

TILAN TÄYTTÄVÄT KÄYRÄT

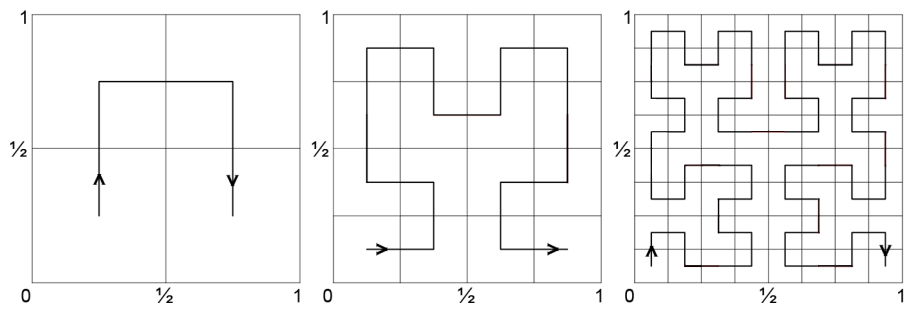
Tiina Rötö

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2014



JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO



KUVA 0.2. Hilbertin käyrän kolme ensimmäistä iterointiaskelta

moninkertaisia kuvapisteitä, eli useat välin $[0, 1]$ pisteet kuvautuvat samaksi pisteeksi maalijoukossa $[0, 1]^2$.

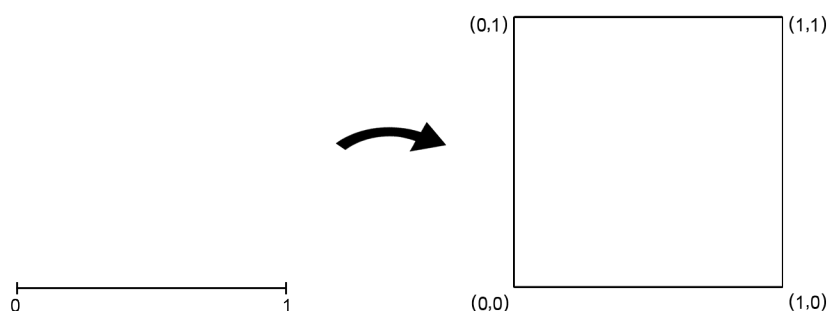
Tilan täyttävien käyrien tutkiminen on myös laajentunut erilaisten käyrien, kuten kolmion täyttävien käyrien ja moniulotteisten tilojen täyttävien käyrien tutkimiseen. Tutkielman lopussa tutustutaan kolmeen muuhun yksikköneliön täyttävään käyrään, sekä Hilbertin käyrän kolmiulotteiseen versioon eli yksikkökuution $[0, 1]^3$ täyttävään Hilbertin käyrään.

Sisältö

Johdanto	1
Luku 1. Perusmääritelmiä käyriin ja kuvauksiin liittyen	3
1.1. Tilan täyttävät käyrät	4
Luku 2. Yhtämahtavuus ja Netton lause	5
2.1. Joukkojen $[0,1]$ ja $[0,1] \times [0,1]$ yhtämahtavuus	5
2.2. Netton lause	6
Luku 3. Peanon käyrä	7
3.1. Trinääriluvut	7
3.2. Peanon käyrän määritelmä	9
3.3. Peanon käyrä tilan täyttävänä käyränä	11
3.3.1. Peanon käyrän surjektiivisuus	12
3.3.2. Peanon käyrän jatkuvuus	12
3.4. Peanon käyrä on ei-missään derivoituva	14
3.5. Peanon käyrän geometrinen esitys	15
Luku 4. Hilbertin käyrä	19
4.1. Hilbertin käyrä tilan täyttävänä käyränä	20
4.1.1. Hilbertin käyrän surjektiivisuus	20
4.1.2. Hilbertin käyrän jatkuvuus	21
4.2. Hilbertin käyrä on ei-missään derivoituva	22
4.3. Hilbertin käyrän analyyttinen esitys	22
Luku 5. Käyrien muita muotoja ja kolmiulotteisen käyrät	28
5.1. Peanon käyrän variaatiot	28
5.2. Mooren versio Hilbertin käyrästä	29
5.3. Kolmiulotteinen Hilbertin käyrä	29
Kirjallisuutta	31

Johdanto

Tilan täyttävien käyrien tutkiminen alkoi 1800-luvun viimeisillä vuosikymmenillä. Vuonna 1878 saksalainen matemaatikko George Cantor oli ensimmäinen, joka osoitti joukkojen $[0, 1]$ ja $[0, 1]^2$ yhtä mahtavuuden, eli että väli $[0, 1]$ voidaan kuvata bijektiivisesti neliöksi $[0, 1] \times [0, 1]$ (kuva 0.3). Vuotta myöhemmin saksalainen matemaatikko Eugen Netto osoitti, että tällainen bijektiivinen kuvaus ei voi olla jatkuva. Tämä käynnisti tilan täyttävien käyrien tutkimisen. Cantorin ja Netton tulosten innoittamana matemaatikot alkoivat tutkia, olisiko mahdollista löytää jatkuva surjektiivinen kuvaus joukkojen välille, eli onko olemassa käyrää, joka kulkee kaksiulotteisen alueen jokaisen pisteen kautta.



KUVA 0.3. Yksikkövälin ja yksikköneliön välinen kuvaus

Vuonna 1890 italialainen matemaatikko Giuseppe Peano osoitti, että tällainen tilan täyttävä kuvaus on olemassa. Hän rakensi ensimmäisen esimerkin tilan täyttävästä käyrästä kuvaten yksikkövälin yksikköneliöksi siten, että välin kuva on jatkuva ja se kulkee yksikköneliön jokaisen pisteen kautta. Tällaisia tilan täyttäviä käyriä kutsutaan yleisesti Peanon käyriksi. Tässä tutkielmassa käytämme kuitenkin yleisesti nimitystä tilan täyttävät käyrät, ja nimitystä Peanon käyrä erityisesti Giuseppe Peanon esittämän käyrän yhteydessä. Saksalainen matemaatikko David Hilbert tutki Peanon määrittelemää käyrää, ja oli ensimmäinen, joka havainnollisti käyrää myös kuvan avulla. Kuvaajan generointi on esitetty kuvassa 0.4.

Peanon käyrän löytymisen jälkeen useat matemaatikot perehtyivät tilan täyttävien käyrien tutkimiseen. Vuonna 1891 Hilbert kehitti oman yksikköneliön täyttävän käyränsä. Peanon tyylistä poiketen Hilbert lähestyi käyrän esittämistä ensin geometrisesti, josta vasta myöhemmin tehtiin myös analyttinen esitys.

Tilan täyttävien käyrien tutkimus on jatkunut ja matemaatikot ovat löytäneet useita erilaisia yksikköneliön täyttäviä käyriä. Tutkimus on laajentunut myös muiden

Perusmääritelmiä käyriin ja kuvauksiin liittyen

Määritellään aluksi käsitteitä, joita tarvitaan myöhemmin tässä tutkielmassa. Oletetaan, että $X \subset \mathbb{R}^n$ ja $Y \subset \mathbb{R}^n$ ovat epätyhjiä joukkoja.

Funktio määritellään seuraavasti

MÄÄRITELMÄ 1.1. Karteesisen tulon osajoukko $f \subset X \times Y$ on funktio, jos ehdoista

$$(x, y) \in f \quad \text{ja} \quad (x, z) \in f$$

seuraa $y = z$. Tällöin y on funktion f yksikäsitteinen arvo pisteessä x , jota merkitään yleisemmin $f(x) = y$. Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ merkitään $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Sanotaan, että f on funktio eli kuvaus määrittelyjoukolta X maalijoukkoon Y , ja käytetään kuvausmerkintää $f : X \rightarrow Y$. Funktion graafi G_f muodostuu pistepareista

$$G_f := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

Kahden funktion yhdiste eli yhdistetty funktio määritellään sisäkkäisinä funktioina.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Kahdelle funktiolle $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$ voidaan määrittellä yhdistetty funktio $g \circ f : X \rightarrow Z$ asettamalla

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{kaikille } x \in X.$$

Määritellään funktioiden kolme ominaisuutta: injektiivisyys, surjektiivisyys ja bijektiivisyys. Funktio $f : X \rightarrow Y$ on injektio, jos määrittelyjoukon X pisteet kuvautuvat eri maalijoukon Y pisteiksi. Funktio on surjektio, jos kaikki maalijoukon Y pisteet tulevat kuvatuksi. Jos funktio on sekä injektio että surjektio, sitä kutsutaan bijektioksi. Seuraavassa esitetään ominaisuuksien tarkat määritelmät.

MÄÄRITELMÄ 1.3. Funktio $f : X \rightarrow Y$ on

- (1) injektio, jos kaikille pisteille x_1 ja x_2 joille $x_1 \neq x_2$ pätee $f(x_1) \neq f(x_2)$
- (2) surjektio, jos $f(X) = Y$, eli jos kaikille maalijoukon pisteille $y \in Y$ on olemassa $x \in X$ siten, että $f(x) = y$.
- (3) bijektio, jos funktio on sekä injektio että surjektio.

Intuitiivisesti funktion jatkuvuus tarkoittaa sitä, että pieni muutos lähtöarvoissa ei aiheuta suurta muutosta kuva-arvoissa. Matemaattisesti jatkuvuus voidaan määrittellä seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 1.4. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$. Funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ on

- (1) jatkuva pisteessä $x_0 \in I$, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, aina kun $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$.
- (2) jatkuva joukossa $X \subset I$, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$, ja jatkuva, jos se on jatkuva koko joukossa I .

Derivaatta kuvaa funktion muutosnopeutta. Funktion derivoituvuus saadaan selville tutkimalla funktion erotusosamäärän raja-arvoa.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä $t_0 \in I$, jos erotusosamäärän raja-arvo $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ on olemassa ja äärellinen.

Funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ voidaan esittää koordinaattifunktioiden avulla $f(t) = (x(t), y(t))$, jossa funktio $x(t)$ on kuvauksen $f(t)$ kuvaaman pisteen x -koordinaatti ja $y(t)$ on sen y -koordinaatti. Tällaisen funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta voidaan tutkia koordinaattifunktioiden jatkuvuuden ja derivoituvuuden kautta.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ on

- jatkuva, jos ja vain jos koordinaattifunktiot $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ ja $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia.
- derivoituva, jos ja vain jos koordinaattifunktiot $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ ja $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ovat derivoituvia.

1.1. Tilan täyttävät käyrät

Tässä tutkielmassa määritellään tilan täyttävä käyrä seuraavasti

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon $I = [0, 1]$ ja $Q = [0, 1]^2$. Funktion $f : I \rightarrow Q$ kuvausjoukko $f(I)$ on tilan täyttävä käyrä, jos funktio f on jatkuva ja surjektiivinen.

Määritelmässä rajoitutaan vain funktioihin, jotka kuvautuvat yksikköväliä yksikköneliölle. Tällaisia funktioita ovat tässä tutkielmassa käsiteltävät Peanon käyrä ja Hilbertin käyrä. Tilan täyttäviä käyriä on kuitenkin useita erilaisia, kuten esimerkiksi funktio, joka kuvautuu yksikköväliä suorakulmaiselle kolmiolle. Lisäksi on tutkittu kolmiulotteisia tilan täyttäviä käyriä, kuten tämänkin tutkielman lopussa oleva Hilbertin käyrän kolmiulotteinen versio, jossa yksikköväli $I = [0, 1]$ kuvautuu yksikkökuutioksi $W = [0, 1]^3$.

HUOMAUTUS 1.8. Peanon käyrälle ja Hilbertin käyrälle tullaan luvuissa 3 ja 4 todistamaan, että ne ovat ei-missään derivoituvia.

Yhtämahtavuus ja Netton lause

2.1. Joukkojen $[0,1]$ ja $[0,1] \times [0,1]$ yhtämahtavuus

Intuitiivisesti joukkojen yhtämahtavuus voidaan ajatella niin, että joukoissa on saman verran alkioita. Yhtämahtavien joukkojen A ja B alkioita voidaan asettaa vastaamaan toisiaan siten, että jokaista joukon A alkioita vastaa täsmälleen yksi joukon B alkio. Joukkojen yhtämahtavuutta voidaan tutkia niiden välisen bijektiivisen kuvauksen avulla:

MÄÄRITELMÄ 2.1. Joukot A ja B ovat yhtä mahtavia, merkitään $A \sim B$, jos on olemassa bijektio $f : A \rightarrow B$.

LAUSE 2.2. Joukot $[0, 1]$ ja $[0, 1]^2$ ovat yhtä mahtavia, $[0, 1] \sim [0, 1]^2$.

Todistuksessa käytetään reaalilukujen desimaaliesitystä, joka ei aina ole yksikäsitteinen. Samalla reaaliluvulla voi olla useita desimaaliesityksiä, esimerkiksi

$$0,1000\dots = 0,0999\dots$$

Yksikäsitteisyyden takaamiseksi käytetään todistuksessa vain jälkimmäistä esitystapaa. Ainoastaan luku 0 voidaan esittää muodossa $0,0000\dots$

TODISTUS. Halutaan siis löytää bijektio $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$.

Jos piste $z \in [0, 1]$, voidaan se esittää muodossa

$$z = 0, z_1 z_2 z_3 z_4 \dots$$

siten, että komponentti z_i koostuu nolasta poikkeavasta luvusta sekä sen vasemmalla puolella olevista nolista. Esimerkiksi luku $z = 0,2031003999\dots$ jakautuu komponenteiksi $z_1 = 2, z_2 = 03, z_3 = 1, z_4 = 003$ ja $z_i = 9$, kaikille $i > 4$.

Asettamalla

$$f(z) = \begin{pmatrix} 0, z_1 z_3 z_5 \dots \\ 0, z_2 z_4 z_6 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

saadaan haluttu bijektiivinen kuvaus f .

Esimerkiksi luku $0,010034065999\dots$ kuvautuu seuraavasti

$$f(0,010034065999\dots) = \begin{pmatrix} 0,0145999\dots \\ 0,00306999\dots \end{pmatrix}.$$

Näin rakennettuna funktio f on selvästi injektio: jos $z \neq \tilde{z}$ niin $f(z) \neq f(\tilde{z})$.

Funktio f on myös surjektio: Jos (x, y) on maalijoukon alkio, eli $(x, y) \in [0, 1]^2$ jolloin $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ ja $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$, niin $(x, y) = f(z)$ kun $z = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$. Esimerkiksi maalijoukon alkioita $(x, y) = (0,0476999\dots; 0,5008999\dots)$ vastaa lähtöjoukon alkio $z = 0,04570086999\dots$. Tällöin jokaista maalijoukon alkioita vastaa jokin lähtöjoukon alkio, joten f on surjektio.

Koska funktio f on injektio ja surjektio, niin se on myös bijektio. □

2.2. Netton lause

Vuonna 1879 saksalainen matemaatikko Eugen Netto osoitti, että Cantorin esittämä bijektiivinen kuvaus joukolta $[0, 1]$ joukolle $[0, 1]^2$ ei voi olla jatkuva. Todistuksessa tarvitaan seuraavia joukkoihin ja kuvauksiin liittyviä ominaisuuksia:

MÄÄRITELMÄ 2.3. Joukko A on kompakti, jos se on suljettu ja rajoitettu.

LAUSE 2.4. *Joukko $f(A)$ on*

- (1) *kompakti, jos joukko A on kompakti ja funktio f on jatkuva.*
- (2) *yhtenäinen, jos joukko A on yhtenäinen ja funktio f on jatkuva.*

LAUSE 2.5. *Funktio f on jatkuva jos ja vain jos jokaiselle suljetulle joukolle C myös joukko $f^{-1}(C)$ on suljettu.*

LAUSE 2.6. *Jos kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on bijektio, sille on olemassa bijektiivinen käänteiskuvaus $f^{-1} : Y \rightarrow X$.*

Todistetaan Netton lause lauseiden 2.4, 2.5 ja 2.6 avulla.

LAUSE 2.7. *(Netto) Bijektiivinen kuvaus $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ on aina epäjatkuva.*

TODISTUS. Oletetaan, että funktio f on jatkuva. Koska funktio f on bijektio, sille on lauseen 2.6 nojalla olemassa käänteiskuvaus $g := f^{-1} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Olkoon suljettu joukko $C \subset [0, 1]$, jolloin se on myös rajoitettu, eli joukko C on kompakti. Nyt lauseen 2.4 kohdan 1 nojalla joukko $f(C)$ on kompakti. Koska $f(C) = g^{-1}(C)$, niin joukko $g^{-1}(C)$ on myös kompakti, erityisesti se on suljettu. Tällöin lauseen 2.5 nojalla funktio $g = f^{-1}$ on jatkuva.

Kun poistetaan piste $x_0 \in]0, 1[$ ja sen kuva $f(x_0) \in [0, 1]^2$, on joukko $[0, 1]^2 \setminus \{f(x_0)\}$ yhä yhtenäinen, mutta joukko $[0, 1] \setminus \{x_0\}$ on epäyhtenäinen. Tällöin siis jatkuva funktio f^{-1} kuvaa yhtenäisen joukon $[0, 1]^2 \setminus \{f(x_0)\}$ epäyhtenäiseksi joukoksi $[0, 1] \setminus \{x_0\}$. Tällöin lauseen 2.4 kohdan 2 perusteella funktion f^{-1} on oltava epäjatkuva, ja saadaan ristiriita. Siispä oletus on väärin, joten funktio f on epäjatkuva. □

LUKU 3

Peanon käyrä

Italialainen matemaatikko Giuseppe Peano (1858-1932) valmistui Torinon yliopistosta vuonna 1880, jossa hän aloitti työnsä matematiikan professorina vuonna 1890. Peano toimi professorina koko loppuikänsä, ja hän teki ansiokkaasti töitä symbolisen logiikan, aksiomaattisten menetelmien ja matemaattisen analyysin parissa. Peanon töissä oli paljon filosofista arvoa, sillä hän osasi kyseenalaistaa ja etsiä vastaesimerkkejä esitettyihin teorioihin. Peano oli ensimmäinen, joka antoi esimerkin tilan täyttävästä käyrästä.

3.1. Trinääriluvut

Peanon käyrän määritelmässä tarvitaan kolmikantaisia lukuja eli trinäärilukuja.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Välillä $[0, 1]$ oleva luku voidaan kirjoittaa trinäärilukuna muodossa

$$0_3t_1t_2t_3t_4\dots = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n},$$

jossa $t_i = 0, 1$ tai 2 .

Trinääriluvut voivat olla päättyviä tai päättymättömiä. Päättävässä trinääriluvussa on joko äärellinen tai ääretön määrä numeroita, kunhan jälkimmäisessä tapauksessa loput numerot ovat nollia. Esimerkiksi luvut 0_3121 ja $0_3121000\dots$ ovat päättyviä trinäärilukuja. Päättymättömässä trinääriluvussa on ääretön määrä numeroita, jossa loput numerot eivät ole pelkkiä nollia, kuten esimerkiksi luku $0_31201102\dots$. Jos luvun loppuosa noudattaa tiettyä jaksoa, voidaan jaksoa merkitä toistuvan numerosarjan yläpuolella olevalla viivalla, $0_31202020\dots = 0_31\overline{20}$.

Päättymättömien trinäärilukujen laskemisessa tarvitaan usein geometrisen sarjan kaavaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q},$$

jossa $-1 < q < 1$.

ESIMERKKI 3.2. Luku $\frac{7}{27}$ päättyvänä trinäärilukuna ja luvut $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{4}$ päättymättöminä trinäärilukuina

$$0_3021 = 0_3021000\dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} = \frac{7}{27}$$

$$0_3\overline{1} = 0_31111\dots = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$0_3\overline{02} = 0_3020202\dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = \frac{2}{1-\frac{1}{3^2}} - 2 = \frac{1}{4}.$$

LAUSE 3.3. Päättävä trinääriluku voidaan kirjoittaa päättymättömän trinääriluvun muodossa, jolloin luvun lopussa toistuu numero 2 äärettömiin

$$0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_n t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_n (t-1)\bar{2},$$

jossa $t = 1$ tai 2 .

TODISTUS. Todistuksessa riittää tarkastella tapausta, jossa $n = 0$ eli tutkia yhtälöä $0_3 t = 0_3 (t-1)\bar{2}$, kun $t = 1$ tai 2 . Tutkitaan yhtälöä molemmilla muuttujan t arvoilla.

Kun $t = 1$

$$\begin{aligned} 0_3 (t-1)\bar{2} &= 0_3 (1-1)\bar{2} = 0_3 0\bar{2} = \frac{0}{3^1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} \\ &= \frac{0}{3} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3^0} - \frac{2}{3^1} \right) = 0 + \left(3 - 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} = 0_3 1 = 0_3 t. \end{aligned}$$

Kun $t = 2$

$$0_3 (t-1)\bar{2} = 0_3 (2-1)\bar{2} = 0_3 1\bar{2} = \frac{1}{3^1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0_3 2 = 0_3 t.$$

□

ESIMERKKI 3.4. Luku $\frac{1}{9}$ trinäärilukuna päätyvässä ja päättymättömässä muodossa

$$\begin{aligned} 0_3 01 &= \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\ 0_3 00\bar{2} &= \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Trinäärilukujen yhteen- ja vähennyslaskut tapahtuvat komponenteittain. Olkoon trinääriluvut $t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots$ ja $\hat{t} = 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots$. Peanon käyrän käsittelyn yhteydessä tarvitaan ainoastaan yhteen- ja vähennyslaskun erikoistapauksia, joissa yhteenlaskussa $t_i + \hat{t}_i \leq 2$ ja vähennyslaskussa $t_i - \hat{t}_i \geq 0$. Tällöin trinäärilukujen summa $s = t + \hat{t}$ ja erotus $e = t - \hat{t}$ ovat

$$\begin{aligned} s &= 0_3 s_1 s_2 s_3 \dots = 0_3 (t_1 + \hat{t}_1)(t_2 + \hat{t}_2)(t_3 + \hat{t}_3) \dots \\ e &= 0_3 e_1 e_2 e_3 \dots = 0_3 (t_1 - \hat{t}_1)(t_2 - \hat{t}_2)(t_3 - \hat{t}_3) \dots \end{aligned}$$

Peanon käyrän jatkuvuuden ja ei-missään derivoituvuuden todistuksissa tarvitaan trinääriluvun kolmeen jakamista ja kolmella kertomista. Käsitellään vain erikoistapausta, jossa alkuperäinen trinääriluku kuuluu välille $[0, 1]$ ja sitä kertomalla ja jakamalla saatavat trinääriluvut kuuluvat myös samalle välille $[0, 1]$. Koska trinääriluku on kolmikantainen, sen jakaminen kolmella siirtää trinäärilukukohtia yhden paikan verran oikealle ja kertominen yhden paikan verran vasemmalle. Olkoon trinääriluku

$$\tau = 0_3 0 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^{n+1}}$$

Tällöin kertolaskulle

$$3\tau = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3t_n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} = 0_3 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots$$

ja jakolaskulle

$$\frac{\tau}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^{n+2}} = 0_3 00 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots$$

MÄÄRITELMÄ 3.5. Trinääriluvuille määritellään funktio k asettamalla $kt_i = 2 - t_i$, jossa $t_i = 0, 1, 2$.

Määritelmän mukaan funktio k suorittaa laskutoimituksen trinääriluvun paikassa i olevalle numerolle, jolloin funktio k muuttaa numeron 2 numeroksi 0 ja päinvastoin, mutta ei vaikuta mitenkään numeroon 1. Potenssi k^v tarkoittaa funktion k toistamista v kertaa, eli v kappaletta yhdistettyjä funktioita k .

ESIMERKKI 3.6. Luvulle $0_3 02120$ voidaan laskea

$$0_3 0(k2)(k1)(k^2 2)(k^5 0) = 0_3 00122,$$

sillä

$$k2 = 2 - 2 = 0$$

$$k1 = 2 - 1 = 1$$

$$k^2 2 = k(k(2)) = k0 = 2$$

$$k^5 0 = 2$$

HUOMAUTUS 3.7. Funktio k on itsensä käänteisfunktio, sillä

$$k^2(t_i) = k(k(t_i)) = 2 - (2 - t_i) = t_i.$$

Tästä seuraa, että

$$k^v t_i = t_i \text{ kun } v \text{ on parillinen}$$

ja

$$k^v t_i = kt_i \text{ kun } v \text{ on pariton.}$$

3.2. Peanon käyrän määritelmä

Peanon käyrän määritelmän ymmärtäminen voi olla hyvin hankalaa, eikä määritelmästä hahmota käyrän geometrasta ulkoasua. Peano ei lainkaan paneutunut käyränsä geometriseen esittämiseen, vaan Hilbert oli ensimmäinen joka hahmotteli käyrän paperille. Peano määritteli jatkuvan tilan täyttävän käyränsä seuraavasti

MÄÄRITELMÄ 3.8. Olkoon joukot $I = [0, 1]$ ja $Q = [0, 1]^2$. Määritellään funktio $f_p : I \rightarrow Q$ siten, että

$$f_p(0_3 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 t_1 (k^{t_2} t_3) (k^{t_2+t_4} t_5) \dots (k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-2} t_{2n-1}}) \dots \\ 0_3 (k^{t_1} t_2) (k^{t_1+t_3} t_4) \dots (k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-1} t_{2n}}) \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix},$$

jossa $t_0 = 0$ ja k on määritelmän 3.5 mukainen funktio. Kuvausta f_p kutsutaan Peanon käyräksi.

ESIMERKKI 3.9. Luvut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ ja $\frac{5}{8}$ kuvautuvat Peanon funktiolla seuraavasti

$$\begin{aligned} f_p\left(\frac{1}{3}\right) &= f_p(0_3 1000 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 1(k^{00})(k^{0+00}) \dots \\ 0_3 (k^{10})(k^{1+00}) \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 1000 \dots \\ 0_3 2222 \dots \end{pmatrix} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3}}{3^n}\right) = \left(\frac{\frac{1}{3}}{1}\right) \\ f_p\left(\frac{2}{9}\right) &= f_p(0_3 0200 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 0(k^{20})(k^{2+00}) \dots \\ 0_3 (k^{02})(k^{0+00}) \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 0000 \dots \\ 0_3 2000 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ f_p\left(\frac{5}{8}\right) &= f_p(0_3 1212 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 1(k^{21})(k^{2+21})(k^{2+2+21})(k^{2+2+2+21}) \dots \\ 0_3 (k^{12})(k^{1+12})(k^{1+1+12})(k^{1+1+1+12}) \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 1111 \dots \\ 0_3 0202 \dots \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3^{2n}}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

LAUSE 3.10. *Peanon käyrä on riippumaton trinääriluvun esitystavasta, toisin sanoen funktio antaa saman tuloksen sekä päättyvässä että päättymättömässä muodossa olevalle trinääriluvulle.*

TODISTUS. Todistetaan tämä erikseen komponenttimäärältään parillisille ja parittomille trinääriluvuille osoittamalla, että päättyvä ja päättymätön trinääriluku antavat saman tuloksen. Olkoot trinääriluvut muotoa

$$0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_n t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_n (t-1)\bar{2},$$

jossa $t = 1$ tai $t = 2$.

Tutkitaan ensimmäistä koordinaattifunktiota x_p parillisilla trinääriluvuilla, jolloin $n = 2m$. Merkitään $T_1 = t_2 + \dots + t_{2m}$. Nyt koordinaattifunktion määritelmän (3.8) nojalla saadaan päättyvällä trinääriluvulla

$$(3.1) \quad x_p(0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m} t) = 0_3 t_1 (k^{t_2 t_3}) (k^{t_2+t_4 t_5}) \dots (k^{T_1 t}) (\overline{k^{T_1 0}}).$$

Funktio k on itsensä käänteisfunktio, joten jos T_1 on parillinen, lausekkeen loppuosasta saadaan

$$(k^{T_1 t}) (\overline{k^{T_1 0}}) = t\bar{0} = t.$$

Jos T_1 on pariton, loppuosasta saadaan

$$(k^{T_1 t}) (\overline{k^{T_1 0}}) = (2-t)\bar{2}.$$

Tällöin lauseke (3.1) on muotoa

$$\begin{cases} 0_3 t_1 (k^{t_2 t_3}) (k^{t_2+t_4 t_5}) \dots t, & \text{kun } T_1 \text{ on parillinen} \\ 0_3 t_1 (k^{t_2 t_3}) (k^{t_2+t_4 t_5}) \dots (2-t)\bar{2}, & \text{kun } T_1 \text{ on pariton} \end{cases}.$$

Muuttamalla alempi lauseke vielä päättyvään muotoon, saadaan

$$\begin{cases} 0_3 t_1 (k^{t_2 t_3}) (k^{t_2+t_4 t_5}) \dots t, & \text{kun } T_1 \text{ on parillinen} \\ 0_3 t_1 (k^{t_2 t_3}) (k^{t_2+t_4 t_5}) \dots (3-t), & \text{kun } T_1 \text{ on pariton.} \end{cases},$$

jossa $t = 1$ tai $t = 2$.

Päättymättömällä trinääriluvulla koordinaattifunktiosta saadaan

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & x_p(0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m} (t-1)\bar{2}) \\ &= 0_3 t_1 (k^{t_2 t_3}) (k^{t_2+t_4 t_5}) \dots (k^{T_1} (t-1)) (k^{T_1+2}) (k^{T_1+2+2}) \dots \end{aligned}$$

Jos T_1 on parillinen, lausekkeen loppuosasta saadaan

$$(k^{T_1}(t-1))(k^{T_1+2}2)(k^{T_1+4}2)\dots = (t-1)\bar{2}$$

ja jos T_1 on pariton, loppuosasta saadaan

$$(k^{T_1}(t-1))(k^{T_1+2}2)(k^{T_1+4}2)\dots = (2-(t-1))\bar{0}.$$

Tällöin siis lauseke (3.2) on muotoa

$$\begin{cases} 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(t-1)\bar{2}, & \text{kun } T_1 \text{ on parillinen} \\ 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(2-(t-1)), & \text{kun } T_1 \text{ on pariton} \end{cases}$$

Kun muutetaan ylempi lauseke päättyvään muotoon ja sievennetään alempaa, saadaan

$$\begin{cases} 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)\dots t, & \text{kun } T_1 \text{ on parillinen} \\ 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(3-t), & \text{kun } T_1 \text{ on pariton} \end{cases}$$

jossa $t = 1$ tai $t = 2$. Ensimmäinen koordinaattifunktio antaa siis saman arvon sekä päättyvässä että päättymättömässä muodossa olevalle parilliselle trinääriluvulle.

Tutkitaan ensimmäistä koordinaattifunktiota parittomilla trinääriluvuilla, jolloin $n = 2m + 1$ ja merkitään samoin $T_1 = t_2 + \dots + t_{2m}$. Päättyvällä trinääriluvulla saadaan vastaavanlaisella päättelyllä

$$\begin{aligned} & x_p(0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m+1} t) \\ &= 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(k^{T_1}t_{2m+1})(k^{T_1+t}0)(k^{T_1+t+2}0)\dots \\ &= \begin{cases} 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots t_{2m+1}, & \text{kun } T_1 \text{ on parillinen ja } t \text{ on parillinen} \\ 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots t_{2m+1}\bar{2}, & \text{kun } T_1 \text{ on parillinen ja } t \text{ on pariton} \\ 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(2-t_{2m+1})\bar{2}, & \text{kun } T_1 \text{ on pariton ja } t \text{ on parillinen} \\ 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(2-t_{2m+1}), & \text{kun } T_1 \text{ on pariton ja } t \text{ on pariton} \end{cases} \end{aligned}$$

Päättymättömällä trinääriluvulla saadaan

$$\begin{aligned} & x_p(0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2m+1} (t-1)\bar{2}) \\ &= 0_3 t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(k^{T_1}t_{2m+1})(k^{T_1+(t-1)}2)(k^{T_1+(t-1)+2}2)\dots, \end{aligned}$$

josta samaan tapaan saadaan täsmälleen samat neljä vaihtoehtoa, kuin päättyvällä trinääriluvulla. Siispä ensimmäinen koordinaattifunktio antaa saman arvon myös parittomille trinääriluvuille esitysmuodosta riippumatta.

Vastaava tulos pätee myös toiselle koordinaattifunktiolle y_p . Asia voidaan tarkistaa käsittelemällä samalla tavoin parittomia $n = 2m - 1$ ja parillisia $n = 2m$ trinäärilukuja, ja voidaan merkitä $T_2 = t_1 + t_3 + \dots + t_{2m-1}$. Parittomien lukujen tarkastelussa tuloksena saadaan kaksi vaihtoehtoa ja parillisilla neljä vaihtoehtoa.

Nyt molempia koordinaattifunktioita tutkittaessa komponenttimäärältään parillisilla ja parittomilla trinääriluvuilla, päädyttiin samaan tulokseen sekä päättyvillä että päättymättömällä trinääriluvuilla. Siispä funktion f_p arvo ei riipu trinääriluvun esitystavasta. \square

3.3. Peanon käyrä tilan täyttävänä käyränä

LAUSE 3.11. *Peanon käyrä on tilan täyttävä käyrä, jolle $f_p(I) = Q$.*

Osoitetaan, että Peanon käyrällä on määritelmässä 1.7 mainitut ominaisuudet.

3.3.1. Peanon käyrän surjektiivisuus.

LAUSE 3.12. *Määritelmässä 3.8 esitetty Peanon käyrä on surjektio.*

TODISTUS. Olkoon piste $(x, y) = (0_3x_1x_2x_3x_4\dots, 0_3y_1y_2y_3y_4\dots) \in Q$. On siis osoitettava, että on olemassa $t = 0_3t_1t_2t_3t_4\dots \in I$ siten, että

$$f_p(t) = \begin{pmatrix} 0_3x_1x_2x_3x_4\dots \\ 0_3y_1y_2y_3y_4\dots \end{pmatrix}.$$

Määritelmän 3.8 mukaan saadaan yhtäpitävyys

$$f_p(0_3t_1t_2t_3t_4\dots) = \begin{pmatrix} 0_3t_1(k^{t_2}t_3)(k^{t_2+t_4}t_5)\dots(k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-2}}t_{2n-1})\dots \\ 0_3(k^{t_1}t_2)(k^{t_1+t_3}t_4)\dots(k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-1}}t_{2n})\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3x_1x_2x_3x_4\dots \\ 0_3y_1y_2y_3y_4\dots \end{pmatrix}.$$

Verrataan vastaavia trinäärilukukohtia, jolloin saadaan

$$x_n = k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-2}}t_{2n-1}$$

ja

$$y_n = k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-1}}t_{2n}.$$

Koska k on itsensä käänteisfunktio, saadaan edellisistä kuvaamalla molemmat puolet vastaavalla funktiolla k

$$t_{2n-1} = k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-2}}x_n$$

ja

$$t_{2n} = k^{\sum_{i=1}^n t_{2i-1}}y_n.$$

Määritelmän 3.8 nojalla $t_0 = 0$, joten näistä yhtälöistä voidaan ratkaista luvut t_1, t_2, t_3, \dots . Esimerkiksi luku

$$t_1 = t_{2*1-1} = k^{\sum_{i=1}^1 t_{2i-2}}x_1 = k^{t_0}x_1 = x_1$$

ja luku

$$t_2 = t_{2*1} = k^{\sum_{i=1}^1 t_{2i-1}}y_1 = k^{t_1}y_1.$$

Näin löydetään määrittelyjoukon alkio $t = 0_3t_1t_2t_3t_4\dots$, joten Peanon käyrä f_p on surjektio. \square

3.3.2. Peanon käyrän jatkuvuus.

LAUSE 3.13. *Määritelmässä 3.8 esitetty Peanon käyrä on jatkuva.*

TODISTUS. Tutkitaan Peanon käyrän jatkuvuutta koordinaattifunktioiden $x_p(t)$ ja $y_p(t)$ avulla.

Osoitetaan ensin, että $x_p(t)$ on oikealta jatkuva kaikille $t \in [0, 1)$. Olkoon

$$\hat{t} = 0_3\hat{t}_1\hat{t}_2\hat{t}_3\dots\hat{t}_{2n}\hat{t}_{2n+1}\dots$$

päättymätön trinääriluku. Jos valittu luku loppuu kakkosen jaksoon, muunnetaan luku lauseen 3.3 mukaiseen päättävään muotoon. Olkoon lisäksi

$$\delta = \frac{1}{3^{2n}} - 0_3000\dots0\hat{t}_{2n+1}\hat{t}_{2n+2}\dots$$

Koska

$$\begin{aligned}
\hat{t} + \delta &= 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n} \hat{t}_{2n+1} \dots + \frac{1}{3^{2n}} - 0_3 000 \dots 0 \hat{t}_{2n+1} \hat{t}_{2n+2} \dots \\
&= 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n} + \frac{1}{3^{2n}} \quad \text{yhdistetään summattava trinääriluvun paikkaan } 2n \\
&= 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots (\hat{t}_{2n} + 1) \quad \text{josta saadaan trinääriluvun päättymätön muoto} \\
&= 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots (\hat{t}_{2n} + 1 - 1) \bar{2} \\
&= 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n} \bar{2},
\end{aligned}$$

niin jokaisen $t \in [\hat{t}, \hat{t} + \delta)$ ensimmäiset $2n$ trinääriluvun osaa täytyy vastata luvun \hat{t} trinääriosia, jolloin siis $t = 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n} t_{2n+1} t_{2n+2} \dots$.

Merkitään $T = \hat{t}_2 + \hat{t}_4 + \hat{t}_6 + \dots + \hat{t}_{2n}$. Nyt kuvapisteiden erotuksen itseisarvoa voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
|x(t) - x(\hat{t})| &= |0_3 \hat{t}_1 (k^{\hat{t}_2} \hat{t}_3) \dots (k^T t_{2n+1}) \dots - 0_3 \hat{t}_1 (k^{\hat{t}_2} \hat{t}_3) \dots (k^T \hat{t}_{2n+1}) \dots| \\
&= \left| \frac{\hat{t}_1}{3} + \frac{k^{\hat{t}_2} \hat{t}_3}{3^2} + \dots + \frac{k^T t_{2n+1}}{3^{n+1}} + \dots - \frac{\hat{t}_1}{3} - \frac{k^{\hat{t}_2} \hat{t}_3}{3^2} - \dots - \frac{k^T \hat{t}_{2n+1}}{3^{n+1}} - \dots \right| \\
&= \left| \frac{k^T t_{2n+1}}{3^{n+1}} + \frac{k^{T+\hat{t}_{2n+2}} t_{2n+3}}{3^{n+2}} + \dots - \frac{k^T \hat{t}_{2n+1}}{3^{n+1}} - \frac{k^{T+\hat{t}_{2n+2}} \hat{t}_{2n+3}}{3^{n+2}} - \dots \right| \\
&\leq \left| \frac{k^T t_{2n+1} - k^T \hat{t}_{2n+1}}{3^{n+1}} \right| + \left| \frac{k^{T+\hat{t}_{2n+2}} t_{2n+3} - k^{T+\hat{t}_{2n+2}} \hat{t}_{2n+3}}{3^{n+2}} \right| + \dots \\
&\leq \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} + \dots \\
&\leq \left(\frac{2}{3^{n+1}} \right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) = \left(\frac{2}{3^{n+1}} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \right) \\
&= \left(\frac{2}{3^{n+1}} \right) \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Nyt siis määritelmän 1.4 mukaan koordinaattifunktio $x_p(t)$ on oikealta jatkuva.

Osoitetaan, että $x_p(t)$ on vasemmalta jatkuva kaikille $t \in (0, 1]$. Olkoon nyt

$$\hat{t} = 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n} \hat{t}_{2n+1} \dots$$

päättymätön trinääriluku, joka ei lopu kakkosen jaksoon. Kuten edellä, jos valittu luku loppuu kakkosen jaksoon, käytetään luvusta lauseen 3.3 mukaista päättynyttä muotoa. Olkoon

$$\delta = 0_3 000 \dots 0 \hat{t}_{2n+1} \hat{t}_{2n+2} \dots$$

Tällöin

$$\hat{t} - \delta = 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n} \hat{t}_{2n+1} \dots - 0_3 000 \dots 0 \hat{t}_{2n+1} \hat{t}_{2n+2} \dots = 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n}.$$

Jokaiselle $t \in (\hat{t} - \delta, \hat{t}]$ ensimmäiset $2n$ trinääriluvun osaa on vastattava luvun \hat{t} osia, jolloin $t = 0_3 \hat{t}_1 \hat{t}_2 \hat{t}_3 \dots \hat{t}_{2n} t_{2n+1} t_{2n+2} \dots$. Vastaavasti kuten edellä voidaan osoittaa, että koordinaattifunktio $x_p(t)$ on vasemmalta jatkuva.

Koska $x_p(t)$ on oikealta jatkuva, kun $t \in [0, 1)$ ja vasemmalta jatkuva, kun $t \in (0, 1]$, niin $x_p(t)$ on jatkuva koko välillä $[0, 1]$.

Funktion $x_p(t)$ jatkuvuudesta seuraa, että myös funktio $y_p(t)$ on jatkuva välillä $[0, 1]$, sillä

$$3x_p\left(\frac{t}{3}\right) = 3x_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^{n+1}}\right) = 3 \cdot 0_3 0(k^{t_1} t_2)(k^{t_1+t_3} t_4) \dots = 0_3(k^{t_1} t_2)(k^{t_1+t_3} t_4) \dots = y_p(t).$$

Koska molemmat koordinaattifunktiot ovat jatkuvia välillä $[0, 1]$, niin määritelmän 1.6 nojalla myös Peanon käyrä f_p on jatkuva välillä $[0, 1]$. □

3.4. Peanon käyrä on ei-missään derivoituva

Peanon määrittelemän käyrän esitys oli erittäin tarkka, mutta hän ei osoittanut, että hänen muodostamansa käyrä on ei-missään derivoituva. Kymmenen vuotta myöhemmin amerikkalainen matemaatikko Eliakim Hastings Moore julkaisi tälle todistuksen.

LAUSE 3.14. *Määritelmässä 3.8 esitetty Peanon käyrä on ei-missään derivoituva.*

TODISTUS. Tutkitaan ensin koordinaattifunktion $x_p(t)$ derivoituvuutta. Jokaiselle

$$t = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} t_{2n+1} t_{2n+2} \dots \in [0, 1],$$

voidaan määritellä

$$\tau = 0_3 t_1 t_2 t_3 \dots t_{2n} \tau_{2n+1} t_{2n+2} \dots,$$

jossa $\tau_{2n+1} = t_{2n+1} + 1 \pmod{2}$, jolloin $|t_{2n+1} - \tau_{2n+1}| = 1$. Nyt trinääriluvut t ja τ eroavat toisistaan vain kohdassa $2n + 1$, jolloin

$$|t - \tau| = \left| \frac{t_{2n+1}}{3^{2n+1}} - \frac{\tau_{2n+1}}{3^{2n+1}} \right| = \left| \frac{t_{2n+1} - \tau_{2n+1}}{3^{2n+1}} \right| = \frac{1}{3^{2n+1}}.$$

Peanon käyrän määritelmän 3.8 mukaan koordinaattifunktiot $x_p(t)$ ja $x_p(\tau)$ eroavat toisistaan ainoastaan trinääriluvun kohdassa $\frac{(2n+1)+1}{2} = (n+1)$, joten saadaan

$$|x_p(t) - x_p(\tau)| = \left| \frac{k^{t_2+\dots+t_{2n}} t_{2n+1}}{3^{n+1}} - \frac{k^{t_2+\dots+t_{2n}} \tau_{2n+1}}{3^{n+1}} \right| = \left| \frac{k^{t_2+\dots+t_{2n}} (t_{2n+1} - \tau_{2n+1})}{3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3^{n+1}}$$

ja siispä

$$\frac{|x_p(t) - x_p(\tau)|}{|t - \tau|} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^{2n+1}}} = \frac{3^{2n+1}}{3^{n+1}} = 3^n \rightarrow \infty, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Nyt erotusosamäärän raja-arvo lähestyy ääretöntä, joten määritelmän 1.5 nojalla $x_p(t)$ ei ole derivoituva.

Koska toinen koordinaattifunktio saadaan johdettua kaavalla $y_p(t) = 3x_p\left(\frac{t}{3}\right)$, niin myöskään $y_p(t)$ ei ole derivoituva. Siispä Peanon käyrä f_p ei ole derivoituva välillä $[0, 1]$ eli määrittelyjoukossaan, joten Peanon käyrä on ei-missään derivoituva. □

3.5. Peanon käyrän geometrinen esitys

Peanon käyrän geometrisen luonteen hahmottaminen pelkästä määritelmästä saattaa olla hyvin vaikeaa. Kun tilan täyttäviä käyriä alettiin tutkia enemmän, saksalainen matemaatikko David Hilbert (1862-1943) paneutui käyrien geometriseen esittämiseen. Hilbert opiskeli Königsbergin, eli nykyisen Kalingradin, sekä Heidelbergin yliopistoissa ja valmistui tohtoriksi 1884. Hän jatkoi vielä opiskelua Pariisissa, jonka jälkeen hän palasi opettamaan Königsbergin yliopistoon. 33-vuotiaana hän muutti työn perässä Göttingenin yliopistoon, josta hän jäi eläkkeelle 68-vuotiaana vuonna 1930. Hilbert oli merkittävä matemaatikko, sillä hän kehitti useita eri matematiikan aloja tutkien ja korjailleen uusia teorioita.

Hilbert oli ensimmäinen, joka antoi Peanon käyrälle kuvallisen esitystavan. Välin $[0, 1]$ kuvautuminen yksikköneliöön voidaan selvittää tutkimalla trinäärilukuja ja niiden kuvautumista Peanon käyrän määritelmän 3.8 avulla.

Tutkitaan ensin tapausta, jossa väli $[0, 1]$ jaetaan yhdeksään yhtäsuureen osaan. Asetetaan trinääriluvulle $0_3t_1t_2t_3t_4\dots$ arvot $t_1 = 0$ ja $t_2 = 0$. Tällöin saadaan trinääriluku $0_300t_3t_4\dots$, joka on pienimmillään 0, kun kaikki luvut $t_j = 0$. Suurimmillaan trinääriluku on silloin, kun kaikki luvut $t_j = 2$, jolloin

$$0_30022\dots = \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{9}.$$

Tutkittava piste kuuluu siis välille $[0, \frac{1}{9}]$. Tutkitaan pisteen kuvautumista määritelmässä 3.8 esitetyllä Peanon funktiolla ja merkitään yksinkertaistaen trinääriluvuille vastaavuudet

$$f_p(0_300t_3t_4\dots) = \begin{pmatrix} 0_30(k^0t_3)(k^{0+t_4}t_5)\dots \\ 0_3(k^00)(k^{0+t_3}t_4)\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_30x_2x_3x_4\dots \\ 0_30y_2y_3y_4\dots \end{pmatrix}.$$

Tällöin kuvapisteen x -koordinaatti

$$0_30x_2x_3x_4\dots = \frac{0}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots$$

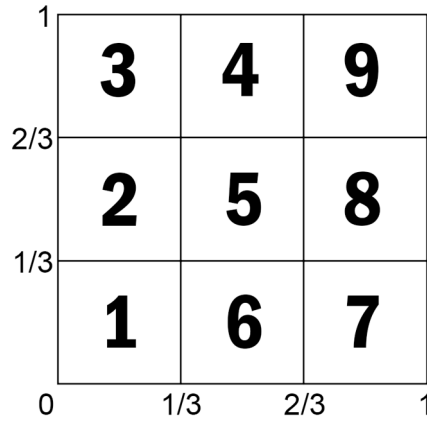
on pienimmillään 0, kun kaikki luvut $x_j = 0$. Suurimmillaan x -koordinaatti on silloin, kun kaikki luvut $x_j = 2$, jolloin

$$0_30222\dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3}.$$

Siten kuvapisteen x -koordinaatti kuuluu välille $[0, \frac{1}{3}]$. Vastaava tulos pätee kuvapisteen y -koordinaatille. Tällöin siis välin $[0, \frac{1}{9}]$ kuva sijaitsee neliön $[0, 1] \times [0, 1]$ osaneliössä $[0, \frac{1}{3}] \times [0, \frac{1}{3}]$, joka on merkitty kuvaan 3.1 numerolla 1.

Asetetaan nyt $t_1 = 0$ ja $t_2 = 1$, jolloin saadaan trinääriluku $0_301t_3t_4\dots$. Tämä on pienimmillään, kun kaikki luvut $t_j = 0$, jolloin

$$0_30100\dots = \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \dots = \frac{1}{9}.$$



KUVA 3.1. Peanon käyrän järjestäytyminen yksikköneliöön.

Suurimmillaan trinääriluku on silloin, kun kaikki luvut $t_j = 2$, jolloin

$$0_3 0122 \dots = \frac{0}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = \frac{1}{9} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Tämä piste kuuluu välille $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$. Kuvattaessa piste Peanon funktiolla saadaan

$$f_p(0_3 01t_3 t_4 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 0(k^1 t_3)(k^{1+t_4} t_5) \dots \\ 0_3 (k^0 1)(k^{0+t_3} t_4) \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 0x_2 x_3 x_4 \dots \\ 0_3 1y_2 y_3 y_4 \dots \end{pmatrix}.$$

Kuvapisteen x -koordinaatti kuuluu samalle välille, kuin edellisessä tapauksessa, mutta y -koordinaateissa on eroa. Trinääriluku $0_3 1y_2 y_3 y_4 \dots$ on pienimmillään kun kaikki luvut $y_j = 0$, eli

$$0_3 1000 \dots = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \dots = \frac{1}{3}.$$

Suurimmillaan trinääriluku on silloin, kun kaikki luvut $y_j = 2$ eli

$$0_3 1222 \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Kuvapisteen y -koordinaatti kuuluu siis välille $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Tästä nähdään, että välin $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ kuva on osaneliössä $[0, \frac{1}{3}] \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, joka on kuvaan 3.1 merkitty numerolla 2.

Vastaavasti jatkamalla voidaan huomata, että väli $[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}]$ arvoilla $j = 1, 2, 3, \dots, 9$ kuvautuu osaneliöön, jota vastaa kuvan 3.1 osaneliö j .

Pienennetään välin $[0, 1]$ jakoa ja jaetaan jokainen edellinen osaväli yhdeksään osaan, jolloin uusia välejä on yhteensä 81 kappaletta. Vastaavaa osaneliöjakoa havainnollistaa kuvan 3.2 keskimäinen yksikköneliö. Tutkitaan tarkemmin muutamien osavälien kuvautumista.

Asetetaan $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$ ja $t_4 = 0$. Tällöin trinääriluku $0_3 0000t_5 t_6 \dots$ on pienimmillään 0, kun kaikki luvut $t_j = 0$. Suurimmillaan trinääriluku on silloin, kun

kaikki luvut $t_j = 2$, jolloin

$$0_3 000022 \dots = \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{81}.$$

Trinääriluku kuuluu siis välille $[0, \frac{1}{81}]$. Kun piste kuvataan Peanon funktiolla saadaan

$$f_p(0_3 0000t_5t_6 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 0(k^0 0)(k^{0+0}t_5) \dots \\ 0_3 (k^0 0)(k^{0+0}0)(k^{0+0+t_5}t_6 \dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 00x_3x_4 \dots \\ 0_3 00y_3y_4 \dots \end{pmatrix}.$$

Kuvapisteen x -koordinaatti on pienimmillään 0 ja suurimmillaan $\frac{1}{9}$. Vastaava pätee y -koordinaatille. Tällöin siis väli $[0, \frac{1}{81}]$ kuvautuu osaneliöön $[0, \frac{1}{9}] \times [0, \frac{1}{9}]$.

Asetetaan seuraavaksi $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 2$ ja $t_4 = 2$. Trinääriluku $0_3 0022t_5t_6 \dots$ on pienimmillään, kun kaikki luvut $t_j = 0$, jolloin

$$0_3 002200 \dots = \frac{2}{27} + \frac{2}{81} = \frac{8}{81}.$$

Suurimmillaan trinääriluku on, kun kaikki luvut $t_j = 2$, jolloin

$$0_3 002222 \dots = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{9} = \frac{9}{81}.$$

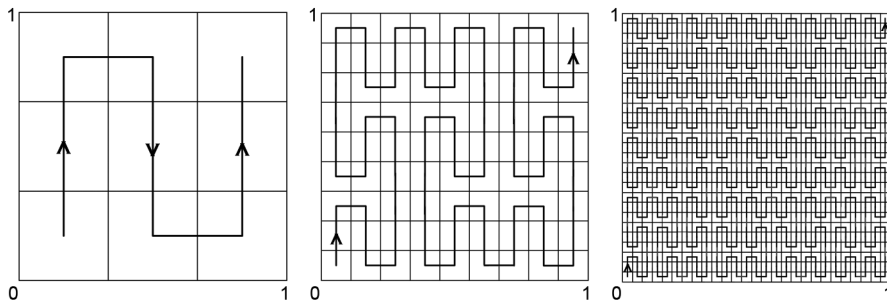
Trinääriluku kuuluu siis välille $[\frac{8}{81}, \frac{9}{81}]$. Kun piste kuvataan Peanon funktiolla saadaan

$$f_p(0_3 0022t_5t_6 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 0(k^0 2)(k^{0+2}t_5) \dots \\ 0_3 (k^0 0)(k^{0+2}2)(k^{0+2+t_5}t_6 \dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 02x_3x_4 \dots \\ 0_3 02y_3y_4 \dots \end{pmatrix}.$$

Nyt kuvapisteen x -koordinaatti on pienimmillään $\frac{2}{9}$ ja suurimmillaan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}.$$

Vastaava tulos saadaan y -koordinaatille. Täten väli $[\frac{8}{81}, \frac{9}{81}]$ kuvautuu osaneliöön $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \times [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$.



KUVA 3.2. Peanon käyrän kulkusuunta yksikköneliössä, kolme ensimmäistä iterointiaskelta

Asettamalla $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 0$ ja $t_4 = 0$ saadaan trinääriluku $0_3 0100t_5t_6 \dots$, joka vastaavanlaisella päättelyllä kuuluu välille $[\frac{9}{81}, \frac{10}{81}]$. Kun piste kuvataan Peanon

funktiolla saadaan

$$f_p(0_3 0100t_5t_6 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 0(k^1 0)(k^{1+0}t_5) \dots \\ 0_3 (k^0 1)(k^{0+0}0)(k^{0+0+t_5}t_6 \dots) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 02x_3x_4 \dots \\ 0_3 10y_3y_4 \dots \end{pmatrix}.$$

Kuvapisteen x -koordinaatti kuuluu välille $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$ ja y -koordinaatti välille $[\frac{3}{9}, \frac{4}{9}]$, joten väli $[\frac{9}{81}, \frac{10}{81}]$ kuvautuu osaneliöön $[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \times [\frac{3}{9}, \frac{4}{9}]$.

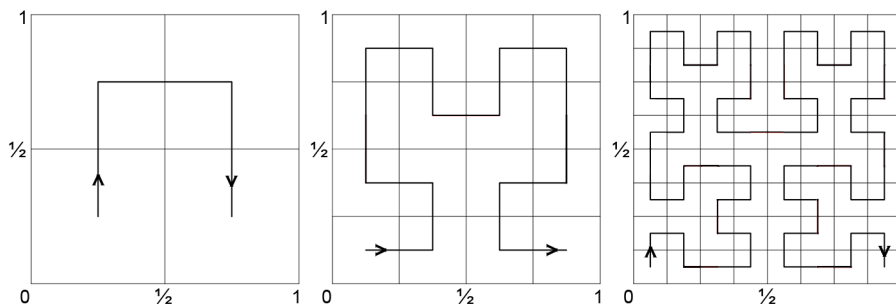
Peanon käyrän kulkua voidaan siis havainnollistaa niin, että väli I jaetaan 3^{2n} yhtenevään osaväliin, jotka kuvataan 3^{2n} yhtenevään osaneliöön, kun $n = 1, 2, 3, \dots$. Kuvassa 3.2 on esitetty Peanon käyrän kolme ensimmäistä iterointiaskeleta, joista voidaan nähdä missä osaneliöjärjestyksessä käyrä kulkee yksikköneliön läpi. Kun n lähestyy ääretöntä, eli iterointeja tehdään ääretön määrä, lähestyy osavälien järjestystä kuvaava käyrä Peanon käyrää, eli saadaan koko yksikköneliön täyttävä jatkuva käyrä.

LUKU 4

Hilbertin käyrä

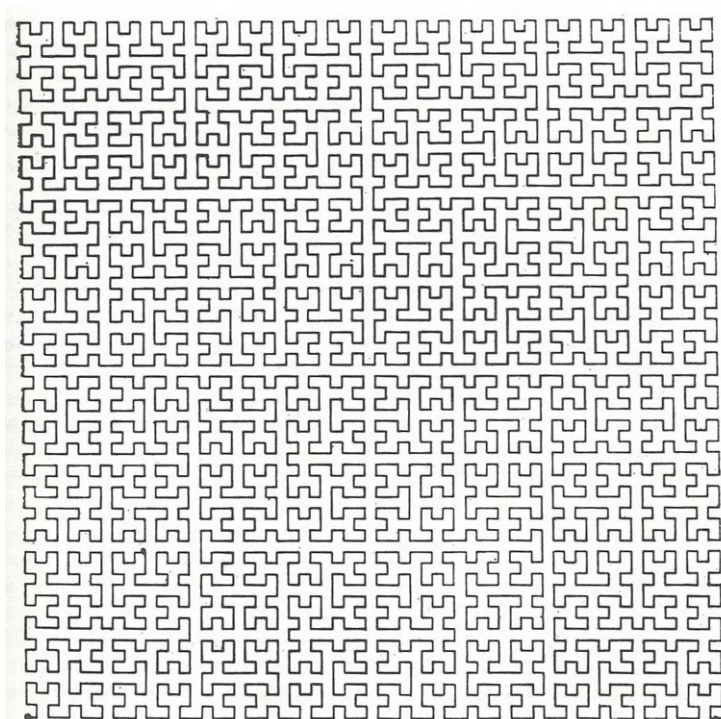
David Hilbert huomasi ensimmäisenä tilan täyttävien käyrien geometrisen luonteen, ja kuinka käyrän rakentuminen voidaan esittää selkeästi. Peanon käyrää tutkittuaan Hilbert alkoi kehittää omaa tilan täyttävää käyräänsä. Peanon käyrän ja Hilbertin käyrän merkittävin ero on se, että iterointiaskeleella n Peanon käyrässä yksikköväli I ja yksikköneliö Q jaetaan molemmat 3^{2n} osaan, kun taas Hilbertin käyrässä osia on $2^{2n} = 4^n$ kappaletta. Eron voi huomata selvästi käyrien geometrisista esityksistä. Hilbert esitti käyrän rakennusperiaatteen: Jos väli $I = [0, 1]$ voidaan kuvata jatkuvalla kuvauksella neliöön $Q = [0, 1]^2$, voidaan väli I jakaa neljään yhtenevään osaväliin ja neliö Q neljään yhtenevään osaneliöön, jolloin jokainen osaväli voidaan kuvata jatkuvalla kuvauksella yhteen osaneliöön. Tämän jälkeen jokainen uusi osaväli ja uusi osaneliö voidaan jakaa uudestaan neljään osaväliin ja osaneliöön, ja saadaan edelliseen tapaan jatkuvat kuvaukset. Tätä periaatetta toistamalla äärettömän monta kertaa saadaan väli I ja neliö Q jaettua 4^n yhtenevään osaan, jossa $n = 1, 2, 3, \dots$ on iterointikierrosten lukumäärä.

Nämä osaneliöt voidaan järjestää niin, että vierekkäiset osaneliöt vastaavat vierekkäisiä osavälejä, jolloin jatkuvuus säilyy. Myöskin tietyn välin osavälit vastaavat väliä vastaavan neliön osaneliöitä. Kuvassa 4.1 on esitetty, missä järjestyksessä Hilbertin käyrä kulkee yksikköneliön osaneliöitä kolmella ensimmäisellä iterointiaskeleella. Kuvassa 4.2 on esitetty Hilbertin käyrän kuudes iterointiaskelelta. Kun iterointiaskeleiden lukumäärä lähestyy äärettömäksi, lähestyy osaneliöiden järjestystä esittävä käyrä Hilbertin käyrää.



KUVA 4.1. Hilbertin käyrän kolme ensimmäistä iterointiaskelelta

MÄÄRITELMÄ 4.1. Olkoon $I = [0, 1]$ ja $Q = [0, 1]^2$ ja olkoon piste $t \in I$. Pistelle t löytyy jono sisäkkäisiä suljettuja välejä, joiden pituus on $\frac{1}{4^n}$, ja joiden ääretön leikkaus sisältää ainoastaan pisteen t . Tällaista välien muodostamaa jonoa vastaa jono sisäkkäisiä suljettuja neliöitä, joiden sivun pituus on $\frac{1}{2^n}$, ja joiden ääretön leikkaus



KUVA 4.2. Hilbertin käyrän kuudes iterointiaskel. Kuva otettu lähde-
teoksesta [6].

sisältää ainoastaan yhden pisteen. Tälle pisteelle annetaan nimi $f_h(t) \in Q$. Näin saadaan kuvaus $f_h : I \rightarrow Q$, jonka kuvajoukko $f_h(I)$ muodostaa Hilbertin käyrän.

HUOMAUTUS 4.2. Jos piste t on jonkin välin $]0, 1[$ osavälin päätepiste, kuuluu t vähintään kahteen eri sisäkkäisten välien jonoon. Piste t kuva $f_h(t)$ on kuitenkin sama, sillä vierekkäiset välit kuvautuvat vierekkäisiksi neliöiksi.

4.1. Hilbertin käyrä tilan täyttävänä käyränä

LAUSE 4.3. *Hilbertin käyrä on tilan täyttävä käyrä, jolle $f_h(I) = Q$.*

Osoitetaan, että Hilbertin käyrällä on määritelmässä 1.7 mainitut ominaisuudet.

4.1.1. Hilbertin käyrän surjektiivisuus.

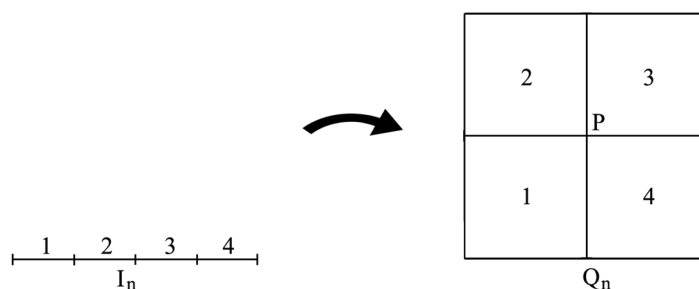
LAUSE 4.4. *Määritelmässä 4.1 esitetty Hilbertin käyrä $f_h : I \rightarrow Q$ on surjektio.*

TODISTUS. Valitaan mielivaltainen piste $(x_0, y_0) \in Q$. Tiedetään, että piste kuuluu johonkin sisäkkäisten suljettujen neliöiden jonoon, joiden halkaisijat suppenevat kohti nollaa. Tätä sisäkkäisten suljettujen neliöiden jonoa vastaa jono sisäkkäisiä suljettuja osavälejä, joiden pituus suppenee kohti nollaa. Tämä määrittelee yksikäsitteisen luvun $t_0 \in I$, jolle pätee $f(t_0) = (x_0, y_0)$. Jos tutkittava piste sijaitsee jonkin osaneliön kulmassa tai reunalla, niin se voi kuulua ainakin kahteen eri neliöön, jotka eivät vastaa samaa osavälien jonoa. Tällöin siis piste kuuluu ainakin kahteen eri suljettujen sisäkkäisten neliöiden jonoon, ja näin ollen sillä on kaksi tai useampi alkukuva joukossa I . Siispä $f_h : I \rightarrow Q$ on surjektio. \square

Hilbertin käyrän surjektiivisuuden todistuksessa käy ilmi, että useampi välin I piste voi kuvautua samaksi pisteeksi joukossa Q . Tämä ominaisuus pätee muillekin tilan täyttävälle käyrille, mutta todistetaan tämä vain Hilbertin käyrälle.

LAUSE 4.5. *Hilbertin käyrällä on ääretön määrä moninkertaisia pisteitä.*

TODISTUS. Oletetaan, että iterointikierroksella n osaneliötä Q_n vastaa osaväli I_n . Olkoon P osaneliön Q_n keskipiste. Iterointikierroksella $n + 1$ neliön Q_n osaneliöt vastaavat välin I_n neljää osaväliä. Nämä osavälit, osaneliöt ja keskipiste on esitetty kuvassa 4.3.



KUVA 4.3. Välin ja neliön jakaminen osaväleiksi ja osaneliöiksi

Kun iterointikierrosten lukumäärä n lähestyy ääretöntä, saadaan osaneliöstä 1 jono sisäkkäisiä suljettuja osaneliöitä, jotka suppenevat kohti pistettä P . Vastaavasti välin I_n ensimmäiseltä osaväliltä voidaan löytää joukko sisäkkäisiä suljettuja osavälejä, jotka suppenevat kohti pistettä t . Kuitenkin myös osaneliöstä 4 saadaan jono sisäkkäisiä suljettuja osaneliöitä, jotka suppenevat kohti pistettä P . Näitä vastaavat välin I_n neljännestä osavälistä saatavat sisäkkäiset suljetut osavälit, jotka suppenevat kohti pistettä $t' \neq t$. Näin ainakin kaksi eri pistettä väliltä I kuvautuvat samaksi pisteeksi P . Vastaavanlaisia pisteitä voidaan löytää kaikista osaneliöistä, joten Hilbertin käyrällä on ääretön määrä moninkertaisia pisteitä. \square

4.1.2. Hilbertin käyrän jatkuvuus.

LAUSE 4.6. *Määritelmässä 4.1 esitetty Hilbertin käyrä $f_h : I \rightarrow Q$ on jatkuva.*

TODISTUS. Kun Hilbertin käyrää iteroidaan, on väli I jaettu 4^n osaväliin iterointiaskeleella n . Näiden kunkin osavälin pituus on $\frac{1}{4^n}$. Valitaan nyt t_1 ja $t_2 \in I$ siten, että $|t_1 - t_2| < \frac{1}{4^n}$. Nyt väli $[t_1, t_2]$ on päällekkäin korkeintaan kahden peräkkäisen osavälin kanssa ja välin kuva on korkeintaan kahden peräkkäisen osaneliön päällä. Näiden osaneliöiden sivun pituus on $\sqrt{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{2^n}$, ja yhdessä osaneliöt muodostavat suorakulmion jonka halkaisijan pituus on $\frac{\sqrt{5}}{2^n}$. Nyt pisteiden t_1 ja t_2 kuville pätee $|f_h(t_1) - f_h(t_2)| \leq \frac{\sqrt{5}}{2^n} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, joten $f_h : I \rightarrow Q$ on määritelmän 1.4 nojalla jatkuva. \square

4.2. Hilbertin käyrä on ei-missään derivoituva

Kehittäessään käyräänsä Hilbert väitti, että käyrä on ei-missään derivoituva. Hän ei kuitenkaan itse osoittanut väitettä todeksi, vaan varsinainen todistus esitettiin ensimmäisen kerran 100 vuotta myöhemmin. Todistuksessa tarvitaan avuksi koordinaattifunktioita.

LAUSE 4.7. *Määritelmässä 4.1 esitetty Hilbertin käyrä f_h on ei-missään derivoituva, toisin sanoen Hilbertin käyrän koordinaattifunktiot $x_h(t)$ ja $y_h(t)$ ovat ei-missään derivoituvia.*

TODISTUS. Olkoon iteraatiokierrosten lukumäärä $n \geq 3$. Mille tahansa $t \in I$ voidaan valita jono t_n siten, että etäisyys $|t - t_n| \leq \frac{16}{4^n}$, ja että pisteen t kuvapisteen koordinaatit $x_h(t)$ ja $y_h(t)$ ovat erillään pisteen t_n kuvapisteen koordinaateista $x_h(t_n)$ ja $y_h(t_n)$ vähintään yhden nelion sivun mitan verran $\frac{1}{2^n}$. Eli kun $n \geq 3$ voidaan pisteelle t aina löytää pistejono t_n , joille pätee

$$\begin{aligned} |t - t_n| &\leq \frac{16}{4^n} \\ |x_h(t) - x_h(t_n)| &> \frac{1}{2^n} \\ |y_h(t) - y_h(t_n)| &> \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Tämä voidaan nähdä myös kuvasta 4.1.

Tällöin kuvapisteen x -koordinaateille pätee

$$\frac{|x_h(t) - x_h(t_n)|}{|t - t_n|} \geq \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{16}{4^n}} = \frac{2^n}{16} \rightarrow \infty \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Tällöin siis erotusosamäärän raja-arvoa ei ole olemassa, kun t_n lähestyy pistettä t , joten funktio x_h ei ole derivoituva missään pisteessä $t \in [0, 1]$. Vastaavasti y -koordinaateille

$$\frac{|y_h(t) - y_h(t_n)|}{|t - t_n|} \geq \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{16}{4^n}} = \frac{2^n}{16} \rightarrow \infty \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Siispä määritelmän 1.5 nojalla Hilbertin käyrä on ei-missään derivoituva. \square

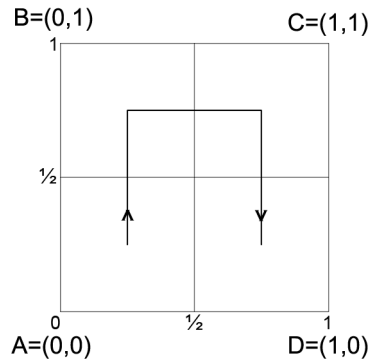
4.3. Hilbertin käyrän analyyttinen esitys

Hilbertin käyrän analyyttinen esitys perustuu Hilbertin käyrän kulkemiseen yksikköneliössä ja sen vektorimuotoiseen esitystapaan. Hilbertin käyrää määriteltäessä tarvitaan nelikantaisia lukuja, jotka ovat luonteeltaan samanlaisia kuin trinääriluvut. Välillä $[0, 1]$ olevia nelikantaisia lukuja merkitään

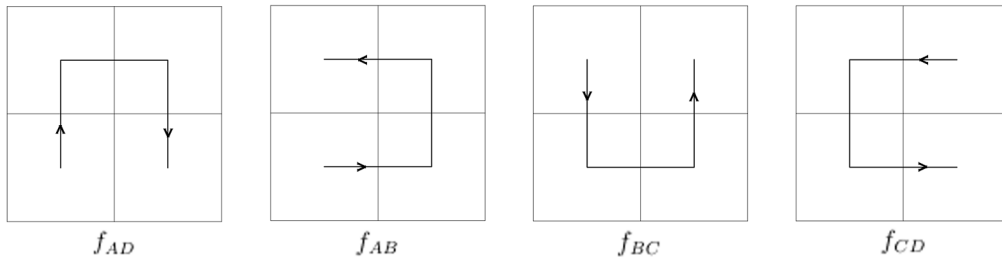
$$0_4 q_1 q_2 q_3 q_4 \dots = \frac{q_1}{4} + \frac{q_2}{4^2} + \frac{q_3}{4^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{4^n},$$

jossa $q_i = 0, 1, 2$ tai 3 .

Hilbertin käyrä alkaa aina yksikköneliön kulmasta $(0, 0)$ ja päättyy kulmaan $(1, 0)$. Merkitään yksikköneliön kulmia kirjaimilla $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 1)$ ja $D = (1, 0)$, jotka ovat merkitty myös kuvaan 4.4. Hilbertin käyrä koostuu ensimmäisen askeleen moninkerroista, joita on skaalattu pienemmiksi, kierretty ja tarpeen vaatiessa myös kulkusuuntaa on vaihdettu. Näitä orientaatioita on kahdeksan erilaista, joissa käyrän alkupiste ja loppupiste sijaitsevat viereisissä kulmissa. Näistä käytetään merkintää f_{AB} , joka tarkoittaa käyrää, joka alkaa pisteestä A ja päättyy pisteeseen B . Kuvassa 4.5 on esitetty käyrän neljä eri orientaatiota.



KUVA 4.4. Hilbertin käyrän kulku yksikköneliössä



KUVA 4.5. Hilbertin käyrän orientaatioita

Analyttisessä esityksessä käytetään apuna koordinaattifunktioita, ja esitetään Hilbertin käyrä näiden avulla sarakevektorina

$$f_h = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \end{bmatrix} = f_{AD}.$$

Kiertämällä ja suuntaa vaihtamalla saadaan käyrät, jotka voidaan kirjoittaa alkuperäisen Hilbertin käyrän avulla sarakevektoreina

$$(4.1) \quad f_{AD} = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \end{bmatrix} \quad f_{DA} = \begin{bmatrix} 1 - x_h \\ y_h \end{bmatrix}$$

$$(4.2) \quad f_{AB} = \begin{bmatrix} y_h \\ x_h \end{bmatrix} \quad f_{BA} = \begin{bmatrix} y_h \\ 1 - x_h \end{bmatrix}$$

$$(4.3) \quad f_{BC} = \begin{bmatrix} x_h \\ 1 - y_h \end{bmatrix} \quad f_{CB} = \begin{bmatrix} 1 - x_h \\ 1 - y_h \end{bmatrix}$$

$$(4.4) \quad f_{CD} = \begin{bmatrix} 1 - y_h \\ 1 - x_h \end{bmatrix} \quad f_{DC} = \begin{bmatrix} 1 - y_h \\ x_h \end{bmatrix}.$$

Kuvan 4.1 iterointiaskeleista voidaan päätellä, että Hilbertin käyrä alkaa pisteestä $(0, 0)$ kun $q = 0$, kulkee pisteiden $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$ kautta ja päättyy pisteeseen $(1, 0)$ kun $q = 1$. Hilbertin käyrän toinen iterointiaskel koostuu neljästä ensimmäisestä askeleesta, joiden koko on skaalattu puolikkaaksi alkuperäisestä ja joiden orientaatioita on muutettu siten, että ne asettuvat sopivasti peräkkäin. Vastaavasti kolmas askel koostuu 16 kappaleesta ensimmäistä askelta, jotka on skaalattu 2^{-2} -kertaiseksi, orientoitu ja asetettu peräkkäin. Vastaavasti askeleella n on ensimmäistä askelta skaalattu kertoimella 2^{-n} ja niitä on peräkkäin 4^n kappaletta.

Olkoon q nelikantainen luku ja $q \in I = [0, 1]$. Tutkitaan ensin Hilbertin funktion kulkua, kun väli I jaetaan neljään yhtäsuureen osaan. Tällöin käyrä koostuu neljästä eri orientaatiopalasesta

$$(4.5) \quad f_h \left(\frac{q}{4} \right) = \frac{1}{2} f_{AB}(q)$$

$$(4.6) \quad f_h \left(\frac{1+q}{4} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} f_{AD}(q)$$

$$(4.7) \quad f_h \left(\frac{2+q}{4} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} f_{AD}(q)$$

$$(4.8) \quad f_h \left(\frac{3+q}{4} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} f_{CD}(q).$$

Yhtälöiden (4.1) - (4.4) avulla voidaan yhtälöt (4.5) - (4.8) esittää Hilbertin käyrän avulla. Merkitään Hilbertin käyrän eteen jääviä osia merkinnöillä $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ ja θ_3 . Näin saadaan

$$\begin{aligned}
f_h\left(\frac{q}{4}\right) &= \frac{1}{2}f_{AB}(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_h \\ x_h \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}f_h(q) \equiv \theta_0 f_h(q) \\
f_h\left(\frac{1+q}{4}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}f_{AD}(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}f_h(q) \equiv \theta_1 f_h(q) \\
f_h\left(\frac{2+q}{4}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}f_{AD}(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}f_h(q) \equiv \theta_2 f_h(q) \\
f_h\left(\frac{3+q}{4}\right) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}f_{CD}(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-y_h \\ 1-x_h \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_h \\ x_h \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \end{bmatrix} \equiv \theta_3 f_h(q).
\end{aligned}$$

Näiden merkintöjen avulla voidaan yhtälöt (4.5) - (4.8) esittää muodossa

$$(4.9) \quad f_h\left(\frac{p_1+q}{4}\right) = \theta_{p_1} f_h(q), \text{ jossa } p_1 = 0, 1, 2 \text{ tai } 3.$$

Erityisesti, kun $q = 0$ saadaan

$$(4.10) \quad f_h\left(\frac{p_1}{4}\right) = \theta_{p_1} f_h(0), \text{ jossa } p_1 = 0, 1, 2 \text{ tai } 3$$

ja kun pienennetään välin I jakoa saadaan yhtälön (4.9) avulla

$$(4.11) \quad f_h\left(\frac{p_1}{4} + \frac{p_2}{16}\right) = f_h\left(\frac{p_1 + \frac{p_2}{4}}{4}\right) = \theta_{p_1} f_h\left(\frac{p_2}{4}\right) = \theta_{p_1} \theta_{p_2} f_h(0),$$

jossa $p_1, p_2 = 0, 1, 2$ tai 3 .

Nelikantaisia lukuja käyttämällä voidaan yhtälö (4.10) kirjoittaa muodossa

$$f_h(0_4 p_1) = \theta_{p_1} f_h(0)$$

ja yhtälö (4.11) muodossa

$$f_h(0_4 p_1 p_2) = \theta_{p_1} \theta_{p_2} f_h(0).$$

Näin ollen saadaan

$$f_h(0_4 p_1 p_2 \dots p_n) = \theta_{p_1} \theta_{p_2} \dots \theta_{p_n} f_h(0).$$

Koska Hilbertin käyrä f_h on jatkuva ja $f_h(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, saadaan Hilbertin käyrän lausekkeeksi

$$f_h(0_4 p_1 p_2 \dots p_n \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{p_1} \theta_{p_2} \dots \theta_{p_n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

jossa $p_i = 0, 1, 2$ tai 3 .

ESIMERKKI 4.8. Lasketaan Hilbertin käyrän arvot kohdissa $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ ja $\frac{67}{96}$.

Nelikantaisena lukuna

$$\frac{1}{4} = 0_4 1,$$

jolloin

$$f_h\left(\frac{1}{4}\right) = f_h(0_4 1) = \theta_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Siis luku $\frac{1}{4}$ kuvautuu pisteeksi $(0, \frac{1}{2})$.

Nelikantaisena lukuna

$$\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 0_4 \bar{1},$$

jolloin

$$f_h\left(\frac{1}{3}\right) = f_h(0_4 \bar{1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_1^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan raja-arvon lauseketta, kun $n = 1, 2$ ja 3 :

$$\begin{aligned} \theta_1^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \theta_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\theta_1^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \theta_1^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\theta_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{7}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vastaavasti jatkamalla saadaan

$$\theta_1^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2^n - 1}{2^n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

joten

$$f_h\left(\frac{1}{3}\right) = f_h(0_4 \bar{1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_1^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eli luku $\frac{1}{3}$ kuvautuu pisteeksi $(0, 1)$.

Nelikantaisena lukuna

$$\frac{67}{96} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{0}{4^3} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{4^n} = 0_4 230\bar{2},$$

jolloin

$$f_h\left(\frac{67}{96}\right) = f_h(0_4 230\bar{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2 \theta_3 \theta_0 \theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_2 \theta_3 \theta_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan lauseketta $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, kun $n = 1, 2$ ja 3 :

$$\theta_2^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\theta_2^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\theta_2^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{7}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti jatkamalla saadaan

$$\theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2^n - 1}{2^n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

jolloin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$\theta_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_3 \theta_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_3 \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\theta_2 \theta_3 \theta_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \theta_2 \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

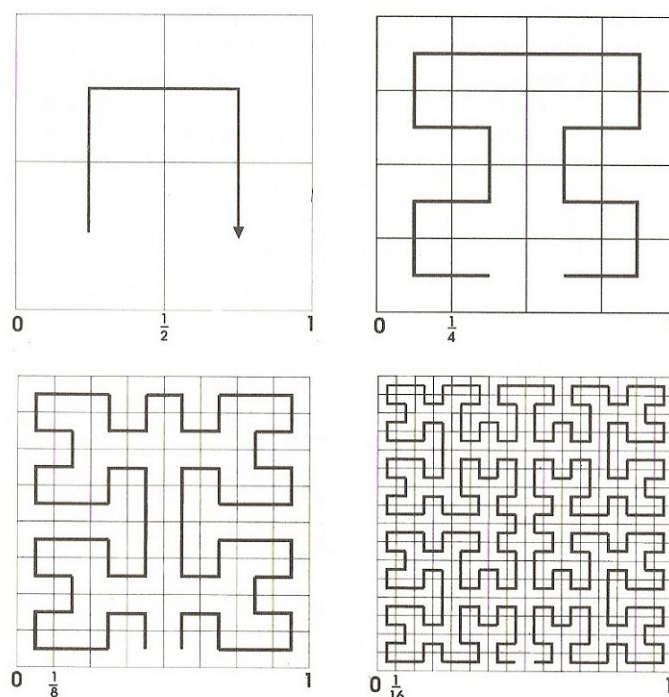
Tällöin siis

$$f_h \left(\frac{67}{96} \right) = f_h(0_4 230\bar{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_2 \theta_3 \theta_0 \theta_2^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix},$$

eli luku $\frac{67}{96}$ kuvautuu pisteeksi $(\frac{7}{8}, \frac{5}{8})$.

5.2. Mooren versio Hilbertin käyrästä

Amerikkalainen matemaatikko Eliakim Hastings Moore (1862-1932) oli myös kiinnostunut tilan täyttävistä käyristä, ja esittikin Hilbertin käyrälle vaihtoehdoisen esitystavan. Huomattavin ero geometrisessa esityksessä on se, että Hilbertin alkupe-
räinen käyrä alkaa pisteestä $(0, 0)$ ja loppuu pisteeseen $(1, 0)$, kun Mooren versiossa käyrä alkaa pisteestä $(\frac{1}{2}, 0)$ ja loppuu tähän samaan pisteeseen. Kuvassa 5.3 on esitetty Mooren version neljä ensimmäistä askelta. Järjestämällä osaneliöitä eri tavoin voidaan saada paljon erilaisia käyriä, kuten esimerkiksi käyrä, joka alkaa yksikköneliön kulmasta ja päättyy pisteeseen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tai käyrä, joka alkaa yksikköneliön sivun keskeltä ja päättyy vastakkaisen sivun keskelle.

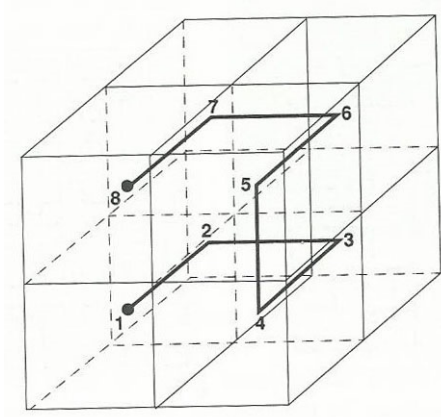


KUVA 5.3. Mooren kehittämän käyrän neljä ensimmäistä iterointias-
kelta. Kuva otettu lähdeoteesta [6].

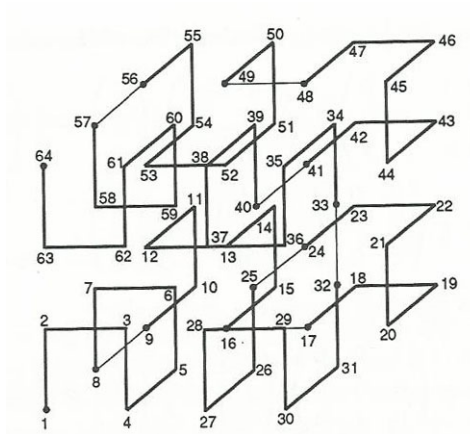
5.3. Kolmiulotteinen Hilbertin käyrä

Tilan täyttävien käyrien tutkimus laajentui myös kuution täyttäviin käyriin sekä useampiulotteisen tilan täyttäviin käyriin. Kolmiulotteisen Hilbertin käyrän $f_h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^3$ rakentuminen tapahtuu samalla tavoin kuin kaksiulotteisen Hilbertin käyrän, mutta iterointiaskeleella n väli $[0, 1]$ jaetaan 2^{3n} osaväliin ja yksikkökuutio $[0, 1]^3$ jaetaan 2^{3n} osakuutioon. Ensimmäisellä iterointiaskeleella, eli kun $n = 1$ väli $[0, 1]$ jaetaan siis 8 osaväliin ja yksikkökuutio 8 osakuutioon. Hilbertin kolmiulotteinen käyrä kulkee osakuutioiden läpi kuvan 5.4 mukaisessa järjestyksessä.

Toisella iterointiaskeleella osavälejä ja osakuutioita on jo $2^6 = 64$ kappaletta. Näiden osakuutioiden järjestys on esitetty kuvassa 5.5.



KUVA 5.4. Kolmiulotteisen Hilbertin käyrän ensimmäinen iterointiaskel. Kuva otettu lähdeeteoksesta [6].



KUVA 5.5. Kolmiulotteisen Hilbertin käyrän toinen iterointiaskel. Kuva otettu lähdeeteoksesta [6].

Kun n lähestyy ääretöntä, osakuutioiden järjestystä havainnollistava käyrä lähestyy kolmiulotteista Hilbertin käyrää, joka täyttää koko yksikkökuution. Kolmiulotteisen Hilbertin käyrän aritmeettinen esitys on mahdollista rakentaa samalla periaatteella kuin kaksiulotteisenkin Hilbertin käyrän.

Lähdeeteoksen [6] avulla voi perehtyä laajemmin moniin erilaisiin tilan täyttäviin käyriin, kuten esimerkiksi suorakulmaisen kolmion täyttäviin käyriin.

Kirjallisuutta

- [1] BILL CHEROWITZO: *History of Mathematics -kurssimateriaali*,
<http://www.math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/m4010/infin2.pdf> (1.1.2014).
- [2] A.P.M. KUPERS: *On Space-Filling Curves and the Hahn-Mazurkiewicz Theorem*,
<http://math.stanford.edu/~kupers/spacefillingcurves.pdf> (1.1.2014).
- [3] VEIKKO T. PURMONEN: *Euklidiset avaruudet*, Jyväskylän yliopisto, 2009.
- [4] VEIKKO T. PURMONEN: *Differentiaalilaskentaa 1*, Jyväskylän yliopisto, 2010.
- [5] NICHOLAS J. ROSE: *Hilbert-Type Space-Filling Curves*,
<http://www.dblab.ntua.gr/~gtsat/collection/SFCs/HilbertCurve.pdf> (1.1.2014).
- [6] HANS SAGAN: *Space-Filling Curves*. Springer-Verlag, 1994.