MATEMAATTINEN AJATTELU ESIOPETUKSESSA JA ALAKOULUSSA

Varga-Neményi – menetelmän opetuskokeilujen tarkastelua

Vivi Sippala

Kasvatustieteen pro gradu – tutkielma

Jyväskylän yliopisto

Opettajankoulutuslaitos

Kevät 2014

Sippala Vivi 2014. Matemaattinen ajattelu esiopetuksessa ja alakoulussa. Varga-Neményi –menetelmän opetuskokeilujen tarkastelua. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Kasvatustieteen pro gradu –tutkielma. 62 sivua.

TIIVISTELMÄ

Unkarista lähtöisin oleva Varga-neményi – matematiikanopetusmenetelmä on konstruktivistinen ja oppilaslähtöinen tapa opettaa matematiikkaa. Menetelmässä on seitsemän pedagogista perusperiaatetta: 1) todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen, 2)abstraktion tie, 3) oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioon ottaminen, 4) toimintavälineiden runsas käyttö, 5) laaja ja yhtenäinen käsitteiden pohjustus, 6) opettaja ja matematiikan opetus ja 7) lupa erehtyä, väitellä ja iloita.

Varga-Neményi -kursseja järjestetään opettajille eri puolella Suomea. Tässä tutkimuksessa aineisto koostuu täydennyskoulutuskursseilta kerätyistä kirjoitelmista, joita arvioin laadullisesti sisällönanalyysin avulla. Empiirisen tutkimuksen teoreettisena taustana esittelen Varga-Neményi – opetusmenetelmän perusperiaatteet sekä joitakin matemaattisen ajattelun malleja. Tutkimuksen empiirisessä osassa keskityn analysoimaan matemaattisen ajattelun prosessin vaiheiden toteutumista Dienesin teorian pohjalta. Tarkastelen lisäksi abstraktion tie – perusperiaatteen näyttäytymistä kirjoitelmissa.

Tutkimustulosten perusteella voidaan todeta, että matemaattisen ajattelun prosessissa erityisesti matemaattisten säännönmukaisuuksien havaitsemiseen tulisi kiinnittää enemmän huomiota. Käytännön toteutuksessa puutteita ilmeni myös opetettavan aiheen mallintamisessa ja niihin liittyvässä keskustelussa. Abstraktion tie – perusperiaate toteutui alle kolmasosassa kirjoitelmista, mikä viittaisi siihen, että täydennyskurssit auttavat alkuun menetelmän käytössä, mutta menetelmän sisäistäminen ja matemaattisen ajattelun tukeminen vaatii opettajalta jatkuvaa työssä kehittymistä.

Asiasanat: matematiikka, opetus, lapsilähtöisyys, toiminnallisuus, Varga-Neményi – opetusmenetelmä, matemaattinen ajattelu, opettajan koulutus

Sisällys

1 Johdanto

Opettajana ollessani pidin matematiikan tunneista, koska ne olivat helppoja ja rauhallisia. Niitä ei tarvinnut juurikaan etukäteen suunnitella, koska tunnit noudattivat lähes aina samaa oppikirjasidonnaista kaavaa: ensin opetetaan uuden aukeaman asia, sitten lasketaan aukeaman tehtävät. Arviointi oli myös helppoa, sillä kokeista näki suoraan, miten oppilaat laskivat matematiikan tehtäviä. Kun myöhemmin opiskelin Jyväskylän yliopiston matematiikan laitoksella, matematiikka ei ollutkaan enää niin helppoa. Jouduin opettelemaan monia asioita uudelleen ja korjaamaan aiemmin opittuja tietorakenteitani. Aloin ymmärtää, kuinka suuri rooli matematiikan opetuksella on jo alakoulussa. Tutustuin unkarilaiseen Varga-Neményi -menetelmään tarkemmin ja pääsin luokanopettajakoulutuksen harjoittelussa toteuttamaan menetelmää käytännössä. Aiempiin matematiikan tunteihini verrattuna opetuksen erot olivat suuret. Suunnittelin tunnit huolellisesti. Tuntisuunnitelmien perustella oppikirjaa täytettiin alle 17 prosenttia oppituntien yhteenlasketusta ajasta. Suurin osa ajasta käytettiin toiminnallisiin tehtäviin ja erilaisten mallien, eli representaatioiden tuottamiseen.

Varga-Neményi – menetelmässä oppiminen perustuu oppilaiden yksilöllisyyteen ja heitä ohjataan sen mukaisesti. Matematiikka on todellisuuteen liittyvien kokemusten hankkimista, joiden avulla lasta ohjataan kohti abstraktia ikään liittyvät erityispiirteet huomioon ottaen. Menetelmä edistää matemaattista ymmärrystä, sillä se sisältää matemaattista ajattelua kehittäviä ominaisuuksia. Menetelmä tukee ajattelun syvenemistä vaiheittain etenevänä kaksisuuntaisena prosessina, joka ei välttämättä ole lineaarinen. Toiminnan, toimintavälineiden ja ilmaisun kautta syvennetään ajattelua. Tunneilla mm. mitataan, vertaillaan, järjestetään, ryhmitellään, taputetaan, täytetään ja piirretään. Luokassa pyritään hyvään yhteishenkeen, jolloin on lupa iloita, väitellä, erehtyä sekä nauttia matematiikasta. Laskemisen lisäksi matematiikkaa opitaan ajattelemaan ja puhumaan.

Menetelmän käyttöön tarjotaan täydennyskoulutuskursseja opettajille ja oppikirjoja on käännetty suomeksi alkuopetukseen. Menetelmään liittyvästä kirjallisuudesta pidetään yllä bibliografiaa. Tutkimuksia Varga-Neményi -menetelmästä on vähän. Menetelmä on mainittu monissa tutkimuksissa toiminnallisen matematiikan yhteydessä ja muutamissa pro gradu -tutkielmissa sitä on vertailtu muihin matematiikan opetusmetodeihin, kuten salamamatematiikkaan ja montessoripedagogiikkaan. Aiheesta löytyy kuitenkin vain kaksi pro gradu -tutkielmaa. Toisessa Inkinen (2004) on tutkinut luokanopettajaopiskelijoiden kokemuksia ja ajatuksia Vargan metodin käytöstä. Toisessa Kauppila ja Tenkanen (2008) ovat analysoineet ensimmäisen luokan matematiikan oppimateriaaleja. Toistaiseksi ainoassa aiheeseen liittyvässä väitöskirjassa Tikkanen (2008) tutki suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten matematiikkakokemuksia.

Matematiikan opetus ja sen kehittäminen on aina ajankohtaista, mutta erityisesti Pisa-tulosten heikennyttyä 2012 on alettu peräänkuuluttaa uudenlaista pedagogista ajattelua ja oppijakeskeisyyttä matematiikassa (Kupari, Välijärvi, Andersson, Arffman, Nissinen, Puhakka & Vettenranta 2013, 70–71). Tämä tutkimus tutustuttaa lukijan ei niinkään uuteen, mutta Suomessa suhteellisen vähän käytössä olevaan Varga-Neményi opetusmenetelmään ja kertoo menetelmän toimivuudesta ja ongelmakohdista käytännössä. Erityisesti tutkielmassa on kiinnitetty huomiota matemaattisen ajattelun kehittymiseen ja siihen, miten tämä opetusmenetelmä tukee sitä.

Tutkimuksen empiirisen osan tutkimusmetodiksi valitsin teorialähtöisen sisällönanalyysin, koska tutkin menetelmän toteutumista Varga-Neményi -kurssilla olleiden opettajien kirjoitelmien perusteella. Selvitin, miten opettajat soveltavat menetelmää käytäntöön ja miten opetusjaksoilla toteutuu matemaattisen ajattelun kehittymisen eri vaiheet. Lisäksi tutkin, miten opettajien ymmärrys menetelmästä kehittyy, kun he ovat osallistuneet jatkokurssille. Kirjoitelmissa opettajat ovat melko vapaasti saaneet kirjoittaa opetustuokioistaan, joten kuvaukset ovat hyvin subjektiivisia. Tutkijana olen yrittänyt saada näiden kuvausten perusteella selvitettyä, miten menetelmän perusperiaatteita on toteutettu matemaattisen ajattelun kehittämisen suhteen.

2 Matematiikan opetus Varga-Neményi -opetusmenetelmällä

2.1 Johdatus Varga-Neményi -opetusmenetelmään

Matematiikan mekaaninen oppiminen ja opettajajohtoinen opetus ovat saaneet jo 1960-luvulla Tamás Vargan ja hänen työryhmänsä kehittämään matematiikan opetusta luovempaan ja ymmärrystä kehittävämpään suuntaan (Oravecz & Kivovics, 2005, 25). Menetelmän alkuperäinen nimi ”A Composite Method” ja unkarilaisten käyttämä ”Kompleksinen matematiikka” viittaavat erilaisten teoreettisten lähestymistapojen yhdistelmään. Metodin taustateoreetikoista Tikkanen (2008, 66) mainitsee Comeniuksen, Piaget’n, Dienes’n, Pólyan, Montessorin sekä Vygotskyn. Suomessa ”unkarilainen matematiikka” liittyy alkuopetuksen matematiikkaan, mutta opetusmenetelmän soveltajat puhuvat Varga-Neményi -menetelmästä sen perustajia kunnioittaen (Tikkanen & Lampinen, 2005, 78). Eszter C. Neményi tutustui opiskeluaikanaan Vargan ajatuksiin ja on siitä lähtien kehittänyt matematiikan opetusta ja opettajankoulutusta sekä Unkarissa että Suomessa (Lampinen & Korhonen, 2010).

Varga-Neményi -menetelmässä opetus on ongelmakeskeistä, jolloin oikeata vastausta enemmän kiinnostaa se, miten siihen on päästy. Menetelmä täyttää myös monet keskeiset ehdot oppilaan terveen itsetunnon ja myönteisen minäkuvan kehitykselle. (Korpinen, 2005, 152, katso myös Tikkanen 2008, Näätänen & Matikainen 2005). Opetusmenetelmästä on erotettavissa seitsemän pedagogista perusperiaatetta: 1) todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen, 2) abstraktion tie, 3) oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioon ottaminen, 4) toimintavälineiden runsas käyttö, 5) laaja ja yhtenäinen käsitteiden pohjustus, 6) opettaja ja matematiikan opetus ja 7) lupa erehtyä, väitellä ja iloita (Tikkanen, 2008, 66). Periaatteet esittelen tarkemmin luvussa 2.2.

Koska Varga-Neményi -menetelmällä on teoreettinen orientaatio (ks. tämän luvun ensimmäinen kappale), rakenne, toiminnan periaatteet, sosiaalinen systeemi, tukisysteemi ja vaikutukset, voidaan puhua opetusmenetelmästä (Tikkanen 2008, 65). Rakenne ja toiminnan periaatteet on selkeästi havaittavissa pedagogisista perusperiaatteista. Myös sosiaalinen vuorovaikutus ja opettajan suhde matematiikkaan, sen oppimiseen ja opettamiseen (tukisysteemi) sisältyvät perusperiaatteisiin. Menetelmän vaikutus on todettu mm. Tikkasen väitöksessä ("Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana, 2008). Näin ollen käytän metodista nimitystä Varga-Neményi -opetusmenetelmä.

2.2 Varga-Neményi -opetusmenetelmän perusperiaatteet

Todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen

McPhersonin ja Paynen (1987) mukaan matemaattinen ymmärrys alkaa useilla lapsilla kehittyä jo ennen kouluikää tarpeesta ratkaista arkisiin kokemuksiin liittyviä ongelmia. Sosiaalinen kanssakäyminen ja aikuisten tarkkailu tutustuttaa lapset käytännön matematiikkaan. Tästä syystä koulumatematiikan pitäisi pohjautua lasten aiempiin kokemuksiin ja konkretiaan (McPherson & Payne 1987, 75–76). Lapset tarvitsevat konkreettisia ja tosielämään perustuvia kokemuksia, jotta he pystyvät muodostamaan muistikuvia matemaattisista käsitteistä sekä rakentamaan uusia käsitteitä opittujen päälle (Oravecz & Kivovics, 2005, 23; Pound & Lee, 2011, 57). Abstraktioon päästään, kun ymmärretään asia ensin omien kokemusten kautta. Lapsi ei välttämättä osaa vastata kysymykseen ”kuinka paljon saadaan, kun lisätään kahteen yksi”. Jos kysymyksen muotoilee tikkareiden, pehmolelujen tai jonkun muun lapsen elämään liittyvän asian avulla, lapsi pystyy helpommin vastaamaan kysymykseen (Pound & Lee, 2011, 57). Myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa kehotetaan hyödyntämään arkipäivän tilanteissa eteen tulevia ongelmia ja ratkomaan niitä matemaattisen ajattelun ja toiminnan avulla (POPS 2004, 158). Varga-Neményi -opetusmenetelmässä tämä on kehotuksen sijaan yksi perusperiaatteista.

Toiminnallisia ja autenttisia oppimiskokemuksia hankitaan mm. mittaamalla, peittämällä, täyttämällä, laskemalla, taputtamalla ja hyppimällä. Tällä tavoin saadaan kokemuksia eri aistihavaintojen kautta (Oravecz & Kivovics, 2005, 23). Lapsi ryhmittelee, luokittelee, jakaa osajoukkoihin ja yhdistelee. Tällaista toimintaa, jossa lapsi järjestelee ympäristöään ja saa tietoa toiminnan kohteesta, Peel (1971) Piagetiin viitaten kutsuu fyysiseksi kokemukseksi. Loogis-matemaattiset kokemukset taas lisäävät tietoa itse toiminnasta ja sen tuloksista. Tällöin lapsi voi esimerkiksi oivaltaa rivissä olevia karkkeja laskiessaan, että tulos on sama kummastakin päästä aloitettaessa. (Peel 1971, 156.) Toiminta ja konkretia kulkevat käsi kädessä ja monesti oppilaan oma keho on luonteva väline monenlaisessa toiminnassa (Risku & Tikkanen 2004, 8). Oivalluksiin päästään siis toiminnan ja konkretian kautta.

Abstraktion tie

Matematiikka on täsmällistä ja loogista. Sen takia opetuksen on edettävä systemaattisesti ja johdonmukaisesti. Matematiikan abstraktit käsitteet ovat vaikeita pienille lapsille, koska heidän ajattelunsa on vielä konkreettisten toimintojen ja mallien varassa (Risku 2002, 115–116). Tämän takia abstraktion tien huolellinen ”kulkeminen” on tärkeää. Tikkasen (2008, 69) mukaan abstraktion tie tarkoittaa pedagogista periaatetta, joka kuvaa lapsen käsitteen oppimisen vaiheita fyysisistä kokemuksista loogis-matemaattisiin kokemuksiin. Oravecz ja Kivovics (2005, 25) jakavat abstraktion jatkumon neljään osaan, jolloin abstraktion tiellä edetään toiminnallisista (kehollisista) kokemuksista välineiden kautta kuviin ja siitä kohti symboleita. Koko ajan rinnalla kulkee kieli. Tikkanen & Lampinen (2005) antavat tästä esimerkin: Parillisuutta tutkiessa voidaan ensin muodostaa oppilaiden kanssa parijono, jolloin saadaan fyysinen kokemus oppimisesta. Tämän jälkeen jokainen oppilas saa pulpetilleen kasan papuja tms. jotka hän järjestää parijonoon. Parijonoa havainnollistetaan seuraavaksi piirtämällä tai kuvan tarkastelulla. Lopuksi parillisuutta tutkitaan luvuilla ja kirjoitetaan symbolein (Tikkanen & Lampinen 2005, 80).

Abstraktion tiellä edetään spiraalimaisesti, jolla taataan käsitteiden pitkäaikainen kypsyttäminen. Jokaiseen aiheeseen palataan monta kertaa ja niiden päälle rakennetaan uusia sisältöjä. Tehtävien yhteydessä oppilas saa palata konkreettiseen malliin niin monesti, kuin on tarpeen. Näin pohjustetaan varsinaisen käsitteen määrittymistä ylemmillä luokilla, 12–16 -vuoden iässä. (Oravecz & Kivovics, 2005, 24–25.) Neményin (2005, 34) mukaan yleistävä abstraktio on mahdollinen noin 12–13 -vuoden iässä. Alakoulussa oppimisen tie on ainoastaan induktiivinen, jossa tiedon hankinta tapahtuu omien kokemuksien kautta (Näätänen & Matikainen, 2005, 92).

Vaikka Näätänen & Matikainen (2005, 92) tiivistävät Varga-Neményi -opetusmenetelmän sanoihin ”konkreettisesta abstraktiin”, abstraktion tietä kuljetaan Oraveczin & Kivovicsin (2005) mukaan myös vastakkaiseen suuntaan. Näin oppilas voi abstraktien merkkien, lukujen tai laskutoimitusten yhteydessä koota, havainnollistaa ja keksiä tehtävälle sanallisen muodon (Oravecz & Kivovics, 2005, 25). Esimerkiksi yhtälön 15:3=5 oppilaat voivat kuvata piirtämällä, välineillä tai leikkimällä (Tikkanen 2008, 70).

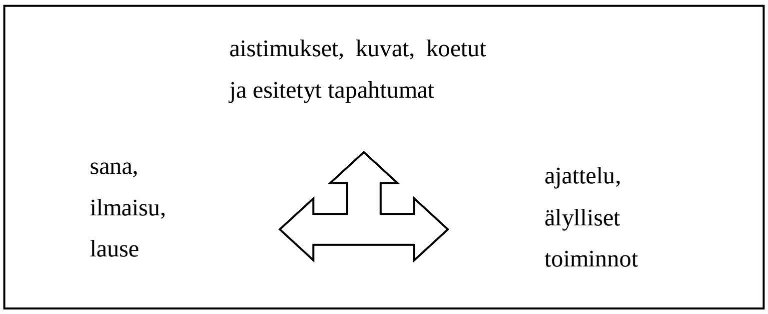
Dienesin (1973) mukaan matematiikan oppiminen tapahtuu kuudessa vaiheessa. Vapaassa leikissä (*free play*) lapsi sopeutuu ympäristöön ja etsii siitä kiinnostuksen kohteita. Mikä tahansa vapaa leikki ei kuitenkaan edistä matemaattista ajattelua. Siksi aikuisten tulee rakentaa ympäristö siten, että sieltä tarjoutuu kiinnostavia matemaattisia kokemuksia lapsille. Toisessa vaiheessa lasta ohjataan etsimään vapaan leikin pohjalta säännönmukaisuuksia (*regularities*). Esimerkiksi loogisilla paloilla leikkiessä paloja voidaan järjestellä tiettyjen ominaisuuksien mukaan ryhmiin. Kolmannessa vaiheessa tarvitaan samanrakenteisia leikkejä, jotta pystytään havaitsemaan yhdenmukaisuuksia (*isomorphism game*). Kun lapsi pystyy erottamaan erilaisista leikeistä lainalaisuuksia ja tunnistaa epäoleelliset piirteet, on abstraktion ensimmäinen taso saavutettu. Ennen abstraktion täydellistä saavuttamista ajattelua täytyy mallintaa (*representations*) esimerkiksi piirtämällä Vennin diagrammeja[1] tai vastaavia visuaalisia representaatioita. Viidennessä vaiheessa malleja tarkastellaan keskustelun avulla. Tässä vaiheessa tarvitaan kieltä, jonka avulla jokainen lapsi voi kuvailla havaitsemaansa omin sanoin. Myöhemmin voidaan miettiä, mikä kuvauksista sopii malliin parhaiten, jolloin luodaan perusteita aksioomille. Matemaattisen ajattelun viimeisessä ja kehittyneimmässä vaiheessa päästään formaaleihin sääntöihin. Matemaattinen ilmiö määritellään yksiselitteisesti ja tiivistetysti. Näiden avulla muodostetaan formaalit aksioomat (laskulait) ja teoreemat. (Dienes 1973, 6-9.)

Oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioiminen

Varga-Neményi -opetusmenetelmässä ikään liittyvät erityispiirteet otetaan jatkuvasti huomioon ja hyödynnetään lasten luontaista tiedonjanoa ja innokkuutta oppia (Näätänen & Matikainen 2005, 92–93). Se on myös pedagoginen periaate, sillä opettajan täytyy tuntea 6–12 -vuotiaiden kehityksen taso sekä käytettävissä olevat tiedon resurssit, sanavarasto ja keskittymiskyky. Lisäksi persoonallisuuden yksilölliset ominaispiirteet on otettava huomioon ja jokaista oppilasta kehitetään hänen omalla tasollaan. (Oravecz & Kivovics, 2005, 26.) Varga (1971, 21) tiivistääkin osuvasti tämän perusperiaatteen idean: Oleellista ei ole miettiä, missä iässä esim. geometriaa tulisi opettaa, vaan mitä geometrian asioita opetan tämän ikäisille ja miten?

[1] Venn-diagrammi on matematiikan joukko-opissa käytettävä diagrammi, joka kuvaa matemaattiset tai loogiset suhteet joukkojen välillä ja havainnollistetaan joukkojen välisiä operaatioita (esim. leikkaus). Normaalisti joukkoja kuvataan ympyröillä, jotka leikkaavat toisiaan.

Neményin (2005, 33) mukaan alakoululainen ei pysty ymmärtämään verbaalisia tai kirjoitettuja merkkejä, jos niitä ennen ei ole synnytetty mielikuvia, joita uusissa tilanteissa voidaan palauttaa mieleen (ks. kuvio 1). Opettaja johdattelee oppilaita sanallistamaan oppilaiden toiminnan kautta oivaltamat asiat vasta sitten, kun mielikuva on tarpeeksi vahva verbalisointiin (Näätänen & Matikainen 2005, 92). Symbolivaiheeseen siirtyminen ennenaikaisesti aiheuttaa puutteita keskeisten käsitteiden ymmärtämisessä ja hallinnassa, josta voi seurata oppimisvaikeuksia (Ikäheimo 1998, 241).



Kuvio 1. Matemaattisen ymmärryksen kehittyminen (Neményi 2005)

Matematiikan opetuksessa Varga-Neményi -opetusmenetelmällä pyritään käyttämään lapsen ikätasoon sopivaa kieltä. Joukko-opissa joukon sijaan voidaan puhua ryhmästä tai kasasta, jotka ovat lapselle tutumpia sanoja (Oravecz & Kivovics 2005, 27). Yhtälöissä muuttuja voidaan korvata sanalla ”jotakin” ja itse yhtälö lausumalla yhtäsuuruusmerkin kohdalla esimerkiksi ”on yhtä suurta kuin”. Matemaattisten käsitteiden muuttamisessa lapsen ikätasoon sopivaksi täytyy kuitenkin olla tarkkana, ettei käsite itsessään muutu. Yhtäsuuruusmerkkiä ei esimerkiksi voi korvata pelkästään sanalla ”on” sillä se ei kuvaa kahdensuuntaista relaatiota.

Usein lapset onnistuvat parhaiten selittämään ja selventämään asiaa toisilleen. Vargan (1971) mukaan yksilöllisiä eroja voidaan ottaa huomioon työskentelemällä ryhmissä. Ryhmät kannattaa muodostaa erilaisin perustein, jottei ryhmäjaoista tule liian lokeroivia (esim. ikäryhmät). Ryhmätyöskentelyllä on myös se etu, että oppilaille tarjoutuu enemmän oman tason tehtäviä. Vaikka opettaja ei ehtisikään ottaa jokaista oppilasta yksilönä huomioon, erilaisia ryhmiä muodostamalla oppilaille tarjoutuu enemmän mahdollisuuksia yksilölliseen opetukseen. Ryhmä- ja paritöiden avulla jokainen lapsi voi toimia omalla tasollaan, saada tietoa oppimisestaan ja vertaispalautetta ikätovereiltaan (Varga 1971, 25–26). Vaikka luokka olisi taidoiltaan homogeeninen, erilaiset työskentelytavat opettavat sosiaalisia taitoja sekä luovat yhteishenkeä.

Toimintavälineiden runsas käyttö

Todellisuuteen perustuva matematiikka ja havainnollistaminen vaativat erilaisia välineitä. Havainnollistamisvälineellä Varga-Neményi -opetusmenetelmässä tarkoitetaan opettajan käyttämiä välineitä, jolloin oppilaat seuraavat opettajan toimintaa. Toimintavälineet taas viittaavat oppilaiden yksilöllisessä käytössä oleviin välineisiin, joiden avulla oppilaat oivaltavat itse matemaattisia suhteita (Tikkanen 2008, 74). Servais'n (1971, 95) mukaan toimintavälineiden tärkein tarkoitus on antaa oppilaalle mahdollisuus oivaltaa. Konkreettisten toimintojen ja havainnoinnin kautta muodostetaan mielikuvia asioista. Alkeellinen abstrakti muoto ajattelulle saadaan, kun mielikuvat pystytään palauttamaan mieleen ilman konkreettisia välineitä (Servais, 1971, 94). Varga perusteli toimintavälineiden käyttöä mm. Piaget'n kehitysteorian avulla, jossa tuntoaistiin perustuvat kokemukset ovat tärkeimmät oppimisen alkuvaiheessa (Tikkanen, 2008, 73).

Vastaavasti Pound ja Lee (2011, 52) kannustavat välineiden kehittämistä ja käyttöä abstraktin ja konkreettisen maailman yhdistämisessä. Heidän mukaansa matemaattista oppimista edistävien välineiden käyttö polveutuu kahdesta lähteestä, joista myös Zuckerman ja Resnick (2003) artikkelissaan puhuvat: 1800-luvun alkupuolella ensimmäisen lastentarhan perustaja ja vapaan leikin kannattaja Friedrich Fröbel kehitti puiset geometriset palikat (*Froebel's Gifts*), joiden avulla lapsi voi tunnistaa ja erottaa ympäröivästä maailmasta löytyviä malleja. 1900-luvun alussa Maria Montessori kehitteli vastaavanlaista materiaalia vanhemmille oppilaille (Zuckerman & Resnick 2003, 3).

Välineiden runsaassa käytössä on varottava, ettei niistä tule oppimisen hallitsijaa. Välineiden käyttöä tulee harkita ja suunnitella tarkoin, jotta ne edistävät oppimistavoitteen saavuttamista ja käsitteiden oivaltavaa oppimista (Risku & Tikkanen 2004, 11). Sisällön relevanssin ohella mm. Montessori piti tärkeänä sitä, että oppilaat saivat myös valita oppimateriaaleja itse (Kallonen-Rönkkö 1998, 266). Oppimisen kannalta ei siis ole mielekästä käyttää sellaisia toimintavälineitä, joita kohtaan oppilailla ei ole mitään mielenkiintoa. Välineiden täytyy innostaa oppilaita ja tehdä matematiikasta ymmärrettävää ja hauskaa.

Varga-Neményi -opetusmenetelmässä oppilaiden käytössä kokoajan olevia toimintavälineitä kutsutaan pysyviksi toimintavälineiksi (Oravecz & Kivovics, 2005, 24). Näitä ovat esimerkiksi Fröbelin ja Montessorin aikaansaannoksista kehitetyt värisauvat (*Cuisenaire Rods*, 1-10cm), loogiset palat ja geolauta (Pound & Lee, 2011, 52).

Värisauvojen avulla lapsi voi oivaltaa käsitteitä kuten pituus, tilavuus ja murto-osa sekä järjestää ja luokitella sauvoja koon ja värin mukaan. Loogisten palojen avulla voidaan opettaa mm. kombinatoriikkaa, joukko-oppia, logiikkaa ja muita ajattelun taitoja. Geolaudan avulla voidaan oivaltaa vaikkapa pinta-aloihin liittyviä asioita. Tarpeellisimmat välineet ovat kuitenkin Lampisen ja Tikkasen (2005, 83) mielestä unkarilaiset värisauvat (1-10cm, 12cm ja 16cm), loogiset palat ja sinipunakiekot, jotka kannattaa hankkia luokkaan ensimmäiseksi.

Laaja ja yhtenäinen käsitteiden pohjustus

Vargan (1971, 16) mukaan nuoret lapset kykenevät oppimaan ja ymmärtämään konkretian kautta vaativanakin pidettyjä sisältöalueita, vaikka opetus painottuu usein yksinkertaiseen aritmetiikkaan. Matematiikkaa tulisi opettaa kokonaisuutena, jotta lapsen ajattelu kehittyisi (Oravecz & Kivovics, 2005, 26). Matematiikka rakentuu aksioomista ja määritelmistä. Tällöin laskutoimitukset ja lukukäsitteet pätevät koko matematiikassa, eivätkä vain tietyissä aihepiireissä. Jos matematiikan asioita opiskellaan muistisääntöinä, kaavoina tai muilla ”litanioilla”, jotka opetellaan ulkoa, ymmärrystä ja ajattelua ei tapahdu. Esimerkkinä Varga mainitsee konveksit[2] monikulmiot, jotka voidaan opetella ulkoa ymmärtämättä silti, miksi ympyrä on konveksi (Varga, 1971, 17).

Oppilaan kehitystason ja sopivan kielen huomioon ottaminen ei tarkoita sitä, että matematiikan käsitteitä pitäisi vältellä. Duffin (1987, 49) muistuttaa, että arjesta tutut sanat saattavat matematiikassa tarkoittaa eri asioita, jolloin näiden ero täytyy tehdä selväksi käsitteeseen tutustuttaessa. Esimerkiksi sana ”lainata” on harhaanjohtava itse operaation kannalta ja epäsopiva kuvaamaan vähennyslaskun tilannetta. Matematiikkaan vahvasti liittyvät verbit, adjektiivit ja nominit (parillinen, pariton, lisätä, jakaa, kolmio, neliö…) on otettava sanastoon alusta lähtien. Lisäksi olisi syytä tarttua niihin tilaisuuksiin, jolloin ihmettelyä käsitteisiin liittyen syntyy erilaisten aktiviteettien lomassa (Duffin 1987, 49).

Tämä Varga-Neményi -opetusmenetelmän periaate on myös valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa: ”Matematiikan on edettävä systemaattisesti, ja sen tulee luoda kestävä pohja matematiikan käsitteiden ja rakenteiden omaksumiselle. Konkreettisuus

[2] Konveksille monikulmiolle pätee, että jokainen konveksin monikulmion sisäkulma on korkeintaan 180 astetta ja että millään monikulmion kahta pistettä yhdistävällä janalla ei ole pistettä, joka kulkisi monikulmion ulkopuolella.

toimii tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään" (POPS 2004, 158). Varga-Neményi -opetusmenetelmä perustuu spiraaliopetussuunnitelmaan, jossa samoihin käsitteisiin palataan yhä uudelleen riippumatta mihin matematiikan osa-alueeseen se kuuluu. Vargan (1971, 21) mukaan matematiikka on kokonaisuus, eikä sitä tule paloitella jaksoihin tai kursseihin.

Opettaja ja matematiikan opetus

Varga-Neményi -opetusmenetelmän käyttäminen vaatii Tikkasen ja Lampisen (2005) mukaan opettajalta paljon, koska tehtävät vaativat ohjausta matematiikan rakenteiden omaksumiseen. Työskentelyä matematiikan parissa täytyy tukea ja johdattaa eteenpäin sekä valita kullekin tasolle haluttuun suuntaan kehittäviä tehtäviä (Tikkanen & Lampinen 2005, 75). Lampisen ja Korhosen haastattelussa (2010) Neményi sanoo, että opettajan matematiikan ja kehityspsykologian osaamisen tulee olla tavanomaista parempi ja syvällisempi sekä jatkuvassa kehityksessä. Jotta opettaja pystyy reagoimaan jokaisen lapsen ajatuksiin ja soveltamaan matematiikkaa, hänen tulee ymmärtää matematiikan rakenteita (Yrjönsuuri, 1998, 140; Lampinen & Korhonen 2010). Tällöin käsitteitä on helpompi käyttää oikein ja vältytään antamasta matemaattisesti epäpäteviä muistisääntöjä (esim. "kertominen suurentaa ja jakaminen pienentää"). Servais (1971b) pitää opettajan matematiikan osaamista erittäin tärkeänä, mutta myöntää, että kaikkien muiden aineiden ohessa on turhan optimistista olettaa, että alakoulussa oppiainehallinta matematiikassa olisi kovin korkea. Olisi kuitenkin hyvä, että jokaisesta koulusta löytyisi vähintään yksi matematiikan erityisosaamisen hallitseva opettaja, joka voisi toimia apuna ja neuvonantajana muille opettajille (Servais 1971b, 235–236).

Opettajan oma asenne, tavoitteet, kokemukset ja motivaatio matematiikkaa kohtaan vaikuttavat opetukseen (Näveri, Ahtee, Laine Pehkonen & Hannula 2012, 84). On todennäköistä, että oppilaat pitävät matematiikasta, jos huomaavat opettajankin siitä nauttivan (Tikkanen 2008, 85, 160). Korpisen (2005) mukaan terveen minäkäsityksen omaavat opettajat pystyvät paremmin luomaan luokkaympäristön, jossa vuorovaikutus on runsaampaa ja oppilaat saavat yksilöllistä tukea enemmän. Epävarma opettaja ei nauti opettamisesta ja saattaa turvautua liikaan kontrolliin ja autoritaarisuuteen (Korpinen 2005, 155). Näätänen ja Matikainen (2005, 93) peräänkuuluttavatkin eräänlaista luovaa hulluutta, jolloin opettaja johtaa luokkaa innolla, huumorilla ja vauhdilla. Kun matematiikkaa opetetaan mielenkiintoisesti ja hauskasti kurinalaisuutta unohtamatta, saadaan kehitetyksi voimakas yhteenkuuluvuuden tunne koko luokkaan.

Lupa erehtyä, väitellä ja iloita

Jotta matematiikan oppimisesta saataisiin hauskaa ja edellä mainittuja periaatteita pystyttäisiin toteuttamaan, on luotava turvallinen ja yhteistyökykyinen ilmapiiri. Perinteisesti matematiikan opetuksessa oppilaat ovat hiljaa ja vastaavat vain silloin, kun heillä on lähes varma vastaus tai tieto asiaan liittyen. Käytäntöjä pitäisi muuttaa sellaisiksi, että asioista keskustellaan vapaammin ryhmässä, jolloin puhuminen edesauttaa ratkaisun löytämistä (Malaty 1997, 19; Näveri ym. 2012, 84). Luokka pysyy hiljaisena, jos oppilaan vastaukseen reagoidaan vain ”oikein” tai ”väärin” kommenteilla. Jos taas opettaja kysyy vastauksen jälkeen ”Miksi?”, kaikki saavat osallistua keskusteluun ja auttaa perusteluissa.

Näätäsen ja Matikaisen (2005) mukaan koko menetelmän pohjana on oppilaiden ja opettajan luottamuksen ja yhteistyön tunne. Oppilaat voivat esittää ratkaisujaan virheitä pelkäämättä, sillä virheet ovat osa matematiikkaa ja ne rikastuttavat keskustelua. Opettaja antaa huomiotaan kaikille oppilaille ja seuraa heidän edistymistään jatkuvasti. Hän ohjaa oppituntia huolellisesti ja tarkasti kuitenkaan olematta pelottava. Koko luokka toimii yhteistyössä ja erilaiset ideat jaetaan kaikille. (Näätänen & Matikainen 2005, 93.)

Virheitä toivotaan myös opettajalta. Varga (1971) toteaa, että jos opettaja tekee avoimesti virheitä eikä häpeä myöntää tietämättömyyttään, oppilaatkin uskaltavat erehtyä. Oppilaat näkevät, että myös opettaja tekee virheitä, eivätkä häpeä omia virheitään. (Varga 1971, 26). Matematiikan tunnilla kaikkien tulisi olla tasa-arvoisia ja antaa kaikille samanlaiset mahdollisuudet saada onnistumisen kokemuksia. Virheiden kautta opitaan. Siksi Tikkanen (2008) kehottaa selvittämään vastausten lisäksi myös sen, miten oppilas pääsi tulokseen. Jos lapsi ei osaa selittää ajatteluaan, selitystä voi tukea auttavilla kysymyksillä. Opettaja voi myös rehellisesti sanoa, ettei ymmärtänyt, mitä lapsi tarkoitti. Se ei loukkaa lasta, vaan antaa oppilaalle viestin, että opettaja yrittää ymmärtää häntä. Se voi myös innostaa muita oppilaita auttamaan selityksessä (Tikkanen 2008, 79–80).

Iloisten matematiikan tuntien lisäksi turvallisen ja myönteisen ilmapiirin luominen, jossa toisia kunnioitetaan, osoittaa oppilaalle, että hän on arvokas. Korpisen (2005, 156) mukaan tämä johtaa myönteiseen minäkäsitykseen ja itsearvostukseen. Perusopetuksen opetussuunnitelmassa mainitaan, että matematiikka vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen ja edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta (POPS 2004, 158). Ei siis liene liioiteltua väittää, että tämä on yksi menetelmän tärkeimmistä periaatteista.

2.3 Varga-Neményi -opetusmenetelmän koulutus ja käyttö Suomessa

Tällä hetkellä Suomessa on noin tuhat Varga-Neményi -opetusmenetelmään täydennyskoulutettua opettajaa (Lampisen ja Tikkasen suullinen tiedonanto 21.5.2012). Pitkäkestoista koulutusta on annettu jo ainakin vuodesta 2000. Koulutus aloitettiin Jyväskylässä ja Polvijärvellä Ágnes Kivovicsin johdolla. Myöhemmin opetusmenetelmän kokeiluun osallistui lisää kouluja Jyväskylästä ja Polvijärveltä, sekä opettajia Espoosta ja Helsingistä. Helsingissä täydennyskoulutuskursseilla koulutti ja luennoi Eszter C. Neményi ja Jyväskylässä luokanopettajien matematiikan ja pedagogiikan koulutuksessa kouluttajana toimi mm. Márta Oravecz (Tikkanen & Lampinen 2005, 81). Menetelmä on nykyään käytössä ainakin Espoossa, Helsingissä, Jyväskylässä, Polvijärvellä, Kuopiossa ja Riihimäellä (Varganenmenyi.fi).

Koulutusta Varga-Neményi -opetusmenetelmästä on tarjolla alkuvuosia enemmän. Koulutus- ja kehittämiskeskus Palmenia jatkokouluttaa opettajia jatkuvasti eripuolella Suomea. Menetelmää tukevaa koulutusta on jo yli kymmenen vuotta antanut myös Espoon Matikkamaa, joka on yksi matematiikan opetusta kehittävistä pedagogisista keskuksista. (Varganenmenyi.fi). Vaikka menetelmään koulutetaan jatkuvasti uusia opettajia, koulutuksen vaikutusta ei ole tiettävästi tutkittu. Koska opettajien opetusratkaisuihin vaikuttaa vahvasti käsitys hyvästä opettamisesta ja oma asenne matematiikkaa kohtaan (Pehkonen, 2011, 22), ammatillisen kehittymisen arviointi on tärkeää. Seuraavaksi pohdin matematiikan aineenhallinnan merkitystä alakoulussa sekä pyrin määrittelemään matemaattista ajattelua ja matematiikan ymmärtämistä siltä osin, kun se tutkimuksen kannalta on oleellista.

3 Luokanopettajan matematiikan ja pedagogiikan taidot

Varga-Neményi -opetusmenetelmän pedagogisissa perusperiaatteissa korostetaan opettajan matematiikan osaamista, joka on edellytyksenä oppilaiden käsitteiden muodostumiselle sekä kestävän pohjan luomiselle. Luokanopettajien matematiikan taidot ovat kuitenkin Häkkisen, Tossavaisen ja Tossavaisen (2011, 60) tutkimusten perusteella kahdeksasluokkalaisten tasolla. Pehkonen (2011, 16) on todennut matematiikan opetuksen tason pysyvän alkuopetuksesta yliopistoon suhteellisen mekaanisella tasolla eikä korkeamman tason ymmärrystä juurikaan saavuteta. Lisäksi monilla alku- ja luokanopettajilla on negatiivisia tunteita ja asenteita matematiikkaa kohtaan (Kaasila, Hannula, Laine & Pehkonen 2005, 82; Copley 2004, 402–403), minkä ei Varga-Neményi -opetusmenetelmän mukaan katsota edistävän lasten oppimista. Jyväskylän yliopistossa luokanopettajien matematiikan opinnot koostuvat pakollisesta neljän opintopisteen matematiikan kurssista (Luoko OPS 2013), mikäli opiskelija ei tämän lisäksi muita matematiikan kursseja valitse. Asenteiden ja matematiikan taitojen korjaamisessa vastuu on siis opiskelijoilla.

Vaikka Neményi vaatii opettajilta tavanomaista parempia matematiikan taitoja ja kehityspsykologian tuntemista, Kivovicsin (2013) mukaan vähäiset matematiikan taidot eivät ole este Varga-Neményi -opetusmenetelmän käyttöön eikä hän mielellään erottaisikaan matematiikan taitoja ja opettamista toisistaan opettajankoulutuksessa. Menetelmä auttaa opettajaa hankkimaan pohjan ja auttaa ammatilliseen kehittymiseen. Toiminnallisuus opettaa, sillä opettajan on aina ensin tehtävä itse tehtävät, jotka hän aikoo oppilailla teetättää. Menetelmän käyttöön riittää osata matematiikasta se alue, mikä opetettavien lasten taso on, joten korkeampaa matematiikkaa ei tarvita. Opettajan täytyy kuitenkin olla tietoinen siitä, mihin opetus johtaa, Kivovics muistuttaa. Hyvä osaaminen koostuu useammasta tekijästä ja menetelmässä korostuu erityisesti pedagogiset taidot. (Kivovicsin haastattelu 4.6.2013.)

Kehityspsykologian osalta Varga-Neményi -opetusmenetelmää käyttävän opettajan keskeisiin käsitteisiin liittynee menetelmän teoriataustalta löytyvä lähikehityksen vyöhyke (*Zone of proximal development*). Lähikehityksen vyöhykkeellä Vygotski (1982) tarkoittaa vaiheita, joissa lapsi ratkaisee yhteistyön ja ohjauksen kautta vaativampia tehtäviä kuin itsenäisesti. Kun tehtävät ovat tarpeeksi lähellä lapsen kehityksen tasoa, hän pystyy seuraavassa vaiheessa ratkaisemaan tehtävän itsenäisesti. Opetus on siis laadukasta silloin, kun se kulkee kehityksen edellä (Vygotski, 1982, 184–186). Vygotskin ajatuksista oppimisen teoriaa lähti kehittelemään ja soveltamaan Galperin (Koskinen, 2005, 114). Lähikehityksen vyöhykkeen lisäksi keskeistä Galperinin teoriassa on Vygotskin käsitys psyykkisen toiminnan rakentumisesta ulkoisen toiminnan kautta. Etenkin kielen merkit kehittyvät lapsen ja aikuisen yhteisessä toiminnassa (Galperin, 1979, 28).

Galperinin (1979, 83–84) oppimisen teorian ydinkäsite ”orientaatio” tarkoittaa etukäteen tapahtuvaa suoritusta, sekä suuntaamista. Psykologinen orientoituminen alkaa toimia tilanteista, joita ei ole ennen koettu. Ongelmasta syntyy tavoite ja sisäinen motivaatio, jolloin myös tutkimistoiminta aktivoituu. Tällöin subjekti kartoittaa tilannetta, suunnittelee, kokeilee, korjaa ajatuksiaan, kokeilee uudestaan ja suorittaa tehtävän. Orientoituminen on siis merkitysyhteyksien selkiyttämistä (Galperin, 1979, 87–89). Oppimisprosessin tärkein vaihe on orientaatiovaihe, jossa muodostetaan orientaatioperusta. Engeströmin tulkinnassa perusta muodostuu oppimistoiminnon tavoitteesta (toiminnon tai käsitteen kuvaus) ja tulevan toiminnan suoritusta ohjaavasta ennakkokuvasta (esineiden, mallin, kaavioiden tai algoritmin avulla esitettyinä) ja yleisistä toiminnanohjeista (Koskinen, 2005, 117). Galperinin teoria (1979, 90) sisältää lisäksi tarpeet, tunteet ja tahdon orientoitumistoimintaan, jolloin orientaatioperustan muodostaminen on samalla oppimistoiminnan edellyttämien affektiivisten valmiuksien hankkimista.

Kun orientaatioperusta muodostetaan aktiivisessa vuorovaikutuksessa opettajan kanssa, on oppiminen Galperinin mukaan tehokkainta. Jos orientaatiovaiheen ohittaa, oppimisprosessi saattaa tyrehtyä jolloin oppiminenkaan ei ole enää mielekästä. Koska matematiikka rakentuu vahvasti aiempien käsitteiden varaan ja sille on ominaista pitkät seuraantoketjut, käsitteellisten yhteyksien säilyminen tietorakenteissa edesauttaa onnistuneeseen oppimisprosessiin. Ilman orientoitumista oppilas joutuu usein turvautumaan ulkoa oppimiseen, jolloin matematiikasta tulee merkityksetöntä. (Koskinen, 2005, 118–119.)

Edellä kerroin Varga-Neményi -opetusmenetelmän taustalta löytyvistä kehityspsykologian käsitteistä, joista ainakin lähikehityksen vyöhykkeen pitäisi olla kasvatustieteitä opiskelleille tuttu. Mutta miten luokanopettajat käyttävät kehityspsykologian tietojaan hyödyksi opetuksessa? Pedagogisia taitoja sekä didaktiikkaa tarvitaan, kun mietitään, miten voi ohjata lasta lähikehityksen vyöhykkeellä matematiikassa. Malatyn (1997) mukaan hyvä metodi on sellainen, joka tekee lapsista aktiivisia ajattelijoita tunneilla. Tällöin opettaja kysyy oppilailta paljon sopivia kysymyksiä, joiden avulla opettaja saa tietoa oppilaiden sen hetkisen ymmärryksen tasosta (kontrollikysymykset) ja joiden avulla johdetaan uuden asian keksimiseen tai probleeman idean löytämiseen (heuristiset kysymykset). Tällaisten matematiikan tuntien suunnittelu vaatii Malatyn mukaan opettajalta matematiikan ymmärtämisen lisäksi hyvää tietoa matematiikan historiasta, hyvää tietoa kielestä sekä etymologian harrastamista. Opetettavasta aiheesta on löydettävä yhteydet aiemmin käytyihin asioihin sekä tulevaan, joista sitten rakennetaan heurististen kysymysten järjestelmä. (Malaty 1997, 24–25.)

Kivovics (2013) korostaa pedagogisia taitoja eikä vaadi ”korkeamman matematiikan” osaamista. Kuitenkin Unkarissa Varga-Neményi -opetusmenetelmän opetussuunnitelma rakentuu 6-18-vuotiaille (Lampinen & Korhonen 2010, 22). Menetelmän käyttäjillä matematiikan hallinta lienee siis hyvä ja opettajat pitävät huolta ammatillisesta kehittymisestään, jotta matematiikan oppiminen olisi saumatonta. Suomessa Varga-Neményi -opetusmenetelmää käytetään lähinnä esi- ja alkuopetuksessa, joten toistaiseksi pedagogisilla taidoilla voidaan paikata heikompaa matematiikan osaamista ja luokanopettaja pystyy työskentelemään alkuopetusikäisten lähikehityksen vyöhykkeellä.

Jo alakoulun ylemmillä luokilla ylöspäin eriyttäminen vaatii luokanopettajalta matematiikan osaamista laajemmin. Esimerkiksi koordinaatistoa käyttäessä oppilas saattaa kiinnostua funktioihin liittyvistä asioista. Tällöin opettajan olisi hyvä osata funktioiden ominaisuuksia myös itse, jotta pystyisi ohjaamaan oppilasta uusiin oivalluksiin. Laajaa ja yhtenäistä käsitteiden muodostusta varten alakoulun opettajan tulisi hallita hyvin ainakin lukualueet ja niiden väliset operaatiot, jottei tietyillä lukualueilla tehdyistä havainnoista muodosteta ehdottomia laskusääntöjä. Laajemmalla lukualueella kaikki säännönmukaisuudet eivät nimittäin päde ja esimerkiksi luonnollisilla luvuilla pienemmästä luvusta ei voida vähentää suurempaa, mutta muilla lukualueilla se onnistuu kyllä. Ylipäätään opettajan tulisi pohtia ensin omaa ymmärrystään aiheesta, ennen kuin aihetta käsitellään oppilaan kanssa, sillä opettaja, joka hallitsee säännönmukaisuudet ja ymmärtää käsitteet on tutkitusti tehokkaampi, kuin muistisäännöt ja prosessit osaava opettaja (Sarama & DiBiase 2004, 419). Matematiikan oppisisältöihin perehtynyt opettaja voi kaavojen ja laskutekniikoiden ohessa edistää myös oppilaiden matemaattista ajattelua.

Seuraavaksi pohdin, mitä matemaattinen ajattelu on ja miten se ilmenee Varga-Neményi –opetusmenetelmässä.

4 Matemaattinen ajattelu ja sen kehittyminen

4.1 Matemaattinen ajattelu

Matemaattisen ajattelun määritelmiä ja kuvauksia esiintyy matematiikkaan liittyvässä kirjallisuudessa paljon, mutta toisaalta sitä käytetään myös määrittelemättömänä käsitteenä esimerkiksi perusopetuksen opetussuunnitelmassa (ks. POPS 2004, 158). Yrjönsuuri (2007, 155) puhuu matemaattisesta ajattelusta oppimisen ja ajattelun syvenemisen yhteydessä, kun opiskelun seurauksena yksilö tuottaa uusia matemaattisia ajatuksia ja matematiikan tieto ja ajattelu ikään kuin samastuvat. Pehkonen (2011) esittelee artikkelissaan Burtonin määritelmän, jossa matemaattinen ajattelu on matematiikan avulla ajattelemista, sekä Ricen näkökulman matemaattisesta ajattelusta joka painottuu ajattelustrategioihin (Pehkonen 2011, 12). Malaty (2002, 118) tiivistää matemaattisen ajattelun deduktiivisuuteen, jolloin yleisistä tosiasioista (tai lauseista) voidaan johtaa uusia tosiasioita. Pehkonen (2011) kuitenkin muistuttaa, että pelkkä looginen ajattelu ei riitä matematiikkaa aktiivisesti käyttävälle, vaan se vaatii myös luovaa ajattelua. Looginen ja luova ajattelu liittyvät toisiinsa, etenkin ongelmanratkaisusta puhuttaessa.

Sternberg on matemaattisen ajattelun määritelmiä tutkineena todennut, ettei varsinaisia yhteisiä elementtejä matemaattiselle ajattelulle löydy, vaan määritelmät matemaattisen ajattelun luonteesta vaihtelevat erilaisten tutkimuslähtökohtien mukaan. Hän on luokitellut matemaattisen ajattelun ominaispiirteitä ja saanut viisi lähestymistapaa: psykometrinen lähestymistapa (*the psychometric approach*), antropologinen lähestymistapa (*the anthropological approach*), pedagoginen lähestymistapa (*the pedagogigal approach*), tiedematematiikan lähestymistapa (*the mathematical approach*) ja tiedon prosessoinnin lähestymistapa *(the computational approach*). Joutsenlahti on koonnut matemaattiseen ajatteluun liittyviä käsitteitä, jotka kuvaavat tai auttavat ymmärtämään matemaattista ajattelua tai liittyvät oleellisesti ajatteluprosessiin. Näitä ovat uskomukset, kulttuuri, ongelmanratkaisu, matemaattiset kyvyt sekä informaation prosessointi. Ongelmanratkaisun Joutsenlahti (2005) liittää Sternbergin lähestymistavoista pedagogiseen, tiedematematiikan ja tiedon prosessoinnin lähestymistapaan, joista kahdessa viimeisessä on oleellista myös informaation prosessointi. Siispä koululaisilla matemaattinen ajattelu ilmenee kahdessa prosessissa, ongelmanratkaisussa ja käsitteenmuodostumisessa. (Joutsenlahti 2005, 50–51, 64–68).

Leppäahon (2007) mukaan useat tutkijat pitävät ongelmanratkaisua matemaattisen ajattelun ytimenä. Sternbergin pedagogisessa lähestymistavassa ongelmanratkaisu nähdään keskeisenä työtapana matematiikan opiskelussa (Joutsenlahti 2005, 65). Matemaattista ajattelua pystytään harjoittelemaan parhaiten, kun tullaan ongelmatilanteeseen, jota ei voida ratkaista muutamassa minuutissa. Toisaalta matemaattinen ajattelu ei rajoitu pelkästään matematiikkaan, vaan se on omaa ymmärtämystä kasvattava prosessi (Leppäaho 2007, 32). Vastaavanlaiseen ajatukseen johtavat tulokset matematiikan oppimista koskevista kokeiluista, joissa onnistuneimmissa interventioissa käytettiin menetelmiä, jotka soveltuivat kaikkiin oppiaineisiin. Näissä menetelmissä ja periaatteissa ajattelu- ja oppimistaitojen opettaminen integroitiin oppiaineen opettamiseen (Kinnunen & Vauras 1998, 278–279). Matemaattista ajattelua pystytään siis kehittämään yli oppiainerajojen, jos menetelmät ovat oikeat. Tiedollisen taidon kehitystä voidaan Yrjönsuuren (1998) mukaan eritellä ja yhdistää ajattelun kehitysvaiheisiin ja käyttää hyväksi eri oppiaineiden sisältöjen ja rakenteen erittelyssä. Kognitiivisen taidon käyttäminen onkin laaja ja monipuolinen matemaattisen ajattelun ala (Yrjönsuuri 1998, 135).

Matemaattisen toiminnan Yrjönsuuri (1998) jakaa algoritmiseen ja reflektoivaan ajatteluun. Algoritminen ajattelu tuottaa työkaluja ratkaista tehtäviä tai kehittää keinoja päästä mahdollisimman lähelle tulosta. Se muokkautuu sen mukaan, mihin sisältöön yksilö keskittyy ja on eräänlaista taitotietoa. Reflektoivassa ajattelussa korostuu yksimielisten sääntöjen ja deduktiivisten päätelmien kautta syntyvät oivallukset, joiden avulla pystytään lopulta vakuuttumaan lopputuloksesta. Yhdessä algoritminen ja reflektoiva ajattelu tekee oppimisesta laajaa ja syvällistä. (Yrjönsuuri 1998, 135–136.)

Sternbergin matemaattisen ajattelun lähestymistavoista opettamisen näkökulmaan liittyy pedagoginen lähestymistapa. Opetus- ja oppimisprosesseja jälkeenpäin tarkastelemalla voidaan kuvailla oppilaiden matemaattiseen ajatteluun vaikuttavia tekijöitä sekä kehittää opetusta niin, että se kehittää oppilaiden ajattelua (Joutsenlahti 2005, 65). Oppilaiden ja opiskelijoiden matemaattisen ajattelun havainnointi on tärkeää, jotta opetusta pystytään muokkaamaan sellaiseksi, että se kehittää matemaattista ajattelua. Toisaalta myös opettajan matemaattista ajattelua tulisi jollain tapaa seurata, jotta tiedetään, pystyykö opettaja haastamaan oppilaat ajattelemaan lähikehityksen vyöhykkeellä.

Seuraavaksi avaan matemaattiseen ajatteluun liittyviä käsitteitä ja teorioita. Tätä kautta selittyy myös se, miten Varga-Neményi – opetusmenetelmä edistää matemaattista ajattelua ja ymmärrystä.

4.2 Matemaattinen ajattelu Varga-Neményi -opetusmenetelmässä

Matemaattiseen ajatteluun liittyvät läheisesti käsitteet matemaattinen ymmärtäminen, matemaattinen tietorakenne sekä tiedon luonne (Pehkonen 2011, 12). Varga-Neményi -opetusmenetelmän perusperiaatteiden taustalta löytyvät kaikki edellä mainitut käsitteet. Matemaattinen tieto jaetaan menetelmätiedoksi (*procedural knowledge*) ja käsitetiedoksi (*conceptual knowledge*). Menetelmätietoa edustaa suomennoksensa mukaisesti menetelmä tai algoritmi kun taas käsitetieto muodostuu solmujen ja linkkien kautta semanttiseksi tietorakenteeksi. Kasvatuksellisen näkökulman mukaan tiedonlajeista käsitetietoa seuraa menetelmätieto, kun taas kehityksellisestä näkökulmasta katsottuna tekeminen on edellytys tiedolliselle puolelle. (Pehkonen 2011, 17.) Varga-Neményi -opetusmenetelmässä matemaattisen tiedon lajeja tarkastellaan kehityksellisestä näkökulmasta, jolloin tekemisen kautta opitaan käsitteitä ja kasvatetaan tietorakenteita.

Matemaattisella tietorakenteella Pehkonen (2011, 17) tarkoittaa loogista kokonaisuutta, joka muodostuu tosiasiatietojen ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämisestä. Koska kaikilla osa matemaattisesta tiedosta on uskomustasolla, opettajan tulee ainakin osittain olla selvillä oppilaiden tietorakenteista, jotta hän voi auttaa heitä kehittämään tietorakenteitaan (Pehkonen 2011, 18–19). Varga-Neményi -opetusmenetelmän yksi perusperiaate korostaa kielellistämistä sekä kehityksen ja ominaispiirteiden huomioimista. Käytännössä opettaja seuraa oppilaiden tietorakenteiden kehittymistä havainnoimalla toimintaa ja keskustelua.

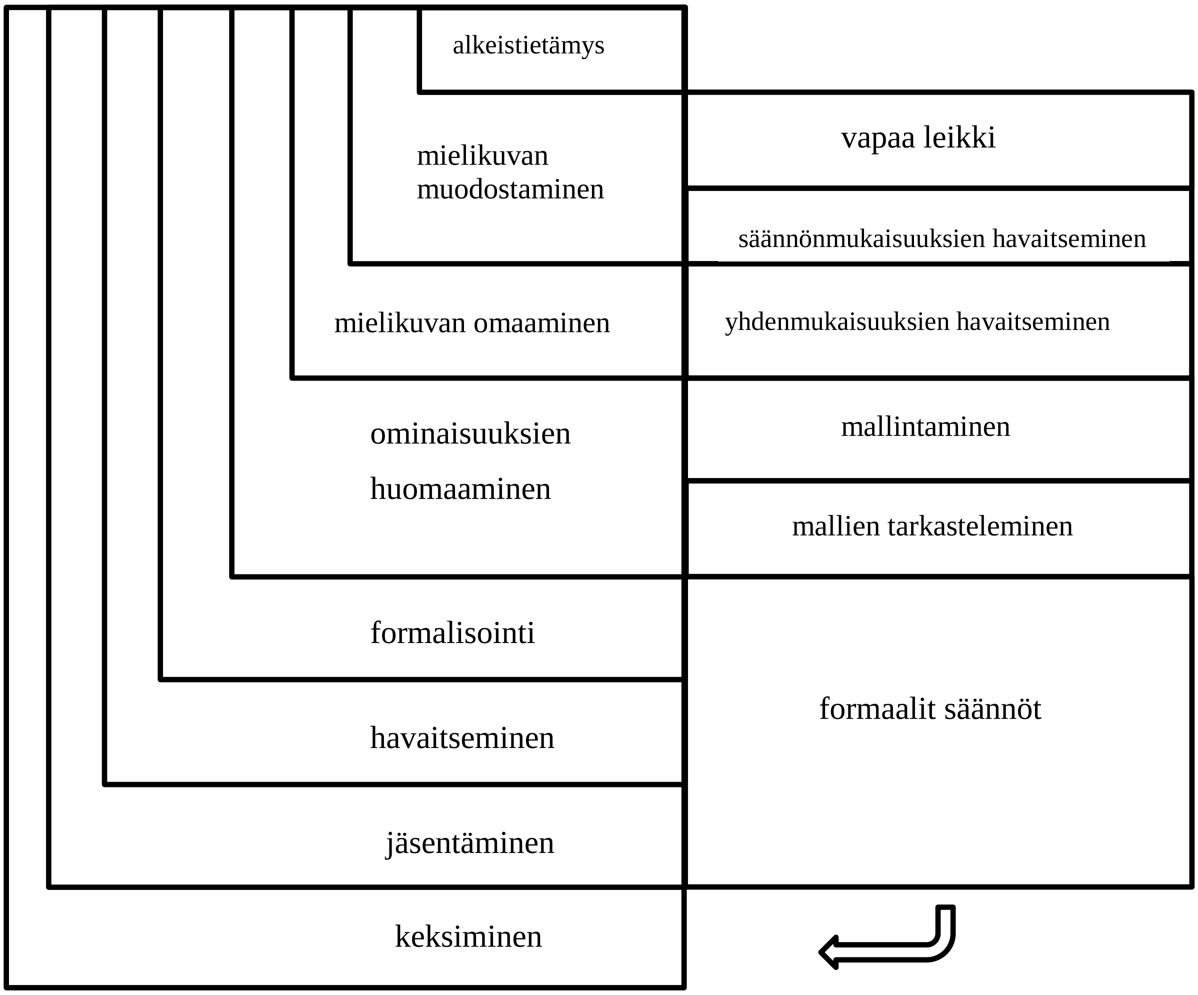
Perusperiaatteissa etenkin laaja ja yhtenäinen käsitteen muodostus, oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioiminen sekä abstraktion tie painottavat ymmärtämistä. Pehkonen (2011) on koonnut matemaattiseen ymmärtämiseen liittyviä luonnehdintoja. Ymmärtäminen on ajattelun tulosta ja toimii aikaisemmin hankitun tiedon kautta. Se on ”omien ajatusten järjestämistä” ja vastaa kysymykseen ”Miksi?”. Se kuuluu prosessiin, jossa vaaditaan selittämistä, todisteiden löytämistä, yleistämistä, soveltamista, analogioiden löytämistä ja esimerkkien soveltamista. Matemaattisessa ymmärtämisessä uudesta tiedosta tulee osa yksilön sisäistä tietoverkkoa, jolloin mentaalinen ja tietoverkoston representaatio yhdistyvät. (Pehkonen 2011, 12–13.) Varga-Neményi -

opetusmenetelmässä tarjotaan erilaisia representaatioita (ks. esim. Tikkanen 2008), joiden avulla lapsi pystyy valitsemaan omaan tietoverkostoon sopivimmat mallit ja rakentamaan näin ymmärrystään. Matemaattista ymmärrystä vahvistetaan keskusteluilla, jolloin opettaja pyytää selityistä, todisteita ja esimerkkejä sekä kysyy usein ”Miksi?”.

Matemaattisen ymmärtämisen kehittymisestä on luotu viimeisten vuosikymmenien aikana useita teorioita (Pehkonen 2011, 15). Pirie ja Kieren (1994) kuvaavat matemaattista ymmärtämistä prosessina, missä yksilö etenee yhdeltä ymmärtämisen tasolta toiselle. Tasoja on kahdeksan, alkeistietäminen (primitive knowing), mielikuvan muodostaminen (image making), mielikuvan omaaminen (image having), ominaisuuksien huomaaminen (property noticing), formalisointi (formalising), havaitseminen (observing), jäsentäminen (structuring) ja keksiminen (inventising) (Pirie & Kieren 1994, 170–171; Pehkonen 2011, 15; Joutsenlahti 2005, 69; Leppäaho 2007, 34).

Alkeistietäminen sisältää opetettavaan asiaan liittyvät ennakkotiedot, esimerkiksi peruslaskutoimitukset pinta-ala – käsitteen ymmärtämisessä tai pinta-alan ymmärtäminen tilavuuden oppimisessa. Mielikuvan muodostamisen vaiheessa oppija käyttää ja yhdistelee esitietojaan visuaalisesti sekä toiminnallisesti opettajan tarjoamien havaintovälineiden avulla. Mielikuvan omaamisen vaiheessa oppija pystyy toimimaan mentaalisella tasolla ilman konkreettisia apuvälineitä. Ominaisuuksien huomaamisen vaiheessa mielikuvia käsittelemällä ja yhdistelemällä erilaisten näkökulmien kautta oppija löytää käsitteelle ominaisuuksia ja rakennetta. Formalisoinnin vaiheessa operoidaan pelkkien symbolien avulla. Havaitsemisen vaiheessa oppija havainnoi formaalia toimintaansa ja pystyy muodostamaan matemaattisen teoreeman käsitteeseen liittyen. Jäsentämisen vaiheessa matemaattisten mallien yhteyden ymmärtäminen kasvaa jolloin formaalit havainnot voidaan yleistää sekä soveltaa niitä. Keksimisen tasolla oppijalla on jäsentynyt ymmärrys käsitteestä. Lisäksi oppijan ennakkokäsitykset ovat muokkautuneet sellaisiksi, etteivät ne häiritse uuden asian oppimista. (Pirie & Kieren 1994, 170–171; Joutsenlahti 2005, 69–71; Leppäaho 2007, 34–36.)

Pirien ja Kierenin matemaattisen ymmärryksen malli on hyvin lähellä abstraktion tie – perusperiaatetta ja Dienesin (ks. luku 2.2) matemaattisen ajattelun vaiheita. Pirien ja Kierenin mallissa vaiheet 2-7 ovat itse asiassa hyvinkin samankaltaiset kuin Dienesin matemaattisen ajattelun malli. Vain alkeistietämyksen ja keksimisen vaiheet puuttuvat (ks. kuvio 2). Koska Dienesin mallissa lähdetään liikkeelle alle kouluikäisen lapsen matemaattisen ymmärryksen kehittymisestä, varsinaista matemaattista alkeistietämystä ei välttämättä vielä ole. Ympäristöä havainnoidaan ja matematiikkaan liittyviä kiinnostuksenkohteita etsitään Dienesin vapaan leikin vaiheessa. Kuten vapaassa leikissä, myös Pirien ja Kierenin mielikuvan muodostamisen vaiheessa korostetaan toimintaa sekä opettajan tai aikuisen merkitystä havainnointivälineiden tarjoajana. Dienesillä vapaan leikin kautta tarjotaan lapselle mahdollisuuksia säännönmukaisuuksien havaitsemiseen leikkien tai toimintavälineiden kautta. Pirien ja Kierenin mallissa mielikuvan muodostamisen vaiheen jälkeen konkreettisia välineitä ei enää tarvita ja mielikuvan omaaminen on eräänlainen ”sulatteluvaihe”, jossa hataraa käsitystä opittavasta aiheesta käydään läpi ajattelemalla. Dienesillä opittavaa aihetta vahvistetaan samanrakenteisilla leikeillä, jolloin lapsi havaitsee yhdenmukaisuuksia. Pirien ja Kierenin ominaisuuksien huomaamisen vaiheessa yhdistyy Dienesin kaksi vaihetta: mallintaminen ja mallien tarkastelu. Säännönmukaisuuksien ja yhdenmukaisuuksien havaitsemisesta seuraa ominaisuuksien ja rakenteen löytäminen opittavalle matematiikan käsitteelle, jolloin mallintaminen ja erilaisten mallien tarkastelu on tarpeen. Dienesin formaalien sääntöjen vaiheessa taas Pirien ja Kieren kolme vaihetta yhdistyy, kun oppija pystyy operoimaan symboleilla, havainnoi toimintaansa ja oivalluksiaan sekä yleistää ja soveltaa oppimaansa. Pirien ja Kierenin mallin viimeisessä vaiheessa oppilaan ennakkokäsitykset ovat muokkautuneet ja hänellä jäsentynyt ymmärrys käsitteestä. Dienesillä (1973, 5) taas kokonaisvaltainen ymmärtäminen on koko toiminnan tavoite.



Kuvio 2. Pirien ja Kierenin 1994, (vas.) matemaattisen ajattelun mallin ja Dienesin 1973, (oik.) matemaattisen ajattelun vaiheiden yhtäläisyyksiä.

Molemmissa malleissa korostuu toiminnallisuus ja kieli. Varga-Neményi -opetusmenetelmässä ne löytyvät perusperiaatteista. Piriellä ja Kierenillä toiminta ja ilmaisu esiintyvät mallissa välivaiheina (Pirie & Kieren 1994, 175; Joutsenlahti 2005, 71). Kun abstraktion tiellä edetään spiraalimaisesti, Pirien ja Kierenin mallin vaiheet ovat sisäkkäisiä. Prosessi etenee aluksi jokaisen vaiheen kautta, mutta koska oppiminen ei ole suoraviivaista, ymmärrystä voidaan vahvistaa palaamalla sisempiin vaiheisiin (*folding back*) (Piere & Kirien 1994, 173; Pehkonen 2011, 15; Joutsenlahti 2005, 72; Leppäaho 2007, 36). Takaisin kiertyminen on löydettävissä myös Varga-Neményi –opetusmenetelmän perusperiaatteissa kun abstraktion tietä kuljetaan myös toiseen suuntaan. Tällainen vastakkaisliike on ominaista matemaattiselle ajattelulle ja ymmärtämiselle (Joutsenlahti 2005, 72; Leppäaho 2007, 36).

Kuten edellisissä matemaattisen ajattelun malleissa, myös Yrjönsuuri (2007) esittää oppimisen ja ajattelun syvenemisen ei-lineaarisena vaiheittain etenevänä prosessina. Eteneminen konkreetista abstraktiin tapahtuu neljässä vaiheessa. Ensimmäisessä havaitaan malliksi valittu tapahtuma konkreettisena eri yhteyksissä. Oppilaille tarjotaan tiettyjen käsitteiden oppimiseen tarkoitettuja välineitä vapaaseen leikkiin ja annetaan lapsen keksiä niille käyttötarkoitus. Seuraavassa vaiheessa mallitapahtuma yleistetään ja käsite liitetään siihen. Lapsen huomio kiinnittyy tai kiinnitetään siis niihin ominaisuuksiin, jotka ovat käsitteen kannalta oleellisia. Kolmannessa vaiheessa mallitapahtuma sisäistetään ja käsite omaksutaan siihen liittyvänä. Tapahtuma on toistettu useasti, jolloin lapselle alkaa muodostua sisäinen malli käsitteestä. Konkreettisiin malleihin voidaan kuitenkin palata tarvittaessa vapaasti. Viimeisessä vaiheessa käsite abstrahoidaan ja irrotetaan mallitapahtumasta. (Yrjönsuuri 2007, 155–156.)

Edellä olen esitellyt matemaattiseen ajatteluun liittyviä käsitteitä joihin matematiikan opetukseen liittyvässä kirjallisuudessa viitataan, ja teoreettisia malleja joita toistuvasti esitellään. Edellä esittämissäni matemaattisen ajattelun malleissa havaitsin yhteisiä ominaisuuksia, jotka tulevat vahvasti esille myös Varga-Neményi – opetusmenetelmässä. Näissä malleissa mainittiin seuraavat huomiot:

1. Ajattelun syveneminen on vaiheittain etenevä prosessi.
2. Prosessi ei ole lineaarinen (eri vaiheissa voidaan olla samanaikaisesti).
3. Vaiheissa eteneminen ei ole yksisuuntaista.
4. Ajattelun syveneminen vaatii toimintaa ja ilmaisua.

Abstraktion tie on prosessi, jossa liikutaan vaiheittain toiminnallisista ja konkreettisista kokemuksista abstraktimpaan. Oppijan iästä riippuu, kuinka korkealle matemaattiselle tasolle viimeisessä vaiheessa pyritään. Etenemällä toiseen suuntaan, eli abstraktista konkreettiseen pystytään vahvistamaan ja syventämään ymmärrystä. Perusperiaatteiden mukaisesti opetus on lapsilähtöistä, eli se sisältää runsaasti toimintaa ja ilmaisua. Aiemmin opittuihin asioihin voidaan palata niin monta kertaa kuin on tarpeen. Osana Varga-Neményi – opetusmenetelmää abstraktion tie kehittää siis matemaattista ajattelua. Mutta minkälaisia ovat matemaattista ajattelua kehittävät oppitunnit ja opetusjaksot? Miten ne toteutetaan ja minkälaista ajattelua opettajalta vaaditaan tuntien suunnitteluun? Näihin kysymyksiin pyrin myöhemmin vastaamaan. Seuraavassa luvussa esittelen tämän tutkimuksen empiirisen osan tehtävät ja toteutuksen.

5 Tutkimustehtävät ja tutkimuksen toteutus

Edellä totesin, että abstraktion tie sisältää matemaattiselle ajattelulle ominaisia piirteitä. Abstraktion tietä toteutetaan muiden Varga-Neményi – opetusmenetelmän periaatteiden (todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen, oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioon ottaminen, toimintavälineiden runsas käyttö, laaja ja yhtenäinen käsitteiden pohjustus, opettaja ja matematiikan opetus sekä lupa erehtyä, väitellä ja iloita) yhteydessä, joten Varga-Neményi – opetusmenetelmä kokonaisuudessaan harjoittaa matemaattista ajattelua.

Tässä tutkimuksessa tarkoitukseni on opettajien kirjoitelmien analyysin perusteella selvittää, miten opettajat toteuttavat koulutuksen pohjalta Varga-Neményi -opetusmenetelmää käytäntöön. Koulutus- ja kehittämiskeskus Palmenia järjestää Varga-Neményi – kursseja, joista valittavina on esiopetuksen, 1. ja 2. luokan kurssit. Näiden kurssien tavoitteena on antaa opettajalle valmiudet opettaa matematiikkaa Varga-Neményi – menetelmän mukaisesti esi- ja alkuopetuksessa, sekä oppia käyttämään abstraktion tietä didaktisena mallina (helsinki.fi/varganemenyi).

Koska opettajien opintotehtävissä pyydettiin korostamaan abstraktion tietä opetuksessa ja opetusta kuvaavissa pohtivissa kirjoitelmissa (ks. liitteet 1 ja 2), pyrin teorialähtöisen sisällönanalyysin avulla selvittämään, miten abstraktion tie toteutuu opettajan kirjoittamana opetuskokeiluissa ja miten opettajan ymmärrys abstraktion tien suhteen on muuttunut ensimmäisen ja toisen opintotehtävän aikana. Varga-Neményi -kursseilla abstraktion tie esitellään neljänä vaiheena: 1) keholliset kokemukset, 2) välineet, 3) kuvat ja mallit sekä 4) symbolit. Tässä tutkimuksessa pyrin saamaan tarkempaa tietoa matemaattisen ajattelun edistämisestä opetuskokeiluissa ja siksi analyysini abstraktion tien toteutumisesta pohjautuu Dienesin matemaattisen ajattelun kuuteen vaiheeseen (vapaa leikki, säännönmukaisuuksien havaitseminen, yhdenmukaisuuksien havaitseminen, mallintaminen, mallien tarkasteleminen ja formaalit säännöt).

5.1 Aineiston keruu

Laadullinen tutkimusaineisto koostuu opettajien kirjoitelmista, jotka sain koulutuskeskus Palmenian kursseilta kouluttajan kautta. Hän hankki opettajilta myös tutkimusluvat kirjoitelmiin. Koulutukseen osallistui luokanopettajia eri puolelta Suomea. Opettajat ovat osallistuneet kursseille kevään 2012 ja kevään 2013 välisenä aikana. Osallistujien opintotehtävänä kurssilla oli suunnitella ja toteuttaa yksi opetusjakso (3–5 tuntia) Varga-Neményi -menetelmällä ja kirjoittaa siitä pohdiskeleva kuvaus, jonka perusteella kuka tahansa pystyy jakson toteuttamaan. Kuvauksen tuli sisältää teoreettista taustaa, opetusjakson tavoitteet, toteutuksen tehtävineen ja välineineen sekä pohdintaa siitä, miten tavoitteet saavutettiin. 2. luokan kurssilla vaihtoehtoisena tehtävänä oli suunnitella oppimispeli, jossa abstraktion tie toteutuu. Oppimispelin oli suunnitellut seitsemän opettajaa. Tehtävät olivat sivumäärältään 3-8 sivua, joista teoreettista tai muuta taustaa esiteltiin 0-3 sivun verran.

Aineisto koostuu 11 opettajan kirjoitelmista. Kaikki opettajat ovat osallistuneet vähintään kahdelle Varga-Neményi -kurssille, joten kirjoitelmia on yhteensä 21 (kaksi opettajaa teki toisen opintotehtävän parina). Tuloksia esitellessäni puhun pääosin kirjoitelmista tai oppituntikuvauksista, mutta opettajien kehitystä abstraktion tien suhteen tarkastellessa opettajista. Pareittain tehdyssä työssä oletan kirjoittajien näkemyksen olevan se, mikä kirjoitelmassa yhteisesti tulee esille.

5.2 Aineiston analysointi

Analysoin aineiston kvalitatiivisesti sisällönanalyysilla, jossa Varga-Neményi -menetelmän perusperiaatteet ja matemaattisen ajattelun teoriat toimivat teoriataustana tutkimukselle. Opettajien kirjoittamat tuntikuvaukset ovat kirjallisia dokumentteja, joista pyrin systemaattisesti löytämään tietyn toiminnan piirteitä ja yhtäläisyyksiä (Tuomi & Sarajärvi 2003, 98–101; Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2010, 165–166). Analyysissa keskityin kahteen kokonaisuuteen, jotka esittelen seuraavaksi.

1. Dienesin matemaattisen ajattelun mallin vaiheiden toteutuminen oppituntikuvauksissa

Abstraktion tie pelkistetään usein Varga-Neményi -menetelmästä puhuttaessa, ja esimerkiksi Varga-Neményi – kursseilla, Dienesin kuudesta vaiheesta neljään vaiheeseen: keholliset kokemukset, välineet, kuvat ja mallit sekä symbolit (Kivovics 2013; Oravecz & Kivovics, 2005, 25). Tästä syystä opettajat pyrkivät toteuttamaan abstraktion tietä neljänä vaiheena oppituntikuvauksissa. Halusin tarkastella matemaattisen ajattelun prosessin näyttäytymistä kirjoitelmissa hieman syvemmin, joten olen analysoinut kirjoitelmia Dienesin kuuden vaiheen kautta. Kolme ensimmäistä vaihetta (vapaa leikki, säännönmukaisuudet ja yhdenmukaisuuksien havaitseminen) tarvitsevat onnistuakseen nimenomaan kehollisia kokemuksia, toimintaa ja välineitä, joten ne sisältyvät abstraktion tien kahteen ensimmäiseen vaiheeseen. Dienesin kolme viimeistä vaihetta (mallintaminen, mallien tarkasteleminen ja formaalit säännöt) liittyvät abstraktion tien kahteen viimeiseen vaiheeseen. Dienesin kuuden vaiheen malli soveltuu siis kirjoitelmien analyysiin. Analyysia varten laadin jokaiselle vaiheelle kriteerit, joiden perusteella luokittelin, miten vaiheet kirjoitelmissa näyttäytyivät lukijalle. Seuraavassa esittelen analyysimenetelmäni kriteerit Dienesin vaiheiden analyysille.

Vapaan leikin vaihe toteutui analyysissä, jos leikki oli opettajan kertomuksen mukaan suunnattu opittavaan asiaan ja innosti lapsia. Teorialähtöisesti katsoin oppimispeleissä vapaan leikin vaiheen toteutuneen (Koppinen 2007, 73). *Matematiikkaan liittyvien säännönmukaisuuksien havaitseminen ja oivalluksiin johtavat samanrakenteiset leikit* toteutuivat oppituokioilla, mikäli lapset tekivät opettajien kertomusten mukaan toiminnasta matemaattisia havaintoja. Opettajien mainintojen lukumäärä oli analyysissä sidoksissa oppilaan säännönmukaisuuksien ja yhdenmukaisuuksien havaitsemiseen. *Mallintaminen* oli analysoitavissa opettajien kirjoitelmissa. *Mallien tarkastelun* analyysi tehtiin opettajien kielellistämiseen liittyvistä maininnoista. *Formaalien sääntöjen* analyysi tehtiin kirjoitelmissa kuvattujen symboleiden ja laskulausekkeiden perusteella.

2. Abstraktion tien toteutuminen Dienesin malliin pohjautuen ja opettajien edistyminen abstraktion tien suhteen

Abstraktion tien onnistumista en todennut pelkästään Dienesin vaiheiden esiintymisen perusteella, vaan tarkastelin oppituntikuvauksia laajempana kokonaisuutena. Koska analyysiin vaikuttaa paljon se, miten tarkasti opettajat ovat oppitunneistaan kirjoittaneet, otin huomioon kirjoitelmista esiin nousevia abstraktion tien näyttäytymiseen vaikuttavia seikkoja. Näitä olivat opettajien esittelemät teoriataustat sekä oppituntien tavoitteet. Jos kokonaisuus vaikutti näistä tehtyjen havaintojen perusteelta siltä, että oppitunneilla oli harjoiteltu matemaattisen ajattelun prosesseja, abstraktion tie toteutui.

Lopuksi halusin vielä tietää, oliko abstraktion tien onnistumisen suhteen tapahtunut muutosta opettajakohtaisesti. Tämän toteutin edellä kuvatun analyysin avulla siten, että vertasin abstraktion tien toteutumista opettajien ensimmäisestä ja toisesta opintotehtävästä.

5.3 Luotettavuus ja eettisyys

Koska teoriataustaa varten opettajille oli annettu pakollisia lähteitä, teoriaosuudet olivat hyvin samankaltaisia. Lähdeviittaustekniikka oli vaihtelevaa, joten en voinut olla varma, mikä oli lähteistä otettua ja mikä kirjoittajan omaa ymmärrystä menetelmästä. Tästä syystä teoriaosuutta ei ollut syytä analysoida. Teoriaosuuksista sain kuitenkin arvokasta tietoa siitä, miten abstraktion tie oli opittu. Tuntien tavoitteista ja pohdinnasta sain lisätietoa Varga-Neményi – menetelmän ymmärtämisestä, mutta keskeiset tulokset tutkimuksesta sain opettajien tuntikuvauksien perusteella.

Palmenian tarjoamat kurssit järjestetään eri puolella Suomea. Kouluttajilla on omat sisältöalueet, joten koulutuksen laatu on tasaista. Tällöin menetelmän toteuttamiseen tuskin vaikuttavat alueelliset erot. Tässä tutkimuksessa aineisto koostuu saman kouluttajan kursseille osallistuneiden opintotehtävistä. Kurssit on toteutettu kevään 2012 ja kevään 2013 välillä, jolloin vastaavia kursseja on pidetty yhteensä 14 (helsinki.fi/varganemenyi). Yhdelle kurssille osallistuu 20–36 henkilöä, joten aineiston määrän huomioon ottaen (21 kirjoitelmaa) opettajat eivät ole tunnistettavissa. Kirjoitelmien määrä on kuitenkin riittävä antamaan tietoa siitä, miten opetusmenetelmää toteutetaan ja kuvaamaan opettajien ymmärrystä ja kehitystä menetelmän suhteen. Opetusjaksot ovat kirjoitelmissa opettajien itsensä kuvaamia, jolloin tutkija saa subjektiivisen näkökulman toteutuksesta. Tämä auttaa selvittämään, kuinka opetusmenetelmä on ymmärretty. Arvioitavat asiat mietin huolellisesti teoriakatsauksen pohjalta ja luin aineiston useasti, jotta analyysi olisi asiantunteva. Tutkimusaineiston käsittelin luottamuksellisesti eivätkä opettajien henkilöllisyydet tai paikkakunnat tule esille raportissa. Kirjoitelmat palautetaan kurssin vetäjälle tutkielman valmistuttua ja kopiot kirjoitelmista hävitetään.

6 Abstraktion tien toteutuminen opetusjaksokuvauksissa

Analyysissa keskityin kahteen kokonaisuuteen. Ensinnäkin tarkastelin, miten Dienesin kuusi vaihetta toteutuu kirjoitelmissa. Toiseksi tarkastelin, miten abstraktion tie näyttäytyy kirjoitelmissa ja millaista on opettajien ymmärrys ja muutos abstraktion tien suhteen.

6.1 Miten Dienesin matemaattisen ajattelun vaiheet onnistuivat kirjoitelmissa?

Vapaan leikin vaihe oli selvästi helpoin toteuttaa tuntikuvauksien perusteella, sillä 21 kirjoitelmasta vain yhdestä puuttui tämä vaihe (ks. taulukko 1). Suurimmassa osassa kirjoitelmia oli onnistuttu myös formaaleissa säännöissä tai niiden pohjustamisessa ja vain neljästä kirjoitelmasta tämä vaihe puuttui kokonaan. Samanrakenteisten toimintojen ja pelien kautta yhdenmukaisuuksien havaitsemiseen oli päästy 14 kirjoitelmassa. Haastavampia vaiheita kirjoitelmien perusteella oli säännönmukaisuuksien havaitseminen mallien tarkasteleminen kielentämällä. Nämä vaiheet toteutuivat vain niukasti yli puolessa kirjoitelmista. Vaikein vaihe toteuttaa oli mallintaminen, jonka katsoin toteutuneen vain yhdeksässä kirjoitelmassa.

Taulukko 1: Dienesin matemaattisen ajattelun vaiheiden toteutuminen oppituntikuvauksissa

Matemaattisen ajattelun vaihe (Dienes)	Kirjoitelmien lukumäärä (n=21)	
	Toteutui	Ei toteutunut
vapaa leikki	20	1
säännönmukaisuuksien havaitseminen	11	10
yhdenmukaisuuksien havaitseminen	14	7
mallintaminen	9	12
mallien tarkasteleminen	12	9
formaalit säännöt	17	4

Seuraavaksi kerron tarkemmin, miten arvioin matemaattisen ajattelun vaiheita sekä perustelen analyysin tuloksia esimerkein. Koska matemaattisen ajattelun kehittyminen ei ole lineaarinen prosessi, ja eri vaiheissa voidaan olla samanaikaisesti, Dienesin vaiheiden ei tarvinnut toteutua perättäisesti järjestyksessä onnistuakseen. Kaikissa vaiheissa pyrin tarkastelemaan vaiheen toteutumista myös kokonaisuuden (eli opeteltavan asian ymmärtämisen) kannalta.

Vapaa leikki

Vapaan leikin ihannetilanteessa lapsi löytää ympäristöstään jotain kiinnostavaa, josta lähdetään rakentamaan uuden asian tai käsitteen kokonaisvaltaista ymmärtämistä. Oppitunnit Varga-Neményi – menetelmällä vaativat kuitenkin etukäteissuunnittelua, joten koulumaailmassa opettajien tehtävänä on luoda kiinnostavia matemaattisia kokemuksia sisältävä ympäristö lapsille. Yleisesti lapsi vapautuu leikissä rajoituksista ja toimii oman tahtonsa mukaan (Jeffree 1986, 9). Jos kuitenkin tarkoituksena on kehittää leikin avulla jotain tiettyä osa-aluetta, leikki on monesti ohjattua. Kuten leikissä yleensä, myös vapaan leikin vaiheessa oleellisinta on, että leikin tekijänä on lapsi itse.

Ohjatun leikin ja pelaamisen välillä ei ole motivaation kannalta suurtakaan eroa. Hyvin suunniteltu oppimista edistävä peli herättää lapsen kiinnostuksen opittavaan asiaan siinä missä ohjattu leikkikin. Oppimispelien on koettu innostavan oppilaita ja opiskelijoita (esim. Koppinen 2007, 73) mikä kävi ilmi myös kirjoitelmista:

> Pelasimme peliä oppilaiden vapaa-ajalla. Kaikki pelasivat mielellään. He omaksuivat säännöt nopeasti ja peliä oli heidän mukaan hauska pelata. (Kirjoitelma 8b)

> Oppimispelimme herätti oppilaissa erilaisia mielipiteitä, mutta havainnoinnin ja oman opetusryhmäni palautteen mukaan oppimispeli oli yhtä poikkeusta lukuun ottamatta innostava. Pelaamista ei haluttu lopettaa aina edes tunnin loppuessa… (Kirjoitelma 1b)

Kirjoitelmissa viisi opettajaa oli teoriataustassaan maininnut abstraktion tien ensimmäiseen vaiheeseen kuuluvan seuraavia toimintoja: omakohtaiset kokemukset, keholliset kokemukset, tekeminen, arjen tilanteet, pelit ja ohjatut leikit. Vapaan leikin vaiheen katsoin toteutuneeksi, jos näitä toimintoja kirjoitelmista ilmeni ja jos ne liittyivät opetettavaan aiheeseen. Myös kaikissa oppimispeleissä (7 kpl) katsoin vapaan leikin vaiheen onnistuneeksi.

Kuten aiemmin totesin, vapaan leikin vaiheessa oli onnistuttu hyvin ja vain yhdessä kirjoitelmassa vapaan leikin vaiheeseen kuuluvat toiminnot eivät olleet opittavan aiheen kannalta merkittäviä. Vaikka oppilaat olivat tuntikuvauksen mukaan innokkaasti toiminnassa mukana, keholliset kokemukset olivat mekaanisia (oppilaat ohjattiin seisomaan tietyille paikoille tai kyykistymään tietyn luvun kohdalla) eivätkä ohjanneet säännönmukaisuuksien tai yhdenmukaisuuksien havaitsemiseen:

> Oppilaat nousevat seisomaan pulpetin viereen. Jaan jokaiselle murtolukukortin. Jos oppilas saa murtolukukortin, joka tarkoittaa kokonaislukua, saa hän istua. Jaetaan uudet kortit. (Kirjoitelma 5b)

Kaikissa muissa kirjoitelmissa vapaan leikin vaihe oli ymmärretty ja lapsille tarjottiin aiheen ymmärtämistä pohjustavaa toimintaa arjen tilanteista:

> Leivosten reseptit toimivat hyvin konkreettisena esimerkkinä, jossa murtolukuihin törmää tuon tuosta. (Kirjoitelma 2a)

> … tavoitteenamme oli saada oppilaat innostumaan teemaan liittyvien toimintamateriaalien avulla sekä luoda myönteisiä kokemuksia matematiikasta toiminnan ja laskemisen parissa vietettävien juhlien avulla. Materiaaleiksi valitsimme pikkujouluihin sopivia syötäviä asioita, kuten piparkakkuja, omenoita, appelsiineja ja suolakeksejä. (Kirjoitelma 1a)

Kehollisia kokemuksia toteutettiin erilaisten ohjattujen leikkien avulla luokassa tai liikuntaleikein jumppasalissa. Monissa kirjoitelmissa lapset saivat itse tunnustella, hyppiä ja mittailla, jolloin innostus opittavaan asiaan heräsi. Näiden kokemuksien kautta tavoitteena on säännönmukaisuuksien havaitseminen, jonka toteutumisesta kerron seuraavaksi.

Säännönmukaisuuksien havaitseminen

Vapaan leikin vaiheessa tapahtuneen toiminnan on tarkoitus johdatella lapsi oivaltamaan jotain opittavan asian kannalta oleellista. Dienes (1973) antaa esimerkin logiikasta, jossa loogisilla paloilla vapaasti leikkiessään lapsi huomaa palojen eri ominaisuudet (muoto, väri, paksuus, reiällisyys) ja saattaa alkaa omatoimisesti luokittelemaan niitä. Seuraavassa vaiheessa aikuinen ohjaa säännönmukaisuuksien havaitsemisessa kysymysten avulla: ”Löydätkö palat, jotka ovat punaisia *ja* niissä on reikä keskellä?”, ”Mitkä palat *eivät* ole punaisia?” ja niin edelleen, jolloin logiikalle ominaisten käsitteiden[3] avulla lapsi oivaltaa luokitteluperusteita (Dienes 1973, 10–11).

Vastaavasti aikuisten ohjausta tarvitaan, kun lapset alkavat etsiä edellisessä vaiheessa leikityistä leikeistä etenemisjärjestystä, kuten esimerkiksi Tikkasen (2008, 71) mainitsemassa tuijotusleikissä. Opintotehtävissä esimerkkejä säännönmukaisuuksien havaitsemisesta ovat muun muassa muffinien tekeminen. Muffineja tehtiin tarkoituksella liian vähän, jolloin oppilaita johdateltiin oivaltamaan kokonaisluvun jakamista osiin puolittamalla muffinit pareittain. Vastaavia oivalluksia syntyy, jos oppilaat yrittävät jakaa suolatikkuja tasan tai muodostavat niistä suolatikkujen yhteismäärän mukaisen luvun hajotelmia.

---

[3] konjunktio (…ja…), disjunktio (…tai…), negaatio (…ei…) sekä implikaato (jos… niin…)

Säännönmukaisuuksien havaitsemisen toteutuminen kirjoitelmissa ilmeni suoraan, jos opettaja oli kirjoittanut oppilaiden kanssa käydyistä keskusteluista, joissa näihin havaintoihin ohjattiin tai muita oppilaiden taholta tulevia oivalluksia. Seuraavassa otteessa opettaja pohjustaa kertotauluja oppilaiden kanssa lukujonoja askeltaen:

> Ensimmäisellä kerralla teimme askellukset 2, 3 ja 4. Osa oppilaista alkoi ihmetellä, että miksi minä en pääse kyykkyyn ja joku pääsi joka kerta. Jätimme asian ihmettelyn asteelle. Pari tuntia myöhemmin huomasin, että tehdessämme piirin, oppilaat laskivat etukäteen, mille piirin paikalle kannattaa asettua. --- Kysyessäni, miksi hakeudutte tietyille paikoille ja miksi kukaan ei halua tietyille paikoille, vastaus oli selkeä: paikka 12 sai mennä kyykkyyn 2., 3., 4. ja 6. kertotauluissa! (Kirjoitelma 4a)

Joissain kirjoitelmissa pohdintaosuus oli vähäinen. Pystyin kuitenkin joissain tapauksissa leikkien tai pelien kuvausten avulla päättelemään, että havaintoja säännönmukaisuuksista on tehty tai ainakin mahdollista tehdä. Esimerkiksi eräässä oppimispelissä tavoitteena oli havainnollistaa positiivisten ja negatiivisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskua. Kirjoittaja antoi peliin vaihtoehtoisia tapoja pelata:

> Peliä voidaan varioida myös monella tavalla. Esimerkiksi kuka saa kymmenen heittokerran jälkeen tilinsä mahdollisimman lähelle lukua 0. Pelin voittamiseen/häviämiseen vaadittuja pistemääriä voidaan pienentää tai suurentaa. Peliin voidaan tuoda myös merkkejä, joiden arvo on suurempi kuin -1 tai 1. (Kirjoitelma 2b)

”Nollapeliä” pelattaessa oppilaat saattavat nopeasti oivaltaa, että mikäli heille jää käteen yhtä monta negatiivista, kuin positiivista pelimerkkiä, tulos on tasan nolla. Tällaisesta tilanteesta voidaan siirtyä lukusuoralle tutkimaan negatiivisten ja positiivisten lukujen etäisyyttä nollasta.

Kymmenessä kirjoitelmassa säännönmukaisuuksien havaitseminen puuttui tai oli vaikea arvioida. Viidessä kirjoitelmassa ongelmia tämän vaiheen toteutumiseen aiheutti se, ettei opeteltavaa matematiikan käsitettä tai aihetta oltu rajattu kunnolla. Eräässä oppimispelissä oli mittaamista, kertolaskua, yhteen- ja vähennyslaskua ja laskulausekkeiden muodostamista, mutta varsinaisia pedagogisia tavoitteita ei mainittu lainkaan. Toisella kirjoittajalla tavoitteet olivat taas toisen luokan viiden tunnin opetusjaksolle liiankin laajat:

> Tässä jaksossa tavoitteenamme on havainnoida ja kuvata ympärillä olevan tilan avaruudellisia suhteita, löytää elinympäristöstämme erilaisia geometrisia muotoja ja oppia piirtämään ja nimeämään niitä. Tavoitteena on harjaannuttaa kaksi- ja kolmiulotteisten muotojen tunnistamista, nimeämistä, tekemistä ja piirtämistä. Tavoitteena on myös ymmärtää peilauksen periaate. (Kirjoitelma 6a)

Kaikissa kirjoitelmissa tähän vaiheeseen liittyivät keholliset kokemukset tai välineet. Säännönmukaisuuksien havaitsemista ne eivät kuitenkaan edistäneet, jos välineitä ei ollut tarjota kaikille oppilaille tai jos keholliset kokemukset tai välineiden käyttö ei ollut suunniteltu siten, että se johtaisi oivalluksiin. Näin oli esimerkiksi oppituokiolla, jossa oppilaiden piti tehdä hyppynarun avulla opettajan näyttämä geometrinen muoto. Hyppynaru ei tässä tapauksessa johda säännönmukaisuuksien havaitsemiseen, sillä sen avulla ei pystytä toteuttamaan geometrisia tasokuvioita. Tasokuvio on näet suljettu kaksiulotteiseen pintaan rajattu tason osa, jolloin hyppynaru ei pohjusta kuvioiden matemaattisia määritelmiä.

Kirjoitelmien perusteella oppitunnit sisälsivät paljon toimintaa. Yhdessä kertotauluja pohjustavassa oppimispelissä oli tehtäväkortteja, joissa kahden ja kolmen kertotaulua harjoiteltiin kehollisten kokemusten avulla:

> 0 x 2: Lukualue 0-20, Luettele lukuja kahden askelin: eteenpäin aloita luvusta 0 ja taaksepäin aloita luvusta 20.
> 1 x 2: Seiso yhdellä jalalla ja laita silmät kiinni. Laske hitaasti kahteen.
> 1 x 3: Pyörähdä kolme kertaa ympäri.
> 8 x 3: Ota sivuaskelia vuoroin oikealle ja vasemmalle. Tee kahdeksan kertaa kolmen askeleen sarja.
> (Kirjoitelma 11b)

Edellä mainituissa tehtävissä säännönmukaisuuksien havaitseminen on oppilaille hyvin vaikeata ja voi johtaa jopa virhekäsityksiin, kuten nollalla kerrottaessa. ”Ei yhtään kertaa kaksi” havainnollistetaan tehtävässä askeltamalla kahden kertotaulua, vaikka tulos on nolla. Jos kaikille kertolaskuille on erilainen tehtävä ja kerrottavasta saadaan joka kerta eri kokemus, voi kertolaskun kannalta oleelliset oivallukset jäädä oppilailta huomaamatta. Matemaattisen ajattelun prosessissa kaikki tämän luvun vaiheet ovat tärkeitä. Jotta prosessi etenee, on opettajan mietittävä etukäteen, minkälaisia oivalluksia lapsilta halutaan ja miten niihin vapaan leikin vaiheesta päästään.

Yhdenmukaisuuksien havaitseminen

Samanrakenteisten leikkien tai pelien avulla johdatellaan lasta yhdenmukaisuuksien havaitsemiseen. Loogisten palojen jälkeen voidaan esimerkiksi luokitella pikkukiviä, pelimerkkejä, nappeja ja korkkeja (Dienes 1973, 13) ja tuijotusleikin jälkeen jatkaa toisiin perinneleikkeihin tai paritansseihin, joissa kombinatoriikan sisältö on sama (Tikkanen

2008, 71). Aineistossa samanrakenteisia leikkejä havaitsin 14 kirjoitelmassa. Näissä oppilaille tarjottiin useampi toiminnallinen leikki tai peli, joista ainakin kahdessa oli samankaltainen idea opittavan asian ymmärtämiseen. Otin myös huomioon yhdenmukaisuuksien havaitsemiseen liittyvät opettajien kirjoitelmissa esiintyvät huomiot:

> Siksi olikin todella hauskaa, kun syyskuun 9. päivän tunnilla tehdessämme vain omien oppilaiden kanssa askellusta askeltaen 'yksi kuiskaten kaksi ääneen' systeemillä kuului yhden pojan kommentti: Ope, tää on kuin kakkosen kertotaulu. (Kirjoitelma 4a)

> Lapset keskustelivat samanlaisten sarjojen tekemisestä sekä taukojen merkityksestä sarjottamisessa. Lapset olivat löytäneet oleelliset asiat! (Kirjoitelma 11b)

Lukujonotaitoja harjoiteltiin muun muassa askeltamalla, sormien ja varpaiden avulla, helminauhoilla, satataululla, lukusuoralla ja noppapelejä pelaamalla. Yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja tehtiin oikeiden syötävien avulla (piparit, keksit, leivokset, omenat) ja toimintavälineillä (värisauvat, pelinappulat, paperiliittimet). Murtoluvuissa yhdenmukaisuuksia havaittiin, kun muffineista siirryttiin muovisiin murtokakkuihin. Luokittelua lapset saivat tehdä itsellään, pehmoleluilla ja loogisilla paloilla.

Samanrakenteisia leikkejä ja pelejä tuntui löytyvän helposti lukujonojen, laskutoimitusten ja luokittelun harjoitteluun. Haasteellista oli sen sijaan löytää samanrakenteisuutta geometriasta. Geometrisiä kuvioita harjoiteltiin kyllä erilaisten leikkien, pelien, geolautojen ja loogisten palojen avulla, mutta oppituokiot jäivät vain geometristen muotojen tunnistamisen tasolle. Sekä säännönmukaisuuksien että yhdenmukaisuuksien havaitsemisen vaihetta olisi voitu hyödyntää geometristen käsitteiden määrittelyssä ja miettiä sitä, mikä tekee kolmiosta kolmion tai neliöstä neliön.

> Peilistä näkyi geometrisia muotoja ainakin hampaissa, nenässä, suussa, huulissa ja nenässä yhteensä (kolmio), huulissa ja leuassa yhteensä (nelikulmio), sieraimissa, silmissä ja koko päässä. (Kirjoitelma 3a)

> Jokaiselle oppilaalle jaetaan tyhjä valkoinen paperi, jonka he saavat rypistellä kevyesti palloksi. Tämän jälkeen paperi avataan varovasti. Tutkaillaan löytyneitä muotoja ja oppilaat värittävät värikynillä (viivotin käyttöön) geometrisia muotoja aina 3kpl opettajan antamien ohjeiden mukaan. (Kirjoitelma 6a)

Edellisissä otteissa lapset löytävät geometrisia kuvioita muistuttavia asioita ympäristöstään. Geometristen muotojen tunnistamista olisi voitu tehdä täsmällisemmin, jotta virhekäsityksiä ei syntyisi. Samanrakenteisten toimintojen avulla olisi voitu kiinnittää huomiota siihen, miksi kolmiota muistuttava kuvio ei kuitenkaan ole kolmio.

Samanrakenteisten leikkien vaihe puuttui seitsemästä kirjoitelmasta, joista kahdessa oli aiheena geometria. Kolmessa kirjoitelmassa esiteltiin oppimispeli ja kaksi muuta liittyivät vertailuun, lukujonoihin ja murtolukuihin. Vaikka erilaisia leikkejä ja pelejä kirjoitelmissa esiintyikin, ne eivät johtaneet oleellisesti yhdenmukaisuuksien havaitsemiseen.

Mallintaminen

Jotta lapsi voisi käyttää abstraktiota aktiivisesti, tulee hänelle mallintaa leikeistä jääneet mielikuvat (Tikkanen 2008, 71). Mallintamisessa on oleellista, että oppijalle tarjotaan visuaalinen representaatio aiemmasta toiminnasta. Malleja voidaan piirtää taululle tai näyttää sopivien välineiden avulla. Esimerkkinä toimivan tuijotusleikin kombinatoriikkaa Tikkanen (2008, 71) mallintaisi puudiagrammin, taulukoinnin tai askartelutikkujen avulla.

Kirjoitelmissa katsoin mallintamisen vaiheen toteutuneeksi, kun representaatio tarjottiin lapsille ohjatusti ja opittavaan aiheeseen liittyen. Yhdeksässä kirjoitelmassa tässä oli onnistuttu. Lukujonotaitoja harjoitellessa eräänä representaationa toimii hyvin lukusuora, jota kahdessa kirjoitelmassa oli onnistuneesti käytettykin. Kahdessa muussa kirjoitelmassa mallinnettiin lukumääriä numerosymbolin lisäksi kuvilla tai korteilla, joissa pallojen tai tarrojen määrä vastasi lukumäärää. Muita mallinnuksia toteutettiin piirtämällä niitä ohjatusti tai niin, että opettaja piirsi:

> Kävimme vastausvaihtoehdot läpi yhteisesti ja annoin oppilaille tässä suuremman roolin olla äänessä. Piirsin oppilaiden ratkaisut taululle tauluharpin ja viivaimen kanssa. (Kirjoitelma 2a)
>
> Suunnittelemme ja valmistelemme yhdessä oppilaiden kanssa pikkujouluja. Luokassa on katettu pöytä, jossa lautasella 6 piparia. Lisäämme lautaselle 3 piparia. Teemme saman taululla ruskeasta paperista tehdyillä piparikuvilla (tilanteet ennen ja jälkeen muutoksen). (Kirjoitelma 1a)
>
> Välineinä olivat valkopunakiekot eli vadelmakarkit, värisauvat, napit sekä jakamiseen käytetyt lautaset ja pussit. Lisäksi rahatoimitukset kulkivat mukana. Tämän toiminnan yhteydessä kuten muulloinkin käytämme piirtämistä. (Kirjoitelma 4b)

Kaikissa kirjoitelmissa oli piirtämistä, välineillä havainnollistamista tai laskujen muodostamista paperille tai taululle. Mallintamisen vaihe kuitenkin puuttui 12 kirjoitelmasta. Näistä kuusi olivat oppimispelejä. Vaikka oppimispeleissä oli mukana tehtäviä tai kortteja, joissa opittavaa asia ilmeni kuvan tai symbolin avulla, ne olivat monesti vaihtoehtona toiminnalle. Näin ollen toiminnasta ei välttämättä seurannut se, että sama tilanne nähdään visuaalisena representaationa:

> Arvaa miten 10 hajoaa. Tiputa 10 helmeä hajotuskoneeseen. Kuinka monta helmeä tuli kumpaankin lokeroon? Jos arvasit oikein, saat yhden ylimääräisen timantin.
> Ota pussista helmiä. Kuinka monta helmeä on kädessäsi? Kuinka monta helmeä jäi pussiin?
> (Kirjoitelma 8b)

Tässä pelissä muut oppilaat toimivat tuomareina, kun yksi oppilas suorittaa tehtävää. Mallintamista varten tuomareille olisi voitu antaa paperit, joissa on hajotelmakone tai käsi ja pussi, joihin tuomarit voivat itse piirtää oikean vastauksen. Myös opettaja toimii tuomarina, jolloin häneltä tulee ainakin yksi oikea visuaalinen malli tehtävään. Oikeita ratkaisuja olisi voinut olla visuaalisesti myös tehtäväkorttien kääntöpuolella, mikäli tehtävään löytyy vain yksi oikea ratkaisu.

Osassa oppituokiot painottuivat erilaisiin leikkeihin ja toimintoihin eikä visuaalisista representaatioista ollut mitään mainintaa. Joissain kirjoitelmissa leikeissä kyllä oli mukana symboleita, mutta itse toimintaa ei pysähdytty mallintamaan. Näin oli esimerkiksi eräällä oppituokiolla, jossa lukukäsitettä 1-5 vahvistettiin kiertoharjoittelulla pareittain. Oppilaat kävivät eri pisteillä (Tunnustelupussit, Omenapeli, Purkit ja ”jäniksen papanat”, Halli Galli – peli, Hyppyrata ja Tunnustelulevyt), mutta kirjoitelmassa ei tarkemmin kerrottu, miten toiminnallisen vaiheen jälkeen asiaa havainnollistettiin piirtämällä. Osassa lapset kyllä saivat piirtää ja tehdä itsenäistä vihkotyötä, mutta tämän vaiheen ajatus olisi, että opettaja tarjoaa representaation, josta voidaan oppilaiden kanssa seuraavassa vaiheessa keskustella.

Mallien tarkasteleminen

Dienesin (1973) esimerkki mallien tarkastelusta logiikan osalta on hyvin matemaattinen. Malleina toimivat päättelyketjut, jonka tekijät pyritään keskustelun yhteydessä nimeämään. Näiden kautta muodostetaan väitelauseita, jotka seuraavassa vaiheessa yleistetään formaaleiksi säännöiksi. Alakoulun alemmilla luokilla näin abstraktinen keskustelu ei kuitenkaan ole mahdollinen ja Dienes toteaakin, että pedagogiikan kannalta ei ole oleellista ymmärtää opeteltavaa aihealuetta näin perusteellisesti, vaan pohjustaa ajattelua tietyiltä osilta. Riittää, kun lapsen annetaan tehdä havaintoja opittavan asian lainalaisuuksista omalla kielellään, jonka jälkeen voidaan muiden lasten kanssa keskustellen ja ohjaten valita sopivammat termit yhteiseen kielenkäyttöön. (Dienes 1973, 8-9, 19–22.)

Koska kursseilla matemaattisen ajattelun kehittämistä käytiin läpi abstraktion tie – periaatteen mukaisen neljän vaiheen (fyysinen kokemus, välineellinen vaihe, kuvallinen vaihe ja symbolinen vaihe) kautta, Dienesin mallien tarkastelun vaihetta ei ollut suoraan havaittavissa kirjoitelmista. Tästä syystä laadin muutamia kriteerejä, joiden perusteella pystyin toteamaan mallien tarkastelun vaiheen onnistuneeksi matemaattisen ajattelun kannalta.

Edellisessä vaiheessa tehdyt mallit ja niistä keskusteleminen teki mallien tarkastelun vaiheesta onnistuneen. Tämä tietysti edellytti, että edellinenkin vaihe oli toteutunut. Näin selkeitä tapauksia kirjoitelmista löytyi vain kaksi:

> Piirsin oppilaiden ratkaisut taululle tauluharpin ja viivaimen kanssa. Kävimme samalla luokan kanssa keskustelua siitä, jos heidän lempikakkunsa jaettaisiin löydettyjen ratkaisujen pohjalta kolmeen osaan, minkä kakun palasen he haluaisivat. (Kirjoitelma 2a)

> Seuraavaksi hankimme mutakakun. Sen jaoimme ensin piirtämällä kakun kanteen puolet, neljäsosat ja kahdeksasosat. Seuraavaksi ihan oikeasti jaoimme kakun ja tietty söimme sen. Tämä tunti oli täynnä ääntä. Lasten oli myös helppo selittää, että esimerkiksi neljä lasta söi puolet kakusta jne. Teimme myös paperisia taittelumateriaaleja, joihin piirsimme, mikä on esim. ¼. (Kirjoitelma 4b)

Mallien tarkastelun vaihe saattoi kuitenkin toteutua, vaikka mallintamisen vaihe puuttui. Tämä johtui siitä, että kirjoitelmissa puhuttiin paljon kielellistämisestä ja osa opettajista yhdisti sen kolmanteen tai neljänteen abstraktion tien vaiheeseen. Toisilla kielellistäminen kulki mukana koko opetuskokonaisuuden ajan. Ilmeisesti kursseilta on jäänyt mieleen matematiikasta keskustelemisen tärkeys ja jos kirjoitelmissa mainittiin lasten kanssa käydyt keskustelut ja laskutarinat, joissa päästiin oivalluksiin, käsitteiden määrittelyyn tai lainalaisuuksien havaitsemiseen, ovat tavoitteet samat, kuin mallien tarkastelun vaiheessa. Oleellista on, että aikuinen ohjaa keskustelua matematiikan kannalta oikeaan suuntaan, mikä kahdessa kirjoitelmassa olikin hyvin oivallettu:

> Opettaja jakaa luokan oppimisen kannalta sopiviksi ryhmiksi, kolme oppilasta joka ryhmään olisi hyvä tavoitemäärä. --- Tarvittaessa ryhmällä on aikuinen apuna ohjaamassa toimintaa ja sen kielentämistä. (Kirjoitelma 3b)

> Matematiikassa opettajan keskeinen rooli on olla matematiikan kielen ohjaajana. Opettaja opettaa käyttämään matematiikan termejä. (Kirjoitelma 7a)

Kaikkiaan mallien tarkastelun vaihe toteutui 12 kirjoitelmassa. Jäljelle jäävissä yhdeksässä kirjoitelmassa oli osassa myös keskusteluista mainintaa. Jos siitä ei kuitenkaan ollut kerrottu tarkemmin eikä kirjoitelman perusteella pystynyt sanomaan, liittyikö keskustelu matematiikkaan ja opittavaan asiaan, vaihe ei toteutunut. Peleissä keskustelua syntyy monesti luonnostaan. Toisaalta pelaaja saattaa keskittyä vain omaan suoritukseensa eikä yhteistä keskustelua synny:

> Pelin ideanahan oli, että yksi pelaaja varsinaisesti ratkaisee tehtävää, mutta samanaikaisesti muut toimivat tuomareina. --- Pelaajat eivät aina muistaneet toimia tuomareina, siitä heitä täytyi ajoittain muistuttaa. He usein olettivat, että aikuinen sanoo menikö tehtävä oikein. Yhdessä tekeminen ja pohtiminen tuntui olevan tälle porukalle hieman vieras toimintatapa. (Kirjoitelma 8b)

Tästä syystä myös oppimispeleissä ei riittänyt pelkkä maininta tai oletus keskustelusta, vaan kirjoitelmasta täytyi löytyä esimerkki matematiikkaan liittyvästä keskustelusta. Myöskään parityöskentely ja niissä tapahtuva keskustelu ei riittänyt mallien tarkastelun vaiheen toteutumiseen. Jos keskustelu ei ole ohjattua tai parityöskentelyn tuloksia ei kootusti käydä läpi, oppilaille saattaa keskenään syntyä virhekäsityksiä. Vaikka Varga-Neményi – opetusmenetelmä kannustaa pari- ja ryhmätyöskentelyyn, opettajan on silti huolehdittava, että myös tällainen toiminta tuottaa hedelmää matemaattisen ajattelun kannalta.

Formaalit säännöt

Dienesin matemaattisen ajattelun teorian viimeisessä vaiheessa on tavoitteena määritellä matemaattinen ilmiö yksiselitteisesti. Määritelmien avulla pystytään etenemään ajattelussa niin, että myös aksioomien ja teoreemien muodostaminen on mahdollista (Dienes 1973, 9). On kuitenkin edelleen huomioitava, että yleistävä abstraktio on mahdollinen noin 12–13 vuoden iässä (Neményi 2005, 34), joten vuosiluokilla 1-4 formaaleja sääntöjä pohjustetaan yksittäisiin konkreettisiin tilanteisiin liittyvillä laskulausekkeilla (Tikkanen 2008, 72).

Koska kaikki opetuskokonaisuudet ja oppimispelit oli suunniteltu luokka-asteille 1-3 ja koska monet opettajat käsittivät abstraktion tien neljännen vaiheen pelkästään symboleiden käyttönä, formaalien sääntöjen vaihetta oli mukautettava näihin seikkoihin. Tämän vaiheen toteutumiseen riitti, että opittavasta aiheesta muodostettiin laskulausekkeita ja lapset tekivät niitä itse tai jos oppilaiden kanssa pohdittiin määritelmiä tai todistuksia ja pohjustettiin näin yleistä abstraktiota. Näitä kriteerejä löytyi 17 kirjoitelmasta. Etenkin oppimispeleihin oli saatu hyvin laskulausekkeiden ja symbolien käyttö mukaan, sillä kaikki pelit toteuttivat formaalien sääntöjen vaiheen. Tosin yhdessä kirjoitelmassa peli toimi opittavan aiheen pohjustajana ja toteutti vain kaksi ensimmäistä vaihetta. Kirjoitelmassa kerrottiin kuitenkin, miten aihetta syvennettiin pelaamisen jälkeen, jolloin päästiin myös tähän viimeiseen vaiheeseen.

Muut opetuskokonaisuudet, joissa formaaleiden sääntöjen vaihe oli onnistunut, sisälsivät tehtäviä oppikirjasta ja monisteista tai vihkotyöskentelyä. Aiheesta riippuen käytössä olivat myös numerotaulut ja satataulut sekä tukkimiehen kirjanpito. Useassa kirjoitelmassa tehtiin myös laskutarinoita ja kirjattiin niitä ylös. Yhdessä kirjoitelmassa lukujonotaitoja harjoitellessa pohdittiin myös parillisuutta ja lukumäärän todistamista. Murtolukuja käsittelevällä tuokiolla sivuttiin jopa rationaaliluvun määritelmää[4], kun oppilaat pohtivat kumpi on suurempi, $\frac{3}{3}$ vai $\frac{5}{5}$.

Neljässä kirjoitelmassa formaalit säännöt puuttuivat. Kaksi näistä oli geometrian opetusjaksoja, joissa pelkkä kuvioiden piirtäminen ja nimeäminen taululle tai vihkoon eivät riittäneet tämän vaiheen toteuttamiseen. Otollinen tilaisuus pohjustaa tasokuvioiden määritelmiä oli toisessa kirjoitelmassa esimerkiksi silloin, kun oppilaat olivat sitä mieltä, että kolmio ja kolmio väärin päin ovat eri kuvioita. Tähän ei kuitenkaan oppitunnilla tartuttu ja näin oppilaille jäi havainnostaan virhekäsitys. Formaalin ajattelun pohjustaminen oli hankalaa myös kirjoitelmassa, joissa aiheena oli vertailu. Opetuskokonaisuus painottui toimintaan eikä oppilaille tarjottu mahdollisuutta pohtia vertailulle merkintätapoja. Neljäs kirjoitelma, josta formaalit säännöt puuttuivat, liittyi luokitteluun. Ymmärrettävästi symbolinen vaihe oli vaikea toteuttaa, sillä joukko-opin merkintätavat eivät kuulu alakoulun opetussuunnitelmaan yhtäsuuruusmerkkiä lukuun ottamatta.

Formaalien sääntöjen onnistuminen näytti olevan vahvasti sidoksissa opetettavan aiheen valintaan. Sellaisissa aiheissa, joissa oppimistuloksia on perinteisesti mitattu erilaisilla laskutehtävillä (lukujonotaidot, yhteen- ja vähennyslaskut jne.), symbolinen vaihe toteutui helpommin. Aiheet, jotka vaativat syvempää suunnittelua ja osaamista opettajalta, olivat formaalin ajattelun pohjustamisen kannalta vaikeampia.

[4] Rationaalilukujen joukko (Q) on reaalilukujen joukon osajoukko, jonka jäsenet voidaan esittää kahden kokonaisluvun osamääränä eli murtolukuna.

6.2 Abstraktion tien toteutuminen opetusjaksoilla

Edellisessä luvussa tarkastelin, miten Dienesin matemaattisen ajattelun mallin vaiheet toteutuivat Varga-Neményi – kursseilla olleiden opettajien oppitunneilla kirjoitettujen oppituntikuvausten perusteella. Siitä, miten Dienesin vaiheet ovat toteutuneet, ei pystytä kuitenkaan tekemään suoria johtopäätöksiä abstraktion tien toteutumisesta. Dienesin vaiheiden tarkastelu paljastaa, missä kohdissa ajattelun syvenemisen ohjaaminen on haastavaa. Vaiheiden toteutumattomuuden perusteella ei voida kuitenkaan automaattisesti todeta, että matemaattisen ajattelun prosessi olisi epäonnistunut. Edelleen on muistettava, että ajattelun syveneminen ei ole lineaarinen prosessi jossa vaihe vaiheelta kuljetaan tietty reitti tulosten saavuttamiseksi, vaan moniulotteinen, toiminnallinen prosessi. Tästä syystä tarkastelin abstraktion tien toteutumista kokonaisuutena Dienesin vaiheiden onnistumisen huomioon ottaen.

Seuraavassa alaluvussa kerron, miten abstraktion tie on kirjoitelmien perusteella onnistunut. Tämän jälkeen tarkastelen opettajien henkilökohtaista edistymistä abstraktion tien suhteen.

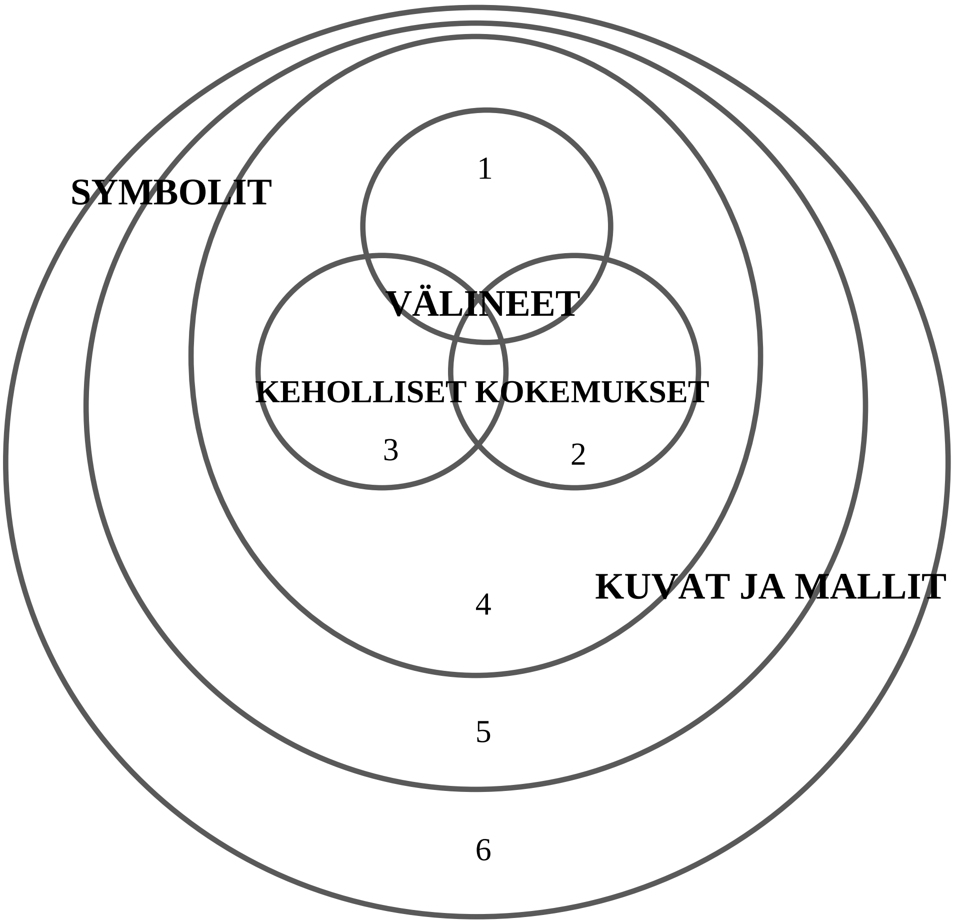
Matemaattisen ajattelun prosessit abstraktion tiellä

Opintotehtävien teoriataustojen perusteella abstraktion tie ymmärrettiin toteutettavina vaiheina. Viisi henkilöä olikin esitellyt opintotehtävässään abstraktion tien samankaltaisesti neljänä vaiheena:

1. Omakohtaiset kokemukset, keholliset kokemukset, tekeminen, arjen tilanteet, pelit ja ohjatut leikit
2. Toimintamateriaaleilla työskentely
3. Mallintaminen kuviksi, piirtäminen
4. Symbolit, mielikuvat, välilliset kokemukset, matematiikan kieli, kielentäminen puheeksi

Kaksi opettajaa oli yhdistänyt kaksi viimeistä vaihetta, jolloin abstraktion tien vaiheita oli vain kolme.

Kun abstraktion tien vaiheita tarkastellaan Dienesin matemaattisen ajattelun mallin vaiheiden kautta, voidaan nähdä, ettei pelkkien vaiheiden läpikäyminen välttämättä riitä onnistuneeseen matemaattisen ajattelun prosessiin (kuvio 3). Säännönmukaisuuksia ja yhdenmukaisuuksia havaitaan erilaisten leikkien kautta, jolloin saavutetaan abstraktion ensimmäinen taso (Dienes 1973, 8). Tätä varten tarvitaan paljon kehollisia kokemuksia ja oivalluksia toimintavälineitä apuna käyttäen. Mallintaminen ei ole mahdollista, jos ei ole mitään, mitä mallintaa. Näin ollen kuviossa mallintamisen vaihe sisältää Dienesin kolme ensimmäistä vaihetta. Mallien tarkastelu ja kielellistäminen taas vaatii neljä ensimmäistä vaihetta ja lopulta formaaleihin sääntöihin ja yleiseen abstraktioon voidaan päästä, kun viidessä edellisessä vaiheessa on toimittu tavoitteellisesti. Matemaattisen ajattelun prosessia jatketaan siis kuvien ja mallien sekä symbolien avulla, jolloin abstraktio syvenee yleisemmäksi konkreettisista kokemuksista.



Kuvio 3. Abstraktion tien vaiheet (välineet, keholliset kokemukset, kuvat ja mallit, symbolit) yhdistettynä Dienesin matemaattisen ajattelun mallin vaiheisiin (1=vapaa leikki, 2=säännönmukaisuuksien havaitseminen, 3=yhdenmukaisuuksien havaitseminen, 4=mallintaminen, 5=mallien tarkastelu, 6=formaalit säännöt).

Koska tiukkaa rajanvetoa ei pystytä vaiheiden välille tekemään eikä vaiheita välttämättä tarvitse toteuttaa tietyssä järjestyksessä, abstraktion tien toteutumista ei voida todeta pelkästään vaiheiden toteutumisen perusteella. Myös se, kuinka tarkkaan oppitunneista on opintotehtäviin kirjoitettu, vaikuttaa analyysiin. Tavoitteiden määrittely, aiheen valinta ja se, miten tarkkaan keskusteluja on kirjoitelmissa kuvattu, on otettava huomioon abstraktion tietä tarkastellessa. Näistä syistä arvioin abstraktion tien toteutumista kokonaisuutena, johon liittyy vahvasti loogis-matemaattisten kokemusten saaminen, tavoitteet sekä aiheen valinta ja siinä pysyminen. Erityisesti kiinnitän huomiota siihen, miten mallit ja välineet liittyvät opetuskokonaisuuden aiempaan toimintaan, eli syvennetäänkö kokemusten kautta hankittua tietoa. Dienesin vaiheista olisi abstraktion tien kannalta toteuduttava ainakin vapaan leikin vaihe (toiminta) ja mallien tarkastelu (ilmaisu). Muiden vaiheiden toteutumista tarkastelen joustavammin koko matemaattisen ajattelun prosessin kannalta. Niissä kirjoitelmissa, joissa Dienesin kaikki vaiheet toteutuivat ja liittyivät opeteltavaan aiheeseen, seurasi tietysti abstraktion tien toteutuminenkin.

Abstraktion tie onnistui yhteensä seitsemässä kirjoitelmassa. Näistä kuudessa toteutui myös Dienesin kaikki kuusi vaihetta. Näillä oppituokioilla tavoitteet vastasivat sitä, mitä tunneilla haluttiin oppia ja opeteltava aihe pysyi koko ajan samana. Kirjoitelmissa kerrottiin oppilaiden oivalluksista ja keskustelut ja kielellistäminen liittyivät matematiikan sisältöihin. Näiden kirjoitelmien joukossa ei ollut oppimispelin toteuttaneita opettajia.

Puutteita abstraktion tien toteutumisessa havaitsin 14 kirjoitelmassa. Näihin sisältyi kaikki opintotehtävät, joissa oli suunniteltu oppimispeli. Kaikissa 14 kirjoitelmassa esiintyi puutteita mallintamiseen liittyvissä vaiheissa. Joko mallit puuttuivat kokonaan eikä niitä näin ollen voinut oppilaiden kanssa tarkastella, tai ne eivät liittyneet aiempaan toimintaan. Kielellistäminen peleissä oli selvästi haasteellista, koska peleihin liittyi vahvasti tehtävien suorittaminen. Hyväksytyn suorituksen jälkeen seuraava pelaaja odottaa jo kärsimättömästi vuoroaan, joten tilaa keskustelulle on vaikea tehdä. Seuraavat lainaukset kuvaavat tätä oppimispelien ongelmaa:

> Pelissä on tarkoituksena koko ajan kielentää tehtäviä. Pelaajat lukevat ääneen kortissa olevan tehtävän ja kertovat omin sanoin mitä ovat tekemässä ja mikä on tehtävän vastaus. Pelaajat olisivat mielellään oikaisseet tässä; aina ei maltettu lukea ohjetta ja vastaukset olivat hyvin lyhytsanaisia. (Kirjoitelma 8b)

> Matematiikkapelin tarkoitus on kiertää pelilauta ja ensimmäisenä maaliin tullut on pelin voittaja. ---
> Pelissä on kolmenlaisia pelikortteja. Siniset, eli toimintavälinetehtävät eivät kokeiluissamme toimineet nopeustehtävänä ---. Siispä jokainen pelaaja tekee laskun välineillään ja jokainen, jolla on oikein, saa mennä askeleen eteenpäin. ---
> Vihreissä korteissa on liiketehtäviä eli oppilaat toimivat ohjeen mukaan. ---
> Oranssit ”Noppa ja kuva” – tehtävät ovat nopeustehtäviä, jolloin nopein oikein vastannut saa mennä yhden askeleen eteenpäin. (Kirjoitelma 6b)

Kahdessa muussa pelissä ongelmaksi muodostui se, ettei Dienesin vaiheita ollut juurikaan havaittavissa. Toisessa peli toimi opeteltavan aiheen alustajana, jolloin itse peli sisälsi vain vapaan leikin vaiheen ja säännönmukaisuuksien havaitsemista. Aiheesta jatkettiin seuraavilla oppitunneilla ja aihetta käsiteltiin tällöin syvemmin. Itse pelissä abstraktion tie ei kuitenkaan toteutunut, vaikka se opintotehtävän tehtävänannossa oli vaatimuksena (ks. liite 2). Toisessa pelissä opeteltavaa matematiikan osa-aluetta ei ollut rajattu, vaan pelin tehtävät liittyivät mittaamiseen, kerto- ja jakolaskuihin, yhteen- ja vähennyslaskuihin, laskulausekkeen harjoitteluun ja rahalaskuihin.

Oppituntien tavoitteiden asettelu ja aiheessa pysyminen tuotti hankaluutta muissakin kirjoitelmissa edellä mainitun lisäksi. Opetusjaksoille oli nimetty opittava aihe tai tavoite, mutta osassa kirjoitelmista oppituntikohtaiset tavoitteet eivät pysyneet samassa teemassa. Seuraavassa esimerkkikirjoitelmassa harjoiteltava matemaattinen käsite oli alun perin kertolasku, joka ilmoitettiin heti kirjoitelman alussa. Tavoitteeseen lisättiin pian toinenkin harjoiteltava käsite:

> Tavoitteena oli, että pelin avulla oppilaat innostuisivat havainnoimaan ympäristönsä esineellisen todellisuuden yhteyksiä matemaattisiin käsitteisiin (yhteenlasku tai kertolasku) ja samalla rakentaisivat konkreettisia muistikuvia abstraktin ajattelunsa tueksi. (Kirjoitelma 1b)

Koska peliä pelasivat sekä ykkös- että kakkosluokkalaiset, pelissä sai valita kertolaskun sijaan myös yhteenlaskuun liittyviä tehtäviä. Pelissä ei kuitenkaan harjoiteltu yhteenlaskun yhteyttä kertolaskuun, vaan oppilas sai jokaisessa tehtävässä valita, suorittaako tehtävästä yhteenlaskun vai kertolaskun. Jos siis tehtävänä oli taputtaa tai koputtaa lasku arpakuutioiden luvuista 2 ja 4, oppilas sai tehdä neljä taputusta ja kaksi koputusta tai neljä kahden taputuksen ryhmää. Tällaisilla valinnoilla ei saada loogis-matemaattisia kokemuksia ja pelaamisesta saattaa jäädä jopa virhekäsityksiä opittavaan aiheeseen.

Toinen esimerkki jakson ja oppituntien tavoitteiden ristiriidasta löytyy kirjoitelmasta, jossa esikouluikäiset opettelevat luokittelua. Oppituokioiden tavoitteet olivat seuraavat:

> Suunnitelma oppituokiolle: Tavoitteena on portinvartijaleikin oppiminen sääntöleikkinä, yhden ominaisuuden erottaminen ja ahaa-elämyksen, eli salaisuuden pitäminen sovitusti.
> Tunnin tavoitteet: Lapset oppivat käsittelemään loogisia paloja ohjeen mukaan, toimimaan ohjeen mukaan ja tuokion lopuksi tuomaan loogisten palojen rasian takaisin opettajan pöydälle. (Kirjoitelma 7a)

Joissain kirjoitelmissa opetusjakson tavoite oli vaikeasti ymmärrettävissä. Toisissa taas tavoite ja tuntien toteutus eivät kohdanneet. Seuraavassa esimerkissä kirjoitelman alussa on asetettu opetusjaksolle perusajatus:

> Luokittelu ja ominaisuudet liittyvät kiinteästi geometriaan, joten näistä kahdesta asiasta tuli jaksoni kulmakiviä. Jaksoni perusajatus oli toimia johdantona geometrian maailmaan, jotta saisimme käyttöömme jälleen riittävän pohjustuksen myöhemmin alkavalle uusien asioiden hämmästelylle (tämän vuoden sisältöjä ovat mm. suoraan, puolisuoraan, janaan, murtoviivaan ja pisteeseen tutustuminen, peilauksen lisää tutkaileminen sekä symmetria), jotta matka voisi jatkua taas eteenpäin kirjankin sisältöjä käyttäen. (Kirjoitelma 3a)

”Johdanto geometriaan” ei ole hyvin rajattu opeteltava aihe, jolloin matemaattisen ajattelun edistämistä abstraktion tien kautta on vaikea suunnitella. Oppitunneilla tehtiin geometrisiä muotoja oman kehon avulla, piirtämällä ja geolaudoilla. Luokittelua tehtiin loogisilla paloilla ja oppilailla. Muotojen tekeminen ja tunnistaminen ei johtanut geometristen tasokuvioiden määrittelyyn, mutta ominaisuuksista ja luokitteluperusteista keskustelua käytiin. Kirjoitelman lopussa jakson tavoite oli muuttunut ja tuntien tarkoituksena olikin nyt aiemman kertaaminen:

> Ennen kaikkea palautimme varmasti tarpeeksi mieliin geometrian käsitteitä ja perussanoja pohjaksi janojen, puolisuorien ynnä muiden opettelulle, mikä oli varsinainen jaksomme tavoite. (Kirjoitelma 3a)

Koska abstraktion tien on tarkoitus *kehittää* matemaattista ajattelua, on opetusjaksolla oltava sellainen tavoite, jossa syvennetään aiempaa tietoa tai opitaan jotain uutta. Edellisessä esimerkissä matemaattinen ajattelu ei edistynyt, vaan prosessissa jäätiin alkeistietämyksen tasolle. Vastaava ilmiö voidaan havaita seuraavasta esimerkistä:

> Pelin tavoitteena on antaa lapsille kokemuksia kertolaskuista liikunnan ja eri aistien avulla. --- Peli edellyttää kertolaskun idean sekä merkintätavan olevan jo tuttuja. ---
> Lapset olivat innoissaan erilaisesta tunnista ja uudesta kokemuksesta, vaikka varsinaisesti mitään uutta he eivät nyt matematiikassa oppineetkaan. (Kirjoitelma 3b)

Kirjoitelmien perusteella oppitunneille oli kehitelty paljon kehollisia ja toiminnallisia tuokioita. Niissä käytettiin paljon havainto- ja toimintavälineitä. Välineitä ei aina ollut jokaiselle oppilaalle, jolloin omakohtaisia kokemusten saaminen hankaloituu. Dienesin (ks. 2.2) teorian mukaan omakohtaiset kokemukset pohjustavat seuraavaa vaihetta, jolloin toimintavälineiden kanssa toistetaan edellisen vaiheen matemaattinen ajatus. Tällaista samanrakenteisuutta ei ollut osattu etsiä toimintavälineiden käytössä. Siksi pelkkä paljon toimintaa sisältävä tunti ilman suunnitelmallista välineiden käyttöä ei edistä abstraktion tiellä etenemistä ja oppimiskokemukset jäävät fyysisiksi. Mikäli abstraktion tien halutaan toteutuvan, opetusjakson tavoitteet tulee määritellä ja miettiä etukäteen. Mikä on se asia, joka halutaan jaksolla oppia ja viedä abstraktimpaan suuntaan? Minkälaiset oppituokiot vievät asiaa eteenpäin ja mitkä matemaattiset käsitteet ovat oleellisia koko jakson tavoitteen kannalta?

Abstraktion tien esiintyminen opettajien kirjoitelmissa

Tutkimuksen aineisto koostui 11 opettajan kirjoitelmista. Jokainen opettaja oli osallistunut vähintään kahdelle Varga-Neményi – kurssille, jolloin sain jokaiselta opettajalta kaksi kirjoitelmaa. Yksi kirjoitelma oli tehty parityönä. Nämä kaksi opettajaa olivat kuitenkin tehneet myöhemmän kurssin opintotehtävän itsenäisesti. Kirjoitelmia oli siis yhteensä 21.

Koska kaikilla Varga-Neményi – kursseilla painotetaan opintotehtävissä abstraktion tietä, aion vielä lyhyesti tarkastella, ovatko opettajien maininnat abstraktion tien toteutuksessa lisääntyneet jatkokurssin jälkeen, eli onko abstraktion tien onnistumisen suhteen havaittavissa muutosta aiemman ja myöhemmin käydyn kurssin opintotehtävissä. Katson siis opettajakohtaisesti edellisen alaluvun tulosten perusteella, esiintyykö abstraktion tie molemmissa opintotehtävissä, vai vaan toisessa niistä.

Esiopetuksen ja ensimmäisen luokan Varga-Neményi – kurssilla opintotehtävänä oli toteuttaa opetusjakso abstraktion tiellä kulkien. Toisen luokan kurssilla tehtävänä oli suunnitella oppimispeli, jossa abstraktion tie toteutuu. Edellisessä luvussa totesin, että missään oppimispeleissä abstraktion tietä ei esiintynyt. Näin ollen viidellä opettajalla abstraktion tie toteutui ensimmäisessä opintotehtävässä, mutta ei enää toisessa. Neljällä opettajalla abstraktion tie jäi puuttumaan molemmista kirjoitelmista. Yhdellä opettajalla abstraktion tie ei esiintynyt ensimmäisessä kirjoitelmassa, mutta toisesta kirjoitelmasta se oli havaittavissa. Yhdellä opettajalla abstraktion tie oli jäljitettävissä molemmissa opintotehtävissä.

Taulukko 2: Abstraktion tien toteutuminen opettajakohtaisesti kahden opintotehtävän perusteella.

	Abstraktion tie esiintyi (K)/ei esiintynyt (E)	
	ensimmäinen opintotehtävä	toinen opintotehtävä
Opettaja 1	K	E (peli)
Opettaja 2	K	E (peli)
Opettaja 3	E	E (peli)
Opettaja 4	K	K
Opettaja 5	E	E
Opettaja 6	E	E (peli)
Opettaja 7	E	K
Opettaja 8	K	E (peli)
Opettaja 9	E	E
Opettaja 10	K	E (peli)
Opettaja 11	K	E (peli)

7 Pohdinta

7.1 Matemaattisen ajattelun kehittämisen vaiheista

Teoriaosuudessa esittelin matemaattisen ajattelun teorioita ja kerroin matemaattisen ajattelun kehittämisestä prosessina. Totesin, että Dienesin kuusi vaihetta sekä abstraktion tie edistävät matemaattista ajattelua. Kirjoitelmien perusteella voidaan kuitenkin huomata, että käytännön toteutus ei ole helppoa. Kursseilla ei tietääkseni korostettu abstraktion tietä Dienesin vaiheiden kautta. Suurimmassa osassa kirjoitelmia Dienesin vaiheita oli kuitenkin tunnistettavissa.

Vapaan leikin vaihe ei tuottanut ongelmia alakoulun opettajille. Motivointikeinona leikit ja pelit ovat varmasti tuttuja ja etenkin esi- ja alkuopetuksessa lienee tiedossa, etteivät pienet lapset pysty istumaan keskittyneesti paikoillaan 45 minuuttia. Leikki on siis luonnollinen osa koulupäivää. Varga-Neményi – kurssien opintotehtävässä leikki tuli liittää matematiikkaan ja kiinnittää huomio opittavaan asiaan. Tutkimustulosten perusteella tässä oli onnistuttu erittäin hyvin.

Muita Dienesin vaiheita esiintyikin kirjoitelmissa vapaan leikin vaihetta huomattavasti vähemmän. Kuviossa kolme yritin havainnollistaa sitä, kuinka säännönmukaisuuksien ja yhdenmukaisuuksien havaitseminen pohjautuu vapaan leikin vaiheeseen ja kuinka nämä kolme vaihetta ovat sidoksissa toisiinsa. Jo vapaan leikin vaiheen pitäisi olla suunniteltua seuraavia vaiheita silmällä pitäen. Kertotauluissa ja lukujonojen harjoittelussa säännönmukaisuuksia ja samanrakenteisia leikkejä oli helpommin havaittavissa. Perusopetuksen opetussuunnitelmassa (POPS 2004, 159–160) lukujen ja laskutoimitusten keskeiset sisällöt on lueteltu aiheen suunnittelun kannalta selkeämmin kuin esimerkiksi geometriassa. Geometrian keskeisissä sisällöissä korostetaan havainnointia, kuvailua ja nimeämistä, joihin ainakin aineiston kahdessa kirjoitelmassa oli tyydytty. Jos opettajalla ei ole syvempää tietoa geometriasta eikä opetussuunnitelmassa kehoteta perehtymään määritelmiin tarkemmin, voi kokemukset geometriasta jäädä hyvinkin pinnallisiksi.

Perusopetuksen opetussuunnitelma on laadittu eräänlaiseksi viitekehykseksi opettajille ja se antaa tilaa oman opetuksen suunnittelulle ja kehittämiselle. Se ei ole yksityiskohtainen luettelo siitä mitä pitäisi opettaa, mutta kannustaa silti matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen (POPS 2004, 158). Vaikka Varga-Neményi –

menetelmässä kehotetaankin opettelemaan asioita lapselle sopivalla kielellä, käsitteiden opetus pitää silti olla täsmällistä. Malatyn (1997) mukaan käsitteiden ja lauseiden matemaattisesti oikean ja rakenteellisesti kumulatiivisen johdonmukaisen sisällön opettaminen kuvitellaan monesti vaikeatajuiseksi pienelle lapselle. Matematiikkakerhoissa alakouluikäiset lapset opiskelivat kuitenkin ”tosi-matematiikkaa” mielellään ja pystyivät ymmärtämään algebran ja geometrian käsitteitä (Malaty 1997, 9-10). Sekä Malaty, että Varga (ks. luku 2.2) ovatkin samaa mieltä siitä, ettei matematiikan opetuksessa ole oleellista se, milloin jokin tietty aihe opetellaan, vaan miten se opetetaan, jotta matematiikan rakenne etenee johdonmukaisesti.

Kirjoitelmissa yllätti se, miten vähän mallintamisen vaihetta oli havaittavissa, vaikka se on abstraktion tien kolmas vaihe. Joissain kirjoitelmissa ajateltiin, että vihkotyöskentely tai kuvioiden piirtäminen riittää mallinnukseksi. Mallintamisen vaiheen ideana kuitenkin on havainnollistaa kuvien ja kaavioiden avulla aiempaa toimintaa ja samalla siirtyä abstraktimpaan esitysmalliin. On tärkeää, että mallintamisen tekee opettaja ja että malleista keskustellaan, jotta virhekäsityksiltä vältytään tai ne pystytään korjaamaan. Vaihe ei sinällään ole vaikea toteuttaa, sillä lähes kaikista alakoulun matematiikan sisällöistä voidaan piirtää tai muulla tavoin luoda jokin esiteltävä malli. Vaikuttaakin siltä, ettei mallintamisen ja siitä keskustelemisen merkitys ollut auennut kaikille opettajille. Näiden vaiheiden tarkoitusta tulisi siis perustella opettajille tarkemmin, jotta ne tulisi toteutettua. Muutamissa kirjoitelmissa opettajat kertoivat, että kielellistäminen on haastavaa eikä oppilaiden kanssa sitä ollut harjoiteltu tarpeeksi.

Formaalien sääntöjen vaiheen olin arvioinut tässä tutkimuksessa siltä osin, kun se esi- ja alkuopetuksessa on mahdollista toteuttaa. Monissa kirjoitelmissa pohjustettiin formaalia ajattelua laskulausekkeiden avulla. Matemaattisten ilmiöiden määrittelyä yksiselitteisesti ei oppituntikuvauksista löytynyt. Oppituntien aiheesta riippuen formaalin ajattelun pohjustaminen vaihteli. Murtoluvuissa päästiin jo luonnollisten lukujen esittämiseen rationaalilukuina, kun taas lukumääriä käsiteltiin paljon välineiden ja oppilaiden järjestäytymisen kautta, eikä formaaliin ajatteluun vaadittu tässä tutkimuksessa kuin symboleiden käyttö tunneilla. Matemaattista ajattelua voidaan kuitenkin syventää jo pientenkin oppilaiden kanssa keskustelemalla lukusuorasta, joka samalla toimii mallinnoksena. Lukusuoran pisteet kuvaavat lukuja suuruusjärjestyksessä. Pisteen ja lukumäärän yhteyden ymmärrettyä otetaan käyttöön numerot (Yrjönsuuri 2007, 191).

Tämän jälkeen voidaan keskustellen löytää lukusuoran keskeisiä ominaisuuksia[5], joka pohjustaa lukualueiden laajentamisen ymmärtämistä. Tämänkaltaiseen formaalin ajattelun pohjustamiseen päästään silloin, kun opettajan oma ymmärrys opetettavasta aiheesta on riittävä.

Tässä tutkimuksessa tarkastelin Dienesin vaiheiden toteutumista erillisinä osina kirjoitelmissa, jotta selviäisi, mitkä vaiheista ovat vaikeita toteuttaa. Matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta vaiheiden tulee tietysti nivoutua yhteen ja pysyä koko ajan opeteltavassa aiheessa. Tästä syystä toisessa tutkimuskysymyksessä tarkastelin oppituntikuvauksia kokonaisuuksina. Seuraavaksi pohdin, minkälaisia hankaluuksia kirjoitelmien perusteella nousi esiin abstraktion tien toteuttamisessa.

7.2 Abstraktion tien toteutumiseen vaikuttavista tekijöistä

Abstraktion tie onnistui seitsemässä kirjoitelmassa. Kirjoitelmia, joissa abstraktion tie ei toteutunut, oli 14. Näiden kirjoitelmien joukossa oli kaikki oppimispelit, jotka osittain selittävät abstraktion tien epäonnistumisten määrää. Oppimispelin suunnittelu on jo itsessään haaste ja matemaattista ajattelua kehittävän pelin toteuttaminen lyhyen kurssin jälkeen vaatii tekijältään paljon. Tämä selittää myös sitä, miksi osalla opettajista abstraktion tie toteutui ensimmäisen kurssin jälkeen, mutta ei enää jatkokurssilla. Toisaalta aiemmin opittua asiaa ei ollut ehkä sisäistetty niin hyvin, että se pystyttäisiin siirtämään uuteen konseptiin.

Varga-Neményi – kurssit ovat laajuudeltaan viiden opintopisteen suuruisia. Tämä tarkoittaa 135 tunnin työmäärää, josta lähiopetusta on 36 tuntia. Lähiopetus koostuu viiden päivän aikana toteutettavista vuorovaikutteisista luennoista ja harjoituksista. Kuudes lähiopetuspäivä toteutetaan opintotehtävään keskittyvänä keskustelevana pedagogisena seminaarina. Opettajien itsenäiseen työskentelyyn jää 99 tuntia, johon sisältyy opintotehtävän toteutus, dokumentointi ja kurssimateriaaliin tutustuminen. (helsinki.fi/varganemenyi.)

---

[5] Luvut merkitään tasavälein, pisteiden numerointi aloitetaan nollasta, lukusuoralla lukua kuvaa pisteen etäisyys nollapisteestä (itseisarvo) ja lukusuoralla luvut ovat järjestyksessä siten, että luvun oikealla puolella on aina suurempi luku (Yrjönsuuri 2007, 191).

Koska vain kolmasosassa kirjoitelmia abstraktion tie toteutui, vaikuttaisi siltä, ettei näin lyhyillä kursseilla ehditä sisäistämään abstraktion tien ideaa etenkin, kun kurssin työmäärästä yli 70 % suoritetaan itsenäisesti opiskellen. Kuten matemaattisen ajattelun prosessikin, myös abstraktion tien sisäistäminen vaatii toimintaa ja ilmaisua. Siksi erityisesti oppimistehtävien läpikäymiseen tulisi varata enemmän aikaa, kuin pedagogisen seminaarin kuusi tuntia. Kirjoitelmien perusteella vaikuttaa myös siltä, etteivät työn ohella kurssia suorittavat opettajat käytä itsenäiseen opiskeluun ihan niin montaa tuntia, kuin kurssin suorittamiseen on ajateltu käytettävän. Tämän huomasi muun muassa siitä, että joillain opettajilla teoriaosuudet olivat molemmissa kirjoitelmissa lähes samat.

Kirjoittajasta riippuen oppituntikuvauksista sai vaihtelevasti tutkimuksen kannalta oleellista tietoa. Koska kirjoitelmat olivat melko lyhyitä (kaikki enintään kahdeksan sivua), kuvaukset oppitunneista eivät olleet kovin yksityiskohtaisia. Oppilaiden kommentteja oli hyvin vähän ja jotkut tuokiot oli kuvattu vain pääpiirteet luetteloiden. Tehtävänannossa pyydetty pohdinta jäi monissa kirjoitelmissa yleiseksi arvioksi oppituntien onnistumisesta. Abstraktion tien tai muidenkaan perusperiaatteiden syvällisempää pohdintaa opettajat eivät olleet tehneet. Myös oppilaiden väliset keskustelut jäivät kirjoitelmissa lähes kokonaan huomiotta. Näiden kirjoittajakohtaisten erojen takia abstraktion tie on saattanut onnistua, mutta se ei käy kirjoitetusta kuvauksesta ilmi. Olisikin kiintoisaa havainnoida metodin toteutumista esimerkiksi videoimalla oppitunteja. Tutkijan kannalta videointi ja videoiden analysointi vie huomattavasti enemmän aikaa, joten sisällönanalyysi kirjoitelmia aineistona käyttäen mahdollisti tässä tutkimuksessa suuremman otoskoon.

7.3 Millaista tietoa tutkimuksesta saatiin matematiikan opetuksen kehittämiseen?

Tämän tutkimuksen teoriataustassa esittelin Varga-Neményi – opetusmenetelmän perusperiaatteet sekä matemaattiseen ajatteluun liittyviä teorioita ja määritelmiä. Totesin myös, että Varga-Neményi – opetusmenetelmä edistää matemaattista ajattelua. Koska menetelmä edustaa toiminnallista oppimista, se voisi olla myös ratkaisu hyvään motivaatioon ja asenteeseen matematiikassa, joilla on tutkitusti keskeinen rooli matematiikan oppimisessa (Kupari ym. 2013, 55). Matematiikan opetuksen kehittämiseen liittyen tästä tutkimuksesta nousee mielestäni esiin kaksi asiaa ylitse muiden.

Ensinnäkin, luokanopettajien matematiikan taitoja tulisi kehittää, käytettiinpä Varga-Neményi – opetusmenetelmää kouluissa tai ei. Opettajankoulutuslaitoksissa matematiikan pakollisten kurssien laajuus vaihtelee kolmen ja seitsemän opintopisteen välillä. Kurssien sisällöt varmasti vaihtelevat opettajankoulutuslaitoksesta riippuen, mutta jonkinlainen lähtötaso opiskelijoilta voitaisiin vaatia ennen kuin pakolliselle matematiikan kurssille tultaisiin. Jos sellaisen opiskelijan, joka ei ole koskenutkaan pianoon, täytyy opetella opintojensa aikana sitä soittamaan, niin miksei matematiikan kertaamiseen voisi käyttää hieman omaakin aikaa? Lähes kaikilla opettajanopinnot aloittavilla kuitenkin on takanaan peruskoulun ja lukion matematiikkaa. Jokaisella opiskelijalla on omat vahvuutensa, ja joillain kursseilla joutuu tekemään enemmän kuin toisilla.

Kun opiskelijoiden tasoerot matematiikassa ovat itseopiskelun tai valinnaisten kurssien ansiosta kaventuneet, varsinaisilla matematiikan kursseilla voitaisiin keskittyä siihen, miten opettajan oma asenne ja matematiikkakuva vaikuttavat oppilaisiin ja opettamiseen. Tietysti matemaattisen ajattelun prosessiin pitäisi kursseilla myös tutustua, jotta opetussuunnitelman mukaisesti voidaan kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua. Koska virassa olevilla opettajilla on velvollisuus kehittyä työssään osallistumalla esimerkiksi täydennyskoulutuksiin, ei kenenkään luokanopettajan tarvitse olla mestari maisterin paperit saatuaan.

Tutkimusaineiston perusteella matematiikan taitojen kehittäminen jo virassa olevilla opettajilla olisi myös paikallaan. Vaikka opintotehtävien perusteella matematiikan taidot eivät kaikilla opettajilla ihan abstraktion tien toteuttamiseen riitäkään, kirjoitelmista on ilo huomata, kuinka opettajat innostuivat heille uudesta matematiikanopetusmenetelmästä. Kurssin käyneet opettajat nauttivat ehkä matematiikan opetuksesta enemmän ja innostus tarttuu oppilaisiinkin, kuten Varga-Neményi -opetusmenetelmän yhdessä perusperiaatteista todetaan.

Toinen varteenotettava tämän tutkimuksen tiimoilta noussut ajatus liittyy koulun rakenteiden muuttamiseen. Vaikka fyysisesti yhtenäisiä peruskouluja on ollut jo kymmenen vuoden ajan, alakoulun ja yläkoulun opettajat pitävät edelleen omat leirinsä kouluissa. Matematiikan aineopettajien kanssa keskustellessani esiin tulevat jatkuvasti alakoulusta yläkouluun siirtyvien oppilaiden vaihtelevat matematiikan taidot. Yläkoulusta lukioon siirryttäessä ongelma ratkeaa, kun opiskelija voi valita matematiikassa opiskeltavan laajuuden. Jotta nämä nivelvaiheet sujuisivat jouhevammin ja uskomus

”matikkapäästä” saataisiin murennettua, tarvitaan opettajien välistä yhteistyötä. Luontevimmin tämä sujuisi, jos alakouluille palkattaisiin mentoriopettajia, kuten Servais jo 70-luvun alussa ehdottikin (ks. luku 2.2). Näin aineenopettajille saataisiin lisää työpaikkoja ja heidän erityisosaamisestaan hyötyisivät sekä alakoulun opettajat, että oppilaat. Aineenopettajalta saisi tarvittaessa konsultaatiota opetettavasta aiheesta ja toisaalta joitain tunteja voisi toteuttaa samanaikaisopetuksenakin.

Matematiikan opetuksen kehittäminen käytännössä vaatii asennemuutosta niin opettajaopiskelijoilta kuin kentällä toimivilta opettajilta. Olisikin ehkä syytä selvittää näitä asenteita tarkemmin, jotta tiedetään, minkälaisia toimenpiteitä vaaditaan, jotta kehitys näkyisi kouluissa ja oppimistuloksissa. Kiinnostavaa olisi myös tietää, miten niissä kouluissa, joissa opettajia on ollut Varga-Neményi – kursseilla, suhtaudutaan matematiikan opetukseen ja onko innostus levinnyt koulutetuilta opettajilta koko työyhteisöön. Myös matematiikan opetuksessa on lupa erehtyä, väitellä ja iloita ja jokaisesta luokanopettajasta voi tulla myös hyvä matematiikanopettaja alakouluun. Kysymys kuuluukin, mikä estää?

Lähteet:

Copley, J.V. 2004. The Early Chilhood Collaborative: A Professional Development Model to Communicate and Implement the Standards. Teoksessa D. H. Clements & J. Sarama (Eds.) Engaging Young Children in Mathematics. Standards for Early Childhood Mathematics Education. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 401-414.

Dienes, Z. P. 1973. The six stages in the process of learning mathematics. Windsor: NFER.

Duffin, J. 1987. The Language of Primary Mathematics. Teoksessa M. Preston (Toim.) Mathematics in primary education. London: Falmer, 42–55.

Galperin, P. J. 1979. Johdatus psykologiaan (suom. Kauppila, R. & Helkama, K. alkuperäisteoksesta Vvedenjije v psihologiju, Moskva 1976). Helsinki: Kansankulttuuri Oy.

Hirsjärvi S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2010. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

helsinki.fi/varganemenyi = Helsingin yliopiston kotisivut. Alkuopetuksen matematiikkaa Varga-Neményi –menetelmällä. Viitattu 25.2.2014. http://blogs.helsinki.fi/varganemenyi/

Häkkinen, K., Tossavainen, T. & Tossavainen, A. 2011. Kokemuksia luokanopettajaksi pyrkivien matematiikan soveltuvuustestistä Savonlinnan opettajankoulutuslaitoksessa. Teoksessa E. Pehkonen (Toim.) Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista. Helsinki: Helsingin yliopisto, 11–28.

Ikäheimo, H. 1998. Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä. Teoksessa P. Räsänen, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki -instituutti, 239–250.

Jeffree, D. 1986. Leiki kanssani (suom. Poutianen, S alkuperäisteoksesta Let me play vuodelta 1977). Porvoo: WSOY.

Joutsenlahti, J. 2005. Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä. Tampere: Tampereen Yliopistopaino Oy. Viitattu 22.7.2013. http://tampub.uta.fi/bitstream/handle/10024/67453/951-44-6204-1.pdf?sequence=1

Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A. & Pehkonen, E. 2005. Millä tavalla matematiikka-ahdistusta potevat luokanopettajaopiskelijat puolustavat matemaattista identiteettiään? Teoksessa L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (Toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.-26.11.2004. Oulu: Oulu University Press, 81–94.

Kallonen-Rönkkö, M. 1998. Matematiikan oppiminen ala-asteen uusiutuvissa oppimisympäristöissä. Teoksessa P. Räsänen T. Ahonen & P. Malinen (Toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino, 251–268.

Kinnunen, R. & Vauras, M. 1998. Matemaattisten ongelmien ratkaisutaito ala-asteella. Teoksessa P. Räsänen T. Ahonen & P. Malinen (Toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Yliopistopaino, 269–282.

Kivovics, Á. 2013. Haastattelu Vargá-Neményi -seminaarissa Torniossa 4.6.2013. Tulkki: Anna Hajdu

Koppinen, M-L 2007. Oppimispelit – motivoiva tapa oppia. PedaGames-ohjausryhmän näkökulma oppimispeleihin. Teoksessa B. Mannila, R. Hämäläinen & K. Oksanen (Toim.) Pelaa ja opi. Räätälöityjä pelejä ammatilliseen oppimiseen. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopisto. Viitattu 14.1.2014. https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/37477/978-951-39-3191-9.pdf?sequence=1#page=70

Korpinen, E. 2005. Oppilaan minäkäsityksen ja itsetunnon kehittäminen pedagogiikan haasteena: Miten "unkarilainen matematiikka"-Varga-metodi vastaa haasteeseen? Teoksessa E. Korpinen (Toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE, 152–172

Koskinen, R. 2005. Orientaatiokäsite Pjotr Galperinin oppimisen teoriassa ja sen merkitys matematiikan opetuksessa. Teoksessa L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (Toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25. – 26.11.2004. Oulu: Oulu University Press, 111–122.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E. & Vettenranta, J. 2013. PISA12 ensituloksia. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2013:20. Viitattu 24.1.2014. http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2013/liitteet/okm20.pdf?lang=fi

Lampinen, A. & Korhonen, H. 2010. Matematiikkaa kaikille. Eszter Neményin haastattelu. Dimensio 2/2010, 18–22.

Lampinen, A. & Tikkanen, P. 2012. Suullinen tiedonanto 21.5.2012.

Leppäaho, H. 2007. Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House.

Luoko OPS = Opettajankoulutuslaitoksen opetussuunnitelma 2010–2013. Jyväskylän yliopisto. Viitattu 15.7.2013. https://www.jyu.fi/edu/laitokset/okl/opettajankoulutuslaitos/laitokset/okl/opiskelu/luokanopettajakoulutus

Malaty, G. 1997. Geometrinen ajattelu 1. Didaktiikka. Porvoo: WSOY

Malaty, G. 2002. Matemaattinen ajattelu ja matematiikan opetus. Teoksessa M-L. Julkunen (Toim.) Opetus, oppiminen, vuorovaikutus. Porvoo: WSOY

McPherson, T. & Payne, G. 1987. 'Is It an Add, Miss?': Mathematics in the Early Primary Years. Teoksessa M. Preston (Ed.) Mathematics in primary education. London: Falmer, 72–88.

Neményi, E. C. 2005. 4. luokan matematiikan rakenne. Teoksessa E. Korpinen (Toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE,32–47.

Näveri, L., Ahtee, M., Laine, A., Pehkonen, E. & Hannula, M. S. 2012. Erilaisia tapoja johdatella ongelmanratkaisutehtävään – esimerkkinä aritmagon-tehtävän ratkaiseminen alakoulun kolmannella luokalla. Teoksessa H. Krzywacki, K. Juuti & J. Lampiselkä (Toim.) Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta. Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura, 81–98.

Näätänen, M. & Matikainen, T. 2005. Unkarilaisen Varga-Neményi -menetelmän ja Suomessa tehtävän matematiikan alkuopetuskokeilun taustaa. Teoksessa E. Korpinen (Toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE, 89–97.

Oravecz, M. & Kivovics, Á. 2005. Matematiikan opetus Varga -menetelmällä Unkarissa. Teoksessa E. Korpinen (Toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE, 22–31.

Peel, E. A. 1971. Psychological and Educational Research Bearing on Mathematics Teaching. Teoksessa W. Servais & T. Varga (Eds.) Teaching school mathematics. Harmondsworth: Penguin Books, 151–177.

Pehkonen, E. 2011. Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa E. Pehkonen (Toim.) Luokanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista. Helsinki: Helsingin yliopisto, 11-28.

POPS 2004 = Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus. Viitattu 22.4.2012. http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf

Pound, L. & Lee, T. 2011. Teaching Mathematics Creatively. New York: Routledge.

Risku, A-M. 2002. Leikisti ja oikeesti - Oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien. Teoksessa O. Saloranta (Toim.) Ensimmäiset kouluvuodet. Perusopetuksen vuosiluokkien 1-2 opetus. Helsinki: Opetushallitus, 115–141.

Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2004. Laskutaidon toimintapaketti 2. Opettajan opas. Porvoo: WSOY.

Sarama, J. & DiBiase, A-M. 2004. The Professional Development Challenge in Preschool Mathematics. Teoksessa D. H. Clements & J. Sarama (Eds.) Engaging Young Children in Mathematics. Standards for Early Childhood Mathematics Education. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 415-446.

Servais, W. 1971a. The Use of Teaching Aids. Teoksessa W. Servais & T. Varga (Eds.) Teaching School Mathematics. Harmondsworth: Penguin, 94–123.

Servais, W. 1971b. The Training and Re-Training of Mathematics Teachers. Teoksessa W. Servais & T. Varga (Eds.) Teaching School Mathematics. Harmondsworth: Penguin, 235–252.

Tikkanen, P. 2008. "Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House.

Tikkanen, P. & Lampinen, A. 2005. Unkarilainen Varga-Neményin matematiikan opetusmenetelmä Suomessa. Teoksessa E. Korpinen (Toim.) Matematiikkaa unkarilaisittain Suomessa ja Unkarissa. Jyväskylä: TUOPE, 74–85.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2003. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Jyväskylä. Tammi.

Varga, T. 1971. General Introduction. Teoksessa W. Servais & T. Varga (Eds.) Teaching school mathematics. Harmondsworth: Penguin, 11–33.

Yrjönsuuri, R. 1998. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (Toim.) Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti, 128–141.

Yrjönsuuri, R. 2007. Matematiikka mieluisaksi. Psykologinen lähestymistapa opetukseen ja opiskeluun sekä matemaattisen ajattelun osaamisen arviointiin. Helsinki: Oppilo.

Zuckerman, O. & Resnick, M. 2004. System Blocks: A Physical Interface for System Dynamics Learning. Viitattu 22.3.2013 http://llk.media.mit.edu/papers/archive/Zuckerman_SystemBlocks_ISDC03.pdf

Varganemenyi.fi = Varga-Neményi yhdistyksen kotisivut. Viitattu 13.5.2013 http://www.varganemenyi.fi/includes/index.php

Vygotski, L. S. 1982. Ajattelu ja kieli. (suom. Helkama, K. & Koski-Jännes, A. venäjänkielisestä alkuperäisteoksesta vuodelta 1931). Espoo: Weilin & Göös.

Liite 1: Tehtävänanto esiopetuksen, 1. ja 2. luokan kursseille

VARGA-NEMÉNYI –KOULUTUSTEN OPINTOTEHTÄVÄT 2011-2013

Koulutus on 5 opintopistettä. Yksi opintopiste tarkoittaa 27 opiskeluun käytettyä tuntia eli koulutus edellyttää 135 tunnin opiskelua. 135 tunnista on 36 tuntia kontaktiopetusta ja 99 tuntia opintotehtäviin. Opintotehtävien tarkoitus on yhdistää teoriaa ja käytäntöä matematiikan alkuopetuksen näkökulmasta.

Opintotehtävä 1. Opetusjakso Varga-Neményi –opetusmenetelmällä
Suunnittele ja toteuta (myös ryhmänä) 3-5 opetustuokiota matematiikasta yhden tai useamman Varga-Neményi-opetusmenetelmän periaatteen pohjalta. Opetusjaksosta kirjoitetaan 5-10 sivun mittainen pohdiskeleva kuvaus niin, että toinenkin pystyy sen toteuttamaan. Kuvaus sisältää 1. teoreettista taustaa, 2. opetusjakson tavoitteet, 3. toteutuksen tehtävineen ja välineineen sekä 4. miten tavoitteet saavutettiin l. miten oppilaat oppivat, miten he kokivat jakson ja muuta opetuksellisten ratkaisujen pohdintaa. Kuvauksessa käytetään myös 5. kirjallisia lähteitä (ks. lopusta) Kuvaus voi sisältää valokuvia toteutuksesta.

Peruskirjallisuus, jota käytettävä
Esiopetuksen kurssilla
Kajetski, T. & Salminen, M. 2009. Matikasta moneksi - Toiminnallista matematiikkaa varhaiskasvatuksesta esiopetukseen. Lasten Keskus Oy.
Lampinen, A., C. Neményi E. & Sz. Oravecz, M. 2008. Opettajan tienviitta 1 a. Varga-Neményi –yhdistys ry.
Teokset tilattavissa outi@earlylearning

1. luokan kurssilla
Lampinen, A., C. Neményi E. & Sz. Oravecz, M. 2008. Opettajan tienviitta 1 a ja 1 b. Varga-Neményi –yhdistys ry.
Teokset tilattavissa outi@earlylearning

2. luokan kurssilla
Lampinen, A., C. Neményi E. & Sz. Oravecz, M. 2011. Opettajan tienviitta 2a ja 2b. Varga-Neményi –yhdistys ry.
Teokset tilattavissa outi@earlylearning

Sekä molemmilla kursseilla
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Opetushallitus: Helsinki.

Tikkanen, P. 2008. ”Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin” Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 337, sivut 28-33 (asenne), 40-46 (uskomus), 65-87 (opetusmenetelmä) ja 133-143 (piirrosten analyysi). https://jyx.jyu.fi/dspace/handle/123456789/18042

Muuta mahdollista kirjallisuutta

Ikäheimo, H. & Risku, A-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta.
Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 222–240.

Matikainen, T. & Kyyrä, A-M. & Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2002a. Laskutaidon toimintapaketti. Opettajan opas. Helsinki: WSOY.

Matikainen, T. & Kyyrä, A-M. & Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2002b. Laskutaidon toimintapaketti. Helsinki: WSOY.

Risku, A-M. 2002. Leikisti ja oikeesti – oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien. Teoksessa O. Saloranta (toim.) Ensimmäiset kouluvuodet. Perusopetuksen vuosiluokkien 1–2 opetus. Helsinki: Opetushallitus, 115–141.

Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2004a. Laskutaidon toimintapaketti 2. Opettajan opas.
Kehitetty unkarilaisen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki. WSOY.

Risku, A-M. & Tikkanen, P. 2004b. Laskutaidon toimintapaketti 2. Kehitetty unkarilaisen opetusmenetelmän pohjalta. Helsinki. WSOY.

Liite 2: Tehtävänanto oppimispeliin

VARGA–NEMÉNYI -KOULUTUKSEN 2. LUOKAN OPINTOTEHTÄVÄT SYKSY 2012

Koulutuksen laajuus on 5 opintopistettä. Siihen sisältyvien opintotehtävien tarkoitus on yhdistää teoriaa ja käytäntöä matematiikan alkuopetuksen näkökulmasta. Opintotehtävät syventävät oppimista ja niiden avulla pohditaan kurssin sisältöjen soveltamista.

Opintotehtäviä voidaan tutkia Opetushallituksen (rahoittaja) luvalla ja Sinun luvallasi. Tutkimuksessa noudatetaan tarkkoja eettisiä ohjeita tietosuojasta. Lupa käyttää työtäsi tutkimuksessa pyydetään viimeisenä seminaari-päivänä. Mahdollisesti oppimispelejä julkaistaan Varga-Neményi ry:n kotisivulla.

Opintotehtävä 1. Oppimispeli

Suunnittele ja toteuta (yksin tai ryhmänä) oppimispeli jostakin matematiikan käsitteestä, joka on ajankohtainen opetusryhmäsi opetussuunnitelmassa abstraktion tie -periaatteen tai useamman Varga–Neményi -opetusmenetelmän periaatteen pohjalta. Jos Sinulla ei ole omaa opetusryhmää, pelin toimivuutta voi kokeilla opetusryhmässä, jonne pääset vierailulle tai oppilaiden vapaa-ajalla.

Peli-ideaa voidaan soveltaa esimerkiksi lauta- ja korttipelien tapaan. Pelilaudan suunnittelu tms. ei ole nyt tärkeintä, vaan se, että pelien tehtävät palvelevat matematiikan ymmärtävää oppimista, jossa tehtäväympäristöt ovat monipuolisia ja niissä käytetään monia eri aistikanavia edeten abstraktion tietä. Eli pelin tehtäväsarjoista tehdään monipuolisia abstraktion tien mukaisesti. Osassa tehtävistä käytetään hyväksi kehollisia kokemuksia, toimintavälineitä, piirroksia, näyttelemistä jne.

Pelaamisen ideaa voidaan käyttää näiden lisäksi kokonaisten oppituntien ja opetuskokonaisuuksien viitekehyksenä. Mieti, mitä osa-alueita ja taitoja sisältyy hyvään oppituntiin ja laadi sen pohjalta pelin teemat, joihin teet monipuoliset tehtäväsarjat. Tämä tarkoittaa sitä, että oppitunnin tai opetusjakson aikana viitekehyksenä on pelimaailma, jolloin koko opetusryhmä tai pienemmät ryhmät voivat ”pelata peliä” yhdessä tai pienissä ryhmissä. Esimerkiksi yhdessä tehtäväkorttisarjassa on lukujonoihin liittyviä tehtäviä, toisessa vaikka mittaamistehtäviä, uuteen käsitteeseen perehdyttäviä tehtäviä, pieniä päättelytehtäviä jne. Esimerkkejä tämäntyyppisistä sovelluksista ovat esim. Tempputorni (Elina Pulli, kustantaja Peliko) ja Lukumestari 3+ -kirja (Ron van der Meer ja Bob Gardner, Kustantaja Köneman).

Tai sitten voit keksiä ja toteuttaa ihan uudenlaisen peli-idean. Älä kopioi mitään tuntemaasi peliä sellaisenaan, vaan luo jotakin uutta!

Pelistä sääntöineen ja sen toteutuksesta kirjoitetaan korkeintaan 5 sivun mittainen kuvaus niin, että toinenkin pystyy peliä käyttämään.

Kuvaus sisältää:

pelin matemaattisen käsitteen, pelin strategian ja pedagogisen merkityksen pohdintaa

pelin tavoitteet

tarvittavat välineet ja säännöt

miten tavoitteet saavutettiin l. mitä ja miten oppilaat oppivat ja muuta opetuksellisten ratkaisujen pohdintaa.
Kuvauksessa käytetään lähdekirjallisuutta (ks. lopusta). Kuvaus voi sisältää valokuvia toteutuksesta, jolloin 5 sivua ylittyy.

Peruskirjallisuus, jota käytettävä

Lampinen, A., C. Neményi E. & Sz. Oravecz, M. 2011. Opettajan tienviitta 2a ja 2b. Varga–Neményi ry.
Teokset tilattavissa outi@earlylearning

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Opetushallitus: Helsinki.

Tikkanen, P. 2008. ”Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin” Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten neljäsluokkalaisten kokemana. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 337, sivut 28-33 (asenne), 40-46 (uskomus), 65-87 (opetusmenetelmä) ja 133-143 (piirrosten analyysi).
Teoksen linkki:
https://jyx.jyu.fi/dspace/handle/123456789/18042

Muuta mahdollista kirjallisuutta

Ikäheimo, H. & Risku, A-M. 2004. Matematiikan esi- ja alkuopetuksesta.
Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 222–240.

Risku, A-M. 2002. Leikisti ja oikeesti – oikeata matematiikkaa lapsesta lähtien. Teoksessa O. Saloranta (toim.) Ensimmäiset kouluvuodet. Perusopetuksen vuosiluokkien 1–2 opetus. Helsinki: Opetushallitus, 115–141.

Tikkanen, P. (Toim.) 2010. YHDESSÄ! Varga-Neményi –yhdistyksen 5-vuotisjuhlakirja. Espoo: Varga-Neményi –yhdistys ry. Teoksen linkki
http://varganemenyi.fi/userfiles/Va-Ne-5v_juhlajulkaisu.pdf

Tikkanen, P. (toim.) 2009. Oppikirja opetussuunnitelman todellistajana. Varga–Neményi -kesäseminaari 2008. Espoo: Varga-Neményi –yhdistys ry. Teoksen linkki
http://varganemenyi.fi/userfiles/Va-Ne-seminaarijulkaisu_2008(1).pdf

Tikkanen, P. (toim.) 2008. Toinen valtakunnallinen Varga–Neményi kesäseminaari 4.-5.6.2007 Korpikodissa. Espoo: Varga–Neményi -yhdistys ry. Teoksen linkki
http://varganemenyi.fi/userfiles/file/Korpikoti/Korpikoti%202007.pdf