \leq \| M \| \left\| M^{k-1} \right\| \leq \| M \|^2 \left\| M^{k-2} \right\| \leq \cdots \leq \| M \|^k .$$

Siispä oletuksesta $\| M \| < 1$ seuraa, että sarja $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k M^k$ on majoranttiperiaatteen nojalla itseisesti suppeneva. Edelleen, kun $N \in \mathbb{N}$ osasummille saadaan

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k M^k = I - M + M^2 - M^3 + \cdots + (-1)^N M^N ,$$

josta edelleen

$$\begin{aligned} (I+M)S_N &= (I - M + M^2 - M^3 + \cdots + (-1)^N M^N) + \\ &\quad\ (M - M^2 + \cdots + (-1)^{N-1} M^N + (-1)^N M^{N+1}) \\ &= I + (-1)^N M^{N+1} . \end{aligned}$$

Siispä nähdään, että

$$\| I - (I+M)S_N \| = \left\| (-1)^N M^{N+1} \right\| = \left\| M^{N+1} \right\| \leq \| M \|^{N+1} \longrightarrow 0 ,$$

kun $N \to \infty$. Toisin sanoen siis $(I+M)S_N \to I$, kun $N \to \infty$ ja matriisitulon jatkuvuuden nojalla on oltava välttämättä $S_N \to (I+M)^{-1}$, kun $N \to \infty$.

Lopuksi suppenevan geometrisen sarjan summasta saadaan arvio

$$\left\| (I+M)^{-1} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| M^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| M \|^k = \frac{1}{1 - \| M \|} .$$

□

Edellä osoitetun aputuloksen nojalla voidaan nyt osoittaa kaksi toisiinsa läheisesti liittyvää erittäin oleellista tulosta.

Lause 1.2.9. *i) Yleinen lineaarinen ryhmä* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *on avoin avaruuden* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *normitopologiassa.*

ii) Kuvaus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : A \mapsto A^{-1}$ *on jatkuva normitopologiassa.*

Todistus. Oletetaan, että $\|\cdot\|$ on jokin matriisinormi avaruudessa $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Olkoon $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mielivaltainen.

i) Olkoon $0 < \epsilon \leq \left\| A^{-1} \right\|^{-1}$. Olkoon edelleen $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ siten, että

$$\| B - A \| \leq \epsilon .$$

Osoitetaan, että B on kääntyvä. Saadaan, että

$$B = A(I + A^{-1}(B - A)) = A(I + M) ,$$

kun asetetaan $M = A^{-1}(B - A)$. Nyt havaitaan, että

$$\| M \| = \left\| A^{-1}(B - A) \right\| \leq \left\| A^{-1} \right\| \| B - A \| \leq \left\| A^{-1} \right\| \epsilon < 1 .$$

Näin ollen lemman 1.2.8 nojalla matriisi $I + M$ on kääntyvä ja B on kahden kääntyvän matriisin tulona kääntyvä. Siten joukko $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on avoin avaruuden $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ normitopologiassa.

ii) Jos B on kuten edellä, saadaan edelleen

$$B^{-1} = (I + M)^{-1} A^{-1} \quad ,$$

josta puolestaan saadaan arvio

$$\left\| B^{-1} \right\| = \left\| (I + M)^{-1} A^{-1} \right\| \leq \left\| (I + M)^{-1} \right\| \left\| A^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \| M \|} \left\| A^{-1} \right\| \leq \frac{\left\| A^{-1} \right\|}{1 - \left\| A^{-1} \right\| \epsilon} .$$

Lopulta, koska

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1} A A^{-1} - B^{-1} B A^{-1} = B^{-1}(A - B) A^{-1} ,$$

nähdään, että

$$\left\| B^{-1} - A^{-1} \right\| = \left\| B^{-1}(A - B) A^{-1} \right\| \leq \left\| B^{-1} \right\| \| B - A \| \left\| A^{-1} \right\| \leq \frac{\left\| A^{-1} \right\|^2 \epsilon}{1 - \left\| A^{-1} \right\| \epsilon} \to 0 ,$$

kun $\epsilon \to 0$. Matriisin kääntäminen on siis jatkuva kuvaus normitopologiassa. $\square$

Edellisten tulosten perusteella nähdään, että itse asiassa kaikki klassiset matriisiryhmät ovat topologisia ryhmiä.

Seuraus 1.2.10. *Klassiset matriisiryhmät ovat topologisia ryhmiä normitopologian mielessä.*

Todistus. Selvästi jokainen klassisista matriisiryhmistä on joko reaalisen yleisen lineaarisen ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tai kompleksisen yleisen lineaarisen ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ aliryhmä ja siten topologinen ryhmä. $\square$

Kompaktit ryhmät ovat olennainen osa ryhmien esitysteoriaa, sillä hyvin tunnettu äärellisten ryhmien esitysteoria yleistyy luonnollisella tavalla kompakteille ryhmille. Seuraava tulos antaa hyödyllistä tietoa topologisen ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ kompakteista osajoukoista.

Lause 1.2.11. *i) Olkoon $C > 0$. Ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ osajoukko*

$$G_C(\mathbb{K}) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \ : \ \| g \| \leq C \ \text{ ja } \ \left\| g^{-1} \right\| \leq C \right\}$$

on kompakti.
ii) Jokainen ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ kompakti osa sisältyy joukkoon $G_C(\mathbb{K})$, jollakin $C > 0$.

Todistus. *i)* Riittää osoittaa, että joukko $G_C(\mathbb{K})$ on jonokompakti. Olkoon (g_k) jono joukossa $G_C(\mathbb{K})$. Edelleen kompaktiin ja siten jonokompaktiin joukkoon $\bar{B}(O,C) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sisältyvällä jonolla (g_k) on suppeneva osajono (g_{k_l}) siten, että $g_{k_l} \to g \in \bar{B}(O,C)$, kun $l \to \infty$. Koska edelleen kaikilla $l \in \mathbb{N}$ pätee $g_{k_l}^{-1} \in \bar{B}(O,C)$, on olemassa suppeneva osajono $(g_{k_{l_j}}^{-1})$ siten, että $g_{k_{l_j}}^{-1} \to h \in \bar{B}(O,C)$, kun $j \to \infty$. Koska kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $g_k g_k^{-1} = I$ saadaan edelleen $gh = I$, matriisitulon jatkuvuuden nojalla. Siis g on kääntyvä ja $h = g^{-1}$ ja on välttämättä $g \in G_C(\mathbb{K})$.

ii) Olkoon $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ kompakti. Siten K on rajoitettu, toisin sanoen on $C_1 \geq 0$ siten, että

$$K \subset B_1 = \{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \ : \ \| g \| \leq C_1 \} .$$

Edelleen kompaktin joukon K kuva jatkuvassa kuvauksessa

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \ : \ g \mapsto g^{-1}$$

on kompakti ja siten rajoitettu. Siis on $C_2 > 0$ siten, että

$$K \subset B_2 = \{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \ : \ \left\| g^{-1} \right\| \leq C_2 \} .$$

Näin ollen $K \subset B_1 \cap B_2$ ja erityisesti $K \subset G_C(\mathbb{K})$, kun valitaan $C = \max\{ C_1, C_2 \}$. $\square$

1.3 Lien ryhmät

Lien ryhmät ovat *sileitä monistoja* ja siten merkittävä erityistapaus topologisista ryhmistä. Tässä tutkielmassa käytetty sileiden monistojen terminologia vastaa teoksessa [Lee03] olevaa.

Määritelmä 1.3.1. Ryhmä $(G,\ \cdot)$ on n-ulotteinen *Lien ryhmä*, jos joukko G on sileä n-ulotteinen monisto, jollakin $n \in \mathbb{N}$ siten, että kuvaukset

$$G \times G \to G : (g, h) \mapsto g \cdot h \quad \forall\, g, h \in G$$

ja

$$G \to G : g \mapsto g^{-1} \quad \forall\, g \in G$$

ovat moniston G sileitä kuvauksia.

Lause 1.3.2. *Lien ryhmä $(G,\ \cdot)$ on topologinen ryhmä.*

Todistus. Joukko G on (sileänä) monistona Hausdorff-topologinen avaruus. Moniston G sileät kuvaukset ovat välttämättä jatkuvia. □

Tässä tutkielmassa pääasiallisen tarkastelun kohteena ovat klassiset matriisiryhmät. Osoittautuu, että ne itse asiassa ovat Lien ryhmiä. Tähän tulokseen päästään yleisen lineaarisen ryhmän kautta.

Lause 1.3.3. *Yleinen lineaarinen ryhmä $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on n^2-ulotteinen Lien ryhmä.*

Todistus. Neliömatriisien avaruus $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ja euklidinen avaruus $\mathbb{R}^{n^2}$ ovat selvästi lineaarisesti isomorfisia kuvauksella $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ siten, että

$$\phi(A) = (a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{nn})\,, \quad \text{kun } A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,.$$

Siten edelleen kuvaus ϕ on homeomorfismi normitopologiassa. Lauseen 1.2.9 nojalla $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on avoin avaruuden $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ normitopologiassa. Olkoon $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mielivaltainen. Nyt pisteellä $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on ympäristö $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, joka on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ avoimen joukon $\phi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ kanssa. Näin ollen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on n^2-monisto. Nyt kaikki moniston siirtymäkuvaukset ovat sileitä, sillä kuvaus

$$\phi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \to \phi(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$$

on identtisenä kuvauksena $\mathcal{C}^{\infty}$-kuvaus avaruudessa $\mathbb{R}^{n^2}$. Näin ollen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on sileä monisto.

Määritellään nyt kuvaus $\mu : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ siten, että

$$\mu(X,Y) = XY\,, \quad \text{kaikilla } X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,.$$

Nyt kuvaus μ on sileä, sillä yhdistetyn kuvauksen $\phi \circ \mu \circ (\phi^{-1}\,,\,\phi^{-1})$ komponenttikuvauksille, kun $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ saadaan

$$(\phi \circ \mu \circ (\phi^{-1}\,,\,\phi^{-1}))_{(i-1)n+j}\,(x,y) = \sum_{p=1}^{n} x_{(i-1)n+p}\, y_{(p-1)n+j}\,,$$

joka on selvästi $\mathcal{C}^\infty$-kuvaus $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$. Edelleen määritellään kuvaus $i : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, jolle

$$i(X) = X^{-1} = \frac{1}{\det(X)}\,(\mathrm{cof}\,(X))^t\,, \quad \text{kun } X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,.$$

Edellä siis matriisin $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *kofaktorimatriisi* saadaan

$$\mathrm{cof}\,(A) = [\,\mathrm{cof}\,(a_{ij})\,]_{n\times n}\,,$$

missä $\mathrm{cof}\,(a_{ij})$ on matriisin A alkioa (i,j) vastaava *kofaktori* s.e.

$$\mathrm{cof}\,(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})\,,$$

missä edelleen A_{ij} on matriisin A alkioa (i,j) vastaava *alimatriisi*, ts. $(n-1)\times(n-1)$ matriisi, joka saadaan matriisista A poistamalla siitä i:s rivi ja j:s sarake. Nyt kuvauksen $\phi \circ i \circ \phi^{-1}$ kaikki komponenttikuvaukset ovat polynomeina $\mathcal{C}^\infty$-kuvauksia $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$. Siten kuvaus i on sileä. □

Edelliseen tulokseen voidaan palauttaa kaikkien reaalisten ja kompleksisten äärellisulotteisten vektoriavaruuksien yleiset lineaariset ryhmät.

Seuraus 1.3.4. *Yleinen lineaarinen ryhmä* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *on* $2n^2$*-ulotteinen Lien ryhmä.*

Todistus. Kompleksinen $n \times n$ -matriisi voidaan samaistaa reaaliseen $n \times 2n$ -matriisiin. □

Seuraus 1.3.5. *Reaalisen* n*-ulotteisen vektoriavaruuden* $\mathcal{V}$ *yleinen lineaarinen ryhmä* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *on* n^2*-ulotteinen Lien ryhmä.*

Todistus. Valitsemalla avaruudelle $\mathcal{V}$ kanta voidaan se samaistaa avaruuteen $\mathbb{R}^n$. □

Seuraus 1.3.6. *Kompleksisen* n*-ulotteisen vektoriavaruuden* $\mathcal{V}$ *yleinen lineaarinen ryhmä* $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ *on* $2n^2$*-ulotteinen Lien ryhmä.*

Todistus. Vastaavasti kompleksinen avaruus $\mathcal{V}$ voidaan samaistaa avaruuteen $\mathbb{C}^n$. □

1.4 Lien algebrat

Lien ryhmään liittyy läheisesti rakenne nimeltään *Lien algebra*. Yleisesti ottaen Lien algebra on vektoriavaruus varustettuna erityisellä tietyt ehdot toteuttavalla bilineaarikuvauksella ns. *Lien sulkeella*. Osoittautuu, että jokaiseen Lien ryhmään liittyy aina erityinen Lien algebra, jonka avulla voidaan Lien ryhmien geometrisia ominaisuuksia palauttaa algebrallisiin ominaisuuksiin.

Määritelmä 1.4.1. Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus.

i) Bilineaarikuvaus $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ on *Lien sulje*, mikäli kuvaus $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ on *alternoiva*, ts.

$$[\,x\,,\,x\,] = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{V}$$

ja kuvaukselle $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ pätee *Jacobin yhtälö*, ts.

$$[\,x\,,\,[\,y\,,\,z\,]\,] + [\,y\,,\,[\,z\,,\,x\,]\,] + [\,z\,,\,[\,x\,,\,y\,]\,] = 0 \quad \forall\, x, y, z \in \mathcal{V}\,.$$

ii) Vektoriavaruus $\mathcal{V}$ Lien sulkeella $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ varustettuna on *Lien algebra*.

Seuraavaksi nähdään, että Lien ryhmän ja sen neutraalialkioa vastaavan tangenttiavaruuden välillä on merkittävä yhteys. Määritellään ensin käsite *yhden parametrin aliryhmä*.

Määritelmä 1.4.2. Olkoon $(G, \cdot\,)$ Lien ryhmä. Kuvaus $\gamma : \mathbb{R} \to G$ on Lien ryhmän G *yhden parametrin aliryhmä*, jos γ on sileä ryhmähomomorfismi additiiviselta ryhmältä $(\mathbb{R}, +)$ Lien ryhmälle $(G, \cdot\,)$.

Voidaan osoittaa, että jokaista neutraalialkion tangenttivektoria vastaa tasan yksi yhden parametrin aliryhmä.

Lause 1.4.3. *Olkoon G Lien ryhmä ja $x \in T_eG$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Lien ryhmän G yhden parametrin aliryhmä $\gamma_x : \mathbb{R} \to G$ siten, että $\gamma_x'(0) = x$.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Lee03, Thm. 20.1, s. 516]. □

Edellisen tuloksen perusteella voidaan määritellä *eksponenttikuvaus*, joka on kuvaus tangenttiavaruudelta Lien ryhmälle.

Määritelmä 1.4.4. Olkoon G Lien ryhmä. Eksponenttikuvaus $\exp : T_eG \to G$ määritellään siten, että

$$\exp(x) = \gamma_x(1) \quad \forall\, x \in T_eG\,,$$

missä $\gamma_x : \mathbb{R} \to G$ on yhden parametrin aliryhmä siten, että $\gamma_x'(0) = x$.

Eksponenttikuvauksella on useita merkittäviä ominaisuuksia. Olennaisimmat tulokset on koottu seuraavaan lauseeseen, todistukset sivuutetaan.

Lause 1.4.5. *Olkoon G Lien ryhmä.*
i) Eksponenttikuvaus on sileä kuvaus monistolle G.
ii) Eksponenttikuvauksen derivaattalle pisteessä $0 \in T_eG$ saadaan $D(\exp)_0 = \mathrm{Id}_{T_eG}$.
iii) On olemassa pisteen $0 \in T_eG$ ympäristö U siten, että eksponenttikuvauksen rajoittuma $\exp|_U$ on diffeomorfismi joukolta U joukolle $\exp(U) \subset G$.

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Lee03, Prop. 20.8, s. 519-521]. □

Matriisiryhmille eksponenttikuvaus saadaan varsin luonnollisesti. Osoittautuu, että reaalista ja kompleksista eksponenttifunktiota vastaava potenssisarja on hyvin määritelty myös matriiseille.

Lause 1.4.6. *Olkoon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Potenssisarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

suppenee itseisesti ja lisäksi tasaisesti jokaisessa avaruuden $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ kompaktissa joukossa.

Todistus. Olkoon $\|\cdot\|$ jokin matriisinormi avaruudessa $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tarkastelemalla nyt vastaavaa normien sarjaa nähdään, että kun $N \in \mathbb{N}$ saadaan

$$\sum_{k=0}^{N} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left\| A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \| A \|^k \to e^{\| A \|},$$

kun $N \to \infty$, mistä itseinen suppeneminen seuraa.

Olkoon nyt $K \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ kompakti ja $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt potenssisarja $e^{\| A \|}$ suppenee tasaisesti joukossa K, joten on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\begin{aligned}
\sup_{A \in K} \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \right\| &= \sup_{A \in K} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{A^k}{k!} \right\| \\
&\leq \sup_{A \in K} \sum_{k=m+1}^{n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \\
&\leq \sup_{A \in K} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\| A \|^k}{k!} < \epsilon,
\end{aligned}$$

kun $n > m \geq N$. Siten potenssisarja e^A suppenee tasaisesti kompaktissa joukossa K tasaisen Cauchyn kriteerion nojalla.

□

Edellisen tuloksen nojalla voidaan määritellä kaikille matriiseille ns. *matriisieksponentti* em. suppenevan potenssisarjan summana.

Määritelmä 1.4.7. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Matriisieksponentti* on kuvaus $A \mapsto e^A$, missä

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Määritelmä on hyvin asetettu, sillä kyseinen potenssisarja suppenee.

Matriisieksponentilla on useita hyödyllisiä ominaisuuksia, joita tullaan jatkossa hyödyntämään.

Lause 1.4.8. *Olkoon* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
i) Matriisieksponentin determinantille pätee $\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$*, missä* $\operatorname{tr}(A)$ *on matriisin* A *jälki*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,, \quad \text{kun } A = (a_{ij})\,.$$

ii) Jos $AB = BA$*, niin* $e^A e^B = e^{A+B}$*.*
iii) Matriisieksponentti e^A *on kääntyvä ja* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$*.*

Todistus. i) Olkoon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On olemassa yläkolmiomatriisi $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ja $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ siten, että $A = gYg^{-1}$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} e^A = e^{gYg^{-1}} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (gYg^{-1})^k = \lim_{N\to\infty} g \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} Y^k \right) g^{-1} \\ &= g \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} Y^k \right) g^{-1} = g\, e^Y g^{-1}\,. \end{aligned}$$

Siten nähdään, että

$$\begin{aligned} \det\left(e^A\right) &= \det\left(g\, e^Y g^{-1}\right) = \det\left(e^Y\right) = e^{y_{11}} \cdots e^{y_{nn}} = e^{y_{11}+\cdots+y_{nn}} = e^{\operatorname{tr}(Y)} \\ &= e^{\operatorname{tr}\left(g^{-1}gY\right)} = e^{\operatorname{tr}\left(gYg^{-1}\right)} = e^{\operatorname{tr}(A)}\,. \end{aligned}$$

ii) Koska $AB = BA$, binomikaava antaa

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^{n-k}B^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} A^{n-k} \frac{1}{k!} B^k \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = e^A e^B\,, \end{aligned}$$

sillä itseisesti suppenevien sarjojen e^A ja e^B Cauchyn tulo suppenee itseisesti.
iii) Koska A ja $-A$ kommutoivat, saadaan $e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = I$. □

Seuraavan lemman avulla voidaan osoittaa, että yleisen lineaarisen ryhmän yhden parametrin aliryhmät määräytyvät matriisieksponentin avulla.

Lemma 1.4.9. *Olkoon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tällöin reaalimuuttujan kuvaus $t \mapsto e^{tA}$ on $\mathcal{C}^\infty$-kuvaus ja sen derivaatalle saadaan*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = A\,e^{tA} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Todistus. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Olkoon edelleen $K \subset \mathbb{R}$ kompakti. Saadaan, kun $t \in K$, että

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!} = A\,e^{tA}\,,$$

sillä ko. derivaattojen sarja suppenee tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa. □

Nyt voidaan osoittaa, että yleisten lineaaristen matriisiryhmien yhden parametrin aliryhmät saadaan välttämättä matriisieksponentin avulla.

Lause 1.4.10. *Yleisen lineaarisen ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ yhden parametrin aliryhmä $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on välttämättä muotoa*

$$\gamma(t) = e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tX)^k}{k!}\,,$$

missä $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Erityisesti $X = \gamma'(0)$.

Todistus. Olkoon $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ yhden parametrin aliryhmä. Tällöin γ on erityisesti differentioituva ja saadaan derivaatalle

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \lim_{s\to 0}\frac{\gamma(t+s)-\gamma(t)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{\gamma(s+t)-\gamma(0+t)}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{\gamma(s)\gamma(t)-\gamma(0)\gamma(t)}{s} = \left(\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(s)-\gamma(0)}{s}\right)\gamma(t)\\ &= \gamma'(0)\,\gamma(t)\,.\end{aligned}$$

Jos nyt $\gamma'(0) = X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, saadaan differentiaaliyhtälö $\gamma'(t) = X\gamma(t)$, jonka yksikäsitteinen ratkaisu alkuehdolla $\gamma(0) = I$ on lemman 1.4.9 nojalla $\gamma(t) = e^{tX}$. □

Seuraus 1.4.11. *Lien ryhmälle $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eksponenttikuvaus $\exp : T_e\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on*

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \quad \forall\, A \in T_e\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\,.$$

Osoittautuu, että jokaisen Lien ryhmän neutraalialkioa vastaava tangenttiavaruus on Lien algebra ns. *adjungaattikuvauksen* derivaatalla varustettuna.

Määritelmä 1.4.12. Olkoon G ryhmä ja $g \in G$. Kuvaus $\psi_g : G \to G$ siten, että

$$\psi_g(h) = ghg^{-1}\,, \quad \text{kun } h \in G\,,$$

on alkioa g vastaava *konjugointikuvaus* tai lyhyemmin *g-konjugointikuvaus* ryhmässä G.

Selvästi Lien ryhmien konjugointikuvaukset ovat sileitä kuvauksia.

Määritelmä 1.4.13. Olkoon G Lien ryhmä. Kuvaus $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}\,(T_eG)$ siten, että

$$\mathrm{Ad}\,(g) = D_e\psi_g\,, \quad \text{kun}\, g \in G\,,$$

on ryhmän G *adjungaattikuvaus*.

Voidaan osoittaa, että yleisessäkin tapauksessa adjungaattikuvaus on sileä kuvaus.

Lause 1.4.14. *Olkoon G Lien ryhmä. Adjungaattikuvaus* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}\,(T_eG)$ *on sileä.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Lee03, Prop. 20.24, s. 534]. □

Adjungaattikuvauksen Ad derivaattakuvaus on siten hyvin määritelty.

Määritelmä 1.4.15. Olkoon G Lien ryhmä. Adjungaattikuvauksen $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}\,(T_eG)$ derivaatta on kuvaus

$$\mathrm{ad} = D_e\mathrm{Ad} : T_eG \to \mathcal{L}\,(T_eG)\,.$$

Voidaan osoittaa, että Lien ryhmälle saadaan aina muodostettua Lien algebra ryhmän neutraalialkion tangenttiavaruudesta varustettuna em. adjungaattikuvauksen derivaatalla.

Lause 1.4.16. *Olkoon G Lien ryhmä. Tangenttiavaruus T_eG on Lien algebra varustettuna Lien sulkeella*

$$[\,X\,,\,Y\,] = \mathrm{ad}\,(X)\,Y\,, \quad \text{kun } X, Y \in T_eG\,.$$

Todistus. Sivuutetaan, kts. [FH91, s. 104-109]. □

Lien ryhmän ja em. Lien algebran välistä yhteyttä tullaan jatkossa hyödyntämään merkittävästi. Näin ollen on perusteltua määritellä käsite *Lien ryhmää vastaava Lien algebra*.

Määritelmä 1.4.17. Lien ryhmää G *vastaava* Lien algebra on $\mathfrak{g} = T_eG$ varustettuna Lien sulkeella

$$[\,X\,,\,Y\,] = \mathrm{ad}\,(X)\,Y\,,$$

missä $X, Y \in T_eG$.

Yleisten lineaaristen matriisiryhmien Lien algebrat saadaan varsin yksinkertaisesti, vastaavista matriisiavaruuksista ns. *kommutaattorilla* varustettuna.

Lause 1.4.18. *Yleistä lineaarista ryhmää* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *vastaava Lien algebra on* $\mathfrak{gl}(n,\,\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *varustettuna Lien sulkeella*

$$[\,X\,,\,Y\,] = XY - YX\,,$$

kaikilla $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Todistus. Osoitetaan reaalinen tapaus, josta kompleksinen seuraa suoraan. Selvästi nähdään, että $T_e\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ja koska $\dim\,(T_e\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = n^2$ on edelleen välttämättä $T_e\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Olkoon $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Olkoon $\tilde{X} : (-1,1) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ja $\tilde{Y} : (-1,1) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sileitä polkuja siten, että

$$\tilde{X}(0) = \tilde{Y}(0) = I\,, \qquad \tilde{X}'(0) = X \quad \text{ja} \quad \tilde{Y}'(0) = Y\,.$$

Nyt saadaan adjungaattikuvauksen derivaatalle, että

$$\mathrm{ad}\,(X) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} D_e\psi_{\tilde{X}(s)}\,,$$

mistä edelleen saadaan Lien sulkeelle

$$\begin{aligned}
[\,X\,,\,Y\,] = \mathrm{ad}\,(X)\,Y &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{X}(s)\,\tilde{Y}(t)\,\tilde{X}(s)^{-1}\\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\tilde{X}(s)\,\tilde{Y}'(0)\,\tilde{X}(s)^{-1} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\tilde{X}(s)\,Y\tilde{X}(s)^{-1}\\
&= \tilde{X}'(0)\,Y\,\tilde{X}(0) + \tilde{X}(0)\,Y\,\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\tilde{X}(s)^{-1}\\
&= XYI + IY\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\tilde{X}(s)^{-1} = XY + Y\left(-\tilde{X}'(0)\right)\\
&= XY - YX\,,
\end{aligned}$$

sillä erityisesti pätee, että

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\tilde{X}(s)^{-1} = -\tilde{X}(0)^{-1}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\tilde{X}(s)\,\tilde{X}(0)^{-1} = -I\,\tilde{X}'(0)\,I = -\tilde{X}'(0)\,.$$

□

1.5 Lien aliryhmät

Lien ryhmien aliryhmät eivät aina itsessään ole Lien ryhmiä.

Määritelmä 1.5.1. Olkoon G Lien ryhmä ja $H < G$. Aliryhmä H on Lien ryhmän G *Lien aliryhmä*, mikäli se on Lien ryhmän G alimonisto ts. inkluusiokuvaus $H \hookrightarrow G$ on sileä ryhmähomomorfismi ja immersio monistolle G.

Lause 1.5.2. *Olkoon G ja H Lien ryhmiä ja $F : G \to H$ injektiivinen sileä ryhmähomomorfismi. Tällöin $F(G)$ on Lien ryhmän H Lien aliryhmä.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Lee03, Proposition 7.17 sivut 157-158]. □

Helposti nähdään, että ainakin kaikki *upotetut* aliryhmät ovat Lien aliryhmiä.

Lause 1.5.3. *Jos Lien ryhmän G aliryhmä H on upotettu moniston G alimonisto, on H Lien ryhmän G Lien aliryhmä.*

Todistus. Lien ryhmän G tulokuvaus $G \times G \to G$ on sileä kuvaus, joten niin on myös sen rajoittuma $H \times H \to G$. Vastaavasti kääntämiskuvauksen tapauksessa. Koska H on aliryhmä on inkluusiokuvaus $H \hookrightarrow G$ sileä ryhmähomomorfismi ja upotuksena edelleen immersio. □

Kuitenkaan kaikki Lien aliryhmät eivät ole upotettuja, esitetään teoksen [Lee03] vastaesimerkki.

Lause 1.5.4. *On olemassa torusryhmän $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$ Lien aliryhmä, joka ei ole upotettu.*

Todistus. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mielivaltainen ja kuvaus $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ siten, että

$$\gamma(t) = \left(e^{2\pi i t} , e^{2\pi i \alpha t} \right) .$$

Selvästi kuvaus γ on yhden parametrin aliryhmä. Edelleen kuvaus γ on immersio, sillä $\gamma'(t) \neq 0$ aina. Lisäksi, jos $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ on oltava $t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$ ja $\alpha\, t_1 - \alpha\, t_2 \in \mathbb{Z}$. Välttämättä on siis $t_1 = t_2$. Siten γ on injektio ja lauseen 1.5.2 nojalla $\gamma(\mathbb{R})$ on torusryhmän $\mathbb{T}^2$ Lien aliryhmä.

Tarkastellaan joukkoa $\gamma(\mathbb{Z})$. Dirichlet'n approksimaatiolauseesta (kts. [Lee03, s. 86-87]) seuraa, että jos $\epsilon > 0$ on $n, m \in \mathbb{Z}$ siten, että $|\, \alpha\, n - m\, | < \epsilon$. Lisäksi koska $\left| e^{it_1} - e^{it_2} \right| < |\, t_1 - t_2\, |$, kun $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ saadaan, että $\left| e^{2\pi i \alpha n} - 1 \right| = \left| e^{2\pi i \alpha n} - e^{2\pi i m} \right| \leq |\, 2\pi(\alpha n - m)\, | < 2\pi\epsilon$. Siten $|\, \gamma(n) - \gamma(0)\, | = \left\| (e^{2\pi i n}, e^{2\pi i \alpha n}) - (1,1) \right\| = \left\| (1, e^{2\pi i \alpha n}) - (1,1) \right\| < 2\pi\epsilon$. Siten $\gamma(0)$ on joukon $\gamma(\mathbb{Z})$ kasautumispiste. Koska joukolla $\mathbb{Z}$ ei ole kasautumispisteitä joukossa $\mathbb{R}$, ei kuvaus γ voi olla upotus, ts. homeomorfismi kuvajoukolleen. □

Seuraava *Cartanin lause* (Élie Cartan, 1869 - 1951) osoittaa, että kaikki Lien ryhmien suljetut aliryhmät ovat itse asiassa jopa upotettuja Lien aliryhmiä.

Lause 1.5.5 (Cartan)**.** *Olkoon G Lien ryhmä ja $H < G$. Jos H on suljettu, on H Lien ryhmän G upotettu Lien aliryhmä.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Lee03, Theorem 20.12, sivut 523-525]. □

Seuraava tulos antaa siten karakterisoinnin upotetuille Lien aliryhmille.

Seuraus 1.5.6. *Olkoon G Lien ryhmä ja H Lien ryhmän G Lien aliryhmä. Tällöin H on upotettu Lien aliryhmä, jos ja vain jos H on suljettu.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Lee03, Theorem 7.21, sivut 159-161]. □

Cartanin lauseen nojalla nähdään välittömästi, että reaalinen ja kompleksinen erityinen lineaarinen ryhmä ovat molemmat Lien ryhmiä, vastaavien yleisten lineaaristen matriisiryhmien upotettuina Lien aliryhminä.

Lause 1.5.7. *Olkoon $\mathbb{K}$ joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Aliryhmä $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on upotettu Lien aliryhmä.*

Todistus. Olkoon A joukon $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sulkeumassa, ts. on joukossa $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suppeneva jono (A_k) siten, että $A_k \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $A_k \to A$, kun $k \to \infty$. Pätee siis

$$\det(A_k) = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

josta determinantin jatkuvuuden nojalla saadaan

$$\det(A) = \det\left(\lim_{k\to\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \det(A_k) = 1\,.$$

Siis $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ ja siten $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ on Lien ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ suljettu aliryhmä. □

Erityisellä lineaarisella ryhmällä on siten Lien ryhmänä sitä vastaava Lien algebra.

Lause 1.5.8. *Erityistä lineaarista ryhmää $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ vastaava Lien algebra on yleistä lineaarista ryhmää vastaavan Lien algebran $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ aliavaruus*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}\,(X) = 0 \,\}\ ,$$

Lien algebralta $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ perityllä Lien sulkeella varustettuna.

Todistus. Olkoon $A : (-1, 1) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sileä polku siten, että $A(0) = I$. Saadaan Jacobin kaavasta determinantin derivaatalle, että

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(A(t)) &= \det(A(t))\,\mathrm{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(A(t)^{-1}A'(t)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\frac{1}{\det(A(t))}\mathrm{cof}\,(A(t))^t\,A'(t)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\mathrm{cof}\,(A(t))^t\,A'(t)\right)\,,
\end{aligned}$$

joten erityisesti, kun $t = 0$ saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\det(A(t))\\
&= \mathrm{tr}\left(\mathrm{cof}\,(A(0))^t\,A'(0)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\mathrm{cof}\,(I)^t\,A'(0)\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(A'(0)\right)\,.
\end{aligned}$$

Kääntäen, jos $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ siten, että $\mathrm{tr}\,(X) = 0$, saadaan lauseesta 1.4.8, että

$$\det\left(e^X\right) = e^{\mathrm{tr}(X)} = e^0 = 1\,,$$

joten $e^X \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Edelleen $e^{tX} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, kun $t \in \mathbb{R}$. Koska pätee

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} = X\,,$$

on välttämättä $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$. □

Vastaavan Lien algebran eli tangenttiavaruuden dimensiosta saadaan itse Lien ryhmän dimensio.

Seuraus 1.5.9. *i) Reaalisen erityisen lineaarisen ryhmän* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *dimensio on* $n^2 - 1$.
ii) Kompleksisen erityisen lineaarisen ryhmän $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *(reaalinen) dimensio on* $2n^2 - 2$.

Todistus. *i*) Koska $\mathrm{tr}\,(X) = 0$, kaikilla $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, on siten selvästi

$$\dim(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = n^2 - 1\,.$$

ii) Vastaavasti saadaan kompleksisessa tapauksessa, että

$$\dim(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) - 2 = 2n^2 - 2\,.$$

□

Luku 2

Ortogonaali- ja unitaariryhmät

2.1 Ortogonaaliryhmät

Tässä tutkielmassa keskeisessä asemassa ovat klassiset matriisiryhmät ja niistä erityisesti ortogonaaliryhmät. Matriisien ja lineaarikuvausten vastaavuudesta johtuen päädytään usein käsitteeseen *ryhmän toiminta joukossa.*

Määritelmä 2.1.1. Olkoon X joukko ja $(G, \cdot\,)$ ryhmä. Kuvaus $\star : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \star x$ on ryhmän G *toiminta* joukossa X, jos kuvaukselle $\star$ pätee
i) $(g \cdot h) \star x = g \star (h \star x)$, kaikilla $g, h \in G$ ja $x \in X$
ii) $e \star x = x$, kaikilla $x \in X$.
Toimintaa $\star$ kutsutaan *transitiiviseksi*, mikäli $X \neq \emptyset$ ja kaikilla $x, y \in X$ on olemassa $g \in G$ siten, että $g \star x = y$.

Jos $\star$ on ryhmän G toiminta joukossa X, niin kuvaus $g \mapsto g \star (\cdot)$ on ryhmähomomorfismi $G \to X^X$. Seuraavaksi esitettävän tuloksen perusteella voidaan erityistä ortogonaaliryhmää nimittää myös *rotaatioryhmäksi*, sen euklidisen avaruuden toiminnan rotaatioluonteen perusteella.

Lause 2.1.2. *Erityinen ortogonaaliryhmä* $\mathrm{SO}(n)$ *toimii transitiivisesti joukossa* $\mathbb{S}^{n-1}$*.*

Todistus. Ensinnäkin selvästi nähdään, että kuvaus

$$\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} : (R, x) \mapsto R\,x$$

on ryhmän $\mathrm{SO}(n)$ toiminta joukossa $\mathbb{S}^{n-1}$. Osoitetaan induktiivisesti, että toiminta on transitiivinen. Kun $n = 2$, on väite selvästi tosi. Oletetaan, että väite on tosi, kun $n = k - 1$, missä $k \geq 3$.

Olkoon $x \in \mathbb{S}^{k-1}$. Riittää osoittaa, että on $R \in \mathrm{SO}(k)$ siten, että $Re_k = x$. Saadaan ensinnäkin

$$x = \cos\theta\, e_k + \sin\theta\, x' ,$$

missä

$$x' \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{k-1}\} \quad \text{ja} \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

Nyt havaitaan, että $x' \in \mathbb{S}^{k-1}$, sillä

$$1 = \|\, x \,\|^2 = \langle x\,,\, x\rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta \left\|\, x' \,\right\|^2 ,$$

mistä edelleen saadaan

$$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta \left\|\, x' \,\right\|^2 ,$$

joten välttämättä $\|\, x' \,\| = 1$. Induktio-oletuksen nojalla on siis olemassa $U \in \mathrm{SO}(k-1)$ siten, että $x' = Ue_{k-1}$. Olkoon nyt

$$R_k = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} I_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Saadaan lopulta, että

$$R_k R_\theta e_k = R_k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin\theta\, Ue_{k-1} + \cos\theta\, e_k = \sin\theta\, x' + \cos\theta\, e_k = x ,$$

joten kun valitaan $R = R_k\, R_\theta \in \mathrm{SO}(k)$, pätee $Re_k = x$. Väite on siis tosi, kun $n = k$. $\square$

Edelleen vastaavanlaisilla argumenteilla osoitetaan seuraavaksi, että erityinen ortogonaaliryhmä on ortogonaaliryhmän yhtenäinen osa.

Lause 2.1.3. *i) Jokainen $R \in \mathrm{SO}(n)$ voidaan esittää muodossa $R = R_1\, R_\theta\, R_2$, missä*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad R_1,\, R_2 \in \{R \in \mathrm{SO}(n) \mid R\, e_n = e_n\} .$$

ii) Erityinen ortogonaaliryhmä $\mathrm{SO}(n)$ on yhtenäinen.

Todistus. *i*) Olkoon $R \in \mathrm{SO}(n)$ ja $x = R\,e_n$. Lauseesta 2.1.2 saadaan, että

$$x = R_1 R_\theta\, e_n\,,$$

kun

$$R_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n) \quad \text{ja} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(n)\,,$$

missä $U \in \mathrm{SO}(n-1)$. Koska $x = Re_n$ saadaan

$$R_\theta^{-1} R_1^{-1} R\, e_n = e_n\,,$$

minkä perusteella asettamalla

$$R_2 = R_\theta^{-1}\, R_1^{-1} R$$

saadaan rotaatiolle R etsitty esitysmuoto

$$R = R_1 R_\theta R_2\,.$$

ii) Todistetaan väite induktiivisesti. Ensinnäkin erityinen ortogonaaliryhmä SO(2) on selvästi homeomorfinen ympyrälle $\mathbb{S}^1$, joka on yhtenäinen.

Edelleen, kun $n > 2$ oletetaan, että $\mathrm{SO}(n-1)$ on yhtenäinen. Kohdan *i*) nojalla seuraava kuvaus (isomorfiat huomioiden)

$$\mathrm{SO}(n-1)\,\times\,\mathrm{SO}(2)\,\times\,\mathrm{SO}(n-1) \to \mathrm{SO}(n)\,:\,(\,R_1,\,R_\theta,\,R_2\,) \mapsto R_1\,R_\theta\,R_2$$

on jatkuva surjektio, joten $\mathrm{SO}(n)$ on yhtenäinen. □

Edelleen saadaan, että ortogonaaliryhmällä on erityisen ortogonaaliryhmän lisäksi ainoastaan yksi toinen yhtenäinen komponentti.

Lause 2.1.4. *Ortogonaaliryhmällä* $\mathrm{O}(n)$ *on kaksi yhtenäistä komponenttia*

$$\{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = -1\} \quad \text{ja} \quad \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\} = \mathrm{SO}(n)$$

ja muita ei ole.

Todistus. Olkoon $n \geq 2$ ja $A \in \mathrm{O}(n)$. Saadaan

$$1 = \det(I) = \det\left(AA^t\right) = \det(A)\det\left(A^t\right) = \det(A)^2\,,$$

joten välttämättä $\det(A) = \pm 1$. Jos $Q \in \mathrm{O}(n)$ siten, että $\det(Q) = -1$, niin ortogonaaliryhmän $\mathrm{O}(n)$ toinen yhtenäinen komponentti saadaan erityisen ortogonaaliryhmän sivuluokkana

$$\{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = -1\} = Q\,\mathrm{SO}(n)\,,$$

joka on yhtenäinen, yhtenäisen joukon kuvana jatkuvassa kuvauksessa. □

Seuraus 2.1.5. *Erityinen ortogonaaliryhmä* $\mathrm{SO}(n)$ *on ortogonaaliryhmän* $\mathrm{O}(n)$ *normaali aliryhmä.*

Todistus. Selvästi $I \in \mathrm{SO}(n)$ ja ryhmän $\mathrm{O}(n)$ neutraalialkion sisältävä yhtenäinen komponentti $\mathrm{SO}(n)$ on siten normaali aliryhmä lauseen 1.1.3 kohdan *ii*) nojalla. □

Merkittävää on se, että ortogonaaliryhmät ovat paitsi Lien ryhmiä, ovat ne myös kompakteja sellaisia.

Lause 2.1.6. *Ortogonaaliryhmä* $\mathrm{O}(n)$ *on kompakti ja upotettu Lien ryhmän* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *Lien aliryhmä.*

Todistus. Olkoon $A \in \mathrm{O}(n)$. Olkoon edelleen $x \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\|\, x \,\| = 1$. Saadaan

$$\|\, Ax \,\|^2 = \langle Ax\,,\, Ax\rangle = \langle x\,,\, x\rangle = 1\,,$$

joten

$$\|\, A \,\|_{\mathrm{op}} = \left\|\, A^t \,\right\|_{\mathrm{op}} = \left\|\, A^{-1} \,\right\|_{\mathrm{op}} = 1\,.$$

Siten ortogonaaliryhmä $\mathrm{O}(n)$ on kompakti topologinen ryhmä lauseen 1.2.11 nojalla. Edelleen $\mathrm{O}(n)$ on kompaktina ryhmänä Lien ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ suljettu aliryhmä ja Cartanin lauseen nojalla upotettu Lien aliryhmä. □

Edellisen tuloksen perusteella nähdään vastaavilla argumenteilla, että myös erityiset ortogonaaliryhmät ovat kompakteja Lien ryhmiä.

Seuraus 2.1.7. *Erityinen ortogonaaliryhmä* $\mathrm{SO}(n)$ *on kompakti ja upotettu Lien ryhmän* $\mathrm{O}(n)$ *Lien aliryhmä.*

Todistus. Nähdään välittömästi, että

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu ja siten upotettu Lien ryhmän $\mathrm{O}(n)$ Lien aliryhmä. Lisäksi $\mathrm{SO}(n)$ on kompaktin joukon $\mathrm{O}(n)$ suljettuna osajoukkona edelleen kompakti. □

Koska erityinen ortogonaaliryhmä $\mathrm{SO}(n)$ on ortogonaaliryhmän $\mathrm{O}(n)$ neutraalialkion sisältävä yhtenäinen komponentti on Lien ryhmillä $\mathrm{SO}(n)$ ja $\mathrm{O}(n)$ sama vastaava Lien algebra.

Lause 2.1.8. *Erityistä ortogonaaliryhmää* $\mathrm{SO}(n)$ *vastaava Lien algebra* $\mathfrak{so}(n)$ *on vinosymmetristen matriisien avaruus*

$$\mathfrak{so}(n) = \left\{ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid X + X^t = O \right\} ,$$

kommutaattorilla varustettuna.

Todistus. Olkoon $A : (-1,1) \to \mathrm{O}(n)$ sileä polku siten, että $A(0) = I$. Koska $A(t) \in \mathrm{O}(n)$, pätee

$$A(t)A(t)^t = I \quad \forall\, t \in (-1,1)\,.$$

Siten saadaan

$$\frac{d}{dt}A(t)A(t)^t = A'(t)A(t)^t + A(t)A'(t)^t = \frac{d}{dt}I = O\,,$$

mistä

$$A'(0) + A'(0)^t = O\,.$$

Täten mielivaltaiselle tangenttivektorille $X \in \mathfrak{so}(n)$ on siis välttämättä $X + X^t = O$.

Olkoon kääntäen $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ siten, että $X + X^t = O$. Tällöin X ja X^t kommutoivat, ts.

$$XX^t = X(-X) = (-X)X = X^tX\,.$$

Nyt kommutoivien matriisien matriisieksponentille saadaan lauseen 1.4.8 nojalla

$$e^X e^{X^t} = e^{X+X^t} = e^O = I\,.$$

Lisäksi, koska vinosymmetriselle matriisille X pätee $\mathrm{tr}\,(X) = 0$, lauseesta 1.4.8 saadaan

$$\det\left(e^X\right) = e^{\mathrm{tr}(X)} = e^0 = 1\,,$$

joten $e^X \in \mathrm{SO}(n)$. Edelleen jos $s \in \mathbb{R}$, on vastavasti

$$sX + sX^t = O\,,$$

ja siten $sX \in \mathrm{SO}(n)$. Lauseen 1.4.9 nojalla $X \in \mathfrak{so}(n)$, sillä pätee

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} e^{sX} = X\,.$$

$\square$

Edellisen perusteella saadaan dimensio samalla aikaa sekä ortogonaaliryhmille, että erityisille ortogonaaliryhmille.

Seuraus 2.1.9. *Sekä ortogonaaliryhmän* $\mathrm{O}(n)$*, että erityisen ortogonaaliryhmän* $\mathrm{SO}(n)$ *dimensio on* $n(n-1)/2$.

Todistus. Vinosymmetristen matriisien avaruuden $\mathfrak{so}(n)$ virittävien matriisien lukumäärä on $n(n-1)/2$ kappaletta, ts. sama kuin ala- tai yläkolmion alkioiden lukumäärä, ts.

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Avaruuden $\mathfrak{so}(n)$ virittävät matriisit ovat

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

jotka ovat selvästi lineaarisesti riippumattomia. □

Kolmiulotteisessa tapauksessa päädytään mielenkiintoiseen yhteyteen erityisen ortogonaaliryhmän Lien algebran kommutaattorin ja 3-vektorien ristitulon välillä.

Lause 2.1.10. *On olemassa lineaarinen isomorfismi* $\phi : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ *siten, että*

$$\phi(\,[\,X\,,\,Y\,]\,) = \phi(X) \times \phi(Y)\,,$$

kaikilla $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$.

Todistus. Olkoon ensinnäkin

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \text{ja}\quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyt matriisit I, J ja K ovat lineaarisesti riippumattomia ja virittävät avaruuden $\mathfrak{so}(3)$. Olkoon nyt $\phi : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ lineaarikuvaus siten, että

$$\phi(I) = e_1\,,\quad \phi(J) = e_2\,,\quad \phi(K) = e_3\,.$$

Selvästi kuvaus ϕ on lineaarinen isomorfismi. Saadaan, että

$$\begin{aligned}
[\,I\,,\,J\,] = IJ - JI &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = K\,.
\end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan

$$[\,J\,,\,K\,] = I \quad \text{ja} \quad [\,K\,,\,I\,] = J\,.$$

Olkoon nyt $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$ siten, että

$$X = x_1 I + x_2 J + x_3 K \quad \text{ja} \quad Y = y_1 I + y_2 J + y_3 K\,.$$

Saadaan, että

$$\begin{aligned}
[\,X\,,\,Y\,] &= [\,x_1 I + x_2 J + x_3 K\,,\,y_1 I + y_2 J + y_3 K\,] \\
&= x_1 y_1\,[\,I\,,\,I\,] + x_1 y_2\,[\,I\,,\,J\,] + x_1 y_3\,[\,I\,,\,K\,] + \\
&\quad\; x_2 y_1\,[\,J\,,\,I\,] + x_2 y_2\,[\,J\,,\,J\,] + x_2 y_3\,[\,J\,,\,K\,] + \\
&\quad\; x_3 y_1\,[\,K\,,\,I\,] + x_3 y_2\,[\,K\,,\,J\,] + x_3 y_3\,[\,K\,,\,K\,] \\
&= x_1 y_2 K - x_1 y_3 J - x_2 y_1 K + x_2 y_3 I + x_3 y_1 J - x_3 y_2 I \\
&= (x_2 y_3 - x_3 y_2) I + (x_3 y_1 - x_1 y_3) J + (x_1 y_2 - x_2 y_1) K\,,
\end{aligned}$$

sillä Lien sulkeen bilineaarisuuden ja alternoivuuden nojalla erityisesti

$$[\,J\,,\,I\,] = -\,[\,I\,,\,J\,] = -K\,, \quad [\,K\,,\,J\,] = -\,[\,J\,,\,K\,] = -I\,, \quad [\,I\,,\,K\,] = -\,[\,K\,,\,I\,] = -J\,.$$

Lopulta saadaan siis, että

$$\phi(\,[\,X\,,\,Y\,]\,) = (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = \phi(X) \times \phi(Y)\,.$$

$\square$

2.2 Unitaariryhmät

Läheisesti edellä esiteltyihin ortogonaaliryhmiin liittyvät niiden kompleksiset vastineet *unitaariryhmät*. Unitaariryhmät ovat myös Lien ryhmiä ja niillä on joitakin vastaavia ominaisuuksia kuin ortogonaaliryhmillä.

Lause 2.2.1. *Unitaariryhmä* $\mathrm{U}(n)$ *on kompakti Lien ryhmän* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *upotettu Lien aliryhmä.*

Todistus. Vastaavasti kuin ortogonaaliryhmien tapauksessa kaikille $V \in \mathrm{U}(n)$ on $\| V \|_{\mathrm{op}} = 1$, ja siten $\mathrm{U}(n)$ on kompakti. Cartanin lauseen nojalla $\mathrm{U}(n)$ on Lien ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ suljettuna aliryhmänä edelleen Lien ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ upotettu Lien aliryhmä. □

Toisin kuin ortogonaaliryhmien tapauksessa, unitaariryhmällä on erityisen unitaariryhmän vastaavasta eroava vastaava Lien algebra.

Lause 2.2.2. *Unitaariryhmää* $\mathrm{U}(n)$ *vastaava Lien algebra* $\mathfrak{u}(n)$ *on avaruus*

$$\mathfrak{u}(n) = \left\{ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^\dagger = O \right\} ,$$

kommutaattorilla varustettuna.

Todistus. Olkoon $A : (-1, 1) \to \mathrm{U}(n)$ sileä polku siten, että $A(0) = I$. Koska $A(t) \in \mathrm{U}(n)$ pätee

$$A(t)A(t)^\dagger = I \quad \forall\, t \in (-1, 1) .$$

Saadaan siis

$$\frac{d}{dt}A(t)A(t)^\dagger = A'(t)A(t)^\dagger + A(t)A'(t)^\dagger = \frac{d}{dt}I = O ,$$

mistä edelleen saadaan

$$A'(0) + A'(0)^\dagger = O ,$$

joten mielivaltaiselle tangenttivektorille $X \in \mathfrak{u}(n)$ pätee välttämättä $X + X^\dagger = O$.

Olkoon kääntäen $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ siten, että $X + X^\dagger = O$. Tällöin X ja $X^\dagger$ kommutoivat, ts.

$$XX^\dagger = X(-X) = (-X)X = X^\dagger X .$$

Siten on

$$e^X e^{X^\dagger} = e^{X+X^\dagger} = e^O = I ,$$

joten e^X on unitaarinen matriisi ja siten vastaavasti $X \in \mathfrak{u}(n)$. □

Vastaavasti edelleen nähdään, että myös erityiset unitaariryhmät ovat Lien ryhmiä.

Lause 2.2.3. *Erityinen unitaariryhmä* $\mathrm{SU}(n)$ *on kompakti ryhmän* $\mathrm{U}(n)$ *upotettu Lien aliryhmä.*

Todistus. Koska $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, on ryhmä $\mathrm{SU}(n)$ kompaktin joukon $\mathrm{U}(n)$ suljettuna osana edelleen kompakti ja lisäksi Cartanin lauseen nojalla upotettu Lien aliryhmä. □

Merkittävä erityistapaus erityisistä unitaariryhmistä on ryhmä $\mathrm{SU}(2)$.

Lause 2.2.4. *Erityinen unitaariryhmä* $\mathrm{SU}(2)$ *on homeomorfinen avaruuden* $\mathbb{R}^4$ *1-pallolle* $\mathbb{S}^3$*.*

Todistus. Homeomorfismi $\mathbb{S}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ saadaan kuvauksesta

$$(a, b, c, d) \mapsto \begin{pmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{pmatrix}$$

sillä

$$\det \begin{pmatrix} a + di & -b - ci \\ b - ci & a - di \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \|\,(a, b, c, d)\,\|^2 = 1\,.$$

□

Seuraus 2.2.5. *Ryhmä* $\mathrm{SU}(2)$ *on (yhdesti) yhtenäinen.*

Erityistä unitaariryhmää vastaavaksi Lien algebraksi saadaan eräs unitaarista ryhmää vastaavan Lien algebran aliavaruus.

Lause 2.2.6. *Erityistä unitaariryhmää* $\mathrm{SU}(n)$ *vastaava Lien algebra* $\mathfrak{su}(n)$ *on avaruus*

$$\mathfrak{su}(n) = \{\, X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{tr}\,(X) = 0 \,\}\,,$$

kommutaattorilla varustettuna.

Todistus. Olkoon $A : (-1, 1) \to \mathrm{SU}(n)$ sileä polku siten, että $A(0) = I$. Koska $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{U}(n)$ on

$$A'(0) + A'(0)^\dagger = O\,.$$

Lisäksi, koska $\det\,(A(t)) = 1$ kaikilla $t \in (-1, 1)$ on oltava

$$\mathrm{tr}\,\big(A'(0)\big) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det\,(A(t)) = 0\,.$$

Kääntäen, jos $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ siten, että

$$X + X^\dagger = O \quad \text{ja} \quad \mathrm{tr}\,(X) = 0$$

on lauseen 2.2.2 nojalla $e^X \in \mathrm{U}(n)$. Erityisesti koska

$$\det\left(e^X\right) = e^{\mathrm{tr}(X)} = e^0 = 1$$

on edelleen $e^X \in \mathrm{SU}(n)$ ja siten vastaavasti $X \in \mathfrak{su}(n)$. □

Lien algebralla $\mathfrak{su}(n)$ on merkittävä yhteys Lien algebraan $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Sanotaan, että Lien algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ on Lien algebran $\mathfrak{su}(n)$ *kompleksifikaatio.*

Lause 2.2.7. *Pätee, että*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(n) + i\mathfrak{su}(n)\,,$$

siten, että jokaisella $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ on yksikäsitteinen esitys $X = X_1 + iX_2$, missä $X_1, X_2 \in \mathfrak{su}(n)$.

Todistus. Jos $X_1, X_2 \in \mathfrak{su}(n)$, on $\mathrm{tr}\,(X_1) = \mathrm{tr}\,(X_2) = 0$. Näin ollen myös $\mathrm{tr}\,(X_1 + iX_2) = 0$.

Kääntäen, olkoon $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ siten, että $\mathrm{tr}\,(X) = 0$. Osoitetaan, että

$$X = X_1 + iX_2\,,$$

missä $X_1, X_2 \in \mathfrak{su}(n)$. Valitaan

$$X_1 = \frac{1}{2}(X - X^\dagger) \quad \text{ja} \quad X_2 = \frac{1}{2i}(X + X^\dagger)\,.$$

Saadaan, että

$$X_1 + X_1^\dagger = \frac{1}{2}(X - X^\dagger) + \frac{1}{2}(X - X^\dagger)^\dagger = \frac{1}{2}(X - X^\dagger) + \frac{1}{2}(X^\dagger - X) = O$$

ja vastaavasti, että

$$X_2 + X_2^\dagger = \frac{1}{2i}(X + X^\dagger) - \frac{1}{2i}(X + X^\dagger)^\dagger = \frac{1}{2i}(X + X^\dagger) - \frac{1}{2i}(X + X^\dagger) = O\,.$$

Edelleen, koska $\mathrm{tr}\,(X) = 0$ pätee, että $\mathrm{tr}\,(X_1) = \mathrm{tr}\,(X_2) = 0$. Siis $X_1, X_2 \in \mathfrak{su}(n)$.

Nyt $X = X_1 + iX_2$, koska saadaan, että

$$X - X^\dagger = X_1 + iX_2 - X_1^\dagger + iX_2^\dagger = X_1 + X_1 + iX_2 - iX_2 = 2X_1$$

ja vastavasti

$$X + X^\dagger = X_1 + iX_2 + X_1^\dagger - iX_2^\dagger = X_1 - X_1 + iX_2 + iX_2 = 2i\,X_2\,.$$

□

Edellisestä merkittävänä erityistapauksena saadaan Lien ryhmää SU(2) vastaava Lien algebra $\mathfrak{su}(2)$, joka osoittautuu 3-ulotteiseksi.

Lause 2.2.8. *i) Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$ reaalinen dimensio on 3.*
ii) On olemassa (reaalisesti) lineaarisesti riippumattomat $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{su}(2)$ siten, että

$$[\, X_1\,,\, X_2\,] = 2X_3\,,\ [\, X_2\,,\, X_3\,] = 2X_1\,,\ [\, X_3\,,\, X_1\,] = 2X_2\,.$$

Todistus. *i)* Jos $X \in \mathfrak{su}(2)$ saadaan, että

$$X = \begin{pmatrix} ix & \beta \\ -\beta^* & -ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix & a+ib \\ -a+ib & -ix \end{pmatrix},$$

missä $x \in \mathbb{R}$ ja $\beta = (a, b) \in \mathbb{C}$. Määritellään $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{su}(2)$ siten, että

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyt saadaan, että

$$X = xX_1 + aX_2 + bX_3\ ,$$

joten siis

$$\operatorname{span}\{X_1,\, X_2,\, X_3\} = \mathfrak{su}(2)\,.$$

Lisäksi joukko $\{X_1, X_2, X_3\}$ on lineaarisesti riippumaton ja siten avaruuden $\mathfrak{su}(2)$ kanta. Erityisesti siis pätee, että $\dim(\mathfrak{su}(2)) = 3$.

ii) Saadaan suoraan laskemalla, että

$$\begin{aligned} [\, X_1\,,\, X_2\,] = X_1X_2 - X_2X_1 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2X_3\,. \end{aligned}$$

Muut kommutaatiorelaatiot saadaan vastaavasti. □

Luku 3

Lien ryhmien esitysteoriaa

3.1 Lien ryhmien esitykset

Ryhmien esitysteoriassa tarkastellaan ryhmien ominaisuuksia siirtämällä tarkastelu johonkin ryhmän kanssa homomorfiseen lineaariseen ryhmään. Osoittautuu erityisesti mielenkiintoiseksi tarkastella lineaaristen ryhmien epätriviaaleja lineaarisia esityksiä.

Määritelmä 3.1.1. Olkoon G ja H (Lien) ryhmiä ja $\mathcal{V}$ kompleksinen vektoriavaruus.
i) Ryhmähomomorfismi $\pi : G \to H$, joka on lisäksi sileä kuvaus, on *Lien ryhmähomomorfismi.* Jos kuvaus π on lisäksi bijektio siten, että π^{-1} on sileä, on kuvaus π *Lien ryhmäisomorfismi.*
ii) (Lien) ryhmähomomorfismi $\pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ on (Lien) ryhmän G *esitys* avaruudelle $\mathcal{V}$. Jos lisäksi kuvaus π on injektio, sanotaan että esitys π on *uskollinen.* Vektoriavaruutta $\mathcal{V}$ kutsutaan (Lien) ryhmän G *esitysavaruudeksi.* Erityisesti sanotaan lyhyemmin, että pari $(\pi, \mathcal{V})$ on (Lien) ryhmän G esitys.
iii) Olkoon $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ aliavaruus. Olkoon edelleen $(\pi_0, \mathcal{W})$ ja $(\pi, \mathcal{V})$ ryhmän G esityksiä. Esitys $(\pi_0, \mathcal{W})$ on esityksen $(\pi, \mathcal{V})$ *aliesitys*, mikäli pätee

$$\pi_0(g) = \pi(g)|_{\mathcal{W}} \quad \forall\, g \in G\,.$$

Matriisiryhmillä on selvästi aina olemassa esitys eli ns. *määrittelevä esitys.*

Lause 3.1.2. *Olkoon G jokin yleisen lineaarisen ryhmän $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ Lien aliryhmä. Tällöin inkluusiokuvaus $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ on Lien ryhmän G uskollinen esitys.*

Todistus. Selvästi inkluusiokuvaus $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ on injektiivinen ja lisäksi sileä ryhmähomomorfismi eli Lien ryhmähomomorfismi. $\square$

Kaikista yksinkertaisin Lien ryhmän esitys on ns. *triviaali* esitys.

Lause 3.1.3. *Olkoon G Lien ryhmä, $\mathcal{V}$ vektoriavaruus ja kuvaus $\pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ siten, että $\pi(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$, kaikilla $g \in G$. Tällöin $(\pi, \mathcal{V})$ on Lien ryhmän esitys.*

Todistus. Kuvaus π on vakiokuvauksena sileä ja jos $g, h \in G$ saadaan, että

$$\pi(gh) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} = \pi(g) \circ \pi(h)\,,$$

joten kuvaus π on Lien ryhmähomomorfismi. □

Esityksistä usein mielenkiintoisimpia ovat ne, jotka ovat *redusoitumattomia.*

Määritelmä 3.1.4. Olkoon $(\pi, \mathcal{V})$ ryhmän G esitys.
i) Aliavaruus $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ on *invariantti* esityksessä $(\pi, \mathcal{V})$, jos pätee

$$\pi(g)\,\mathcal{W} \subset \mathcal{W}\,, \quad \forall\, g \in G\,.$$

ii) Esitys $(\pi\,, \mathcal{V})$ on *redusoitumaton*, mikäli esitysavaruudella $\mathcal{V}$ ei ole *epätriviaaleja* invariantteja aliavaruuksia esityksessä π ts. ainoat invariantit aliavaruudet ovat $\{0\}$ ja $\mathcal{V}$.
iii) Esitys $(\pi\,, \mathcal{V})$ on *täydellisesti redusoituva*, jos se on suora summa redusoitumattomista esityksistä.

Lien ryhmään liittyy aina vähintään yksi epätriviaali esitys, ns. Lien ryhmän *adjungaattiesitys.*

Lause 3.1.5. Olkoon G Lien ryhmä. Kuvaus $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}\,(\mathfrak{g})$ siten, että $\mathrm{Ad}\,(g) = D_e\psi_g$, kaikilla $g \in G$ on Lien ryhmän G esitys avaruudelle $\mathfrak{g}$.

Todistus. Ad on sileä kuvaus monistolta G monistolle $\mathrm{GL}\,(\mathfrak{g})$ lauseen 1.4.14 nojalla. Lisäksi kuvaus Ad on ryhmähomomorfismi, sillä jos $g, h \in G$ pätee erityisesti konjugoinnille, että

$$\psi_{gh} = \psi_g \circ \psi_h$$

ja siten edelleen ketjusäännöstä saadaan, että

$$\mathrm{Ad}\,(gh) = D_e\psi_{gh} = D_e(\psi_g \circ \psi_h) = D_e\psi_g \circ D_e\psi_h = \mathrm{Ad}\,(g) \circ \mathrm{Ad}\,(h)\,,$$

joten Ad on Lien ryhmän G esitys. □

Mikäli kaksi eri esitystä on palautettavissa toinen toisekseen lineaarisella isomorfismilla sanotaan, että esitykset ovat keskenään *ekvivalentteja.* Kyseessä todellakin on ekvivalenssirelaatio.

Määritelmä 3.1.6. Ryhmän G esitykset $(\pi_1,\, \mathcal{V})$ ja $(\pi_2,\, \mathcal{W})$ ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa isomorfismi $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ siten, että

$$A\, \pi_1(g)\, A^{-1} = \pi_2(g)\,,$$

kaikilla $g \in G$. Kuvausta A kutsutaan esitysten $(\pi_1,\, \mathcal{V})$ ja $(\pi_2,\, \mathcal{W})$ *kietoutumaksi.*

Osoitetaan seuraavaksi klassinen Schurin lemma, joka valaisee edellistä määritelmää.

Lemma 3.1.7 (Schur)**.** *Olkoon G ryhmä.*

i) Olkoon $(\eta_1, \mathcal{V}_1)$ ja $(\eta_2, \mathcal{V}_2)$ ryhmän G äärellisulotteisia redusoitumattomia esityksiä ja kuvaus $A : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ lineaarinen siten, että

$$A \circ \eta_1(g) = \eta_2(g) \circ A \quad \forall\, g \in G\,,$$

tällöin A on joko isomorfismi tai nollakuvaus.

ii) Olkoon $(\eta, \mathcal{V})$ ryhmän G kompleksinen äärellisulotteinen redusoitumaton esitys ja $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineaarikuvaus siten, että kaikilla $g \in G$ pätee

$$A \circ \eta(g) = \eta(g) \circ A\,.$$

Tällöin on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että

$$A = \lambda I\,.$$

Todistus. i) Aliavaruus $\mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathcal{V}_1$ on invariantti esityksessä η_1, sillä jos $v \in \mathrm{Ker}\,(A)$ ja $g \in G$, saadaan oletuksesta, että

$$A(\eta_1(g)(v)) = \eta_2(g)(A(v)) = \eta_2(g)(0) = 0\,.$$

Toisin sanoen $\eta_1(g)(v) \in \mathrm{Ker}\,(A)$. Vastaavasti aliavaruus $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathcal{V}_2$ on invariantti esityksessä η_2, sillä jos $g \in G$ ja $w \in \mathrm{Im}\,(A)$, toisin sanoen on $v \in \mathcal{V}_1$ siten, että $w = A(v)$ saadaan, että

$$\eta_2(g)(w) = \eta_2(g)(A(v)) = A(\eta_1(g)(v)) \in \mathrm{Im}\,(A)\,.$$

Nyt välttämättä joko $\mathrm{Ker}\,(A)$ tai $\mathrm{Im}\,(A)$ on triviaali aliavaruus $\{0\}$. Jos $\ker\,(A) = \{0\}$, on lineaarikuvaus A injektio ja siten myös surjektio, koska on oltava erityisesti $\dim\,(\mathcal{V}_1) = \dim\,(\mathcal{V}_2)$. Jos puolestaan $\mathrm{Im}\,(A) = \{0\}$, on selvästi $A = 0$.

ii) Kuvauksella A on olemassa ainakin yksi kompleksinen ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{C}$, toisin sanoen kuvaus $A - \lambda I$ ei ole bijektio. On siis oltava $A - \lambda I = 0$ kohdan i) nojalla. □

3.2 Lien algebroiden esitykset

Myös Lien algebroille voidaan määritellä niiden esitykset. Tämä tehdäänkin täysin vastaavalla tavalla kuin Lien ryhmille.

Määritelmä 3.2.1. Olkoon $\mathcal{V}$ vektoriavaruus ja $\mathfrak{g}$ Lien algebra. Lineaarikuvaus $\rho : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ on Lien algebran $\mathfrak{g}$ *esitys* vektoriavaruudelle $\mathcal{V}$, lyhyemmin $(\rho, \mathcal{V})$ on esitys, jos pätee

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X),$$

kaikilla $X, Y \in \mathfrak{g}$. Edelleen esitys $(\rho, \mathcal{V})$ on *uskollinen*, jos kuvaus ρ on injektio. Vastaavasti on esitys $(\rho, \mathcal{V})$ *redusoitumaton*, jos kaikilla $X \in \mathfrak{g}$ kuvauksella $\rho(X)$ ei ole epätriviaaleja invariantteja vektoriavaruuden $\mathcal{V}$ aliavaruuksia.

Tärkein tapaus Lien algebran esityksestä saadaan adjungaattikuvauksen derivaatasta.

Lause 3.2.2. *Olkoon G Lien ryhmä ja $\mathfrak{g}$ vastaava Lien algebra. Adjungaattikuvauksen* Ad *derivaatta* $\mathrm{ad} = D_e \,\mathrm{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ *on Lien algebran $\mathfrak{g}$ esitys.*

Todistus. Seuraa lauseesta 1.4.15, sillä tulos on yhtäpitävää Jacobin yhtälölle, toisin sanoen

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([X, Y])Z &= [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= \mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)Z - \mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{ad}(X)Z = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

mistä nähdään, että $\mathrm{ad}([X, Y]) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$. □

Osoittautuu, että Lien ryhmää vastaavalle Lien algebralle saadaan esitykset luonnollisella tavalla, yksinkertaisesti derivaattakuvauksella itse Lien ryhmän esityksistä.

Lause 3.2.3. *Olkoon G Lien ryhmä ja $\mathfrak{g}$ vastaava Lien algebra. Jos $(\pi, \mathcal{V})$ on Lien ryhmän G esitys, on kuvaus $d\pi = D_e\,\pi : \mathfrak{g} \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$ Lien algebran $\mathfrak{g}$ esitys.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [FH91, s. 104-109]. □

Seuraava klassinen Adon lauseena tunnettu tulos antaa teoreettisen syyn jättää muut kuin matriisialgebrat tämän tutkielman käsittelyn ulkopuolelle.

Lause 3.2.4 (Ado)**.** *Olkoon $\mathcal{V}$ n-ulotteinen Lien algebra kerroinkuntanaan $\mathbb{K}$ joko $\mathbb{C}$ tai $\mathbb{R}$. Tällöin on olemassa Lien algebran $\mathcal{V}$ uskollinen esitys avaruudelle $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Var74, s. 233-238]. □

3.3 Haarin mitta

Merkittävän erityistapauksen topologisista ryhmistä muodostavat lokaalisti kompaktit ryhmät, joihin myös kaikki Lien ryhmät monistoina kuuluvat. Lokaalisti kompakteille ryhmille voidaan aina konstruoida niille luonnollinen mitta ns. *Haarin mitta*. Tämä mitta on erityinen siinä mielessä, että se on *translaatioinvariantti* ryhmän operaation suhteen.

Määritelmä 3.3.1. Olkoon $(G, \cdot)$ lokaalisti kompakti topologinen ryhmä. Olkoon $\mathcal{B}(G)$ avaruuden G *Borel*-joukkojen kokoelma, toisin sanoen pienin σ-algebra, joka sisältää avaruuden G kompaktit joukot.

i) Joukon G mitta μ on *vasemmalta invariantti*, mikäli kaikilla $g \in G$ ja $S \in \mathcal{B}(G)$ pätee

$$\mu(gS) = \mu(S)\,.$$

ii) Joukon G mitta μ on vastaavasti *oikealta invariantti*, mikäli kaikilla $g \in G$ ja $S \in \mathcal{B}(G)$ pätee

$$\mu(Sg) = \mu(S)\,.$$

Haarin mitan määritelmä voidaan antaa yhtä hyvin niin vasemmalta invariantissa muodossa kuin oikealta invariantissakin. Seuraavassa käytetään ensisijaisesti vasemmalta invarianttia muotoa.

Määritelmä 3.3.2. Olkoon $(G, \cdot)$ lokaalisti kompakti topologinen ryhmä. Joukon G nollasta eroava mitta μ on ryhmän $(G, \cdot)$ *vasen (tai oikea) Haarin mitta*, mikäli

i) mitta μ on ryhmässä G vasemmalta (tai oikealta) invariantti

ii) mitta μ on äärellinen jokaiselle ryhmän G kompaktille osajoukolle

iii) mitta μ on *ulkoa päin säännöllinen* ryhmän G Borel-joukoilla, toisin sanoen

$$\mu(E) = \inf\{\, \mu(U) \mid E \subset U\,,\ U \,\text{avoin}\,\}\ ,$$

kaikilla $E \in \mathcal{B}(G)$.

iv) mitta μ on *sisältä päin säännöllinen* ryhmän G Borel-joukoilla, toisin sanoen

$$\mu(E) = \sup\{\, \mu(K) \mid K \subset E\,,\ K \,\text{kompakti}\,\}\ ,$$

kaikilla $E \in \mathcal{B}(G)$.

Kompaktin ryhmän G nollasta eroava Haarin mitta μ voidaan *normittaa* luonnollisella tavalla, sillä on välttämättä $\mu(G) < \infty$.

Määritelmä 3.3.3. Kompaktin topologisen ryhmän G Haarin mitta μ on *normitettu*, jos

$$\mu(G) = 1\,.$$

Lokaalisti kompakteille ryhmille Haarin mitan olemassaolo on taattu.

Lause 3.3.4. *Olkoon* $(G, \cdot\,)$ *lokaalisti kompakti topologinen ryhmä.*
i) On olemassa ryhmän G *vasen (ja oikea) Haarin mitta.*
ii) Jos μ *ja* ν *ovat kaksi eri ryhmän* G *vasenta (tai oikeaa) Haarin mittaa, on olemassa* $c > 0$ *siten, että* $\mu(E) = c\,\nu(E)$ *kaikilla* $E \in \mathcal{B}(G)$.

Todistus. Sivuutetaan, kohta *i*) kts. [Hal74, s. 254-256] ja kohta *ii*) kts. [Hal74, s. 263]. □

Näin ollen voidaan Lebesguen integraaliteorian mukaisesti edelleen määritellä *Haarin integraali* lokaalisti kompaktissa ryhmässä Haarin mitan avulla.

Määritelmä 3.3.5. Olkoon G lokaalisti kompakti topologinen ryhmä ja μ ryhmän G Haarin mitta. Olkoon $f : G \to \bar{\mathbb{R}}$ Borel-mitallinen funktio ja $S \in \mathcal{B}(G)$. Tällöin integraalia

$$\int_S f(x)\,\mu(dx)\,,$$

sanotaan funktion f *Haarin integraaliksi* yli ryhmän G Borel-joukon S.

Haarin mitan invarianssiominaisuudet siirtyvät edelleen Haarin integraalille.

Lause 3.3.6. *Olkoon* $(G, \cdot\,)$ *lokaalisti kompakti topologinen ryhmä.*

i) Jos μ *on ryhmän* G *vasen Haarin mitta ja* $f : G \to \bar{\mathbb{R}}$ *on integroituva, pätee*

$$\int_G f(g\cdot x)\,\mu(dx) = \int_G f(x)\,\mu(dx)\,,$$

kaikilla $g \in G$.

ii) Jos μ *on ryhmän* G *oikea Haarin mitta ja* $f : G \to \bar{\mathbb{R}}$ *on integroituva, pätee*

$$\int_G f(x\cdot g)\,\mu(dx) = \int_G f(x)\,\mu(dx)\,,$$

kaikilla $g \in G$.

Todistus. *i*) Olkoon $g \in G$ ja $f : G \to \bar{\mathbb{R}}$ Borel-mitallinen. Voidaan olettaa, että $f \geq 0$. Haarin integraalille saadaan määritelmän nojalla, että

$$\int_G f(x)\,\mu(dx) = \sup\left\{ \int_G y(x)\,\mu(dx) \mid y \in \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \text{ ja } 0 \leq y \leq f \text{ joukossa } G \right\}\,,$$

missä $\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}$ on ryhmän G Borel-yksinkertaisten funktioiden joukko. Riittää siis tarkastella Borel-yksinkertaista funktiota $y \in \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}$, jolle saadaan normaaliesitys siten, että

$$y(x) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j}(x) \quad \forall\, x \in G\,,$$

missä $b_j \in \mathbb{R}$ ja $B_j \in \mathcal{B}(G)$. Edelleen saadaan, että

$$y(g \cdot x) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j}(g \cdot x) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{g^{-1}B_j}(x) \quad \forall\, x \in G\,.$$

Nyt Haarin mitan vasemman invarianssin nojalla saadaan

$$\int_G y(g \cdot x)\, \mu(dx) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j\, \mu(g^{-1}B_j) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j\, \mu(B_j) = \int_G y(x)\, \mu(dx)\,.$$

ii) Vastaavasti oikealle Haarin mitalle. □

3.4 Kompaktien ryhmien esitykset

Kompaktien ryhmien esitysteoria on luonnollinen yleistys äärellisten ryhmien esitysteorialle. Jokainen äärellinen ryhmä nimittäin on kompakti topologinen ryhmä diskreetillä topologialla varustettuna. Mikäli ryhmän esitysavaruudeksi valitaan jokin *Hilbert-avaruus*, voidaan määritellä erityisesti ryhmän *unitaariset* esitykset.

Määritelmä 3.4.1. Olkoon G kompakti topologinen ryhmä. Esitys $\pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ Hilbert-avaruudelle $\mathcal{H}$ on *unitaarinen*, jos kaikilla $g \in G$ operaattori $\pi(g)$ on unitaarinen, toisin sanoen pätee

$$\langle \pi(g)\, v\,,\, \pi(g)\, w \rangle = \langle v\,,\, w \rangle\;, \qquad \forall\, v, w \in \mathcal{H}\,.$$

Kompaktin ryhmän Haarin integraalin avulla saadaan edelleen määriteltyä sisätulo.

Lause 3.4.2. *Olkoon π kompaktin ryhmän G esitys äärellisulotteiselle kompleksiselle vektoriavaruudelle $\mathcal{V}$. On olemassa avaruuden $\mathcal{V}$ sisätulo, jonka mielessä esitys π on unitaarinen.*

Todistus. Olkoon $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ jokin avaruuden $\mathcal{V}$ sisätulo. Määritellään

$$\langle u\,,\, v \rangle = \int_G \langle \pi(g)\, u\,,\, \pi(g)\, v \rangle_{\mathcal{V}}\, \mu(dg)\,,$$

missä μ on ryhmän G normitettu oikea Haarin mitta. Nyt kuvaus $\langle \cdot\,,\, \cdot \rangle$ on sisätulo, sillä kuvaus $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ on sisätulo, integraali on lineaarinen ja joukko G on kompakti. Osoitetaan, että esitys π on unitaarinen sisätulon $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ mielessä. Olkoon $g' \in G$ ja $u, v \in \mathcal{V}$. Saadaan

$$\begin{aligned}
\left\langle \pi(g')\,u\,,\,\pi(g')\,v \right\rangle &= \int_G \left\langle \pi(g)\pi(g')\,u\,,\,\pi(g)\pi(g')\,v \right\rangle_{\mathcal{V}} \mu(dg) \\
&= \int_G \left\langle \pi(gg')\,u\,,\,\pi(gg')\,v \right\rangle_{\mathcal{V}} \mu(dg) \\
&= \int_G f_{u,v}(gg')\,\mu(dg) = \int_G f_{u,v}(g)\,\mu(dg) \\
&= \int_G \langle \pi(g)\,u\,,\,\pi(g)\,v \rangle_{\mathcal{V}}\,\mu(dg) \\
&= \langle u\,,\,v \rangle\,,
\end{aligned}$$

missä $f_{u,v} : G \to \mathbb{C}$ siten, että

$$f_{u,v}(g) = \langle \pi(g)\,u\,,\,\pi(g)\,v \rangle_{\mathcal{V}}\;.$$

□

Edellisen tuloksen perusteella voidaan nyt osoittaa erityisesti, että jokainen kompaktin ryhmän esitysavaruus on esitettävissä suorana summana invariantteja aliavaruuksia.

Lause 3.4.3. *Olkoon π kompaktin ryhmän G esitys äärellisulotteiselle kompleksiselle vektoriavaruudelle $\mathcal{V}$.*
i) Jokaiselle avaruuden $\mathcal{V}$ esityksen π invariantille aliavaruudelle on komplementaarinen aliavaruus, joka on invariantti esityksessä π.
ii) Avaruus $\mathcal{V}$ on esitettävissä suorana summana epätriviaaleja invariantteja aliavaruuksia

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_N\,,$$

jollekin $N \in \mathbb{N}$.

Todistus. i). Lauseen 3.4.2 mukaan on olemassa avaruuden $\mathcal{V}$ sisätulo siten, että esitys π on unitaarinen. Olkoon $\mathcal{W}$ avaruuden $\mathcal{V}$ aliavaruus, joka on invariantti esityksessä π. Osoitetaan, että ortogonaalinen komplementti $\mathcal{W}^{\perp}$ on vastaavasti invariantti esityksessä π. Olkoon $x \in \mathcal{W}^{\perp}$, $y \in \mathcal{W}$ ja $g \in G$. Esityksen π unitaarisuudesta saadaan, että

$$\begin{aligned}
\langle \pi(g)\,x\,,\,y \rangle &= \left\langle \pi(g^{-1})\pi(g)\,x\,,\,\pi(g^{-1})\,y \right\rangle = \left\langle \pi(g^{-1}g)\,x\,,\,\pi(g^{-1})\,y \right\rangle \\
&= \left\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(x)\,,\,\pi(g^{-1})\,y \right\rangle = \left\langle x\,,\,\pi(g^{-1})\,y \right\rangle = 0\,,
\end{aligned}$$

koska $\pi(g^{-1})\,y \in \mathcal{W}$, sillä aliavaruus $\mathcal{W}$ on invariantti esityksessä π.

ii) Olkoon $\mathcal{V}_1$ avaruuden $\mathcal{V}$ epätriviaali esityksen π invariantti aliavaruus, jolla pienin dimensio.

Havaitaan ensin, että $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_1^{\perp}$. Jos $\mathcal{V}_1^{\perp} \neq \{0\}$ valitaan $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_1^{\perp}$ epätriviaali esityksen π invariantti aliavaruus, jolla pienin dimensio. Jatketaan näin. Koska avaruus $\mathcal{V}$ on äärellisulotteinen, on $\mathcal{V}_k = \{0\}$, jollakin $k \in \mathbb{N}$. □

Erityisesti kompaktien ryhmien esitykset ovat oleellisesti äärellisulotteisia.

Lause 3.4.4. *Jokainen kompaktin ryhmän redusoitumaton esitys on äärellisulotteinen.*

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Far08, Theorem 6.3.2, sivu 105]. □

Kompaktien ryhmien esitysteoriassa esitysten *matriisielementit* ovat jatkuvia kuvauksia.

Määritelmä 3.4.5. Olkoon G kompakti topologinen ryhmä ja $\pi : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ ryhmän G äärellisulotteinen esitys Hilbert-avaruudelle $\mathcal{H}$. Esityksen $(\pi, \mathcal{H})$ *matriisielementit* ovat kuvauksia $\pi_{ij} : G \to \mathbb{C}$ siten, että

$$\pi_{ij}(g) = \langle \pi(g)\, e_j \,,\, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \ ,$$

missä $\{e_1, \ldots, e_n\}$ on avaruuden $\mathcal{H}$ sisätulon $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ mielessä ortonormaali kanta. Edelleen esityksen π matriisielementtien joukko on $\mathcal{M}_{\pi}$.

Matriisielementeille pätevät ns. Schurin ortogonaalisuusrelaatiot, jotka yleistävät äärellisten ryhmien esitysteorian kompakteille ryhmille.

Lause 3.4.6 (Schur)**.** *Olkoon $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ ja $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ kompaktin ryhmän G redusoitumattomia unitaarisia esityksiä, jotka eivät ole keskenään ekvivalentteja.*
i) Matriisielementit π_{ij} ja $\pi_{i'j'}$ ovat ortogonaaliset avaruudessa $L^2(G)$, jos $i \neq i'$ tai $j \neq j'$.
ii) Joukot $\mathcal{M}_{\pi_1}$ ja $\mathcal{M}_{\pi_2}$ ovat keskenään ortogonaalisia avaruuden $L^2(G)$ aliavaruuksia.

Todistus. Sivuutetaan, kohta *i)* kts. [Far08, Theorem 6.3.3, sivu 105] ja kohta *ii)* kts. [Far08, Theorem 6.3.4, sivu 106]. □

Peterin ja Weylin lause antaa Schurin ortogonaalisuusrelaatioiden nojalla yleistyksen klassiselle neliöintegroituvien funktioiden Fourier-sarjojen teorialle.

Lause 3.4.7 (Peter-Weyl)**.** *Olkoon G kompakti topologinen ryhmä. Tällöin*

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{[\pi] \in \Pi}} \mathcal{M}_{\pi} \,,$$

missä Π on ryhmän G ekvivalenttien unitaaristen esitysten ekvivalenssiluokkien joukko.

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Far08, Theorem 6.4.1, sivut 108-109]. □

Luku 4

Ortogonaali- ja unitaariryhmien esityksistä

4.1 Ryhmän SU(2) redusoitumattomat esitykset

Erityisen unitaariryhmän SU(2) redusoitumattomat esitykset löydetään tutkimalla vastaavan Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$ (redusoitumattomia) esityksiä. Tämä tehdään palauttamalla tarkastelu Lien algebraan $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, sillä muistetaan aiemmasta, että $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) + i\mathfrak{su}(2)$.

Määritelmä 4.1.1. Olkoon $\mathcal{P}_m$ kahden muuttujan m-asteisten homogeenisten kompleksipolynomien avaruus, missä $m \in \mathbb{N}$.

Lause 4.1.2. *Kompleksisen vektoriavaruuden $\mathcal{P}_m$ kompleksinen dimensio* $\dim(\mathcal{P}_m) = m + 1$.

Todistus. Olkoon $f_j \in \mathcal{P}_m$ siten, että

$$f_j(u,v) = u^j v^{m-j}\,,$$

kun $j = 0, ..., m$. Selvästi joukko $\{f_j\}$ on lineaarisesti riippumaton ja jokainen avaruuden $\mathcal{P}_m$ polynomi saadaan polynomien f_j kompleksisena lineaarikombinaationa. $\square$

Lause 4.1.3. *Olkoon $m \in \mathbb{N}$ ja $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Määritellään kuvaus $\pi_m(g) : \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m$ siten, että*

$$(\,\pi_m(g)\,f\,)\,(u,v) = f((u,v)\,g\,)\,.$$

Tällöin π_m on Lien ryhmän $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ *esitys avaruudelle $\mathcal{P}_m$.*

Todistus. Olkoon $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ siten, että

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ja $f \in \mathcal{P}_m$. Saadaan kuvaukselle $\pi_m(g)$, että

$$(\,\pi_m(g)\, f\,)\,(u,v) = f(au + cv, bu + dv)\,,$$

joten selvästi $\pi_m(g)\, f \in \mathcal{P}_m$. Siten lineaarikuvaus $\pi_m(g) : \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_m$ on hyvin määritelty. Lisäksi $\pi_m(g)$ on bijektio käänteiskuvauksella $(\pi_m(g))^{-1}$ siten, että

$$(\,(\pi_m(g))^{-1}\, f\,)(u,v) = f((u,v)g^{-1})\,,$$

koska erityisesti

$$(\,((\pi_m(g))^{-1} \circ \pi_m(g))\, f\,)\,(u,v) = f((u,v)g^{-1}g) = f(u,v)\,,$$

toisin sanoen $(\pi_m(g))^{-1} \circ \pi_m(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_m}$. Kuvaus π_m on siten hyvin määritelty. Edelleen π_m on ryhmähomomorfismi, sillä jos $g, h \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ saadaan

$$(\,\pi_m(gh)\, f\,)\,(u,v) = f((u,v)gh) = (\,(\pi_m(g) \circ \pi_m(h))\, f\,)\,(u,v)\,.$$

Kuvauksen π_m sileys seuraa suoraan lineaarikuvausten sileydestä. Näin ollen π_m on Lien ryhmän $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ esitys. □

Esityksen π_m derivaatasta saadaan redusoitumaton esitys vastaavalle Lien algebralle $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Lause 4.1.4. *Kuvaus $\rho_m = d\pi_m$ on Lien algebran $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ redusoitumaton esitys.*

Todistus. Lauseen 3.2.3 ja edellisen tuloksen perusteella kuvaus $\rho_m = d\pi_m$ on Lien algebran $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ esitys. Kompleksisilla vektoriavaruudella $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ on kanta $\{H,\, E,\, F\}$, missä

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kantamatriiseille saadaan kommutaatiorelaatiot

$$\begin{aligned} [\,H\,,\,E\,] = HE - EH &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,E \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$[\,E\,,\,F\,] = EF - FE = H \quad \text{ja} \qquad [\,F\,,\,H\,] = FH - HF = 2\,F\,.$$

Saadaan derivoidulle esitykselle ρ_m, että kaikilla $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

$$\rho_m(X) = d\pi_m(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi_m(\exp\,(tX))\,.$$

Lisäksi saadaan, että

$$\exp\,(tH) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\,(tH)^k = \lim_{N\to\infty} \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} t^k & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (-t)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

ja edelleen

$$\exp\,(tE) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(tE)^k = I + tE$$

kuten myös vastaavasti

$$\exp\,(tF) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,(tF)^k = I + tF\,,$$

sillä matriisi H on diagonaalimatriisi sekä pätee, että $E^2 = F^2 = O$. Saadaan nyt

$$(\,\pi_m(\exp\,(tH))\,f\,)\,(u,v) = f((u,v)\exp\,(tH)) = f(e^t u,\, e^{-t} v)$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned} (\,\pi_m(\exp\,(tE))\,f\,)\,(u,v) &= f((u,v)\exp\,(tE)) = f((u,v)(I + tE)) \\ &= f((u,v) + (u,v)\,tE) = f(u,\, tu + v) \end{aligned}$$

kuten myös

$$\begin{aligned} (\,\pi_m(\exp\,(tF))\,f\,)\,(u,v) &= f((u,v)\exp\,(tF)) = f((u,v)(I + tF)) \\ &= f((u,v) + (u,v)\,tF) = f(u + tv, v)\,. \end{aligned}$$

Edellisistä saadaan kuvat derivoidussa esityksessä ρ_m siten, että

$$\begin{aligned} \rho_m(H)f = d\pi_m(H)f &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi_m(\exp\,(tH))f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(e^t u, e^{-t} v) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = u\frac{\partial f}{\partial u} - v\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}\rho_m(E)f &= d\pi_m(E)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi_m(\exp(tE))f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(u, tu+v) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}0\\u\end{pmatrix} = u\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}\rho_m(F)f &= d\pi_m(F)f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi_m(\exp(tF))f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(u+tv, v) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix} = v\frac{\partial f}{\partial u}\,.\end{aligned}$$

Tarkastellaan kuvausten $\rho_m(H)$, $\rho_m(E)$ ja $\rho_m(F)$ kuvia kantavektoreille f_j, $j \in \mathbb{N}$. Saadaan

$$\begin{aligned}\rho_m(H)f_j &= \rho_m(H)\, u^j v^{m-j} = \left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) u^j v^{m-j} = u\frac{\partial}{\partial u}\, u^j v^{m-j} - v\frac{\partial}{\partial v} u^j v^{m-j} \\ &= uju^{j-1}v^{m-j} - vu^j(m-j)v^{m-j-1} = ju^jv^{m-j} - (m-j)u^jv^{m-j} \\ &= (2j-m)f_j\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}\rho_m(E)f_j &= \rho_m(E)\, u^j v^{m-j} = \left(u\frac{\partial}{\partial v}\right) u^j v^{m-j} = (m-j)u^{j+1}v^{m-j-1} \\ &= (m-j)u^{j+1}v^{m-(j+1)} = (m-j)f_{j+1}\end{aligned}$$

kuten myös

$$\begin{aligned}\rho_m(F)f_j &= \rho_m(F)\, u^j v^{m-j} = \left(v\frac{\partial}{\partial u}\right) u^j v^{m-j} = jvu^{j-1}v^{m-j} = ju^{j-1}v^{m-j+1} \\ &= ju^{j-1}v^{m-(j-1)} = jf_{j-1}\,.\end{aligned}$$

Näin saadaan lineaarikuvaukselle $\rho_m(H)$ vastinmatriisi kannan $\{f_j\}$ mielessä diagonaalimatriisina siten, että

$$\operatorname{mat}(\rho_m(H)) = \begin{pmatrix} -m &&&& \\ & -m+2 &&& \\ && \ddots && \\ &&& m-2 & \\ &&&& m \end{pmatrix}.$$

Vastaavasti saadaan kahdelle muulle lineaarikuvaukselle $\rho_m(E)$ ja $\rho_m(F)$ matriisiesitykset

$$\mathrm{mat}\,(\rho_m(E)) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ m & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 2 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathrm{mat}\,(\rho_m(F)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & m \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Olkoon nyt $\mathcal{W}$ jokin epätriviaali esityksen ρ_m invariantti aliavaruus. Lineaarikuvauksen $\rho_m(H)$ rajoittumalla aliavaruuteen $\mathcal{W}$ on ainakin yksi ominaisvektori f. Matriisiesityksestä nähdään, että kuvauksen $\rho(F)$ ominaisvektorit ovat vektorit f_k, eikä muita ole. Täten $f = f_k$, jollakin $k \in \mathbb{N}$. Soveltamalla vektoriin f_k lineaarikuvausten $\rho_m(E)$ ja $\rho_m(F)$ rajoittumia aliavaruuteen $\mathcal{W}$ tai niiden potensseja, saadaan että $f_j \in \mathcal{W}$ kaikilla $j = 0, \dots, m$. Siten $\mathcal{W} = \mathcal{P}_m$ eli esitys ρ_m on redusoitumaton.

□

Seuraavan tuloksen mukaan aiemman konstruktion lisäksi oleellisesti erilaisia redusoitumattomia Lien algebran $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ esityksiä ei ole.

Lause 4.1.5. *Olkoon ρ redusoitumaton kompleksilineaarinen Lien algebran $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ esitys. Tällöin ρ on ekvivalentti jollekin esityksistä ρ_m.*

Todistus. Olkoon ρ redusoitumaton kompleksilineaarinen Lien algebran $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ esitys äärellisulotteiselle kompleksiselle vektoriavaruudelle $\mathcal{V}$. Olkoon $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ kuvauksen $\rho(H)$ ominaisarvoista se, jolla on pienin reaaliosa ja $\phi_0 \in \mathcal{V}$ ominaisarvoa λ_0 vastaava ominaisvektori, ts.

$$\rho(H)\phi_0 = \lambda_0 \phi_0 \,.$$

Olkoon edelleen $\phi_1 = \rho(E)\phi_0$. Oletetaan, että $\phi_1 \neq 0$. Osoitetaan, että ϕ_1 on kuvauksen $\rho(H)$ ominaisvektori ominaisarvolla $\lambda_0 + 2$. Saadaan, että

$$\begin{aligned} \rho(H)\phi_1 &= \rho(H)\rho(E)\phi_0 = \rho(E)\rho(H)\phi_0 + \rho([\,H\,,\,E\,])\phi_0 \\ &= \lambda_0 \rho(E)\phi_0 + 2\rho(E)\phi_0 = (\lambda_0 + 2)\phi_1 \,. \end{aligned}$$

Olkoon nyt $\phi_k = \rho(E)^k \phi_0$, kun $k \in \mathbb{N}$. Induktiolla saadaan, että $(\phi_k)_k$ on jono kuvauksen $\rho(H)$ ominaisvektoreita, sillä jos $\rho(H)\phi_{k-1} = \rho(H)\rho(E)^{k-1}\phi_0 = (\lambda_0 + 2(k-1))\phi_{k-1}$ saadaan

$$\begin{aligned} \rho(H)\phi_k &= \rho(H)\rho(E)^k\phi_0 = \rho(H)\rho(E)\rho(E)^{k-1}\phi_0 \\ &= \rho(E)\rho(H)\rho(E)^{k-1}\phi_0 + \rho([\,H\,,\,E\,])\rho(E)^{k-1}\phi_0 \\ &= \rho(E)(\lambda_0 + 2(k-1))\phi_{k-1} + 2\rho(E)\phi_{k-1} \\ &= (\lambda_0 + 2(k-1))\phi_k + 2\phi_k = (\lambda_0 + 2k)\phi_k \,. \end{aligned}$$

Nollasta eroavat vektorit ϕ_k ovat eri ominaisarvoja vastaavina ominaisvektoreina lineaarisesti riippumattomia. Edellisestä konstruktiosta seuraa, että on $m \in \mathbb{N}$ siten, että $\phi_k \neq 0$, kun $k \leq m$ ja $\phi_{m+1} = 0$, sillä muuten avaruus $\mathcal{V}$ ei olisi äärellisulotteinen.

Olkoon nyt $\mathcal{W} = \operatorname{span}\{\phi_0, \dots, \phi_m\}$. Aliavaruus $\mathcal{W}$ on invariantti kuvauksille $\rho(H)$ ja $\rho(E)$,

$$\rho(H)\phi_k = (\lambda_0 + 2k)\phi_k \quad \text{ja} \quad \rho(E)\phi_k = \phi_{k+1} \quad \forall\, k \leq m\,.$$

Osoitetaan, että aliavaruus $\mathcal{W}$ on invariantti myös kuvaukselle $\rho(F)$. Saadaan ensinnäkin, että

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(F)\phi_0 &= \rho(F)\rho(H)\phi_0 + \rho([\,H\,,\,F\,])\phi_0 \\ &= \lambda_0\rho(F)\phi_0 - 2\rho(F)\phi_0 = (\lambda_0 - 2)\ \rho(F)\phi_0\,.\end{aligned}$$

Edellisestä seuraa välttämättä, että $\rho(F)\phi_0 = 0$, sillä jos näin ei olisi niin $\lambda_0 - 2$ olisi kuvauksen $\rho(H)$ ominaisarvo, joka on reaaliosaltaan pienempi kuin λ_0, mikä on ristiriitaista. Osoitetaan induktiolla, että $\rho(F)\phi_k = -k(\lambda_0 + k - 1)\phi_{k-1}$. Kun $k = 1$ saadaan, että

$$\begin{aligned}\rho(F)\phi_1 = \rho(F)\rho(E)\phi_0 &= \rho(E)\rho(F)\phi_0 + \rho([\,F\,,\,E\,])\phi_0 \\ &= -\rho([\,E\,,\,F\,])\phi_0 = -\rho(H)\phi_0 = -\lambda_0\phi_0\,.\end{aligned}$$

Oletetaan, että kun $k \in \mathbb{N}$, pätee $\rho(F)\phi_k = -k(\lambda_0 + k - 1)\phi_{k-1}$. Saadaan edelleen, että

$$\begin{aligned}\rho(F)\phi_{k+1} &= \rho(F)\rho(E)\phi_k = \rho(E)\rho(F)\phi_k + \rho([\,F\,,\,E\,])\phi_k \\ &= -k(\lambda_0 + k - 1)\rho(E)\phi_{k-1} - \rho(H)\phi_k \\ &= (-k(\lambda_0 + k - 1) - (\lambda_0 + 2k))\phi_k = -(k+1)(\lambda_0 + k)\phi_k\,.\end{aligned}$$

Siten aliavaruus $\mathcal{W}$ on invariantti myös kuvaukselle $\rho(F)$.

Osoitetaan, että $\lambda_0 = -m$. Havaitaan ensin, että

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\rho(H)) &= \operatorname{tr}([\,\rho(E)\,,\,\rho(F)\,]) = \operatorname{tr}(\rho(E)\rho(F) - \rho(F)\rho(E)) \\ &= \operatorname{tr}(\rho(E)\rho(F)) - \operatorname{tr}(\rho(F)\rho(E)) = \operatorname{tr}(\rho(E)\rho(F)) - \operatorname{tr}(\rho(E)\rho(F)) = 0\,.\end{aligned}$$

Jälki saadaan kuitenkin myös ominaisarvojen summana, ts.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\rho(H)) &= \lambda_0 + (\lambda_0 + 2) + \cdots + (\lambda_0 + 2m) \\ &= (m+1)\lambda_0 + m(m+1) = (m+1)(\lambda_0 + m) = 0\,,\end{aligned}$$

eli välttämättä on $\lambda_0 = -m$.

Lopulta saadaan siis, että

$$\rho(H)\phi_k = (2k - m)\phi_k\,, \quad \rho(E)\phi_k = \phi_{k+1}\,, \quad \rho(F)\phi_k = k(m - k + 1)\phi_{k-1}\,.$$

Määritellään lineaarikuvaus $A : \mathcal{V} \to \mathcal{P}_m$ siten, että

$$A\phi_k = c_k f_k\,, \quad c_0 = 1,\, c_k = m(m-1)\cdots(m-k+1)\,.$$

Tällöin A on bijektio siten että

$$A \circ \rho(X) = \rho_m(X) \circ A\,,$$

ts. kuvaus A kietoo esitykset ρ ja ρ_m ja siten ρ ja ρ_m ovat ekvivalentteja. □

Edellinen tulos voidaan edelleen nostaa eksponenttikuvauksen avulla Lien ryhmään SU(2).

Lause 4.1.6. *Jos π on Lien ryhmän* SU(2) *redusoitumaton esitys äärellisulotteiselle kompleksiselle vektoriavaruudelle $\mathcal{V}$, on π ekvivalentti jollekin esityksen π_m rajoittumalle ryhmään* SU(2)*.*

Todistus. Lauseen 2.2.7 nojalla pätee kompleksifikaatio

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) + i\mathfrak{su}(2)$$

ja siten Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$ esitys $d\pi$ voidaan jatkaa lineaarisesti Lien algebran $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ esitykseksi $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{V})$. Olkoon nyt $\mathrm{Exp} : \mathfrak{gl}(\mathcal{V}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ Lien ryhmän $\mathrm{GL}(\mathcal{V})$ eksponenttikuvaus. Tällöin erityisesti alla oleva kaavio kommutoi.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SU}(2) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{GL}(\mathcal{V}) \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Exp}} \\ \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow[d\pi]{} & \mathfrak{gl}(\mathcal{V}) \end{array}$$

Osoitetaan, että esitys ρ on redusoitumaton. Olkoon $\mathcal{W} \neq \{0\}$ esityksen ρ invariantti aliavaruus. Nyt aliavaruus $\mathcal{W}$ on invariantti kuvauksessa $\mathrm{Exp}\,(\rho(X)) = \pi(\exp\,(X))$, kaikilla $X \in \mathfrak{su}(2)$, sillä jos $w \in \mathcal{W}$ saadaan, että

$$\mathrm{Exp}\,(\rho(X))\,w = \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(\rho(X))^k\right)w = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(\rho(X))^k\,w \in \mathcal{W}\,.$$

Koska ryhmä SU(2) on yhtenäinen, on erityisesti

$$\exp\,(\mathfrak{su}(2)) = \mathrm{SU}(2)\,.$$

Siten aliavaruus $\mathcal{W}$ on invariantti esityksessä π. On siis oltava, että $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, koska esitys π on redusoitumaton. Lauseen 4.1.5 nojalla esitys ρ on ekvivalentti jollekin esityksistä ρ_m.

Siten saadaan isomorfismi $A: \mathcal{V} \to \mathcal{P}_m$ siten, että

$$A \circ \rho(X) = \rho_m(X) \circ A\,,$$

kaikilla $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Vastaavasti saadaan, että

$$A \circ \operatorname{Exp}(\rho(X)) = \operatorname{Exp}(\rho_m(X)) \circ A\,,$$

toisin sanoen

$$A \circ \pi(\exp(X)) = \pi_m(\exp(X)) \circ A\,,$$

kaikilla $X \in \mathfrak{su}(2)$. Ryhmän SU(2) yhtenäisyyden nojalla seuraa, että

$$A \circ \pi(g) = \pi_m(g) \circ A\,,$$

kaikilla $g \in \mathrm{SU}(2)$. □

4.2 Ryhmän SO(3) redusoitumattomat esitykset

Seuraavaan tulokseen perustuen saadaan Lien ryhmän SU(2) esityksistä muodostettua edelleen Lien ryhmän SO(3) esityksiä. Tämä perustuu adjungaattiesityksen käyttöön ryhmässä SU(2).

Lause 4.2.1. *i) Kuvaus* $\mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ *on surjektiivinen Lien ryhmähomomorfismi.*

ii) Tekijäryhmä $\mathrm{SU}(2) / \{e, -e\}$ *on isomorfinen ryhmälle* $\mathrm{SO}(3)$.

Todistus. Olkoon $T \in \mathfrak{su}(2)$ mielivaltainen. Tällöin saadaan joillekin $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$, että

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3\,,$$

missä $\{X_1, X_2, X_3\}$ on avaruuden $\mathfrak{su}(2)$ lauseessa 2.2.8 esitetty kanta. Saadaan

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(T)\, X_1 &= [\,T\,,\, X_1\,] = [\,t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3\,,\, X_1\,] \\
&= t_1\,[\,X_1\,,\, X_1\,] + t_2\,[\,X_2\,,\, X_1\,] + t_3\,[\,X_3\,,\, X_1\,] \\
&= t_1 O + t_2(-2X_3) + t_3(2X_2) = 2t_3 X_2 - 2t_2 X_3
\end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$\begin{aligned}
\operatorname{ad}(T)\, X_2 &= [\,T\,,\, X_2\,] = [\,t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3\,,\, X_2\,] \\
&= t_1\,[\,X_1\,,\, X_2\,] + t_2\,[\,X_2\,,\, X_2\,] + t_3\,[\,X_3\,,\, X_2\,] \\
&= t_1(2X_3) + t_2 O + t_3(-2X_1) = -2t_3 X_1 + 2t_1 X_3\,,
\end{aligned}$$

kuten myös

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}(T)\, X_3 = [\, T\,,\, X_3\,] &= [\, t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3\,,\, X_3\,] \\ &= t_1\,[\, X_1\,,\, X_3\,] + t_2\,[\, X_2\,,\, X_3\,] + t_3\,[\, X_3\,,\, X_3\,] \\ &= t_1(-2X_2) + t_2(2X_1) + t_3 O = 2t_2 X_1 - 2t_1 X_2\,.\end{aligned}$$

Näin ollen saadaan lineaarikuvauksen $\operatorname{ad}(T)$ matriisi kannan $\{X_1,\, X_2,\, X_3\}$ suhteen, ts.

$$\operatorname{mat}(\operatorname{ad}(T)) = \begin{pmatrix} 0 & -2t_3 & 2t_2 \\ 2t_3 & 0 & -2t_1 \\ -2t_2 & 2t_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)\,.$$

Koska Lien ryhmä SU(2) on (yhdesti) yhtenäinen ja vastaavasti Lien ryhmä SO(3) on ryhmän O(3) neutraalialkion sisältävä yhtenäinen komponentti, on siten kuvaus $\operatorname{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ surjektiivinen Lien ryhmähomomorfismi.

ii) Riittää osoittaa, että $\operatorname{Ker}(\operatorname{Ad}) = \{-e,\, e\}$. Saadaan, että

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\operatorname{Ad}) &= \{\, g \in \mathrm{SU}(2) \;:\; \operatorname{Ad}(g) = e\,\} \\ &= \{\, g \in \mathrm{SU}(2) \;:\; \operatorname{Ad}(g)\, X = X\,,\ \text{kaikilla } X \in \mathfrak{su}(2)\,\} \\ &= \left\{\, g \in \mathrm{SU}(2) \;:\; gXg^{-1} = X\,,\ \text{kaikilla } X \in \mathfrak{su}(2)\,\right\} \\ &= \{\, g \in \mathrm{SU}(2) \;:\; gX = Xg\,,\ \text{kaikilla } X \in \mathfrak{su}(2)\,\}\ .\end{aligned}$$

Olkoon nyt $g \in \mathrm{SU}(2)$ siten, että $gX = Xg$, kaikilla $X \in \mathfrak{su}(2)$. Merkitään

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}\,.$$

On oltava erityisesti, että $gX_1 = X_1\, g$, toisin sanoen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eli yhtäpitävästi saadaan, että

$$\begin{pmatrix} ai & -bi \\ ci & -di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai & bi \\ -ci & -di \end{pmatrix}\,.$$

On siis oltava, että $b = c = 0$. Lisäksi, koska g on unitaarinen on oltava, että $a = d = \omega$ siten, että $\omega^2 = 1$, toisin sanoen $\omega = \pm 1$. Siten $g = I$ tai $g = -I$. $\square$

Edellisen tuloksen voi ymmärtää myös siten, että Lien ryhmä SU(2) on Lien ryhmän SO(3) kaksinkertainen peite. Näin ollen ryhmän SO(3) redusoitumattomattomat esitykset vastaavat ryhmän SU(2) redusoitumattomia esityksiä.

Lause 4.2.2. *Jokainen ryhmän* SO(3) *äärellisulotteinen redusoitumaton esitys on ekvivalentti jollekin esityksistä* $\tilde{\pi}_{2\ell}$, *joille*

$$\tilde{\pi}_{2\ell} \circ \mathrm{Ad} = \pi_{2\ell} \,.$$

Todistus. Olkoon $\mathcal{V}$ äärellisulotteinen kompleksinen vektoriavaruus ja $T : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$ ryhmän SO(3) redusoitumaton esitys. Tällöin kuvaus

$$\pi = T \circ \mathrm{Ad}$$

on ryhmän SU(2) redusoitumaton esitys ja siten ekvivalentti jollekin esityksistä π_m, missä $m \in \mathbb{N}$. Koska erityisesti $\mathrm{Ad}\,(-e) = I$, on oltava myös, että $\pi_m(-e) = I$. Tämä toteutuu täsmälleen silloin, kun m on parillinen.

Kääntäen, olkoon $m = 2\ell$, missä $\ell \in \mathbb{N}$. Tällöin esityksestä $\pi_{2\ell}$ saadaan tekijäryhmän $\mathrm{SU}(2) \,/\, \{\, -e,\, e \,\}$ esitys. Lauseen 4.2.1 kohdan ii) nojalla on olemassa Lien ryhmän SO(3) esitys $\tilde{\pi}_{2\ell}$ siten, että

$$\tilde{\pi}_{2\ell} \circ \mathrm{Ad} = \pi_{2\ell} \,.$$

Näin ollen, koska esitys $\pi = T \circ \mathrm{Ad}$ on ekvivalentti esityksen $\pi_{2\ell}$ kanssa, on esitys T edelleen ekvivalentti esitykselle $\tilde{\pi}_{2\ell}$.

□

Osoitetaan lopuksi, että ryhmän SO(3) redusoitumattomat esitykset saadaan realisoitua avaruuden $\mathbb{R}^3$ *harmonisten* homogeenisten polynomien avaruuksiin.

Määritelmä 4.2.3. *i*) Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : U \to \mathbb{C}$ siten, että $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Funktio f on *harmoninen*, jos f on ratkaisu *osittaisdifferentiaaliyhtälölle*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0 \,.$$

Toisin sanoen pätee $\Delta f = 0$, missä Δ on *Laplace-operaattori* siten, että

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \,.$$

ii) Olkoon $\mathcal{H}_\ell$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ harmonisten homogeenisten astetta ℓ olevien polynomien avaruus, missä $\ell \in \mathbb{N}$.

Voidaan rajoittua yksikköpallon pinnalle, jolloin homogeenisten harmonisten polynomien rajoittumina saadaan ns. *palloharmoniset funktiot.*

Määritelmä 4.2.4. Joukon $\mathcal{H}_\ell$ funktioiden $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ yksikköpallolle $\mathbb{S}^2$ rajoittumien $f|_{\mathbb{S}^2}$ joukko on $\mathcal{Y}_\ell$. Funktio $f \in \mathcal{Y}_\ell$ on *palloharmoninen funktio* astetta ℓ.

Palloharmoniset funktiot on luontevaa ilmaista avaruuden $\mathbb{R}^3$ *pallokoordinaateissa.*

Määritelmä 4.2.5. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ *pallokoordinaatit* ovat $(r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ s.e.

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \quad \theta = \arccos\left(\frac{x_3}{r}\right)\,, \quad \phi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\,,$$

toisin sanoen

$$\begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\phi \\ x_2 = r \sin\theta \sin\phi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases},$$

missä $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teorian avulla voidaan etsiä kaikki lineaarisesti riippumattomat ratkaisut *Laplacen yhtälölle* $\Delta f = 0$.

Lause 4.2.6. *Avaruuden $\mathcal{Y}_\ell$ kanta saadaan palloharmonisista funktioista astetta ℓ ja kertalukua m, toisin sanoen kuvauksista $Y_\ell^m : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ siten, että*

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}\,,$$

missä $\ell \in \mathbb{N}$, $m \in \{-\ell, -\ell + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, \ell\}$ ja $P_\ell^m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Legendren liittopolynomi s.e.

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2 - 1)^\ell \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Todistus. Sivuutetaan, kts. [Atk2012, s. 81-86]. □

Osoitetaan, että funktiot Y_ℓ^m ovat keskenään ortogonaalisia avaruuden $L^2(\mathbb{S}^2)$ sisätulon

$$\langle f\,,\, g\rangle = \int_{\mathbb{S}^2} f g^*\, d\,\Omega = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)\, g^*(\theta, \phi)\, d\phi\right] \sin\theta\, d\theta$$

mielessä, sekä lisäksi normitettuja siten, että

$$\|\, Y_\ell^m \,\|^2 = \langle Y_\ell^m\,,\, Y_\ell^m\rangle = 1\,.$$

Lause 4.2.7. *Palloharmoniset funktiot Y_ℓ^m muodostavat ortonormaalin joukon, toisin sanoen*

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_\ell^m \, Y_{\ell'}^{m'^*} \, d\,\Omega = \delta_{mm'}\,\delta_{\ell\ell'}\,, \quad \text{ja} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ kun } i = j \\ 0, \text{ kun } i \neq j \end{cases} .$$

Todistus. Olkoon $\ell \in \mathbb{N}$ ja $m \in \{-\ell, -\ell+1, \ldots, 0, 1, \ldots, \ell\}$. Merkitään nyt

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = y_\ell^m P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}\,, \quad \text{kun} \quad y_\ell^m = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,.$$

on normituskerroin. Saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} Y_\ell^m \, Y_{\ell'}^{m'^*} \, d\,\Omega &= \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} Y_\ell^m(\theta,\phi)\, Y_{\ell'}^{m'^*}(\theta,\phi)\, d\phi \right] \sin\theta \, d\theta \\
&= \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} y_\ell^m P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}\, y_{\ell'}^{m'} P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta) e^{-im'\phi}\, d\phi \right] \sin\theta\, d\theta \\
&= y_\ell^m\, y_{\ell'}^{m'} \int_0^\pi \left[P_\ell^m(\cos\theta) P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta) \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi}\, d\phi \right] \sin\theta\, d\theta \\
&= y_\ell^m\, y_{\ell'}^{m'} \int_0^\pi P_\ell^m(\cos\theta) P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta)\, 2\pi\, \delta_{mm'} \, \sin\theta\, d\theta \\
&= \delta_{mm'}\, 2\pi\, y_\ell^m\, y_{\ell'}^m \int_{-1}^1 P_\ell^m(u) P_{\ell'}^m(u)\, du \\
&= \delta_{mm'}\, 2\pi\, y_\ell^m\, y_{\ell'}^m \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'} \\
&= \delta_{mm'}\,\delta_{\ell\ell'}\, (y_\ell^m)^2 \, \frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} = \delta_{mm'}\,\delta_{\ell\ell'}\,,
\end{aligned}$$

sillä Legendren liittopolynomit ovat ortogonaalisia ja erityisesti pätee, että

$$\int_{-1}^1 [P_\ell^m(x)]^2\, dx = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\,.$$

□

Seuraus 4.2.8. *Avaruuden $\mathcal{H}_\ell$ dimensio* $\dim(\mathcal{H}_\ell) = 2\ell + 1$.

Todistus. Rajoittumakuvaus $\mathcal{H}_\ell \to \mathcal{Y}_\ell$ on lineaarinen isomorfismi. Astetta ℓ olevia lineaarisesti riippumattomia palloharmonisia funktioita on $2\ell + 1$ kappaletta. □

Nyt voidaan osoittaa, että ryhmän SO(3) redusoitumattomat esitykset saadaan realisoitua harmonisten homogeenisten polynomien avaruudelle $\mathcal{H}_\ell$.

Lause 4.2.9. *Olkoon $\ell \in \mathbb{N}$. Määritellään kuvaus T_ℓ siten, että*

$$(\, T_\ell\,(g)\, f\,)(x) = f(xg)\,,$$

kaikilla $g \in \mathrm{SO}(3)$ *ja* $f \in \mathcal{H}_\ell$. *Tällöin kuvaus* T_ℓ *on ryhmän* $\mathrm{SO}(3)$ *redusoitumaton esitys avaruudelle* $\mathcal{H}_\ell$ *ja ekvivalentti esitykselle* $\tilde{\pi}_{2\ell}$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että kuvaus T_ℓ on Lien ryhmän SO(3) esitys. Lauseen 4.1.3 perusteella riittää osoittaa, että $\Delta(T_\ell(g)f) = 0$.

Ensin nähdään, että

$$(T_\ell (g)f)(x) = f(xg) = f(g^t x) = f\left(\sum_{k=1}^{3} g_{k1}x_k, \sum_{k=1}^{3} g_{k2}x_k, \sum_{k=1}^{3} g_{k3}x_k\right).$$

Saadaan ketjusäännön avulla, että

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(T_\ell (g)\, f)(x) = \sum_{k=1}^{3} g_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g^t x)\,,$$

mistä edelleen vastaavasti ketjusääntöä soveltamalla saadaan

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(T_\ell (g)\, f)(x) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ik}\, g_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(g^t x)\,.$$

Edellisistä saadaan summana

$$\begin{aligned}
\Delta(T_\ell (g)\, f)(x) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ik}\, g_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(g^t x) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} (g^{-1})_{ki}\, g_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(g^t x) \\
&= \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(g^t x) \sum_{i=1}^{3} (g^{-1})_{ki}\, g_{ij} \\
&= \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(g^t x)\, \delta_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(g^t x) = 0\,,
\end{aligned}$$

sillä matriisi g on ortogonaalinen ja funktio f harmoninen.

Osoitetaan, että T_ℓ on redusoitumaton. Lauseen 3.4.3 perusteella avaruus $\mathcal{H}_\ell$ on esitettävissä suorana summana invariantteja aliavaruuksia

$$\mathcal{H}_\ell = \mathcal{H}_\ell^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_\ell^{(N)}\,,$$

missä $\mathcal{H}_\ell^{(k)}$ on esityksen T_ℓ invariantti aliavaruus ja siten kuvauksen T_ℓ rajoittuma $T_\ell^{(k)}$ aliavaruuteen $\mathcal{H}_\ell^{(k)}$ on ryhmän SO(3) redusoitumaton esitys.

On siis olemassa $\ell_k \in \mathbb{N}$ siten, että esitys $T_\ell^{(k)}$ on ekvivalentti esitykselle $\tilde{\pi}_{2\ell_k}$. Siten saadaan

$$\dim\left(\mathcal{H}_\ell^{(k)}\right) = \dim\left(\mathcal{P}_{2\ell_k}\right) = 2\ell_k + 1$$

ja siis välttämättä $\ell_k \leq \ell$. Avaruuden $\mathfrak{so}(3)$ kantavektorille $K = \frac{1}{2}\mathrm{ad}\,(X_1)$ saadaan, että

$$\mathrm{Ad}\,(\exp\,(\theta X_1)) = \exp\,(2\theta K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ja kuvauksen $T_\ell^{(k)}(\mathrm{Ad}\,(\exp\,(\theta X_1)))$ ominaisarvot ovat, kts. [Far08, s. 144]

$$e^{-2ij\theta}\,, \quad \text{kun} - \ell_k \leq j \leq \ell_k \quad \text{ja} \quad 1 \leq k \leq N\,.$$

Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ siten, että

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + ix_3)^\ell\,.$$

Funktio f on harmoninen polynomi astetta ℓ, sillä

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\,.$$

Saadaan lopulta, että

$$\begin{aligned}\left(\,\mathrm{T}_\ell\,(\mathrm{Ad}\,(\exp\,(\theta X_1)))\,f\,\right)\,(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, x_2\cos 2\theta + x_3 \sin 2\theta, -x_2 \sin 2\theta + x_3 \cos 2\theta) \\ &= (x_2 \cos 2\theta + x_3 \sin 2\theta - ix_2 \sin 2\theta + ix_3 \cos 2\theta)^\ell \\ &= (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)^\ell (x_2 + ix_3)^\ell \\ &= e^{-2i\ell\theta} f(x_1, x_2, x_3)\,.\end{aligned}$$

Siten $e^{-2i\ell\theta}$ on yksi kuvauksen $\mathrm{T}_\ell\,(\mathrm{Ad}\,(\exp\,(\theta X_1)))$ ominaisarvoista. Siten on $\ell_k = \ell$, jollekin $1 \leq k \leq N$, joten on edelleen $\mathcal{H}_\ell = \mathcal{H}_\ell^{(k)}$. Näin ollen esitys T_ℓ on redusoitumaton ja ekvivalentti esitykselle $\tilde{\pi}_{2\ell}$. □

4.3 Palloharmoniset Fourier-sarjat

Palloharmoniset funktiot muodostavat ortonormaalin Hilbertin kannan yksikköpallon pinnalla neliöintegroituvien funktioiden avaruudelle.

Lause 4.3.1. *Joukossa $\mathbb{S}^2$ neliöintegroituvien funktioiden avaruudelle pätee*

$$L^2(\mathbb{S}^2) = \widehat{\bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}}} \mathcal{Y}_\ell \,.$$

Todistus. Pätee [Far08, Theorem 9.3.1, sivu 196], että avaruus

$$\mathcal{Y} = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_\ell$$

on koko kompleksipolynomien pallolle $\mathbb{S}^2$ rajoittumakuvausten avaruus. Avaruus $\mathcal{Y}$ on algebra, joka sisältää vakiokuvaukset. Lisäksi, jos $f \in \mathcal{Y}$ on myös $f^* \in \mathcal{Y}$, sillä

$$(Y_\ell^m)^* = Y_\ell^{-m} \,,$$

kaikilla $\ell \in \mathbb{N}$ ja $-\ell \leq m \leq \ell$. Erityisesti algebra $\mathcal{Y}$ *erottelee pisteet*, toisin sanoen, jos $x, y \in \mathbb{S}^2$ siten, että $x \neq y$ on kuvaus $f \in \mathcal{Y}$ siten, että $f(x) \neq f(y)$.

Stone-Weierstrass -lauseen nojalla avaruus $\mathcal{Y}$ on tiheä jatkuvien funktioiden avaruudessa $\mathcal{C}(\mathbb{S}^2)$, joka puolestaan on tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{S}^2)$. Väite seuraa. □

Näin ollen neliöintegroituvat funktiot voidaan esittää *Fourier-sarjana.*

Seuraus 4.3.2. *Olkoon $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$. Tällöin saadaan funktiolle f esitys melkein kaikkialla L^2-normin mielessä suppenevana sarjana*

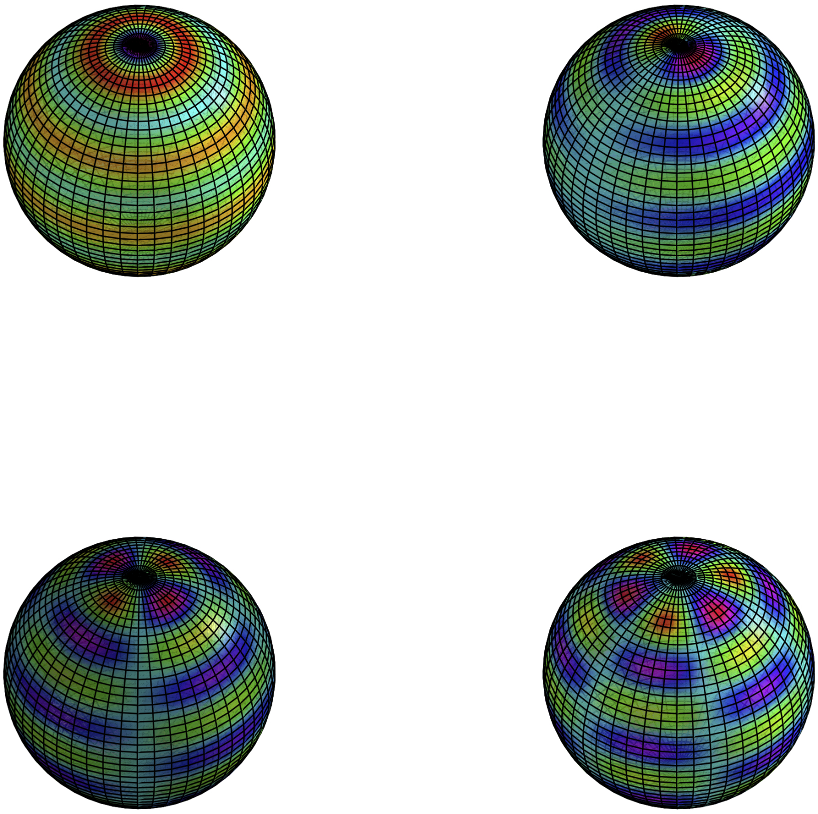
$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_\ell^m Y_\ell^m(\theta, \phi) \,,$$

missä $f_l^m \in \mathbb{C}$ ovat funktion f Fourier-kertoimet. Toisin sanoen

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| f(\theta, \phi) - \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_\ell^m Y_\ell^m(\theta, \phi) \right|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 0 \,.$$

Funktion f Fourier-kertoimet saadaan vastaavasti

$$f_\ell^m = \langle f \,,\, Y_\ell^m \rangle = \int_{\mathbb{S}^2} f \, (Y_\ell^m)^* \, d\,\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \phi) \, (Y_\ell^m)^*(\theta, \phi) \, \sin\theta \, d\theta \, d\phi \,.$$



Kuva 4.1: Visualisointeja palloharmonisille funktioille, kun $\ell = 10$ ja $m = 0, 1, 2, 3$. Kuvissa on palloharmonisten funktioiden reaaliosa kuvattuna pallon pinnalle. Imaginaariosat käyttäytyvät vastaavasti, sillä ainoana erona reaaliosiin on $\pi/2$ suuruinen vaihe-ero kulmassa ϕ.

Kirjallisuutta

[Atk2012] Kendall Atkinson, Weimin Han,
Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction.
Springer, 2012

[Sti08] John Stillwell, *Naive Lie Theory.*
Springer, 2008

[Far08] Jacques Faraut, *Analysis on Lie Groups - An Introduction.*
Cambridge University Press, 2008

[Lee03] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds.*
Springer, 2003

[FH91] William Fulton, Joe Harris, *Representation Theory - A First Course.*
Springer, 1991

[Var74] V.S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations.*
Prentice-Hall, 1974

[Hal74] Paul R. Halmos, *Measure Theory.*
Springer, 1974