Stokastinen reunasäännöllisyys ja häiritty köydenvetopeli

Joonas Heino

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014

Tiivistelmä: Joonas Heino, *Stokastinen reunasäännöllisyys ja häiritty köydenvetopeli* (engl. *Stochastic boundary regularity and tug-of-war with noise*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 81 sivua, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2014.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutkia Dirichlet'n ongelmaa todennäköisyysteorian ja peliteorian näkökulmasta. Osoittautuu, että käytössä olevan alueen reuna vaikuttaa siihen, onko olemassa Dirichlet'n ongelman ratkaisevaa funktiota, joka saavuttaa oikeat reuna-arvot jatkuvasti. Tutkielmassa määritellään joukon reunasäännöllisyys jatkuva-aikaisen satunnaisliikkeen avulla. Käyttökelpoinen ja riittävä ehto reunapisteen säännöllisyydelle on Poincarén kartioehto. Tässä työssä näytetään myös Wienerin kriteerio, joka on riittävä ja välttämätön ehto reunapisteen säännöllisyydelle.

Tutkielmassa käsitellään myös p-Laplacen yhtälöä käyttäen apuna häirittyä köydenvetopeliä (tug-of-war with noise). Häiritty köydenvetopeli on kahden pelaajan nollasummapeli. Pelaajien arvofunktiot häirityssä köydenvetopelissä kertovat parhaan mahdollisen odotettavissa olevan tuloksen, pelasi toinen pelaajista kuinka hyvin tahansa. Tässä työssä näytetään häirityn köydenvetopelin arvofunktioiden yhteys p-harmonisiin funktioihin. Lyhenevän askelpituuden häiritty köydenvetopeli on köydenvetopelin variaatio, jonka avulla voidaan myös tutkia reunasäännöllisyyttä ja reunafunktioiden resolutiivisuutta.

Avainsanat: Brownin liike, Dirichlet'n ongelma, häiritty köydenvetopeli, p-harmoniset funktiot, p-harmonious funktiot, stokastinen reunasäännöllisyys, Wienerin kriteerio.

Sisältö

LUKU 1

Johdanto

Tunnettu p-Laplacen yhtälö

$$\triangle_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

liittyy läheisesti potentiaaliteoriaan. Epälineaarisessa potentiaaliteoriassa p-Laplacen yhtälö esiintyy esimerkiksi lämmönjohtuvuuden, sähköstatiikan ja erilaisten fluidien muodonmuutoksien ja virtauksien mallintamisessa. Todennäköisyysteoria ja erilaiset stokastiset pelit antavat mielenkiintoisia näkökulmia potentiaaliteoriaan.

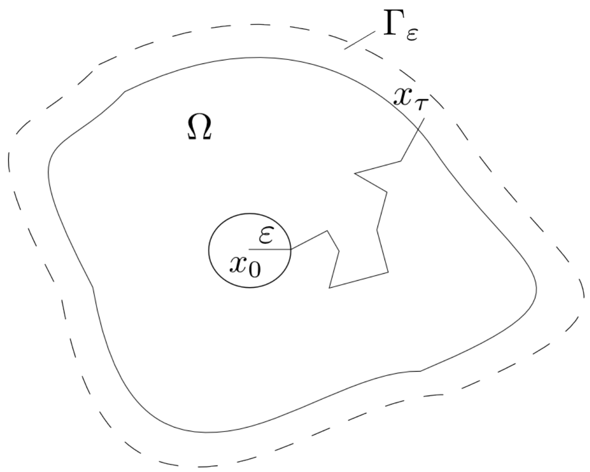
Tässä työssä ollaan kiinnostuneita Dirichlet'n reuna-arvo ongelmasta

$$\begin{cases} \triangle_p u = 0 \text{ joukossa } \Omega \text{ ja} \\ u = F \text{ joukossa } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

todennäköisyysteorian ja stokastisten pelien näkökulmasta, kun $2 \leq p < \infty$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja rajoitettu ja $F : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ on reunafunktio. Yhtälöpari (1.1) on lineaarinen Dirichlet'n ongelma tapauksessa $p = 2$ ja epälineaarinen tapauksessa $p > 2$. Klassisessa Dirichlet'n ongelmassa yritetään löytää funktio $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ siten, että funktio u toteuttaa yhtälöparin (1.1). Ongelman (1.1) ratkaisevaa funktiota sanotaan p-harmoniseksi funktioksi. Kun $p = 2$, puhutaan Laplacen operaattorista ja harmonisista funktioista.

Yksi kysymys Dirichlet'n ongelmassa liittyy siihen, onko aina olemassa funktiota u, joka ratkaisee ongelman (1.1), ja erityisesti onko olemassa funktiota u, joka myös saavuttaa jatkuvasti halutut reuna-arvot. Osoittautuu, että alueen Ω reuna vaikuttaa vahvasti oikeat reuna-arvot jatkuvasti saavan ratkaisun olemassaoloon. Tässä työssä ollaan kiinnostuneita joukon Ω reunasäännöllisyydestä. Stokastiikan avulla saadaan yksi näkökulma reunasäännöllisyyteen, sillä joukon säännöllinen reunapiste voidaan määritellä jatkuva-aikaisen satunnaisliikkeen eli Brownin liikkeen avulla. Käyttökelpoinen ja riittävä ehto reunapisteen säännöllisyydelle on Poincarén kartioehto, joka osoitetaan lauseessa 3.38. Halutaan myös tietää, mikä ehto on riittävä ja välttämätön reunapisteen säännöllisyydelle. Tämän työn yksi päätuloksista on lause 3.52, jossa annetaan täsmällinen ehto reunapisteen säännöllisyydelle. Kyseinen lause on läheisessä kytköksessä kuuluisan Wienerin testin kanssa.

Tässä tutkielmassa käsitellään myös p-Laplacen yhtälöä käyttäen apuna häirittyä köydenvetopeliä (tug-of-war with noise). Köydenvetopelissä kaksi pelaajaa pelaa toisiaan vastaan. Aluksi kiinnitetään pelialue Ω, lähtöpiste $x_0 \in \Omega$ pelialueessa ja säde $\epsilon > 0$. Peli lähtee liikkeelle lähtöpisteestä, johon on laitettu pelimerkki. Jokaisella kierroksella heitetään reilua kolikkoa. Jos kolikonheitossa tulee kruuna, Pelaaja 1 saa siirtää pelimerkin mihin tahansa avoimen lähtöpiste keskisen ja ϵ-säteisen pallon pisteeseen. Jos kolikonheitossa tulee klaava, Pelaaja 2 saa vuorostaan päättää, mihin pelimerkki siirretään avoimessa pallossa. Seuraava kierros lähtee pisteestä, johon pelimerkki on siirretty. Tällöin heitetään uudestaan reilua kolikkoa, ja kolikonheiton voittaja saa päättää jälleen, mihin pelimerkki siirretään uudessa avoimessa pallossa. Säde ϵ pysyy jokaisella kierroksella samana. Lisätään pelialueen reunalle ϵ-säteinen vyöhyke Γ_ϵ. Peli päättyy, kun pelimerkki on ensimmäistä kertaa siirretty reunavyöhykkeelle. Merkitään pelin päättymispistettä satunnaisella pisteellä x_τ ja määritetään pelialueen reunalle maksufunktio F. Pelin päätyttyä Pelaaja 2 maksaa Pelaajalle 1 summan $F(x_\tau)$. Tämän vuoksi pelin aikana Pelaaja 1 yrittää "vetää" pelimerkkiä Pelaajan 1 edullisten arvojen suuntaan. Vastaavasti Pelaaja 2 yrittää "vetää" pelimerkkiä Pelaajan 2 edullisten arvojen suuntaan. Tästä tuleekin nimitys köydenvetopeli. Kuva 1 antaa esimerkin mahdollisesta pelin kulusta.



KUVA 1. Köydenvetopelin pelialue.

Häiritty köydenvetopeli eroaa köydenvetopelistä siten, että mukaan lisätään "häiriötä". Kiinnitetään todennäköisyydet $\alpha \geq 0$ ja $\beta \geq 0$ siten, että $\alpha + \beta = 1$. Otetaan käyttöön painotettu kolikko, jossa kruunan todennäköisyys on α ja klaavan todennäköisyys on β. Jokaisella pelikierroksella heitetään ensiksi painotettua kolikkoa. Jos kolikonheitossa tulee kruuna, pelataan köydenvetopeliä kyseisellä kierroksella. Jos kolikonheitossa tulee klaava, pelimerkki siirtyy johonkin avoimen ϵ-säteisen pallon pisteeseen tasajakauman mukaan. Seuraavat pelikierrokset pelataan samoilla säännöillä, ja pelin lopussa Pelaaja 1 maksaa Pelaajalle 2 summan $F(x_\tau)$.

Pelaajalle 1 ja 2 voidaan määritellä arvofunktiot. Pelaajan 1 arvofunktio kertoo jokaisessa pelialueen pelipisteessä suurimman mahdollisen odotettavissa olevan summan, jonka Pelaaja 1 ainakin saa riippumatta siitä, mitä Pelaaja 2 tekee. Vastaavasti Pelaajan 2 arvofunktio kertoo pienimmän mahdollisen odotettavissa olevan summan, jonka Pelaaja 2 joutuu korkeintaan maksamaan riippumatta siitä, mitä Pelaaja 1 tekee. Tämän työn toinen päätulos on lause 4.15, jossa näytetään pelaajien arvofunktioiden yhteys p-harmonisiin funktioihin. Arvofunktio suppenee tasaisesti säteen pienentyessä kohti alueen p-harmonista funktiota.

Yksi mahdollisuus yleistää häirittyä köydenvetopeliä on lyhenevän askelpituuden häiritty köydenvetopeli. Kyseisessä pelissä ensiksi toinen pelaajista valitsee jonkin säteen, jonka jälkeen toinen pelaajista valitsee säteen, jolla pelataan ja joka on korkeintaan toisen pelaajan valitseman säteen suuruinen. Kun pelissä lähestytään pelialueen reunaa, pelaajat valitsevat uudet säteet samalla lailla kuin aikaisemminkin. Lisäehtona on kuitenkin vielä se, että pelaajien valitsemat säteet pitää olla niin pieniä, että peli ei voi vielä päättyä seuraavalla kierroksella. Kun näillä säännöillä jatketaan, saadaan häirityn köydenvetopelin variaatio, joka ei pääty koskaan. Lyhenevän askelpituuden variaatiolla voidaan tutkia reunasäännöllisyyttä, ja variaatio sopiikin erityisesti tilanteisiin, joissa pelialueen reuna on epäsäännöllinen tai reunafunktio on epäjatkuva. Kuten lauseessa 4.26 näytetään, lyhenevän askelpituuden häirityn köydenvetopelin arvofunktiot liittyvät reunafunktion F resolutiivisuuteen.

1.1. Historia

Fyysikot huomasivat 1800-luvulla, että eräitä luonnonilmiöitä voidaan mallintaa Laplacen yhtälön mukaisten potentiaalien avulla. Lineaarista Dirichlet'n ongelmaa tutki ensimmäisten joukossa George Green esseessään [**12**] vuonna 1828. Hänen todistuksensa eivät olleet täsmällisiä, mutta hänen ideansa toimivat tärkeinä alkuaskelina jatkoa ajatellen. Vuonna 1840 Carl Gauss huomasi, että tietyntyyppiset potentiaalifunktiot ovat harmonisia funktioita, jolloin lineaarisen Dirichlet'n ongelman voi yrittää ratkaista löytämällä potentiaalifunktio oikeilla reuna-arvoilla [**8**]. William Thomson ja Gustav Lejeune-Dirichlet ehdottivat 1840-luvun lopussa, että lineaarisen Dirichlet'n ongelman ratkaiseminen on ekvivalenttiä sille, että etsitään funktio u, joka minimoi energiaa

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx \tag{1.2}$$

ja jolle $u|\partial\Omega = F$. Aikansa ehkä kuuluisin matematiikko Bernhard Riemann alkoi käyttämään nimeä *Dirichlet'n periaate* ekvivalentista ehdosta (1.2), jonka vuoksi käytäntöön vakiintui vähitellen termi Dirichlet'n ongelma.

Vuonna 1911 Stanislav Zaremba näytti paperissaan [**28**] esimerkin, jossa lineaariseen Dirichlet'n ongelmaan ei löydy klassista ratkaisua, vaikka reunafunktio on jatkuva. Esimerkissä joukko Ω on avoin yksikkö kiekko, josta on poistettu origo, avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Reunafunktio saa arvon 1 origossa ja arvon 0 yksikkökiekon reunalla. Koska kyseisessä esimerkissä origo on eristetty piste ja koska myös $p = 2$, ei ole yllättävää, että funktiota u, joka saa jatkuvasti oikeat reuna-arvot ja joka on harmoninen joukossa Ω, ei ole olemassa. Kuitenkin vuonna 1913 Henri Lebesgue näytti paperissaan [**17**] esimerkin, jossa joukon Ω reuna on yhtenäinen, mutta joukossa $\overline{\Omega}$ ei silti ole olemassa funktiota u, joka ratkaisisi klassisen Dirichlet'n ongelman. Joukon Ω reuna $\partial\Omega$ on siis merkittävässä asemassa, kun halutaan tietää, milloin Dirichlet'n ongelmalla on klassinen ratkaisu. Joukon reunapiste on säännöllinen, jos Dirichlet'n ongelman ratkaisu saavuttaa jatkuvasti reunafunktion arvon reunapisteessä. Intuitiivisesti voidaan ajatella, että mitä enemmän joukon reunalla on komplementtia, sitä säännöllisempi joukon reuna on.

Modernissa todennäköisyysteoriassa tutkitaan todennäköisyyksiä hyödyntäen mittateorian käsitteitä. Andrey Kolmogorov loi aksiomaattisen pohjan todennäköisyysteorialle vuonna 1933 teoksessaan [**15**]. Kunnollinen matemaattinen todennäköisyyslaskennan "kieli" vauhditti todennäköisyysteorioiden kehittymistä. Esimerkiksi stokastisten prosessien ja martingaaliteorioiden kehittyminen on ollut tärkeää varsinkin sovellusten kannalta. Martingaaliprosessi yhdistetään usein esimerkiksi uhkapeleissä "reiluun peliin". Odotettavissa oleva voitto tulevaisuudessa on sama kuin havaittu arvo kyseisellä hetkellä.

Tärkeä esimerkki jatkuva-aikaisesta stokastisesta prosessista on Brownin liike. Skotlantilainen botanisti Robert Brown huomasi siitepölyn hiukkasten värähtelevän liikkeen tutkiessaan mikroskoopilla siitepölyn liikettä vedessä. Hän julkaisi havaintonsa teoksessa [**4**] vuonna 1828. Ensimmäisen teorian Brownin liikkeestä loi ranskalainen Louis Bachelier väitöskirjassaan [**3**] vuonna 1900. Viisi vuotta myöhemmin Albert Einstein julkaisi kuuluisan paperinsa [**6**], jossa hän todisti matemaattisesti Brownin liikkeen yhteyden lämpöyhtälöön. Ensimmäisen täsmällisen todistuksen Brownin liikkeen olemassaolosta antoi Norbert Wiener paperissaan [**26**] vuonna 1923.

Mielenkiintoinen linkki potentiaaliteorian ja todennäköisyysteorian välille syntyy Brownin liikkeen kautta. Jo aikaisemmin mainittu Bachelier oli ensimmäinen, joka huomasi Brownin liikkeen ja Laplacen operaattorin välisen yhteyden teoksissaan [**2**] ja [**3**] vuonna 1900. Yleisemmällä tasolla huomattiin, että harmoniset funktiot ja martingaalit ovat samoja ominaisuuksia. Erityisesti molemmat toteuttavat keskiarvoperiaatteen. Lineaarisen Dirichlet'n ongelman ratkaisi todennäköisyysteorioiden keinoin ensimmäisten joukossa Wiener ja Henry Phillips teoksessa [**23**] vuonna 1923. Kuten tämän työn lauseesta 3.40 voi lukea, silloin kun lineaarisella Dirichlet'n ongelmalla on ratkaisu u, funktion arvo $u(x)$ on odotettavissa oleva reunafunktion F arvo niiden pisteiden yli, joihin Brownin liike osuu ensimmäiseksi reunalla $\partial\Omega$, kun Brownin liike on lähtenyt pisteestä $x \in \Omega$.

Dirichlet'n ongelman (1.1) klassiselta ratkaisulta vaaditaan, että ratkaiseva funktio on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, jolloin p-Laplacen operaattori voidaan määritellä pisteittäin. Osoittautuu, että tämä klassinen lähestymistapa on liian rajoittava ratkaisun olemassaolon kannalta. Tarvitaan myös heikompi määritelmä p-harmonisille funktioille. Yksi mahdollisuus heikentää p-harmonisten funktioiden määritelmää on käyttää viskositeettiratkaisuja. Viskositeettiratkaisujen ideaa aloitettiin kehittää Michael Grandallin, Pierre-Louis Lionsin, Lawrence Evansin ja monien muiden toimesta 1980-luvun alussa. Aluksi viskositeettiratkaisuja sovellettiin ensimmäisen kertaluvun yhtälöihin ja myöhemmin siirryttiin myös toisen kertaluvun yhtälöihin. Huomionarvoista on se, että yhtälön (1.1) viskositeettiratkaisulla u ei tarvitse lähtökohtaisesti olla olemassa edes gradienttia $\nabla u(x)$ jokaisessa pisteessä $x \in \Omega$.

Mielenkiintoinen kysymys liittyy siihen, mitä tapahtuu häirityn köydenvetopelin arvofunktiolle, kun $\epsilon \to 0$. Tavallinen köydenvetopeli vastaa häirityn köydenvetopelin kontekstissa tilannetta $\alpha = 1$ ja $\beta = 0$. Jean Archer ja Erwan le Gruyer loivat pohjan näiden kysymysten tutkimiselle paperissa [**1**] vuonna 1998, ja Le Gruyer osoitti alueen pienimmän Lipschitz-vakion omaavan jatkeen yhteyden ääretönharmoniseen funktioon u, jolle

$$\triangle_\infty u := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

paperissaan [**16**] vuonna 2007. Le Gruyerin tuloksesta huomattiin, että köydenvetopelin arvofunktio suppenee kohti ääretönharmonista funktiota, kun $\epsilon \to 0$. Harmoninen funktio toteuttaa keskiarvoperiaatteen, ja häirityn köydenvetopelin arvofunktiot toteuttavat keskiarvoperiaatteen, kun $\alpha = 0$ ja $\beta = 1$. Operaattori $\triangle_p$ voidaan muokata muotoon

$$\triangle_p u = |\nabla u|^{p-2}\big((p-2)|\nabla u|^{-2}\triangle_\infty u + \triangle u\big).$$

Näin ollen p-Laplacen operaattori on kombinaatio ∞-Laplacen ja Laplacen operaattorista. Koska arvofunktioiden suppeneminen kohti ääretönharmonista funktiota on totta köydenvetopelissä ja koska harmoniset funktiot toteuttavat keskiarvoperiaatteen, voisi veikata, että häirityn köydenvetopelin arvofunktio liittyy jotenkin joukon Ω p-harmoniseen funktioon $\triangle u_p = 0$. Häirityn köydenvetopelin arvofunktio suppenee tasaisesti säteen pienentyessä kohti p-harmonista funktiota, kuten lauseissa 4.15 ja 4.16 näytetään.

LUKU 2

Stokastiikan apuvälineet

Todennäköisyysteorian moderni aikakausi yhdistetään yleensä henkilöihin Émile Borel, Andrey Kolmogorov tai Paul Lévy. Heidän ja useiden muiden tutkijoiden tekemä työ mahdollistaa todennäköisyysteorian soveltamisen useisiin erilaisiin käytännön ongelmiin. Tässä työssä käytetään todennäköisyysteorian perustulosten päälähteenä Christel ja Stefan Geissin teosta *An introduction to probability theory* [**9**]. Erilaisten martingaalitulosten päälähteenä käytetään David Williamsin teosta *Probability with Martingales* [**27**]. Stokastisten prosessien päälähteenä käytetään Stefan Geissin teosta *Stochastic differential equations* [**10**], mutta stokastisten prosessien tuloksia ollaan katsottu myös Peter Mörtersin ja Yuval Peresin kirjasta *Brownian motion* [**20**] ja Lawrence Evansin teoksesta *An introduction to stochastic differential equations* [**7**].

2.1. Todennäköisyysavaruudet ja satunnaismuuttujat

Tämän työn lukijalta oletetaan stokastiikan ja mittateorian perustietojen tuntemista. Jotta todennäköisyysteoriaa voidaan tutkia, määritellään *todennäköisyysavaruus*. Todennäköisyysavaruutta varten tarvitaan *σ-algebran* ja *todennäköisyysmitan* käsitteet.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon H jokin epätyhjä joukko. Joukon H osajoukkojen kokoelma $\mathcal{F}$ on σ-algebra, jos seuraavat kolme ehtoa täyttyvät:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i) } \emptyset \in \mathcal{F}.\\
&\text{(ii) Jos } A \in \mathcal{F}, \text{ niin } A^c := H \setminus A \in \mathcal{F}.\\
&\text{(iii) Jos } A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}, \text{ niin } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.
\end{aligned}
$$

Sanotaan, että joukkokokoelma $\mathcal{F}$ on algebra, jos ehto (iii) korvataan seuraavalla heikommalla ehdolla:

$$\text{Jos } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}, \text{ niin } \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

kaikilla $n = 1, 2, \dots$.

Jokaista σ-algebran $\mathcal{F}$ alkiota sanotaan *tapahtumaksi*.

Määritelmä 2.2. Olkoon H jokin epätyhjä joukko ja $\mathcal{F}$ joukon H σ-algebra. Kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ on todennäköisyysmitta, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

(i) $\mathbb{P}(H) = 1$.

(ii) Jos $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ siten, että $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$, niin

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Määritelmä 2.3. Todennäköisyysavaruus on joukko $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, jossa

H on epätyhjä perusjoukko,

$\mathcal{F}$ on σ-algebra ja

$\mathbb{P}$ on todennäköisyysmitta.

Avaruutta $(H, \mathcal{F})$ sanotaan *tapahtuma-avaruudeksi.*

Huomautus 2.4. Kirjallisuudessa perusjoukkoa H merkitään yleensä kirjaimella Ω. Tässä työssä kirjain Ω on kuitenkin varattu häirityn köydenvetopelin pelialueen merkiksi, kuten kappaleessa 4 tullaan huomaamaan.

Todennäköisyysavaruuden määritelmä on hyvin luonnollinen. Jos esimerkiksi ollaan kiinnostuneita jonkin tapahtuman todennäköisyydestä, on järkevää, että voidaan tarvittaessa tutkia myös tapahtuman komplementin todennäköisyyttä. Tällöin tapahtuman komplementin on oltava myös σ-algebrassa. Lisäksi esimerkiksi todennäköisyysmitan *additiivuus* eli todennäköisyysmitan määritelmän 2.2 kohta (ii) on oltava voimassa. Tällöin voidaan puhua mitasta, joka mittaa "oikein". Kenties tärkein σ-algebra sisältää reaalilukujoukon *avoimet* joukot.

Määritelmä 2.5. Borelin σ-algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ on pienin σ-algebra, joka sisältää joukon $\mathbb{R}$ avoimet joukot. Vastaavasti $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ on pienin σ-algebra, joka sisältää joukon $\mathbb{R}^n$ avoimet joukot.

Lemma 2.6 (Jatkuvuus ylhäältä). *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ jokin todennäköisyysavaruus. Jos $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{F}$ siten, että $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots$, niin tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

Todistus. Olkoon $B_1^c := A_1^c, B_2^c := A_2^c \setminus A_1^c, B_3^c := A_3^c \setminus A_2^c, \dots$ Tällöin

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \quad \text{ja} \quad B_i^c \cap B_j^c = \emptyset \text{ kaikille } i \neq j.$$

Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n^c) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n^c) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_n^c\Big) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N^c),\end{aligned}$$

sillä $\bigcup_{n=1}^{N} B_n^c = A_N^c$ oletuksen nojalla. Tällöin saadaan joukko-opin hyvin tunnetulla *de Moivren* säännöllä

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &= 1 - \mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^c\bigg) \\ &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big) \\ &= 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N^c) \\ &= 1 - \lim_{N\to\infty} (1 - \mathbb{P}(A_N)) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N). \end{aligned}$$

□

Seuraava lemma on hyvin yksinkertainen mutta yllättävänkin hyödyllinen.

LEMMA 2.7. *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Tällöin*

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^c) \text{ kaikille } A, B \in \mathcal{F}.$$

TODISTUS.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cup B)}_{\leq 1} \\ &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cup B^c) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B^c) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^c), \end{aligned}$$

sillä $B \cap B^c = \emptyset$. □

Ennen kuin siirrytään satunnaismuuttujien ominaisuuksiin, todistetaan vielä erittäin tärkeät *Borel-Cantellin* lemmat. Tätä varten tarvitaan *riippumattomuuden*, *limit inferiorin* ja *limit superiorin* käsitteet.

MÄÄRITELMÄ 2.8 (Tapahtumien riippumattomuus). Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja tapahtumat $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{F}$, jossa I on jokin epätyhjä indeksijoukko. Tällöin $(A_i)_{i\in I}$ ovat riippumattomia, jos kaikilla erisuurilla indekseillä $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ pätee

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Huomautus 2.9. On tärkeää, että riippumattomuuden ehto toimii kaikilla indeksijoukoilla $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$. Jos esimerkiksi $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ jollekin $A, B \in \mathcal{F}$ ja $C = \emptyset$, niin $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, mutta tapahtumat A ja B eivät ole riippumattomia.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Olkoon $(H, \mathcal{F})$ tapahtuma-avaruus ja $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &:= (A_n \text{ äärettömän usein})\\ &= (A_n \text{ ä.u})\\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\\ &= \{\omega \in H : \text{ kaikille } m \in \mathbb{N}, \text{ on olemassa } n = n(\omega) \geq m \text{ siten,}\\ &\qquad \text{että } \omega \in A_{n(\omega)}\}.\end{aligned}$$

Vastaavasti määritellään

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &:= (A_n \text{ jostain lähtien})\\ &= (A_n \text{ j.l})\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\\ &= \{\omega \in H : \text{ jollekin } m = m(\omega) \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \text{ kaikille } n \geq m(\omega)\}.\end{aligned}$$

Huomautus 2.11. Selvästi pätee, että $(A_n \text{ jostain lähtien})^c = (A_n^c \text{ äärettömän usein})$.

Nyt päästään käsiksi tärkeisiin Borel-Cantellin lemmoihin.

LAUSE 2.12 (Borel-Cantelli). *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$. Tällöin seuraavat pätevät:*

(*i*) *Jos* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, *niin* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

(*ii*) *Jos $A_1, A_2, \dots$ ovat riippumattomia ja* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, *niin* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

TODISTUS. (i) Koska $\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, niin lemman 2.6 avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) &= \mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n)\\ &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n).\end{aligned}$$

Nyt todennäköisyysmitan subadditiivisuus ja oletus antavat

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

(ii) Huomautuksen 2.11 nojalla riittää osoittaa, että $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = 0$. Koska $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c \subseteq \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k^c \subseteq \bigcap_{k=3}^{\infty} A_k^c \dots$, mitan $\mathbb{P}$ ominaisuuksien avulla saadaan, että

$$\mathbb{P}(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k^c).$$

Koska tapahtumat $A_1, A_2, \ldots$ ovat riippumattomia oletuksen nojalla, saadaan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k^c\Big) &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=m}^{N} A_k^c\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=m}^{N} \mathbb{P}(A_k^c).\end{aligned}$$

Koska kaikille $B \in \mathcal{F}$ pätee $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$ ja koska kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee tunnettu epäyhtälö $1 - x \leq e^{-x}$, saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \prod_{k=m}^{N} \mathbb{P}(A_k^c) &= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=m}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} \prod_{k=m}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_k)} \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{k=m}^{N} \mathbb{P}(A_k)} \\ &= e^{-\sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)}.\end{aligned}$$

Oletuksen nojalla $e^{-\sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)} = 0$, joten väite on todistettu. □

Lauseen 2.12 kohta (ii) toimii myös, jos tapahtumille $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ sallitaan pientä riippuvuutta. Tähän palataan myöhemmin lauseessa 2.25.

Siirrytään seuraavaksi *satunnaismuuttujien* pariin. Yleisesti satunnaismuuttuja voi saada arvoja mielivaltaisesta epätyhjästä joukosta $\mathbb{X}$. Tässä työssä satunnaismuuttujat ovat kuitenkin aina $\mathbb{R}^n$-arvoisia jollekin $n = 1, 2, \ldots$ Yleensä terminologia menee siten, että satunnaismuuttujan arvojoukon ollessa $\mathbb{R}$ puhutaan reaaliarvoisesta satunnaismuuttujasta ja arvojoukon ollessa $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, puhutaan reaalisesta satunnaisvektorista. Tässä työssä käytetään kuitenkin aina termiä satunnaismuuttuja, oli arvojoukon dimensio mikä tahansa.

Satunnaismuuttujan yleinen idea on seuraavanlainen. Todennäköisyysavaruus $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on abstraktio, jonka ei tarvitse liittyä millään ilmeisellä tavalla havaittavaan todellisuuteen. Todelliset havainnot liittyvät satunnaiskokeeseen, jossa havaitaan satunnaiskuvauksen $X : H \to \mathbb{R}^n$ tulos $X(\omega)$. Alkeistapaus $\omega \in H$ jää "kohtalon jumalattaren" salaisuudeksi. Päätelmät todennäköisyyksistä eivät perustu abstraktiin todennäköisyysmittaan $\mathbb{P}$, vaan havaittavaan todennäköisyysmittaan $\mathbb{P}_X(\cdot) = \mathbb{P}(X \in \cdot)$, jota kutsutaan satunnaismuuttujan X *jakaumaksi.*

Määritelmä 2.13. Olkoon $(H, \mathcal{F})$ tapahtuma-avaruus. Tällöin kuvaus $X : H \to \mathbb{R}^n$ on satunnaismuuttuja, jos

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in H : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \quad \text{kaikilla Borel-joukoilla } A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).$$

Huomautus 2.14. Määritelmän 2.13 mukaan satunnaismuuttuja X on $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ -mitallinen, ja se on kuvaus tapahtuma-avaruudelta $(H, \mathcal{F})$ tapahtuma-avaruudelle $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$. Joskus satunnaismuuttujaa sanotaan vain $\mathcal{F}$-mitalliseksi kuvaukseksi, kun otosavaruuden tapahtuma-avaruus on selvillä.

Yleensä satunnaismuuttujaksi toteamisessa ei tarvitse käydä kaikkia Borel-joukkoja läpi, sillä seuraava perustulos on käytössä.

LEMMA 2.15. *Olkoon* $(H, \mathcal{F})$ *tapahtuma-avaruus ja valitaan toiseksi tapahtuma-avaruudeksi* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$. *Tällöin jos kaikilla avoimilla joukoilla* $A \subset \mathbb{R}^n$ *pätee, että*

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F},$$

niin kuvaus $X : H \to \mathbb{R}^n$ *on* $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$*-mitallinen.*

TODISTUS. Olkoon $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}^n : X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$. Oletuksen nojalla $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$, missä $\mathcal{O} = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ on avoin}\}$. Osoitetaan, että joukkokokoelma $\mathcal{A}$ on σ-algebra.

Koska joukko $\mathbb{R}^n$ on avoin, niin $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$. Jos $U \in \mathcal{A}$, niin

$$\begin{aligned} X^{-1}(U^c) &= \{\omega \in H : X(\omega) \in U^c\} \\ &= \{\omega \in H : X(\omega) \notin U\} \\ &= H \setminus \{\omega \in H : X(\omega) \in U\} \\ &= (X^{-1}(U))^c \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

sillä $\mathcal{F}$ on σ-algebra. Samasta syystä jos $U_1, U_2, \ldots \in A$, niin

$$X^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}.$$

Tiedetään, että $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ on *pienin* σ-algebra, joka sisältää joukkokokoelman $\mathcal{O}$. Koska $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$ ja $\mathcal{A}$ on σ-algebra, niin $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}$. Tämä todistaa väitteen. □

Avoimet joukot virittävät Borel-joukot ja lemman 2.15 nojalla jos kuvauksen X jokaisen avoimen joukon alkukuva on tapahtuma-avaruudessa $\mathcal{F}$, niin X on satunnaismuuttuja.

SEURAUS 2.16. *Jos* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *on jatkuva, niin* f *on* $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$*-mitallinen.*

TODISTUS. Koska f on jatkuva, niin jokaiselle avoimelle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee, että $f^{-1}(A)$ on myös avoin. Tällöin $f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$, ja väite pätee lemman 2.15 nojalla. □

MÄÄRITELMÄ 2.17. Olkoon $n, m \in \mathbb{N}$ mielivaltaisia. Sanotaan, että $(\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m))$-mitallinen funktio f on *Borel-mitallinen.*

ESIMERKKI 2.18. Tutkitaan yksinkertaista esimerkkiä, jossa perusjoukon H alkiot ovat lueteltavissa. Olkoon $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $\mathcal{F} = \mathcal{P}(H)$. Tällöin $X =$ "kuusisivuisen nopan heittotulos", $X(\omega) = \omega$, on satunnaismuuttuja tapahtuma-avaruudelta $(H, \mathcal{F})$ tapahtuma-avaruudelle $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Huomaa, että $H \subset \mathbb{R}$ ja $\mathcal{P}(H) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Jos taas $\mathcal{G} = \{H, \emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$, niin $\mathcal{G}$ on σ-algebra, mutta X *ei* ole satunnaismuuttuja tapahtuma-avaruudelta $(H, \mathcal{G})$. Tämä johtuu esimerkiksi siitä, että

$$X^{-1}(]5\frac{1}{2}, 7[) = \{\omega \in H : X(\omega) \in]5\frac{1}{2}, 7[\} = \{6\} \notin \mathcal{G}.$$

Jos taas merkitään $Y =$ "kuusisivuisen nopan heittotulos on parillinen",

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{2, 4, 6\} \text{ ja} \\ 0, & \omega \in \{1, 3, 5\}, \end{cases}$$

niin Y on satunnaismuuttuja tapahtuma-avaruudelta $(H, \mathcal{G})$. Tämä johtuu siitä, että

$$Y^{-1}(A) \in \mathcal{G} \text{ kaikilla avoimilla joukoilla } A \subset \mathbb{R}.$$

MÄÄRITELMÄ 2.19. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $X : H \to \mathbb{R}^n$ satunnaismuuttuja. Tällöin

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(\{\omega \in H : X(\omega) \in A\}) \text{ kaikille } A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$$

on satunnaismuuttujan X jakauma (kuvamitta).

Huomautus 2.20. On helppo näyttää, että määritelmän 2.19 mukaisen satunnaismuuttujan X jakauma $\mathbb{P}_X$ on todennäköisyysmitta tapahtuma-avaruudessa $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$. Tällöin voidaan mieltää, että satunnaismuuttuja X on kuvaus todennäköisyysavaruudelta $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruudelle $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_X)$. Lisäksi kirjallisuudessa on joskus tapana merkitä $\mathbb{P}_X = \mu$.

Tärkeä satunnaismuuttujien käsite on *odotusarvo*. Odotusarvon voi heuristisesti mieltää esimerkiksi uhkapelin kautta. Jos pelikerrat ovat riippumattomia ja samoinjakautuneita, niin suurten lukujen laki antaa, että uhkapelissä voi voittaa pitkällä tähtäimellä ainoastaan, jos peliin osallistumisen hinta ei ylitä pelin voiton odotusarvoa.

Satunnaismuuttujan odotusarvo määritellään perinteisesti kolmen vaiheen kautta. Oletetaan aluksi, että satunnaismuuttujan maaliavaruuden dimensio on yksi. Ensiksi odotusarvo määritellään *yksinkertaisille* funktioille, jotka saavat vain äärellisen määrän eri arvoja. Positiivisia arvoja saavaa satunnaismuuttujaa voidaan arvioida kasvavalla jonolla yksinkertaisia satunnaismuuttujia. Tällöin toisessa vaiheessa odotusarvo otetaan supremumina niiden odotusarvojen yli, jotka on otettu niillä yksinkertaisilla funktioilla, jotka pysyvät aina varsinaisen positiivisia arvoja saavan satunnaismuuttujan alapuolella. Vaiheessa kolme odotusarvo lasketaan niille satunnaismuuttujille X, jotka saavat sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Satunnaismuuttujasta erotellaan positiiviset ja negatiiviset osat erilleen, jolloin saadaan, että $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega) = \max\{X(\omega), 0\} - \max\{-X(\omega), 0\}$ kaikille $\omega \in H$. Satunnaismuuttujat X^+ ja X^- saavat vain positiivisia arvoja, jolloin vaiheesta kaksi seuraa vaihe kolme. Lopuksi vielä tilanne yleistetään useampaan ulottuvuuteen tarvittaessa.

MÄÄRITELMÄ 2.21. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Satunnaismuuttujan $X : H \to \mathbb{R}^n$ odotusarvo on

$$\mathbb{E}[X] = \int_H X \, d\mathbb{P} = \int_H X(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega).$$

Todennäköisyysteorian perustuloksista ehkä tärkeimmät ovat *monotonisen* ja *dominoidun konvergenssin lauseet*, *Fatou'n lemma* ja *Hölderin epäyhtälö*. Monotonisen ja dominoidun konvergenssin lauseet löytyvät melkein kaikista stokastiikan kirjoista, esimerkiksi David Williamsin teoksesta [**27**, s. 51-55], joten ei esitetä niitä tuloksia tässä työssä. Vastaavasti Hölderin epäyhtälö löytyy esimerkiksi teoksesta [**9**, s. 67-68]. Todistetaan kuitenkin Fatou'n lemma siinä muodossa, jossa sitä tarvitaan, sillä kyseistä lemmaa käytetään useasti tässä työssä. Lauseen todistus on katsottu myös teoksesta [**9**, s. 54-55].

LAUSE 2.22 (Fatou). *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja olkoon $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jono satunnaismuuttujia siten, että $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja kaikilla $\omega \in H$ ja jollekin satunnaismuuttujalle Y, jolle $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Tällöin*

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \to \infty} X_n] \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n].$$

TODISTUS. Merkitään $g_k := \inf_{n\geq k} X_n$. Nyt kaikilla $n \geq k$ pätee, että $X_n \geq g_k$, jolloin myös $\mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[g_k]$. Tästä seuraa, että $\inf_{n\geq k} \mathbb{E}[X_n] \geq \mathbb{E}[g_k]$. Koska $g_k \nearrow \liminf_{n\to\infty} X_n$ ja oletuksen nojalla $|g_k| \leq Y$ ja $|\liminf_{n\to\infty} X_n| \leq Y$, niin monotonisen konvergenssilauseen avulla saadaan, että

$$\mathbb{E}\big[\liminf_{n\to\infty} X_n\big] = \mathbb{E}\big[\lim_{k\to\infty} g_k\big] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[g_k] \leq \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} \mathbb{E}[X_n] = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]. \qquad \square$$

Olkoon Υ jokin funktioiden ominaisuus. Ominaisuus voi olla esimerkiksi jatkuvuus tai rajoittuneisuus. Sanotaan, että satunnaismuuttujalla X on ominaisuus Υ *melkein varmasti* (lyhenne *m.v*), jos on olemassa $A \in \mathcal{F}$ siten, että

$$A \subset \{\omega \in H : \text{ funktiolla } \omega \mapsto X(\omega) \text{ on ominaisuus } \Upsilon\}$$

ja $\mathbb{P}(A) = 1$. Termin melkein varmasti tilalla käytetään myös usein termiä *melkein kaikilla* $\omega \in H$.

Huomautus 2.23. Lauseessa 2.22 ei tarvitse olettaa, että

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega) \tag{2.1}$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja kaikilla $\omega \in H$, sillä sama tulos pätee myös, jos yhtälö (2.1) pätee kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja melkein kaikilla $\omega \in H$. Tämä johtuu pohjimmiltaan siitä, että sama pätee monotonisen ja dominoidun konvergenssin lauseisiin.

Satunnaismuuttujilla on konvergenssityyppejä enemmän kuin tavallisilla funktioilla.

MÄÄRITELMÄ 2.24. Olkoot $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono satunnaismuuttujia. Merkitään $H_0 := \{\omega \in H : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$. Tällöin jos

$$\mathbb{P}(H_0) = 1,$$

niin sanotaan, että $X_n \to X$ melkein varmasti, kun $n \to \infty$.

Melkein varma konvergenssi on satunnaismuuttujille monesti luonnollisempi käsite kuin pisteittäinen konvergenssi. Merkitään satunnaismuuttujalla $X_n(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ n kappaletta kolikonheittojen tulosta, missä $\omega_i \in \{\text{kruuna, klaava}\} := \{1, 0\}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Jos heitetään reilua kolikkoa riippumattomasti äärrettömän monta kertaa, vahva suurten lukujen laki antaa, että satunnaismuuttuja $Y_n(\omega) =$ "kruunujen suhteellinen frekvenssi"$\to \frac{1}{2}$ melkein varmasti, kun $n \to \infty$. Nyt kuitenkin $X(\omega) = (1, 1, 1, \ldots)$ on täysin mahdollinen jollekin $\omega \in H$, jolloin $Y_n(\omega) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämän vuoksi vahva suurten lukujen laki pisteittäisellä suppenemisella ei ole järkevä, mutta melkein varmalla suppenemisella on, sillä todennäköisyys saada jokaisella heittokerralla kruuna on tasan 0.

Melkein varma suppeneminen on hyvin vahva suppenemisen muoto. Tämän vuoksi on tärkeää tietää myös muita satunnaismuuttujien suppenemismuotoja kuten *mitan* $\mathbb{P}$ mielessä tai *jakauma* mielessä suppenemiset. Lisäksi yleisessä tilanteessa melkein varma suppeneminen ei kerro mitään satunnaismuuttujien odotusarvojen suppenemisesta, jolloin myös odotusarvojen suppenemista täytyy osata käsitellä erikseen.

Palataan vielä lopuksi työssä taaksepäin. Borel-Cantellin lemmojen yhteydessä mainittiin, että tapahtumille voidaan sallia pientä riippuvuutta. Tässä työssä käytetään seuraavaa merkintää *indikaattorifunktiolle*:

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \omega \in A \text{ ja} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Seuraavan lauseen todistus on katsottu Sidney Portin ja Charles Stonen kirjasta *Brownian motion and classical potential theory* [**24**, s. 65-66].

LAUSE 2.25. *Olkoon* $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *todennäköisyysavaruus ja olkoon* $A_n \in \mathcal{F}$ *kaikilla* $n \geq 1$ *siten, että*

$$\mathbb{P}(A_m \cap A_n) \leq M\mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(A_n)$$

jollekin $M > 0$ *ja kaikilla* $|m - n| > 1$. *Tällöin pätee, että jos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty, \quad \textit{niin} \;\; \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) > 0.$$

TODISTUS. Oletuksen nojalla joko $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2n}) = \infty$ tai $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2n+1}) = \infty$ (tai molemmat). Ajatellaan tilannetta, jossa n on parillinen ja jossa $m = n + 1$. Lisäksi oletetaan, että

$$\mathbb{P}(A_m \cap A_n) > M\mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(A_n).$$

Valitaan uudeksi indeksijoukoksi I parittomat tai parilliset luonnolliset luvut riippuen siitä, kumman joukon suhteen yllämainittu summa menee äärettömään. Jos summa menee äärettömään sekä parillisten että myös parittomien indeksien yli summattaessa, ei ole väliä, kumpi joukko valitaan indeksijoukoksi. Nyt jompikumpi luvuista m tai n valikoituu uuteen indeksijoukkoon I, mutta molemmat eivät valikoidu. Lisäksi jokaisen indeksin ero toisiinsa joukossa I on aidosti suurempaa kuin yksi. Osoitetaan väite siten, että indeksijoukkona toimii uusi indeksijoukko I. Nyt joukko $\{\limsup_{n\to\infty} A_n\}$ on sama indeksijoukon ollessa I tai $\mathbb{N}$.

Ylläolevista syistä johtuen voidaan olettaa, että

$$\mathbb{P}(A_m \cap A_n) \leq M\mathbb{P}(A_m)\mathbb{P}(A_n), \quad n \neq m. \tag{2.2}$$

Olkoon $N_n(\omega) := \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega)$ ja olkoon $N(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(\omega)$. Riittää osoittaa, että $\mathbb{P}(N = \infty) = \mathbb{P}(\{\omega \in H : N(\omega) = \infty\}) > 0$. Koska $\mathbb{E}[N_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin on olemassa luonnollinen luku n_0 siten, että $(\mathbb{E}[N_n])^2 \geq \mathbb{E}[N_n] > 0$ kaikilla $n \geq n_0$. Koska $\chi_{A_i \cap A_j} = \chi_{A_i}\chi_{A_j}$ ja $\chi_{A_i}^2 = \chi_{A_i}$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, niin saadaan, että kaikille $n \geq n_0$ pätee

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_n^2] &= \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega)\big)^2\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j). \end{aligned}$$

Nyt (2.2) antaa, että kaikille $n \geq n_0$ pätee

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) &\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + 2M\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \\ &= \mathbb{E}[N_n] + 2M(\mathbb{E}[N_n])^2 \\ &\leq (2M+1)(\mathbb{E}[N_n])^2,\end{aligned}$$

jolloin

$$\mathbb{E}[N_n^2] \leq (2M+1)(\mathbb{E}[N_n])^2 \tag{2.3}$$

kaikille $n \geq n_0$. Koska

$$\mathbb{E}[N_n \chi_{\{N_n < \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}] < \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{E}[N_n]}{2}\right] = \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2},$$

niin myös

$$\mathbb{E}[N_n \chi_{\{N_n \geq \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}] \geq \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2}.$$

Tämä johtuu siitä, että odotusarvo on lineaarinen operaattori, jolloin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_n] &= \mathbb{E}[N_n \chi_{\{N_n < \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}] + \mathbb{E}[N_n \chi_{\{N_n \geq \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2} + \mathbb{E}[N_n \chi_{\{N_n \geq \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}].\end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälön ja yhtälön (2.3) avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\mathbb{E}[N_n]}{2}\Big)^2 &\leq \big(\mathbb{E}[N_n \chi_{\{N_n \geq \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}]\big)^2 \\ &\leq \big(\mathbb{E}|N_n \chi_{\{N_n \geq \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}|\big)^2 \\ &\leq \Big((\mathbb{E}[N_n^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[\chi_{\{N_n \geq \mathbb{E}[\frac{N_n}{2}]\}}])^{\frac{1}{2}}\Big)^2 \\ &= \mathbb{E}[N_n^2]\mathbb{P}\big(N_n \geq \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2}\big) \\ &\leq (2M+1)(\mathbb{E}[N_n])^2\mathbb{P}\big(N_n \geq \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2}\big),\end{aligned}$$

kun $n \geq n_0$. Näin ollen

$$\mathbb{P}\big(N \geq \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2}\big) \geq \mathbb{P}\big(N_n \geq \frac{\mathbb{E}[N_n]}{2}\big) \geq \frac{1}{4(2M+1)} > 0$$

kaikilla $n \geq n_0$. Koska $\mathbb{E}[N_n] \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin aikaisemman nojalla

$$\mathbb{P}(N = \infty) > 0. \qquad \square$$

2.2. Stokastiset prosessit

Tämän kappaleen päälähde on Stefan Geissin teos [**10**]. Aloitetaan stokastisen prosessin määritelmällä.

MÄÄRITELMÄ 2.26. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Satunnaismuuttujien perhe $X = (X_t)_{t\in I}$, jossa $X_t : H \to \mathbb{R}^n$ on satunnaismuuttuja kaikilla $t \in I$ ja jossa I on epätyhjä indeksijoukko, on *stokastinen prosessi*. Jos indeksijoukko $I = [0, \infty[$, niin stokastinen prosessi on *jatkuva-aikainen* ja jos $I = \mathbb{Z}_+$, prosessi on *diskreettiaikainen*.

Tässä työssä stokastiset prosessit ovat kappaleessa 3 jatkuva-aikaisia ja kappaleessa 4 diskreettiaikaisia.

Huomautus 2.27. Stokastinen prosessi määriteltiin numeroituvana tai ylinumeroituvana *perheenä* satunnaismuuttujia $X_t : H \to \mathbb{R}^n$ indeksijoukon I suhteen. Kiinnitetään $t \in I$ ja tutkitaan satunnaismuuttujaa

$$\omega \mapsto X_t(\omega).$$

Stokastista prosessia voi kuitenkin myös ajatella yhtenä alkiona *satunnaisten polkujen* avaruudessa. Kiinnitetään ω ja tutkitaan *polkua*

$$t \mapsto X_t(\omega).$$

Stokastisten prosessien ominaisuudet määräytyvät hyvin pitkälle niiden *äärellisulotteisista jakaumista*. Lisäksi prosessin satunnaismuuttujien riippuvuussuhteet eri aikaparametreillä ovat hyvin merkittävässä asemassa.

Olkoon $\mathbb{T} := \{(t_1, t_2, \dots, t_k) : k \geq 1,\ t_1, t_2, \dots, t_k \in I \text{ ovat erisuuret}\}$ indeksijoukko.

MÄÄRITELMÄ 2.28. Olkoon $X = (X_t)_{t\in I}$ stokastinen prosessi todennäköisyysavaruudelta $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Olkoot $k = 1, 2, \dots$ ja $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}$. Tällöin prosessin X k-ulotteinen jakauma ajanhetkillä $(t_1, \dots, t_k)$ on

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \in B) &= \mathbb{P}((X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \in B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in H : X_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{t_k}(\omega) \in B_k\}) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_1}^{-1}(B_1), X_{t_2}^{-1}(B_2), \dots, X_{t_k}^{-1}(B_k)) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_1}^{-1}(B_1) \cap X_{t_2}^{-1}(B_2) \cap \dots \cap X_{t_k}^{-1}(B_k))
\end{aligned}$$

kaikilla $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k\times n})$. Koska $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k\times n})$, niin $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k$, jossa $B_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ jokaisella $i \in \{1, \dots, k\}$. Stokastisen prosessin äärellisulotteista jakaumaa merkitään yleensä merkillä

$$\mu_{(t_1,\dots,t_k)}(B) := \mathbb{P}((X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \in B).$$

Huomautus 2.29. Määritelmässä 2.28 huomaa pilkun merkitys lausekkeen sisällä. Todennäköisyyslaskennassa yleensä merkitään $\mathbb{P}(A, B) := \mathbb{P}(A \cap B)$ kaikilla $A, B \in \mathcal{F}$.

Kerrataan seuraavaksi tuloavaruuden määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 2.30. Olkoon I jokin epätyhjä indeksijoukko. Joukon $\mathbb{R}^n$ tuloavaruus indeksijoukon I suhteen on

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^{n\times I} &:= \prod_{t\in I} \mathbb{R}^n \\
&= \{x : x \text{ on kuvaus } x : I \to \mathbb{R}^n \text{ siten, että } x_t \in \mathbb{R}^n \text{ kaikilla } t \in I\}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.31. Olkoon $\sigma\Big(\mathbb{R}^{n\times I}\Big)$ pienin σ-algebra, joka sisältää kaikki sylinterijoukot

$$S := \{(Y_t)_{t\in I} \in \mathbb{R}^{n\times I} : (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k}) \in B\},$$

jossa $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{T}$ ja $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k\times n})$ ja joissa $k = 1, 2, \ldots$.

Huomautus 2.32. Määritelmässä 2.28 mietitään prosessin äärellisulotteisia jakaumia eri aikaparametreillä. Tästä haluttaisiin mennä kuitenkin vielä pidemmälle. Usein ollaan kiinnostuneita stokastisen prosessin polun ominaisuuksista. Tarvitaan jollakin tapaa "ääretönulotteisia" jakaumia, sillä halutaan vastata kysymyksiin, kuten esimerkiksi millä todennäköisyydellä prosessi osuu joskus tai ei osu koskaan tiettyyn alueeseen. Lisäksi jatkuva-aikaisten prosessien tapauksessa prosessin polun jatkuvuuskysymykset ovat oleellisia. Kuten jo aikaisemmin mainittiin, voidaan ajatella, että todennäköisyysavaruuden perusjoukko on tuloavaruus $\mathbb{R}^{n\times I}$. Kohtalo "arpoo" yhden satunnaisen polun $\omega \in \mathbb{R}^{n\times I}$ satunnaisten polkujen avaruudesta, ja kyseinen polku "paljastuu" vähitellen indeksin t kasvaessa joukossa I.

Nyt haluttaisiin löytää todennäköisyysmitta, joka on määritelty koko σ-algebrassa $\sigma\big(\mathbb{R}^{n\times I}\big)$ ja joka antaa kaikilla sylinterijoukoilla samat todennäköisyydet kuin äärellisulotteiset jakaumat. Oletetaan, että on käytössä jonkin stokastisen prosessin X todennäköisyysjakaumien perhe $\big(\mu_{(t_1,\ldots,t_k)}(\cdot)\big)_{(t_1,\ldots,t_k)\in\mathbb{T}}$. Kiinnostava kysymys liittyy siihen, onko aina olemassa yksikäsitteistä todennäköisyysmittaa $\mathbb{P}^*$ tapahtuma-avaruudessa $\Big(\mathbb{R}^{n\times I}, \sigma\big(\mathbb{R}^{n\times I}\big)\Big)$ siten, että

$$\mathbb{P}^*((Y_t)_{t\in I} : (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k}) \in B) = \mu_{t_1,\ldots,t_k}(B)$$

kaikilla $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k\times n})$ ja kaikilla $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{T}$. Tähän kysymykseen palataan myöhemmin.

Esimerkki 2.33. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja olkoon stokastinen prosessi B standardi 1-ulotteinen Brownin liike. Lauseessa 3.2 käsitellään Brownin liikkeen olemassaoloa. Brownin liikkeen yksi tärkeimmistä ominaisuuksista on se, että prosessin B lisäykset ovat aina normaalijakautuneita. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla ajanhetkillä $0 \leq s < t$

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s). \tag{2.4}$$

Satunnaismuuttuja $X : H \to \mathbb{R}$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla $m < \infty$ ja varianssilla σ^2, $\sigma > 0$ eli $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, jos

$$\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f_X(x)\, dx = \int_D \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

kaikilla $D \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Funktio $f_X(x)$ on satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Olkoot $k = 1, 2, 3, \ldots$, $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{1\times k}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ ja $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$ ajanhetkiä. Tällöin $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_k$, jossa $C_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ jokaisella $i \in \{1, \ldots, k\}$. Brownin liikkeen toinen tärkeä ominaisuus on se, että lisäykset (2.4) ovat myös riippumattomia. Lisäksi tiedetään, että $B_0 = 0$. Merkitään $Y_i := B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, jossa $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $t_0 = 0$. Nyt satunnaismuuttujat Y_i ovat riippumattomia ja normaalijakautuneita. Tiedetään, että $Y_i \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$. Tällöin esimerkiksi $Y_1 \sim \mathcal{N}(0, t_1)$. Koska

$Y_1 + Y_2 = B_{t_2}$, niin $Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{N}(0, t_2)$. Merkitään $S_2 = Y_1 + Y_2$. Tällöin ehdollisen satunnaismuuttujan $Y_1 + Y_2 \mid Y_1 = y_1$ tiheysfunktio on

$$f_{S_2|Y_1=y_1}(s_2|y_1) := \frac{f_{S_2,Y_1}(s_2, y_1)}{f_{Y_1}(y_1)}.$$

Näin ollen tiheysfunktion avulla voidaan näyttää, että $Y_1 + Y_2 \mid Y_1 = y_1 \sim \mathcal{N}(y_1, t_2 - t_1)$. Jos merkitään $S_m := \sum_{l=1}^m Y_l$ kaikilla $m \in \{1, \dots, k\}$, niin vastaavasti $S_m \mid S_{m-1} = y_{m-1} \sim \mathcal{N}(y_{m-1}, t_m - t_{m-1})$. Lisäksi merkitään, että

$$g(x, t|y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

Saadaan, että yksiulotteisen Brownin liikkeen äärellisulotteinen jakauma on

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k}) \in C) \\
&= \mathbb{P}(B_{t_1} \in C_1, B_{t_2} \in C_2, \dots, B_{t_k} \in C_k) \\
&= \mathbb{P}(Y_1 \in C_1, Y_1 + Y_2 \in C_2, \dots, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k \in C_k) \\
&= \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k \in C_k | Y_1 \in C_1, \dots, Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{k-1} \in C_{k-1}) \\
&\cdots \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 + Y_3 \in C_3 \mid Y_1 \in C_1, Y_1 + Y_2 \in C_2) \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \in C_2 | Y_1 \in C_1) \mathbb{P}(Y_1 \in C_1) \\
&= \mathbb{P}(S_k \in C_k | S_{k-1} \in C_{k-1}) \cdots \mathbb{P}(S_3 \in C_3 \mid S_2 \in C_2) \mathbb{P}(S_2 \in C_2 | S_1 \in C_1) \mathbb{P}(S_1 \in C_1) \\
&= \int_{C_k} \cdots \int_{C_1} g(x_{t_1}, t_1|0) g(x_{t_2}, t_2 - t_1 | x_{t_1}) \cdots g(x_{t_k}, t_k - t_{k-1} | x_{t_{k-1}}) dx_{t_1} dx_{t_2} \cdots dx_{t_k} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \int_{C_k} \cdots \int_{C_1} \frac{1}{\big(t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_k - t_{k-1})\big)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_{t_1}^2}{t_1} + \cdots + \frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{t_k - t_{k-1}}\right)\right.} dx_{t_1} \cdots dx_{t_k}
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.34. Olkoot $X = (X_t)_{t \in I}$ ja $Y = (Y_t)_{t \in I}$ stokastisia prosesseja todennäköisyysavaruuksista $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja $(H^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$. Tällöin prosesseilla X ja Y on samat äärellisulotteiset jakaumat, jos

$$\mathbb{P}((X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}) \in B) = \mathbb{P}^*((Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k}) \in B)$$

kaikilla $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}$ ja kaikilla $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k \times n})$, joissa $k = 1, 2, \dots$.

Määritelmä 2.35. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja olkoot X ja Y stokastisia prosesseja. Prosessit X ja Y ovat riippumattomia, jos kaikille $t_1, \dots, t_k \in I$ ja kaikille $s_1, \dots, s_k \in I$ pätee

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in A, (Y_{s_1}, \dots, Y_{s_k}) \in B) \\
&= \mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in A) \mathbb{P}((Y_{s_1}, \dots, Y_{s_k}) \in B)
\end{aligned}$$

kaikilla $A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k \times n})$ ja $k = 1, 2, \dots$. Lisäksi stokastinen prosessi X on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{G}$, jos

$$\mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in A, E) = \mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in A) \mathbb{P}(E)$$

kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k \times n})$, $E \in \mathcal{G}$, $t_1, \dots, t_k \in I$ ja $k = 1, 2, \dots$.

Todennäköisyysteorian ehkä tärkeimmät laajennuslauseet ovat *Carathéodoryn laajennuslause* ja *Kolmogorovin laajennuslause*. Carathéodoryn laajennuslause löytyy esimerkiksi David Williamsin teoksesta [**27**, s. 195-197]. Kolmogorovin laajennuslause seuraa Carathéodoryn laajennuslauseesta. Tämä johtuu pohjimmiltaan siitä, että sylinterijoukot sisältävä joukkokokoelma muodostaa algebran ja todennäköisyysjakaumien perheeltä vaaditaan tiettyjä hyviä ominaisuuksia. Määritellään nämä "hyvät" ominaisuudet.

MÄÄRITELMÄ 2.36. Todennäköisyysjakaumien perhe $(\mu_{t_1,\dots,t_k})_{(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{T}}$, jossa $\mu_{t_1,\dots,t_k}$ on todennäköisyysmitta tapahtuma-avaruudessa $(\mathbb{R}^{k\times n}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k\times n}))$, on *konsistentti*, jos

(i) $\mu_{t_1,\dots,t_k}(B_1 \times \cdots \times B_k) = \mu_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(k)}}(B_{\pi(1)} \times \cdots \times B_{\pi(k)})$
kaikilla $k = 1, 2, \dots,\ B_1, \dots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ja kaikilla permutaatioilla $\pi : \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, k\}$ ja

(ii) $\mu_{t_1,\dots,t_k}(B_1 \times \cdots \times B_{k-1} \times \mathbb{R}^n) = \mu_{t_1,\dots,t_{k-1}}(B_1 \times \cdots \times B_{k-1})$ kaikilla $k \geq 2$ ja $B_1, \dots, B_{k-1} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

LAUSE 2.37 (Kolmogorovin laajennuslause). *Olkoon $(\mu_{t_1,\dots,t_k})_{(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{T}}$ konsistentti todennäköisyysjakaumien perhe. Tällöin on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P}^*$ tapahtuma-avaruudessa $\left(\mathbb{R}^{n\times I}, \sigma\big(\mathbb{R}^{n\times I}\big)\right)$ siten, että*

$$\mathbb{P}^*((Y_t)_{t\in I} : (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) \in A) = \mu_{t_1,\dots,t_k}(A),$$

kaikilla $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{T}$ ja $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k\times n})$.

TODISTUS. Katso esimerkiksi Srinivasa Varadhan kirjasta [**25**]. □

ESIMERKKI 2.38. Esimerkissä 2.33 tutkittiin, millainen on yksiulotteisen Brownin liikkeen äärellisulotteinen jakauma. Kyseisessä esimerkissä oletettiin, että yksiulotteinen Brownin liike on olemassa. Erityisesti siis oletettiin, että on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ tapahtuma-avaruudessa $\left(\mathbb{R}^{[0,\infty[}, \sigma\big(\mathbb{R}^{[0,\infty[}\big)\right)$ siten, että tämä todennäköisyysmitta antaa Brownin liikkeen sylinterijoukoilla saman todennäköisyyden kuin äärellisulotteiset jakaumat. Ajatellaan nyt, että ei vielä tiedetä todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ olemassaoloa. Olkoon indeksijoukko $\mathbb{T} := \{(t_1, t_2, \dots, t_k) : k \geq 1,\ t_1, t_2, \dots, t_k \in [0, \infty[\text{ ovat erisuuret}\}$. Olkoot $k = 1, 2, \dots$ ja $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$. Merkitään

$$\begin{aligned}&\mu_{t_1,\dots,t_k}(A)\\ &= \int_{A_k} \cdots \int_{A_1} g(x_{t_1}, t_1|0) g(x_{t_2}, t_2 - t_1|x_{t_1}) \cdots g(x_{t_k}, t_k - t_{k-1}|x_{t_k-1}) dx_{t_1} dx_{t_2} \cdots dx_{t_k}\end{aligned}$$

kaikilla $A = A_1 \times \cdots \times A_k$, $A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ jokaisella $i \in \{1, \dots, k\}$. Näytetään, että todennäköisyysjakaumien perhe $(\mu_{t_1,\dots,t_k})_{(t_1,\dots,t_k)\in\mathbb{T}}$ on konsistentti. Tätä varten olkoon

$$\pi : \{1, 2, \dots k\} \to \{1, 2, \dots, k\}$$

jokin permutaatio. Nyt funktiot $g(x, t|y)$ ovat aina positiivisia määrittelyjoukoissaan, jolloin Fubinin lause antaa, että integrointijärjestyksen muuttaminen ei muuta lopputulosta. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\mu_{t_1,\dots,t_k}(A) = \mu_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(k)}}(A)$$

kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$. Lisäksi tiedetään, että

$$\int_{\mathbb{R}} g(x_{t_k}, t_k - t_{k-1}|x_{t_{k-1}}) dx_{t_k} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(2\pi(t_k - t_{k-1}))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2}{t_k - t_{k-1}}\right)} dx_{t_k} = 1.$$

Tällöin saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\mu_{t_1,\ldots,t_k}(A_1 \times \cdots \times A_{k-1} \times \mathbb{R}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{A_{k-1}} \cdots \int_{A_1} g(x_{t_1}, t_1|0) \cdots g(x_{t_k}, t_k - t_{k-1}|x_{t_{k-1}}) dx_{t_1} \cdots dx_{t_k} \\
&= \int_{A_{k-1}} \cdots \int_{A_1} g(x_{t_1}, t_1|0) \cdots g(x_{t_{k-1}}, t_{k-1} - t_{k-2}|x_{t_{k-2}}) \cdot 1 dx_{t_1} \cdots dx_{t_{k-1}} \\
&= \mu_{t_1,\ldots,t_k}(A_1 \times \cdots \times A_{k-1}).
\end{aligned}$$

Määritellään seuraavaksi *filtraatio* ja *stokastinen kanta.*

MÄÄRITELMÄ 2.39. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus. Tällöin σ-algebrojen perhe $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ on filtraatio, jos $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ kaikilla $0 \leq s \leq t < \infty$ ja $s, t \in I$. Sanotaan, että nelikko $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in I})$ on stokastinen kanta.

Filtraation intuitiivinen idea on se, että σ-algebra $\mathcal{F}_t$ sisältää ne tapahtumat, jotka ovat tiedossa hetkeen t asti. Seuraavaksi päästään stokastisen prosessin mitallisuuskysymysten pariin. Oletetaan, että käytössä on jatkuva-aikainen indeksijoukko $I = [0, \infty[$. Muistetaan, että satunnaismuuttuja $X : H \to \mathbb{R}^n$ on $(\mathcal{F}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$-mitallinen kuvaus.

MÄÄRITELMÄ 2.40. Olkoot $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty[})$ stokastinen kanta ja X stokastinen prosessi $X = (X_t)_{t\in[0,\infty[}$, $X_t : H \to \mathbb{R}^n$.

(i) Prosessi X on *progressiivisesti mitallinen,* jos kaikilla $T \geq 0$, funktio $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ on kuvauksena $X_t(\omega) : H \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ $\Big((\mathcal{F}_T, \mathfrak{B}([0, T]), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\Big)$-mitallinen.

(ii) Prosessi X on *mitallinen,* jos funktio $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ on kuvauksena $X_t(\omega) : H \times [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ $\Big((\mathcal{F}, \mathfrak{B}([0, \infty[), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\Big)$-mitallinen.

(iii) Prosessi X on *sopiva (engl. adapted)* filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty[}$ suhteen, jos X_t on $(\mathcal{F}_t, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$-mitallinen kaikilla $t \in [0, \infty[$.

Huomautus 2.41. Määritelmässä 2.40 kuvauksen $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ $\Big((\mathcal{F}, \mathfrak{B}([0, \infty[)), \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\Big)$-mitallisuus tarkoittaa sitä, että kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$\{(\omega, t) \in H \times [0, \infty[: X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}([0, \infty[).$$

Joukko $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}([0, \infty[)$ on pienin σ-algebra, joka sisältää joukot

$$\{(\omega, t) \in H \times [0, \infty[: \omega \in A_1, t \in A_2\},$$

missä $A_1 \in \mathcal{F}$ ja $A_2 \in \mathfrak{B}([0, \infty[)$.

Progressiivisesti mitallinen prosessi on aina mitallinen prosessi. Lisäksi mitallinen prosessi on aina sopiva. Kaikki muut implikaatiot eivät päde yleisesti.

ESIMERKKI 2.42. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty[})$ stokastinen kanta ja olkoon $A \subset [0, \infty[$ siten, että A ei kuulu Borelin σ-algebraan $\mathfrak{B}([0, \infty[)$. Olkoon X stokastinen prosessi, jolle kaikilla $t \in [0, \infty[$ ja kaikilla $\omega \in H$ pätee

$$X_t(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{jos } t \in A \\ 0, & \text{jos } t \notin A. \end{cases}$$

Tällöin siis kiinnitetyllä $t \in [0, \infty[$, $\omega \mapsto X_t(\omega)$ on vakio 1 tai 0. Vakiofunktio on mitallinen minkä tahansa σ-algebran suhteen, sillä $X_t^{-1}(1) = H \in \mathcal{F}_t$ kun $t \in A$ ja kun $\mathcal{F}_t$ on mikä tahansa H:n σ-algebra. Vastaavasti $X_t^{-1}(0) = \emptyset \in \mathcal{F}_t$ kun $t \in A$. Jos $t \notin A$, niin samalla tavalla X_t on $\mathcal{F}_t$ -mitallinen. Saadaan siis, että prosessi X on sopiva minkä tahansa filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,\infty[}$ suhteen. Nyt kuitenkin

$$\{(\omega, t) \in H \times [0, \infty[: X_t(\omega) = 1\} = H \times A \notin \mathcal{F} \otimes \mathfrak{B}([0, \infty[),$$

sillä $A \notin \mathfrak{B}([0, \infty[)$. Tällöin X ei ole mitallinen eikä myöskään progressiivisesti mitallinen.

Jos stokastinen prosessi X on sopiva ja jatkuva, niin X on myös progressiivisesti mitallinen. Diskreettiaikainen stokastinen prosessi Z on sopiva, jos kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee, että Z_n on $\mathcal{F}_n$-mitallinen. Diskreettiaikaisen prosessin tapauksessa ei ole järkevää erotella eri mitallisuuden muotoja, sillä diskreettiaikainen sopiva prosessi on aina progressiivisesti mitallinen joukon $\mathbb{Z}_+$ σ-algebran ollessa potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$.

Eräs tärkeä filtraatio on *luonnollinen filtraatio*, jonka jokainen stokastinen prosessi virittää itse. Jos Y on stokastinen prosessi, niin luonnollinen filtraatio on $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y_s : s \in I, 0 \le s \le t)$, joka on pienin σ- algebra, joka sisältää kaikki joukot

$$\{\omega \in H : Y_s(\omega) \in B\},$$

jossa $s \in [0, t] \cap I$ ja $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin stokastinen prosessi on aina sopiva luonnollisen filtraation suhteen. Määritelmän 2.31 sylinterijoukkojen virittämä σ-algebra on sama kuin projektiokuvausten $P_t : \mathbb{R}^{n \times I} \to \mathbb{R}^n, P_t(\omega) = \omega(t) = \omega_t$ kaikilla $t \in I$, virittämä σ-algebra $\sigma(P_t : t \in I)$.

Progressiivinen mitallisuus antaa sen hyödyn, että pysäytetty prosessi on aina myös mitallinen. Progressiivista mitallisuutta tarvitaan erityisesti *stokastisen integroinnin* yhteydessä. Kuten tullaan huomaamaan, stokastinen integrointi määritellään ainoastaan progressiivisesti mitallisille prosesseille.

Siirrytään seuraavaksi *pysäytyshetkiin.* Pysäytyshetki on satunnainen ajanhetki, jonka voi intuitiivisesti mieltää seuraavasti: Jos pysäytyssääntö ei vaadi näkemistä tulevaisuuteen, vaan prosessi voidaan pysäyttää niillä tiedoilla, jotka on tiedossa täsmälleen kyseisellä hetkellä, pysäytyssäännön nojalla pysäytetyn prosessin satunnainen pysähtymisajanhetki on pysäytyshetki.

Määritelmä 2.43. Olkoon $(H, \mathcal{F})$ tapahtuma-avaruus ja $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ filtraatio. Tällöin kuvaus $\tau : H \to [0, \infty]$ on pysäytyshetki filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ suhteen, jos

$$\{\tau \le t\} := \{\omega \in H : \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t \;\text{ kaikilla } t \in I.$$

Lisäksi σ-algebra

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \text{ kaikilla } t \in I\}$$

sisältää kaikki ne tapahtumat, jotka tiedetään pysäytyshetkeen τ mennessä.

Huomautus 2.44. Deterministinen ajanhetki $t \in \mathbb{R}_+$ on pysäytyshetki minkä tahansa filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ suhteen. Lisäksi on helppo nähdä, että joukkokokoelma $\mathcal{F}_\tau$ on todella σ-algebra jokaisella pysäytyshetkellä τ.

Filtraatio $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ on keskeisessä osassa pysäytyshetkissä. Joskus on tarvetta hieman kasvattaa filtraatiota.

MÄÄRITELMÄ 2.45. Olkoon $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ filtraatio. Tällöin

$$\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \text{ kaikilla } t \in I$$

on filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ *oikealta jatkuva* hieman kasvatettu filtraatio.

Määritelmä 2.45 on jatkuvalle prosessille hyvin tärkeä. Tämä näkyy esimerkiksi lauseen 2.46 kohdassa (i). Tässä työssä määritellään myöhemmin stokastisen prosessin *vahva Markovin* ominaisuus. Jos stokastisella prosessilla on vahva Markovin ominaisuus, stokastisen prosessin X virittämä luonnollinen filtraatio saadaan oikealta jatkuvaksi, kun filtraatioon lisätään nollamittaisten joukkojen osajoukot (katso Ioannis Karatzasin ja Steven Shreven kirjasta [**14**, s. 90-91]).

Todistetaan seuraava tulos tapauksessa $I = [0,\infty[$. Diskreettiaikainen tapaus todistetaan täysin vastaavasti ilman tietoa prosessin X jatkuvuudesta ja ilman oikealta jatkuvaa filtraatiota. Lauseen todistuksen kohta (i) on katsottu Peter Mörtersin ja Yuval Peresin kirjasta [**20**, s. 41] ja kohta (ii) Stefan Geissin teoksesta [**10**, s. 33].

LAUSE 2.46. *Olkoon $(H,\mathcal{F})$ tapahtuma-avaruus ja $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtraatio. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä joukko. Olkoon X jatkuva ja sopiva stokastinen prosessi. Merkitään*

$$\tau_\Omega := \inf\{t > 0 : X_t \in \Omega\}.$$

Tällöin seuraavat pätevät:

(*i*) *Jos Ω on avoin, niin τ_Ω on pysäytyshetki filtaarion $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ suhteen.*

(*ii*) *Jos Ω on suljettu, niin τ_Ω on pysäytyshetki filtaarion $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen.*

TODISTUS. (i) Olkoon $t \geq 0$. Koska Ω on avoin, niin $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Tällöin

$$\{\tau_\Omega \leq t\} = \bigcup_{0<s\leq t} \{\underbrace{\omega \in H : X_s(\omega) \in \Omega}_{\in\mathcal{F}_s\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{F}_t,\text{ sillä } X \text{ sopiva}}\}.$$

Koska prosessi X on jatkuva, ja kahden erisuuren reaaliluvun välistä löytyy aina vähintään yksi rationaaliluku, saadaan

$$\bigcup_{0<s\leq t} \{\omega \in H : X_s(\omega) \in \Omega\} = \bigcap_{r>t} \bigcup_{s\in]0,r[\cap\mathbb{Q}} \underbrace{\{\omega \in H : X_s(\omega) \in \Omega\}}_{\in\mathcal{F}_r} \in \mathcal{F}_t^+.$$

Lisäksi ylläolevassa tarvittiin tietoa siitä, että $\mathcal{F}_r$ on σ-algebra, jolloin numeroituva yhdiste sen alkioista kuuluu myös joukkokokoelmaan, ja että $\mathcal{F}_t^+$ on oikealta jatkuva. Oikealta jatkuvuus on tärkeää, sillä prosessi X joutuu joukon Ω reunalla "vilkaisemaan" tulevaisuuteen infinitesimaalisen pienen hetken, jotta prosessi tietää, osuuko se avoimeen joukkoon Ω vai ei. Tästä syystä johtuen τ_Ω ei välttämättä ole pysäytyshetki ilman filtraation oikealta jatkuvuutta.

(ii) Olkoon $t \geq 0$ ja olkoon $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq 0$ jono ajanhetkiä siten, että $X_{t_k} \in \Omega$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Merkitään $s := \lim_{k\to\infty} t_k \leq t$. Koska X on jatkuva, niin $X_s = \lim_{k\to\infty} X_{t_k}$. Lisäksi koska Ω on suljettu, niin $X_s \in \Omega$ ja $\Omega \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Merkitään

$$d(x, \Omega) := \inf\{d(x, y) : y \in \Omega\},$$

missä $d(x, y)$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ metriikka. Näin ollen

$$\{\tau_\Omega \leq t\} = \bigcup_{0<s\leq t} \{X_s \in \Omega\} = \{\omega \in H : \inf_{s\in\mathbb{Q}, s\leq t} d(X_s(\omega), \Omega) = 0\} \in \mathcal{F}_t,$$

sillä pisteen etäisyys joukosta kaikilla metriikoilla d on jatkuva kuvaus, X on sopiva ja $\mathcal{F}_t$ on σ-algebra kaikilla $t \geq 0$. $\square$

2.3. Martingaalit ja niiden suppeneminen

Ehdollinen odotusarvo ja *martingaalit* ovat keskeinen osa todennäköisyysteoriaa. Tämän kappaleen päälähde on David Williamsin teos [**27**]. Aloitetaan ehdollisesta odotusarvosta.

Määritelmä 2.47. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja olkoon $X : H \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}$-mitallinen satunnaismuuttuja, jolle $\mathbb{E}|X| < \infty$. Olkoon $\mathcal{G}$ σ-algebran $\mathcal{F}$ ali-σ-algebra. Nyt satunnaismuuttuja Y on σ-algebran $\mathcal{G}$ suhteen satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo, jos

(i) Y on $\mathcal{G}$-mitallinen,
(ii) $\mathbb{E}|Y| < \infty$ ja
(iii) $\int_G Y \, d\mathbb{P} = \int_G X \, d\mathbb{P}$ kaikilla joukoilla $G \in \mathcal{G}$.

Tällöin merkitään $Y := \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ m.v.

Huomautus 2.48. Määritelmän 2.47 ehdollinen odotusarvo on olemassa ja yksikäsitteinen melkein varmasti. Tämä tarkoittaa sitä, että jos on olemassa toinen satunnaismuuttuja $\tilde{Y}$, joka täyttää määritelmän 2.47 ehdot, niin tällöin $\mathbb{P}(Y = \tilde{Y}) = 1$. Määritelmän 2.47 ehdollisen odotusarvon olemassaolo ja yksikäsitteisyys on todistettu teoksessa [**27**, s. 85-86].

Ehdollisen odotusarvon voi intuitiivisesti ajatella seuraavasti: Ajatellaan, että ollaan tehty koe $X(\omega)$ ja ollaan kiinnostuneita siitä, mikä arvo $\omega \in H$ on valikoitunut otokseen. Valitettavasti tiedetään ainoastaan arvot $Z(\omega)$ kaikilla $\mathcal{G}$-mitallisilla satunnaismuuttujilla Z. Tällöin $Y(\omega) = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}](\omega)$ on satunnaismuuttujan $X(\omega)$ odotusarvo annetulla informaatiolla $\mathcal{G}$. Voidaan jopa osoittaa, että Y on $\mathcal{G}$-mitallisista satunnaismuuttujista paras pienimmän neliösumman estimaattori satunnaismuuttujalle X, t.s. Y minimoi arvoa

$$\mathbb{E}[(Y - X)^2].$$

Ehdollisella odotusarvolla on monta ominaisuutta. Mainitaan seuraavaksi näistä vain muutamat.

LEMMA 2.49. *Olkoon $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ määritelmän 2.47 ehdollinen odotusarvo. Tällöin seuraavat pätevät:*

(i) *Jos X on $\mathcal{G}$-mitallinen, niin $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ m.v.*

(ii) *Jos $\mathcal{J}$ on σ-algebran $\mathcal{G}$ ali-σ-algebra, niin*
$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{J}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{J}]$ *m.v.*

(iii) *Jos X on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{G}$, niin $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}X$ m.v.*

TODISTUS. Kohta (i) seuraa suoraan määritelmästä. Kohta (ii) seuraa myös suoraan määritelmästä ja siitä, että $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{G}$. Todistetaan kohta (iii). Kahdelle riippumattomalle satunnaismuuttujalle X ja Y pätee

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Lisäksi satunnaismuuttujan X riippumattomuus σ-algebrasta $\mathcal{G}$ tarkoittaa määritelmän nojalla sitä, että satunnaismuuttujat X ja χ_G ovat riippumattomia kaikilla $G \in \mathcal{G}$. Luku $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ on vakio, jolloin $\mathbb{E}X$ on $\mathcal{G}$-mitallinen ja $\mathbb{E}|\mathbb{E}X| < \infty$. Nyt väite pätee, sillä riippumattomuuden nojalla

$$\int_G \mathbb{E}[X]\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X]\mathbb{P}(G) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[\chi_G] = \mathbb{E}[X\chi_G] = \int_G X\, d\mathbb{P} \text{ kaikilla } G \in \mathcal{G}. \quad \square$$

Seuraava määritelmä on erittäin tärkeä.

MÄÄRITELMÄ 2.50. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+})$ stokastinen kanta. Stokastinen prosessi X on martingaali, jos

(i) X on sopiva,

(ii) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja

(iii) $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ m.v. kaikilla $n \geq 1$.

Lisäksi jos ehto (iii) korvataan ehdolla

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \leq X_{n-1} \text{ m.v. kaikilla } n \geq 1,$$

niin X on *supermartingaali* ja jos ehto (iii) korvataan ehdolla

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geq X_{n-1} \text{ m.v. kaikilla } n \geq 1,$$

niin X on *submartingaali.*

Huomautus 2.51. Stokastinen prosessi M on martingaali jos ja vain jos M on supermartingaali ja submartingaali. Lisäksi M on supermartingaali jos ja vain jos $-M$ on submartingaali.

Ajatellaan peliä, jossa kaksi pelaajaa pelaa vastakkain. Olkoon prosessi $M_n := X_n - X_{n-1} =$ "saamani lisävoitto toiselta pelaajalta hetkellä n" kaikilla $n \geq 1$. Tällöin jos

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0 \quad \text{kaikilla } n \geq 1,$$

niin $(M_n)_{n\geq 1}$ on martingaali, ja peli on reilu molemmille pelaajille. Jos taas

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0 \quad \text{kaikilla } n \geq 1,$$

niin $(M_n)_{n\geq 1}$ on supermartingaali, ja peli on epäreilu minua kohtaan.

Olkoon X (super)martingaali ja τ pysäytyshetki. Tällöin pysäytetty prosessi

$$X^\tau := \{X_{\tau\wedge n} : n \in \mathbb{Z}_+\}$$

on myös (super)martingaali. Seuraava tulos on *Doobin optimaalisen pysäytyksen teoria (Doob's optimal stopping theorem)*, joka on erittäin tärkeä ja käyttökelpoinen.

LAUSE 2.52. *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{Z}_+})$ stokastinen kanta ja τ pysäytyshetki. Olkoon stokastinen prosessi X supermartingaali. Tällöin $\mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ ja*

$$\mathbb{E}[X_\tau] \le \mathbb{E}[X_0],$$

jos jompi kumpi seuraavasta kahdesta ehdosta pätee:

(i) τ on rajoitettu, t.s. on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\tau(\omega) \le N$ kaikilla $\omega \in H$.

(ii) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ ja X on rajoitettu, t.s. on olemassa $K \in \mathbb{R}_+$ siten, että $|X_n(\omega)| \le K$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ ja kaikilla $\omega \in H$.

Vastaavasti jos X on martingaali ja jompi kumpi ehdoista (i)-(ii) pätee, niin $\mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ ja

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0].$$

TODISTUS. Koska X on supermartingaali, niin $\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi saadaan lemman 2.49 kohdan (iii) ja (ii) nojalla, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] &= \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_0] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_{\tau\wedge n-1}]|\mathcal{F}_0]. \end{aligned}$$

Nyt koska X on supermartingaali, saadaan arvio, että kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$ pätee

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_{\tau\wedge n-1}]|\mathcal{F}_0] &\le \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n-1}|\mathcal{F}_0] \\ &\le \cdots \le \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_0]. \end{aligned}$$

Lopuksi vielä saadaan lemman 2.49 kohdan (i) nojalla, että $\mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_0] = X_0$. Koska X_0 on deterministinen, saadaan, että

$$\mathbb{E}(X_{\tau\wedge n} - X_0) \le 0 \text{ kaikilla } n \ge 1.$$

Jos (i) on voimassa, niin valitaan $n = N$, ja väite pätee. Oletetaan, että (ii) on voimassa. Tällöin koska X on rajoitettu, lause 2.22 pätee:

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} X_n] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$

Tämä johtuu siitä, että vakio K on rajoitettu ja $\mathbb{P}(H) = 1$ antaa, että $\mathbb{E}[K] < \infty$. Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_\tau] &= \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}] \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_0]. \end{aligned}$$

Tilanne, jossa X on martingaali, saadaan todistettua, kun ylläoleva tehdään prosessille X ja $-X$. $\square$

Huomautus 2.53. Doobin optimaalisen pysätyksen teoria eli lause 2.52 osoitettiin supermartingaaleille. Kyseinen lause oltaisiin kuitenkin voitu osoittaa vastaavasti myös submartingaaleille. Tällöin epäyhtälöt kääntyvät vain toisinpäin. Tämä johtuu siitä, että jos prosessi M on supermartingaali, niin prosessi $-M$ on submartingaali.

Mielenkiintoinen kysymys liittyy martingaalien ja supermartingaalien suppenemisiin. Vaikka martingaalit käyttäytyvät tietyssä mielessä reilusti, niin martingaaliprosessilla M ei silti välttämättä ole olemassa raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} M_n$. Jos kuitenkin martingaaliprosessi on rajoitettu avaruudessa $\mathcal{L}^1$, niin raja-arvo on olemassa jo supermartingaaleille. Huomautuksen 2.51 nojalla tästä seuraa raja-arvon olemassa olo myös submartingaaleille. Ennen kuin päästään varsinaiseen konvergenssilauseeseen, todistetaan *Doobin välin ylitys (Doob's upcrossing)* lemma.

LEMMA 2.54. *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{Z}_+})$ stokastinen kanta ja X supermartingaali. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. Merkitään*

$$\begin{aligned} U_N[a,b](\omega) := \ & \textit{suurin } k \in \mathbb{Z}_+, \textit{ jolle on olemassa} \\ & 0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_k < t_k \leq N \textit{ siten, että} \\ & X_{s_i}(\omega) < a \textit{ ja } X_{t_i}(\omega) > b \textit{ kaikilla } 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Tällöin

$$(b-a)\mathbb{E}[U_N[a,b]] \leq \mathbb{E}[(X_N - a)^-].$$

TODISTUS. Todistuksen ajatus on todistaa lause pelin kautta. Supermartingaali X voidaan ajatella olevan esimerkiksi prosessi, jossa $X_n - X_{n-1}$ kertoo voittoni panostaessani yksikköpanoksen pelihetkellä n. Haluan pelata peliä seuraavanlaisella *strategialla C*.

TOISTA :
Odota, kunnes prosessi X päätyy luvun a alapuolelle.
Tämän jälkeen pelaa yksikköpanos jokaisella pelihetkellä niin kauan, kunnes prosessi X on ensimmäisen kerran luvun b yläpuolella.

Kyseinen strategia C voidaan muotoilla formaalisti:

$$\begin{aligned} C_1 &:= \chi_{\{X_0<a\}} \text{ ja} \\ C_n &:= \chi_{\{C_{n-1}=1\}}\chi_{\{X_{n-1}\leq b\}} + \chi_{\{C_{n-1}=0\}}\chi_{\{X_{n-1}<a\}} \text{ kaikilla } n \geq 2. \end{aligned}$$

Nyt prosessi $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on $\mathcal{F}_{n-1}$ -mitallinen. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa sitä, että strategian C toteutuksessa hetkellä $n \geq 1$ tarvitaan kaikki informaatio hetkeen $n-1$ asti. Merkitään prosessilla Y kokonaisvoittoa strategialla C. Tällöin

$$\begin{aligned} Y_0 &:= 0 \\ Y_n &:= \sum_{1\leq k\leq n} C_k(X_k - X_{k-1}) \text{ kaikilla } n \geq 1. \end{aligned}$$

Usein sanotaan, että prosessi Y on prosessin C *martingaalimuunnos* prosessista X. Seuraavaksi halutaan osoittaa, että prosessi Y on supermartingaali. Koska X on supermartingaali ja C on selvästi rajoitettu prosessi, jolle $C_n \geq 0$ ja C_{n+1} on $\mathcal{F}_n$ -mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ saadaan:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[C_n(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= C_n\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \leq 0.\end{aligned}$$

Lisäksi koska X on supermartingaali ja C on rajoitettu, saadaan tulos

$$\mathbb{E}|Y_n| < \infty \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Y on myös sopiva, sillä X on sopiva ja $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen prosessi Y on supermartingaali. Tämä tarkoittaa lauseen 2.52 nojalla sitä, että

$$\mathbb{E}[Y_n] \leq \mathbb{E}[Y_0] = 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Huomaa, että deterministinen ajanhetki $n \in \mathbb{N}$ on pysäytyshetki minkä tahansa filtraation suhteen. Seuraavasta epäyhtälöstä saadaan haluttu tulos:

$$Y_N(\omega) \geq (b-a)U_N[a,b](\omega) - [X_N(\omega) - a]^-. \tag{2.6}$$

Epäyhtälö on tosi, sillä jokainen välin $[a,b]$ ylitys kasvattaa prosessia Y vähintään arvolla $(b-a)$. Lisäksi pysäytetyllä hetkellä N ja arvolla $[X_N(\omega) - a]^- = \max\{a - X_N(\omega), 0\}$ saadaan suurempi mahdollinen häviö kesken viimeisen ylityksen. Nyt saadaan tietojen (2.6) ja (2.5) avulla, että

$$(b-a)\mathbb{E}[U_N[a,b]] \leq \mathbb{E}[Y_N] + \mathbb{E}[X_N(\omega) - a]^- \leq \mathbb{E}[X_N(\omega) - a]^-. \qquad \square$$

Seuraus 2.55. *Olkoot lemman 2.54 oletukset voimassa. Lisäksi olkoon X rajoitettu avaruudessa $\mathcal{L}^1$, t.s*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Merkitään $U_\infty[a,b](\omega) := \lim_{N\nearrow\infty} U_N[a,b](\omega)$. Tällöin

$$\mathbb{P}(\{\omega \in H : U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}) = 0.$$

Todistus. Nyt saadaan monotonisen konvergenssilauseen avulla, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U_\infty[a,b]] &= \mathbb{E}[\lim_{N\nearrow\infty} U_N[a,b]] \\ &= \lim_{N\nearrow\infty} \mathbb{E}[U_N[a,b]].\end{aligned}$$

Lemman 2.54 nojalla saadaan loput tarvittavat, sillä

$$\begin{aligned}\lim_{N\nearrow\infty} \mathbb{E}[U_N[a,b]] &\leq \lim_{N\nearrow\infty} \frac{1}{b-a}(|a| + \mathbb{E}|X_n|) \\ &\leq \lim_{N\nearrow\infty} \frac{1}{b-a}(|a| + \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{E}|X_n|) \\ &= \frac{1}{b-a}(|a| + \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{E}|X_n|) < \infty,\end{aligned}$$

jolloin on oltava, että

$$\mathbb{P}(\{\omega \in H : U_\infty[a,b](\omega) < \infty\}) = 1. \qquad \square$$

Nyt päästään varsinaisen konvergenssilauseen kimppuun.

LAUSE 2.56 (Doobin suppenemislause). *Olkoon* $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{Z}_+})$ *stokastinen kanta ja* X *supermartingaali, joka on rajoitettu avaruudessa* $\mathcal{L}^1$, *t.s* $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{E}|X_n| < \infty$. *Tällöin*

$$X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n \text{ on olemassa ja äärellistä melkein varmasti.}$$

TODISTUS. Merkitään

$$\begin{aligned}\Lambda &:= \{\omega \in H : X_n(\omega) \text{ ei konvergoidu raja-arvoon}\}\\ &= \{\omega \in H : \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\}\\ &= \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}:a<b} \{\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\}\\ &=: \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}:a<b} \Lambda_{a,b}.\end{aligned}$$

Nyt pätee, että

$$\Lambda_{a,b} \subseteq \{\omega \in H : U_\infty[a,b](\omega) = \infty\},$$

jolloin seurauksen 2.55 nojalla saadaan, että $\mathbb{P}(\Lambda_{a,b}) = 0$. Koska Λ on numeroituva yhdiste nollamittaisista joukoista, saadaan tulos

$$\mathbb{P}(\Lambda) = 0.$$

Tällöin siis

$$\mathbb{P}(\{\omega \in H : \text{ on olemassa } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\}) = \mathbb{P}(\Lambda^c) = 1.$$

Lisäksi lauseen 2.22 avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_\infty| &= \mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} |X_n|\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|\\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{E}|X_n| < \infty,\end{aligned}$$

sillä X on rajoitettu avaruudessa $\mathcal{L}^1$. Tällöin

$$\mathbb{P}(X_\infty < \infty) = 1. \qquad \square$$

LUKU 3

Jatkuva-aikainen satunnaisliike

3.1. Brownin liike

Kaksiulotteisen Brownin liikkeen huomasi ensimmäisten joukossa skotlantilainen Robert Brown tutkiessaan siitepölyn leviämistä vedessä vuonna 1828. Myöhemmin noin vuonna 1900 ranskalainen Louis Bachelier käytti 1-ulotteista Brownin liikettä mallintaessaan rahoitusmarkinoita, ja vuonna 1905 Albert Einstein käytti Brownin liikettä omissa tutkimuksissaan. Ensimmäisen matemaattisen todistuksen Brownin liikkeen olemassaololle teki Norbert Wiener vuonna 1921. Tämän vuoksi Brownin liikettä kutsutaan myös usein Wiener prosessiksi. Brownin liikkeen olemassaolon voi todistaa monella eri tavalla. Käytetään tämän kappaleen alkuosan päälähteenä Stefan Geissin luentomuistiinpanoja [**10**].

Ennen varsinaista Brownin liikkeen määritelmää tarvitaan normaalijakautuneen satunnaismuuttujan määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Satunnaismuuttujan $X : H \to \mathbb{R}$ jakauma on normaali, jos

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

kaikille Borel-joukoille $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, jossa parametrit $m \in \mathbb{R}$ on satunnaismuuttujan X *odotusarvo* ja $\sigma^2 > 0$ on *varianssi*. Tällöin merkitään, että $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Satunnaismuuttujan $X = (X_1, \ldots, X_n) : H \to \mathbb{R}^n, n \geq 2$, jakauma on normaali, jos

$$\langle a, X(\omega) \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i X_i(\omega) \in \mathbb{R}$$

on normaalijakautunut kaikilla $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin *odotusarvovektori* on $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) := (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$ ja *kovarianssimatriisi* on $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$, jossa $\sigma_{ij} := \mathbb{E}(X_i - m_i)(X_j - m_j)$. Lisäksi määritellään, että vakiofunktio on normaalijakautunut satunnaismuuttuja. Tällöin siis jos on olemassa $m \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\mathbb{P}(X = m) = 1$, niin satunnaismuuttuja X on normaalijakautunut.

LAUSE 3.2. *On olemassa todennäköisyysavaruus $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, filtraatio $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ja prosessi $B = (B_t)_{t\geq 0}$, jolle $B_0 \equiv 0$ ja jolle pätee*

(*i*) *$(B_t)_{t\geq 0}$ on sopiva filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen,*
(*ii*) *kaikille $0 \leq s < t < \infty$ satunnaismuuttuja $B_t - B_s$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$,*
(*iii*) *kaikille $0 \leq s < t < \infty$ satunnaismuuttuja $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ ja*
(*iv*) *$t \mapsto B_t(\omega)$ on jatkuva melkein kaikilla $\omega \in H$.*

MÄÄRITELMÄ 3.3. Lauseen 3.2 mukainen prosessi on nimeltään 1-ulotteinen *standardi* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *-Brownin liike.*

Standardin Brownin liikkeen voi myös määritellä ilman filtraatiota. Terminologia menee siten, että jos on käytössä filtraatio $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, puhutaan standardista $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -Brownin liikkeestä. Jos filtraatiota ei ole käytössä, käytetään termiä standardi Brownin liike. Käytännössä sovellusten kannalta on lähes aina käytettävä Brownin liikettä filtraation kanssa. Sanaa standardi käytetään aina silloin, kun halutaan korostaa, että Brownin liike (filtraatiolla tai ilman) lähtee liikkeelle origosta. Jos Brownin liike lähtee liikkeelle jostakin muusta pisteestä, ei käytetä termiä standardi.

MÄÄRITELMÄ 3.4. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $B = (B_t)_{t\geq 0}$ stokastinen prosessi. Prosessi B on standardi Brownin liike, jos $B_0 \equiv 0$ ja

(i) kaikille $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq s \leq t < \infty$ ja kaikille $A, A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$
$$\mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{s_k} \in A_k, B_t - B_s \in A)$$
$$= \mathbb{P}(B_{s_1} \in A_1, \ldots, B_{s_k} \in A_k)\mathbb{P}(B_t - B_s \in A),$$

(ii) kaikille $0 \leq s < t < \infty$ pätee $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ ja

(iii) $t \mapsto B_t(\omega)$ on jatkuva melkein kaikilla $\omega \in H$.

On tärkeää huomata määritelmien 3.3 ja 3.4 erot. Ainoat eroavaisuudet tulevat riippumattomuus- ja mitallisuuskysymyksissä. Todistetaan lause 3.2 seuraavasti: Osoitetaan ensiksi Kolmogorovin laajennuslauseen avulla todennäköisyysmitan $\mathbb{P}$ olemassaolo. Tämän jälkeen osoitetaan Brownin liikkeen jatkuvuus toisella Kolmogorovin kuuluisalla lauseella. Näin ollaan saatu osoitettua standardin Brownin liikkeen olemassaolo. Tämän jälkeen etsitään sopiva filtraatio, jonka avulla päästään haluttuun lopputulokseen.

Esimerkissä 2.38 näytettiin, että todennäköisyysjakaumien perhe $(\mu_{t_1,\ldots,t_k})_{t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{T}}$, jossa

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(A)$$
$$= \int_{A_k} \cdots \int_{A_1} g(x_{t_1}, t_1|0)g(x_{t_2}, t_2 - t_1|x_{t_1}) \cdots g(x_{t_k}, t_k - t_{k-1}|x_{t_k-1})dx_{t_1}dx_{t_2} \cdots dx_{t_k}$$

kaikilla $A = A_1 \times \cdots \times A_k$, $A_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, joissa $k = 1, 2, \ldots$, on konsistentti. Tällöin Kolmogorovin laajennuslause antaa, että on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ tapahtuma-avaruudessa $\left(\mathbb{R}^{[0,\infty[}, \sigma\left(\mathbb{R}^{[0,\infty[}\right)\right)$ siten, että
$$\mathbb{P}((Y_t)_{t\geq 0} : (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k}) \in A) = \mu_{t_1,\ldots,t_k}(A)$$
kaikilla $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{T}$ ja $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{k\times n})$. Asetetaan $B_t : \mathbb{R}^{[0,\infty[} \to \mathbb{R}$, $B_t((Y_t)_{t\geq 0}) := Y_t$ kaikilla $t \geq 0$. Näin ollaan osoitettu standardin Brownin liikkeen todennäköisyysavaruuden $\left(\mathbb{R}^{[0,\infty[}, \sigma\left(\mathbb{R}^{[0,\infty[}\right), \mathbb{P}\right)$ olemassaolo. Jäljellä on vielä jatkuvuus. Se, että Brownin liikkeen äärellisulotteiset jakaumat sallivat Brownin liikkeen polkujen jatkuvuuden, on hyvin epätriviaali tulos.

LAUSE 3.5 (Kolmogorov). *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja X stokastinen prosessi, jolle jollakin $p \in [1, \infty[$ on olemassa $c, \epsilon > 0$ siten, että*
$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \leq c|t - s|^{1+\epsilon}$$

kaikilla $t, s \geq 0$. Tällöin jokaisella polulla $\omega \in H$ on olemassa prosessi $\tilde{X} = \big(\tilde{X}_t(\omega)\big)_{t\geq 0}$ siten, että prosessi $\tilde{X}$ on jatkuva ja

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$$

kaikilla $t \geq 0$.

TODISTUS. Katso Stefan Geissin teoksesta [**10**, s.22-25]. $\square$

Brownin liikkeen jatkuvuutta varten tarvitaan vielä seuraava tärkeä normaalijakautuneen satunnaismuuttujan ominaisuus.

LEMMA 3.6. *Olkoon B standardi Brownin liike. Tällöin kaikilla $a > b > 0$ satunnaismuuttujat B_{a-b} ja $B_a - B_b$ ovat samoin jakautuneet. Tarkemmin sanoen*

$$B_{a-b} \sim \mathcal{N}(0, a-b) \text{ ja } B_a - B_b \sim \mathcal{N}(0, a-b).$$

TODISTUS. Olkoon $a > b > 0$. Riittää osoittaa, että $B_a - B_b \sim \mathcal{N}(0, a-b)$. Koska $a > b$, niin on olemassa $h > 0$ siten, että $a = b + h$. Koska Brownin liikkeen lisäykset ovat normaalijakautuneita, saadaan, että satunnaismuuttuja $B_{b+h} - B_b$ on myös normaalijakautunut. Normaalijakautunut satunnaismuuttuja määräytyy täysin odotusarvon ja varianssin mukaan. Koska $\mathbb{E}[B_a - B_b] = 0$ selvästi, riittää osoittaa, että $\mathbb{E}[B_a - B_b]^2 = a - b$. Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_a - B_b]^2 &= \mathbb{E}[B_a]^2 + \mathbb{E}[B_b]^2 - 2\mathbb{E}[B_a B_b] = a + b - 2(\mathbb{E}[B_b(B_a - B_b)] + \mathbb{E}[B_b]^2)\\ &= a + b - 2(\mathbb{E}[B_b]\mathbb{E}[B_a - B_b]) + b) = a - b.\end{aligned}$$

$\square$

LAUSE 3.7. *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja prosessi B standardi Brownin liike. Tällöin jokaisella polulla $\omega \in H$ on olemassa prosessi $\tilde{B} = \big(\tilde{B}_t(\omega)\big)_{t\geq 0}$ siten, että prosessi $\tilde{B}$ on jatkuva ja*

$$\mathbb{P}(\tilde{B}_t = B_t) = 1$$

kaikilla $t \geq 0$.

TODISTUS. Olkoon $T > 0$ ja määritellään $X_t := B_{tT}$ kaikille $t \in [0, 1]$. Kiinnitetään $p \in]2, \infty[$ ja olkoon $\epsilon := \frac{p}{2} - 1$. Lemman 3.6 avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t - X_s|^p &= \mathbb{E}|B_{tT} - B_{sT}|^p\\ &= \mathbb{E}|B_{(t-s)T}|^p\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)T}} \int_{\mathbb{R}} |x|^p e^{-\frac{x^2}{2(t-s)T}} dx.\end{aligned}$$

Integraalilaskennan muuttujanvaihtokaavan avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)T}} \int_{\mathbb{R}} |x|^p e^{-\frac{x^2}{2(t-s)T}} dx &= ((t-s)T)^{\frac{p}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^p e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\gamma_p < \infty}\\ &= \gamma_p (t-s)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p}{2}}\\ &\leq \gamma_p T^{\frac{p}{2}} (t-s)^{1+\epsilon}.\end{aligned}$$

Nyt lauseen 3.5 nojalla on olemassa prosessi $\tilde{X} = \big(\tilde{X}_t(\omega)\big)_{t\in[0,1]}$ siten, että prosessi $\tilde{X}$ on jatkuva ja

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1$$

kaikilla $t \in [0,1]$. Parametrista $T > 0$ päästään eroon, kun ylläoleva tehdään iteratiivisesti kaikilla väleillä. Tämän teknisen pyörityksen voi lukea teoksesta [**10**, s. 23]. □

Brownin liike on siis jatkuva melkein kaikilla poluilla $\omega \in H$. Jatkossa ei välttämättä aina mainita sanoja "melkein kaikilla", vaan puhutaan pelkästään jatkuvuudesta. Tällöin ajatellaan, että käytössä on aina polun ekvivalenssiluokan jatkuva edustaja. Haluttu filtraatio löytyy erittäin "luonnollisesti".

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $B = (B_t)_{t \geq 0}$ standardi Brownin liike. Luonnollinen filtraatio on $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$, jossa

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma(B_s : s \in [0,t])$$

kaikilla $t \geq 0$ on pienin σ-algebra, joka sisältää joukot

$$\{\omega \in H : B_s(\omega) \in A\}$$

kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ja $s \in [0,t]$. Luonnollinen filtraatio on siis pienin kasvava jono σ-algebroja, jonka suhteen prosessi B on sopiva. Kasvatetaan luonnollista filtraatiota jokaisella ajanhetkellä $t \geq 0$ seuraavasti:

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^B$$

kaikilla $t \geq 0$. Näin ollen saadaan oikealta jatkuva filtraatio, jota merkitään merkillä $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Standardin Brownin liikkeen lisäysten riippumattomuus johtaa siihen, että $B_t - B_s$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s^B$ kaikilla $t > s \geq 0$. Koska Brownin liike on jatkuva, riippumattomuus toimii myös oikealta jatkuvan filtraation suhteen, kuten lauseen 3.14 todistuksessa tullaan näkemään.

Brownin liike yleistyy helposti useampaan ulottuvuuteen. Tästä eteenpäin tämän kappaleen päälähteenä toimii Peter Mörtersin ja Yuval Peresin kirja [**20**].

MÄÄRITELMÄ 3.9. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja olkoot $B^1, \ldots, B^n$ n kappaletta toisistaan riippumattomia standardeja Brownin liikkeitä. Tällöin prosessi

$$\mathbf{B} := (B_t)_{t \geq 0} = ((B_t^1, \ldots, B_t^n))_{t \geq 0}$$

on n-ulotteinen standardi Brownin liike, joka lähtee liikkeelle origosta.

Brownin liikkeen filtraatio on useammassa ulottuvuudessa jälleen hyvin "luonnollinen".

MÄÄRITELMÄ 3.10. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\mathbf{B} = (B_t)_{t \geq 0}$ standardi n-ulotteinen Brownin liike. Luonnollinen filtraatio on $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t \geq 0}$, jossa

$$\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}} := \sigma(B_s : s \in [0,t])$$

kaikilla $t \geq 0$ on pienin σ-algebra, joka sisältää joukot

$$\{\omega \in H : B_s(\omega) \in A\}$$

kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ja $s \in [0,t]$. Kun luonnollista filtraatiota kasvatetaan vastaavasti kuin yksiulotteisessa tapauksessa, saadaan haluttu filtraatio. Tätä filtraatiota merkitään merkillä $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Huomautus 3.11. Brownin liikkeen merkinnässä tummennus korostaa sitä, että kyseessä on n-ulotteinen Brownin liike. Kuten muistetaan, termi standardi Brownin liike on varattu tilanteeseen, jossa lähtöpiste on origo. Brownin liikkeellä voi olla lähtöpisteenä $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin myös todennäköisyysavaruuden todennäköisyysmittaa merkitään merkillä $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}$. Lisäksi kannattaa huomioida se, että lähtöpiste x ei vaikuta mahdolliseen filtraatioon $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Huomautus 3.12. Standardin n-ulotteisen Brownin liikkeen $\mathbf{B}$ lisäykset ovat n-ulotteisia normaalijakaumia kiinteillä aika-arvoilla. Koska $B_0 = 0$, niin nyt kaikilla $t > 0$, B_t on n-ulotteinen normaalijakauma, jonka odotusarvovektori on $\mathbf{0}$ ja kovarianssimatriisi on $diag(t, \ldots, t)$, koska $cov(B^i, B^j) = \mathbb{E}[B^i B^j] = 0$ riippumattomuuden nojalla kaikilla $i \neq j$. On tärkeää huomata, että jo ulottuvuudessa $n = 1$, $cov(B_s, B_t) = \min\{s, t\} \neq 0$ kaikilla $s, t > 0$. Tämä johtuu siitä, että kaikilla $t > s > 0$

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s]^2 = \mathbb{E}[B_s]\mathbb{E}[B_t - B_s] + s = s.$$

Seuraava Brownin liikkeen ominaisuus on hyödyllinen, ja kyseistä ominaisuutta käytetäänkin useasti tässä työssä.

LEMMA 3.13. *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja olkoon $\boldsymbol{B}$ n-ulotteinen standardi Brownin liike. Olkoon $a > 0$. Tällöin stokastinen prosessi*

$$X_t := \frac{1}{a} B_{a^2 t} \text{ kaikilla } t \geq 0$$

on myös standardi Brownin liike.

TODISTUS. Todistetaan lemma ulottuvuudessa $n = 1$, koska muiden ulottuvuuksien tapaukset seuraavat tästä suoraan samoilla argumenteilla. Prosessin X jatkuvuus ja tarvittava riippumattomuus tulevat suoraan standardista Brownin liikkeestä B, sillä skaalaus ei vaikuta kyseisiin ominaisuuksiin. Satunnaismuuttuja $X_t - X_s$ on normaalijakautunut kaikilla $t, s \geq 0$, koska $B_t - B_s$ on normaalijakautunut, ja vakiolla kerrottu normaalijakautunut satunnaismuuttuja on myös normaalijakautunut. Lisäksi kaikilla $t, s \geq 0$ satunnaismuuttujan $X_t - X_s$ odotusarvo on

$$\mathbb{E}[X_t - X_s] = \frac{1}{a}(\mathbb{E}B_{a^2 t} - \mathbb{E}B_{a^2 s}) = 0$$

ja varianssi on

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t - X_s]^2 - (\mathbb{E}[X_t - X_s])^2 &= \frac{1}{a^2}\mathbb{E}[B_{a^2 t} - B_{a^2 s}]^2 - 0 \\ &= \frac{1}{a^2}(a^2 t - a^2 s) = t - s.\end{aligned}$$

Normaalijakautunut satunnaismuuttuja määräytyy täysin odotusarvon ja varianssin mukaan. Tämä tarkoittaa sitä, että $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, joten väite pätee. □

Tiedetään, että Brownin liikkeen filtraatio on oikealta jatkuva määritelmän 2.45 mielessä. Oikealta jatkuvuuden yksi suurimmista hyödyistä Brownin liikkeelle tulee lauseesta 2.46. Tällöin ensimmäiset osumisajankohdat ovat aina pysäytyshetkiä filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen. Seuraava tulos on *Blumenthalin 0-1* laki.

LAUSE 3.14 (Blumenthalin 0-1 laki). *Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$ ja $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ todennäköisyysavaruus. Olkoon $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ pisteestä x lähteneen n-ulotteisen Brownin liikkeen $\boldsymbol{B}$ virittämä nollamittaiset joukot sisältävä luonnollinen filtraatio. Olkoon $A \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^+$. Tällöin*

$$\mathbb{P}_x(A) \in \{0, 1\}.$$

TODISTUS. Olkoon $s > 0$ ja olkoon $\mathbf{B}$ pisteestä x lähtenyt n-ulotteinen Brownin liike. Nyt prosessi $\tilde{\mathbf{B}} := (\tilde{B}_t)_{t\geq 0} := (B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ on standardi Brownin liike. Tämä johtuu siitä, että prosessin $\tilde{\mathbf{B}}$ jatkuvuus- ja riippumattomuusvaatimukset pätevät selvästi, ja myös prosessin $\tilde{\mathbf{B}}$ lisäykset ovat normaalijakautuneita. Lisäksi on helppo näyttää kuten lemmassa 3.6, että kun $n = 1$, prosessin $\tilde{B}_h - \tilde{B}_q$ odotusarvo on 0 ja varianssi on $h - q$ kaikilla $h > q \geq 0$. Vastaavasti useampaan ulottuvuuteen saadaan odotusarvovektoriksi $\mathbf{0}$ ja kovarianssimatriisiksi $diag(h - q, \ldots, h - q)$. Olkoon $k = 1, 2, \ldots$ ja olkoot $t_1, t_2, \ldots, t_k \geq 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_k \geq 0$ ja $A, C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n\times k})$. Nyt Brownin liikkeen lisäysten riippumattomuus antaa, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((B_{t_1}, \ldots, B_{t_k}) \in A, (\tilde{B}_{p_1}, \ldots, \tilde{B}_{p_k}) \in C) \\
&= \mathbb{P}((B_{t_1}, \ldots, B_{t_k}) \in A)\mathbb{P}((\tilde{B}_{p_1}, \ldots, \tilde{B}_{p_k}) \in C).
\end{aligned}$$

Näin ollen prosessit $\mathbf{B}$ ja $\tilde{\mathbf{B}}$ ovat riippumattomia. Tätä ominaisuutta sanotaan Brownin liikkeen *Markovin* ominaisuudeksi. Prosessien $\mathbf{B}$ ja $\tilde{\mathbf{B}}$ riippumattomuus antaa suoraan, että prosessi $\tilde{\mathbf{B}}$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s^B$, joka on Brownin liikkeen luonnollinen filtraatio ilman nollamittaisten joukkojen osajoukkojen lisäämistä. Halutaan, että prosessi $\tilde{\mathbf{B}}$ on riippumaton myös σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$, joka on oikealta jatkuva hieman kasvatettu filtraatio. Tämä on totta, koska Brownin liike on jatkuva melkein kaikilla poluilla. Oletetaan nyt, että $s \geq 0$.

Olkoot $s_1, s_2, \ldots$ laskeva jono ajanhetkiä siten, että $s = \lim_{j\to\infty} s_j$. Brownin liikkeen jatkuvuus antaa, että $B_{t+s} - B_s = \lim_{j\to\infty} B_{t+s_j} - \lim_{j\to\infty} B_{s_j}$ melkein kaikilla $\omega \in H$. Nyt Markovin ominaisuuden nojalla kaikilla $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ vektori

$$(B_{t_1 - s_j} - B_{s_j}, \ldots, B_{t_m + s_j} - B_{s_j})$$

on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_{s_j}^B \supset \mathcal{F}_s^+ = \mathcal{F}_s$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$. Olkoot $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{m\times n})$ ja $E \in \mathcal{F}_s$. Brownin liikkeen jatkuvuuden, dominoidun konvergenssilauseen ja Markovin ominaisuuden nojalla saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}((B_{t_1+s} - B_s, \ldots, B_{t_m+s} - B_s) \in C, E) \\
&= \mathbb{E}\Big[\lim_{j\to\infty} \chi_{\{(B_{t_1-s_j} - B_{s_j}, \ldots, B_{t_m+s_j} - B_{s_j}) \in C, E)\}}\Big] \\
&= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\big[\chi_{\{(B_{t_1-s_j} - B_{s_j}, \ldots, B_{t_m+s_j} - B_{s_j}) \in C, E)\}}\big] \\
&= \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}((B_{t_1-s_j} - B_{s_j}, \ldots, B_{t_m+s_j} - B_{s_j}) \in C)\mathbb{P}(E) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\Big[\chi_{\{(B_{t_1-s_j} - B_{s_j}, \ldots, B_{t_m+s_j} - B_{s_j}) \in C\}} \chi_E\Big] \\
&= \mathbb{P}((B_{t_1+s} - B_s, \ldots, B_{t_m+s} - B_s) \in C)\mathbb{P}(E).
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa sitä, että prosessi $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$.

Koska $A \in \mathcal{F}_0$ ja $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ on filtraatio, niin $A \in \mathcal{F}_{t^*}$ jollekin $t^* > 0$. Valitaan $s = 0$. Nyt aikaisemman nojalla A on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_0$. Koska $A \in \mathcal{F}_0$, niin tämä tarkoittaa sitä, että A on riippumaton itsestään. Tällöin

$$\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}_x(A \cap A) = \mathbb{P}_x(A)\mathbb{P}_x(A),$$

joten väite pätee. $\square$

Edellisen lauseen yhteydessä tuli esille Brownin liikkeen Markovin ominaisuus. Tämä tarkoitti sitä, että jos $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -Brownin liike pysäytetään millä tahansa deterministisellä ajanhetkellä $s \geq 0$, niin "uudelleen käynnistetty" prosessi $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{B})_{t\geq 0} = (B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ on myös Brownin liike, joka on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_s$. Heuristisesti tämä tarkoittaa sitä, että Brownin liike $\mathbf{B}$ hetkellä $s \geq 0$ "tietää" ainostaan arvon $B_s(\omega)$, mutta "ei muista", miten prosessi päätyi kyseiseen arvoon. Sama ominaisuus pätee myös pysäytyshetkiin, sillä $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -Brownin liikkeellä on *vahva Markovin* ominaisuus.

LAUSE 3.15 (Vahva Markovin ominaisuus). *Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyysavaruus ja $\boldsymbol{B}$ n-ulotteinen $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -Brownin liike, joka lähtee liikkeelle pisteestä $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikille melkein varmasti äärellisille pysäytyshetkille τ, jotka ovat pysäytyshetkiä filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen, pätee seuraavaa:*

$$(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t\geq 0}$$

on Brownin liike, joka on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_\tau$ ja joka lähtee origosta.

TODISTUS. Riittää todistaa väite tilanteessa $x = 0$. Koska filtraatio $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ on oikealta jatkuva, niin $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\tau^+ := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+ \text{ kaikilla } t \geq 0\}$. Olkoon τ mielivaltainen pysäytyshetki, joka on melkein varmasti äärellistä. Osoitetaan väite ensiksi pysäytyshetkille τ_k, jotka diskreetisti approksimoivat pysäytyshetkeä τ ylhäältä päin. Approksimointi toimii, jos esimerkiksi

$$\tau_k := (m+1)2^{-k}, \text{ kun } m2^{-k} \leq \tau < (m+1)2^{-k}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tämä tarkoittaa sitä, että τ_k pysäyttää prosessin korkeintaan 2^{-k} verran hetken τ jälkeen kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Huomaa, että τ_k on todella pysäytyshetki kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Prosessi $\mathbf{B}^s$ on myös standardi Brownin liike, kun

$$B_t^s := B_{t+\frac{s}{2^k}} - B_{\frac{s}{2^k}}$$

kaikilla $t \geq 0$ ja $s > 0$. Määritellään myös prosessi $\mathbf{B}^*$ siten, että kaikilla $t \geq 0$

$$B_t^* := B_{t+\tau_k} - B_{\tau_k}.$$

Olkoot $p_1, p_2, \ldots, p_l \in [0, \infty[$ ajanhetkiä jollekin $l = 1, 2, \ldots$. Merkitään, että tapahtuma $\{\mathbf{B}^s \in A\} := \{(B_{p_1}^s, B_{p_2}^s, \ldots, B_{p_l}^s) \in A\}$ jollekin $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{n\times l})$. Olkoon $E \in \mathcal{F}_{\tau_k}^+$. Nyt Markovin ominaisuuden nojalla tapahtuma $\{\mathbf{B}^s \in A\}$ on riippumaton tapahtumasta $E \cap \{\tau_k = s2^{-k}\} \in \mathcal{F}_{s2^{-k}}^+$ kaikilla $s > 0$. Tiedetään, että $\mathbf{B}^s$ on standardi Brownin liike kaikilla $s > 0$, jolloin prosessin $\mathbf{B}^s$ äärellisulotteiset jakaumat ovat samat kuin prosessin $\mathbf{B}$. Lisäksi todennäköisyysavaruuden perusjoukko H voidaan jakaa erillisiiin paloihin siten, että $H = \bigcup_{s=0}^{\infty}\{\tau_k = s2^{-k}\}$. Edellisten tietojen nojalla saadaan, että

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\mathbf{B}^* \in A\} \cap E) &= \mathbb{P}(\{\mathbf{B}^* \in A\} \cap E \cap \bigcup_{s=0}^{\infty} \{\tau_k = s2^{-k}\}) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\mathbf{B}^s \in A\} \cap E \cap \{\tau_k = s2^{-k}\}) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\mathbf{B}^s \in A\}) \mathbb{P}(E \cap \{\tau_k = s2^{-k}\}).
\end{aligned}
$$

Kuten jo mainittiin, $\mathbb{P}\{\mathbf{B}^s \in A\} = \mathbb{P}\{\mathbf{B} \in A\}$ ei riipu parametrista s, jolloin saadaan

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{\mathbf{B}^s \in A\}) \mathbb{P}(E \cap \{\tau_k = s2^{-k}\}) &= \mathbb{P}\{\mathbf{B} \in A\} \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}(E \cap \{\tau_k = s2^{-k}\}) \\
&= \mathbb{P}\{\mathbf{B} \in A\} \mathbb{P}(E) \\
&= \mathbb{P}\{\mathbf{B}^* \in A\} \mathbb{P}(E).
\end{aligned}
$$

Tämä tarkoittaa sitä, että prosessi $\mathbf{B}^*$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}^+_{\tau_k}$. Prosessi $\mathbf{B}^*$ täyttää standardin Brownin liikkeen määritelmän, joten väite on todistettu jokaiselle pysäytyshetkelle τ_k, sillä $k \in \mathbb{N}$ valittiin mielivaltaisesti. Jäljelle jää vielä osoittaa, että sama toimii pysäytyshetkellä τ. Tiedetään, että $\tau_k \downarrow \tau$, kun $k \to \infty$. Nyt siis $\mathbf{B}^*$ on standardi Brownin liike, joka on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}^+_{\tau_k}$ ja $\mathcal{F}^+_{\tau} \subset \mathcal{F}^+_{\tau_k}$. Kuten aina aikaisemminkin, prosessi $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t \geq 0}$ on standardi Brownin liike, koska kyseinen prosessi täyttää määritelmän kriteerit. Brownin liikkeen jatkuvuus antaa, että pysäytyshetkien τ_k rajalla τ prosessi $(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t \geq 0}$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}^+_{\tau}$. □

Huomautus 3.16. Brownin liikkeellä on siis vahva Markovin ominaisuus. Näin ollen Brownin liikkeen oikealta jatkuva filtraatio voidaan konstruoida siten, että luonnolliseen filtraatioon lisätään nollamittaisten joukkojen osajoukot (katso Ioannis Karatzasin ja Steven Shreven kirjasta [**14**, s. 90-91]).

Brownin liikkeen Markovin ominaisuus johtaa siihen, että Brownin liike on *Markovin prosessi.* Määritetään ensiksi, mikä on Markovin prosessi.

MÄÄRITELMÄ 3.17. Olkoon $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ stokastinen kanta ja $\mathbf{X}$ stokastinen prosessi. Funktio $p : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ on *siirtymäydin (transition kernel)*, jos

(*i*) $(t, x) \mapsto p(t, x, A)$ on mitallinen funktio kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

(*ii*) $p(t, x, \cdot)$ on todennäköisyysmitta joukossa $\mathbb{R}^n$ kaikilla $t \geq 0$ ja $x \in \mathbb{R}^n$.

(*iii*) kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$ ja $t, s > 0$ pätee

$$
p(t+s, x, A) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t, y, A) p(s, x, dy).
$$

Ehto (i) tarkoittaa sitä, että kun on kiinnitetty $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ja $K \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, niin

$$
\{(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n : p(t, x, A) \in K\} \in \mathfrak{B}([0, \infty)) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n).
$$

Stokastinen prosessi $\mathbf{X}$ on jatkuva-aikainen Markovin prosessi siirtymäytimen p ja filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ suhteen, jos $\mathbf{X}$ on sopiva ja kaikilla $t \geq s$ ja $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ pätee

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\mathcal{F}_s) := \mathbb{E}[\chi_{\{X_t \in A\}}|\mathcal{F}_s] = p(t-s, X_s, A).$$

Huomaa, että $p(t,x,A)$ on todennäköisyys, että prosessi osuu joukkoon A hetkellä t, kun prosessi on lähtenyt liikkeelle pisteestä x.

Esimerkki 3.18. Yksiulotteinen Brownin liike on Markovin prosessi, jonka siirtymäydin $p(t,x,\cdot)$ on normaalijakauma odotusarvolla x ja varianssilla t. Vastaavasti n-ulotteinen Brownin liike on Markovin prosessi, jonka siirtymäydin on n-ulotteinen normaalijakauma odotusarvovektorilla $\mathbf{m}$ ja kovarianssimatriisilla *diag*$(t,\dots,t)$. Normaalijakauma täyttää siirtymäytimen ehdon (ii) selvästi. Ehto (i) täyttyy jatkuvuuden nojalla parametrien (t,x) suhteen. Lisäksi siirtymäytimen ehto (iii) toteutuu, koska kahden normaalijakautuneen satunnaismuuttujan summa on myös normaalijakautunut. Huomaa, että $p(t-s, B_s, A)$ on satunnaismuuttuja kaikilla $t \geq s$ ja $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Ehdollisen odotusarvon kolme ehtoa on täytyttävä. Rajoittuneisuus on täysin selvää. Satunnaismuuttuja $p(t-s, B_s, A)$ on $\mathcal{F}_s$ -mitallinen, koska

$$x \mapsto p(t-s, x, A)$$

on *alhaalta puolijatkuva* Fatou'n lemman eli lauseen 2.22 nojalla ja koska Brownin liike on sopiva, jolloin yhdistetty kuvaus on mitallinen. Funktio f on alhaalta puolijatkuva pisteessä $s \in \mathbb{R}^n$, jos

$$\liminf_{y\to s} f(y) \geq f(s).$$

Puolijatkuvia funktioita tutkitaan tarkemmin myöhemmin tässä työssä. Loput tarvittavat ominaisuudet seuraavat suoraan Brownin liikkeen Markovin ominaisuudesta. Muistetaan, että n-ulotteisen Brownin liikkeen koordinaattiprosessit ovat yksiulotteisia Brownin liikkeitä, jotka ovat riippumattomia toisistaan. Riippumattomuus ja yksiulotteisen Brownin liikkeen todennäköisyysjakauma johtavat siihen, että n-ulotteisen Brownin liikkeen siirtymäydin on

$$\begin{aligned}
p(t,x,A) &= \mathbb{P}_x(B_t \in A) \\
&= \mathbb{P}_x((B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n) \in A) \\
&= \mathbb{P}_x(B_t^1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}_x(B_t^n \in A_n) \\
&= \int_{A_1} (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2t}} dy_1 \cdots \int_{A_n} (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(y_n-x_n)^2}{2t}} dy_n \\
&= \int_A (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{2t}\Big) dy
\end{aligned}$$

kaikilla $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ ja $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Merkitään tästä eteenpäin, että

$$\mathfrak{p}(t,x,y) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{2t}\Big),$$

jolloin $p(t,x,A) = \int_A \mathfrak{p}(t,x,y)\, dy$.

Ulottuvuudessa $n \geq 2$ yksittäiset pisteet ovat *polaarisia* Brownin liikkeelle.

LAUSE 3.19. *Olkoot $n \geq 2$ ja $\boldsymbol{B}$ n-ulotteinen Brownin liike, joka lähtee liikkeelle pisteestä $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$\mathbb{P}_x(B_t \in \{y\} \text{ jollekin } t > 0) = 0$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}^n$.

TODISTUS. Katso Peter Mörtersin ja Yuval Peresin kirjasta [**20**, s. 47]. □

3.2. Stokastinen integraali ja Itôn kaava

Tämän kappaleen päälähteinä toimivat Lawrence Evansin teos [**7**] ja Stefan Geissin teos [**10**]. Edellisessä kappaleessa osoitettiin Brownin liikkeen B olemassaolo ja tutkittiin sen ominaisuuksia. Seuraavaksi haluttaisiin tietää, miten kannattaa määritellä *stokastinen integraali*

$$\int_0^T G \, dB \tag{3.1}$$

tietyntyyppisille stokastisille prosesseille G. Ensimmäinen huomionarvoinen asia on se, että (3.1) tulee olemaan stokastinen prosessi. Stokastisen integraalin (3.1) voi määritellä eri tavoilla. Yleisimmät tavat ovat *Itôn integraali* ja *Stratonovichin integraali*. Molemmissa tavoissa on puolensa, mutta käytetään tässä työssä tutumpaa Itôn integraalia. Oleellinen lähtökohta määritelmässä on stokastisen integraalin arviointi *Riemannin summilla*. Tämän jälkeen pyritään saamaan haluttu tulos rajalla mikäli mahdollista. Oleellinen kysymys liittyy aikavälin $[0, T]$ ositukseen ja siihen, mikä prosessin G arvo otetaan huomioon jokaisessa osituksessa. Jos valitaan, että prosessin G arvo saadaan osituksen ensimmäisen ajan arvolla jokaisessa ositteessa, päästään tunnettuun Itôn integraaliin. Sen sijaan prosessin G arvon valinta osituksen keskimmäisellä ajalla jokaisessa ositteessa johtaisi Stratonovichin integraaliin. Stokastisessa integroinnissa satunnaisen stokastisen prosessin arvon valinnalla jokaisessa ositteessa on siis väliä. Huomionarvoista on se, että klassiselle Riemann integroituvalle funktiolle ei ole väliä, mikä funktion arvo otetaan huomioon jokaisessa ositteessa, sillä ositteiden välinpituuksien lyhentyessä päästään lopulta aina samaan lopputulokseen. Stokastisesta prosessista G pitää olettaa, että se on progressiivisesti mitallinen. Tällöin saadaan stokastinen integraali (3.1) toimimaan halutulla tavalla.

Kiinnitetään stokastinen kanta $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ja yksiulotteinen standardi $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ Brownin liike B. Olkoon $T \geq 0$. Aloitetaan seuraavalla määritelmällä.

MÄÄRITELMÄ 3.20. Avaruus $\mathcal{L}^2(0, T)$ sisältää kaikki reaaliarvoiset ja progressiivisesti mitalliset stokastiset prosessit G, joille

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T G_t^2 \, dt\Big] < \infty.$$

Määritellään stokastinen integraali ensiksi *yksinkertaisille* prosesseille.

MÄÄRITELMÄ 3.21. Prosessi $G \in \mathcal{L}^2(0, T)$ on yksinkertainen, jos on olemassa joukon $[0, T]$ ositus

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T\}$$

siten, että

$$G_t(\omega) = G_k(\omega), \quad \text{kun } t_k \leq t < t_{k+1} \ (k = 0, \ldots, m-1).$$

Huomautus 3.22. Määritelmän 3.21 G_k on $\mathcal{F}_{t_k}$ -mitallinen satunnaismuuttuja, koska G on progressiivisesti mitallinen.

MÄÄRITELMÄ 3.23. Olkoon $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$ yksinkertainen prosessi. Tällöin

$$\int_0^T G\ dB := \sum_{k=0}^{m-1} G_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

on prossesin G stokastinen integraali.

Yksinkertaisten prosessien stokastisella integraalilla on seuraavat ominaisuudet.

LEMMA 3.24. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $G, H \in \mathcal{L}^2(0,T)$ yksinkertaisia prosesseja. Tällöin*

$$(i)\ \int_0^T aG + bH\ dB = a\int_0^T G\ dB + b\int_0^T H\ dB,$$

$$(ii)\ \mathbb{E}\Big[\int_0^T G\ dB\Big] = 0 \text{ ja}$$

$$(iii)\ \mathbb{E}\Big[\int_0^T G\ dB\Big]^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^T G_t^2\ dt\Big].$$

TODISTUS. Kohta (i) tulee suoraan määritelmistä. Todistetaan kohta (ii). Koska G on yksinkertainen prosessi, se on muotoa $G_t = G_k$ kun $t_k \le t < t_{k+1}$. Nyt G_k ja $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ ovat toisistaan riippumattomia kaikilla $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Tämä johtuu siitä, että G_k on $\mathcal{F}_{t_k}$ mitallinen, ja Brownin liikkeen Markovin ominaisuus antaa, että $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ on riippumaton σ-algebrasta $\mathcal{F}_{t_k}$. Tällöin saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\int_0^T G\ dB\Big] &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}[G_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{E}[G_k]\, \underbrace{\mathbb{E}[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]}_{0} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Kohta (iii) on nimeltään *Itôn isometria.* Nyt

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T G\ dB\Big]^2 = \sum_{k,j=1}^{m-1} \mathbb{E}[G_kG_j(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})].$$

Jos $j < k$, niin $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ on riippumaton satunnaismuuttujasta $G_kG_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$, jolloin "ristitermien" odotusarvot menevät nollaan toiseen korotuksessa. Jäljelle jää, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\int_0^T G\ dB\Big]^2 &= \sum_{k=1}^{m-1}\mathbb{E}[G_k^2(B_{t_{k+1}}-B_{t_k})^2]\\ &= \sum_{k=1}^{m-1}\mathbb{E}[G_k]^2\,\underbrace{\mathbb{E}[B_{t_{k+1}}-B_{t_k}]^2}_{t_{k+1}-t_k}\\ &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{m-1}G_k^2(t_{k+1}-t_k)\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^T G_t^2\ dt\Big].\end{aligned}$$ □

Seuraavaksi on tarkoitus approksimoida mielivaltaista prosessia $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$ yksinkertaisilla prosesseilla G^n.

LEMMA 3.25. *Olkoon $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$. Tällöin on olemassa jono yksinkertaisia prosesseja $G^n \in \mathcal{L}^2(0,T)$ siten, että*

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T (G-G^n)^2\ dt\Big] \to 0,\ \ kun\ n\to\infty.$$

TODISTUS. Todistus käyttää hyväksi dominoitua konvergenssilausetta ja sen voi katsoa esimerkiksi B. Oksendalin teoksesta [**21**, s. 21-24]. □

Nyt voidaan vihdoin määritellä stokastinen integraali mielivaltaiselle prosessille $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$.

MÄÄRITELMÄ 3.26. Olkoon $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$ ja olkoot $G^n \in \mathcal{L}^2(0,T)$ yksinkertaisia prosesseja, jotka approksimoivat prosessia G lemman 3.25 mielessä. Määritellään, että prosessin G stokastinen integraali on

$$\int_0^T G\ dB := \lim_{n\to\infty}\int_0^T G^n\ dB.$$

Lemma 3.24 voidaan yleistää prosesseille $G, H \in \mathcal{L}^2(0,T)$. Tämä seuraa suoraan lemmoista 3.24 ja 3.25. Näin ollen päästiin tavoitteeseen. Stokastinen integrointi pysäytyshetkeen τ asti ei muuta stokastisen integraalin ominaisuuksia.

MÄÄRITELMÄ 3.27. Olkoon $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$ ja τ pysäytyshetki siten, että $0 \le \tau \le T$. Tällöin määritellään

$$\int_0^\tau G\ dB := \int_0^T \chi_{\{t\le\tau\}} G\ dB.$$

LEMMA 3.28. *Olkoon $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$ ja τ pysäytyshetki siten, että $0 \le \tau \le T$. Tällöin*

$$(i)\ \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau G\ dB\Big] = 0\ ja$$

$$(ii)\ \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau G\ dB\Big]^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau G_t^2\ dt\Big].$$

TODISTUS. Kohta (i) tulee siitä, että

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^\tau G\ dB\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^T \underbrace{\chi_{\{t\leq\tau\}}G}_{\in\mathcal{L}^2(0,T)}\ dB\Big] = 0.$$

Kohta (ii) seuraa vastaavanlaisesti aikaisemmista tuloksista. □

Klassisessa laskennassa pätee tärkeä analyysin peruslause:

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(u)du$$

kaikille $f \in C^1(\mathbb{R})$ ja $-\infty < x < y < \infty$. Rakennetaan samantyyppinen kaava tietyntyyppisille stokastisille prosesseille, *Itôn prosesseille.*

MÄÄRITELMÄ 3.29. Jatkuva ja sopiva stokastinen prosessi $X = (X_t)_{t\geq 0}, X_t : H \to \mathbb{R}$, on Itôn prosessi, jos on olemassa $G \in \mathcal{L}^2(0,T)$ ja progressiivisesti mitallinen prosessi $a = (a_t)_{t\geq 0}$, jolle

$$\int_0^t |a_u(\omega)|du < \infty$$

kaikilla $t \geq 0$ ja $\omega \in H$, ja $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$X_t(\omega) = x_0 + \int_0^t G\ dB(\omega) + \int_0^t a_u(\omega)du \text{ kaikilla } t \geq 0 \text{ m.v.}$$

Itôn prosesseille saadaan toimimaan kuuluisa *Itôn kaava.* Kaavan todistuksen idea on approksimoida kaavassa olevaa funktiota u polynomeilla. Aluksi tehdään aikaverkon ositus, jonka jälkeen käytetään Taylorin lausetta funktioon u. Lagrange virhetermiin jätetään vähintään kolmannen asteen termit. Tämän jälkeen osoitetaan, että virhetermi suppenee kohti nollaa mitan $\mathbb{P}$ mielessä, kun aikaverkko tihenee. Lisäksi osoitetaan, että ensimmäisen ja toisen asteen termit suppenevat mitan $\mathbb{P}$ mielessä kohti haluttuja integraaleja, kun aikaverkko tihenee. Näitä varten tarvitaan lemma. Lemma sanoo, että jos $Y_n \to 0$ melkein varmasti ja $Z_n \to Z$ mitan $\mathbb{P}$ mielessä, niin $Y_n Z_n \to 0$ mitan $\mathbb{P}$ mielessä.

LAUSE 3.30 (Itôn kaava). *Olkoon X Itôn prosessi, jolla on esitys*

$$X_t(\omega) = x_0 + \int_0^t G\ dB(\omega) + \int_0^t a_u(\omega)du \textit{ kaikilla } t \geq 0 \textit{ m.v.}$$

Olkoon $u : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolla $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ovat olemassa ja jatkuvia. Olkoon

$$Y_t := u(X_t, t) \textit{ kaikilla } 0 \leq t \leq T.$$

Tällöin stokastinen prosessi Y on muotoa

$$\begin{aligned} Y_t = u(X_0, 0) &+ \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(X_s, s)G\ dB_s \\ &+ \int_0^t \Big(\frac{\partial u}{\partial s}(X_s, s)ds + \frac{\partial u}{\partial x}(X_s, s)a_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X_s, s)G_s^2\Big)ds \end{aligned}$$

kaikilla $0 \leq t \leq T$ m.v.

TODISTUS. Katso todistus Stefan Geissin teoksesta [**10**]. □

Nyt ollaan jo päästy hyvän matkaa eteenpäin stokastisessa integroinnissa. Seuraavaksi lähdetään yleistämään tilannetta useampaan ulottuvuuteen. Tätä varten kiinnitetään m-ulotteinen standardi $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -Brownin liike $\mathbf{B}$.

MÄÄRITELMÄ 3.31. $\mathbb{R}^{n\times m}$ arvoinen stokastinen prosessi $\mathbf{G} = ((G^{ij}))$ kuuluu avaruuteen $\mathcal{L}^2_{n\times m}(0,T)$, jos

$$G^{ij} \in \mathcal{L}^2(0,T) \quad (i = 1,\dots,n; j = 1,\dots,m).$$

MÄÄRITELMÄ 3.32. Olkoon $\mathbf{G} \in \mathcal{L}^2_{n\times m}(0,T)$. Tällöin

$$\int_0^T \mathbf{G}\ d\mathbf{B}$$

on $\mathbb{R}^n$ arvoinen satunnaismuuttuja, jonka i :s komponentti on

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T G^{ij}\ dB^j \quad \text{jokaisella } i = 1,\dots,n.$$

Itôn prosessi yleistyy myös useampaan ulottuvuuteen.

MÄÄRITELMÄ 3.33. Jatkuva ja sopiva stokastinen prosessi $\mathbf{X} := (X_t)_{t\geq 0} = (X_t^1,\dots,X_t^n)_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}^n$ arvoinen Itôn prosessi, jos X^i on Itôn prosessi kaikilla $i = 1,\dots,n$. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa prosessit $\mathbf{G} \in \mathcal{L}^2_{n\times m}(0,T)$ ja a^i siten, että a^i on progressiivisesti mitallinen ja $\int_0^t |a_u^i(\omega)|du < \infty$ kaikilla $i = 1,\dots,n$, ja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Tällöin saadaan esitys jokaiselle $i = 1,\dots,n$:

$$X_t^i(\omega) = x_0^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t G^{ij}\ dB^j(\omega) + \int_0^t a_u^i(\omega)du \text{ kaikilla } t \geq 0 \text{ m.v.}$$

Nyt Itôn kaava voidaan yleistää useampaan ulottuvuuteen.

LAUSE 3.34 (Itôn kaava n-ulottuvuudessa). *Olkoon $\boldsymbol{X}$ n-ulotteinen Itôn prosessi. Olkoon $u : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolla $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ja $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ovat olemassa ja jatkuvia kaikilla $i,j = 1,\dots,n$. Tällöin prosessi*

$$\boldsymbol{Y} = (u(X_t,t))_{0\leq t\leq T} = (u(X_t^1, X_t^2,\dots,X_t^n,t))_{0\leq t\leq T}$$

on muotoa

$$\begin{aligned} Y_t = u(X_0,0) &+ \int_0^t \frac{\partial u}{\partial s}(X_s,s)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(X_s,s)\ dX^i \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X_s,s) \sum_{l=1}^m G^{il}G^{jl}ds \end{aligned}$$

kaikilla $0 \leq t \leq T$ m.v. Merkintä dX^i tarkoittaa

$$dX^i := \sum_{j=1}^m G^{ij}\ dB^j + a_u^i du.$$

TODISTUS. Todistus on vastaavanlainen kuin lauseen 3.30 todistus. □

3.3. Stokastinen reunasäännöllisyys ja Wienerin kriteerio

Tämän kappaleen päälähteinä toimivat Sidney Portin ja Charles Stonesin kirja [**24**] ja Peter Mörtensin ja Yuval Peresin kirja [**20**]. Kiinnitetään $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ -Brownin liikkeen todennäköisyysavaruus $(H, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Olkoon $\mathcal{AS}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukkokokoelma, jolle

$$\mathcal{AS} := \{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) : A \text{ on avoin tai suljettu}, A \neq \emptyset \text{ ja } A \neq \mathbb{R}^n\}.$$

Tässä työssä käytetään useasti merkintää τ_K, jolla tarkoitetaan satunnaista ajanhetkeä

$$\tau_K := \inf\{t > 0 : B_t \in K\},$$

jollekin $K \in \mathcal{AS}$. Lauseen 2.46 nojalla τ_K on pysäytyshetki. Satunnaismuuttuja τ_K voitaisiin määritellä myös kaikille Borel-joukoille, mutta yksinkertaisuuden vuoksi määritetään τ_K vain avoimille ja suljetuille joukoille. Määritetään joukon $\Omega \in \mathcal{AS}$ säännöllinen reunapiste Brownin liikkeen avulla.

MÄÄRITELMÄ 3.35. Olkoot $\Omega \in \mathcal{AS}$ ja $x \in \partial\Omega$. Olkoon $\mathbf{B}$ Brownin liike, joka lähtee liikkeelle pisteestä x. Tällöin piste x on joukon Ω *säännöllinen* reunapiste, jos

$$\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} = 0) = 1.$$

Jos reunapiste x ei ole säännöllinen, se on *epäsäännöllinen.* Lisäksi sanotaan, että koko joukko Ω on säännöllinen, jos sen jokainen reunapiste $x \in \partial\Omega$ on säännöllinen. Merkitään joukon Ω säännöllisten reunapisteiden joukkoa merkillä Ω^r. Tällöin siis jos joukko Ω on säännöllinen, niin $\Omega^r = \partial\Omega$.

Huomautus 3.36. Joukon Ω säännöllisyyttä tutkittaessa määritelmä 3.35 on mielenkiintoinen ainoastaan joukon reunapisteillä. Tämä johtuu siitä, että jokaiselle sisäpisteelle $x \in int(\Omega)$ pätee aina $\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} = 0) = 0$. Lisäksi jokaiselle ulkopisteelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ pätee aina $\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} = 0) = 1$. Huomaa, että reunasäännöllisyyttä voidaan tutkia myös joukossa Ω^c. Reunapiste voi olla säännöllinen reunapiste sekä joukolle Ω että myös joukolle Ω^c. Näin käykin esimerkiksi sileillä pinnoilla.

Huomautus 3.37. Lauseen 3.14 nojalla $\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} = 0) \in \{0, 1\}$, sillä tapahtuma

$$\{\tau_{\Omega^c} = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0<\delta<\frac{1}{n}} \{B_\delta \in \Omega^c\} \in \mathcal{F}_0^+.$$

Tässä työssä käytetään merkintää $B(x, \epsilon)$, jolla tarkoitetaan x-keskistä ja ϵ-säteistä avointa palloa tavallisella euklidisella metriikalla. Toisin sanoen

$$B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_e(x, y) < \epsilon\},$$

missä $d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Vastaavasti joukko $\overline{B}(x, \epsilon)$ on x-keskinen ja ϵ säteinen suljettu pallo.

Muistetaan esimerkki 3.18, jossa todettiin, että n-ulotteinen Brownin liike on Markovin prosessi siirtymäytimellä $p(t, x, A) = \int_A \mathfrak{p}(t, x, y)dy$, missä

$$\mathfrak{p}(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{|y - x|^2}{2t}\Big).$$

Joukon Ω reunasäännöllisyyttä tutkittaessa ei aina tarvitse turvautua pelkästään määritelmään 3.35. Annetaan seuraavaksi käyttökelpoinen ja riittävä ehto reunasäännöllisyydelle.

LAUSE 3.38 (Poincaré'n kartioehto). *Olkoot $\Omega \in \mathcal{AS}$ ja $V = V(x, \alpha)$ kartio, jonka kärkipiste on $x \in \partial\Omega$ ja kulma $\alpha > 0$. Jos on olemassa korkeus $h > 0$ ja kulma $\alpha > 0$ siten, että*

$$V \cap B(x, h) \subset \Omega^c,$$

niin piste x on joukon Ω säännöllinen reunapiste.

TODISTUS. Huomautuksen 3.37 nojalla riittää osoittaa, että $\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} = 0) > 0$. Voidaan olettaa, että $x = 0$. Olkoon $t > 0$ mielivaltainen. Vähentämällä vaihtoehtoja saadaan arvio

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(\tau_{\Omega^c} \leq t) &= \mathbb{P}_0(\bigcup_{0<\delta\leq t} B_\delta \in \Omega^c) \\ &\geq \mathbb{P}_0(B_t \in \Omega^c).\end{aligned}$$

Oletuksen ja lemman 2.7 avulla saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(B_t \in \Omega^c) &\geq \mathbb{P}_0(B_t \in B(x, h) \cap V) \\ &\geq \mathbb{P}_0(B_t \in V) - \mathbb{P}_0(B_t \notin B(x, h)).\end{aligned}$$

Nyt lemman 3.13 nojalla saadaan vielä, että

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(B_t \in V) - \mathbb{P}_0(B_t \notin B(x, h)) &= \mathbb{P}_0(\sqrt{t}B_1 \in V) - \mathbb{P}_0(\sqrt{t}B_1 \notin B(x, h)) \\ &= \mathbb{P}_0(B_1 \in V) - \mathbb{P}_0(B_1 \notin B(x, \frac{h}{\sqrt{t}})).\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\mathbb{P}_0(\tau_{\Omega^c} \leq t) \geq \mathbb{P}_0(B_1 \in V) - \mathbb{P}_0(B_1 \notin B(x, \frac{h}{\sqrt{t}})). \tag{3.2}$$

Koska kaikille ajanhetkille $t_1 > t_2 > \cdots \geq 0$ tapahtumat $\{\tau_{\Omega^c} \leq t_1\} \supset \{\tau_{\Omega^c} \leq t_2\} \supset \cdots$, niin lemman 2.6 avulla saadaan

$$\mathbb{P}_0(\tau_{\Omega^c} = 0) = \mathbb{P}_0\big(\bigcap_{t\downarrow 0}\{\tau_{\Omega^c} \leq t\}\big) = \lim_{t\downarrow 0} \mathbb{P}_0\big(\tau_{\Omega^c} \leq t\big),$$

jolloin yhtälön (3.2) avulla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(\tau_{\Omega^c} = 0) &\geq \lim_{t\downarrow 0}\Big(\mathbb{P}_0(B_1 \in V) - \mathbb{P}_0(B_1 \notin B(x, \frac{h}{\sqrt{t}}))\Big) \\ &= \mathbb{P}_0(B_1 \in V).\end{aligned}$$

Ylläoleva todennäköisyys voidaan laskea, jolloin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(B_1 \in V) &= \int_V \mathfrak{p}(1, 0, y)\, dy \\ &= \int_V (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(-\frac{|y|^2}{2}\Big)\, dy \\ &> 0.\end{aligned}$$

Näin ollen väite pätee. $\square$

Poincaré'n kartioehto antaa riittävän ehdon pisteen reunasäännöllisyydelle. Haluttaisiin kuitenkin myös tietää, mikä on riittävä ja välttämätön ehto reunasäännöllisyydelle. Tätä varten tarvitaan lisää pohjatietoa.

Lemma 3.39. *Olkoon $K \in \mathcal{AS}$ rajoitettu. Tällöin*

$$\mathbb{P}_x(\tau_{K^c} < \infty) = 1$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $x \in \overline{K}$, koska muuten väite pätee selvästi. Koska K on rajoitettu, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $K \subset B(x, r)$. Brownin liikkeen jatkuvuudesta johtuen riittää osoittaa, että $\tau_{\partial B(x,r)} < \infty$ melkein varmasti. Lisäksi riittää osoittaa väite ulottuvuudessa $n = 1$. Tämä johtuu siitä, että n-ulotteinen Brownin liike on mennyt ulos pallosta $B(x, r)$, jos sen yksiulotteinen projektio on mennyt ulos pallon yksiulotteisesta projektiojoukosta samassa koordinaatissa. Olkoot B yksiulotteinen Brownin liike, joka lähtee liikkeelle pisteestä x_1, ja

$$\tau_r = \inf\{t > 0 : B_t = r\}.$$

Huomaa, että τ_r on pysäytyshetki, koska joukko $\{r\} \subset \mathbb{R}$ on suljettu. Riittää osoittaa, että

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) = 1.$$

Tapahtumat $\{\tau_r < t_1\} \subset \{\tau_r < t_2\} \subset \cdots$ kaikilla $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) &= \mathbb{P}_x\Big(\bigcup_{t\ge 0}\{\tau_r < t\}\Big)\\ &= \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(\tau_r < t)\\ &= \lim_{t\to\infty}\Big[\mathbb{P}_x(\tau_r < t, B_t > r) + \mathbb{P}_x(\tau_r < t, B_t \le r)\Big].\end{aligned}$$

Nyt

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < t, B_t = b) \le \mathbb{P}_x(B_t = b) = 0.$$

Lisäksi Brownin liikkeelle pätee *heijastusperiaate (reflection principle)*. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < t, B_t > r) = \mathbb{P}_x(\tau_r < t, B_t < r).$$

Heijastusperiaate pätee, koska Brownin liikkeen vahvan Markovin ominaisuuden eli lauseen 3.15 nojalla prosessit

$$(B_{t+\tau_r} - B_{\tau_r})_{t\ge 0} \text{ ja } (-B_{t+\tau_r} + B_{\tau_r})_{t\ge 0}$$

ovat molemmat standardeja Brownin liikkeitä, jotka ovat riippumattomia σ-algebrasta $\mathcal{F}_{\tau_r}$. Liimaamalla nämä kaksi prosessia yhteen saadaan, että prosessi

$$(B^*_t)_{t\ge 0} = (B_t\chi_{\{t\le\tau_r\}} + (2B_{\tau_r} - B_t)\chi_{\{t>\tau_r\}})_{t\ge 0}$$

on standardi Brownin liike. Koska

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < t, B_t > r) = \mathbb{P}_x(B_t > r)$$

Brownin liikkeen jatkuvuuden nojalla, saadaan ylläolevien laskujen avulla, että

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) = \lim_{t\to\infty} 2\mathbb{P}_x(B_t > r).$$

Brownin liikkeen lemma 3.13 johtaa siihen, että

$$\lim_{t\to\infty} 2\mathbb{P}_x(B_t > r) = 2\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x\Big(B_1 > \frac{r}{\sqrt{t}}\Big) = 1. \qquad \square$$

Klassinen lineaarinen Dirichlet'n reuna-arvo ongelma on seuraavanlainen. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä, sileä ja rajoitettu alue. Alueella tarkoitetaan avointa ja yhtenäistä joukkoa. Kiinnitetään $F : \partial U \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Nyt pitää ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{joukossa } U \\ u = F & \text{reunalla } \partial U, \end{cases} \tag{3.3}$$

jossa *Laplacen* operaattori $\triangle u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Klassisessa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriassa on hyvin tunnettu tieto, että on olemassa yksikäsitteinen funktio u, joka on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva joukossa U ja jatkuva joukossa $\overline{U}$ ja joka ratkaisee yhtälön (3.3). Huomaa, että funktion F jatkuvuutta ja alueen U "riittävää säännöllisyyttä" tarvitaan. Sileä joukko on selvästi säännöllinen Poincaré'n kartioehdon nojalla. Funktiota, jolle $\triangle u = 0$, kutsutaan *harmoniseksi* funktioksi.

Todennäköisyysteoria antaa yhteyden harmonisten funktioiden ja Brownin liikkeen välille. Tämän yhteyden keksi ensimmäisenä L. Bachelier 1900-luvun alussa teoksissaan [**3**] ja [**2**]. Seuraavan tuloksen todistus on katsottu K. Itôn teoksesta [**13**]. Tuloksen voi todistaa myös muilla tavoilla.

LAUSE 3.40. *Olkoon u yhtälön (3.3) klassinen ratkaisu. Olkoon $\boldsymbol{B}$ n-ulotteinen Brownin liike, joka lähtee liikkeelle pisteestä $x \in U$. Olkoon $\tau_{\partial U} = \inf\{t > 0 : B_t \in \partial U\}$. Tällöin*

$$u(x) = \mathbb{E}_x[F(B_{\tau_{\partial U}})].$$

TODISTUS. Olkoon $T > 0$, jolloin pysäytyshetki $\tau_{\partial U} \wedge T \le T$. Nyt $u \in C^2$, ja Brownin liike $\mathbf{B}$ on Itôn prosessi, jolle $G^i \equiv 1$ ja $a^i \equiv 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tämän vuoksi Itôn kaava eli lause 3.34 antaa:

$$\begin{aligned} u(B_{\tau_{\partial U}\wedge T}) &= u(B_0) + 0 + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_{\partial U}\wedge T} \frac{\partial u}{\partial x_i}(B_s)\, dB^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^{\tau_{\partial U}\wedge T} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(B_s) ds \\ &= u(x) + \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_{\partial U}\wedge T} \frac{\partial u}{\partial x_i}(B_s)\, dB^i + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_{\partial U}\wedge T} \triangle u(B_s) ds. \end{aligned}$$

Koska $\triangle u(B_s) = 0$ aina kun $B_s \in U$ ja koska lemman 3.28 nojalla

$$\mathbb{E}_x\Big[\int_0^{\tau_{\partial U}\wedge T} \frac{\partial u}{\partial x_i}(B_s)\, dB^i\Big] = 0$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$, saadaan tulos

$$\mathbb{E}_x[u(B_{\tau_{\partial U}\wedge T})] = u(x).$$

Koska U on rajoitettu, niin lemman 3.39 nojalla on oltava, että $\tau_{\partial U} < \infty$ melkein varmasti. Lisäksi funktio u on rajoitettu, joten dominoidun konvergenssilauseen avulla saadaan, että

$$\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_x[u(B_{\tau_{\partial U}\wedge T})] = \mathbb{E}_x[u(B_{\tau_{\partial U}})].$$

Koska $B_{\tau_{\partial U}} \in \partial U$, niin $u(B_{\tau_{\partial U}}) = F(B_{\tau_{\partial U}})$, joten väite pätee. $\square$

Kerrataan seuraavaksi Gamma-funktion määritelmä.

MÄÄRITELMÄ 3.41. Funktio $\Gamma : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_- \to \mathbb{R}$ on Gamma-funktio, jos

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Määritetään *Newtonin potentiaaliydin* Brownin liikkeen siirtymäytimen avulla.

MÄÄRITELMÄ 3.42. Olkoon ulottuvuus $n \geq 3$. Newtonin potentiaaliydin on funktio $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ siten, että

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_0^\infty \mathfrak{p}(t, 0, y) dt \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(- \frac{|y|^2}{2t} \Big) dt. \end{aligned}$$

Oletetaan, että $y \neq 0$. Muuttujanvaihto $z = \frac{|y|^2}{2t}$ johtaa siihen, että $dt = -\frac{|y|^2}{2t} z^{-2} dz$. Tällöin saadaan, että

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} \exp\Big(- \frac{|y|^2}{2t} \Big) dt = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} |y|^{2-n},$$

jolloin

$$g(y) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{2\pi^{\frac{n}{2}}} |y|^{2-n}. \tag{3.4}$$

Funktio $g(y)$ on äärellistä kaikilla $y \neq 0$. Jos $y = 0$, niin $g(y) = \infty$. Olkoot μ jokin mitta joukossa $\mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin mitan μ *Newtonin potentiaali* pisteessä x on

$$g\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y - x) d\mu(y). \tag{3.5}$$

MÄÄRITELMÄ 3.43. Olkoot $K \in \mathcal{AS}$ ja $\mathbf{B}$ n-ulotteinen Brownin liike, joka lähtee liikkeelle pisteestä $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin Brownin liikkeen *osumisjakauma* joukossa K on

$$h_K(x, A) := \mathbb{P}_x(\tau_K < \infty, B_{\tau_K} \in A)$$

kaikilla $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Huomautus 3.44. Osumisjakauma $h_K(x, \cdot)$ saa arvon nolla joukon $\mathbb{R}^n \setminus \overline{K}$ osajoukoilla. Myöhemmin määritetään tarkasti se joukko, jossa $h_K(x, \cdot)$ voi saada positiivisia arvoja. Jakaumalla $h_K(x, \cdot)$ on kokonaismassaa todennäköisyyden $\mathbb{P}_x(\tau_K < \infty)$ verran. Näin ollen jos $\mathbb{P}_x(\tau_K < \infty) = 1$, niin $h_K(x, \cdot)$ on todennäköisyysmitta avaruudessa $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Olkoot $t \geq 0$ ja siirtymäkuvaus $\Theta_t : H \to H$ siten, että $B_s(\Theta_t \omega) = B_{s+t}(\omega)$ kaikilla $s \geq 0$ ja $\omega \in H$. Lisäksi olkoot $K \in \mathcal{AS}$ ja ρ jokin pysäytyshetki. Käytetään merkintää $\rho + \tau_K \circ \Theta_\rho$ ajanhetkestä

$$\rho + \tau_K \circ \Theta_\rho := \inf\{s > \rho : B_s \in K\}. \tag{3.6}$$

Koska ρ on pysäytyshetki, niin $\inf\{s > \rho : B_s \in K\}$ on myös pysäytyshetki. Jos $\rho(\omega) = \infty$, jollekin $\omega \in H$, niin asetetaan, että $\tau_K \circ \Theta_\rho(\omega) = \infty$. Tällöin myös $\rho(\omega) + \tau_K \circ \Theta_\rho(\omega) = \infty$. Olkoot $f \colon C\big([0, \infty[, \mathbb{R}^n\big) \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja Borel-mitallinen, ja $x \in \mathbb{R}^n$. Lisäksi olkoon τ pysäytyshetki, joka on $\mathbb{P}_x$-melkein varmasti äärellistä.

Brownin liikkeen vahva Markovin ominaisuus eli lause 3.15 voidaan muotoilla uuden notaation avulla seuraavasti:

$$\mathbb{E}_x\Big[f\Big(\big(B_t(\Theta_\tau\omega)\big)_{t\geq 0}\Big)|\mathcal{F}_\tau\Big] = \mathbb{E}_{B_\tau}\Big[f\big((B_t(\omega))_{t\geq 0}\big)\Big] \tag{3.7}$$

$\mathbb{P}_x$-melkein varmasti. Jos esimerkiksi $f(\omega) := \chi_{\{\tau_K<\infty\}}(\omega)$, niin $\mathbb{P}_x$-melkein varmasti kaikilla $\omega \in \{\rho \leq \tau_K, \rho < \infty\}$ pätee

$$\mathbb{P}_x\big(\tau_K \circ \Theta_\rho < \infty|\mathcal{F}_\rho\big) := \mathbb{E}_x\big[\chi_{\{\tau_K\circ\Theta_\rho<\infty\}}|\mathcal{F}_\rho\big] = \mathbb{E}_{B_\rho}\big[\chi_{\{\tau_K<\infty\}}\big].$$

Tavoitteena on löytää tarkka ehto jonkin joukon reunapisteen säännöllisyydelle. Osoittautuu, että tarkka ehto voidaan löytää Brownin liikkeen osumistodennäköisyyksien kautta. Todennäköisyys tapahtumalle, että Brownin liike osuu ainakin kerran joukkoon $K \in \mathcal{AS}$, voidaan laskea Newtonin potentiaalin avulla, kun ollaan ensiksi löydetty "sopiva" mitta. Seuraavat lemmat ja määritelmä toimivat pohjatietoina lausetta 3.51 varten. Lausetta 3.51 käytetään reunapisteen säännöllisyyden tarkan ehdon todistuksessa.

Määritelmän 3.43 osumisjakauma $h_K(x,\cdot)$ voi saada positiivisia arvoja ainoastaan joukon $(K^c)^r$ osajoukoissa, kun $K \in \mathcal{AS}$ ja kun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{K}$. Joukko $(K^c)^r$ sisältää joukon K komplementin kaikki säännölliset reunapisteet

Lemma 3.45. *Olkoot $K \in \mathcal{AS}$ ja $x \in \mathbb{R}^n \setminus (int(K) \cup (K^c)^r)$. Tällöin osumisjakauma $h_K(x,\cdot)$ voi saada positiivisia arvoja ainoastaan joukon $(K^c)^r \subset \partial K$ osajoukoissa.*

Todistus. Jos $x \in int(K) \cup (K^c)^r$, niin $\mathbb{P}_x(\tau_K = 0) = 1$, jolloin $h_K(x,\cdot) = \delta_x(\cdot)$ (delta-mitta). Oletetaan, että $x \in \mathbb{R}^n \setminus (int(K) \cup (K^c)^r)$. Huomaa, että joukoilla K ja K^c on sama reuna. Koska Brownin liike on jatkuva, niin $B_{\tau_K} \in \partial K$ kaikilla $\omega \in \{0 < \tau_K < \infty\}$. Tämä pätee siis myös, jos K on avoin. Tämän vuoksi mitalla $h_K(x,\cdot)$ on massaa ainoastaan joukossa ∂K. Jos K_1 on rajoitettu ja jos $\mathbb{P}_x(\tau_{K_1} < \infty) = 0$, niin tällöin

$$h_K(x, K_1) \leq \mathbb{P}_x(\tau_{K_1} < \infty) = 0.$$

Voidaan näyttää, että todennäköisyys $\mathbb{P}_x(K \setminus (K^c)^r) = 0$. Tämä johtuu käytännössä Brownin liikkeen symmetrisyydestä (katso [**24**, s, 44]). Näin ollen $h_K(x, K \setminus (K^c)^r) = 0$. Huomaa, että jos

$$\omega \in \{\tau_K < \infty\} \cap \{B_{\tau_K} \in K^c\},$$

niin

$$\tau_K \circ \Theta_{\tau_K}(\omega) = \inf\{s > \tau_K(\omega) : B_s(\omega) \in K\} - \tau_K(\omega) = 0.$$

Tiedetään, että satunnaismuuttujat $\chi_{\{\tau_K<\infty\}}$ ja $\chi_{\{B_{\tau_K}\in K^c\}}$ ovat $\mathcal{F}_{\tau_K}$ -mitallisia. Nyt Brownin liikkeen vahvan Markovin ominaisuuden (3.7) nojalla yhdessä ehdollisen odotusarvon ominaisuuksien kanssa saadaan, että

$$\begin{aligned}
h_K(x, K^c) &= \mathbb{P}_x(\tau_K < \infty, K_{\tau_K} \in K^c) \\
&= \mathbb{P}_x(\tau_K < \infty, B_{\tau_K} \in K^c, \tau_K \circ \Theta_{\tau_K} = 0) \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_x\Big[\chi_{\{\tau_K\circ\Theta_{\tau_K}=0\}}\chi_{\{\tau_K<\infty, B_{\tau_K}\in K^c\}}|\mathcal{F}_{\tau_K}\Big]\Big|\mathcal{F}_0\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_x(\tau_K \circ \Theta_{\tau_K} = 0|\mathcal{F}_{\tau_K})\chi_{\{\tau_K<\infty, B_{\tau_K}\in K^c\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_{B_{\tau_K}}(\tau_K = 0)\chi_{\{\tau_K<\infty, B_{\tau_K}\in K^c\}}\Big].
\end{aligned}$$

Todennäköisyys $\mathbb{P}_z(\tau_K = 0) = 1$ ainoastaan silloin, kun $z \in (K^c)^r \cup int(K)$. Muilla arvoilla z pätee Blumenthalin 0-1 lain nojalla, että $\mathbb{P}_z(\tau_K = 0) = 0$. Näin ollen

$$\mathbb{P}_{B_{\tau_K}}(\tau_K = 0) = \chi_{\{B_{\tau_K} \in (K^c)^r\}},$$

jolloin

$$h_K(x, K^c) = h_K(x, K^c \cap (K^c)^r).$$

Koska

$$h_K(x, K^c) = h_K(x, K^c \cap (K^c)^r) + h_K(x, K^c \setminus (K^c)^r),$$

saadaan, että

$$h_K(x, K^c \setminus (K^c)^r) = 0.$$

Lopulta päästään siihen, että

$$h_K(x, \mathbb{R}^n \setminus (K^c)^r) = h_K(x, K \setminus (K^c)^r) + h_K(x, K^c \setminus (K^c)^r) = 0.$$

Tämä antaa sen, että $h_K(x, \cdot)$ voi saada positiivisia arvoja ainoastaan joukon $(K^c)^r$ osajoukoissa. Itse asiassa jos K on suljettu, niin $\tau_{\partial K} = \tau_K$ poluilla $\{\tau_K > 0\}$. Tällöin siis $h_{\partial K}(x, \cdot) = h_K(x, \cdot)$, kun K on suljettu. □

LEMMA 3.46. *Olkoot $K \in \mathcal{AS}$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ja $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $t \geq 0$ pätee*

$$\mathbb{P}_x(\tau_K < t, B_t \in A) = \mathbb{E}_x\Big[p(t - \tau_K, B_{\tau_K}, A)\chi_{\{\tau_K < t\}}\Big].$$

TODISTUS. Tiedetään, että

$$t = \tau_K(\omega) + t - \tau_K(\omega)$$

kaikilla $t \geq 0$ kun $\omega \in \{\tau_K < t\}$. Lisäksi satunnaismuuttuja $\chi_{\{\tau_K < t\}}$ on $\mathcal{F}_{\tau_K}$-mitallinen. Brownin liike on Markovin prosessi, jolloin saadaan, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau_K < t, B_t \in A) &= \mathbb{E}_x\Big[\chi_{\{B_{\tau_K + t - \tau_K} \in A\}}\chi_{\{\tau_K < t\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_x(B_{\tau_K + t - \tau_K} \in A | \mathcal{F}_{\tau_K})\chi_{\{\tau_K < t\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_{B_{\tau_K}}(B_{t - \tau_K} \in A)\chi_{\{\tau_K < t\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[p(t - \tau_K, B_{\tau_K}, A)\chi_{\{\tau_K < t\}}\Big].
\end{aligned}$$

□

Lauseessa 3.40 nähtiin Brownin liikkeen ja harmonisten funktioiden merkittävä yhteys. Koska harmoninen funktio pystytään selvittämään joissakin yksinkertaisissa alueissa, Brownin liikkeen erilaisia todennäköisyyksiä pystytään ratkaisemaan harmonisten funktioiden avulla.

LEMMA 3.47. *Olkoot ulottuvuus $n \geq 3$ ja $\tau_r = \inf\{t > 0 : |B_t| = r\}$. Tällöin kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee*

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \wedge 1.$$

TODISTUS. Olkoon joukko D annulus. Tällöin

$$D := \{y \in \mathbb{R}^n : r < |y| < q\} \subset \mathbb{R}^n$$

joillekin $0 < r < q$. Olkoon aluksi $x \in D$. Voidaan näyttää suoraan derivoimalla, että funktio

$$u(x) = |x|^{2-n}$$

on harmoninen funktio joukossa D. Huomaa, että funktio u on symmetrinen origon suhteen ja että arvo $u(x)$ riippuu ainoastaan pisteen x etäisyydestä origosta. Olkoot $\tau_r = \inf\{t > 0 : |B_t| = r\}$ ja vastaavasti τ_q. Merkitään $\tau = \tau_r \wedge \tau_q$. Lemman 3.39 nojalla $\tau < \infty$ melkein varmasti. Nyt lauseen 3.40 avulla saadaan, että

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(B_\tau)] = u(r)\mathbb{P}_x(\tau_r < \tau_q) + u(q)(1 - \mathbb{P}_x(\tau_r < \tau_q)),$$

josta saadaan, että

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < \tau_q) = \frac{q^{2-n} - |x|^{2-n}}{q^{2-n} - r^{2-n}}.$$

Kun $q \to \infty$, saadaan, että kaikilla $x \notin B(0, r)$ pätee

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) = \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}.$$

Jos $x \in B(0, r)$, niin $\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) = 1$ selvästi lemman 3.39 nojalla. Ympyrän kehä on säännöllinen joukko kartioehdon eli lauseen 3.38 nojalla. Näin ollen $\mathbb{P}_x(\tau_r < \infty) = 1$ kaikilla $x \in \partial B(0, r)$, kuten väite sanookin. $\square$

MÄÄRITELMÄ 3.48. Olkoon $K \in \mathcal{AS}$ rajoitettu. Jos on olemassa mitta μ avaruudessa $\mathbb{R}^n$ siten, että mitta μ voi saada positiivisia arvoja ainoastaan joukon $(K^c)^r \cup int(K)$ osajoukoissa ja että mitan μ Newtonin potentiaalille (3.5) pätee

$$g\mu(x) = 1$$

jokaisella $x \in (K^c)^r \cup int(K)$, niin sanotaan, että mitta μ on joukon K *tasapainomitta (equilibrium measure)*.

Huomautus 3.49. Voidaan osoittaa, että jos joukolla $K \in \mathcal{AS}$ on olemassa tasapainomitta, tasapainomitta on yksikäsitteinen [**24**, s. 54].

Merkitään ympyränkehän tasajakaumaa merkillä σ_r jollakin säteellä $r > 0$.

LEMMA 3.50. *Olkoot ulottuvuus $n \geq 3$ ja $r > 0$. Tällöin joukolla $B_r := \overline{B}(0, r)$ on olemassa tasapainomitta μ_{B_r}, jolle*

$$\mu_{B_r} := \frac{2\pi^{n/2} r^{n-2}}{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)} \sigma_r.$$

Lisäksi tasapainomitan μ_{B_r} Newtonin potentiaali on

$$g\mu_{B_r}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{\partial B(0,r)} < \infty) = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \wedge 1.$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

TODISTUS. Olkoon $r > 0$ ja oletetaan aluksi, että $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, r)$. Lasketaan ensiksi, mikä on ympyränkehän tasajakauman σ_r Newtonin potentiaali pisteessä x. Lemman 3.47 nojalla

$$\mathbb{P}_x(\tau_{\partial B(0,r)} < \infty) = \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2}.$$

Muistetaan Brownin liikkeen yhteys harmoniseen funktioon u lauseessa 3.40. Osoitetaan seuraavaksi, että

$$g(z-x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2\pi^{n/2}} u(z-x) = \mathbb{E}_x\Big[g(z - B_{\tau_{\partial B(0,r)}})\chi_{\{\tau_{\partial B(0,r)}<\infty\}}\Big] \tag{3.8}$$

kaikilla $z \in \overline{B}(0,r)$. Merkitään, että $S_r = \partial B(0,r)$. Selvästi

$$\mathbb{P}_x(\tau_{S_r} > t, B_t \in B_r) = 0$$

kaikilla $t \geq 0$. Brownin liikkeen todennäköisyysjakauman ominaisuudet ja vahva Markovin ominaisuus antavat, että

$$\mathbb{P}_x(\tau_{S_r} = t) = 0$$

kaikilla $t \geq 0$ (ks. tarkka todistus [**24**, s. 11-12]). Näin ollen saadaan lemman 3.46 ja Fubinin lauseen avulla, että

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} \mathfrak{p}(t,x,y)\ dy = p(t,x,B_r)& \\
&= \mathbb{P}_x(B_t \in B_r) \\
&= \mathbb{P}_x(\tau_{S_r} < t, B_t \in B_r) \\
&= \mathbb{E}_x\Big[p(t-\tau_{S_r}, B_{\tau_{S_r}}, B_r)\chi_{\{\tau_{S_r}<t\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\int_{B_r} \mathfrak{p}(t-\tau_{S_r}, B_{\tau_{S_r}}, y)\ dy \chi_{\{\tau_{S_r}<t\}}\Big] \\
&= \int_{B_r} \mathbb{E}_x\Big[\mathfrak{p}(t-\tau_{S_r}, B_{\tau_{S_r}}, y)\chi_{\{\tau_{S_r}<t\}}\Big]\ dy.
\end{aligned}$$

Koska $g(z-x) = \int_0^\infty \mathfrak{p}(t,x,z)\ dt$ kaikilla $z \in B_r$, niin Fubinin lause antaa, että

$$\begin{aligned}
g(z-x) &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x\Big[\mathfrak{p}(t-\tau_{S_r}, B_{\tau_{S_r}}, z)\chi_{\{\tau_{S_r}<t\}}\Big]\ dt \\
&= \mathbb{E}_x\Big[g(z-B_{\tau_{S_r}})\chi_{\{\tau_{S_r}<\infty\}}\Big].
\end{aligned}$$

Tällöin (3.8) pätee.

Integraali $\int g(y-z)d\sigma_r(y)$ riippuu ainoastaan pisteestä z pituuden $|z|$ kautta. Tämä johtuu siitä, että ympyränkehän tasajakauma on pyöräytysinvariantti. Näin ollen

$$\int g(y-z)d\sigma_r(y) = c_r$$

kaikilla $z \in \partial B(0,r)$. Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}
g\sigma_r(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(z-x)d\sigma_r(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}_x\Big[g(z-B_{\tau_{S_r}})\chi_{\{\tau_{S_r}<\infty\}}\Big]\ d\sigma_r(z) \\
&= c_r\mathbb{P}_x(\tau_{S_r} < \infty).
\end{aligned}$$

Joukon B_r tasapainomitalta vaaditaan, että Newtonin potentiaali (3.5) on 1 kaikilla pisteillä B_r, sillä ympyrän kehäpisteet ovat säännöllisiä. Näin ollen vakio c_r voidaan laskea siten, että $z = 0 \in B_r$. Tällöin saadaan, että

$$\begin{aligned} g\sigma_r(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\sigma_r(y) \cdot \mathbb{P}_x(\tau_{S_r} < \infty) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2\pi^{n/2}} r^{2-n} \left(\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}} \right) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Jos $x \in B_r$, niin vastaavasti kuin aiemmin

$$g\sigma_r(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(z-x) d\sigma_r(z) = c_r.$$

Näin ollen kun $x \in \mathbb{R}^n$, mitan μ_{B_r} Newtonin potentiaali on

$$\begin{aligned} g\mu_{B_r}(x) &= \frac{2\pi^{n/2} r^{n-2}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} g\sigma_r(x) \\ &= \frac{2\pi^{n/2} r^{n-2}}{\Gamma(\frac{n}{2}-1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2\pi^{n/2}} (|x| \vee r)^{2-n} \\ &= \left(\frac{r}{|x|} \right)^{n-2} \wedge 1. \end{aligned}$$

Ylläoleva lasku antaa suoraan, että $g\mu_{B_r}(x) = 1$ kaikilla $x \in B(0,r) \cup \partial B(0,r)$. Koska ympyrän kehäpisteet ovat säännöllisiä pisteitä ja koska ympyränkehän tasajakauma voi saada positiivisia arvoja ainoastaan kehän osajoukoilla, mitta μ_{B_r} on todella tasapainomitta. □

Seuraavassa lauseessa näytetään, mikä on avoimen tai suljetun joukon tasapainomitta.

LAUSE 3.51. *Olkoot ulottuvuus $n \geq 3$, $K \in \mathcal{AS}$ rajoitettu ja $r > 0$ siten, että $K \subsetneq \overline{B}(0,r)$. Olkoon mitta μ_{B_r} joukon $\overline{B}(0,r)$ tasapainomitta. Tällöin joukolla K on olemassa tasapainomitta μ_K, jolle*

$$\mu_K(A) = \int_{\mathbb{R}^n} h_K(y, A) \mu_{B_r}(dy)$$

kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$. Lisäksi tasapainomitan μ_K Newtonin potentiaali on

$$g\mu_K(x) = \mathbb{P}_x(\tau_K < \infty)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

TODISTUS. Nyt μ_K on selvästi mitta, koska μ_{B_r} ja $h_K(x, \cdot)$ ovat mittoja. Lemman 3.45 ja mitan μ_K määritelmän nojalla mitta μ_K voi saada positiivisia arvoja ainoastaan joukon $(K^c)^r$ osajoukoissa. Funktio g on symmetrinen parametrien x ja y suhteen, jolloin $g(y-x) = g(x-y)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Voitaisiin osoittaa vastaavasti kuin lemman 3.50 todistuksessa, että

$$\mathbb{E}_x\Big[g(y - B_{\tau_K})\chi_{\{\tau_K<\infty\}}\Big] = \mathbb{E}_y\Big[g(x - B_{\tau_K})\chi_{\{\tau_K<\infty\}}\Big] \tag{3.9}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$ (katso tarkka todistus [**24**, s. 58]). Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Lemman 3.50 nojalla $g\mu_{B_r}(z) = 1$ kaikilla $z \in \overline{B}(0, r)$. Näin ollen yhtälö (3.9) johtaa Fubinin lauseen avulla siihen, että

$$\begin{aligned} g\mu_K(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) h_K(z, dy) \mu_{B_r}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y-z) h_K(x, dy) \mu_{B_r}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g\mu_{B_r}(y) h_K(x, dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_K(x, dy) \\ &= \mathbb{P}_x(\tau_K < \infty). \end{aligned}$$

Koska lemman 3.45 nojalla

$$\mathbb{P}_x(\tau_K < \infty) = 1,$$

kun $x \in int(K) \cup (K^c)^r$, niin mitta μ_K on todella tasapainomitta. □

Seuraava lause on yksi tämän työn päätuloksista. Lause antaa jos ja vain jos ehdon reunapisteen säännöllisyydelle. Lause on läheisessä kytköksessä kuuluisan *Wienerin testin* kanssa. Todistuksen ”vain jos” osa on helpompi, ja se seuraa melkein suoraan Borel-Cantellin lauseesta 2.12. Todistuksen ”jos” osa on haastavampi.

LAUSE 3.52. *Olkoot $n \geq 3$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä, rajoitettu ja avoin joukko. Olkoon $\boldsymbol{B}$ Brownin liike, joka lähtee pisteestä $x \in \partial\Omega$. Tällöin*

x on säännöllinen reunapiste jos ja vain jos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\theta_k) = \infty,$$

missä $\theta_k := \{\omega \in H : \tau_{\Lambda_x^k}(\omega) < \infty\}$ ja missä

$$\Lambda_x^k := \left(\overline{B}(x, 2^{-k}) \setminus B(x, 2^{-(k+1)})\right) \cap \Omega^c \ \text{ja}$$

$$\tau_{\Lambda_x^k}(\omega) := \inf\{t > 0 : B_t(\omega) \in \Lambda_x^k\}$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$.

TODISTUS. Oletetaan, että $x \in \partial\Omega$ on säännöllinen reunapiste. Tällöin määritelmän 3.35 nojalla

$$\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} = 0) = 1. \tag{3.10}$$

Tehdään antiteesi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\theta_k) < \infty.$$

Nyt tapahtumat $\theta_1, \theta_2, \cdots \in \mathcal{F}$, jolloin Borel-Cantellin lauseen 2.12 avulla saadaan

$$\mathbb{P}_x(\limsup_{k\to\infty} \theta_k) = 0.$$

Huomautuksen 2.11 nojalla tämä on sama kuin $\mathbb{P}_x(\liminf_{k\to\infty}\theta_k^c) = 1$. Tämä tarkoittaa sitä, että melkein kaikilla $\omega \in H$ on olemassa $n(\omega) \in \mathbb{N}$ siten, että $\omega \in \theta_k^c$ kaikilla $k \geq n(\omega)$. Koska $\theta_k^c = \{\tau_{\Lambda_x^k} = \infty\}$, niin tällöin melkein kaikilla $\omega \in H$ on olemassa $\epsilon(\omega) > 0$ siten, että $(B_t(\omega))_{t\geq 0}$ ei osu joukkoon $B(x,\epsilon)\cap\Omega^c$. Koska Brownin liike on jatkuva melkein kaikilla $\omega \in H$, niin tällöin $\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} = 0) < 1$. Tämä on ristiriita oletuksen (3.10) kanssa.

Oletetaan seuraavaksi, että $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}_x(\theta_k) = \infty$. Olkoon $\epsilon, \eta > 0$ mielivaltaisia. Koska ulottuvuus $n \geq 3$, niin yksittäiset pisteet ovat polaarisia Brownin liikkeelle lauseen 3.19 nojalla. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa $k = k(\epsilon,\eta) \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq\epsilon} \text{ osuu palloon } B(x,2^{-k})) < \eta. \tag{3.11}$$

Nyt lisäämällä rajoitteita ja valitsemalla luku k yhtälön (3.11) mukaisesti saadaan arvio

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} < \epsilon) = \mathbb{P}_x(\omega \in H : \bigcup_{0<t<\epsilon} B_t(\omega) \in \Omega^c)\\
&\geq \mathbb{P}_x(\omega \in H : \bigcup_{0<t<\epsilon} B_t(\omega) \in \Omega^c \cap B(x,2^{-k}))\\
&\geq \mathbb{P}_x(\bigcup_{0<t<\epsilon} B_t(\omega) \in \Omega^c \cap B(x,2^{-k}) \text{ ja } (B_t)_{t\geq\epsilon} \text{ ei osu palloon } B(x,2^{-k}))\\
&= \mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq 0} \text{ osuu } \Omega^c \cap B(x,2^{-k}) \text{ ja } (B_t)_{t\geq\epsilon} \text{ ei osu palloon } B(x,2^{-k})).
\end{aligned}$$

Käytetään vielä lemmaa 2.7, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq 0} \text{ osuu } \Omega^c \cap B(x,2^{-k}) \text{ ja } (B_t)_{t\geq\epsilon} \text{ ei osu palloon } B(x,2^{-k}))\\
&\geq \mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq 0} \text{ osuu } \Omega^c \cap B(x,2^{-k})) - \mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq\epsilon} \text{ osuu palloon } B(x,2^{-k}))\\
&> \mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq 0} \text{ osuu } \Omega^c \cap B(x,2^{-k})) - \eta.
\end{aligned}$$

Koska luvut ϵ ja η on valittu mielivaltaisesti, riittää osoittaa, että

$$\mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq 0} \text{ osuu } \Omega^c \cap B(x,2^{-k})) = 1.$$

Tällöin

$$\mathbb{P}_x(\tau_{\Omega^c} < \epsilon) > 1 - \eta,$$

mikä on juuri sitä, mitä halutaan.

Koska

$$\limsup_{n\to\infty}\theta_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\theta_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{\tau_{\Lambda_x^n} < \infty\},$$

niin tapahtuma $\limsup_{n\to\infty}\theta_n \in \mathcal{F}_0$. Tällöin Blumenthalin 0-1 lauseen 3.14 nojalla $\mathbb{P}_x(\limsup_{n\to\infty}\theta_n) \in \{0,1\}$. Osoitetaan seuraavaksi, että

$$\mathbb{P}_x(\limsup_{n\to\infty}\theta_n) > 0. \tag{3.12}$$

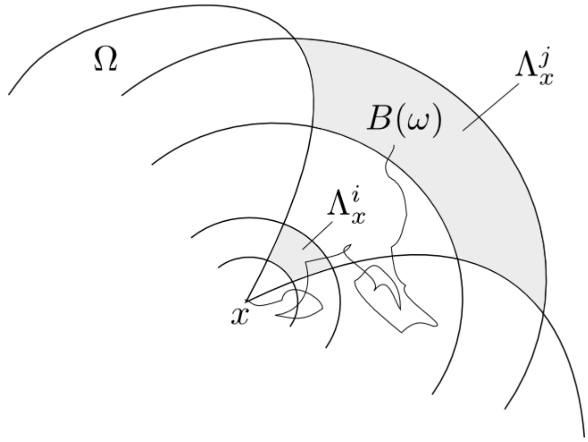
Oletuksen ja lauseen 2.25 nojalla riittää osoittaa, että

$$\mathbb{P}_x(\theta_i \cap \theta_j) \leq M\mathbb{P}_x(\theta_i)\mathbb{P}_x(\theta_j)$$

jollekin $M > 0$ ja kaikilla $|i-j| > 1$. Olkoon $i, j > 0$ siten, että $|i-j| > 1$. Nyt $\tau_{\Lambda_x^s}$ on pysäytyshetki lauseen 2.46 nojalla kaikilla $s = 1, 2, \ldots$. Muistetaan pysäytyshetkien merkintätapa (3.6). Koska indeksien i ja j välissä on ainakin yksi indeksi, niin

$$\begin{aligned}\{\theta_i \cap \theta_j\} &= \{\tau_{\Lambda_x^i} < \infty, \tau_{\Lambda_x^j} < \infty\} \\ &= \{\tau_{\Lambda_x^i} < \infty, \tau_{\Lambda_x^j} \circ \Theta_{\tau_{\Lambda_x^i}} < \infty\} \cup \{\tau_{\Lambda_x^j} < \infty, \tau_{\Lambda_x^i} \circ \Theta_{\tau_{\Lambda_x^j}} < \infty\}.\end{aligned}$$

Kuva 1 havainnollistaa tilannetta.



KUVA 1. Tilanteen joukot joillakin indekseillä $|i-j| > 1$.

Brownin liikkeen vahvan Markovin ominaisuuden (3.7) nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau_{\Lambda_x^i} < \infty, \tau_{\Lambda_x^j} \circ \Theta_{\tau_{\Lambda_x^i}} < \infty) &= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_x(\tau_{\Lambda_x^j} \circ \Theta_{\tau_{\Lambda_x^i}} < \infty | \mathcal{F}_{\tau_{\Lambda_x^i}})\chi_{\{\tau_{\Lambda_x^i} < \infty\}}\Big] \\ &= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_{B_{\tau_{\Lambda_x^i}}}(\tau_{\Lambda_x^j} < \infty)\chi_{\{\tau_{\Lambda_x^i} < \infty\}}\Big].\end{aligned} \tag{3.13}$$

Vastaavasti saadaan tulos niille ω, joille $\tau_{\Lambda_x^i} > \tau_{\Lambda_x^j}$. Lauseen 3.51 nojalla

$$\mathbb{P}_z(\tau_{\Lambda_x^j} < \infty) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-z)\mu_{\Lambda_x^j}(dy)$$

kaikilla $z \in \Lambda_x^i$. Saman lauseen nojalla myös

$$\mathbb{P}_x(\tau_{\Lambda_x^j} < \infty) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\mu_{\Lambda_x^j}(dy).$$

Newtonin potentiaaliydin g (3.5) riippuu ainoastaan muuttujasta $x \in \mathbb{R}^n$ pituuden $|x|$ kautta. Mitä suurempi pituus $|x|$ on, sitä pienempiä arvoja funktio g saa. Nyt on olemassa $M_{z,y} > 0$ siten, että

$$g(y-z) \le \frac{M_{z,y}}{2} g(y-x)$$

kaikilla $z \in \Lambda_x^i$ ja $y \in \Lambda_x^j$. Tämä arvio voidaan tehdä suoraan laskemalla kuvan 1 joukoille. Valitaan vakio $M := \sup_{z \in \Lambda_x^i, y \in \Lambda_x^j} M_{z,y}$. Vakio M on selvästi olemassa ja äärellistä. Näin ollen pätee, että

$$\mathbb{P}_z(\tau_{\Lambda_x^j} < \infty) \le \frac{M}{2} \mathbb{P}_x(\tau_{\Lambda_x^j} < \infty) \tag{3.14}$$

kaikilla $z \in \Lambda_x^i$. Koska piste $B_{\tau_{\Lambda_x^i}} \in \Lambda_x^i$, ylläolevia päätelmiä (3.13) ja (3.14) käyttämällä saadaan, että

$$\mathbb{P}_x(\tau_{\Lambda_x^i} < \infty, \tau_{\Lambda_x^j} \circ \Theta_{\tau_{\Lambda_x^i}} < \infty) \leq \frac{M}{2}\mathbb{P}_x(\tau_{\Lambda_x^i} < \infty)\mathbb{P}_x(\tau_{\Lambda_x^j} < \infty). \tag{3.15}$$

Arvio (3.15) voidaan myös tehdä vastaavasti samalla vakiolla $M > 0$, kun $\tau_{\Lambda_x^i} > \tau_{\Lambda_x^j}$. Näin ollaan todistettu, että

$$\mathbb{P}_x(\theta_i \cap \theta_j) \leq M\mathbb{P}_x(\theta_i)\mathbb{P}_x(\theta_j),$$

jolloin (3.12) pätee. Nyt tuloksesta (3.12) seuraa, että

$$\mathbb{P}_x(\limsup_{n\to\infty} \theta_n) = 1.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että melkein kaikilla $\omega \in H$ pätee: Jokaisella $h \in \mathbb{N}$ on olemassa $n = n(h,\omega) \in \mathbb{N}$ siten, että $n \geq h$ ja $\omega \in \theta_n$. Valitaan $h = k$, missä k tulee tuloksesta (3.11). Nyt $\theta_n = \theta_{n(k,\omega)} = \tau_{\Lambda_x^{n(k,\omega)}} < \infty$ ja pallo $B(x, 2^{-k}) \supset B(x, 2^{-n(k,\omega)})$ melkein kaikilla $\omega \in H$, sillä $n(k,\omega) \geq k$. Tämä antaa halutun tuloksen

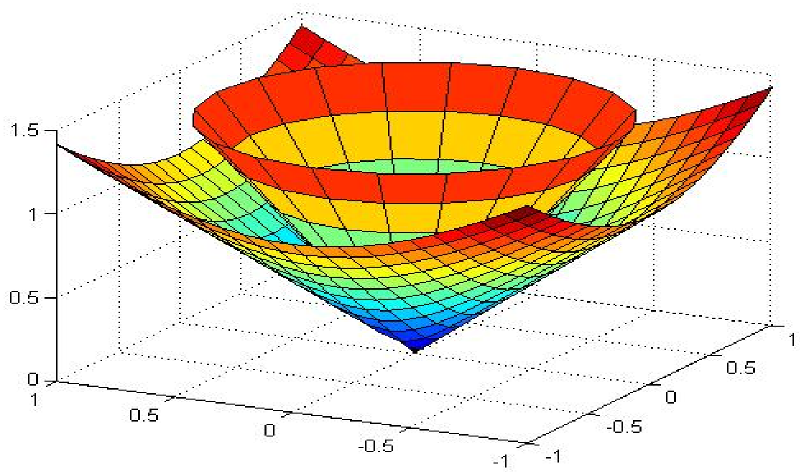
$$\mathbb{P}_x((B_t)_{t\geq 0} \text{ osuu } \Omega^c \cap B(x, 2^{-k})) = 1.$$

□

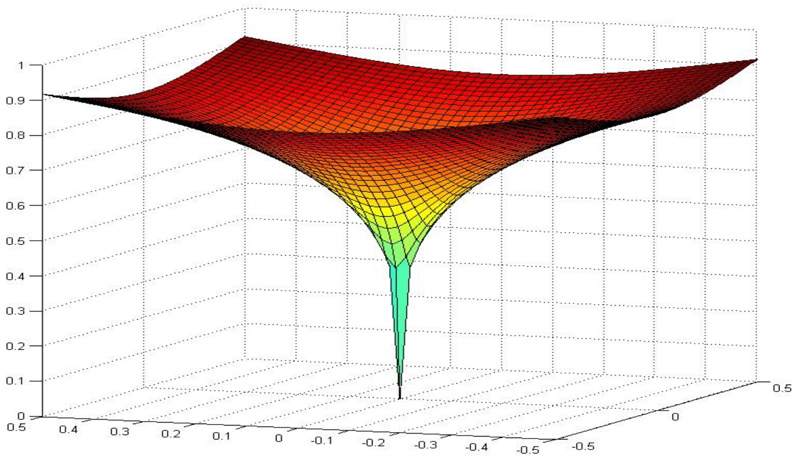
ESIMERKKI 3.53. *Lebesguen torvi* on joukko $G(\alpha)$, jonka parametrisointi on seuraava:

$$G(\alpha) := \{(x_1, x_2, x_3) \in]-1,1[^3 \colon \sqrt{x_2^2 + x_3^2} > x_1^\alpha \text{ jos } x_1 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

kaikilla $\alpha > 0$. Lauseen 3.38 avulla voidaan osoittaa, että origo on säännöllinen reunapiste, kun $\alpha \leq 1$. Vastaavasti lauseen 3.52 avulla voidaan arvioimalla todistaa, että origo on epäsäännollinen reunapiste, kun $\alpha > 1$. Kuvat 2 ja 3 havainnollistavat tilannetta.



KUVA 2. Lebesguen torvi, kun $\alpha \leq 1$.



KUVA 3. Lebesguen torvi, kun $\alpha > 1$.

LUKU 4

Häiritty köydenvetopeli

Häirityn köydenvetopelin voi formalisoida usealla eri tavalla. Käytän tässä työssä mallina Juan Manfredin, Mikko Parviaisen ja Julio Rossin kattavaa paperia *On the definition and properties of p-harmonious functions* [**19**]. Aloitetaan ensiksi pelimaailman rakentamisella, jonka jälkeen päästään käsiksi useisiin eri tuloksiin ja variaatioihin.

4.1. Häirityn köydenvetopelin säännöt ja todennäköisyysavaruus

Kiinnitetään $\epsilon > 0$. Pelataan kahden pelaajan nollasummapeliä, jossa pelialueena toimii epätyhjä, avoin ja rajoitettu joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Valitaan jokin pelin aloituspiste $x_0 \in \Omega$. Oletetaan, että käytetään painotettua kolikkoa, jossa kruunan todennäköisyys on α ja klaavan todennäköisyys on β siten, että $\alpha + \beta = 1$. Kun kolikkoa on heitetty, kruunan tapauksessa (todennäköisyydellä α), pelataan köydenvetopeliä. Köydenvetopelissä ensiksi heitetään reilua kolikkoa, jossa sekä kruunan että klaavan todennäköisyys on tasan $\frac{1}{2}$. Kolikonheiton voittaja saa päättää mihin suuntaan siirrytään pelialueessa. Siirtyminen ei voi kuitenkaan tapahtua mihin tahansa, vaan seuraava pelipiste valitaan ympyrästä $x_1 \in B(x_0, \epsilon)$. Jos ensimmäisessä kolikonheitossa saadaan klaava (todennäköisyydellä β), seuraava pelipiste valikoituu avoimesta pallosta $B(x_0, \epsilon)$ tasajakauman mukaan. Kun uusi pelipiste $x_1 \in B(x_0, \epsilon)$ on saatu valittua, tämän jälkeen pelataan uudestaan häirittyä köydenvetopeliä pisteestä x_1. Kun pelaamista jatketaan näillä säännöillä, saadaan mahdollisesti ääretön jono pelipisteitä $x_0, x_1, \ldots$, jossa x_k on satunnaismuuttuja jokaisella $k \in \mathbb{N}$.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu. Määritellään joukon Ω reunalle ϵ-vyöhyke

$$\Gamma_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : d_e(\Omega, x) \leq \epsilon\},$$

missä $d_e(\Omega, x) = \inf\{d_e(y, x), y \in \Omega\}$.

Häirittyyn köydenvetopeliin tarvitaan *maksufunktio.*

MÄÄRITELMÄ 4.2. Maksufunktio $F : \Gamma_\epsilon \to \mathbb{R}$ on jokin rajoitettu Borel-mitallinen funktio.

Häiritty köydenvetopeli päättyy, kun pelipiste osuu ensimmäisen kerran joukkoon Γ_ϵ. Olkoon $x_\tau \in \Gamma_\epsilon$ ensimmäinen pelipiste joukossa Γ_ϵ. Koska häiritty köydenvetopeli on kahdenpelaajan nollasummapeli, pelin lopuksi Pelaaja 2 maksaa Pelaajalle 1 summan $F(x_\tau)$. Tällöin siis Pelaaja 1 voittaa summan $F(x_\tau)$ ja Pelaaja 2 summan $-F(x_\tau)$. Tämä tarkoittaa sitä, että köydenvetopeliä pelattaessa Pelaaja 1 yrittää vetää peliä Pelaajan 1 edullisten arvojen suuntaan. Vastaavasti Pelaaja 2 yrittää vetää peliä Pelaajan 2 edullisten arvojen suuntaan. Tästä tuleekin nimitys *köydenvetopeli.*

Häirityn köydenvetopelin tarkka tutkiminen edellyttää, että tiedetään, mikä on käytössä oleva todennäköisyysavaruus ja erityisesti, mikä on käytössä oleva todennäköisyysmitta. Todennäköisyysavaruuden rakentamiseen tarvitaan käsitteitä *historia* ja *strategia*.

MÄÄRITELMÄ 4.3. Pelin historia k-askeleen jälkeen on vektori h_k, joka sisältää $k+1$ pelipistettä, esimerkiksi $h_k = (x_0, x_1, \dots, x_k)$. Olkoon H_k joukko, joka sisältää kaikki mahdolliset k-askeleen pelihistoriat h_k. Merkitään kaikkien äärellisten askelpituuksien historiaa H:lla, $H = \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k$.

MÄÄRITELMÄ 4.4. Pelaajan 1 strategia on funktio $S_1 : H \to \mathbb{R}^n$,

$$S_1(x_0, x_1, \dots, x_k) = x_{k+1} \in B(x_k, \epsilon),$$

kun tiedetään pelihistoria h_k ja on päädytty pelaamaan köydenvetopeliä, jonka pelivuoron voittaa Pelaaja 1. Vastaavasti Pelaajalla 2 on strategia S_2, kun tiedetään pelihistoria h_k ja on päädytty pelaamaan köydenvetopeliä, jonka pelivuoron Pelaaja 2 voittaa.

Merkitään $\Omega_\epsilon = \Omega \cup \Gamma_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella topologialla. Tämä tarkoittaa siis sitä, että joukko $\Omega_\epsilon = (\Omega_\epsilon, d_e)$ on metrinen avaruus.

Tuloavaruus $H^\infty = \Omega_\epsilon \times \Omega_\epsilon \times \dots$ on kaikkien mahdollisten pelijonojen tuloavaruus varustettuna tulotopologialla. Nyt saadaan, että satunnaismuuttuja x_k on

$$x_k : H^\infty \to \mathbb{R}^n, x_k(\omega) = \omega_k \text{ kaikille } \omega = (\omega_0, \omega_1, \dots) \in H^\infty \text{ ja kaikille } k = 0, 1, \dots$$

Olkoon $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots$ luonnollinen filtraatio, jonka satunnaismuuttujat (x_k) virittävät. Tällöin siis $\mathcal{F}_k = \sigma(x_s(\omega),\ 0 \leq s \leq k)$ on pienin σ -algebra, jonka suhteen satunnaismuuttujat $x_0, x_1, \dots, x_k$ ovat mitallisia ja stokastinen prosessi $X = (x_k)_{k=0}^{\infty}$ on sopiva.

Merkitään satunnaismuuttujalla $\tau(\omega)$ pelin päättymishetkeä. Tällöin

$$\tau(\omega) = \inf\{k = 0, 1, \dots : x_k(\omega) \in \Gamma_\epsilon\}$$

Satunnaismuuttuja $\tau(\omega)$ on pysäytyshetki filtraation $(\mathcal{F}_k)_{k=0}^{\infty}$ suhteen, sillä joukko Γ_ϵ on suljettu.

Halutaan, että todennäköisyymitta ottaa huomioon pelin säännöt. Todennäköisyysmitan ydin piilee Pelaajien 1 ja 2 strategioissa S_1 ja S_2 sekä aloituspisteessä $x_0 \in \Omega$. Niiden avulla voidaan määritelllä alkusiirtymätodennäköisyys $\delta_{x_0}(A)$ ja siirtymätodennäköisyydet

$$\begin{aligned} \pi_{S_1,S_2}(x_0(\omega), \dots, x_k(\omega), A) = {} & \beta \frac{| A \cap B(x_k(\omega), \epsilon) |}{| B(x_k(\omega), \epsilon) |} + \frac{\alpha}{2} \delta_{S_1(x_0(\omega), \dots, x_k(\omega))}(A) \\ & + \frac{\alpha}{2} \delta_{S_2(x_0(\omega), \dots, x_k(\omega))}(A) \end{aligned} \tag{4.1}$$

kaikille $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ja kaikille $k \in \mathbb{N}$. Tämän jälkeen määritellään todennäköisyysjakauma induktiivisesti äärelliselle määrälle peliaskelia siirtymätodennäköisyyksien (4.1) avulla. Merkinnällä $| \cdot |$ tarkoitetaan aina avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukon Lebesguen mittaa.

MÄÄRITELMÄ 4.5. Häirityssä köydenvetopelissä todennäköisyysjakaumat määritellään induktiivisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\mu^{0,x_0}_{S_1,S_2}(A_0) = \delta_{x_0}(A_0) \text{ ja}\\
&\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2}(A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_k)\\
&= \int_{A_0\times A_1\times \ldots A_{k-1}} \pi_{S_1,S_2}(x_0(\omega), \ldots, x_{k-1}(\omega), A_k) d\mu^{k-1,x_0}_{S_1,S_2}(x_0(\omega), \ldots, x_{k-1}(\omega))
\end{aligned}$$

kaikille $k = 1, 2, \ldots$.

Käyttämällä Kolmogorovin laajennuslausetta saadaan määrättyä yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}$ koko perusjoukkoon H^∞ siten, että mitalla $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}$ on halutut ominaisuudet.

LAUSE 4.6. *Olkoot $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{T}$ indeksijoukko ja $(\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2})_{t_1,\ldots,t_k}$ määritelmän 4.5 mukainen todennäköisyysjakauma. Tällöin $(\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2})_{t_1,\ldots,t_k}$ täyttää määritelmän 2.36 konsistentti käsitteen kriteerit.*

TODISTUS. Tulee osoittaa, että ominaisuudet (i) ja (ii) pätevät. Olkoon

$$\tilde{\pi} : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$$

mielivaltainen permutaatio. Nyt integraalit ovat rajoitettuja, jolloin Fubinin lause antaa, että integrointijärjestys ei muuta lopputulosta. Tällöin

$$(\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2})_{t_1,\ldots,t_k}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_k}) = (\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2})_{t_{\tilde{\pi}(1)},\ldots,t_{\tilde{\pi}(k)}}(B_{t_{\tilde{\pi}(1)}} \times \cdots \times B_{t_{\tilde{\pi}(k)}}).$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
&(\mu^{k+1,x_0}_{S_1,S_2})_{t_1,\ldots,t_k}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_k} \times \Omega_\epsilon)\\
&= \int_{B_{t_1}\times B_{t_2}\times\ldots B_{t_k}\times\Omega_\epsilon} \Big(\beta \frac{\mid \Omega_\epsilon \cap B(x_{t_k}(\omega), \epsilon) \mid}{\mid B(x_{t_k}(\omega), \epsilon) \mid} + \frac{\alpha}{2}\delta_{S_1(x_{t_1}(\omega),\ldots,x_{t_k}(\omega))}(\Omega_\epsilon)\\
&+ \frac{\alpha}{2}\delta_{S_2(x_{t_1}\omega),\ldots,x_{t_k}(\omega))}(\Omega_\epsilon)\Big) d\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2}(x_{t_1}(\omega), \ldots, x_{t_k}(\omega))\\
&= \int_{B_{t_1}\times B_{t_2}\times\ldots B_{t_k}\times\Omega_\epsilon} 1 d\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2}(x_{t_1}(\omega), \ldots, x_{t_k}(\omega))\\
&= (\mu^{k,x_0}_{S_1,S_2})_{t_1,\ldots,t_k}(B_{t_1} \times \cdots \times B_{t_k}).
\end{aligned}$$

□

Odotettavissa oleva pelin lopputulos annetuilla strategioilla S_1 ja S_2 ja annetulla lähtöpisteellä $x_0 \in \Omega$ on

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)] = \int_{H^\infty} F(x_\tau(\omega)) d\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}(\omega).$$

Häiritty köydenvetopeli päättyy $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}$ melkein varmasti kaikilla strategioilla S_1, S_2 ja kaikilla lähtöpisteillä $x_0 \in \Omega$. Tämä johtuu siitä, että häirityssä köydenvetopelissä pätee 0-1 laki. Tämä 0-1 laki toimii, koska pelialue Ω on rajoitettu ja koska häirityssä köydenvetopelissä $\beta > 0$, jolloin aidosti nollaa suuremmalla todennäköisyydellä seuraava pelipiste x_k valitaan pallosta $B(x_{k-1}, \epsilon)$ tasajakauman mukaan.

4.2. Arvofunktiot ja p-harmonious funktiot

Määritellään ensiksi Pelaajien 1 ja 2 arvofunktiot. Pelaajan 1 arvofunktio kertoo parhaan mahdollisen odotettavissa olevan lopputuloksen, jonka Pelaaja 1 voi ainakin saada, pelasi Pelaaja 2 sitten kuinka hyvin tahansa. Vastaavasti Pelaajan 2 arvofunktio kertoo parhaan mahdollisen odotettavissa olevan lopputuloksen, jonka Pelaaja 2 voi ainakin saada, pelasi Pelaaja 1 sitten kuinka hyvin tahansa.

MÄÄRITELMÄ 4.7. Pelaajan 1 arvofunktio on

$$u_1^\epsilon(x_0) = \sup_{S_1} \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)]$$

ja Pelaajan 2 arvofunktio on

$$u_2^\epsilon(x_0) = \inf_{S_2} \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)].$$

Kuten muistetaan, kahden pelaajan nollasummapelissä Pelaajan 2 tappio on Pelaajan 1 voitto. Tällöin voidaankin pitää mielekkäänä, että Pelaajan 1 odotettu minimivoitto on saman suuruinen kuin Pelaajan 2 odotettu maksimitappio. Näin tapahtuu, kun pelillä on *arvo*.

MÄÄRITELMÄ 4.8. Kahden pelaajan nollasummapelillä on arvo, kun $u_1^\epsilon = u_2^\epsilon$

Jotta päästäisiin osoittamaan, että häirityllä köydenvetopelillä on arvo, osoitetaan ensin Pelaajien 1 ja 2 arvofunktioiden yhteys niin sanottuihin *p-harmonious* funktioihin.

MÄÄRITELMÄ 4.9. Funktio u on p-harmonious funktio joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ reuna-arvoilla F, missä $F : \Gamma_\epsilon \to \mathbb{R}$ on maksufunktio, jos

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B(x,\epsilon)} u + \inf_{B(x,\epsilon)} u \Big) + \beta \fint_{B(x,\epsilon)} u \, dy \quad \text{kaikilla } x \in \Omega \quad \text{ja} \\ u(x) &= F(x) \text{ kaikilla } x \in \Gamma_\epsilon, \end{aligned}$$

missä $\alpha = \frac{p-2}{p+n}$, $\beta = \frac{2+n}{p+n}$ ja $2 \leq p < \infty$.

Merkinnällä $\fint$ tarkoitetaan keskiarvointegraalia

$$\fint_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon \, dy = \frac{1}{|B(x,\epsilon)|} \int_{B(x,\epsilon)} u_\epsilon \, dy.$$

Osoittautuu, että annetulla maksufunktiolla F joukossa Ω on olemassa yksikäsitteinen p-harmonious funktio. Tämän tuloksen todistuksen voi lukea Hannes Luiron, Mikko Parviaisen ja Eero Saksmanin paperista [**18**].

Oletetaan, että pelataan häirittyä köydenvetopeliä avoimessa ja rajoitetussa joukossa Ω ja ollaan kiinnitetty arvot $x_0 \in \Omega$, $\epsilon > 0$, $\alpha \geq 0$ ja $\beta \geq 0$ siten, että $\alpha + \beta = 1$, ja maksufunktio F. Nyt voidaan osoittaa Pelaajien 1 ja 2 määritelmän 4.7 mukaisten arvofunktioiden yhteys p-harmonious funktioihin. Pelaajien 1 ja 2 arvofunktiot toteuttavat niin sanotun *Dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen.* Lisäksi voidaan osoittaa tärkeä tulos, joka sanoo, että häirityllä köydenvetopelillä on arvo.

LAUSE 4.10. *Pelaajan 1 arvofunktiolle pätee Dynaamisen ohjelmoinnin periaate:*

$$u_1^\epsilon(x_0) = \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B(x_0,\epsilon)} u_1^\epsilon + \inf_{B(x_0,\epsilon)} u_1^\epsilon\Big) + \beta \fint_{B(x_0,\epsilon)} u_1^\epsilon \, dy, \quad x_0 \in \Omega,$$
$$u_1^\epsilon(x_0) = F(x_0), \quad x_0 \in \Gamma_\epsilon.$$

Pelaajan 2 arvofunktiolle pätee samanlainen yhtälö. Lisäksi pätee, että häiritylllä köydenvetopelillä on arvo. Tällöin siis

$$u = u_1^\epsilon = u_2^\epsilon,$$

missä funktio u on yksikäsitteinen p-harmonious funktio.

TODISTUS. Todistetaan ensiksi, että $u_1^\epsilon \leq u_2^\epsilon$. Infimumin ja supremumin ominaisuuksista johtuen

$$\inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[F(x_\tau)] \leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2^*}[F(x_\tau)]$$

kaikilla strategioilla S_1^* ja S_2^*. Vastaavasti pätee, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2^*}[F(x_\tau)] \leq \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[F(x_\tau)]$$

kaikilla strategioilla S_1^* ja S_2^*. Näin ollen

$$\inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[F(x_\tau)] \leq \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[F(x_\tau)] \tag{4.2}$$

kaikilla strategioilla S_1^* ja S_2^*. Koska (4.2) pätee kaikilla strategioilla S_1^* ja S_2^*, pätee se myös, kun otetaan supremum strategioiden S_1 yli ja infimum strategioiden S_2 yli. Näin ollen

$$\sup_{S_1}\inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)] \leq \inf_{S_2}\sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)].$$

Huomaa, että ylläoleva todistus perustui pelkästään infimumin ja supremumin ominaisuuksiin.

Todistetaan seuraavaksi, että $u_2^\epsilon \leq u$. Tällöin vastaavasti $u_1^\epsilon \geq u$. Todistuksen ydin idea on siinä, että Pelaaja 2 pelaa strategialla, joka riippuu funktiosta u. Olkoon $\lambda > 0$ mielivaltainen ja olkoon S_2^* sellainen Pelaajan 2 strategia, jossa hän yrittää minimoida p-harmonious funktiota u melkein täydellisesti. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ pisteessä $x_{k-1} \in \Omega$, Pelaaja 2 valitsee sellaisen pisteen $x_k \in B(x_{k-1}, \epsilon)$, että

$$u_1^\epsilon(x_k) \leq \inf_{B(x_{k-1},\epsilon)} u + \lambda 2^{-k}$$

aina kun Pelaaja 2 saa pelivuoron itselleen. Pelaaja 2 ei siis yritä minimoida omaa arvofunktiotaan u_2^ϵ vaan p-harmonious funktiota u. Merkitään

$$M_k := u(x_k) + \lambda 2^{-k}$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Osoittautuu, että stokastisesta prosessista $(M_k)_{k=1}^\infty$ tulee supermartingaali, kun Pelaaja 2 pelaa strategialla S_2^*. Tämän osoittamiseksi pitää näyttää kolme kohtaa:

(1) M_k on $\mathcal{F}_k$ -mitallinen kaikilla $k = 0, 1, \ldots$.
(2) $\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}|M_k| < \infty$ kaikilla $k = 0, 1, \ldots$.
(3) $\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[M_k \,|\mathcal{F}_{k-1}] \leq M_{k-1}$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$.

Kohta (1) seuraa siitä, että satunnaismuuttuja x_k on $\mathcal{F}_k$-mitallinen ja funktio u on Borel -mitallinen. Näin ollen yhdistetty kuvaus $u(x_k)$ on $\mathcal{F}_k$ -mitallinen. Lisäksi vakiokuvaus on mitallinen kaikille σ-algebroille, ja kahden mitallisen kuvauksen summa on myös mitallinen. Kohta (2) seuraa siitä, että maksufunktio F on rajoitettu, jolloin myös p-harmonious funktio u on rajoitettu. Kohta (3) johtuu siitä, että Pelaaja 2 käyttää strategiaa S_2^* ja funktio u noudattaa Dynaamisen ohjelmoinnin periaatetta. Tällöin saadaan, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[M_k \,|\mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[u(x_k) + \lambda 2^{-k} \,|\mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[u(x_k) \,|\mathcal{F}_{k-1}] + \lambda 2^{-k} \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B(x_{k-1},\epsilon)} u + \inf_{B(x_{k-1},\epsilon)} u + \lambda 2^{-k}\Big) + \beta \fint_{B(x_{k-1},\epsilon)} u \, dy + \lambda 2^{-k} \\
&\leq \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B(x_{k-1},\epsilon)} u + \inf_{B(x_{k-1},\epsilon)} u\Big) + \beta \fint_{B(x_{k-1},\epsilon)} u \, dy + \lambda 2^{-k} + \lambda 2^{-k} \\
&= u(x_{k-1}) + \lambda 2^{-k+1} = M_{k-1}.
\end{aligned}$$

Tiedetään, että häiritty köydenvetopeli päättyy melkein varmasti. Toisin sanoen

$$\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}(\tau < \infty) = 1$$

kaikilla strategioilla S_1, S_2 ja kaikilla lähtöpisteillä $x_0 \in \Omega$. Lisäksi supermartingaaliprosessi $(M_k)_{k=1}^{\infty}$ on rajoitettu jokaisella $\omega \in H^\infty$. Huomaa, että $x_\tau \in \Gamma_\epsilon$. Nyt voidaan käyttää Doobin optimaalisen pysäytyksen teoriaa eli lausetta 2.52 ja saadaan

$$\begin{aligned}
u_2^\epsilon(x_0) &= \inf_{S_2} \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)] \\
&\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[\underbrace{F(x_\tau)}_{u(x_\tau)}] \\
&\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[\underbrace{u(x_\tau) + \lambda 2^{-\tau}}_{M_\tau}] \\
&\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[M_0] = M_0 = u(x_0) + \lambda.
\end{aligned}$$

Koska $\lambda > 0$ on valittu mielivaltaisesti, väite on todistettu. $\square$

Intuitiivisesti Dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen toimivuus on järkevää. Joka kerta kun häirityssä köydenvetopelissä päädytään pelaamaan köydenvetopeliä (todennäköisyydellä α), Pelaaja 1 voittaa pelivuoron itselleen todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$, jolloin hän on saanut pelivuoron todennäköisyydellä $\frac{\alpha}{2}$. Pelivuoron saatuaan hän siirtää pelimerkin kohtaan, joka maksimoi odotusarvoa. Vastaavasti Pelaaja 2 saa pelivuoron todennäköisyydellä $\frac{\alpha}{2}$ ja tällöin hän siirtää pelimerkin kohtaan, joka minimoi odotusarvoa. Todennäköisyydellä β pelimerkki siirtyy tasajakauman mukaan pallossa $B(x_0, \epsilon)$. Summaamalla eri vaihtoehdot ja kertomalla eri vaihtoehtojen todennäköisyydellä saadaan Dynaamisen ohjelmoinnin periaate.

4.3. Yhteys p-harmonisiin funktioihin

Lineaarisen Dirichlet'n ongelman yhteydessä törmättiin harmonisiin funktioihin, jotka ratkaisevat klassisessa mielessä yhtälön (3.3). Harmoniset funktiot ovat tärkeitä esimerkkejä niin sanotuista lineaarisista elliptisistä yhtälöistä. Harmonisilla funktioilla on vastineensa epälineaarisissa elliptisissä yhtälöissä. Näitä funktioita kutsutaan *p-harmonisiksi* funktioiksi.

Kiinnitetään epätyhjä, rajoitettu ja avoin joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Funktio $u \in C^2$, jolle $|\nabla u| \neq 0$ joukossa Ω, on p-harmoninen funktio (klassisessa mielessä), kun

$$
\begin{aligned}
\triangle_p u &:= \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \\
&= |\nabla u|^{p-2}\Big((p-2)|\nabla u|^{-2}\triangle_\infty u + \triangle u\Big) \\
&= |\nabla u|^{p-2}\Big((p-2)|\nabla u|^{-2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

jokaisessa pisteessä $x \in \Omega$. Yhtälöä (4.3) sanotaan *p-Laplacen* yhtälöksi. Nyt ei kuitenkaan voida määritellä p-harmonisia funktioita pelkästään klassisessa mielessä, sillä p-harmoniselta funktiolta u vaaditut ominaisuudet (kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvuus ja gradientin normin nollasta eroavaisuus) ovat liian vahvoja vaatimuksia. Määritellään p-harmoniset funktiot *viskositeettiratkaisujen* kautta. Huomaa, että p-harmonisten funktioiden määritelmä viskositeettimielessä on heikompi kuin klassisessa mielessä. Lisäksi 2-harmoninen funktio on jo aiemmin esille tullut harmoninen funktio.

Määritelmä 4.11. Funktio $u : \Omega \to]-\infty, \infty]$ on alhaalta *puolijatkuva* pisteessä $s \in \Omega$, jos

$$\liminf_{x \to s} u(x) \geq u(s).$$

Vastaavasti funktio $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ on ylhäältä puolijatkuva pisteessä $s \in \Omega$, jos

$$\limsup_{x \to s} u(x) \leq u(s).$$

Määritelmä 4.12. Funktio $v : \Omega \to]-\infty, \infty]$ on yhtälön $\triangle_p v = 0$ viskositeettisuperratkaisu joukossa Ω, jos

(i) v on alhaalta puolijatkuva joukossa Ω,
(ii) $v \not\equiv \infty$ ja
(iii) jokaiselle sellaiselle $x_0 \in \Omega$ ja $\phi \in C^2(\Omega)$, jolle $v(x_0) = \phi(x_0), v(x) > \phi(x)$ kaikilla $x \neq x_0$ ja $\nabla\phi(x_0) \neq 0$, pätee $\triangle_p \phi(x_0) \leq 0$.

Lisäksi funktio $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ on viskositeettisubratkaisu joukossa Ω, jos $v = -u$ on viskositeettisuperratkaisu joukossa Ω. Sanotaan, että funktio u on yhtälön $\triangle_p u = 0$ viskositeettiratkaisu, jos se on sekä viskositeettisuperratkaisu että viskositeettisubratkaisu. Tällöin u on myös jatkuva, koska u on puolijatkuva alhaalta ja ylhäältä. Jos funktio u on viskositeettiratkaisu, funktiota u sanotaan p-harmoniseksi funktioksi.

Huomautus 4.13. Klassinen ratkaisu on viskositeettiratkaisu suoraan määritelmän nojalla. Lisäksi tarvitaan tietoa, että p-Laplacen yhtälö on elliptinen. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikilla $\phi_1, \phi_2 \in C^2(\Omega)$ siten, että $\phi_1 \leq \phi_2$ ja että $\nabla\phi_1(x) \neq 0$ ja $\nabla\phi_2(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Omega$ pätee

$$\triangle_p \phi_2 \leq \triangle_p \phi_1.$$

Häiritylla köydenvetopelillä on arvo, ja Pelaajien 1 ja 2 arvofunktiot toteuttavat Dynaamisen ohjelmoinnin periaatteen lauseen 4.10 nojalla. Tämä tarkoittaa sitä, että $u_\epsilon = u_1^\epsilon = u_2^\epsilon$ alueessa Ω, missä p-harmonious funktio u_ϵ on olemassa ja yksikäsitteinen kaikilla $\epsilon > 0$. Mielenkiintoinen kysymys liittyy siihen, mitä tapahtuu arvofunktiolle u_ϵ, kun $\epsilon \to 0$. On hyvin tunnettu tieto, että harmoninen funktio u, jolle $\triangle u = \triangle_2 u = 0$ joukossa Ω, toteuttaa niin sanotun *keskiarvoperiaatteen*. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$u(x) = \fint_{B(x,\epsilon)} u(y)\ dy$$

kaikilla $x \in \Omega$ ja $\epsilon > 0$ siten, että $B(x, \epsilon) \subset \Omega$. Häirityssä köydenvetopelissä tämä tarkoittaa tilannetta $\alpha = 0$ ja $\beta = 1$. Jean Archer ja Erwan le Gruyer loivat pohjan näiden asioiden tutkimiselle paperissa [**1**] vuonna 1998, ja Le Gruyer osoitti alueen pienimmän Lipschitz-vakion omaavan jatkeen yhteyden ääretönharmoniseen funktioon u, jolle

$$\triangle_\infty u := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

paperissaan [**16**] vuonna 2007. Le Gruyerin tuloksesta huomattiin, että köydenvetopelin arvofunktio suppenee säteen pienentyessä kohti ääretönharmonista funktiota. Häirityssä köydenvetopelissä tämä vastaa tilannetta $\alpha = 1$ ja $\beta = 0$. Koska

$$\triangle_p u = |\nabla u|^{p-2}\big((p-2)|\nabla u|^{-2}\triangle_\infty u + \triangle u\big),$$

on mielenkiintoista tietää, suppeneeko häirityn köydenvetopelin p-harmonious arvofunktio u_ϵ kohti p-harmonista funktiota u_p, kun $\epsilon \to 0$. Suppeneminen tapahtuu, kuten Juan Manfredin, Mikko Parviaisen ja Julio Rossin paperista [**19**] ja Yuval Peresin ja Scott Sheffieldin paperista [**22**] voi lukea.

LEMMA 4.14. *Olkoot $\epsilon > 0$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko. Olkoon u_p p-harmoninen funktio avoimessa joukossa Ω siten, että $|\nabla u_p| \neq 0$ kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin*

$$u_p(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B(x,\epsilon)} u_p + \inf_{B(x,\epsilon)} u_p\right) + \beta \fint_{B(x,\epsilon)} u_p\ dy + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

kaikilla $x \in \overline{\Omega}$.

TODISTUS. Oletuksen mukaan funktio u_p on p-harmoninen funktio joukossa Ω ja $|\nabla u_p| \neq 0$ kaikilla $x \in \Omega$. Tällöin

$$(p-2)|\nabla u_p|^{-2}\triangle_\infty u_p + \triangle u_p = 0.$$

Voidaan osoittaa, että ominaisuus $|\nabla u_p| \neq 0$ kaikilla $x \in \Omega$ johtaa siihen, että funktio u_p on reaalianalyyttinen. Tarkempia lisätietoja voi lukea esimerkiksi Emmanuele DiBenedetton paperista [**5**]. Reaalianalyyttisyyden nojalla voidaan käyttää *Taylorin kaavaa* p-harmoniseen funktioon u_p joukossa $B(x, \epsilon)$ jokaisella $x \in \Omega$. Saadaan, että

$$u_p(y) = u_p(x) + \nabla u_p(x)^T(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T D^2 u_p(x)(y-x) + \mathcal{O}(|y-x|^3) \tag{4.4}$$

joukossa $B(x,\epsilon)$, kun $x \in \Omega$. Merkintä A^T tarkoittaa matriisin A *transpoosia*. Keskiarvointegraali vakion yli antaa saman vakion. Lisäksi keskiarvointegraali gradienttitermistä $\nabla u_p(x)^T(y-x)$ on nolla, koska vastakkaismerkkiset termit kumoavat toisensa. Tällöin myös keskiarvointegraali toisen asteen termistä $(y-x)^T D^2 u_p(x)(y-x)$ jättää jäljelle ainoastaan termit $\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2}$ jokaisella i matriisista $D^2 u_p(x)$, koska integraali gradienttitermien yli antaa jälleen nollan. Näin ollen (4.4) antaa yhdessä muuttujanvaihtokaavan kanssa, että

$$\begin{aligned}
\fint_{B(x,\epsilon)} u_p \, dy &= u_p(x) + 0 + \frac{1}{2}\fint_{B(x,\epsilon)} (y-x)^T D^2 u_p(x)(y-x)\, dy + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= u_p(x) + \frac{1}{2}\fint_{B(x,\epsilon)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2}(x)(x_i-y_i)^2 \, dy + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= u_p(x) + \frac{|\partial B(x,\epsilon)|}{2n|B(x,\epsilon)|}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2}(x)\int_0^\epsilon r^2 r^{n-1} dr + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
&= u_p(x) + \frac{\epsilon^2}{2(n+2)}\triangle u_p(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Gradientin suunta on melkein maksimaalinen suunta. Tällöin jälleen Taylorin kaavan avulla termien kumoutumisesta johtuen saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\sup_{B(x,\epsilon)} u_p + \inf_{B(x,\epsilon)} u_p\Big) \\
&\approx \frac{1}{2}\bigg(u_p\Big(x + \epsilon\frac{\nabla u_p(x)}{|\nabla u_p(x)|}\Big) + u_p\Big(x - \epsilon\frac{\nabla u_p(x)}{|\nabla u_p(x)|}\Big)\bigg) \\
&= u_p(x) + \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla u_p|^{-2}\triangle_\infty u_p(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

Ylläolevassa likiarvossa virhe on vähintään kolmatta astetta (katso paperista [**22**]). Valitaan vakiot $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että

$$\alpha = \frac{p-2}{p+n} \quad \text{ja } \beta = \frac{2+n}{p+n}.$$

Tällöin $\alpha + \beta = 1$. Ylläolevilla laskuilla saadaan vakioiden α ja β avulla, että

$$u_p(x) = \frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B(x,\epsilon)} u_p + \inf_{B(x,\epsilon)} u_p\Big) + \beta\fint_{B(x,\epsilon)} u_p \, dy + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

kaikilla $x \in \overline{\Omega}$, kun $\epsilon \to 0$. Huomaa, että virhetermi ei riipu pisteestä x. □

Seuraavan tuloksen nojalla p-harmonious arvofunktio u_ϵ suppenee tasaisesti kohti p-harmonista funktiota u_p säteen pienentyessä, kunhan p-harmonisen funktion u_p gradientti ei häviä yhdessäkään alueen pisteessä.

LAUSE 4.15. *Olkoot $\epsilon > 0$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko. Olkoon u_p p-harmoninen funktio avoimessa joukkossa $\Omega' \supset \Gamma_\epsilon \cup \Omega$ siten, että $|\nabla u_p| \neq 0$ kaikilla $x \in \Omega'$. Olkoot $F : \Gamma_\epsilon \to \mathbb{R}$ sellainen maksufunktio, jolle $F(x) = u_p(x)$ kaikilla $x \in \Gamma_\epsilon$, ja u_ϵ häirityn köydenvetopelin arvofunktio. Tällöin*

$$u_\epsilon \to u_p \textit{ tasaisesti joukossa } \overline{\Omega},$$

kun $\epsilon \to 0$.

Todistus. Reunafunktio F on todella maksufunktio, koska F on jatkuva, jolloin F on rajoitettu Borel-funktio seurauksen 2.16 nojalla. Lemman 4.14 nojalla

$$u_p(x) = \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B(x,\epsilon)} u_p + \inf_{B(x,\epsilon)} u_p\right) + \beta \fint_{B(x,\epsilon)} u \, dy + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

kaikilla $x \in \overline{\Omega}$, kun $\epsilon \to 0$.

Olkoot $\eta > 0$ ja lähtöpiste $x_0 \in \Omega$ mielivaltaisia. Oletetaan seuraavaksi, että Pelaaja 1 pelaa häirittyä köydenvetopeliä strategialla S_1^*. Strategia S_1^* on sellainen, että Pelaaja 1 yrittää melkein maksimoida funktiota u_p aina, kun hän saa pelivuoron itselleen. Tämä tarkoittaa sitä, että jos Pelaaja 1 saa pelivuoron itselleen hetkellä k, hän valitsee pisteen $x_k \in B(x_{k-1}, \epsilon)$ siten, että

$$u_p(x_k) \geq \sup_{B(x_{k-1},\epsilon)} u_p - \eta 2^{-k}.$$

Olkoon $C_1 > 0$ siten, että $|\mathcal{O}(\epsilon^3)| \leq C_1 \epsilon^3$. Osoitetaan, että $M = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ on submartingaali, kun Pelaaja 1 pelaa strategialla S_1^* ja

$$M_k = u_p(x_k) + C_1 k \epsilon^3 - \eta 2^{-k}$$

kaikilla $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Olkoon $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Nyt M_k on selvästi $\mathcal{F}_k$-mitallinen, sillä satunnaismuuttuja x_k on $\mathcal{F}_k$ -mitallinen ja funktio u_p on jatkuva, jolloin $u_p(x_k)$ on $\mathcal{F}_k$ -mitallinen. Lisäksi vakiofunktio on mitallinen minkä tahansa σ-algebran suhteen ja mitallisten funktioiden summa on aina myös mitallinen. Koska reunafunktio on rajoitettu, saadaan myös, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*, S_2} |M_k| < \infty.$$

Strategia S_1^* antaa, että jokaisella $k = 1, 2, \ldots$ pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*, S_2}[M_k | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*, S_2}[u_p(x_k) + C_1 k \epsilon^3 - \eta 2^{-k} | \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*, S_2}[u_p(x_k) | \mathcal{F}_{k-1}] + C_1 k \epsilon^3 - \eta 2^{-k} \\
&\geq \frac{\alpha}{2}\left(\sup_{B(x_{k-1},\epsilon)} u_p - \eta 2^{-k} + \inf_{B(x_{k-1},\epsilon)} u_p\right) + \beta \fint_{B(x_{k-1},\epsilon)} u_p \, dy \\
&+ C_1 k \epsilon^3 - \eta 2^{-k} \\
&\geq u_p(x_{k-1}) + C_1 (k-1) \epsilon^3 - \eta 2^{-(k-1)} \\
&= M_{k-1}.
\end{aligned}$$

Huomautuksen 2.53 nojalla Doobin optimaalisen pysäytyksen teoria eli lause 2.52 toimii myös submartingaaleille. Lisäksi tiedetään, että häiritty köydenvetopeli päättyy melkein varmasti kaikilla strategioilla ja jokaisella lähtöpisteellä ja että submartingaaliprosessi M on rajoitettu jokaisella $\omega \in H$. Muistetaan, että häiritYllä köydenvetopelillä on arvo jokaisella $\epsilon > 0$. Näin ollen saadaan, että

$$\begin{aligned} u_\epsilon(x_0) &= u_1^\epsilon(x_0) \\ &= \sup_{S_1} \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)] \\ &\geq \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[u_p(x_\tau)] \\ &\geq \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[u_p(x_\tau) + C_1\tau\epsilon^3 - \eta 2^{-k} - C_1\tau\epsilon^3) \\ &\geq \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2} M_0 - C_1\epsilon^3 \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau] \\ &= u_p(x_0) - C_1\epsilon^3 \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau] - \eta. \end{aligned}$$

Huomaa, että ylläolevissa päättelyissä ei otettu missään vaiheessa kantaa siihen, minkälaisella strategialla Pelaaja 2 pelaa.

Oletetaan seuraavaksi, että Pelaaja 2 pelaa strategialla S_2^*. Strategia S_2^* on sellainen, jossa Pelaaja 2 yrittää melkein minimoida funktioita u_p. Tämä tarkoittaa sitä, että jos Pelaaja 2 saa pelivuoron itselleen hetkellä k, hän valitsee pisteen $x_k \in B(x_{k-1}, \epsilon)$ siten, että

$$u_p(x_k) \leq \inf_{B(x_{k-1},\epsilon)} u_p + \eta 2^{-k}.$$

Nyt täysin vastaavasti kuin aikaisemminkin voidaan osoittaa, että Pelaajan 2 pelatessa strategialla S_2^*, prosessi $\tilde{M} = (\tilde{M}_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ on supermartingaali, missä

$$\tilde{M}_k = u_p(x_k) - C_1 k\epsilon^3 + \eta 2^{-k}.$$

Tällä kertaa ei otettu kantaa siihen, miten Pelaaja 1 haluaa pelata. Ylläolevien päättelyiden nojalla saadaan lopulta arvio

$$u_p(x_0) - C_1\epsilon^3 \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau] - \eta \leq u_\epsilon(x_0) \leq u_p(x_0) + C_1\epsilon^3 \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[\tau] + \eta. \tag{4.5}$$

Kun $\eta \to 0$, väite on todistettu arvion (4.5) nojalla, kunhan vielä osoitetaan, että on olemassa $C > 0$ siten, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau] \leq C\epsilon^{-2}. \tag{4.6}$$

Symmetrian nojalla täysin vastaavalla päättelyllä tuloksesta (4.6) seuraa, että on olemassa myös $\tilde{C} > 0$ siten, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2^*}[\tau] \leq \tilde{C}\epsilon^{-2}.$$

Koska $|\nabla u_p| \neq 0$, Pelaajan 1 strategian S_1^* mukaisesti valitsema pelipiste $x_k \in B(x_{k-1}, \epsilon)$ ei voi olla koskaan ympyrän keskipiste x_k. Oletetaan, että $\eta > 0$ on niin pieni, että on olemassa $C_2 > 0$ siten, että

$$u_p(x_k) - u_p(x_{k-1}) \geq C_2\epsilon,$$

kunhan Pelaaja 1 saa pelivuoron itselleen, ja ϵ on riittävän pieni. Näin ollen saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[(u_p(x_k)-u_p(x_{k-1}))^2|\mathcal{F}_{k-1}] &\geq \frac{\alpha}{2}((C_2\epsilon)^2+0)+0\\ &= \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2.\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[(M_k-M_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[(u_p(x_k)-u_p(x_{k-1})+C_1\epsilon^3+\eta 2^{-k})^2|\mathcal{F}_{k-1}]\\ &\geq \frac{\alpha}{2}\big((C_2\epsilon+C_1\epsilon^3+\eta 2^{-k})^2+0\big)+0\\ &\geq \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2.\end{aligned}$$

Ylläolevassa käytettiin myös hyväksi sitä, että toiseen korotus on kasvava funktio positiivisilla arvoilla. Toisin sanoen $(x+a)^2 \geq x^2$, kun $x, a \geq 0$. Osoitetaan seuraavaksi, että $Z = (Z_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ on submartingaali, kun

$$Z_k := M_k^2 - M_0^2 - \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2 k$$

jokaisella $k \in \mathbb{Z}_+$ ja kun Pelaaja 1 pelaa strategialla S_1^*. Samoilla perusteilla kuin aikaisemminkin, prosessi Z on sopiva ja integroituva jokaisella $k \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi pätee, että

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[Z_k - Z_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]\\ &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[M_k^2 - M_{k-1}^2|\mathcal{F}_{k-1}] - \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2\\ &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[(M_k-M_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}] + \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[2(M_k-M_{k-1})M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}] - \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2\\ &\geq \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2 + \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[2(M_k-M_{k-1})M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]] - \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2\\ &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[2(M_k-M_{k-1})M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]].\end{aligned}$$

Voidaan olettaa, että $u_p > 0$. Tämä johtuu siitä, että u_p on rajoitettu, jolloin on olemassa $Q > 0$ siten, että $|u_p|_\infty := \sup_{x\in\Omega'} u_p(x) < Q$. Tällöin voidaan muodostaa funktio $\tilde{u}_p := u_p + Q$, jolle pätee $\tilde{u}_p > 0$. Nyt loppuväite voitaisiin osoittaa funktiolle $\tilde{u}_p$, sillä $\tilde{u}_p$ on myös p-harmoninen funktio joukossa Ω' ja sillä pätee samat oletukset. Tätä kautta saadaan haluttu väite pätemään myös funktiolle $u_p = \tilde{u}_p - Q$.

Koska $u_p > 0$, niin voidaan olettaa, että $\eta > 0$ on niin pieni, että myös $M_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$. Lisäksi M_{k-1} on $\mathcal{F}_{k-1}$ -mitallinen, ja aikaisemmin osoitettiin, että $M = (M_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ on submartingaali. Nyt saadaan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[2(M_k-M_{k-1})M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]] &= 2M_{k-1}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[(M_k-M_{k-1})|\mathcal{F}_{k-1}]\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Näin ollaan osoitettu, että Z on submartingaali. Satunnaismuuttujalle $\tau \wedge k$ pätee, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau \wedge k] &= \sum_{s=1}^{\infty} s\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(\tau \wedge k = s) \\ &= \sum_{s=1}^{k-1} s\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(\tau = s) + k\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(\tau \geq k) \\ &\geq k\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(\tau \geq k).\end{aligned}$$

Lisäksi, koska Z on submartingaali, niin lause 2.52 antaa, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[M^2_{\tau\wedge k} - M_0^2] &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[M^2_{\tau\wedge k} - M_0^2 - \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2(\tau \wedge k)] + \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau \wedge k] \\ &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[Z_{\tau\wedge k}] + \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau \wedge k] \\ &\geq \frac{\alpha C_2^2}{2}\epsilon^2\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau \wedge k].\end{aligned}$$

Kaikki ylläoleva johtaa siihen, että

$$\begin{aligned}k\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(\tau \geq k) &\leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau \wedge k] \\ &\leq \frac{2\epsilon^{-2}}{\alpha C_2^2}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[M^2_{\tau\wedge k} - M_0^2].\end{aligned} \tag{4.7}$$

Tiedetään, että $\tau \wedge k \leq k$. Lisäksi tiedetään, että on olemassa $K > 0$ siten, että $(a+b)^2 \leq K(a^2+b^2)$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja että $\tau \wedge k \geq 1$ aina. Voidaan jälleen olettaa, että $\eta > 0$ on niin pieni, että aina $C_1(\tau \wedge k)\epsilon^3 - \eta 2^{-1} > 0$. Koska funktion M_k määritelmä on

$$M_k = u_p(x_k) + C_1 k\epsilon^3 - \eta 2^{-k},$$

niin saadaan, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[M^2_{\tau\wedge k} - M_0^2] \leq K\big(|u_p|^2_\infty + C_1^2 k^2 \epsilon^6\big). \tag{4.8}$$

Loppujen lopuksi yhtälöistä (4.7) ja (4.8) päädytään siihen, että

$$\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(\tau \geq k) \leq \frac{2}{\epsilon^2 \alpha C_2^2} K\left(\frac{|u_p|^2_\infty}{k} + C_1^2 k \epsilon^6\right).$$

Nyt on olemassa $A > 0$ siten, että

$$\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(\tau \geq A\epsilon^{-2}) \leq \frac{2}{\alpha C_2^2} K\left(\frac{|u_p|^2_\infty}{A} + C_1^2 A \epsilon^2\right) \leq \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Tämä johtuu siitä, että yhtälön (4.9) oikeapuoli muodostaa toisen asteen funktion

$$\frac{2}{\alpha C_2^2} K\big(|u_p|^2_\infty + C_1^2 A^2 \epsilon^2\big) - \frac{A}{2} \leq 0$$

parametrin A suhteen. Kyseisen toisen asteen funktion diskriminantti on aina aidosti suurempaa kuin nolla, jos

$$\epsilon < \frac{\alpha C_2^2}{2^3 |u_p|_\infty K C_1}. \tag{4.10}$$

Olkoon $\epsilon > 0$ niin pieni, että (4.10) pätee. Näin ollen on olemassa $A > 0$, jolle (4.9) pätee.

Olkoon $X : H \to \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ satunnaismuuttuja, joka noudattaa *geometrista jakaumaa* parametrilla $\frac{1}{2}$. Tällöin $X \sim \mathrm{Geom}(\frac{1}{2})$ ja jokaisella $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ pätee

$$\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Lisäksi satunnaismuuttujalle X pätee, että $\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[X] = 2$. Geometrinen satunnaismuuttuja kuvaa epäonnistuneiden yritysten määrää ennen kuin saadaan ensimmäinen onnistuminen. Tiedetään, että $\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}}$ on pysäytyshetki. Ajatellaan, että stokastinen prosessi (x_k) on toistokoe, joka on onnistunut, kun pysäytyshetki $\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}}$ pysäyttää prosessin. Toistokoe on epäonnistunut jokaisella yrityksellä ennen pysäytyshetkeä $\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}}$. Jos esimerkiksi $\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}} \geq 1$, niin ensimmäinen koe on epäonnistunut. Vastaavasti jos $\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}} \geq s$, niin koe on epäonnistunut ainakin s kertaa peräkkäin. Yhtälö (4.9) toimii kaikilla pisteillä $x_0 \in \Omega$. Näin ollen yhtälöstä (4.9) seuraa, että epäonnistuneen kokeen todennäköisyys on jokaisella yrityksellä vähemmän kuin $\frac{1}{2}$. Tällöin

$$\mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}\left(\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}} \geq s\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{s} \tag{4.11}$$

kaikilla $s = 0, 1, 2, \dots$. Pysäytyshetken odotusarvo voidaan laskea seuraavasti:

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}\left[\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}}\right] = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbb{P}^{x_0}_{S_1^*,S_2}\left(\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}} \geq s\right).$$

Näin ollen yhtälöstä (4.11) saadaan, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}\left[\frac{\tau}{A\epsilon^{-2}}\right] \leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[X].$$

Nyt siis pätee, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[\tau] \leq A\epsilon^{-2}\mathbb{E}^{x_0}_{S_1^*,S_2}[X] = 2A\epsilon^{-2}.$$

Valitaan $C = 2A$, jolloin ollaan vihdoin päästy tavoitteeseen. □

Jotta teorian yleistys toimisi oikein, pelialueen reuna täytyy olla tietyssä mielessä riittävän säännöllinen. Aikaisemmassa kappaleessa määriteltiin alueen Ω säännöllinen reunapiste Brownin liikkeen avulla. Muistetaan riittävä Poincarèn kartioehto eli lause 3.38. Seuraava lause yleistää lauseen 4.15. Valitettavasti p-harmonious funktiot eivät yleensä ole jatkuvia, mutta onneksi p-harmonious funktiot ovat asymptoottisesti tasaisesti jatkuvia. Asymptoottinen tasainen jatkuvuus seuraa klassisesta *Arzela-Ascoli* tyyppisestä kompaktiivisuuslauseesta, jota varten tarvitaan kaksi oletusta, jotka täyttyvät p-harmonious funktioiden tapauksessa. Todistus voidaan tehdä peliteoreettisesti.

LAUSE 4.16. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu ja joka täyttää lauseen 3.38 reunasäännöllisyysehdon. Olkoot $\epsilon > 0$, $2 \leq p < \infty$ ja $F : \Gamma_\epsilon \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin on olemassa funktio u_p, joka on Dirichlet'n ongelman*

$$\begin{cases} \triangle_p u_p = 0 & \textit{alueessa } \Omega \textit{ ja} \\ u_p(x) = F(x), & \textit{kun } x \in \Gamma_\epsilon \end{cases}$$

viskositeettiratkaisu. Olkoon u_ϵ *häirityn köydenvetopelin arvofunktio parametreilla* $\alpha = \frac{p-2}{p+n}$ *ja* $\beta = \frac{2+n}{p+n}$ *maksufunktion ollessa* F. *Tällöin*

$$u_\epsilon \to u_p \quad \textit{tasaisesti joukossa } \overline{\Omega},$$

kun $\epsilon \to 0$.

Todistus. Todistuksen voi lukea yksityiskohtineen paperista [**19**]. □

4.4. Lyhenevän askelpituuden häiritty köydenvetopeli

Edellisessä kappaleessa tuli esille, että häirityn köydenvetopelin arvofunktio u_ϵ suppenee tasaisesti kohti p-harmonista funktiota u_p tiettyjen oletusten ollessa voimassa, kun $\epsilon \to 0$. Yksi oletus on se, että maksufunktio F on jatkuva. Maksufunktion F ollessa epäjatkuva, ei voida olettaa, että on olemassa p-harmoninen funktio joukossa Ω siten, että p-harmoninen funktio saa jatkuvasti epäjatkuvan funktion F arvot. Toinen oletus liittyy joukon Ω reunaan. Jos $\partial\Omega$ on hyvin epäsäännöllinen, häirityn köydenvetopelin tutkiminen ei välttämättä ole mielekästä kyseisessä alueessa. Yksi sopiva peli yllämainittuihin tilanteisiin on *lyhenevän askelpituuden* häiritty köydenvetopeli. Lyhenevän askelpituuden idea on peräisin Yuval Peresin ja Scott Sheffieldin paperista *Tug-of-war with noise: A game theoretic view of the p-Laplacian* [**22**]. Peresin ja Sheffieldin häiritty köydenvetopeli on kuitenkin muotoiltu formaalisti hieman eri tavalla kuin tässä työssä. Tämän vuoksi kirjoittaja on muokannut lyhenevän askelpituuden idean vastaamaan tämän työn häirittyä köydenvetopeliä.

Tutkitaan ensiksi niin sanottua *pienen säteen* häirittyä köydenvetopeliä. Kiinnitetään peliin tarvittavat parametrit kuten normaalistikin häirityssä köydenvetopelissä. Ainoa muutos on se, että ennen kuin peliä aloitetaan pelaamaan, toinen pelaajista valitsee luvun $\epsilon_0 > 0$ ja toinen pelaajista valitsee luvun $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Tämän jälkeen pelataan häirittyä köydenvetopeliä tavalliseen tapaan säteenä parametri ϵ. Merkitään symbolilla ϑ_1 Pelaajan 1 arvofunktiota, kun Pelaaja 1 valitsee ensin säteen ϵ_0, ja Pelaaja 2 valitsee toisena säteen ϵ. Vastaavasti merkitään symbolilla ϑ_2 Pelaajan 2 arvofunktiota, kun valintajärjestys on toisinpäin. Saadaan seuraava tulos.

Lause 4.17. *Yllämainitussa pienen säteen häirityssä köydenvetopelissä pätee jokaisessa lähtöpisteessä* $x_0 \in \Omega$:

$$\vartheta_1(x_0) := \sup_{\epsilon_0>0} \inf_{0<\epsilon\leq\epsilon_0} \sup_{S_1} \inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)] = \liminf_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x_0).$$
$$\vartheta_2(x_0) := \inf_{\epsilon_0>0} \sup_{0<\epsilon\leq\epsilon_0} \inf_{S_2} \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)] = \limsup_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x_0).$$

Todistus. Häirityllä köydenvetopelillä on arvo kaikilla $\epsilon > 0$. Pelaaja 2 haluaa minimoida arvofunktiota ja Pelaaja 1 haluaa maksimoida arvofunktiota. Funktio $\inf_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ on kasvava jono, joten Pelaaja 1 maksimoi arvofunktiota pienentämällä parametria $\epsilon_0 > 0$. Vastaavasti funktio $\sup_{0<\epsilon\leq\epsilon_0}$ on vähenevä jono, jolloin Pelaaja 2 minimoi arvofunktiota pienentämällä parametria $\epsilon_0 > 0$. □

Seuraus 4.18. *Lauseen 4.16 oletusten ollessa voimassa, pienen säteen häirityn köydenvetopelin arvofunktioille pätee*

$$\vartheta_1(x_0) = \vartheta_2(x_0) = u_p(x_0),$$

missä $u_p(\cdot)$ *on p-harmoninen funktio joukossa* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Siirrytään seuraavaksi lyhenevän askelpituuden häirittyyn köydenvetopeliin. Kiinnitetään jälleen avoin ja rajoitettu pelialue $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja lähtöpiste $x_0 \in \Omega$. Kiinnitetään myös maksufunktio F, mutta tällä kertaa oletetaan vain, että $F : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ on rajoitettu funktio. Pelin säännöistä johtuen ei tarvita ϵ -vyöhykettä Γ_ϵ tällä kertaa. Rakennetaan todennäköisyysavaruus $(H^\infty, \mathcal{F}^\infty, \mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2})$ melkein samalla tavalla kuin tavallisestikin häirityn köydenvetopelin tapauksessa. Koska pelin säännöt muuttuvat häiritystä köydenvetopelistä, pelin *strategiat* muuttuvat myös erilaisiksi.

MÄÄRITELMÄ 4.19. Olkoon $x_0 \in \Omega$ ja olkoon $\underline{\nu}$ Pelaajan 1 arvofunktio seuraavanlaisessa pelissä:

Pelaaja 1 valitsee ensin $\epsilon_0 > 0$, ja tämän jälkeen Pelaaja 2 valitsee $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ siten, että $d_e(x_0, \partial\Omega) > \epsilon$. Kun ϵ on valittu, pelaajat pelaavat häirittyä köydenvetopeliä säteellä ϵ. Aina, kun

$$\begin{aligned}
&d_e(x_j, \partial\Omega) \leq \epsilon \ \text{ tai} \\
&\text{jollekin } m \geq 1, \text{ j on pienin luonnollinen luku, jolle } d_e(x_j, \partial\Omega) \leq 2^{-m},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Pelaaja 1 valitsee uuden $\epsilon_0 > 0$ ja Pelaaja 2 valitsee uuden $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ siten, että $d_e(x_j, \partial\Omega) > \epsilon$.

Vastaavasti olkoon $\overline{\nu}$ Pelaajan 2 arvofunktio muuten samanlaisessa pelissä, mutta valintajärjestys on toisinpäin. Pelaaja 2 valitsee aina ensin luvun ϵ_0 ja Pelaaja 1 luvun $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ siten, että $d_e(x_j, \partial\Omega) > \epsilon$.

Lyhenevän askelpituuden häirityssä köydenvetopelissä strategiat ovat kaksivaiheisia. Pelaajien 1 ja 2 strategiat ovat arvofunktion $\underline{\nu}$ tapauksessa kaikilla $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
S_1^1(x_0, \ldots, x_{k-1}) &= \epsilon_0^j > 0, \\
S_1^2(x_0, \ldots, x_{k-1}, \epsilon^j) &= x_k \in B(x_{k-1}, \epsilon^j), \\
S_2^1(x_0, \ldots, x_{k-1}, \epsilon_0^j) &= \epsilon^j \in \{0 < s \leq \epsilon_0^j : d_e(x_{k-1}, \partial\Omega) > s\} \text{ ja} \\
S_2^2(x_0, \ldots, x_{k-1}, \epsilon^j) &= x_k \in B(x_{k-1}, \epsilon^j),
\end{aligned}$$

missä ϵ^j on Pelaajan 2 valitsema säde j. valintakerralla ja missä ϵ_0^j on Pelaajan 1 valitsema ϵ_0 j. valintakerralla. Strategioita S_1^1 ja S_2^1 käytetään vain silloin, kun säännöt (4.12) niin sanovat. Vastaavasti vaihtamalla järjestystä voidaan määritellä strategiat arvofunktion $\overline{\nu}$ tapauksessa. Merkitään strategioilla

$$\begin{aligned}
S_1 &:= (S_1^1, S_1^2) \text{ ja} \\
S_2 &:= (S_2^1, S_2^2).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Todennäköisyysavaruus $(H^\infty, \mathcal{F}^\infty, \mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2})$ on olemassa häirityssä köydenvetopelissä kaikilla $\epsilon > 0$. Tämän vuoksi täysin vastaavasti todennäköisyysavaruus on olemassa myös lyhenevän askelpituuden variaatiossa, kunhan strategiat ovat muotoa (4.13). Poistetaan todennäköisyysavaruuden perusjoukosta H^∞ aina kaikki nollamittaiset joukot. Tällöin saadaan uusi perusjoukko, jota kuitenkin merkitään samalla merkillä H^∞. Asetetaan, että filtraatio $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ on luonnollinen filtraatio, jolloin on käytössä stokastinen kanta $(H^\infty, \mathcal{F}^\infty, \mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{Z}_+})$.

Määritellään, että lyhenevän askelpituuden häirityn köydenvetopelin *maksu* on arvofunktion $\underline{\nu}$ tapauksessa

$$V_1 = \begin{cases} \inf_{y\in A} F(y), & \text{missä } A = \{y \in \partial\Omega : \exists\omega \in H^\infty \text{ siten, että } y = \lim_{j\to\infty} x_j(\omega)\} \\ 0, & A = \emptyset. \end{cases}$$

Vastaavasti maksu on arvofunktion $\overline{\nu}$ tapauksessa

$$V_2 = \begin{cases} \sup_{y\in A} F(y), & \text{missä } A = \{y \in \partial\Omega : \exists\omega \in H^\infty \text{ siten, että } y = \lim_{j\to\infty} x_j(\omega)\} \\ 0, & A = \emptyset. \end{cases}$$

Nyt määritetään, että Pelaajien 1 ja 2 arvofunktiot $\underline{\nu}$ ja $\overline{\nu}$ ovat

$$\underline{\nu}(x_0) = \sup_{S_1}\inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}\big[V_1\big] \text{ ja}$$
$$\overline{\nu}(x_0) = \inf_{S_2}\sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}\big[V_2\big].$$

Huomautus 4.20. Määritelmän 4.19 kohta (4.12) pitää huolen siitä, että peli ei voi päättyä äärellisellä määrällä pelikertoja. Toisin sanoen peli ei siis pääty koskaan. Häirityn köydenvetopelin yhteydessä todettiin, että Pelaajan 1 arvofunktio on

$$u_1^\epsilon(x_0) = \sup_{S_1}\inf_{S_2} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}[F(x_\tau)],$$

joka on sama kuin Pelaajan 2 arvofunktio lauseen 4.10 nojalla kaikilla $\epsilon > 0$. Lyhenevän askelpituuden pelissä tilanne on hieman eri. Ensinnäkin pelin päättymättömyydestä johtuen arvofunktioissa ei voida ottaa odotusarvoa termistä $F(x_\tau)$, sillä $\tau = \infty$ jokaisella ω. Pienen säteen häiritty köydenvetopeli antoi hieman kuvaa siitä, miksi maksu kannattaa määritellä joko infimumina tai supremumina yli mahdollisten reunapisteiden.

Huomautus 4.21. Sääntöjen (4.12) jälkimmäinen ehto tarvitaan lähinnä teknisistä syistä. Tämä ehto ei muuta lyhenevän askelpituuden ideaa, mutta helpottaa jatkossa itse päätuloksen eli lauseen 4.26 todistamista. Päätuloksen todistuksessa tarvitaan tarkkaa tietoa siitä, milloin pelin sääntöjen (4.12) mukaisesti valitaan uudet parametrit ϵ ja ϵ_0. Helpointa tämä on tehdä siten, että alue Ω jaetaan pienempiin sisäkkäisiin alueisiin ja tutkitaan, milloin pelissä mennään ensimmäisen kerran ulos näistä pienemmistä alueista.

Ennenkuin päästään käsiksi tämän kappaleen päätulokseen, tutkitaan seuraavaksi niin kutsuttua *Perronin menetelmää* tietynlaisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Vuonna 1923 O. Perron julkaisi metodin, jolla hän pystyi ratkaisemaan lineaarisen Dirichlet'n reuna-arvo ongelman

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{joukossa } \Omega \\ u = F & \text{reunalla } \partial\Omega \end{cases}$$

erityisesti niissä tilanteissa, joissa joukko $\partial\Omega$ on epäsäännöllinen tai reunafunktio F on epäjatkuva. Myöhemmin huomattiin, että sama metodi toimii myös muille osittaisdifferentiaaliyhtälöille. Perronin menetelmä toimii sellaisille osittaisdifferentiaaliyhtälöille, jotka noudattavat vertailuperiaatetta. Erityisesti p-Laplacen yhtälö noudattaa vertailuperiaatetta.

MÄÄRITELMÄ 4.22. Olkoon $F : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ jokin rajoitettu funktio. Funktion F *ylä-luokka* on joukko U_F, jolle

$$
\begin{aligned}
& u \in U_F \quad \Leftrightarrow \\
& u : \Omega \to]-\infty, \infty], \text{ jolle pätee kolme ehtoa :} \\
& u \text{ on viskositeettisuperratkaisu joukossa } \Omega, \\
& u \text{ on rajoitettu alhaalta ja} \\
& \liminf_{x \to \xi} u(x) \geq F(\xi), \text{ kun } \xi \in \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Vastaavasti funktion F *ala-luokka* on joukko L_F, jolle pätee

$$l \in L_F \Leftrightarrow -l \in U_{-F}.$$

MÄÄRITELMÄ 4.23. Funktion $F : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *ylä-Perron ratkaisu* on

$$\overline{H}_F(x) = \inf_{u \in U_F} u(x)$$

ja funktion F *ala-Perron ratkaisu* on

$$\underline{H}_F(x) = \sup_{l \in L_F} l(x)$$

jokaisessa pisteessä $x \in \Omega$.

MÄÄRITELMÄ 4.24. Sanotaan, että funktio $F : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ on *resolutiivinen*, jos

$$\underline{H}_F = \overline{H}_F =: H_F \text{ ja}$$

H_F on p-harmoninen alueessa Ω.

Määritelmä 4.24 on mielekäs, sillä ylä- ja ala-Perronin ratkaisut ovat aina joko p-harmonisia funktioita tai sitten identtisesti ∞ tai $-\infty$. Tämä tulos on osoitettu esimerkiksi Yoshikazu Gigan teoksessa [**11**].

ESIMERKKI 4.25. Olkoot $p = n = 2$ ja $\Omega = B^*(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ punkteerattu pallo. Olkoon reunafunktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } |x| = 1 \\ 1, & \text{kun } x = (0, 0). \end{cases}$$

Tällöin saadaan, että

$$0 \leq \underline{H}_F(x_1, x_2) \leq \overline{H}_F(x_1, x_2) \leq \epsilon \log\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ kaikilla } \epsilon > 0.$$

Tämä johtuu siitä, että vakio $0 \in L_F$ selvästi ja siitä että $\underline{H}_F \leq \overline{H}_F$ määritelmän nojalla. Lisäksi

$$f(x) := \epsilon \log\left(\frac{1}{|x|}\right) \in U_F,$$

koska f on rajoitettu alhaalta, $\liminf_{x \to 0} f(x) = \infty > 0 = F(0)$ ja $\liminf_{|x| \to 1} f(x) = 0$. Funktio f on viskositeettisuperratkaisu alueessa Ω, koska f on jopa kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva, jolloin haluttu tulos saadaan suoraan derivoimalla. Kun $\epsilon \to 0$, saadaan, että

$$\underline{H}_F = \overline{H}_F = 0.$$

Tällöin F on resolutiivinen, ja Perronin ratkaisu reuna-arvo ongelmaan on vakiofunktio 0. Huomionarvoista on se, että tämä ratkaisu ei saavuta oikeaa reuna-arvoa origossa. Itse asiassa on helppo näyttää, että ei ole olemassa funktiota, joka on p-harmoninen joukossa Ω ja joka saavuttaa oikeat reuna-arvot, kun p=n=2. Mielenkiintoista on se, että kun $p > n$, funktio $g(x) := 1 - |x|^{(p-n)/(p-1)}$ on p-harmoninen alueessa Ω, ja lisäksi g saavuttaa oikeat reuna-arvot.

Seuraavaksi päästään käsiksi itse päätulokseen.

LAUSE 4.26. *Määritelmän 4.19 mukaisessa lyhenevän askelpituuden häiritysä köydenvetopelissä koko pelialueessa Ω pätee*

$$\underline{H}_F \leq \underline{\nu} \leq \overline{\nu} \leq \overline{H}_F.$$

Erityisesti jos F on resolutiivinen, pelin arvon kannalta ei ole väliä, missä järjestyksessä pelaajat valitsevat parametrit ϵ_0 ja ϵ, ja ei ole väliä, onko maksufunktio määritelty infimumina vai supremumina yli mahdollisten reunapisteiden.

TODISTUS. Ensimmäiseksi huomataan, että infimumin ja supremumin ominaisuuksien nojalla $\underline{\nu} \leq \overline{\nu}$. Riittää osoittaa, että $\overline{\nu} \leq \overline{H}_F$ pätee, sillä täysin analogisilla argumenteilla tästä seuraa epäyhtälö $\underline{H}_F \leq \underline{\nu}$. Olkoot $u \in U_F$, $x_0 \in \Omega$ ja $\delta > 0$ mielivaltaisia. Tällöin riittää osoittaa, että

$$\overline{\nu}(x_0) \leq u(x_0) + \delta$$

on totta. Arvofunktion $\overline{\nu}$ tapauksessa Pelaaja 2 valitsee ensin säteen ϵ_0 ja Pelaaja 1 tämän jälkeen säteen ϵ sääntöjen (4.12) mukaisesti. Olkoon

$$\Omega_m = \{x \in \Omega : d_e(x, \partial\Omega) > 2^{-m}\}$$

ja valitaan $m \geq 1$ niin isoksi, että $x_0 \in \Omega_m$. Joukko Ω_m on selvästi epätyhjä, kun m on kasvanut riittävän isoksi. Olkoon $\tilde{\Omega}_m$ sellainen alue, että $\Omega_m \subset \tilde{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1}$ ja että $\tilde{\Omega}_m$ toteuttaa Poincarén kartioehdon eli lauseen 3.38. Joukko $\tilde{\Omega}_m$ on aina mahdollista löytää.

Lauseen 4.16 nojalla on olemassa p-harmoninen funktio u_m joukossa $\tilde{\Omega}_m$ siten, että

$$u_m(x) = u(x) \text{ kaikilla } x \in \partial\tilde{\Omega}_m.$$

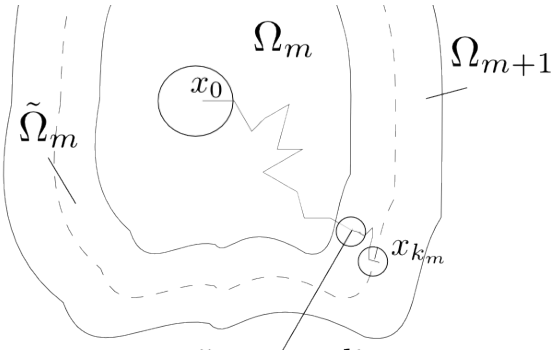
Lisäksi voidaan osoittaa, että $u_m(x) \leq u(x)$ kaikilla $x \in \tilde{\Omega}_m$. Tämä johtuu siitä, että u_m on p-harmoninen funktio ja u on viskositeettisuperratkaisu. Lauseen 4.16 nojalla p-harmonious arvofunktio u_ϵ suppenee tasaisesti kohti funktiota u_m joukon $\tilde{\Omega}_m$ sulkeumassa, kun $\epsilon \to 0$.

Olkoon $k_m \in \mathbb{N}$ ensimmäinen k, jolle $x_k \notin \tilde{\Omega}_m$. Lauseen 2.46 diskreettiaikaisen version nojalla k_m on pysäytyshetki luonnollisen filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{Z}_+}$ suhteen. Koska $\tilde{\Omega}_m$ on rajoitettu, niin häiritysä köydenvetopelissä $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}(k_m < \infty) = 1$ kaikilla strategioilla S_1 ja S_2. Todistuksen ydin idea on siinä, että Pelaaja 2 pystyy parametria ϵ_0 säätelemällä muokkaamaan pelin kulkua siten, että haluttu lopputulos tulee voimaan.

Nyt lauseen 4.16 nojalla Pelaajalla 2 on olemassa strategia S_{2_*} siten, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}[u(x_{k_m})] = \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}[u(x_{k_m})|\mathcal{F}_0] \leq u(x_0) + \delta 2^{-1} \tag{4.14}$$

riippumatta siitä, minkä parametrin $0 < \epsilon^j \leq \epsilon_0^j$ Pelaaja 1 valitsee. Kuvassa 1 on yksi mahdollinen pelin kulku.



KUVA 1. Lyhenevän askelpituuden häirityn köydenvetopelin mahdollinen kulku.

Ylläolevat päättelyt voidaan tehdä myös joukoille $\tilde{\Omega}_{m+1} \subset \tilde{\Omega}_{m+2} \subset \cdots$. Koska pysäytyshetket

$$0 \leq k_m(\omega) \leq k_{m+1}(\omega) \leq k_{m+2}(\omega) \leq \ldots$$

jokaisella $\omega \in H^\infty$, käytössä on kasvava jono ajanhetkiä. Asetetaan

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 \\ s_1 &= k_m \\ s_2 &= k_{m+1} \\ s_3 &= k_{m+2} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Jälleen lauseen 4.16 nojalla Pelaajalla 2 on olemassa strategia S_{2_*} siten, että

$$\mathbb{E}^{x_0}_{S_1, S_{2_*}}[u(x_{s_t}) | \mathcal{F}_{s_{t-1}}] \leq u(x_{s_{t-1}}) + \delta 2^{-t} \tag{4.15}$$

kaikilla $t \geq 1$. Osoitetaan, että $S := (S_{s_t})_{t=0}^\infty$ on supermartingaali, kun Pelaaja 2 noudattaa strategiaa S_{2_*} ja kun

$$S_{s_t} := u(x_{s_t}) - \delta \sum_{i=1}^{t} 2^{-i}.$$

Satunnaismuuttuja x_{s_t} on $\mathcal{F}_{s_t}$-mitallinen jokaisella $t \geq 0$. Tämä johtuu siitä, että prosessi $(x_t)_{t \geq 0}$ on sopiva prosessi, jolloin saadaan, että

$$\begin{aligned} x_{s_t}^{-1}(B) \cap \{s_t \leq p\} &= x_{s_t}^{-1}(B) \cap \bigcup_{l=0}^{p} \{s_t = l\} \\ &= \bigcup_{l=0}^{p} x_l^{-1}(B) \cap \{s_t = l\} \in \mathcal{F}_p \end{aligned}$$

jokaisella $t, p \geq 0$ ja $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$. Funktio u on p-superharmoninen, joten se on puolijatkuva alhaalta. Tällöin u on Borel-mitallinen, jolloin yhdistetty kuvaus S_{s_t} on $\mathcal{F}_{s_t}$-mitallinen jokaisella $t \geq 0$. Koska $u \in U_F$, niin u on rajoitettu alhaalta ja $u \not\equiv \infty$. Voidaan olettaa, että $u(x) \neq \infty$ kaikilla $x \in \Omega$. Alkuperäinen epäyhtälö, jota ollaan todistamassa, pätee triviaalisti niillä $x_0 \in \Omega$, joilla $u(x_0) = \infty$. Tällöin voidaan siis ajatella, että funktio u on rajoitettu, jolloin $\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}|S_{s_t}| < \infty$ jokaisella $t \geq 0$. Lisäksi vielä jokaisella $t \geq 1$ saadaan Pelaajan 2 strategian (4.15) nojalla, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}[S_{s_t}|\mathcal{F}_{s_{t-1}}] = \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}[u(x_{s_t})|\mathcal{F}_{s_{t-1}}] - \delta \sum_{i=1}^{t} 2^{-i} \\
&\leq u(x_{s_{t-1}}) + \delta 2^{-t} - \delta \sum_{i=1}^{t} 2^{-i} \\
&= u(x_{s_{t-1}}) - \delta \sum_{i=1}^{t-1} 2^{-i} \\
&= S_{s_{t-1}}.
\end{aligned}$$

Supermartingaali S on rajoitettu avaruudessa $\mathcal{L}^1$, koska $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}|S_{s_t}| < \infty$ seuraa siitä, että u on rajoitettu. Tällöin lause 2.56 antaa, että

$$\lim_{t\to\infty} S_{s_t}$$

on olemassa ja äärellistä $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}$-melkein varmasti. Merkitään $\lim_{t\to\infty} u(x_{s_t}) =: W$, jolloin saadaan, että

$$W = \lim_{t\to\infty} S_{s_t} + \delta.$$

Lisäksi pätee Fatou'n lemman eli lauseen 2.22 ja Doobin optimaalisen pysäytyksen eli lauseen 2.52 nojalla, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}\big[W\big] &= \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}\big[\liminf_{t\to\infty} S_{s_t}\big] + \delta \\
&\leq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}\big[S_{s_t}\big] + \delta \\
&\leq \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}\big[S_{s_0}\big] + \delta \\
&= u(x_0) + \delta.
\end{aligned}$$

Tiedetään, että $S_{s_t}(\omega) + \delta \to W(\omega)$ $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}$-melkein kaikilla ω ja jokaisella strategialla S_1. Muistetaan, että nollamittaisia polkuja ei huomioida lyhenevän askelpituuden häirityssä köydenvetopelissä. Lisäksi koska $u \in U_F$, niin $\liminf_{x\to\xi} u(x) \geq F(\xi)$ kaikilla $\xi \in \partial\Omega$. Näin ollen saadaan, että

$$\begin{aligned}
\overline{v}(x_0) &= \inf_{S_2} \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_2}\big[V_2\big] \\
&\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}\left[\sup_{y\in A} F(y)\right] \\
&\leq \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}\left[\sup_{y\in A} \liminf_{x\to y} u(x)\right] \\
&= \sup_{S_1} \mathbb{E}^{x_0}_{S_1,S_{2*}}\big[W\big] \\
&\leq u(x_0) + \delta.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 4.27. Lauseen 4.26 eräs seuraus on se, että voi olla olemassa sellainen reunan $\partial\Omega$ ositus $\{A_i\}$, että toisella pelaajalla on olemassa sellainen strategia, jolla peli tulee päättymään jonkin joukon A_i ulkopuolella $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_2}$-melkein varmasti riippumatta siitä, mitä toinen pelaaja tekee.

Esimerkki 4.28. Esimerkissä 4.25 reunafunktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } |x| = 1 \\ 1, & \text{kun } x = (0,0) \end{cases}$$

osoitettiin resolutiiviseksi ja lisäksi osoitettiin, että $H_F = 0$. Tällöin lauseen 4.26 nojalla $\underline{\nu} = \overline{\nu} = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että Pelaajalla 2 on olemassa strategia S_{2_*}, jonka avulla $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_{2_*}}$-melkein varmasti peli tulee päättymään origon ulkopuolella.

Voitaisiin osoittaa, että reunafunktio

$$F(x) = \chi_\Lambda(x),$$

missä $\Lambda := \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (\cos\theta, \sin\theta),\ \theta \in \mathbb{Q} \cap [0, 2\pi]\}$ on resolutiivinen ja että $H_F = 0$. Jälleen lauseen 4.26 nojalla $\underline{\nu} = \overline{\nu} = 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että Pelaajalla 2 on olemassa strategia S_{2_*}, jonka avulla $\mathbb{P}^{x_0}_{S_1,S_{2_*}}$-melkein varmasti peli tulee päättymään ympyrän kehäpisteessä, jonka kulma on irrationaalinen.

Kirjallisuutta

[1] Jean archer ja Erwan Le Gruyer: *Harmonious extensions.* SIAM J. Math. Anal. 33, 279-292, 1998.

[2] Louis Bachelier: *Théorie mathematique.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup 18, 143-210, 1901.

[3] Louis Bachelier: *Théorie de la Speculation (Thesis).* Annales Scientifiques de l'École Normale Superieure I I I 17, 21-86, 1900 (English Translation: Cootner (ed.), Random Character of Stock Market Prices, Massachusetts Institute of Technology, 17-78, 1964, or Haberman S. and Sibett T. A. , History of Actuarial Science VII, 15-78, 1995).

[4] Robert Brown: *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies.* Philosophical Magazine N. S. 4 , 161-173, 1828.

[5] Emmanuele DiBenedetto: *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Anal. 7 8, 827–850, 1983.

[6] Albert Einstein: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik 322 8, 549-560, 1905.

[7] Lawrence Evans: *An Introduction to Stochastic Differential Equations.* Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, American Mathematical Society, 2013.

[8] Carl Gauss: *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstobungskräfte.* Gauss Werke 5, 197-242, 1840.

[9] Christel Geiss ja Stefan Geiss: *An introduction to probability theory.* University of Jyväskylä Lecture Notes 60, Jyväskylän yliopistopaino, 2009.

[10] Stefan Geiss: *Stochastic Prosesses in continous time.* University of Jyväskylä Lecture Notes, 2009, haettu viimeksi 17.3.2014 osoitteesta
http://users.jyu.fi/∼geiss/scripts/stochastic-sde.pdf.

[11] Yoshikazu Giga: *Surface Evolution Methods.* Monographs in Mathematics, Birkhäuser Verlag, 2006.

[12] George Green: *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Orig. Nottingham, 1828, reprint J. Mathematical Physics in three parts.

[13] Kiyosi Itô: *Stochastic Processes.* Lectures given at Aarhus University, Springer-Verlag, 2004.

[14] Ioannis Karatzas ja Steven Shreve: *Brownian motion and stochastic calculus.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1987.

[15] Andrey Kolmogorov: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin, Julius Springer, 1933.

[16] Erwan Le Gruyer: *On Absolutely Minimizing Lipschitz Extensions.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 14, 29-55, 2007.

[17] Henri Lebesgue: *Conditions de régularité, conditions d' irrégularité conditions de impossibilité dans le problème de Dirichlet.* Comp. Rendu Acad. Sci. 178, 349-354, 1924.

[18] Hannes Luiro, Mikko Parviainen ja Eero Saksman: *On the existence and uniqueness of p-harmonious functions.* Differential Integral Equations 27 3-4, 201-216, 2014.

[19] Juan Manfredi, Mikko Parviainen ja Julio Rossi: *On the definition and properties of p-harmonious functions.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 5 11 2, 215-241, 2012.

[20] Peter Mörters ja Yuval Peres : *Brownian motion.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, 2010.
[21] Bernt Oksendahl: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Universitext, Springer, 2010.
[22] Yuval Peres ja Scott Sheffield: *Tug-of-war with noise: A game theoretic view of the p-Laplacian.* Math. J. 145 1, 91-120, 2008.
[23] Henry Phillips ja Norbert Wiener: *Nets and Dirichlet problem.* J. Math. Phys. 2, 105-124, 1923.
[24] Sidney Port ja Charles Stone: *Brownian motion and classical potential theory.* Probability and Mathematical Statistics; A Series of Monographs and Textbooks, Academic Press, 1978.
[25] Srinivasa Varadhan: *Lectures on Diffusion problem and Partial Differential Equations.* Tata Institute of Fundamental Research Bombay, Springer-Verlag, 1980.
[26] Norbert Wiener: *Differential space.* Journal of Mathematical Physics 2, 131-174, 1923.
[27] David Williams : *Probability with Martingales.* Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 1991.
[28] Stanislav Zaremba: *Sur le principe de Dirichlet.* Acta Math. 34, 293-316, 1911.