JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

TAPAUSTUTKIMUS FUNKTION KÄSITTEEN OPPIMISESTA TUTKIVAN MATEMATIIKAN KEINOIN

Matematiikan pro gradu -tutkielma
Jenna Hiltunen
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
2013

Tiivistelmä

Hiltunen Jenna. 2013. Tapaustutkimus funktion käsitteen oppimisesta tutkivan matematiikan keinoin. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Matematiikan pro gradu -työ. 77 s.

Tutkielmassa tarkastellaan funktion käsitteen oppimista tutkivan oppimisen opetusmenelmällä. Tarkastelussa keskitytään erityisesti oppilaiden käyttämiin representaatioihin sekä erilaisiin ajattelu- ja ratkaisutyyleihin. Kohdejoukoksi valikoitui kolme tyttöä ja kaksi poikaa 7. luokalta, joille ei vielä oltu opetettu funktioita. Oppilaille pidettiin kaksi 45 minuutin tutkivan matematiikan tuntia, joiden aiheena olivat lineaariset ja epälineaariset funktiot. Tutkivassa oppimisessa korostuu oppilaslähtöisyys. Opettaja toimii taustalla pitäen huolen, että toiminta suppenee kohti tavoitteita. Tutkivan oppimisen tuntien pohjana käytetään usein ongelmalähtöisiä tehtäviä, joita pohditaan pienissä ryhmissä.

Videot oppitunneista analysoitiin soveltamalla Powellin ym. (2003) videoanalyysimenetelmää. Myös oppitunneilta kerättyä kirjallista materiaalia käytettiin analyysin tukena. Oppilaat muodostivat tyttöjen ja poikien ryhmän. Ryhmien työskentely oli hyvin eritasoista. Poikien ryhmä oli melko itsenäinen ja eteni nopeammin kuin tyttöjen ryhmä, joka tarvitsi enemmän opettajan tukea päätelmilleen. Ryhmien eritasoisuus saattoi johtua ainakin osittain tyttöjen heikosta itseluottamuksesta, joka peilautui heidän ongelmanratkaisutaitoihinsa.

Oppilaiden ajattelutyyleissä löytyi merkittäviä eroavaisuuksia. Oppilaat hahmottivat annetut kuviojonot eri tavoilla. Ajattelutyylillä todennäköisesti oli myös merkitystä tehtävän vaikeustasoon. Ryhmien sisällä ilmeni myös erilaisia ajattelutyylejä, mistä seurasi paljon keskustelua. Vaikeuksia tuotti, varsinkin tyttöjen ryhmässä, tuoda idea tarpeeksi selkeästi esille niin, että muutkin ryhmäläiset ymmärtäisivät sen. Oppilaiden käyttämät representaatiot osoittautuivat myös molemmissa ryhmissä erilaisiksi. Molemmilla ryhmillä kirjallisia reprentaatioita ilmeni hyvin vähän. Kirjallinen tuottaminen koettiin hankalaksi. Merkittävä ero kirjallisessa työskentelyssä ilmeni siten, että tytöt käyttivät heti alusta alkaen tuntemattoman merkitsemisessä x-kirjainta, kun taas pojat kirjoittivat matemaattiseen lausekkeeseen tarkoittamansa muuttujan sanallisesti.

Oppilaat vaikuttivat kiinnostuneilta ja motivoituivat pohtimaan heille annettuja ongelmia. Oppilaat pystyivät käyttämään hyväksi aiemmin oppimiaan asioita tuottaakseen uutta tietoa ongelmanratkaisun kautta. Myös taito perustella todennäköisesti kehittyy tutkivan oppimisen menetelmällä.

Asiasanat: funktio, funktion käsite, matemaattinen ajattelu, matematiikan opetus, matematiikan oppiminen, tutkiva matematiikka

Sisältö

1 Johdanto

Korkeampien ajattelutaitojen ja ymmärtämisen kehittyminen vaativat oppimisympäristöä, jossa on sijaa luovalle ajattelulle rutiiniopetuksen sijaan. Keranto (2004) on omassa tutkimuksessaan huomannut, että oppilailla on liian harvoin tilaisuus keskustella ja väitellä tehtävien ratkaisuvaihtoehdoista ja perusteluista. Kerannon mukaan keskustelua ja argumentointia tulisi painottaa enemmän opetuksen ja oppimisen menetelmänä. Yleinen mielikuva matematiikasta on, että siinä tarvitaan vain logiikkaa, ei niinkään luovuutta. Tämä kuitenkin on hyvin harhaanjohtava mielikuva, sillä matemaatikot joutuvat käyttämään työssään paljon luovuutta. Luovan toiminnan avulla esimerkiksi matematiikan tutkija saattaa päästä käsiksi uuteen hypoteesiin, joka sitten yritetään todistaa oikeaksi.

Ilman luovaa toimintaa ja ajattelua matematiikan tutkimus tuskin olisi päässyt tasolle, jolla se nyt on. Kerannon (2004) mukaan nykyisten oppikirjojen avulla välitetään helposti virheellinen käsitys matematiikasta, joka etenee kuin juna raiteillaan ilman virhepäätelmiä ja umpikujia. Luovuuden tarvetta koulumatematiikan tehtäviin voidaan tuoda ongelmaratkaisutehtävillä.

Suomen menestyminen kansainvälisissä koulusaavutustutkimuksissa, kuten IEA:n TIMSS-tutkimuksessa (Trends in International Mathematics and Science Study) ja OECD:n PISA-tutkimuksessa (Programme for International Student Assessment), on ollut yleisesti hyvää, mutta nämä tutkimukset eivät kuitenkaan kerro koko totuutta esimerkiksi koululaisten matematiikan taidoista. Oppilaiden laskurutiinit saattavat olla hallussa, mutta matematiikan ymmärtäminen on puutteellista. TIMSS 2011 -tutkimuksen ensitulosten mukaan suomalaiset 8.-luokkalaiset ovat osanneet heikosti algebrallista päättelyä vaativia tehtäviä. Erityisesti tehtävät, joissa on täytynyt kirjoittaa lukujonon tai kuviojonon pohjalta jonon sääntö tai n:s termi, ovat tuottaneet oppilaille suuria vaikeuksia. (P. Kupari henkilökohtainen tiedonanto 7.8.2013)

Koulukasvatuksen tavoitteena ei ole opettaa ulkoa vain erinäisiä temppuja ja menetelmiä, joilla selviydytään tietyistä asioista, vaan yleisesti kehittää oppilaista monipuolisesti osaavia, itsenäisiä, kriittisesti ajattelevia ja omaaloitteisia kansalaisia. Näillä taidoilla he selviytyvät monenlaisista tilanteista myös myöhemmin elämässään. Millainen opetus sitten edesauttaisi tällaista kehitystä? Tutkiva oppiminen antanee joitakin ideoita näihin vaatimuksiin vastaamiseksi.

Tämän tutkimuksen tavoitteena on selvittää funktion käsitteen oppimista tutkivan matematiikan keinoin. Oppilaat kehittävät itse oman matemaattisen kielen ja merkinnät, jotka helpottavat heidän matemaattisten ideoiden esittämistä. Päämääränä on, että oppilaille kehittyisi tarkoituksenmukaista ja kestävää tietoa. Suomalainen matematiikan tunti noudattaa usein samaa kaavaa, jossa tunnin alkupuolella käydään opettajajohtoisesti läpi uusi teoria ja opettaja esittää muutaman siihen liittyvän esimerkin. Tämän jälkeen oppilaat ryhtyvät laskemaan annettujen esimerkkien kaltaisia tehtäviä itsenäisesti.

Tutkivassa matematiikassa korostuu oppilaslähtöisyys ja vuorovaikutteiset oppimismenetelmät, joissa oppilaat itse tutkivat matematiikan ilmiöitä heille annettujen tehtävien avulla (Goos 2004). Tehtävät ovat sellaisia, joihin heille ei ole annettu valmiita ratkaisumenetelmiä tai kaavoja, vaan oppilaita pyritään ohjaamaan siten, että he voisivat oivaltaa itse uuden asian. Tutkivassa oppimisessa huomioidaan eritasoiset oppilaat siten, että jokainen pystyy kehittelemään ideoita omalla tasollaan.

2 Tutkimuksen teoreettiset lähtökohdat

2.1 Tutkiva oppiminen

Useat tutkijat, niin suomalaiset kuin kansainvälisetkin, ovat kehitelleet erilaisia oppilaskeskeisiä opetusmetodeja parantaakseen oppimistuloksia. Niinpä samantapaisille opetusmenetelmille on kehittynyt useita erilaisia nimityksiä. Tutkivan oppimisen lisäksi tämän kaltaisista opetusmenetelmistä käytetään nimityksiä tutkiva matematiikka, avoin lähestymistapa, ongelmakeskeinen oppiminen, reformihenkinen opetus, elämyksellinen matematiikan opetus ja kognitiivisesti ohjattu oppiminen. Tässä työssä tullaan käyttämään enimmäkseen nimityksiä tutkiva oppiminen ja tutkiva matematiikka. (Ks. Hähkiöniemi 2011.)

Sinänsä ongelmalähtöinen opetus ei ole mikään uusi keksintö. Ongelmanratkaisua on harjoitettu kouluissa kuin myös vapaa-ajalla vuosikymmeniä. Koulukirjoissa ongelmanratkaisu on mielletty soveltamiseksi ja koulukirjojen ongelmanratkaisutehtävät ovat olleet lähinnä sanallisia arkipäivän sovellustehtäviä. Vapaa-ajalla, ja joskus koulussakin, on ratkottu pulmatehtäviä, mutta niissä pääpaino on enemmän ongelman ratkaisemisessa, ei niinkään ratkaisuun tarvittavassa matematiikassa. Tehtävistä oppii lähinnä ongelmanratkaisutaitoa, ei varsinaisesti matematiikkaa ongelmanratkaisun kautta. (Hassinen 2006.)

Vaikka matematiikan kieli pohjautuu sääntöihin, jotka täytyy oppia, on motivaation kannalta tärkeää, että oppilaat näkevät myös sääntöjen taakse, jotta he pystyvät ilmaisemaan itseään matematiikan kielellä (Schoenfeld 1992). Schoenfeldin (1992) mukaan oppilaiden pitäisi rakentaa matemaattinen tietämys etsimällä ratkaisuja, tutkimalla kaavoja ja muodostamalla oletuksia, eikä vain muistelemalla laskuproseduureja, opettelemalla ulkoa kaavoja tai tekemällä harjoitustehtäviä. Aiemmat tutkimukset ovat tuottaneet positiivisia tuloksia oppilaan oppimisen kannalta. Tutkimuksissa tutkivan oppimisen on osoitettu tehostavan oppimista ja kehittävän oppilaiden matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen taitoja (Fennema ym. 1996; Hähkiöniemi 2006a ja 2006b; Wood & Sellers 1997). Lisäksi tutkivan oppimisen on todettu kehittävän luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja (Silver 1997). Franciscon ja Maherin (2005) mukaan tutkivan oppimisen keinoin opitut tiedot ovat pysyviä ja sovellettavissa uusiin tilanteisiin.

Perinteinen suomalainen matematiikan tunnin rakenne noudattaa usein hyvin samaa kaavaa. Tunnin alussa tarkistetaan kotitehtävät, jonka jälkeen uusi asia käydään läpi opettajajohtoisesti, ja tunnin lopussa oppilaat tekevät harjoitustehtäviä uuteen aiheeseen liittyen opettajan antamia esimerkkejä mukaellen (Savola 2008). Tutkivan matematiikan tunti sen sijaan koostuu alustus-, tutkimus- ja koontivaiheesta (Stein ym. 2008).

Hähkiöniemen (2011) mukaan alustusvaiheessa opettaja esittelee ja alustaa tutkittavan ongelman, mutta ei anna tehtävien esimerkkejä tai ratkaisumenetelmiä. Samalla opettaja huolehtii, että oppilaat ymmärtävät tehtävänannon ja motivoituvat ratkaisemaan ongelman. Lisäksi oppilaiden kanssa voidaan kerrata aikaisemmin opittuja asioita, jotka olisi hyvä muistaa ongelmien ratkaisemiseksi. Asiat kerrataan kuitenkin niin, että tehtävät eivät muutu mekaaniseksi laskemiseksi. Jos tutkivan matematiikan oppimismuoto on oppilaille uusi, voidaan tunnilla keskustella myös työtavoista, ryhmätyöskentelystä tai käytettävissä olevista apuvälineistä. Oppilaita rohkaistaan keskustelemaan tehtävistä ja tehdään selväksi, että kaikki ideat ovat tervetulleita. Tehtävien perustelun tärkeyttä on myös hyvä korostaa oppilaille. (Hähkiöniemi 2011.)

Tutkimusvaiheessa oppilaat tekevät tehtäviä pareittain tai kolmen hengen ryhmissä. Opettaja kiertelee luokassa ohjaamassa oppilaita kysellen samalla perusteluita tai päättelyitä ratkaisuille. Erityisesti opettajan ei pidä vastata oppilaan tiedusteluihin tehtävän oikeasta vastauksesta, vaan ohjata oppilas itse perustelemaan tehtävän oikeellisuus. Tärkeää on siis pyytää perusteluja sekä virheellisille että täydellisille ratkaisuille. (Hähkiöniemi 2011) Opettajan kyselytaito karttuu kokemuksen myötä, mutta kun sen oppii, on opettajalla tehokas työkalu oppilaiden matemaattisten ideoiden tuottamisen tukemiseen (Martino & Maher 1999).

Martinon ja Maherin (1991) mukaan oppilaat eivät luonnostaan perustele tai todista vastauksiaan (Martino & Maher 1999). Monet oppilaat uskovat pelkän vastauksen sellaisenaan riittävän perusteluksi. Martino ja Maher (1999) ovat myös huomanneet, että pareittain tai pienissä ryhmissä työskentelevät oppilaat eivät luonnostaan kyseenalaista toistensa perustelujen yksityiskohtia. Näistä syistä opettajan kyselijän rooli tulee erittäin ratkaisevaksi, kun oppilaat ovat kehittäneet omat ideansa niin pitkälle kuin ovat osanneet (Martino & Maher 1999).

Oikein ajoitetuilla ja oikeanlaisilla kysymyksillä opettaja voi arvioida oppilaan matemaattisia käsityksiä. Oppilaita voi rohkaista selittämään ratkaisunsa opettajalle. Tällöin opettajalla on mahdollisuus kiinnittää oppilaan huomio ratkaisun epäkohtiin, jos hän huomaa siinä jotain väärää tai keskeneräistä. Laajentaakseen oppilaan tietotasoa opettaja voi kysyä oppilaalta onko hän työskennellyt aikaisemmin samankaltaisen ongelman parissa.

Siten opettaja rohkaisee oppilasta yleistämään samankaltaisten ongelmien ratkaisutapoja, ja oppilas saattaa ratkaista ongelman käyttämällä hyväksi jo aikaisemmin keksimäänsä ratkaisua. (Martino & Maher 1999.)

Opettaja voi kannustaa oppilaita kehumalla hyvää työskentelyä ja päättelyä. Opettajan täytyy huolehtia, että oppilaiden työskentely suppenee kohti tavoitteita. Opettaja voi ohjata ryhmiä, jotka eivät näytä etenevän, tarkastelemaan olennaisia asioita, selventää heille mitä he ovat tekemässä, korostaa mitä havaintoja kannattaa lähteä tutkimaan tarkemmin tai auttaa laskuteknisissä vaikeuksissa. Keskustelua voi herättää ottamalla esiin toisen ryhmän tai oppilaan havaintoja tai pyytämällä vertaamaan esiin nousseita ideoita. (M. Hähkiöniemi henkilökohtainen tiedonanto 12.11.2011).

Opettajan on oltava aidosti kiinnostunut oppilaiden ajattelutavoista ja ideoista. Hähkiöniemen (2011) mukaan opettajan tulee kiinnittää huomiota siihen, ettei hän kehu oppilasta itseään esimerkiksi älykkyydestä, vaan kehuu hänen työskentelyään ja yrittämistään. Näin pyritään vahvistamaan oppilaan uskomusta oman työn merkityksestä matematiikan oppimisessa. Aiemmin heikosti matematiikan tunnilla menestynyt oppilas voi keksiä itse ongelmaan ratkaisun. Tällöin opettajan kannattaa kehua ja kannustaa oppilasta ja samalla oppilaan usko omaan osaamisen vahvistuu. Onnistuminen tutkivan matematiikan tunnilla voi muuttaa oppilaiden käsityksiä omasta matematiikan osaamisesta positiivisemmaksi.

Koontivaiheessa oppilaat saavat itse esittää koko luokalle omia ratkaisumenetelmiään, jonka jälkeen verrataan erilaisia ratkaisuja keskenään. Opettaja johtaa koko luokan yhteistä keskustelua. Lisäksi opettaja voi tehostaa koontia suunnittelemalla mitkä ryhmät ja missä järjestyksessä he saavat esittää omia ratkaisujaan (Stein ym. 2008). Vertailussa oppilaat voivat ottaa kantaa toistensa ratkaisuihin ja tehdä esimerkiksi korjausehdotuksia. Koontivaiheessa voidaan kirjoittaa opettajan johdolla muistiinpanoja, joissa otetaan käyttöön standardit merkinnät ja tiivistetään tunnin opetus. Koontia voidaan tehdä tarvittaessa jo tehtävien välissä, sopivasti tuntia rytmittämään. Koonnin tärkein päämäärä on selkeyttää oppilaille tunnin opetus ja muotoilla esimerkiksi jokin lopullinen teoreema. Koonti on erittäin oleellinen osa oppituntia, sillä ilman sitä oppitunnin sisältö saattaa jäädä oppilaille irralliseksi eikä opetettava asia nouse selkeästi esille, vaikka ongelmaan olisikin saatu jokin ratkaisu. (Hähkiöniemi 2011.)

2.2 Oppimisprosessi

Lähes jokaisella ihmisellä on jonkinlainen käsitys siitä mitä oppiminen on. Oppimista saatetaan kuvailla asioiden muistamisena niin, että tarvittaessa ne pystytään toistamaan, tietojen lisääntymisenä, tietojen soveltamisena ja asioiden ymmärtämisenä.

Oppimista voidaan kuvailla myös ajattelun muuttumisena ja että asiat nähdään uudella tavalla tai jopa siten, että muuttuu itse ihmisenä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus 2004) oppimisprosessia kuvataan seuraavasti:

> *Oppiminen on seurausta oppilaan aktiivisesta ja tavoitteellisesta toiminnasta, jossa hän aiempien tietorakenteidensa pohjalta käsittelee ja tulkitsee opittavaa ainesta. Vaikka oppimisen yleiset periaatteet ovat kaikilla samat, oppiminen riippuu oppijan aiemmin rakentuneesta tiedosta, motivaatiosta sekä oppimis- ja työskentelytavoista. Yksilöllistä oppimista tukee vastavuoroisessa yhteistyössä tapahtuva oppiminen. Oppiminen on kaikissa muodoissa aktiivinen ja päämääräsuuntautunut, itsenäistä tai yhteistä ongelmanratkaisua sisältävä prosessi. Oppiminen on tilannesidonnaista, joten oppimisympäristön monipuolisuuteen on kiinnitettävä erityistä huomiota. Opittaessa avautuu uusia mahdollisuuksia ymmärtää kulttuuria ja kulttuurin sisältämiä merkityksiä sekä osallistua yhteiskunnan toimintaan.* (Opetushallitus 2004.)

Konstruktivistinen tietoteoria, kognitiivinen psykologia sekä oppimisen kulttuuri- ja tilannesidonnaisuus ovat teoreettisia tarkastelutapoja, joista vallitsevat oppimisteoreettiset näkemykset koostuvat ja joihin Opetushallituksen laatima opetussuunnitelmakin perustuu.

Hassinen (2006) on esittänyt tiivistetysti Lehtisen ym. (2003) esittämät oppimisprosessia kuvaavat mallit. Kontruktivismissa korostetaan oppijan omaa aktiivista roolia ja kokemusmaailmaa. Opettaja toimii oppimisprosessin ohjaajana ja taustahenkilönä. Tiivistetysti sanottuna jokainen ihminen konstruoi tietämyksensä itseä ympäröivästä maailmasta. Kognitiivisen psykologian mukaan ihminen pyrkii jäsentämään yksittäiset tiedon palaset suuremmiksi kokonaisuuksiksi, skeemoiksi. Kun tietoa on paljon, kuten jonkin alan asiantuntijalla, muodostuu tiedoista hyvin järjestäytyneitä hierakkisia kokonaisuuksia, toisin kuin sellaisella, jolla alasta ei ole vielä paljoa tietoa. Tällöin yhteydet muodostuvat pinnallisempien ja satunnaisten ominaisuuksien ja ajatusten perusteella. Oppimisen kulttuurisidonnaisuus, situationaalisuus ja kontekstisidonnaisuus korostuvat niin kutsutussa sosiaalisessa konstruktivistisessa suuntauksessa. Kulttuurille tyypilliset toiminnat ja välineet, kuten kieli, määräävät suurelta osin miten opitaan ymmärtämään ympäristöä ja ratkaisemaan ongelmia. (Hassinen 2006, Lehtisen ym. 2003 mukaan.)

2.2.1 Opetussuunnitelman perusteet

Suomessa peruskoulun opetuksen sisältö perustuu opetushallituksen laatimaan perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin eli OPSiin. Yleisen käytännön mukaan kunnat suunnittelevat opetussuunnitelman perusteiden pohjalta oman kuntakohtaisen opetussuunnitelman ja kukin koulu laatii oman opetussuunnitelman kuntakohtaisen opetussuunnitelman pohjalta.

Opetussuunnitelman perusteiden mukaan työtavat on valittava siten, että ne muun muassa virittävät halun oppia, aktivoivat työskentelemään tavoitteellisesti ja kehittävät tiedon hankkimisen, soveltamisen sekä arvioimisen taitoja. Lisäksi työtavoilta vaaditaan oppilaiden keskinäisessä vuorovaikutuksessa tapahtuvan oppimisen tukemista, sosiaalisen joustavuuden ja rakentavan yhteistyökyvyn edistämistä. Työtapojen pitäisi myös edistää oppilaiden taitoa ottaa vastuuta omasta oppimisesta, sen arvioinnista ja hankkia palautetta oman toiminnan reflektointia varten. (Opetushallitus 2004.)

Opetussuunnitelman perusteiden mukaan peruskoulun matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuus matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisimmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen. Siihen kuuluu myös oppilaan luovan ja täsmällisen ajattelun kehitys. Opetuksen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan ongelmia sekä etsimään ratkaisuja niihin. Laajasti nähtynä matematiikka vaikuttaa oppilaan henkiseen kasvamiseen ja edistää oppilaan tavoitteellista toimintaa ja sosiaalista vuorovaikutusta. (Opetushallitus 2004.)

Vuosiluokkien 6-9 matematiikan oppimisen tavoitteisiin kuuluu loogisen ja luovan ajattelun oppiminen, laskutaidon ja matemaattisten ongelmien ratkaisemisen oppiminen, erilaisten tiedonhankinta- ja tiedonkäsittelymenetelmien soveltamisen oppiminen. Lisäksi oppilaiden pitäisi oppia ilmaisemaan ajatuksensa yksiselitteisesti, perustelemaan toimintaansa ja päätelmiään, esittämään kysymyksiä ja päätelmiä havaintojen perusteella sekä näkemään säännönmukaisuuksia. Funktioista oppilaan pitää muun muassa osata määrittää pisteen koordinaatit koordinaatistosta, laatia taulukko lukupareista annetun säännön mukaan, etsiä lineaarisen funktion nollakohta sekä jatkaa lukujonoa annetun säännön mukaan. Lisäksi oppilaan on osattava kertoa sanallisesti annetun lukujonon muodostumisen yleinen sääntö. (Opetushallitus 2004.)

Kyseessä oleva pro gradu -tutkimus suoritettiin Jyväskylän Normaalikoululla, jonka koulukohtaisessa opetussuunnitelmassa funktioiden opetus alkaa 8. vuosiluokalla. 6. luokalla on opittu muuttujan arvon sijoittamista yhtälöön, mutta funktioihin suoranaisesti liittyvät riippuvuuden havaitseminen ja sen esittäminen, lukuparin esittäminen koordinaatistossa sekä suoraan ja kääntäen verrannollisuus opiskellaan vasta 8. luokalla. Funktion käsite, yksinkertaisten funktioiden tulkitseminen ja niiden kuvaajien piirtäminen, lineaarinen funktio sekä funktion nollakohdan, suurimman ja pienimmän arvon, kasvamisen ja vähenemisen tutkiminen funktion kuvaajasta kuuluvat vasta 9. vuosiluokan opetussuunnitelmaan.

2.2.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Matemaattinen tieto voidaan erään käsityksen mukaan jakaa kahteen osaan, proseduraaliseen eli menettelytapatietoon (*procedural knowledge*) ja konseptuaaliseen eli käsitteelliseen tietoon (*conceptual knowledge*). Proseduraalinen tieto on tietoa tekemisestä, josta käytetään myös nimeä tietotaito. Matemaattinen proseduraalinen tieto koostuu kahdesta osasta: taidosta käyttää matematiikan eri symboleja oikeassa muodossa, vaikka ei ymmärtäisikään niiden merkitystä sekä erilaisista säännöistä, algoritmeista ja matemaattisen ongelman ratkaisuproseduureista. (Haapasalo 2004, 50–52.)

Proseduureissa on voitu käyttää kirjoitettuja symboleja tai ei-symbolisia objekteja. Laskuproseduureja on mahdollista opetella vaihe vaiheelta ulkoa ja kirjoittaa symboleja ymmärtämättä kuitenkaan niiden merkitystä. (Hiebert & Lefevre 1986.) Proseduraalinen tieto pitää siis sisällään matemaattiset keinot, joiden avulla voidaan ratkaista matemaattisia ongelmia ja laskutoimituksia.

Hiebert ja Lefevre (1986) kuvaavat matemaattista konseptuaalista tietoa tietoverkkona ja kytkentöinä tietoyksiköiden välillä. Konseptuaalisen tiedon palasta ei voida eristää, koska silloin se ei enää olisi konseptuaalista tietoa. Määritelmän mukaan tieto on konseptuaalista vain, jos sen halussapitäjä tiedostaa sen yhteydet muihin tiedonpalasiin. Konseptuaalinen tieto koostuu siis periaatteiden ja käsitteiden ymmärtämisestä, taidosta soveltaa niitä eri asiayhteyksissä sekä näiden toisiinsa suhtautumisen ymmärtämisestä. Konseptuaalista tietoa ei voi opetella ulkoa, vaan se kehittyy omien ratkaisu- ja ajatteluprosessien myötä.

Haapasalo (2004) sen sijaan määrittelee konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon seuraavasti:

> Konseptuaalinen tieto . . . on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet ja logiikan. Solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä tai niiden attribuutteja, proseduureja, toimintoja, näkökulmia tai jopa ongelmia.
>
> Proseduraalinen tieto . . . tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien (toimintakaavojen) suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut.

Proseduraalisen tiedon ydin on siinä, ettei sitä tarvitse ymmärtää, vaan merkintöjä ja symboleja voi opetella kirjoittamaan annetun mallin mukaan. Proseduureja on mahdollista opetella ulkoa. Hiebertin ja Lefevren (1986, 21-22) mukaan suurin osa oppilaiden tekemistä virheistä johtuu pienoisista, mutta oleellisen haitallisista, vääristymistä laskusäännöissä.

Oppilaat voivat saavuttaa oikeita tuloksia ja saavuttaa konseptuaalisen ymmärtämisen tason, huolimatta proseduraalisten laskusääntöjen vajavaisuudesta. Mutta jos proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon väliltä puuttuu yhteys, saattavat proseduurit heikentyä nopeasti eivätkä ne ole uudelleen konstruoitavissa. Ne voidaan muistaa osittain tai kytkeä muihin proseduureihin sopimattomalla tavalla tai ne ovat kontekstisidonnaisia eikä niitä ole tällöin ole helppo käyttää uusissa tilanteissa.

Hiebertin ja Lefevren (1986, 8) oletuksen mukaan proseduurit, joilla on merkitystä käyttäjälle ovat proseduureja, jotka ovat kytköksissä konseptuaaliseen tietoon. Konseptuaaliseen tietoon kytketyt proseduurit varastoituvat osaksi tietoverkkoa, joka ei heikkene yhtä helposti kuin eristäytynyt tiedon pala ja tieto on todennäköisemmin palautettavissa. Kytkentä auttaa myös merkityksen kehittämisessä symboleille esimerkiksi seuraavanlaisissa sanallisissa tehtävissä: ”Liisalla on kaksi rahaa. Mummo antaa Liisalle kolme rahaa lisää. Kuinka monta rahaa Liisalla on kaikenkaikkiaan?”. Symboli ”+” saa merkityksen, jos se kytkeytyy tehtävän ajatukseen lisäämisestä (Hiebert & Lefevre 1986, 10–14).

Hiebert ja Lefevre (1986, 14-16) väittävät konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon kytkeytymisestä toisiinsa olevan hyötyä myös konseptuaaliselle tiedolle. Symbolit vahvistavat käsitteitä, auttavat konseptuaalisen tiedon järjestelyssä ja käytössä. Symbolijärjestelmä voi jopa tuottaa konseptuaalista tietoa. Proseduurit hyödyntävät käsitteitä ongelmien ratkaisussa ja voivat tehdä konseptuaalisen tiedon käytön helpommaksi, koska hyvin rutinoituneet proseduurit voivat vähentää ongelman ratkaisussa tarvittavia ponnisteluja, jolloin monimutkaisenkin tehtävän ratkaiseminen voi olla mahdollista. Lisäksi proseduurit voivat tukea käsitteiden kehittymistä.

Kaikkea tietoa ei kuitenkaan voi jaotella joko konseptuaaliseksi tai proseduraaliseksi tiedoksi. Osa tiedosta, kuten ongelmanratkaisun heuristiset strategiat, on niiden välimaastossa. Ajatellaan esimerkiksi tilannetta, jossa oppilas miettii yhteenlaskuongelmaa $5 + 6 = \square$. Hän saattaa tietää, että $5+5 = 10$, jonka hän voi yhdistää tietoon numeroiden suhteista (6 on yhden suurempi kuin 5). Tällaisessa tilanteessa ei ole selvää mihin konseptuaalinen tieto loppuu ja mistä proseduraalinen tieto alkaa. (Hiebert & Lefevre 1986, 8–9.)

2.3 Funktion käsitteen opetus

2.3.1 Funktion käsite

Tero Kilpeläisen Jyväskylän yliopiston Analyysi 1 -kurssin luentomonisteessa funktio määritellään seuraavasti:

Olkoon A,$B \subset \mathbb{R}$. *Funktio* eli *kuvaus* $f : A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen pisteeseen $x \in A$ (joukon A alkioon) tasan yhden pisteen $y \in B$ (joukon B alkion). Tätä alkiota $y \in B$ kutsutaan alkion $x \in A$ *kuvaksi* (*kuvapisteeksi*) ja sitä merkitään $y =: f(x)$. Joukko A on f:n *määrittely- eli lähtöjoukko* ja joukko B sen *maalijoukko*. A:n *kuvajoukko* (funktiossa f) on

$$f(A) = \{y \in B : y = f(x) \text{ jollakin } x \in A\}$$

Määritelmä on hyvin abstrakti ja sisältää esimerkiksi funktiot, joita ei voida ilmaista algebrallisella lausekkeella, kuten vaikka funktiota, jossa ihmisten sosiaaliturvatunnus kuvataan heidän osoitteensa postinumeroksi (olettaen, että jokaisella ihmisellä on vain yksi osoite). Yleensä oppilaille esitetään hieman kapeakatseisempi ja heille sopivampi funktion määritelmä.

Yläkoululaisille esitetty funktion määritelmä käsittää lähinnä säännön vastaavuuksista eli säännön, joka liittää yksittäiset joukon B arvot jokaiseen joukon A alkioon. Pääasiassa yläkoulussa käsitellään tapauksia, joita voidaan kuvata algebrallisesti, jatkossa puhutaan kaavapohjaisista (formula-based) funktioista. Kaavapohjaisten funktioiden ei tarvitse olla jatkuvia. (Carraher ym. 2008.) Esimerkiksi tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävät 1 ja 2 pohjautuvat kuviojonoihin ja jonojen muodostuminen perustuu diskreetisti määritettyihin funktioihin. Kuviojonojen laattojen lukumäärät voivat lisääntyä vain kokonaislukumäärin.

Kaavapohjaiset funktiot ovat funktioiden erityinen osajoukko. Kaava tai algebrallinen ilmaisu on keino määritellä funktion arvo millä tahansa lähtöjoukon muuttujan arvolla. Sääntö vastaavuuksista voidaan esittää monella eri tavalla, kuten puhekielellä, algebrallisella merkinnällä, kuvaajalla, taulukolla tai näiden yhdistelmänä. Sääntö muodostaa lähtöjoukon ja maalijoukon suhteelle tarvittavan yleistyksen. (Carraher ym. 2008.)

Koulualgebraa käsitellään aluksi yleensä ilman funktion käsitettä. Yleisin tuntemattoman merkkinä käytetty x tulee tutuksi yhtälöiden ratkaisussa, jossa x merkitsee yhtä tuntematonta lukua. Funktion käsitteeseen päästään laajentamalla käsitystä tuntemattomasta luvusta x muuttujaksi x, jolloin x voi saada useita eri arvoja. Samalla laajennetaan ajatusta yksittäisillä numeroilla tehdyistä operaatioista muuttujien välisiin relaatioihin. Luvusta 2.3.2 löytyy esimerkkejä siitä, millaisia funktion määritelmiä oppikirjoista löytyy ja hieman havaintoja siitä millä tavalla niissä käsitellään funktion käsitettä.

2.3.2 Funktion käsitteen opetus oppikirjoissa

Tämän luvun tarkoituksena on tarkastella hieman kuinka funktiota käsitellään suomalaisissa yläkoulun oppikirjoissa. Usein matematiikan tunnit pohjautuvat vahvasti oppikirjojen sisältöihin, joten tarkastelulla halutaan tuoda esille millä tavalla oppikirjat johdattelevat funktion käsitteeseen tai tuovat funktion käsitteen esille. Luvun tavoitteena on antaa hieman vertailupohjaa tutkivalle matematiikalle ja niin sanotulle perinteiselle matematiikan opettamiselle. Tarkastelun kohteeksi valittiin neljän eri kirjasarjan funktiota käsittelevät kirjat kolmelta eri kustannusyhtiöltä. Kolmesta kirjasarjasta tarkasteltavana oli kirjojen opettajille tarkoitetut materiaalit, jotka sisälsivät oppilaiden kirjaversioiden lisäksi myös opetusvihjeitä opettajille.

Yleisesti funktion opetus on sijoitettu kirjasarjojen yhdeksännelle vuosiluokalle tarkoitettuihin kirjoihin. Kaikki kirjat aloittavat funktiokäsitteen käsittelyllä ja siirtyvät tästä funktion kuvaajan piirtämiseen tai suoran piirtämiseen, jos funktion kuvaajia on käsitelty jo funktion käsitteen yhteydessä.

Pii 9 -kirjassa (Heinonen ym. 2009) esitellään alussa funktiokone. Kone käsittelee siihen syötettyä lukua (muuttujan arvoa) tietyn säännön mukaisesti ja antaa tulokseksi syötetystä luvusta riippuvan arvon (funktion arvon). Funktiokonetta perustellaan opettajan oppaassa sillä, että siitä on luontevaa siirtyä matemaattisempaan käsittelyyn ja eri luvuille annetaan niiden matemaattiset nimitykset. Tästä siirrytään funktiolausekkeen päättelemiseen etsimällä jokin sääntö.

Esimerkkitehtävässä on nuolikaavioita, joissa on kaksi lukuja sisältävää soikiota. Toisessa soikioista on muuttujan arvoja x ja toisessa funktion arvoja $f(x)$. Lukuja on yhdistelty toisiinsa nuolilla ja tehtävänä on kirjoittaa sanallinen sääntö siitä miten funktion $f(x)$ arvo saadaan muuttujan arvosta x. Toinen esimerkkitehtävistä sisältää taulukoita, joissa on luetteloitu lukuja x ja funktion arvoja $f(x)$ ja näistä pitäisi päätellä mikä on funktion määrittelevä lauseke. Oppilaiden harjoitukset sisältävät samankaltaisten tehtävien lisäksi muun muassa suoraviivaista funktion arvon laskemista annetuilla muuttujan arvoilla.

Kuutio 9 -kirjassa (Latva ym. 2010) määritellään aluksi funktio seuraavasti: *Funktio kuvaa kahden suureen välistä riippuvuutta. Suuretta, joka* ***riippuu*** *toisesta suureesta* ***säännönmukaisesti*** *sanotaan tämän jälkimmäisen suureen funktioksi.* Ensimmäiset harjoitustehtävät ovat riippuvuuden havaitsemista arkipäivään liittyvistä kuvista ja tilanteista. Oppilaat voivat harjoitella kirjoittamaan lauseita esimerkiksi täydentämällä puuttuvia sanoja, kuten "Jään sulamisnopeus riippuu <u>lämpötilasta</u>, joten sulamisnopeus on <u>lämpötilan</u> funktio.", missä alleviivatut sanat oppilaan pitää keksiä.

Varsinaisia matemaattisia lausekkeita ei tarvitse kirjoittaa. Tällaisella tehtävällä on haluttu tuoda matemaattisen kielen käyttö oppilaille arkisten asioiden kautta tutuksi. Tämän jälkeen otetaan käyttöön funktion matemaattiset merkinnät ja matemaattisia lausekkeita havainnollistetaan samantapaisella funktiokoneella kuin Pii-kirjassa. Harjoitustehtävissä oppilaiden pitää keksiä, minkä säännön mukaan funktiokone on muuntanut lukuja toiseksi. Tästä siirrytään funktion arvoon, joka käsitellään omana lukunaan. Tämä kappale käsittelee funktion arvon laskemista annetulla muuttujan arvolla sekä funktion kuvaajan tulkintaa.

Laskutaito 9, Opettajan oppaassa (Lindroos-Heinänen ym. 2009) ehdotetaan kertaamaan aluksi algebran laskusääntöjä päässälaskuilla, joita löytyy opettajan oppaasta tai harjoitusmonisteesta, joka sisältää muun muassa lausekkeen arvon ja verrannon laskemista sekä koordinaatiston pisteiden lukuharjoituksen. Oppilaiden versiossa funktion käsite aloitetaan myös funktiokoneella. Funktiokoneisiin on liitetty taulukko, jossa on luetteloituna syötteet ja tulosteet, joita merkitään myös x:llä ja $f(x)$:llä osassa tehtävistä.

Taulukoiden avulla tulisi päätellä sääntö, jonka mukaan kone on muuntanut lukuja. Laskutaito 9 määrittelee funktion seuraavasti: ***Funktio*** *f on sääntö, jonka mukaan jokaista muuttujan x arvoa vastaa täsmälleen yksi funktion arvo $f(x)$. Funktio määritellään usein antamalla* ***funktion lauseke*** *$f(x)$, esimerkiksi $f(x) = 10x + 1$, jonka avulla funktion arvot voidaan laskea.* Opettajan oppaassa määritelmää ehdotetaan havainnollistettavaksi nuolikaaviolla. Laskutaito 9 eroaa kolmesta muusta tarkastellusta kirjasta siinä suhteessa, että siinä esitetään heti alussa tehtäviä, joissa oppilaan on muodostettava sanallisen tehtävänannon perusteella funktio jostakin konkreettisesta tilanteesta. Esimerkiksi:

Talousveden hinta on 3 €/m^3. Vesilaskun suuruus (€) riippuu vain vedenkulutuksesta x (m^3).
a) Kuinka suuri on vesilasku, kun vettä on kulutettu 70 m^3?
b) Muodosta vesilaskun suuruutta kuvaavan funktion lauseke $f(x)$.

Kartio 4 -kirjassa (Järvinen ym. 2005) funktio määritellään seuraavalla tavalla: *Suuretta, joka riippuu toisesta suureesta säännönmukaisesti, sanotaan tämän jälkimmäisen suureen funktioksi.* Myös merkintä $y = f(x)$, missä y on x:n funktio, x muuttuja ja y funktion arvo, esitellään heti alussa. Myös Kartio-sarja käyttää funktiokonetta funktion käsitteen esittelyssä, mutta harjoitustehtävissä on muista kirjoista poiketen paljon tehtäviä, joissa oppilaan on mietittävä sääntöä, jolla kuviojono etenee.

Kaikissa näissä tehtävissä on pyydetty ensin laskemaan kuviojonon 5., 6., 10. tai 100. kuvion pyydetyn ominaisuuden lukumäärää ja lopulta n. kuvion pyydetyn ominaisuuden lukumäärää. Tehtävät ovat samantyylisiä kuin tässä tutkimuksessa käytetyt tehtävät, mutta annettu järjestysluku n ohjaa oppilaiden merkintätapoja. Näiden tehtävien lisäksi kirjassa on myös samanlaisia taulukoita, joiden sääntö pitää keksiä ja funktiokonetehtäviä, kuten muissakin kirjoissa.

2.4 Matemaattisten käsitteiden muodostuminen ja niiden duaaliluonne

Matemaattisia käsitteitä voidaan ymmärtää sekä prosesseina että objekteina (Sfard 1991). Hähkiöniemen (2006b) tästä antamaa esimerkkiä mukaellen, esimerkiksi $4+3$ voidaan ajatella kahden luvun yhteenlaskuna eli luvut neljä ja kolme lasketaan yhteen, jolloin sitä ajatellaan prosessina. Toisaalta $4 + 3$ voidaan ajatella summana ilman, että ajatukseen liittyy tarvetta laskea lukuja yhteen eli $4+3$ on yksi objekti. Objektin käsite on paljon järkevämpi, jos esimerkiksi summassa olisi tuntematon muuttuja, kuten $x + 5$.

Tuntemattoman luvun ja luvun viisi yhteenlaskua on järjetöntä ajatella eikä sitä voi laskea. Kun $x + 5$ ajatellaan objektina, sille voidaan suorittaa vielä muita laskutoimituksia, kuten kertoa sitä jollakin luvulla. Sfardin (1991) mukaan oppilaat oppivatkin useimmiten luvun käsitteen laskemisen kautta ja vasta myöhemmin objektina pohjautuen laskuprosessiin.

Yleensä matemaattiset käsitteet ovat aistiemme ulottumattomissa. Täytyy muistaa, että esimerkiksi, kun piirrämme funktion kuvaajan, on se vain representaatio jostakin abstraktista oliosta, jota itsessään ei voi nähdä tai koskea. Funktiot voidaan määrittää myös järjestäytyneeksi lukuparijoukoksi, jolloin sen voidaan ajatella olevan rakenteellinen ajattelutapa. Operationaalinen ajattelutapa funktiosta voi olla ajatus laskennallisesta prosessista tai hyvin määritellystä metodista päästä systeemistä toiseen. Matemaattisen olion käsittäminen objektina tarkoittaa kykyä käsitellä sitä kuin se olisi jokin konkreettinen asia, jolloin sitä pystyy käsittelemään kokonaisuutena menemättä yksityiskohtiin.

Käsitteen ymmärtäminen prosessina taas vihjaa mahdollisuuteen ennemmin kuin konkreettiseen olioon, mikä tulee esille sarjana toimintoja. Sfard (1991) huomauttaa, että on käytännössä kuitenkin mahdotonta muotoilla tarkat määritelmät rakenteelliselle ja operaationaaliselle ajattelulle. Ne eivät ole myöskään toisiaan poissulkevia eikä niitä voida täysin erottaa toisistaan. Sfardin (1991) mukaan ne voidaan nähdä ennemminkin saman kolikon eri puolina. Esimerkiksi funktion näkeminen sekä prosessina että objektina on välttämätöntä matematiikan kokonaisvaltaisen ja syvän ymmärtämisen kannalta.

Sfard (1991) antaa artikkelissaan melko selvän ohjenuoran opetukseen: operationaaliset käsitteet ennen rakenteellisia käsitteitä. Hän esittää käsitteen muodostamiselle hierakkisen kolmivaiheisen mallin, johon kuuluu *sisäistäminen* (interiorization), *tiivistyminen* (condensation) ja *konkretisoituminen* (reification). Siirtymistä tasolta toiselle ei voi tapahtua ennen kuin aiempi taso on saavutettu.

> Ensimmäisessä vaiheessa oppija sisäistää jo olemassa olevaan objektiin liittyvän prosessin. Oppija pystyy suorittamaan prosessin taitavasti ja ajattelemaan prosessia kuitenkaan sitä toteuttamatta. Prosessin voidaan sanoa olevan sisäistetty, kun sen pystyy suorittamaan representaatioiden kautta.
>
> Toisessa vaiheessa pitkä sarja operaatioita tiivistetään helpommin käsiteltäviksi yksiköiksi. Oppija pystyy yhä paremmin ajattelemaan prosessia kokonaisuutena ilman tarvetta mennä yksityiskohtiin. Prosessi voidaan mieltää ennemmin sisäänmeno-ulostulo-relaatioksi (input-output relation) kuin operaatioksi. Esimerkiksi funktioiden tapauksessa mitä paremmin oppija pystyy käsittelemään kuvauksia kokonaisuutena ilman tarvetta tutkia yksittäistapauksia, sitä pidemmälle hänen tiivistymisprosessinsa on edennyt. Lopulta oppija pystyy tutkimaan funktioita, piirtämään niiden kuvaajia, yhdistämään funktiopareja ja jopa löytämään käänteisfunktion.

Kolmannessa vaiheessa matemaattinen olio konkretisoituu. Tällöin käsite ymmärretään objektina joka on irtautunut sen tuottaneesta prosessista. Objekti saa itsenäisen merkityksen kuulumalla tiettyyn kategoriaan eikä viittausta alkuperäiseen prosessiin tarvita. Tässä vaiheessa uuteen objektiin voidaan kohdistaa erilaisia prosesseja, jolloin sykli alkaa alusta. Todiste tapahtuneesta konkretisoinnista funktioiden tapauksessa voisi olla sellaisten yhtälöiden ratkaiseminen, joiden tuntematon muuttuja on funktio (esim. differentiaali- ja funktionaaliyhtälöt), kyky keskustella erilaisista funktioilla suoritettavien prosessien ominaisuuksista (yhdistetyt funktiot ja käänteisfunktiot) sekä huomio siitä, että järjestäytyneen lukuparijoukon, joka voidaan ajatella funktioksi, ei tarvitse olla laskennallinen.

Sfard (1991) kuitenkin huomauttaa, ettei käsitteiden oppiminen aina noudata tätä kehitystä. Oppilas saattaa luoda käsitteen ikään kuin tyhjästä alkaen manipuloida käsitettä tiettyjen sääntöjen mukaan niin kuin se olisi objekti, mutta kyseisellä objektilla ei kuitenkaan ole yhteyttä operationaaliseen rakenteeseen. Käsitteen representaatio on olemassa ilman mitään tarkoitusta. Tästä Sfard (1991) käyttää nimitystä kvasi-rakenteellinen käsitteenmuodostus (quasi-structural conception).

2.5 Representaatiot

Representaatioille löytyy useita hieman toisistaan poikkeavia määrittelyjä ja jaotteluja. Matematiikassa representaatiot on jaettu usein numeerisiin, graafisiin, verbaalisiin ja symbolisiin representaatioihin (esim. Tall 2003). Nämä voidaan tulkita lähinnä ulkoisiksi ja melko konkreettisiksi asian tai käsitteen uudelleenedustajiksi. Toisaalta representaatiot, jotka ilmenevät matematiikan ymmärtämisessä ja hahmottamisessa, jaetaan yleisesti ulkoisiin ja sisäisiin (Goldin & Shteingold 2001). Sisäisistä representaatioista on vaikeaa saada tietoa, sillä ne voidaan käsittää vain subjektiivisesti. Ulkoiset representaatiot ovat sen sijaan jollain tavalla toisten ihmisten havaittavissa. Sisäisistä representaatioista voidaan saada tietoa ulkoisten representaatioiden avulla. Hähkiöniemi (2006b) kuitenkin huomauttaa, ettei ulkoinen representaatio ole sisäisen heijastuma eikä sisäinen representaatio kopio ulkoisesta, vaan ennemminkin ne täydentävät toisiaan.

Ulkoisiksi reprentaatioiksi jaotellaan Goldinin ja Shteingoldin (2001) mukaan merkinnälliset ja formaalit representaatiot, visuaaliset ja avaruudelliset sekä sanat ja lauseet sekä kirjoitettuina että puhuttuina. Esimerkiksi funktion kuvaaja karteesisessa koordinaatistossa voidaan ajatella visuaaliseksi ja funktiolausekkeen kirjoittaminen merkinnälliseksi representaatioksi. Goldin (1998) esittää, että sisäiset representaatiot voidaan jakaa

- verbaalisiin / syntaksisiin,

- imagistisiin eli visuaalisiin ja avaruudellisiin,
- formaaleihin merkinnällisiin,
- strategisiin ja heuristisiin prosesseihin,
- affektiivisiin.

Verbaaliset ja syntaksiset representaatiot ovat kielellisiä. Oppija voi tuottaa tällaisia representaatioita puhumalla ja kirjoittamalla sekä vastaanottaa kuulemalla ja lukemalla. Imagistiset representaatiot pitävät sisällään visuaaliset, spatiaaliset, rytmiset ja kinesteettiset representaatiot. Myös imagistisia ja formaaleja representaatioita voidaan kuvata sanallisesti. Formaalit merkinnälliset representaatiot voivat olla esimerkiksi formaalit matemaattiset merkinnät, symbolisysteemit ja niiden manipuloimissäännöt. Suunnittelu, valvonta ja päätöksenteot ongelmanratkaisuprosessissa voidaan luokitella strategisiin ja heuristisiin prosesseihin. Affektiivisia representaatioita voivat olla muun muassa vaihtelevat tunnetilat.

Tässä tutkimuksessa tehdään havaintoja oppilaiden käyttämistä ulkoisista representaatioista, erityisesti sisäisistä representaatioista tarkastellaan verbaalisia, imagistisia ja formaaleja merkinnällisiä representaatioita. Strategisten, heurististen sekä affektiivisten representaatioiden havainnointi edellyttäisi erilaista tutkimusasetelmaa.

2.6 Aikaisempia tutkimuksia funktioiden oppimisesta

Oppilaiden algebrallisesta ajattelusta on tehty runsaasti tutkimuksia. Monet niistä keskittyvät lineaaristen funktioiden oppimiseen (Carraher ym. 2008; Carraher ym. 2006), vain muutamat ovat tutkineet ei-lineaaristen funktioiden oppimista (Amit & Neria 2008; Francisco & Hähkiöniemi 2011). Tutkimukset ovat osoittaneet kuviojono-ongelmat erityisen toimivaksi tavaksi edistää algebrallista ajattelua, mutta ne ovat myös tehokas tapa selvittää oppilaiden kykyä yleistää ja symbolisoida (ks. Amit & Neria 2008, 113).

Carraher ym. (2006) ovat selvittäneet artikkelissaan oppilaiden oppimista siirryttäessä aritmetiikasta algebraan. Opetussuunnitelma rakentuu usein niin, että aritmetiikan ja algebran välillä on selvä raja ja asiat opetetaan hyvin erillään toisistaan. Carraherin ym. (2006) mukaan algebralliset merkinnät ovat kuitenkin suuressa roolissa matematiikan oppimisessa jo varhaisessa vaiheessa. Symboliset merkinnät, lukujonot, funktiotaulukot ja kuvat ovat tehokkaita työkaluja, joiden avulla oppilaat voivat ymmärtää ja ilmaista erilaisia funktion tyyppisiä suhteita monenlaisissa eri ongelmissa.

Esimerkiksi funktion käsite voidaan tuoda esille summan yhteydessä. Ilmaisu "+6" voidaan ymmärtää operaationa, joka suoritetaan tietylle luvulle mutta myös lähtöjoukon ja maalijoukon suhteena. Summaa voidaan kuvata standardilla funktiomerkinnällä, kuten $f(x) = x + 6$, sekä kuvauksena $x \to x + 6$. Tutkimuksessaan Carraher ym. (2006) ovat käyttäneet tehtäviä, joissa muiden asioiden ohessa on tullut esille muuttujan käsite ja merkintä, karteesiset koordinaatit ja funktiot. Tutkimuksella saatiin lisävahvistusta sille, että oppilaat pystyvät käyttämään mielekkäästi kirjaimia muuttujien merkitsemisessä sekä algebrallisia ilmaisuja, kuten $N + 3$ funktion representaationa. Myös kyky ymmärtää ja käyttää algebrallisia ilmaisuja, kuten $n \to n + 3$ ja $y = x + 3$, huomattiin Carraherin ym. (2006) tutkimuksessa.

Aluksi lapset tukeutuivat tiettyihin numeroarvoihin ilmentäen tällä tavalla tuntematonta, mutta pystyivät pikku hiljaa siirtymään algebrallisiin merkintöihin heille annetuissa ongelmissa. Carraher ym. (2006) kuitenkin huomauttavat, ettei oppilaiden toiminta ollut täysin spontaania. Esimerkiksi tuntemattoman merkintätapa esiteltiin oppilaille ja kyse olikin siitä, omaksuisivatko oppilaat representaatiot omikseen. Tietynlaisia kokemuksia omaava 8-9 -vuotias osaa sujuvasti käyttää kirjaimia tuntemattoman representaationa ja operoida kirjaimia ja numeroita sisältävillä representaatioilla ilman, että niitä tarvitsee ilmentää tietyillä numeroarvoilla. (Carraher ym. 2006)

Carraher ym. (2006) ehdottavat, että vaikka algebra koetaan hieman edistyneemmäksi matematiikaksi kuin aritmetiikka, voisi algebrallisia asioita ottaa esille integroituna jo matematiikan opiskelun varhaisessa vaiheessa. Esimerkiksi yhteen- ja vähennyslasku sekä kerto- ja jakolasku eivät ole ainoastaan operaatioita, vaan myös funktioita, jotka voitaisiin esitellä algebrallisen merkinnän avulla.

Vaikka laskutaito on tärkeää, jotta oppilaat voisivat tehdä algebrallisia päättelyitä, ei se kuitenkaan takaa, että oppilaat kiinnittäisivät huomiota aritmeettisten relaatioiden takana piileviin säännönmukaisuuksiin. Algebrallisilla merkinnöillä, kuten myös taulukoilla, kuvaajilla ja lukusuorilla, tällaisia päättelyketjuja voitaisiin tuoda esille selkeästi ja ytimekkäästi. Tämä tapa tarjoaisi myös mahdollisuuden tuoda yhteen ideat, jotka muuten voisivat jäädä pirstaleisiksi ja irrallisiksi. (Carraher ym. 2006, 110.)

Carraherin ym. (2008) USA:ssa tekemissä tutkimuksissa on havaittu, että 8-11 vuotiaat voivat ymmärtää muuttujien tarkoituksen, siirtyä tiettyjen lukujen ja mittojen yhteyksien ajattelusta luku- ja mittajoukkojen yhteksien ajatteluun sekä siirtyä numeeristen vastausten laskemisesta muuttujien avulla kuvailemiseen ja esittämiseen. Lisäksi heidän tutkimuksen mukaan 8-11 vuotiaat osaavat muodostaa ja esittää lineaaristen ja ei-lineaaristen funktioiden kuvaajia, ratkaista algebrallisia ongelmia käyttämällä monipuolisesti representaatioita, kuten taulukoita, kirjoitettuja yhtälöitä ja kuvaajia. Lisäksi 8-11 vuotiaat osaavat ratkaista yhtälöitä, joissa on muuttujia molemmilla puolilla yhtäläisyysmerkkiä sekä liittää funktioiden eri representaatioita toisiinsa.

Amit ja Neria (2008, 121) esittävät, että visualisoinnilla on keskeinen rooli epälineaarisen kuviojono-ongelman ratkaisemisessa. Tutkimuksissa ne oppilaat, jotka jakoivat kuviot sellaisiin palasiin, joilla oli jokin vakiosuhde kuvion paikkaan jonossa, pystyivät onnistuneesti yleistämään säännön. Amit ja Neria (2008) pitävät ongelman ratkaisemisen kannalta tärkeänä ominaisuutena mielen joustavuutta. Esimerkiksi oppilas, joka ryhtyy ratkaisemaan ongelmaa rekursiivisesti ja päätyy umpikujaan, ei takerru ensimmäiseen vaihtoehtoon, vaan osoittaa joustavuutta yrittämällä erilaista lähestymistapaa. Amit ja Neria (2008) liittävät tällaisen kyvyn oppilaiden motivoituneisuuteen sekä luottamukseen omiin taitoihin.

Haapasalon (2004) mukaan oppilaille tulisi antaa mahdollisuus käsitteiden ja määritelmien kuvailuun omin sanoin ja ilmaista formaalimuotoisiakin ilmauksia arkipäiväisellä kielellä. Hänen kokemuksensa mukaan opettajilla näyttäisi olevan uskomus, että äidinkielelliset ilmaisut tai oppilaan omat symboliset merkinnät eivät olisi matematiikkaa. Tällöin oppilaalla ei ole mahdollisuutta rakentaa kieleen perustuvaa matemaattista ajattelua, mikä saattaa olla haitaksi oppimisen kannalta.

Opettajien ja oppikirjojen esittämät ilmaukset eivät juurikaan aktivoi sisäisiä muistirakenteita proseduraalisen tehtävän $1/5 + 3/5$ suorittamiseksi (katso kappale 2.2.2). Keinoksi jää siis opettaa asia tekemällä suuri määrä toistoja ja opettelemalla aiheeseen liittyvät nimitykset ulkoa (osoittaja, nimittäjä, samannimisyys). Haapasalo ei kuitenkaan kumoa määritelmien tärkeyttä ja huomauttaakin, että käsitteiden tunnusmerkkien kiinnittäminen mahdollistaa käsitteiden käyttämisen elinvoimaisena tietona. (Haapasalo 2004.)

Tässä tutkimuksessa tehtävät on rakennettu niin, että tehtävänannot auttavat rakentamaan algebrallisen merkityksen laskulle. Tehtävät eivät testaa ainoastaan algebrallisten tekniikoiden osaamista, kuten perinteiset algebran tehtävät. Oppilaat voivat käyttää myös monenlaisia representaatioita, kuten kuvia, kaavioita ja luonnollista kieltä. Oppilailla on vapaus valita esitystapansa pohtiessaan ongelmaa. Haapasalo (2004) onkin saanut hyviä kokemuksia siitä kuinka konseptuaaliseen tietoon panostaminen tuottaa proseduraalista tietoa.

Radford (2010) on toteuttanut tutkimuksen, jossa oppilaiden piti muodostaa kuviojonoista yleislauseke, ensimmäisen asteen funktio, jolla pystyisi laskemaan minkä tahansa kuvion osasten lukumäärän. Kuvassa 1 on yksi Radfordin käyttämistä kuviojonoista. Radford kiinnitti tutkimuksessaan erityisesti huomiota oppilaiden käyttämiin representaatioihin, kuten tässäkin tutkimuksessa on tarkoitus. Hänen tutkimuksessaan esiintyi kahdenlais-

Kuva 1: *Yksi Radfordin (2010) käyttämistä kuviojonoista*

ta ratkaisustrategiaa. Ensimmäinen tapa perustui yritykseen ja erehdykseen. Oppilaat ehdottivat yksinkertaisia sääntöjä ja kokeilivat niiden toimivuutta muutamissa tapauksissa.

Toisessa lähestymistavassa oppilaat etsivät yhteneväisyyksiä annetuissa kuvioissa, kuten kuvion ylärivillä on aina yksi pallo ja alarivillä kaksi palloa enemmän kuin mikä on kuvion järjestysnumero. Molemmat strategiat johtivat symbolien käyttöön. Radford kuitenkin pohtii onko oppilaiden ajatusprosessin taustalla induktiivinen päättely (induction) vai yleistys (generalization). Induktiivisessa päättelyssä oppilas päättelee, että koska yhdessä kuviossa pätee tietynlainen yhteys esimerkiksi kuvion pallojen ja järjestysluvun välillä, pätee tämä sama yhteys kaikissa jonon kuvioissa. Induktiivista päättelyä on vahvasti havaittavissa ensimmäisessä Radfordin tutkimuksen oppilaiden ratkaisustrategiassa.

Radford (2010, 42) esittää määritelmän, jonka mukaan kuvion algebrallinen yleistäminen (generalization) perustuu kykyyn käsittää jonon S elementtien yhteisiä piirteitä ja tietoisuuteen siitä, että yhteiset piirteet pätevät kaikkiin jonon S termeihin sekä kykyyn käyttää tätä tietoa tuottaakseen suoran ilmaisun mielivaltaiselle jonon S termille. Kuvion algebrallinen yleistys riippuu siis siitä, pystyykö havaitsemaan paikallisia yhtäläisyyksiä, jotka voidaan sitten yleistää koko kuviojonoa koskeviksi ja täten saadaan muodostettua ilmaisu myös jonon termeille, jotka jäävät hahmottamisalueen ulkopuolelle.

Radfordin (2010) tutkimuksessa esiintyi myös rekursiivista päättelyä, joka ilmeni oppilaan eleistä ja sanoista. Rekursiivisessa päättelyssä oppilas käyttää arvoa a_{x-1} tuottaakseen arvon a_x. Eräs oppilaista huomasi kuviojonon kuvioiden pallojen lisääntyvän aina kahdella kuviosta seuraavaan siirryttäessä ja ympyröi jonon kuviosta kaksi ympyrää, jotka siihen oli lisätty. Näin oppilas saavutti Radfordin mielestä jotain merkittävää, nimittäin oppilas ilmaisi idean yleisyydestä, asiasta, joka vain jatkuu ja jatkuu. Radford pitää tätä hyvänä merkkinä matkalla kohti kuviojonon yleistämistä lausekkeeksi. Radford myös huomauttaa, että sanojen ja eleiden kautta saavutettu yleisyydentaju ei ole sama kuin lausekkeen tai kuvion kautta saavutettu, mutta ne eivät ole kuitenkaan toisistaan täysin itsenäisiä semioottisia systeemejä. Systeemit tukevat toisiaan.

Radfordin (2010) tutkimuksessa oppilaat muodostivat sanallisia lausekkeita, eli ohjeita, joilla voisi laskea annetun kuviojonon minkä tahansa kuvion osasten lukumäärä. Oppilaille oli ongelmallista ilmaista sanallisesti jotain sellaista yleisluonteista, joka on kuitenkin helppo näyttää numeroin ja elein. Näyttämisen ja sanomisen välillä on syvä kuilu. Sanallisten lausekkeiden jälkeen he muodostivat lausekkeita käyttäen symboleja. Erityisesti ”seuraava kuvio” -käsitteen ilmaisu käyttäen apuna symboleja tuotti vaikeuksia oppilaille. Radford väittää, että oppilaiden käyttämät merkit, kuten $n, \cdot, 2, +, 3$, ovat kehittyneet vähitellen oppilaiden aikaisemmista matematiikkakokemuksista, joko suoraan tai esimerkkien kautta. Oppilaat ovat aikonaan omaksuneet jokaiselle symbolille sen ominaisen piirteen, joka voi olla yksi syy siihen miksi oppilaat kirjoitavat lausekkeen ennemmin esimerkiksi $n \cdot 2 + 3$, kuin sen yksinkertaisimpaan muotoon $2n + 3$. Kaikki oppilaat eivät myöskään saavuttaneet täysin matemaattisesti oikein kirjoitettuja lausekkeita. Epätarkkuutta Radford ei kuitenkaan laita ongelman väärinymmärtämisen syyksi, vaan ennemminkin oppilas ei ymmärrä matematiikan käytännön kulttuuria, joka perustuu tarkoin määrättyyn merkkien käyttöön. (Radford 2010.)

Francisco ja Hähkiöniemi (2011) ovat tutkineet oppilaiden funktioiden oppimista ”Arvaa sääntö” -tyyppisillä tehtävillä. He esittävät, että tällaiset epälineaarisia funktioita koskevat tehtävät voivat tarjota oppilaille ympäristön, jossa he voivat kehittää algebrallisten ilmaisujen duaaliluonteen ymmärtämistä. Oppilaat voisivat siis oppia ymmärtämään matemaattisia käsitteitä sekä objekteina että prosesseina. Francisco ja Hähkiöniemi (2011) havaitsivat tutkimuksessaan, että oppilaat pystyvät käyttämään luovasti hyväksi rekursiivista päättelyä ja sen pohjalta rakentamaan eksplisiittisiä sääntöjä.

Tässä tutkimuksessa on myös hyvät edellytykset oppilaiden rekursiiviselle päättelylle. Näemme, käyttävätkö oppilaat rekursiivista päättelyä eksplisiittisen säännön löytämisen apuna. Eksplisiittisessä säännössä oppilas tuottaa tuloksen a sitä vastaavasta lähtöarvosta b. Carraher ym. (2008) selvittivät, kuinka oppilaat pystyvät siirtymään rekursiivisesta ajattelusta funktiolausekkeisiin. He esittävät, että taulukot, joissa lukujen arvot nousevat aina yhdellä, voivat olla funktiolausekkeen päättelylle haitaksi. Toisaalta taulukot voivat antaa oppilaille kokonaiskuvan funktion toiminnasta visuaalisesti. Vaikka taulukoista on helpompi nähdä annetun arvon ja tuloksen välinen suhde kuin yleinen sääntö, jolla luvut muodostuvat, eivät taulukot välttämättä ole kuitenkaan este algebran ymmärtämiselle.

Useammissa tutkimuksissa on havaittu, että lineaarisia funktioita käsittelevissä yleistystehtävissä rekursiiviset säännöt esiintyvät oppilaiden keskuudessa yleisemmin kuin eksplisiittiset (esim. Carraher ym. 2008). Carraher ym. (2008) esittävät, että rekursiiviset säännöt ovat oppimisen arvoisia perustelun muotoja. Myös Franciscon ja Hähkiöniemen (2011) tutkimustulokset tukevat tätä väitettä. Amit ja Neria (2008) väittävät, että numeeriset rekursiiviset mallit voivat olla oppilaille jopa este eksplisiittisten sääntöjen muodostamiseen. Francisco ja Hähkiöniemi (2011) eivät sen sijaan allekirjoita tätä väitettä.

Opettajan täytyy olla tarkkana kuinka oppilaat jäsentävät taulukot ja esittävät niissä piilevät funktiot. Oppilaiden edetessä kohti yleistystä ja suljetussa muodossa esitettyjä funktioita, joutuvat oppilaat eksplisiittisesti esittämään riippuvia ja riippumattomia muuttujia väittämissään. Erityisesti lineaarisen funktion tapauksessa perättäiset summaukset pitäisi osata korvata tulolla. Summan korvaaminen tulolla on vaikea asia niin oppilaille kuin opettajillekin, koska se on muutakin kuin matemaattisen operaation sijoittamista. Muutos tuo mukanaan implisiittisesti tai eksplisiittisesti päättelylle erilaisen näkökulman. (Carraher ym. 2008.)

Kahden funktion merkitseminen yhtä suuriksi ei tarkoita oppilaille, että funktiot olisivat keskenään vaihdannaisia, siis merkitsisivät samaa asiaa. Esimerkiksi yhtälössä $2x = 4x - 3$ on kaksi funktiota $2x$ ja $4x - 3$, joille yhtäsuuruusmerkki asettaa vain rajoitteita, mutta funktiot eivät ole samat. On tärkeää saada oppilaat ymmärtämään mikä ero yhtäsuuruusmerkin käytössä on edellä mainitussa tapauksessa ja vaikkapa $4 + 5 = 9$ tapauksessa, missä yhtäsuuruusmerkin molemman puolen merkinnät ovat vaihdannaisia ja merkitsevät tarkalleen samoja lukuja. Vasta hyvin myöhäisessä vaiheessa oppilaat perustelevat tietojaan symbolisilla merkinnöillä. Kirjainten käyttö tulee tutuksi vaiheittain erilaisten taulukoiden, kuvaajien, algebrallisten merkintöjen kautta. (Carraher ym. 2008.)

Hassinen (2006) kuvailee tutkimuksessaan kuinka algebrallisia lausekkeita voidaan tarkastella kahdella eri tavalla. Strukturaalinen tarkastelu kohdistuu rakenteeseen eli siihen mitä lauseke on. Kun lauseketta tarkastellaan operationaalisesti, tarkoitetaan tarkastelua toiminnan kannalta eli mitä lauseke tekee tai antaa. Lausekkeiden näkemistä objekteina tuetaan, kun lausekkeita kirjoitetaan itse ja tulkitaan lausekkeita luonnollisella kielellä. Esimerkkinä hän käyttää funktiota $f = 1{,}8c + 32$, jonka avulla celsiusasteet voidaan muuttaa fahrenheitasteiksi. Luonnollisella kielellä kirjoitettuna lauseke kertoo, että jos lämpötila c celsiusasteina kerrotaan luvulla 1,8 ja lisätään siihen luku 32 saadaan celsiusasteita vastaavat fahrenheitasteet.

Luonnollistamalla matemaattisia lausekkeita sanoiksi ja käyttämällä tuttuja tehtäväkonteksteja saadaan psykologista tukea ja varmuutta toimintojen oikeellisuudesta. Hassisen (2006) mukaan saantöjen ja säännönmukaisuuksien kirjoittaminen vaatii paljon harjoittelua. Kuviosarjatehtävässä oppilaiden on vaikea kuvailla tilanne sanallisesti muuttuvan suureen avulla. Esimerkiksi tässä tutkimuksessa tehtävän 1 kuviosarjan valkoisten laattojen määrä riippuu mustien keskuslaattojen määrästä. Oppilaat pyrkivät Hassisen (2006) mukaan kuvaamaan nimenomaan muutosta eli kun tulee yksi musta laatta lisää, valkoisten laattojen määrä lisääntyy viidellä. Jotta laskusääntö löytyisi ja matemaattinen merkintä voitaisiin kirjoittaa, pitää tilanne osata nähdä myös toisella tavalla, esimerkiksi: ”jokaista mustaa laattaa kohden on viisi valkoista laattaa ja vielä yksi laatta päädyssä.”

3 Tutkimuksen toteuttaminen

3.1 Tutkimusongelmat

Tutkimuksessa on tarkoituksena selvittää tutkivan oppimisen käyttöä matematiikassa ja erityisesti funktion käsitteen oppimisessa ja opettamisessa. Funktion käsite kuuluu monen koulun opetussuunnitelmassa vasta yhdeksännelle luokalle. Usein myös kirjainlaskenta tai tuntemattomien muuttujien käyttäminen koetaan hankalaksi. Tämän tutkimuksen kohdejoukoksi valittiin oppilaita, joille funktion käsitettä ei oltu opetettu vielä koulussa. Tutkimuksessa keskityttiin seuraaviin asioihin:

1. Ajattelutyylit. Ajattelevatko tai hahmottavatko oppilaat annetut tehtävät eri tavoilla? Miksi ongelmanratkaisussa joku idea hylätään ja miksi joku hyväksytään?

2. Oppilaiden representaatioiden käyttö. Kuinka oppilaat ilmaisevat asioita, joita heille ei ole vielä opetettu? Millaisia ovat kirjalliset ja suulliset ilmaisut? Millaisia ongelmia oppilaat kohtaavat?

Tutkimus on tapaustutkimus, jossa kerätään yksityiskohtaista tietoa pienestä joukosta tapauksia, jotka ovat suhteessa toisiinsa. Tapaustutkimukselle on tyypillistä, että kiinnostuksen kohteena ovat prosessit ja yksittäistä tapausta tutkitaan luonnollisissa tilanteissa. Tavoitteena on yleensä ilmiöiden kuvailu käyttäen aineistoa, joka on kerätty käyttämällä useita eri metodeja. (Hirsjärvi ym. 2008, 130–131.)

3.2 Tutkimusaineisto

Tutkimuksen aineisto koostuu kahdesta videoidusta yläkoulun 45 minuutin oppitunnista, oppilaiden vastauspapereista sekä neljästä ääninauhasta, joilla varmistettiin keskustelujen tallentuminen. Oppitunnit pidettiin kahtena eri kertana peräkkäisinä päivinä. Tutkimuksen kohteena olleiden oppilaiden valinnassa kriteerinä oli, ettei heille oltu vielä opetettu funktion käsitettä (Jyväskylän yliopisto Normaalikoulu OPS 2004). Tutkimuskohteeksi valittiin viisi seitsemäsluokkalaista oppilasta samasta matematiikan ryhmästä. Analyysin kannalta olennaista pohjatietoa oppilaista on vain vähän, sillä heille ei tehty alkuhaastattelua tai testiä. Tieto oppilaiden lähtötasosta pohjautuu koulun opetussuunnitelmaan ja opettajan antamiin tietoihin. Oppilaiden matematiikan numerot olivat arvosanojen 8 ja 10 väliltä.

Opettajan mukaan he eivät olleet opiskelleet vielä kirjainlaskentaa, mutta opettaja on teettänyt oppilailla yhtälöharjoituksia, joissa x-merkintä on korvattu tyhjällä ruudulla ja oppilaiden on täytynyt päätellä puuttuva luku. Heidän koulunsa opetussuunnitelman mukaan funktion käsite tulee 9. luokalla. Valinta perustui oppilaiden vapaaehtoisuuteen sekä ryhmän matematiikan opettajan tekemään valintaan. Tutkittavaan ryhmään valikoitui kolme tyttöä ja kaksi poikaa, ja heistä käytetään nimiä Siiri, Niina, Ilona, Antti ja Eero tässä tutkimuksessa. Tuntien suunnittelussa käytettiin lähtökohtana tutkivan oppimisen käyttöä opetuksessa. Oppitunteja varten suunnitellut tehtävät rakennettiin niin, että oppilas voi ratkaista käyttämällä aiempia tietojaan sekä tehtävän aiempia kohtia.

Tunnit pidettiin oppilaiden matematiikan tunnin aikana erillisessä luokassa peräkkäisinä päivinä. Luokassa olivat läsnä opettajana toimiva tutkija, tutkimukseen valitut viisi oppilasta sekä kuvaaja. Oppilaita valittiin mukaan vain pieni joukko, jotta heidän päättelyprosessiaan oli helpompi seurata. Oppilaat saivat istua luokan pöytien ääreen vapaasti. He jakaantuivat kahteen ryhmään, tytöt kolmen hengen ja pojat kahden hengen ryhmäksi. Tunnit kuvattiin pienellä videokameralla. Molempien ryhmien pöydille asetettiin ääninauhurit äänen tallentumisen varmistamiseksi. Kuvaajaa ohjeistettiin keskittymään vain tyttöjen ryhmään ja kuvaamaan oppilaiden eleitä, keskusteluja, osoittamisia paperin tiettyyn kohtaan ja työskentelyä paperille. Näin saatiin mahdollisimman yhtenäinen kuva heidän ongelmanratkaisuprosessistaan. Resurssien puutteen vuoksi kuvaaja kuvasi poikien ryhmää vain, jos heidän toiminnassaan ilmeni jotain mielenkiintoista.

Oppilaille jaettiin tehtäväpaperit tehtävä kerrallaan. Ensimmäisellä oppitunnilla oli kaksi tehtävää, joissa molemmissa oli viisi alakohtaa. Toisella tunnilla oli yksi tehtävä, jossa oli myös viisi alakohtaa. Oppilailla oli mahdollisuus saada laskin käyttöönsä molemmilla tunneilla, mutta myös oman laskimen käyttö oli sallittua. Oppilaat käyttivät omia kirjoitusvälineitään. Oppilaille jaettiin runsaasti ruutupaperia vastauksia varten. Koska oppilaat kirjoittavat helposti vain pelkän tuloksen vastauspaperille (Fried & Amit 2003, viitattu lähteessä Amit & Neria 2008), annettiin paperia runsaasti, jotta oli mahdollisuus käyttää suttupaperia. Lisäksi oppilaat saivat tehtävien koordinaatistoesityksiä varten valmiiksi sopivaksi skaalatut koordinaatistot, jossa akselit eivät kuitenkaan olleet nimettyjä. Kaikki oppilaiden paperit kerättiin tunnin lopuksi nimillä varustettuna pois.

Ensimmäisen tunnin alussa oppilaille kerrottiin, että kyseessä oli pro gradu -työhön liittyvä tutkimus. Heille kerrottiin videoinnista ja siitä, että videoita ei tulla julkaisemaan missään. Oppilaita kannustettiin miettimään tehtäviä ryhmässä ja keskustelemaan tehtävistä sekä kysymään tarvittaessa neuvoja opettajalta. Lisäksi oppilaille kerrottiin, että tehtäviin on varattu reilusti aikaa, joten niitä voi pohtia rauhassa ja korostettiin, että ratkaisut pitäisi osata perustella mahdollisimman tarkasti. Oppitunnin edetessä oppilaita muistutettiin kirjoittamaan ylös vastauksen lisäksi myös perusteluita.

3.3 Tutkimuksen luotettavuus

Kyseessä on tapaustutkimus, jonka tarkoituksena on ollut kerätä tietoa yksittäisten oppilaiden ajattelu- ja ratkaisutavoista sekä representaatioiden käytöstä. Kohdejoukkoon on kuulunut viisi oppilasta, joten tarkoituksena ei ole ollut tuottaa yleispätevää tietoa aiheesta, vaan tapaustutkimuksen tapaisesti yksityiskohtaista tietoa toisiinsa suhteessa olevasta pienestä joukosta oppilaita. Tutkimuksen merkitys on siinä, että sen tuloksia voidaan hyödyntää mahdollisesti opetuksessa ja sen kehittämisessä sekä tutkimuksessa. Oppilaiden ajattelusta ja toimintatavoista löytyi useita yhtymäkohtia myös muihin tutkimuksiin.

Tutkimuseettisestä näkökulmasta on huolehdittu siten, että oppilaiden omia nimiä ei ole käytetty tässä työssä. Lisäksi video- ja äänimateriaali on vain tutkijan saatavilla. Oppilaiden valinta tutkimukseen perustui heidän matematiikan opettajan antamaan ehdotukseen sekä oppilaiden vapaaehtoisuuteen. Oppilaat olivat tutkimukseen mukaan lähtiessään tietoisia siitä, että heitä tultaisiin kuvaamaan videokameralla ja koska kohteena oli alaikäisiä nuoria, kysyttiin kuvauslupa myös heidän huoltajiltaan.

Tutkimukseen kuvatuilla oppitunneilla oppilaat saivat itse muodostaa kaksi ryhmää. Tutkimus olisi voitu toteuttaa valitsemalla oppilaat täysin sattumanvaraisesti seitsemäsluokkalaisten joukosta, mutta toimitulla tavalla haluttiin varmistaa oppilaiden keskinäinen yhteistyökyky sekä aktiivinen toimiminen oppitunnilla. Tutkija olisi myös voinut puuttua ryhmien muodostamiseen, mutta koska oppilaat olivat ennalta täysin vierailta tutkijalle, katsottiin parhaaksi, että oppilaat saavat itse päättää. Ainakin näin ryhmät muotoutuisivat siten, että ryhmän sisäinen yhteistyö toimi.

Tutkimus olisi voitu toteuttaa myös normaalissa luokkaympäristössä, jossa koko luokkaryhmä olisi ollut mukana, vaikka analysoinnissa olisi keskitytty tarkastelemaan vain muutaman oppilaan toimintaa. Tällaisessa tilanteessa oppilaiden kanssa toiminen olisi ollut vaativampaa, koska myös ne oppilaat olisi täytynyt huomioida, jotka eivät varsinaisesti olisi valikoituneet tarkastelun kohteeksi. Pienryhmässä pystyttiin käyttämään käytettävissä oleva aika tehokkaammin. Ryhmien väliselle keskustelulle haluttiin luoda edellytykset ottamalla mukaan oppilaita kahta ryhmää varten.

Oppitunnit kuvattiin videokameralla. Siten oppitunneista jäi materiaali, joiden avulla oppitunteihin pystyi palaamaan yhä uudelleen. Videoiden äänen laatu haluttiin varmistaa vielä ääninauhureilla, joita oli molemmille ryhmille omat. Ääninauhurit osoittautuivat tärkeiksi tallentamisen välineiksi, sillä videot pätkivät muutamia kertoja tai oppilaiden puhe oli välillä hyvin hiljaista. Nauhoitusten avulla pystyttiin myös tarkastelemaan eri ryhmän keskustelua kuin mitä kuvattiin. Kuvaajaa oli ohjeistettu kuvaamaan lähinnä vain tyttöjen ryhmää, jotta heidän toiminta tunnilla tallentuisi mahdollisimman tarkasti.

Videoiden analysoinnissa sovellettiin Powellin ym. (2003) kehittämää videoanalyysimenetelmää. Videoita oli mahdollisuus katsoa uudelleen ja uudelleen ja niihin oli mahdollista palata pitkänkin ajan jälkeen. Tarvittaessa keskusteluja pystyi kuuntelemaan tarkemmin myös ääninauhoilta. Videoiden ja äänitteiden pohjalta tehty litterointi auttoi tarkan analyysin tekemisessä. Tutkijan toimiminen myös oppituntien opettajana, oli hieman "kaksipiippuinen" asia. Tutkija muisti oppitunnin tapahtumat oman muistin kautta, jolloin oppituntien objektiivinen tarkasteleminen oli vaikeampaa. Ajan myötä tutkimuksen oppituntien objektiivinen tarkasteleminen tuli kuitenkin helpommaksi.

Tutkimuksen oppitunnit materiaaleineen sekä aineiston keruu- ja analyysimenetelmät on pyritty toteuttamaan ja kuvailemaan niin täsmällisesti kuin mahdollista, jotta tutkimus voitaisiin tarvittaessa suorittaa uudelleen samanlaisena.

3.4 Oppituntien suunnittelu

Oppituntien suunnittelussa käytettiin Shimizun (1999) esittelemää taulukkoa (kuva 2), jonka avulla japanilaiset opettajaharjoittelijat oppivat kirjoittamaan ja viimeistelemään tuntisuunnitelmansa. Jokainen tehtävä käytiin taulukon avulla läpi ja vastattiin muun muassa kysymyksiin: mikä on tehtävän tarkoitus tai päämäärä, mitä eri tapoja tehtävän ratkaisussa voisi käyttää, mitkä asiat saattavat tuottaa oppilaille ongelmia, millaisia virheellisiä ratkaisuja oppilaat voivat esittää, kuinka opettaja reagoi oppilaan vastauksiin, mitä tehtäviä tai tehtävän osia kannattaisi ottaa mukaan oppitunnin lopussa yhteenvetoon. Lisäksi kirjoitettiin muistiin muita huomioita opettamisesta.

Steps	Main learning activities	Anticipated students' responses	Remarks on teaching
• Posing a problem			
• Students' individual problem solving			
• Whole-class discussion			
• Summing up (Exercise/Extension)			

Kuva 2: *Japanilainen taulukko tuntien suunnittelun avuksi (Shimizu 1999, 113.)*

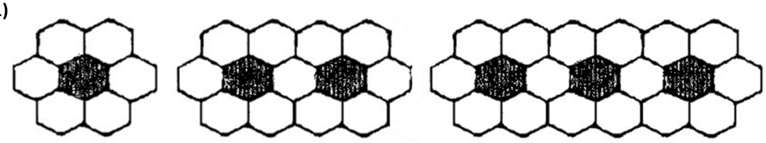
Tehtävämonisteet löytyvät liitteistä 1, 2 ja 3. Lisäksi oppitunneille suunniteltujen yhteenvetojen luonnostelmat ovat liitteessä 4. Liitteessä 4 on myös lisätehtäviä ja lisää pohdittavaa sen varalta, jos oppilaat saisivat tehtyä annetut tehtävät nopeasti. Seuraavaksi kappaleissa 3.4.1, 3.4.2 ja 3.4.3 esitellään kukin tehtävä yksityiskohtaisemmin.

3.4.1 Tehtävä 1: 1. asteen funktio kuviojonosta

Tehtävässä 1 (kuva 3) on tavoitteena saada oppilaat muodostamaan yleinen laskusääntö, jolla voidaan laskea annetun kuviojonon minkä tahansa kuvion valkoisten laattojen lukumäärä. Toisin sanoen oppilaiden on tarkoitus muodostaa funktio kuvion järjestysluvun suhteen. Funktio on lineaarinen, jolloin sen kuvaajasta tulee suora.

A: Ensimmäisen kohdan tarkoitus on johdatella oppilaita tehtävään. a-kohdassa he joutuvat tutustumaan kuvioiden muodostumiseen ja rakenteeseen. Suurin osa oppilaista ratkaisee tehtävän varmasti piirtämällä seuraavan kuvion ja laskemalla siitä laattojen määrän. Osa osaa varmasti laskea laat-

1)



A) Kuinka monta valkoista laattaa olisi seuraavassa kuviossa?

B) Kuinka monta valkoista laattaa tarvitaan kuvioon 10?

C) Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion valkoisten laattojen määrä tässä ketjussa.

D) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea valkoisten laattojen määrä, kun mustia laattoja on tietty määrä.

E) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä paljonko valkoisia laattoja tarvitaan tietyn kokoiseen laatoitukseen.

Kuva 3: *Kuviojono 1. asteen funktion muodostamiseksi*

tojen määrän päässäänkin ilman piirtämistä. Perustelu kuitenkin tarvitaan eli pelkkä vastaus ei riitä. Osa oppilaista voi myös arvata oikean vastauksen, mutta edelleen arvaukselle halutaan perustelu.

Oikea vastaus on 21 laattaa. Seuraavaan kuvioon tulee aina 5 valkoista laattaa enemmän kuin edelliseen. Mahdollisia vääriä vastauksia voi olla esimerkiksi $4 \times 6 = 24$, jos unohdetaan ottaa huomioon mustia laattoja ympäröivät valkoiset laatat, jotka ovat yhteisiä kullekin "kukkaselle". Oppilaita voi kehottaa tarkastamaan vastauksensa ja siirtymään seuraavaan tehtävään vasta kun he ovat varmoja vastauksistaan. Yhteenvedossa tuskin tarvitsee ottaa tätä tehtävää huomioon tällaisenaan.

B: b-kohdan tarkoitus on herättää oppilaat huomaamaan, että kun kuvan järjestysluku on suuri, alkaa valkoisten laattojen lukumäärän laskeminen vaikeutua. Kymmenes kuvio on vielä piirrettävissä melko helposti, mutta on kuitenkin huomattavasti työläämpi kuin neljäs kuvio, jota tarkasteltiin edellisessä kohdassa. Tarkoituksena on, että oppilailla heräisi ajatus helpommasta tai nopeammasta tavasta, joilla kymmenennen kuvion laattojen lukumäärä saataisiin selville.

Oikea vastaus tehtävään on 51 valkoista laattaa. Joku voi piirtää kuvion ja laskea kuvasta laattojen lukumäärän. Ratkaisutapa on hyväksyttävä, mutta ongelmia saattaa tulla c-kohdassa, jolloin oppilasta voidaan kehottaa palaamaan tähän tehtävään ja miettimään muita keinoja. Joku saattaa taulukoida luvut, mikä on varsin helppoa, kun huomaa, että uuteen kuvioon tulee aina 5 valkoista laattaa enemmän kuin edelliseen. Tämä tapa saattaa myös johtaa harhaan seuraavassa tehtävässä. Rekursiivisesta ajattelusta voi olla hankala päästä eroon. Taulukoinnin tyylinen ratkaisutapa voi olla myös lasku $6+5+5+5+5+5+5+5+5+5=51$. Tämän ratkaisutavan etuna on, että siitä voi olla helppo päästä kiinni seuraavaan tehtävään. Hyvä apukysymys voisi olla ”Montako laattaa on sadannessa kuviossa?”, jos kymmenennen kuvion laattojen määrän laskeminen mielletään vielä liian helpoksi.

Yhteenvedossa tätä tehtävää voi käyttää johdatteluna siihen, miksi kahdessa seuraavassa tehtävässä haetaan yleistä lauseketta laattojen lukumäärälle. Tilanteesta riippuen tätäkään tehtävää ei kuitenkaan välttämättä tarvitse käydä yhteenvedossa läpi, vaan tehtävän ymmärtäminen varmistetaan jo tehtäviä ratkaistaessa ja eri ratkaisuista keskustellaan samalla.

C: Tehtävät 1c ja 1d ovat hieman päällekkäiset tehtävät, varsinkin jos oppilas osaa ilmaista kuvioiden valkoisten laattojen määrän lausekkeena jo tässä c-kohdassa. Tehtävän tarkoitus on johdattaa oppilas muodostamaan sääntö, jolla hän pystyy laskemaan jonon minkä tahansa kuvion valkoisten laattojen määrä. Tehtävä voi olla vaikea, koska kuvioita ei voida piirtää loputtomiin. Tehtävän ratkaiseminen vaatii abstraktitason ajattelua.

Tarkoitus ei ole vielä tässä kohdassa saada vastaukseksi funktiota, vaan vastaus voi olla esimerkiksi sanallinen. Oppilaat löytävät sanalliset yleistykset helpommin kuin kirjoittavat ne symbolisesti (English & Warren 1998, viitattu lähteessä Amit ja Neria 2008). Tehtävänanto on asetettu niin, että oppilaat voivat keksiä omia tapoja merkata tuntematonta lukua. Luultavasti koulussa usein tuntematonta muuttujaa tarkoittava x ei ole vielä tuttu. Oppilaita on hyvä kannustaa kirjoittamaan paperille myös sellaisia asioita, joita ei ole koulussa opetettu. Tarkoituksena saada selville, miten he itse merkitsisivät sellaisen luvun, jota he eivät vielä tiedä tai jos samanlaiseen kaavaan halutaan sijoittaa samalle paikalle useita eri lukuja.

Oppilaan vastaus tähän tehtävään voisi olla sanallisesti muotoiltuna: Jos mustia keskuslaattoja on yksi, niin valkoisia laattoja on kuusi. Kun jonoon lisätään yksi musta keskuslaatta lisää, kasvaa valkoisten laattojen määrä viidellä. Tässä tehtävässä on tärkeää ohjata oppilasta pois rekursiivisesta ajattelusta. Oppilaalle täytyy korostaa, että hänen täytyy miettiä sellainen laskusääntö, jolla hän pystyy laskemaan minkä tahansa kuvion laattojen määrän tietämättä edellisen kuvion laattojen määrää. Oikeastaan erilaisia sanallisia vastauksia, ja samoin tietysti laskukaavoja, voi olla tehtävässä loputtomasti. d-kohdassa on listattu lisää mahdollisia ratkaisuvaihtoehtoja.

Tämän tehtävän ratkaisuja voidaan tuoda esille yhteenvedossa, jos halutaan sanallinen selitys d-tehtävässä saaduille kaavoille. Erityisesti tämän tehtävän ratkaisuja kannattaa tuoda esille, kun oppilaat ratkaisevat d-tehtävää.

D: Tässä tehtävässä tarkoituksena olisi saada vastaukseksi matemaattinen lauseke, oikeastaan funktio. Oppilaille funktio-käsite ei ole ennestään tuttu, eivätkä myöskään matemaattiset lausekkeet, jotka sisältävät tuntemattomia muuttujia. c-kohdassa mahdollisesti sanallisesti annettu vastaus yritetään muuttaa kompaktimpaan muotoon. Kaavan täytyy olla sellainen lauseke, johon sijoitetaan kuviojonon järjestysluku tai mustien keskuslaattojen määrä, jolloin vastaukseksi saa kyseisen kuvion valkoisten laattojen lukumäärän. Sievennetyimmän muodon $5n + 1$ saa esimerkiksi ajatusmallilla, että jokaisen mustan laatan ympärillä on viisi valkoista laattaa, eli jos mustia on n kappaletta, niin valkoisia on $5n$. Lisäksi viimeiseen tai ensimmäiseen mustaan laattaan täytyy lisätä yksi valkoinen laatta enemmän eli $+1$.

b-kohdassa annetusta ratkaisusta $6+5+5+5+5+5+5+5+5+5 = 51$ pystyy kohtalaisen helposti päättelemään, että valkoisten laattojen määrä missä tahansa kuviossa saadaan, kun lukuun 6 lisätään lukuja 5 niin monta kappaletta kuin on mustia laattoja tai kuvion järjestysluku, mutta kuitenkin yksi luku vähemmän (siis $6+(n-1)5$). Edellisen yhteenlaskuketjun voi purkaa myös muotoon $(1+5)+5+5+5+5+\ldots$, jolloin saadaan kaavaksi kirjoitettuna suoraan sievin muoto $1+5n$. Hassinen (2006) on väitöskirjassaan teettänyt 7. luokkalaisilla vastaavanlaisen tehtävän, jossa on käytetty samaa kuviosarjaa. Hänen tutkimuksessaan oppilaat ovat antaneet vastauksiksi muun muassa $6+5(n-1)$, $6n-(n-1)$, $4n+(n+1)$. Eräs tapa on ajatella kuviota kolmena rivinä, jolloin saisin lausekkeen $2n + 2n + (n + 1)$ eli "ylärivi"+"alarivi"+"mustien laattojen väliset valkoiset laatat". Erilaisia ajattelutapoja on siis melkein loputtomasti, mikä tekeekin oppitunnista haastavan.

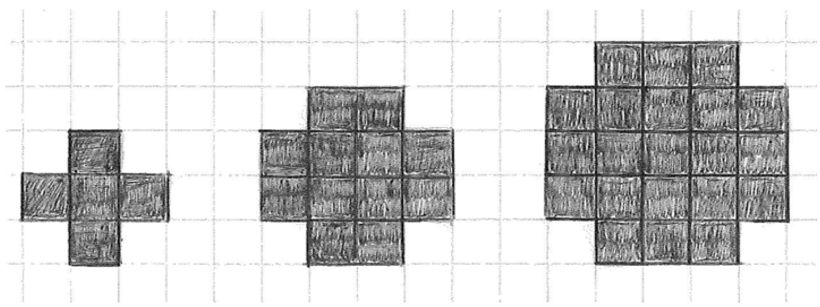
Koko luokan keskustelussa voidaan käydä läpi erilaisia oppilaiden ratkaisuja. Oppilaat voivat perustella toisilleen miksi heidän vastauksensa on oikein. Yhteenvedossa mietitään myös yhdessä ovatko vastaukset kuitenkin samoja, jos oikeita kaavoja on tullut monia erilaisia. Hassisen (2006) mukaan oppilaat eivät nähneet syytä sieventää lausekkeita, koska ne kuvaisivat silloin eri asioita. Kahdella eri kuvion hahmotustavalla voitaisiin saada esille myös sievennyssääntö, mutta tätä ei oteta yhteenvedossa esille, ellei se tule luontevasti oppilaan aloitteesta. Yhteenvedossa keskitytään ennemmin oppilaiden erilaisiin merkintätapoihin ja x-merkin käyttöön matematiikassa.

E: Kuvaajan piirtämisen tässä tehtävässä on tarkoitus toimia johdatteluna kolmanteen tehtävään. Oppilaat voisivat myös saada ideoita tästä kolmannen tehtävän ratkaisuun. Oppilaille annetaan valmiit koordinaatistot ajan säästämiseksi, sillä heillä ei ole vielä ollut minkäänlaisien kuvaajien piirtämistä ainakaan yläasteella. Koordinaatiston pitäisi olla jo alakoulusta tuttu, eli he osaavat luultavasti etsiä ainakin pistepareja (x,y) koordinaatistosta. Halutussa kuvaajassa x-akseli on kuvien järjestysluku tai keskuslaattojen lukumäärä ja y-akseli on valkoisten laattojen lukumäärä. Kuvaajan piirtämistä voisi verrata pylväsdiagrammien tekemiseen, jos oppilaat eivät saa ideasta kiinni. Jos on aikaa ja oppilaat ovat keksineet aiemmin rekursiivisen säännön $+5$, voidaan yhteenvedossa keskustella siitä miksi y-koordinaatti kasvaa viidellä, kun x-akseli yhdellä.

3.4.2 Tehtävä 2: 2. asteen funktio kuviojonosta

Tehtävä 2 (kuva 4) on hyvin samanmuotoinen kuin tehtävä 1, mutta muodostettava funktio on epälineaarinen. Huomioitavaa on myös se, että kuvioissa ei ole selkeästi kuvion järjestyslukua vastaavia erivärisiä laattoja, kuten tehtävässä 1 on.

2)



A) Kuinka monta mustaa laattaa olisi seuraavassa kuviossa?

B) Kuinka monta mustaa laattaa tarvitaan kuvioon 10?

C) Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion mustien laattojen määrä tässä ketjussa.

D) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea mustien laattojen määrä missä tahansa kuviossa.

E) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä paljonko mustia laattoja tarvitaan kuhunkin kuvioon.

Kuva 4: *Kuviojono 2. asteen funktion muodostamiseksi*

A: 2a on hyvin vastaava tehtävä kuin 1a. Oppilaat todennäköisesti piirtävät seuraavan kuvion, josta he voivat laskea mustien laattojen määrän. Oikea vastaus on 32 mustaa laattaa. Yhteenvedossa tätä tehtävää tuskin tarvitsee ottaa huomioon. Tehtävässä on tärkeää olla tarkkana, että huomaa kaikkien dimensioiden kasvavan. Oppilaat voivat tarvita enemmän aikaa kuin tehtävässä 1a huomatakseen logiikan, jolla kuviot kasvavat.

B: Tämä tehtävä vastaa tavoitteiltaan tehtävää 1b. Vastauksen saa jatkamalla kuviota tai taulukoimalla lukuja, mutta kuvioiden piirtäminen kymmenenteen asti voi olla työlästä eikä taulukoinnistakaan keksi helposti mitään sääntöä. Vastaus voi löytyä myös muodostamalla alustava yleistys. Esimerkiksi suoraan kymmenennen kuvion piirtäminen on osoitus siitä, että oppilas on hoksannut idean, kuinka kuvio kasvaa kerta kerralta. Tässäkin tehtävässä oppilaat saattavat yrittää rekursiivista ratkaisua, varsinkin taulukoinnin pohjalta, mutta se ei johda kovin pitkälle ainakaan yleisen funktion kannalta.

Joku oppilaista voi olettaa, että tehtävä on samanlainen kuin ensimmäinen tehtävä ja ajatella laattojen lukumäärän kasvavan tasaisesti. Jos esimerkiksi kuvioon lisätään aina 7 laattaa edelliseen verrattuna, kuten lisäys on ensimmäisen ja toisen kuvion välillä, saadaan virheellinen vastaus 70 mustaa laattaa. Oikea vastaus tehtävään on 140 mustaa laattaa.

Lineaarisissa kuviojonoissa numeerinen esitys voi olla tuottoisa ja lukujen vakio erotus saatetaan huomata heti. Epälineaarisissa kuvioissa tämä lähestymistapa voi olla harhaanjohtava. Oppilaat saattavat kuitenkin huomata, että seuraavaan kuvioon täytyy lisätä aina kaksi enemmän kuin on lisätty edelliseen kuvioon (kuvioon 1 lisätään 7, saadaan kuvio 2 ja kuvioon 2 lisätään $7 + 2 = 9$, saadaan kuvio 3 jne.). Näin pystytään selvittämään tehtävän a- ja b-kohdat, mutta c- ja d-kohtien yleistykset voivat tuottaa hankaluuksia. Amitin ja Nerian (2007) mukaan vahvasti visuaaliset lähestymistavat johtivat parhaiten laajoihin yleistyksiin eli oikeanlaisen lausekkeen muodostamiseen.

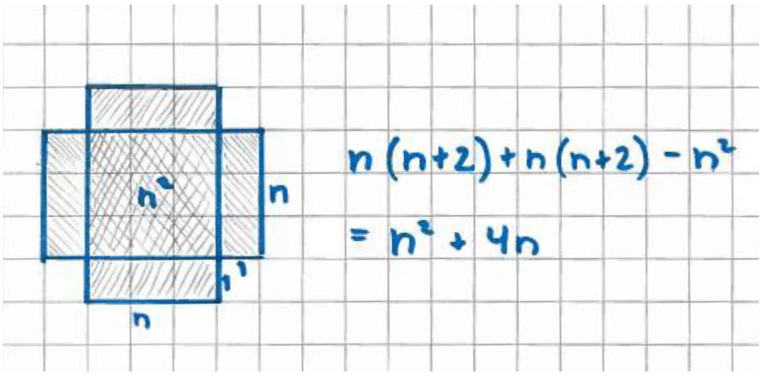
Heidän tutkimuksessaan, jossa oli käytetty aivan vastaavanlaista tehtävää, osa oppilaista oli ryhtynyt ratkaisemaan ongelmaa piirtämällä pari seuraavaa kuviota, laskemalla niiden laattojen lukumäärän ja peräkkäisten kuvioiden laattojen lukumäärien erotukset. Tästä he olivat huomanneet, että laattojen määrä ei kasva tasaisesti. Moni oli jättänyt tehtävän ratkaisun tähän vaiheeseen, koska he eivät löytäneet välittömästi mitään vastaavuutta luvuista. Tässä tutkimuksessa voimme kuitenkin ohjata oppilaita kysymysten avulla miettimään asioita myös toisella tavalla. Kuvion laattojen lukumäärän laskemisen voisi rinnastaa pinta-alan laskemiseen.

C: Tämä tehtävä vastaa merkitykseltään ja tavoitteiltaan tehtävää 1c. Oppilaiden voi olla helpompi muodostaa ensin sanallinen sääntö kuin muodostaa suoraan symbolinen sääntö. Sanallisesti kuvailtuna vastaus voisi olla esimerkiksi: ”Lasketaan ensin kuvion sisälle muodostuvan neliön laattojen lukumäärä. Neliön sivun pituus on sama kuin kuvion järjestysluku. Neliön ala saadaan laskettua $n \cdot n$, missä n on kuvion järjestysluku. Tähän lukuun täytyy lisätä kuvion sakarat, joita on neljä kappaletta ja jokaisessa sakarassa on niin monta laattaa kuin on kuvion järjestysluku.” Tämä vastaus vastaa funktiota $f(n) = n^2 + 4n$, joka on oikea vastaus sievimmässä muodossa.

D: Tämä tehtävä vastaa 1d-tehtävää. Oppilaat, jotka jakavat kuvion osiin, joiden aloilla on yhteys kuvion järjetyslukuun, menestyivät tehtävän ratkaisussa Amitin ja Nerian (2007) tutkimuksessa.

Jokaisen kuvion voisi täydentää täydeksi neliöksi lisäämällä kuvioiden kulmiin yhdet laatat eli yhteensä neljä laattaa jokaista kuviota kohden. Tällöin ison neliön ala olisi $(n + 2) \cdot (n + 2)$, josta täytyy vähentää lisätyt neljä laattaa eli $(n+2) \cdot (n+2) - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$. Hankaluus tässä muodossa tulee olemaan binomien kertolasku. Tutkimuskohteen seitsemäsluokkalaisille sitä ei ole vielä opetettu.

Oppilaat osaavat ehkä muodostaa laskulausekkeen, mutta sen sieventäminen tai vertaaminen johonkin toiseen muotoon voi olla hankalaa. Oppilaat eivät vielä osaa myöskään potenssimerkintää, mutta merkintä m^2 pitäisi olla tuttu. Suorakulmion pinta-alan laskeminen on opittu ehkä ”sivu kertaa sivu” -sääntönä. Yhteenvedossa potenssimerkintä voidaan ottaa esille, jos joku oppilaista on käyttänyt sitä.

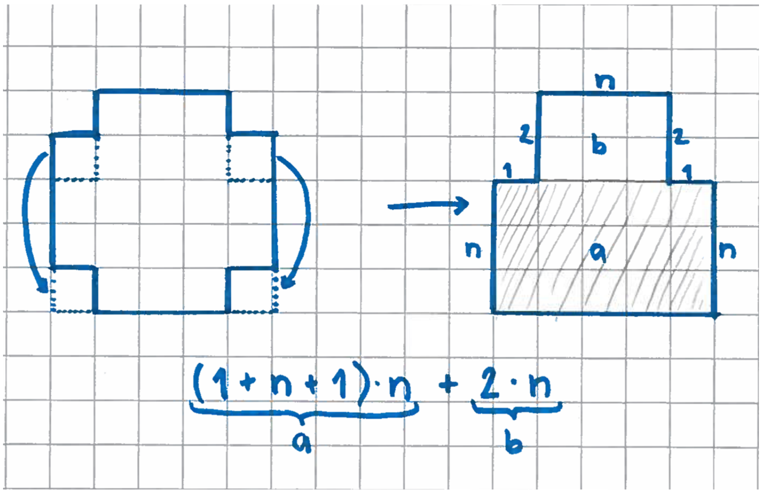


Kuva 5: *Pylväsajattelumalli tehtävään 2, n=kuvion järjestysluku*

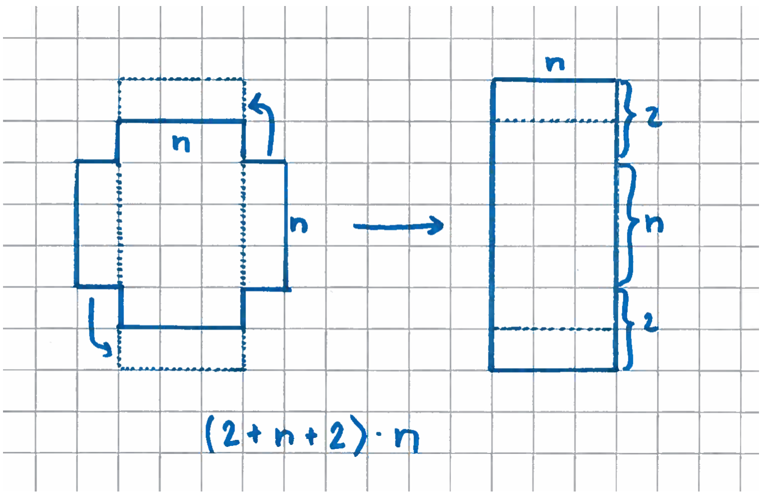
Kuvion voisi ajatella myös esimerkiksi pylväänä, jossa on siivekkeet. Tällöin laskettaisiin pylvään ala $n \cdot (n+1)$ ja siivekkeet $2 \cdot n$ eli lauseke olisi $n \cdot (n+2) + 2n$. Pylväsajattelua hyväksikäyttäen tehtävän voisi myös ratkaista laskemalla vaakatasossa olevan pylvään alan $n(n+2)$ ja lisäämällä siihen pystysuunnassa olevan pylvään, joka on myös $n(n+2)$ ja vähentämällä tästä keskelle jäävän neliön n^2 (kuva 5), joka tulisi muuten kahteen kertaan. Lausekkeeksi tulisi tällöin $n(n+2) + n(n+2) - n^2$.

Kuvion pinta-alan laskemista voi helpottaa kuvion laattojen siirtely sopivalla tavalla. Jos esimerkiksi siivekkeistä siirretään yhdet laatat kuvion alareunan tasolle (kuva 6), saadaan kuvio, jossa voidaan ajatella olevan kaksi suorakulmiota ja kuvion ala voidaan laskea kahdessa osassa. Saadaan lauseke $(1 + n + 1) \cdot n + 2 \cdot n$.

Kuvion sivusiivekkeet voi ajatella myös siirrettävän kuvion päälle (kuva 7) tai päällä olevat siivekkeet vastaavasti sivuille, jolloin kuviosta saadaan yksi iso suorakulmio. Tällöin saadaan lauseke $(2 + n + 2) \cdot n$.



Kuva 6: *Ajattelumalli tehtävään 2, jossa muokataan kuviota järjestämällä laattoja uudelleen, n=kuvion järjestysluku*

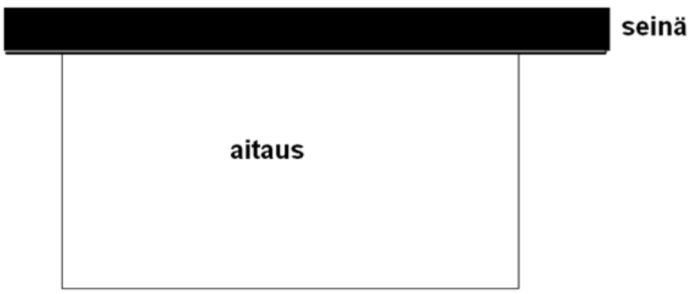


Kuva 7: *Kolmas ajattelumalli tehtävään 2, jossa muokataan kuviota järjestämällä laattoja uudelleen, n=kuvion järjestysluku*

3.4.3 Tehtävä 3: Pinta-ala funktiona

Myös tehtävässä 3 (kuva 8) on tarkoitus muodostaa epälineaarinen funktio. Erityisesti tehtävän tavoitteena on liittää funktion kuvaaja funktioon. Ihanteellisinta olisi, että oppilaat löytäisivät kuvaajan avulla funktion maksimin eli suurimman mahdollisen aitauksen pinta-alan. Hyödyllistä on toki muukin tieto siitä, kuinka oppilaat käyttäisivät kuvaajaa tehtävän ratkaisemisessa. Tehtävä on varmasti haastava oppilaille, sillä he eivät ole käsitelleet vielä kuvaajia, mutta koordinaatiston pitäisi olla alakoulusta tuttu. Aitauksesta on annettu kuva helpottamaan tehtävän hahmottamista. Oppilaiden täytyy hoksata, että koska aitaus rakennetaan seinän viereen, kanaverkkoa tarvitsee käyttää vain kolmelle aitauksen sivulle.

3) Hempalla on 13 metriä kanaverkkoa, josta hän aikoo rakentaa kanoilleen suorakulmionmuotoisen aitauksen kanalan seinän viereen.



A) Jos aitauksen seinästä lähtevän sivun pituus on 5 metriä, niin kuinka suuri aitauksen pinta-ala on tällöin?

B) Keksi tapa, jolla voidaan laskea aitauksen pinta-ala, kun seinästä lähtevän sivun pituus tiedetään? Miten tämän voi kirjoittaa kaavana?

C) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä kuinka suuri aitauksen pinta-ala on, kun seinästä lähtevän sivun pituus tiedetään.

D) Hemppa haluaa vain parasta kanoilleen ja toivoo, että aitauksesta tulisi mahdollisimman iso vaikka kanaverkkoa on käytettävissä 13m. Miten aitauksen mitat olisi valittava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

E) Kuinka pitkiä sivujen täytyy olla, jotta aitauksen pinta-ala olisi 18 neliömetriä?

Kuva 8: *Kana-aitaustehtävä*

A: Tehtävässä lasketaan ensin annetulla numeroarvolla kana-aitauksen pinta-ala ennen kuin siirrytään yleiseen tapaukseen. Tärkeää on huomata, mitä aitauksen seinämää kyseisessä tapauksessa tarkoitetaan. Oppilaiden täytyy osata suorakulmion pinta-alan laskeminen. Tiedetään, että verkkoa on käytettävissä 13 m ja aitaus on suorakulmion muotoinen. Suorakulmion symmetrian vuoksi aitaukseen tulee siis kaksi 5 m pituista seinämää ja kolmas verkosta rakennettava seinämä on 13 $m - 2 \cdot 5$ $m = 3$ m pituinen. Suorakulmion laskusäännöllä siis saadaan, että aitauksen pinta-ala on 5 $m \cdot 3$ $m = 15$ m^2. Tehtävässä tuottaa luultavasti eniten ongelmia kanalan seinän suuntaisen sivun pituuden laskeminen käyttämällä tietoa annetusta sivun pituudesta.

B: Tässä tehtävässä pitäisi muodostaa jälleen yleinen lauseke, jolla saadaan laskettua aitauksen pinta-ala kun aitauksen verkosta rakennettujen sivujen pituuksien summa on 13 m. Jos seinästä lähtevän sivun pituutta merkitään x:llä, niin kanalan seinän suuntaisen sivun pituus on $13 - 2x$, koska x:n pituisia seiniä aitauksessa on kaksi. Suorakulmion pinta-alalle saadaan siis lauseke $x(13 - 2x) = -2x^2 + 13x$.

Tehtävässä vaikeuksia saattaa tuottaa se, että ensin täytyy muodostaa yleinen lauseke seinän suuntaiselle sivulle ja tämän jälkeen pitää vielä muistaa kertoa se toisella sivun pituudella, jotta saadaan pinta-ala. Vastauksista nähdään ovatko oppilaat omaksuneet edellisen oppitunnin yhteenvedossa käydyn x-merkinnän vai ei.

C: Tehtävän tarkoituksena on piirtää edellisessä kohdassa muodostetun funktion kuvaaja. Oppilaat voivat taulukoida aiemmin muodostetun laskusäännön avulla pistepareja, joita voidaan sijoittaa koordinaatistoon. Oppilaille on annettu valmis koordinaatisto, jossa valmiiksi skaalatut akselit helpottavat tehtävän ratkaisua. Jos tehtävissä 1 tai 2 kuvaajan piirtäminen on onnistunut, ei tässä tehtävässä pitäisi olla ongelmia pisteiden sijoittamisessa. Oppilasta voi pyytää vertaamaan tätä tehtävää edellisen tunnin tehtäviin. Kuvaajaksi muodostuvan paraabelin huipun koordinaatit eivät kuitenkaan ole kokonaislukuja, siksi kuvaajan huippukohdan piirtäminen voi olla hankalaa.

D: Tehtävän tarkoituksena on tutkia lisää oppilaiden kuvaajan käyttötaitoa. Jos oppilas on osannut piirtää edellisessä kohdassa alaspäin aukeavan paraabelin, niin kuvaajasta on melko helppo katsoa sen korkein kohta. Todennäköisesti oppilaat ehdottavat tähän vastaukseksi pinta-alaa 21 m^2, joka on vain kokonaislukujen perusteella piirretyn kuvaajan huipun y-koordinaatti. Oppilailta voi tarvittaessa kysyä, onko aitauksen sivujen pituuksien oltava kokonaislukuja ja kuinka tämä vaikuttaa kuvaajaan. Oppilaita voi pyytää laskemaan lisää pisteitä väliltä $2 < x < 4$, jotta kuvaajan huippu hahmottuisi paremmin.

F: Tämä tehtävä testaa oppilaan kuvaajan lukutaitoa toisin päin eli oppilaan täytyy etsiä y-akselilta kohta, joka vastaa 18 m^2 pinta-alaa ja tätä pistettä vastaava x-koordinaatti, joka on seinästä lähtevän sivun pituus. x-koordinaatin avulla voidaan laskea vielä seinän suuntaisen sivun pituus.

3.5 Analyysimenetelmät

Oppituntien analyysi perustuu Powellin ym. (2003) esittelemään videoanalyysimenetelmään. Menetelmä perustuu pitkittäistutkimuksiin ja se on kehitetty nimenomaan matemaattisten ajattelun kehittymisen analysointiin. Powellin ym. kehittämä analyysimenetelmä koostuu seitsemästä toistensa kanssa vuorovaikutuksessa olevasta epälineaarisesta vaiheesta:

1. Videoiden huolellinen katsominen *(Viewing attentively the video data)*
2. Videoiden sisällön kuvaileminen *(Describing the video data)*
3. Oleellisten tapahtumien tunnistaminen *(Identifying critical events)*
4. Litteroiminen *(Transcribing)*
5. Koodaus *(Coding)*
6. Juonen rakentaminen *(Constructing storyline)*
7. Kertomuksen muodostaminen *(Composing narrative)*

Tämän tutkimuksen analyysi on muokattu edellä mainitun analyysimenetelmän pohjalta tähän tutkimukseen sopivaksi. Aluksi videot katsottiin läpi ja jo tässä vaiheessa kiinnitettiin huomiota mielenkiintoisiin kohtiin, kuten sellaisiin, joissa esiintyi oppilaiden erilaisia ajattelutyylejä tai ratkaisutapoja. Lisäksi huomio kiinnitettiin oppilaiden merkintätapoihin ja ongelmakohtiin. Tämän jälkeen videot katsottiin uudelleen ja litteroitiin kuvaillen tapahtumia.

Videoilta valittiin tutkimuksen kannalta olennaisia kohtia, jotka litteroitiin tarkemmin sanasta sanaan. Videoiden tapahtumia täydennettiin litteroimalla myös ääninauhojen tapahtumia, joista poimittiin oleelliset kohdat ja videomateriaalilla heikosti kuuluvia osuuksia. Koska videokuvaaja kuvasi lähinnä tyttöjen ryhmää, tapahtui poikaryhmän tapahtumien litterointi pääasiassa ääninauhojen pohjalta. Taulukossa 1 on esimerkki litteroinnin pohjana käytetystä taulukosta.

Tässä tutkimuksessa ei käytetty suoranaista koodausta, vaan litterointitaulukon kommenttikenttään nostettiin paremmin esille oppilaiden erilaiset ajattelutyylit sekä representaatiot, jotka käyvät videolta ilmi. Aineisto oli sen verran pieni, että koodausta ei koettu välttämättömäksi. Myös oppilaiden kirjalliset tuotokset, niin tehtäväpaperit kuin suttupaperitkin, katsottiin tarkasti läpi ja otettiin mukaan analyysiin. Oppilaiden toiminnasta ja ajatusmalleista tehtiin tulkintoja sekä kirjallisten että suullisten representaatioiden perusteella.

Taulukko 1: *Esimerkki litteroinnista*

Aika	Kuvaus	Kommentit
21:25 - 21:30	Niina: Tässä yhtä mustaa palaa kohden on kuus valkosta palasta. Opettaja: Onko aina jokaista mustaa (kohden)? Niina: Ei, tos on viis. Opettaja: Joo-o. Niina: No eli viis palasta yhtä mustaa kohden… Ilona: No mut eihän tossa (ole), siinähän on… (osoittaa kuviota päin) Ilona: Ootko sä laskenu ton joka on yhessä? Niina laskee valkeiden laattojen lukumääriä kuvioista. Tytöt alkavat olla hieman sekaisin laskuissaan ja väsyneitä.	”6*n” ”5*n”

Oppilaiden päättelyä tulkittaessa pääteltiin, näkevätkö oppilaat kuvion tietyllä tavalla, ymmärtävätkö oppilaat kuvion koskevan mitä tahansa lukua ja antavatko oppilaat säännön rekursiivisessa, eksplisiittisessä vai jossain muussa muodossa. Radford (2010) on kuvaillut näiden asioiden olevan yhteydessä onnistuneeseen yleistämiseen. Tutkija yritti tulkita myös oppilaan verbaalisia esityksiä, kun kirjallista esitystä ei ollut. Analyysissä kiinnitettiin erityisesti huomiota oppilaiden erilaisiin ajattelumalleihin ja tehtävien ratkaisumenetelmiin.

Tämän jälkeen oppituntien tapahtumista kirjoitettiin aihepiireittäin kronologisesti etenevä kertomus, joka esitetään tutkimustuloksina. Kyseiseen järjestykseen päädyttiin, koska tehtävissä oli jaoteltavissa selkeästi erilaiset aihealueet: ensimmäisen asteen funktio, toisen asteen funktio sekä niiden kuvaajat. Viimeisenä vaiheena tuloksia verrattiin aikaisempiin tutkimuksiin sekä tehtiin johtopäätökset.

4 Tutkimustulokset

Tässä kappaleessa käsitellään oppituntien tapahtumat edeten siten, että ensin tarkastellaan ensimmäistä tehtävää sekä poikien että tyttöjen osalta. Tämän jälkeen siirrytään toisen asteen funktion määrittämiseen eli tehtävien 2 ja 3 käsittelyyn vuorotellen tyttöjen ja poikien toimintaa käsitellen. Lopuksi kuvaajien käsittely on erotettu omaksi kappaleekseen 4.8. Kukin aihealue etenee kronologisesti. Kuvaukseen on nostettu esille erityisesti ne kohdat, joissa ilmenee oppilaiden erilaisia ajattelutyylejä, funktion representaatioita eri muodoissa tai ongelmallisia kohtia.

4.1 Tehtäviin tutustuminen

Ensimmäisellä tunnilla oppilaat saivat ratkaistavakseen tehtävät 1 ja 2, jotka esiteltiin kuvissa 3 ja 4. Molemmissa oli päämääränä saada muodostettua funktiolauseke annettuun kuviojonoon perustuen. Ensimmäisessä tehtävässä tavoitteena oli lineaarinen ja toisessa epälineaarinen funktio. Pojat saivat tehtyä molemmat tehtävät loppuun juuri ennen oppitunnin loppua. Tyttöjen ryhmä ehti vain 1. tehtävän d-kohtaan eli muodostamaan lausekkeen, mutta ei tekemään koordinaatistoesitystä. Tyttöryhmän keskustelu oli erittäin vilkasta. Pojat olivat hieman hiljaisempia, mutta keskustelivat kuitenkin keskenään. Erityisesti Antti selitti ratkaisujaan ja ideoitaan Eerolle, tosin sillä seurauksella, että Eeron vastaukset vaikuttivat olevan Antin vastausten kopioita. Ryhmien välistä keskustelua ei juurikaan ilmennyt.

Alussa molemmat ryhmät halusivat tarkennuksen kuvaan, jossa oli kolme valkoisista ja mustista kuusikulmaisista laatoista muodostuvaa kukkamaista kuviota. Heille ei ollut selvää oliko kuvassa vain yksi kuvio vai kolme kuviota. Ensimmäisessä tehtävässä piti laskea aluksi seuraavan, eli neljännen, kuvion laattojen lukumäärä. Tyttöjen ensimmäinen hyvä havainto oli, että jokaista mustaa laattaa kohden ei ole tasamäärää valkoisia laattoja. Kommentti toi esille sen, että tytöt havaitsivat valkoisten ja mustien laattojen välillä mahdollisesti olevan yhteyden. Siiri pohti voisiko neljännen kuvion laattojen lukumäärän saada kertomalla toinen kuvio kahdella. Idea kuitenkin hylättiin nopeasti perustuen siihen, että kuva ei olisi täsmännyt. Lisäksi Siiri oli itsekin hyvin epävarma omasta ehdotuksestaan.

Niina huomautti, että kukkien yhtymiskohdassa on vain yksi laatta. Siiri esittää aiempaan ehdotukseensa pohjautuen idean, että tämä yhtymiskohdan laatta voitaisiin vähentää, mutta muut tytöt hylkäävät ehdotuksen. Tällä, $2 \cdot 11 - 1$ -tavalla (missä 11 on toisen kuvion laattojen määrä) tytöt olisivat kyllä saaneet oikean vastauksen neljännelle kuviolle, mutta ratkaisutapa ei ehkä olisi ollut kovin tuottoisa jatkossa. Yleistä sääntöä olisi ollut vaikea muodostaa. Ilona ja Siiri havaitsivat, että laattoja tulee aina viisi lisää uuteen kuvioon. Täten Ilona laski $16 + 5 = 21$ laattaa 4. kuvioon. Myös Niina hyväksyi vastauksen.

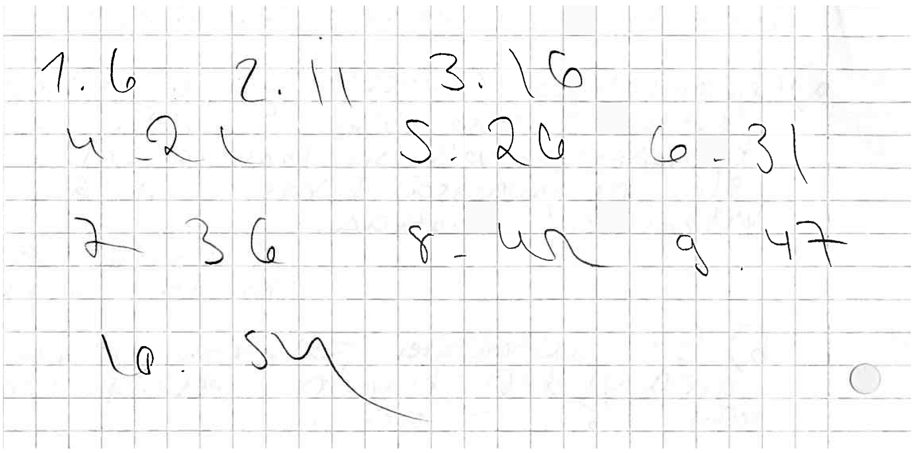
Vastauksen muotoileminen paperille vaikutti olevan hankalaa. Siiri kaipasi eniten tukea toisilta tytöiltä vastauksensa muotoiluun. Niina kirjoitti vastaukseksi: ”*21 valkoista laattaa. Ensimmäisessä kukassa on 6 valkoista laattaa. Aina kun lisätään yksi lisää tulee 5 valkoista laattaa. Eli neljännessä on 21 valkoista laattaa*”. Tytöt löysivät tehtävälle siis ratkaisun rekursiivisesti. Tämä oli ehkä ilmeisin ratkaisutapa kyseiseen tehtävään.

Poikien työskentely eteni huomattavasti nopeammin kuin tyttöjen. Antti huomasi heti alussa, että seuraavaan kuvioon tulee aina viisi valkoista laattaa lisää. Antti selitti Eerolle, että kuvioilla on aina yksi yhteinen laatta. Ilmeisesti myös Antti näki kuvioiden muodostuvan useista kukkamaisista kuvioista, joita yhdistää valkoinen laatta kahden mustan laatan välissä. Antti laski paperista, että kolmannessa kuviossa on 16 laattaa ja siihen täytyy lisätä 5, jolloin saadaan neljännen kuvion laattojen määrä. Paperille kirjataan vain lyhyt vastaus 21 valkoista laattaa.

Poikien työskentelyä saattoi nopeuttaa se, että poikia oli vain kaksi eli mielipiteitä ja ideoita, joista kiistellä oli vain kaksi. Lisäksi Antti vaikutti olevan paljon dominoivampi ja päättäväisempi kuin Eero, joten suuria väittelyitä ei päässyt syntymään. Tyttöjä oli kolme ja kaikilla heistä oli omat vahvat mielipiteet. Tyttöjen ryhmä oli siinä suhteessa tasaisempi. Tytöt tuntuivat ottavan vakavasti kehoituksen perustella vastauksensa ja väitteensä, joten aikaa kului enemmän oikean perustelun löytämiseen. Tyttöjen kirjalliset vastaukset olivat myös monipuolisemmat kuin poikien, joten ymmärrettävästi kirjallisen perustelun muotoileminen vei aikaa. Pojiltakin perustelut löytyivät kysyttäessä, mutta paperille niitä ei saatu. Oppilailla tuntuu olevan mielikuva, että kirjoitetun tekstin täytyy olla varmasti totta ja hyvin muotoiltua.

4.2 Kaavan tarve

Tytöt ryhtyivät laskemaan ensimmäisen tehtävän b-kohdassa pyydettyä 10. kuvion valkoisten laattojen määrää lisäämällä aina edellisen kuvion laattojen määrään viisi. Yritettyään päässälaskua Ilona alkoi luetteloimaan laattojen lukumääriä järjestyksessä paperille (kuva 9). Tämä tuotti kuitenkin virheellisen tuloksen kahdeksannen kuvion kohdalla sattuneen laskuvirheen vuoksi.



Kuva 9: *Ilonan ratkaisuyritys tehtävään 1b*

Tytöt ottivat myös laskimen avukseen. Niina laski laskimella: $16 \cdot 3 + 5 = 53$ (missä $16 \cdot 3$ edustaa 9. kuvion valkoisten laattojen lukumäärää), jonka jälkeen tytöt keskustelivat aiheesta seuraavasti:

ILONA: *No se on 53*
NIINA: *Ei voi olla*
ILONA: *No miten niin ei voi olla?*
NIINA: *No emmä tiiä kans voiko*
NIINA: *Laskin näyttää tätä. Luotetaan laskimeen!*

Siiriä laskimen antama tulos ei vakuuttanut. Laskin tuntui olevan oppilaille kuin ihmetyökalu, joka tekisi kaiken työn ja jolla ei voi tehdä virheitä. Tässä tapauksessa tytöt eivät ottaneet huomioon, että $16 \cdot 3$ ei tuota heidän tavoittelemaansa 9. kuvion laattojen lukumäärää. Seuraavaksi Siiri ehdotti vastaukseksi 36, mutta muut tyrmäsivät hänet alkuunsa. Se, mihin ehdotus perustui, ei käynyt ilmi ollenkaan.

Ilona perusteli Siirin veikkausen vääräksi siten, että jos jo 4. kuviossa on 21 palaa, niin 10.:ssä ei voi olla niin vähän, koska siihen lisätään aina viisi. Ilona osoitti tällä käsityksensä vastauksen suuruusluokasta. Tytöt miettivät pitkään eri vaihtoehtoja, mutta perustelu vastauksen oikeellisuudesta vaikutti olevan vaikeaa sekä itselle että luokkakavereille. Oikea vastaus löytyi lopulta summaamalla oikea määrä viitosia laskimen avulla.

Tytöt kirjoittivat nopeasti vastauksen: ”*Kertomalla tai plussaamalla*” c-kohtaan, jossa kysyttiin tapaa laskea minkä tahansa kuvion laattojen määrä. Sana ”kaava” tuotti ongelmia d-kohdan tehtävänannossa. Opettaja lähti johdattelemaan kaavan käsitettä c-kohdan kautta:

ILONA: *Mikä on kaava?*
NIINA: *Miten kaava pitää muodostaa?*
OPETTAJA: *Osaisitteko te tarkemmin kertoa mitä kerrotte tai plussaatte?*
NIINA: *No niitten määrää.*
SIIRI: *Niitä valkosia.*
OPETTAJA: *Osaisitteko vielä tarkemmin kertoo? ...jos teiän pitäisi kertoa muille ihmisille miten se laskutoimitus tapahtuu.*
NIINA: *Se on helpompi näyttää kun kertoo, silleen näin näyttää ja selittää.*
OPETTAJA: *Mitä sä teet sillä laskimella kun sä lasket?*
NIINA: *Plussaan edelliseen tulokseen viis.*
OPETTAJA: *Joo... no, entä jos sulla olis vaikka sadas kuvio ja sun pitäs sitten laskee kuinka monta valkeeta laattaa siinä on? Sulla kestäs hirveen kauan plussata niitä vitosia siihen. Keksisittekö nopeempaa tapaa, ettei tartteis lähtee sieltä ensimmäisestä kuviosta laskemaan niitä, vaan saisitte suoraan?*

Omien työvaiheiden selittäminen sanallisesti ei tuntunut olevan oppilaille tuttua. Oppitunneilla he ovat varmasti selittäneet luokkatovereilleen laskutapojaan, mutta samalla he ovat voineet näyttää laskutapahtuman esimerkiksi laskimesta eikä sanallista selittämistä ole tarvittu niin paljon. Tarkasta sanallisesta selityksestä tehtävän c-kohdassa oppilaat olisivat voineet saada idean myös kaavan kirjoittamiseen.

Tyttöjä johdatettiin pois rekursiivisesta ajattelutavasta yrittäen saada heidät ajattelemaan niin suurta kuviota, että sen laattojen lukumäärän laskeminen lähtien liikkeelle ensimmäisestä kuviosta olisi liian työlästä. Niina ei ollut hylännyt vielä kokonaan ajatusta laskea laattojen lukumääriä kuvioiden monikertojen avulla. Hän ehdottaa laskuksi $51 \cdot 10 = 510$, koska $10 \cdot 10 = 100$ ja 10. kuviossa on 51 laattaa. Idea monikertojen käyttämisestä ei ollut huono ja tytöt olivat jäljillä siitä, mitä tehtävässä haettiin.

Tytöt hylkäsivät idean jälleen yrittämättä edes miettiä mikä ajattelussa menee pieleen. Syy, miksi idea hylättiin, jäi epäselväksi. Tytöt hylkäsivät tämän idean jo 1a-tehtävän kohdalla perustuen siihen, että kuva ei olisi täsmännyt, jos 2. kuvio olisi kerrottu kahdella yrittäen saada aikaan 4. kuvio, joten tytöt saattoivat päätellä, ettei tämä taktiikka toimi isommillakaan luvuilla. Seuraavaksi he yrittivät päätellä kuinka monta valkoista laattaa on kutakin mustaa kohden:

NIINA: *Tässä yhtä mustaa palaa kohden on kuus valkosta palasta*
OPETTAJA: *Onko aina jokaista mustaa* [kohden]?
NIINA: *Ei, tos on viis.*
OPETTAJA: *Joo-o*
NIINA: *No eli viis palasta yhtä mustaa kohden ...*

Valkoiset palat eivät jakaudu tasan jokaista mustaa palaa kohden, mikä tuntui olevan ongelma tytöille. He kokeilivat sääntöä $5x$, $6x$ ja Niina jopa yritti laskea laattojen määrälle likiarvon $5{,}3x$ tehtävän kolmannen kuvan mukaan, missä x on mustien laattojen määrä. Likiarvon määrittäminen valkoisten laattojen lukumäärälle jokaista mustaa laattaa kohden kuitenkin hylättiin.

Tytöillä tuntui olevan ajatus, että lausekkeen olisi pitänyt olla todella yksinkertainen ja laskettavissa yhdellä ainoalla laskutoimituksella. Tytöt yrittivät saada väkisin toimivan lausekkeen, joka olisi ollut yksinkertainen. Kahden eri peruslaskutoimituksen yhdistäminen samaan lausekkeeseen tuntui olevan kaukainen ajatus. Opettaja kysyi tytöiltä, että riittääkö pelkkä kertolasku, vai pitäisikö käyttää useampaa laskutoimitusta. Opettaja ryhtyi ohjaamaan tyttöjen toimintaa voimakkaammin, jotta tytöt pääsisivät tehtävässä eteenpäin:

OPETTAJA: *Te tiiätte ainoostaan kuinka mones kuvio se on. Jos te tiiätte, että on sadas kuvio, niin mitä tiiätte ainakin siitä kuviosta? Jos tää on kolmas, tää on toinen kuvio ja tää on ensimmäinen* [osoittaa kuvioita paperista tässä järjestyksessä], *niin mitä siinä sadannessa kuviossa ainakin on?*
NIINA: *Sata mustaa palaa.*
OPETTAJA: *Joo.*
ILONA: *Viissataa!* [pelleilyä]

OPETTAJA: *No voisko se liittyä se valkeitten laattojen määrä nyt jotenkin niitten mustien laattojen määrään?*
SIIRI: *Se jaetaan?*
NIINA: *Siinä on sata mustaa palasta ja yhtä mustaa palasta kohden on kuus valkeeta palasta.*
OPETTAJA: *Onko kuus?*
SIIRI: *Ei.*
NIINA: *Viis.*
OPETTAJA: *No riittääkö se, että jokaista mustaa laattaa kohden on kuus, eiku viis* [valkoista palasta]?
SIIRI: *Ei, vaan onks se silleen kuus plus ja sit se kerrotaan viiellä?*
NIINA: *Mistä se kuus?*
SIIRI: *No se alku kato, sit kerrotaan niinku nää viis palaa niin monella kun niitä halutaan. Tai emmä tiiä...*
OPETTAJA: *Oot jo tosi lähellä!*

Siiri esitti selkeästi ajatuksen, että luku 6 voitaisiin summata lausekkeessa erikseen, mutta hän ilmaisi epätarkasti, että "se" kerrotaan viidellä. Ongelmaksi muodostui kuinka ilmaista matemaattisesti mustien laattojen määrä, josta on otettu yksi musta laatta pois.

Pojilla ilmeni myös ajatus laskea kuvioiden monikertoja. Antti pohti aluksi 10. kuvion ratkaisuvaihtoehtoa, jossa ensimmäisen kuvion kuusi valkoista laattaa kerrotaan kymmenellä , jolloin saataisiin vastaukseksi 60, mutta hän hylkäsi ajatuksen nopeasti. Pojat päätyivät hetken miettimisen jälkeen oikeaan vastaukseen eli 51 valkoista laattaa. He saivat vastauksen ajattelemalla, että jokaista mustaa laattaa ympäröi viisi valkoista laattaa ja lisäksi täytyy lisätä vielä yksi päätypala.

Perusteluja oli Antin mielestä vaikea kirjoittaa. Suullisesti hän osasi kuitenkin kertoa, että hän oli laskenut $10 \cdot 5$ ja sitten lisännyt yhden. Vaikutti siltä, että Antille oli selvää mustien laattojen lukumäärän yhteys kuvion järjestyslukuun. Pojat keksivät jo siis eksplisiittisen säännön tässä vaiheessa. Tytöt sen sijaan puhuivat lähinnä kuvion järjestysluvusta eivätkä ilmaisseet selvästi, että he olisivat ajatelleet mustia laattoja olevan kuvion järjestysluvun verran ennen kuin opettaja toi ajatuksen esille.

4.3 Siirtyminen rekursiivisesta ajattelusta eksplisiittiseen ajatteluun

Siiri osasi tiivistää rekursiivisen säännön yhteen lauseeseen:

SIIRI: *Eiku, niinku alkukuviossa on kuus valkoista, sit lisätään aina viis, viis, viis, viis ...*

Muut tytöt eivät tuntuneet ottavan Siirin ehdotuksia missään vaiheessa kovin tosissaan eivätkä he lähteneet kehittämään Siirin tekemää huomiota pidemmälle. Siirillä oli tunnin kuluessa useita hyviä ehdotuksia, mutta muut tytöt eivät ottaneet hänen ehdotuksiaan kovin vakavasti. Siirin tunnin alussa tekemä virhe tuntui vaikuttavan koko lopputunnin ajan negatiivisesti muiden tyttöjen asenteeseen Siirin ehdotuksia kohtaan. Asenteet Siiriä kohtaan voivat johtua mahdollisesti myös jo aikaisemmista Siirin epäonnistumisista matematiikan tunneilla. Sääntö $6+5+5+5+\ldots$ esiintyi tyttöjen keskustelussa useasti, mutta lähinnä vain sanallisessa muodossa. He eivät kirjoittaneet mitään välivaiheita tai keskeneräisiä ajatuksia paperille, mikä olisi voinut edistää kaavan muodostamista. Ideointi paperille puuttui lähes kokonaan. Paperille halutiin saada vain lopullinen vastaus ja mahdollisesti virheellisen tiedon kirjoittamista välteltiin.

Tytöt jatkoivat sadannen kuvion valkoisten laattojen määrän pohtimista:
Opettaja: *Siis eli yhtä mustaa laattaa kohden liittyy viis palasta, mutta onko sillon kaikki valkeet palaset siinä kuviossa?*
Siiri: *Ei.*
Opettaja: *Montako puuttuu?*
Siiri: *Yks. Eiku...*
Opettaja: *Miks yks?*
Siiri: *Tai siis ku... tuossa alussa on kuus, sit niitä lisätään vaan viis siihen.*
Niina: *Hei, jos siinä eka on 99 mustaa palasta ja niitä kohden viis valkosta plus yks musta ja kuus valkosta.*
Ilona: *Täh?*
Niina: *Jos pitää olla sadas kuvio, siinä on sata mustaa kuiteski, niin eka 99 mustaa ja niitä kohden tota viis valkosta jokasta plus yks musta ja sitä kohden kuus valkosta.*

Tarpeeksi suuren kuvion ajatteleminen auttoi lopulta irtautumaan rekursiivisesta ajattelutavasta. Niina osasi kertoa laskutavan oikein sadannelle kuviolle käyttäen ajattelussaan periaatteena kaavaa $6 + 5 \cdot (x - 1)$. Tyttöjä kehotettiin yleistämään tämä sääntö. Edelleen kukaan tytöistä ei juurikaan käyttänyt paperille kirjoittamista apuna. Kävi ilmi, että tulon ja summan yhteys toisiinsa ei ollut enää muistissa, joten opettaja muistutti asiasta kysymällä kuinka esimerkiksi $3+3+3+3$ voitaisiin kirjoittaa lyhyemmin. Tästä Siiri sai idean ja esitteli sen seuraavasti:

Siiri: *Eihän siinä sanota, että pitäs laskee valkoset ja mustat erikseen... Seittemän palaa plus äx kertaa kuus.*
Niina: *Miks kertaa kuus? Mikä se x on?*
Ilona: *No se on joku luku.*
Siiri: *No kato, tiätsä se, x on se niinku kuinka monta kuka käyttää sitä, niin monta se tarvii siihen. Se on x on niinku se määrä mitä se tarvii siihen.*

Siiri otti laskuihin mukaan mustat keskuslaatat ja osasi kertoa suullisesti kaavan $7 + x \cdot 6$. Kun opettaja muistutti, ettei mustien laattojen määrää kysytty, osasi Ilona vähentää kaavasta mustien laattojen määrän ja muuttaa sen muotoon $6 + 5 \cdot x$. Siirtyminen rekursiivisesta ajattelusta eksplisiittiseen oli tapahtunut. Edelleen verbaalisen ilmaisun kirjoittaminen paperille vei aikaa ja x:n merkitys tarvitsi lisää selvittämistä.

4.4 Tuntemattoman muuttujan kirjallinen representaatio

Vaikka tytöt käyttivät mielellään kaavassaan merkintää x, ei kaikille kuitenkaan ollut selvää mitä se tarkoittaa. Vaikutti jopa siltä, että sitä käytettiin, koska niin kuului tehdä. Eräässä keskustelussa Ilona ehdotti ratkaisuksi kaavaa $x + 5$ ja kun opettaja kysyi häneltä mikä x on kaavassa, vastasi Ilona, että kuusi. Hän siis vain ajatteli luvun kuusi paikalle merkin x ja ajatteli näin saaneensa kaavan. Myös seuraava keskustelu vahvistaa ajatusta siitä, että Ilona ymmärsi x:n ehkä vain yhtenä lukuna:

ILONA: *Onks täällä laskimessa x:ää?*
NIINA: *No ei...*
SIIRI: *Ei todellakaan ole.*
ILONA: *No ihan hyvin voi olla.*

Kuten Siirin selityksestä luvussa 4.3 käy ilmi, Siiri ymmärsi jollain tasolla mitä x tässä tapauksessa esitti. Hän ymmärsi, että x voi tarkoittaa eri lukuja riippuen siitä, mitä milloinkin tarvitaan. Hän jatkoi selittämistä:

SIIRI: *Eka sillein seittemän palaa plus x kertaa kuus, koska aina lisätään kuus palaa yhteensä ja se x on niin paljon kuin niitä tarvitaan ... kuinka monta tarvitaan kuvioita ... Montaa kuvioo tarvitaan, niin se x kuvaa sitä.* [mukana myös mustat laatat]

On tärkeää huomata, että tyttöjen käyttämä x ei ole suoraan kuvion järjestysluku, vaan siitä yhtä pienempi luku. Siiri ei selityksessään väitä, että x olisi mustien laattojen määrä tai kuvion järjestysluku, vaan selittää sen yleisesti olevan luku, jota tarvitaan. Oppilaiden voi olla vaikeaa ymmärtää, että kokonaislukua x yhtä pienempi kokonaisluku on $x - 1$.

Opettaja halusi varmistaa osaisivatko tytöt käyttää kehittämäänsä kaavaa tai ymmärsivätkö he kirjoittamansa lausekkeen sisällön. Opettaja pyysi Siiriä kokeilemaan toimiko heidän kaavansa kolmannelle kuviolle. Opettaja halusi nähdä mitä Siiri sijoittaa x:n paikalle. Siiri sijoitti virheellisesti kaavaan luvun kolme saaden tulokseksi 21 laattaa. Siiri kuitenkin huomasi, että vasta neljännessä kuviossa olisi 21 laattaa ja laski kolmannesta kuvasta, että vastaukseksi olisi pitänyt saada 16 laattaa.

Opettaja ryhtyi avustamaan Siiriä kaavan muokkauksessa niin, että hän voisi sijoittaa muuttujan x paikalle kuvion järjestysluvun. Siiri näytti kolmannesta kuviosta vasemmaisinta mustaa laattaa ja sanoi, että sitä vastaa kuusi valkoista laatta ja kahta seuraavaa mustaa laattaa vastaa viisi valkoista laattaa. Opettaja pyysi kirjoittamaan laskutoimituksen $6+5+5$ paperille. Ennen kuin Siiri ehti kirjoittaa tätä, hän ehdotti laskutoimitusta $6 + 2 \cdot 5$. Opettaja huomautti, että kyseessä on kolmas kuvio, jossa Siiri kertoi kakkosella. Tästä Siiri pääsi kiinni ajatukseen, että x:n paikalle sijoitettava luku täytyi olla yhtä pienempi kuin kuvion järjestysluku. Aiheesta keskusteltiin näin:

SIIRI: *Onkse aina ku sillei, että aina ku sillei niin ku* [hakee sanoja] *tarvitaan joku sadan laatan määrä, siitä vähennetään yks ja sit tää toimis tää mun taktiikka?*
...
SIIRI: *Eli niin monta kuviota kuin tarvitaan ja sit siitä miinustetaan yks ja käytetään tota* [kaavaa].
OPETTAJA: *Pystysit sä kirjottamaan sen tällasena kaavana, että mistä sä vähennät sen yhen?*
SIIRI: *No eli tähän perään miinus yks ... ei ... se on johonkin tähän väliin, eikö ookkin?*
NIINA: *Onks se kuus plus x miinus yks kertaa viis?* [$6 + x - 1 \cdot 5$]

Siirin ensimmäinen ajatus oli suorittaa vähennyslasku ennen kuin hän sijoittaisi x:n paikalle mitään. Opettaja ohjasi kuitenkin sisällyttämään vähennyslaskun kaavaan. Oikean laskujärjestyksen osoittaminen kaavassa tuotti vaikeuksia. Aikaisemmin tunnilla tytöt olivat keskustelleet muun muassa siitä onko $7 + 6 \cdot x$ sama kuin $7 + x \cdot 6$ tai $5 \cdot x$ sama kuin $x \cdot 5$ ja päätyneet siihen tulokseen, ettei tulon kirjoittamisjärjestyksellä ole väliä. Mitään sen tarkempaa perustelua he eivät kuitenkaan esittäneet, vaan tulokseen päädyttiin vain muistelemalla.

Tyttöjen kaava sai lopulta muodon $(6 + x - 1) \cdot 5$, jolla he tarkoittivat kaavaa $6 + (x - 1) \cdot 5$. Tästä huomataan, että sulkeiden käyttö ei ole oppilailla täysin hallussa, mutta tytöt osaisivat luultavasti käyttää kaavaansa tarkoittamallaan tavalla.

Tyttöjen keskustelussa ilmeni monta erilaista ajattelutapaa. Heille tuntui kuitenkin olevan vaikeaa perustella miksi joku tapa olisi parempi kuin joku toinen tai edes oikea. Oppilaiden työskentelystä näki, että vastauksien perustelu ei ollut heille tuttua eikä perustelutapoja löytynyt omasta takaa. Opettaja joutui ohjaamaan tyttöjen työskentelyä melko voimakkaasti huomattuaan, ettei työskentely etene tarpeeksi tyttöjen omilla keinoilla. Tekstiä haluttiin tuottaa mahdollisimman niukasti eikä papereihin haluttu juurikaan tehdä ylimääräisiä merkintöjä.

Pojat tarvitsivat varmennuksen mitä tehtävänannossa, *Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion valkoisten laattojen määrä tässä ketjussa*, sanalla kuvio tarkoitetaan. Antti oli kuitenkin ymmärtänyt tehtävänannon oikein ja kysyi, että jos mustia laattoja olisi esimerkiksi 25, niin haluttaisiinko tietää kyseisen kuvion valkoisten laattojen määrä. Vastauspaperiin Antti kirjoitti: ”*Jokaisen mustan laatan kanssa tulee viisi valkoista laattaa ja siihen lisätään yksi päätylaatta.*” Antille oli muodostunut jo selkeä kuva tehtävien ratkaisemisesta ja oma malli kuviojonon jatkumisesta. Eerokin vaikutti siltä, että hänellä olisi ollut joku oma ajatus tehtävän ratkaisemiseksi, mutta hän kopioi ennemmin Anttia kuin ryhtyi miettimään sen enempää omaa ratkaisuaan. Antti keksi nopeammin ideoita kuin Eero, joten Eero ei ehtinyt tai viitsinyt juurikaan tuoda omia ideoitaan esiin. Antti osasi myös selittää ja perustella omat ajatuksensa tarpeeksi hyvin Eerolle, joten Eerolla ei ole tarvetta ryhtyä miettimään muita keinoja.

Sanallisesta ratkaisusta pojat pääsivät helposti seuraavan tehtävän ratkaisuun, jossa täytyy keksiä säännön pohjalta kaava. Vastaus tiivistyy hetkessä muotoon: ”*mustien laattojen määrä · 5+1*”. Kuvassa 10 näkyy Antin työskentely paperille ensimmäisen tehtävän kohdissa a-d. Pojat, tai oikeastaan Antti, ei käyttänyt pelkkää kirjainta tuntemattoman muuttujan merkitsemiseen, vaan kirjoitti sanallisesti sen, mitä kaavan kyseiseen kohtaan täytyisi sijoittaa. Tapa on hyvä ja turvallinen siinä mielessä, ettei siinä jää epäselväksi mitä kaavaan sijoitetaan tai onko muuttuja ymmärretty oikein.

Kuva 10: *Antin kirjalliset representaatiot ensimmäisessä tehtävässä*

Tytöt halusivat käyttää tuntemattoman muuttujan merkitsemiseen kirjainta x, mutta siihen sijoitettavan luvun määrittäminen oli heille hankalaa. Kirjaimen x käyttäminen muuttujana on matemaattisempi merkitsemistapa, mutta siitä ei ole hyötyä, jos ei tiedä mitä x tarkoittaa. Toisen tunnin alussa käydyssä yhteenvedossa opettaja otti esille nämä kaksi eri merkitsemistapaa ja kertoi myös oppilaille, että tuntematonta voisi todellakin merkitä vain jollakin kirjaimella, hyvin usein kirjaimella x. Huolimatta tästä vinkistä, pojat pitäytyivät valitsemassaan tavassa kirjoittaa tuntematon muuttuja sanallisesti.

Poikien nopean etenemisen osasyynä saattoi olla, etteivät pojat jääneet kovin kauaksi aikaa pohtimaan tehtävää rekursiiviselta näkökannalta. Ensimmäisen tehtävät he ratkaisivat ajatellen, että seuraavaan tulee viisi laattaa lisää. Tästä eteenpäin poikien ajatusmalli oli kuitenkin sidoksissa kuvioiden mustien laattojen määrään, ei siihen millainen seuraava kuvio on verrattuna edelliseen. Pojat kuvailivat laskutavan myös sanallisesti eksplisiittisesti, joten sanallisen laskutavan muuntaminen kaavaksi ei ollut enää suuri askel.

Lisäksi pojat käyttivät rehellisesti heille mieluisaa ilmaisutapaa kaavassa eivätkä lähteneet miettimään mikä voisi olla matemaattisempi tapa kirjoittaa kaava. Yhteenvedon yhteydessä nousi jälleen esille x-merkinnän vaikeus, sillä tytöt eivät tahtoneet oikein enää muistaa mitä x tarkoitti heidän kaavassaan. Siiri muisteli niiden olevan mustia laattoja tai kuvioita (ilmeisesti kuvioiden järjestysluku), ymmärtämättä niiden olevan tässä tehtävässä aina sama luku eli mustia laattoja on kuvion järjestysluvun verran.

Ensimmäisen oppitunnin yhteenvedossa oppilaiden kanssa vertailtiin heidän muodostamiaan funktioita $(6+x-1)\cdot 5$ ja *mustien laattojen määrä*$\cdot 5+1$. Ryhmät kävivät kirjoittamassa omat kaavansa taululle, jonka jälkeen niistä keskusteltiin yhdessä opettajan kanssa seuraavasti:

OPETTAJA: *Onko vastaukset teidän mielestä samat tai onko molemmat vastaukset oikein?*
SIIRI: *Joo...* [vienosti]
OPETTAJA: *No miksi ne ois samat?*
SIIRI: *Emmä tiiä.*
Opettaja kysyy poikien mielipidettä tyttöjen kaavasta ja toimiiko se heidän mielestään.
ANTTI: *Vissiin joo.*
OPETTAJA: *Mitenkä se näytetään, että se toimii toi kaava?*
Opettaja osoittaa kysymyksen myös tytöille, mutta vastausta on tyttöjen mielestä vaikea selittää.
OPETTAJA: *No mitä jos te haluaisitte tietää sen 4. kuvion laattojen määrän, mitä te tekisitte tälle kaavalle? Miten te käyttäisitte tota kaavaa?* [osoittaa taululta tyttöjen kirjoittamaa kaavaa]

Opettaja lähestyi asiaa esimerkin kautta kysymällä, kuinka kaavaa käytettäisiin, jos haluttaisiin tietää 4. kuvion laattojen määrä. Siiri osasi sijoittaa muuttujan x paikalle luvun 4. Laskujärjestys otettiin huomioon, joten huomattiin, että kaava ei toiminut. Opettaja kysyi pojilta osaisivatko he korjata kaavaa, mutta he eivät osanneet oikein sanoa. Poikien oli varmaan vaikea ymmärtää oliko tyttöjen kaava oikein, koska tytöt eivät osanneet selittää kuinka olivat päätyneet omaan ratkaisuunsa. Lopulta Niina ehdotti hakasulkeiden käyttöä ja kertoi, että lisäisi ne kaavassa laskutoimituksen $x+1$ ympärille. Kaavan toimivuus kokeiltiin uudelleen sijoittamalla siihen luku 4.

Pojat selittivät tytöille oman kaavansa. Ilona totesi poikien tavan olevan yksinkertaisin. Poikien kaava oli helpompi muodostaa, koska sulkeille ei ollut tarvetta ja tuntemattoman muuttujan paikalle voitiin suoraan sijoittaa kuvion järjestysluku. Opettaja selvensi oppilaille, että saman asian voi kertoa monella tavalla. Joskus toinen tapa voi olla yksinkertaisempi kuin toinen. Opettaja kysyi voisiko poikien kaavan kirjoittaa jotenkin sievemmin. Tytöt ehdottivat muotoa $x \cdot 5 + 1$. Taululle kirjoitettiin *mustien laattojen määrä*$\cdot 5 + 1 = x \cdot 5 + 1$. Opettaja kertoi oppilaille, että matematiikassa todellakin käytetään usein tuntemattoman merkitsemiseen x-kirjainta. Tästä huolimatta pojat eivät omaksuneet tätä merkintätyyliä jatkossa itselleen, vaan jatkoivat tuntemattoman muuttujan merkitsemistä sanallisesti.

4.5 2. asteen funktion muodostaminen kuviojonosta

Tyttöjen ryhmä ei ehtinyt edetä toiseen tehtävään asti, joten tutkimusmateriaalia kyseisestä tehtävästä saatiin vain poikien ryhmältä. Tehtävä 2 oli hyvin samantapainen kuin tehtävä 1, mutta kuviojonon laatat lisääntyivät 2. asteen funktion mukaisesti ja oppilaiden tehtävänä oli määrittää kyseinen funktio. Antti huomasi hetken miettimisen jälkeen, että kuvioon lisättävien laattojen määrä lisääntyy aina kahdella. Pojat eivät piirtäneet neljättä kuviota mihinkään. He miettivät ja tarkastelivat, päteekö sääntö kysymyspaperissa jo valmiina oleville kuvioille ja päätyivät lopulta vastaukseen, että neljännessä kuviossa olisi 32 laattaa. Antti kertoi sanallisesti kuinka hän päätyi vastaukseen:

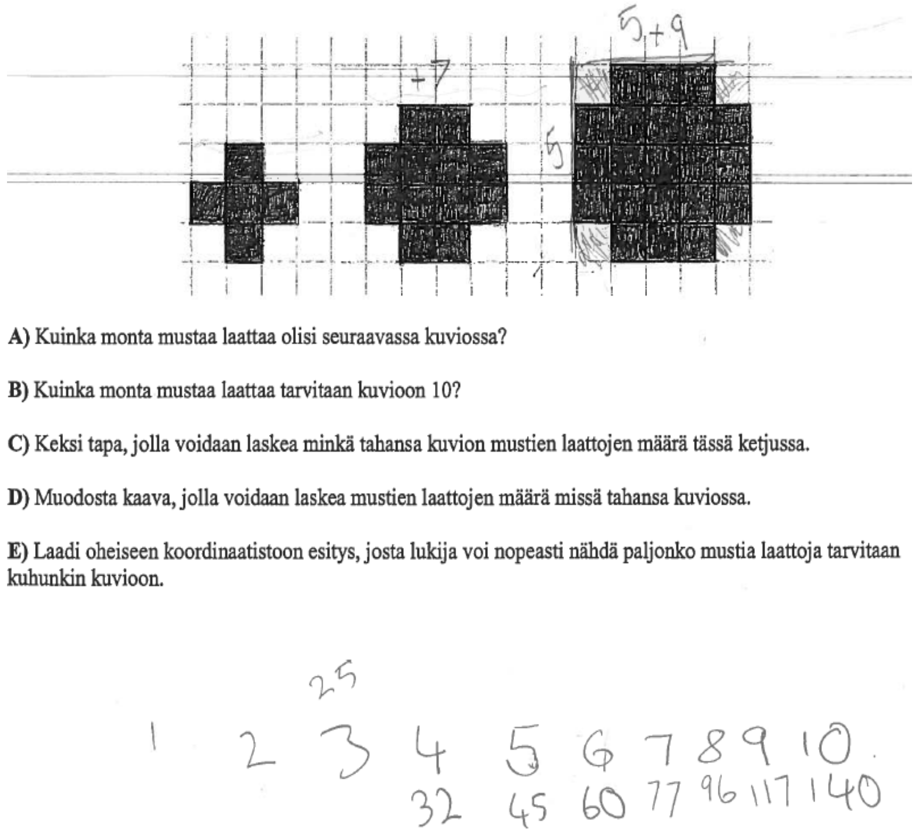
ANTTI: *Tässä on seittemän enemmän kun tässä ja tässä on yheksän enemmän kun tässä. Ja sitten tulee 11 lisää. Ja kun tää oli 21, niin tulee 32. Ja sit siihen seuraavaan lisättäis 13.*

Antin selityksestä käy ilmi, että hän ajatteli lukujonoa 7,9,11,13,..., jonka mukaan kuvioiden laattojen lukumäärät kasvavat. Lukujono kasvaa lineaarisesti, kuten tehtävän 1 kuviojono ja saattaa johtaa harhaan tehtävän 2 kuvion laattojen lukumäärän kaavaa muodostettaessa, joka on ei-lineaarinen.

Tehtävän 2b, jossa pyydettiin 10. kuvion laattojen määrää, pojat ratkaisivat rekursiivisesti. Molempien tehtäväpaperista löytyi taulukko, johon he olivat luetteloineet kuvion järjestysluvun ja kyseisen kuvion laattojen lukumäärän (kuva 11).

Samoin tehtävien, joissa pyydettiin kuviojonon säännön kuvausta ja kaavaa, vastaukset muotoutuivat muotoon *"Lisättävien laattojen määrään lisätään aina 2."* ja *"Lisättyjen laattojen määrä +2"*. Opettaja ohjasi poikia pois rekursiivisesta ajattelutavasta kysymällä sadannen kuvion laattojen lukumäärää. Antti ei heti keksinyt keinoa laskea sitä ja perusteli vaikeutta sillä, että ensimmäisessä tehtävässä laattoja tuli tasainen määrä, mutta tässä tehtävässä tuli aina eri määrä. Antti oli siis huomannut oleellisen eron näiden kahden tehtävän välillä.

Pojat jumiutuivat ehkä liikaa ajatukseen kuinka kuvioon lisättävien laattojen määrä kasvoi kuvio kuviolta. He eivät päässeet tehtävässä eteenpäin



A) Kuinka monta mustaa laattaa olisi seuraavassa kuviossa?

B) Kuinka monta mustaa laattaa tarvitaan kuvioon 10?

C) Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion mustien laattojen määrä tässä ketjussa.

D) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea mustien laattojen määrä missä tahansa kuviossa.

E) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä paljonko mustia laattoja tarvitaan kuhunkin kuvioon.

Kuva 11: *Tehtävä 2, johon Antti on luonnostellut omaa ratkaisuaan*

eikä heille tuntunut syntyvän minkäänlaista ajatusta kuvion geometriaan liittyen, joten opettaja kysyi heiltä muistivatko he kuinka pinta-aloja lasketaan. Antti muisteli ”*laita* · *laita*” -sääntöä, joka pätee suorakulmioille. Opettaja kysyi voisiko tästä olla apua tämän tehtävän ratkaisussa. Antti keksi täydentää kuvion neliöksi lisäämällä jokaiseen tyhjään kulmaan laatan. Pojat kertoivat sivun pituuden lisääntyvän aina yhdellä laatalla tarkoittaen ilmeisesti täyden neliön sivun pituutta.

He kokeilivat laskua $6 \cdot 6 - 4$ neljännelle kuviolle ja huomasivat kaavan toimivan. He käyttivät kaavan toimivuuden perusteluna sijoitusta kuviolle, jonka laattojen oikea määrä tiedettiin varmasti kuvan perusteella. Molemmilla pojilla oli vastauspapereissa kaava: ”*kuvion numero*$+2\cdot$*kuvion numero*$+2-4$”. Pojat siis käyttivät hyväkseen aiemmin oppimaansa neliön pinta-alan laskukaavaa, josta he vähensivät kuvion täydennykseen vaaditut neljä laattaa. Poikien kaava jäi hieman puutteelliseksi, koska molemmat *kuvion numero*$+2$ olisivat vaatineet sulkeet ympärilleen.

4.6 Tytöt muodostamassa 2. asteen funktiota

Toisella oppitunnilla myös tytöt saivat mahdollisuuden muodostaa 2. asteen funktion. Verrattaessa poikien toimintaan, on otettava huomioon, että pojat olivat ehtineet käsitellä jo hieman toisen asteen funktion muodostamista edellisellä oppitunnilla. Tunnin alussa varmistettiin opettajajohtoisesti, että kaikki oppilaat muistivat kuinka suorakulmion pinta-ala lasketaan. Tehtävien ratkaiseminen liittyi olennaisesti tähän tietoon.

Tehtävässä 3, joka esiteltiin kuvassa 8, tiedettiin koko ajan, että kokonaisuudessaan aitamateriaalia on 13 metriä ja se kaikki käytetään suorakulmion muotoisen aitauksen rakentamiseen kanalan seinän viereen. Tehtävässä annetussa kuvassa oppilaita hämäsi alussa kanalan seinän suuntaisen sivun pituus, joka kuvassa oli pidempi kuin kanalan seinän kanssa kohtisuora seinä. Laskettaessa a-kohdan ehdoilla, seinien pituuksien suhde oli juuri toisinpäin. Osa oppilaista yritti ratkaista tehtävää ottamalla mittoja kuvasta. Oppilaille kuitenkin tähdennettiin, että kuva ei ole mittakaavassa, vaan malli, joten kuvasta ei voinut mitata.

Tehtävän a-kohdassa kysyttiin seinän viereen rakennetun aitauksen pinta-alaa, kun seinästä lähtevän sivun pituus oli 5 m ja aitauksen verkon kokonaispituudeksi tiedettiin 13 m. Ensin täytyi päätellä kuinka pitkä on seinän suuntaisen sivun pituus. Siiri laski nopeasti samalla kuvasta osoittaen sivujen pituuksien olevan järjestyksessä 5 metriä, 3 metriä ja 5 metriä eli 5 metriä seinästä lähtevien sivujen pituudet ja 3 metriä seinän suuntaisen sivun pituus. Ilona laski pinta-alan tällöin olevan 15 neliömetriä. Niina piirsi vastauspaperiin suorakulmion, johon hän merkitsi sivujen pituudet sekä vastauksen 15 m^2. Hän perusteli tehtävän kirjoittamalla: ”*Kanaverkkoa on* 13 *m, seinästä lähtevä aitauksen reuna on* 5 *m ja vastakkainen sivu on samanmittainen, eli pääty aitaus on* 3 *m* $leveys \cdot korkeus = 15\ m^2$ ”.

Tehtävä 3a ratkesi tytöille nopeasti, mutta tehtävä 3b osoittautui heille vaikeaksi ja vei oppitunnista loppuajan. Niina pohti tehtävää opettajan kanssa seuraavasti:

NIINA: *Miten tän voi kirjottaa kaavana? Leveys kertaa korkeus?*
OPETTAJA: *Joo, mut nyt sä tiiät siitä kuitenkin enemmän. Sä tiiät jo, että sitä aitaa on käytettävissä aina 13 metriä.*
NIINA: *mmm. . .*
OPETTAJA: *Niin sitä tietoo pitäs nyt jotenkin käyttää hyväks. . . . Sä oletat, että tälle sivulle on annettu pituus, tai tälle sivulle* [osoittaa kuvasta seinään kohtisuorassa olevia seinämiä], *mut nyt tässä b-kohassa ei oo annettu mikä se on. . . .*
NIINA: *Nyt en kyllä ihan tajunnu.*
OPETTAJA: *Pystyisitkö vertaa sitä vaikka siihen eiliseen tehtävään ku ei tiietty, että monesko kuvio se on ja sille piti kehittää tommonen kaava mikä*

tuolla taulullaki on?
NIINA: *Eli siihen tulee äksä?*
OPETTAJA: *Joo, sä voit käyttää siinä äksää apuna. Ja nyt pitäs miettiä mikä olis se sellanen lauseke, jolla sä saisit sen pinta-alan laskettua.*

Opettajan täytyi selventää tytöille mitä tehtävässä haettiin ja neuvoi vertaamaan sitä edellisen tunnin tehtävään. Assosiaatiot edellisen tunnin tehtävien kanssa olisivat voineet auttaa ratkaisemaan myös kyseisen tehtävän. Lähinnä vain Niina kuunteli opettajaa, kun taas Siiri ja Ilona tekivät omia juttujaan. Erityisesti Ilona käyttäytyi tunnilla levottomasti eikä jaksanut keskittyä asiaan. Samalla hän tuli häirinneeksi vieressään istuvaa Siiriä.

Pohdittuaan tehtävää itsenäisesti, Niina ehdotti: "*Onks se x jaettuna kolmella?*" Hän kuitenkin epäröi itsekin omaa vastaustaan. Ajatus jakaa kolmella tuli varmaan kolmesta sivusta, mutta hän ei ehkä ymmärtänyt, että tällöin oletettaisiin, että kaikki sivut ovat samanpituisia tai että vastaukseksi saataisiin näiden kolmen sivun pituuden keskiarvo. Niinalla esiintyi samantaipainen virheajattelu jo edellisellä tunnilla, kun hän yritti laskea kuvioiden laattojen lukumääriä aiempien kuvioiden monikertojen avulla.

Opettaja yritti johdattaa Niinaa ajattelemaan A-kohdassa tekemäänsä laskutoimitusta, josta hän voisi mahdollisesti saada idean yleisen lausekkeen löytämiseksi:

OPETTAJA: *Sä tiiät, että sen koko aitauksen pituus on 13 metriä, mutta nää kaikki sivut ei kuitenkaan välttämättä oo samanpitusia.*
NIINA: *Ei niin.*
OPETTAJA: *Niin lähet vaikka liikkeelle siitä... Miten sä laskit sen suorakulmion pinta-alan?*
NIINA: *Leveys kertaa korkeus.*
OPETTAJA: *Joo-o, no mikä tässä ois se sen leveys, tän kuvion?*
NIINA: *Kolme metriä, tai riippuu vähän mistä sen kattoo...*
OPETTAJA: *Mistä sä saat sen, että se on kolme metriä?*
NIINA: *Matikalla... emmä tiiä.*
OPETTAJA: *Mut sitä ei sanota missään, että se ois kolme metriä niin... eli miten sä lasket kun sä et oikein tiiä mikä sen sivun pituus on?*

A-kohdassa oli melko helpot luvut laskea, joten Niina ei osannut ajatella, että hänen on täytynyt tehdä erityisiä laskutoimituksia saadakseen kolmannen sivun pituudeksi 3 metriä. Niina jatkoi pohdintaa seuraavasti:

NIINA: *Jos on yhteensä 13 metriä, pinta-ala... Tiietäänkö tässä niinku se pinta-ala?*
OPETTAJA: *Eikun sitä yritetään laskee. Ainut mitä tiedetään on tämä koko aidan pituus. No, millä sä voisit merkata vaikka yhtä sivun pituutta?*
NIINA: *Vaikka äksä.*

Opettaja ehdottaa, että Niina käyttäisi kuvaa apuna ja merkkaisi siihen yhden sivun x:llä, jonka on päättänyt olevan x.

OPETTAJA: *No mitä sä tarttet lisäks tietää, että sä pystyt laskee sen pinta-alan?*
NIINA: *Leveyden.*
OPETTAJA: *Miten sä saisit sen tietoon, kun sä tiiät, että aitaa on yhteensä 13 m?*
NIINA: *No yleensä vastakkainen sivu on saman mittanen eli tuokin on niinku x.*
OPETTAJA: *No entäs sitten tuo kolmas sivu?*
NIINA: *Se on erimittainen.*
OPETTAJA: *No mitä sä tiiät siitä?*
NIINA: *No, että se on lyhyempi.*

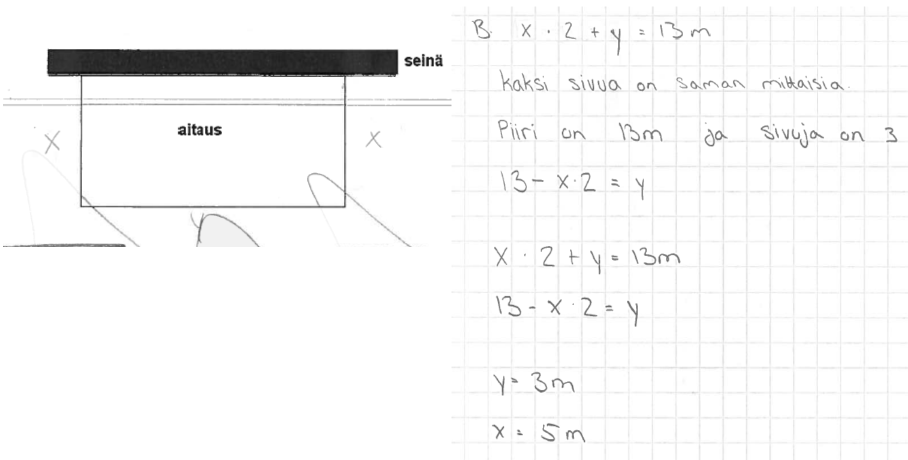
Niina osasi itse nimetä suorakulmion vastakkaiset sivut yhtä pitkiksi, mutta kolmannen eli kanalan seinän suuntaisen sivun pituuden muodostaminen tuotti vaikeuksia. Hän ei ymmärtänyt, että annetut tiedot asettavat ehtoja kolmannen sivun pituudelle. Niinalle täytyi tuoda selkeästi esiin tehtävässä annetut faktat, joita hän voi käyttää tehtävän ratkaisuun. Nämä ehdot piti osata asettaa sivun pituuden lausekkeeseen esimerkiksi muotoon $13 - 2x$, missä x on seinästä lähtevän sivun pituus.

Opettaja joutui ohjaamaan voimakkaasti oppilasta vertaamaan tehtäviä 3a ja 3b, jotta hän voisi löytää näiden tehtävien yhteyden ja päästä ratkaisuun tätä kautta. Niina ehdotti, että kolmatta sivua merkitään kirjaimella y. Opettaja ehdotti tekemään saman laskutoimituksen kuin A-kohdassa, mutta viitosen tilalla olisi x. Niina ryhtyi kirjoittamaan $2 \cdot x$, mutta pyyhki sen lähes välittömästi pois ja ehdotti laskutoimitusta $x \cdot y$. Opettaja huomautti, että y:stä tiedetään enemmän. Hetken pohtimisen jälkeen Niina kirjoitti vastaus paperiinsa $x \cdot 2 + y = 13$.

Opettaja varmisti Niinalta, että hän on ymmärtänyt laskeneensa tässä sivujen pituuksien summan ja muistutti, että tehtävässä haettiin suorakulmion pinta-alaa. Niina olisi halunnut pyyhkiä tämän vastauksen pois, mutta opettaja esti häntä. Niina olisi halunnut ilmeisesti kirjoittaa lausekkeen uudelleen muodossa $x+x+y = 13$. Tämän jälkeen Niina haluaisi jakaa luvun 13 kolmella. Opettaja kuitenkin esti häntä perustelemalla, että kolmella jaettaessa kaikki sivut jakaantuisivat samanmittaisiksi. Opettaja jätti Niinan pohtimaan, kuinka hän saisi tämän tiedon avulla laskettua pinta-alan.

Niina kertoi opettajalle vielä uudestaan sanallisesti kuinka oli laskenut a-kohdassa kysytyn kolmannen sivun pituuden. Tätä verrattiin b-kohdan tilanteeseen, jossa vastaava asia täytyi osata ilmaista yleisessä muodossa. Tästä Niina pääsi lausekkeeseen $13 - 2 \cdot x = y$. Niina yritti selittää tähän astista ratkaisuaan myös Siirille ja Ilonalle, jotka eivät olleet jaksaneet oikein keskittyä tehtävään, vaan olivat puuhanneet muuta. Siiri ei tuntunut ymmärtävän, että b-kohdassa haluttiin yleinen lauseke pinta-alalle, vaan kertoi toistuvasti jo tietävänsä sivujen pituudet, koska oli laskenut ne mielestään a-kohdassa.

Niina ehti selittää toisille tytöille, että aitaa tiedettiin olevan yhteensä 13 m ja kuviossa oli kaksi seinää, jotka olivat samanmittaisia ja näitä voitiin merkitä esimerkiksi kirjaimella x. Kolmas sivu oli eri mittainen ja sitä voitiin merkitä kirjaimella y. Ilona ehdotti pinta-alan laskulausekkeeksi myös $x \cdot y$, mutta Niina ei ehtinyt selittää tämän pidemmälle ennen kuin tunti loppui. Tytöt eivät ehtineet muodostamaan myöskään pinta-alan laskulauseketta yleisen sivun pituuden lausekkeen avulla. Kuvassa 12 näkyy Niinan työskentely paperille tehtävän b-kohdassa.



Kuva 12: *Niinan antama ratkaisu tehtävään 3b. Niina on merkinnyt kuvaan mitä x ja y ovat.*

Niinan aluksi kirjoittama lauseke $x \cdot 2 + y = 13$ on kyllä täysin oikea sivun pituuden lauseke, mutta tämän muotoisesta lausekkeesta on vaikea päästä ratkaisemaan y eli siis haettu kolmannen sivun pituus ellei osaa ratkaista yhtälöitä. Kertaamalla uudelleen A-kohdan laskutavan Niina osasi järjestellä lausekkeen uudelleen muotoon $13 - 2 \cdot x = y$, missä näkyi haluttu muoto kanalan seinän suuntaiselle sivulle. Tästä olisi melko helposti päästy pinta-alan laskulausekkeeseen Niinan jo alussa ehdottaman $x \cdot y$-lausekkeen kautta, mutta tähän ei ollut oppitunnilla enää aikaa. Hassinen (2006) esittää yhden selityksen yhtälön kirjoittamisen vaikeuteen. Oppilaat eivät kirjoita lausekkeita muodossa $y = x + b$, koska he eivät osaa välttämättä ajatella yhtäsuuruusmerkin molempia puolia tasavertaisina. Ennemminkin yhtäsuuruusmerkin oikeasta puolesta seuraa se, mitä lukee vasemmalla puolella ja vasemmasta puolesta pitäisi saada laskettua jokin tulos, joka voitaisiin merkitä yhtäsuuruusmerkin jälkeen oikealle. (Hassinen 2006.)

4.7 Poikien 2. asteen funktion muodostaminen aitaustehtävässä

Pojat pohtivat kolmannen tehtävän ensimmäistä kohtaa, jossa pyydetään ratkaisemaan aitauksen pinta-ala, kun seinästä lähtevän sivun pituudeksi on määritelty 5 m ja kolmen sivun yhteispituudeksi 13 m.

EERO: *Onko tällä 13 metrillä mitään väliä?*
OPETTAJA: *Siis sitä aitaa on käytettävissä 13 metriä.*
ANTTI: *Eihän se toimi, jos tää on viis ja tää on viis, niin tää on kolme. Nää on pitemmät kun tää.* [Osoittaa kuvasta seinän suuntaista sivua, joka on kuvassa pidempi kuin seinästä lähtevät sivut]
Opettaja muistuttaa, että kuva on vain malli eikä se ole mittasuhteessa.
ANTTI: *Eli ainoo mitä me tiedetään on, että se on suorakulmio ja tää seinä on aina* 5 *metriä pitkä?*
OPETTAJA: *Joo ja sitä aitaa on 13 metriä yhteensä.*
ANTTI: *Joo, eli se on viis ja kolme ja viis.* $5 \cdot 3 = 15$

Pojat pääsevät tehtävässä nopeasti alkuun, kun alkuoletukset ovat heille selvillä. Pojat ryhtyivät pohtimaan b-kohtaa, jossa vastaavan aitauksen pinta-alalle piti osata muodostaa kaava, kun seinästä lähtevän sivun pituus on muuttujana. Antti lähti pohtimaan tehtävää a-kohdan laskulausekkeen kautta seuraavasti:

ANTTI: *Eiks tää kaava ois niinku sillai, että kaks kertaa viis miinus 13 ja sitten se vastaus otetaan siitä ja se kerrotaan sen sivun pituuden kanssa ja siitä tulee pinta-ala?*
ANTTI: *Eikun 13 miinus kaks kertaa viis...*

Antti kirjoitti lausekkeen $(13 - 2 \cdot 5) \cdot 5 = 15$ vastauspaperiinsa eli ensimmäisen tehtävän laskulausekkeen, mutta kysyi opettajalta pitäisikö tämä tehdä tapauksessa, jossa verkon pituutta ei tiedetä. Ensimmäisen tehtävän pohjalta kirjoitettu lauseke auttoi varmasti myös yleisen lausekkeen muodostamisessa, koska Antti osasi muokata lausekkeen nopeasti yleiseen muotoon ja kertoi: "*Sithän se ois niinkun verkon pituus miinus kaks kertaa seinästä lähtevän sivun pituus?*". Molempien poikien vastauspaperista löytyi vastaus "*(verkon pituus* $-2\cdot$ *seinästä lähtevän sivun pituus)* $\cdot$ *seinästä lähtevän sivun pituus*". Verkon pituudeksi olisi tiedetty 13 m, mutta pojat eivät sijoittaneet sitä kaavaansa. Antti kertoi kuitenkin sanallisesti verkon pituuden olevan tässä tapauksessa 13 m.

Poikien työskentely eteni melko suoraviivaisesti, varsinkin sen jälkeen kun alussa annetut oletukset olivat heille selvät. Poikien nopeaa etenemistä saattoi auttaa onnistuminen sekä ensimmäisen että toisen asteen funktion muodostamisessa jo edellisellä tunnilla. Poikien ajatusmaailmassa oli olemassa vahvempi pohja johon verrata tämän tunnin tehtävän ideaa.

Yhteenvedossa käytiin läpi poikien muodostama kaava opettajajohtoisesti. Opettaja kirjoitti poikien sanelun mukaan taululle:

$(\underbrace{verkon\,pituus}_{13\,m} - 2\cdot$ *seinästä lähtevän sivun pituus*$)\cdot$*seinästä lähtevän sivun pituus*

Tytöistä Niina sai muodostettua kanalan seinän suuntaiselle sivulle lausekkeen $13 - x \cdot 2 = y$, missä x on kanalan seinästä lähtevän sivun pituus. Tyttöjen kaavaa ei ehditty nostaa ajanpuutteen vuoksi erikseen esille. Mutta Niina osasi kertoa poikien kaavasta, että seinästä lähtevän sivun pituus oli muuttuja ja sitä voitiin merkitä lyhyemmin kirjaimella x. Opettaja kirjoitti taululle Niinan sanelun mukaan:

$$(13 - 2 \cdot x) \cdot x$$

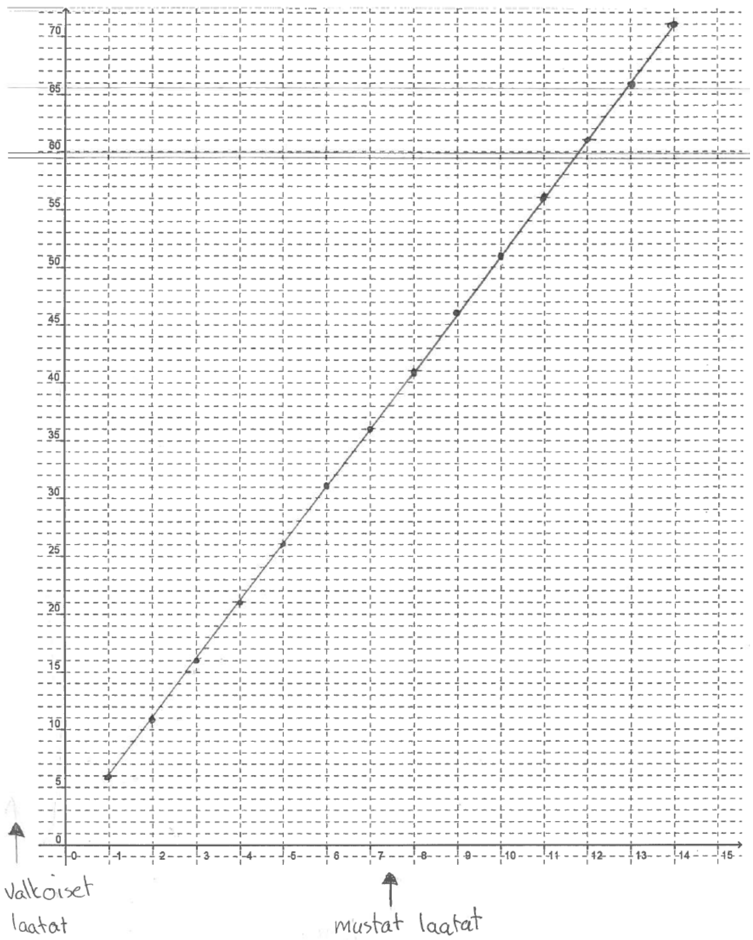
Opettaja kysyi vielä oppilailta mitä tällä kaavalla saadaan laskettua, johon Antti vastasi, että pinta-alan.

4.8 Kuvaajat funktion representaatioina

Oppilaita pyydettiin jokaisen tehtävän yhteydessä piirtämään tehtävässä muodostetusta funktiosta esitys heille annettuun koordinaatistoon eli haettiin funktion kuvaajia. Vain poikien ryhmä ehti tehdä kuvaajanpiirtämistehtävät oppitunnilla. Ensimmäisessä tehtävässä, jossa oli mustista ja valkoisista laatoista muodostuva kuviojono, pojat nimesivät kuvaajan x-akselin mustiksi laatoiksi ja y-akselin valkoisiksi laatoiksi. Akseleiden nimeäminen tapahtui kirjoittamalla nimet akseleiden vierelle, kuten kuvasta 13 nähdään. Antti ehdotti, että ensin olisi kuusi laattaa ja sitten lisätään aina vain viisi ja niin edelleen eli kuvaaja nousee aina viidellä. Pojat merkitsivät näin taulukoihin pisteet, jotka he yhdistivät toisiinsa suoralla viivalla.

Eero ei tuntunut oikein ymmärtävän kuvaajaa ja myönsi sen Antille. Antti yritti selventää mitä kuvaaja tarkoitti ja selitti kuinka kuvaajasta voi katsoa esimerkiksi jos mustia laattoja on 13, niin valkoisia laattoja 66. Opettaja kysyi pojilta tietävätkö he kuinka mones kuvio on kyseessä, jos siinä olisi valkoisia laattoja 31 kappaletta. Myös tähän Antti osasi heti vastata oikein katsomalla piirtämästään kuvaajasta. Tämän perusteella Antti luultavasti ymmärsi muodostamansa kaavan ja kuvaajan yhteyden.

Pojilta onnistui kuvaajan piirtäminen nopeasti myös toisessa tehtävässä, missä kuviojonon mustien laattojen määrä kasvoi epälineaarisesti. He laskivat ja sijoittivat viisi ensimmäistä pistettä koordinaatistoon kuvion järjestysnumeroille $1, 2, 3, 4$ ja 5. Myös nämä pisteet pojat yhdistivät suorilla viivoilla toisiinsa, kuten ensimmäisessä kuvaajassa, vaikkakaan tässä tehtävässä kuvaaja ei ollut suora. Akselit he nimesivät siten, että x-akseli oli ”kuvion nu-



Kuva 13: *Antin piirtämä kuvaaja valkoisten laattojen määrästa mustien laattojen funktiona*

mero järjestyksessä" ja y-akseli "lisättyjen laattojen määrä". Y-akselin nimi olisi pitänyt olla esimerkiksi "mustien laattojen määrä".

Nimeämisessä kävi siis pieni ajatusvirhe, kun lisättyjen laattojen määrä oli paremminkin poikien sijoittamien kahden y-koordinaattipisteen erotus. Tämä nimeämisvirhe ei juurikaan ymmärtämistä haitannut, vaan Antti osasi käyttää ja ymmärsi piirtämänsä kuvaajan oikein. Eero ihmetteli miksi kuvaajasta ei tullut suora, mutta Antti selitti, ettei kuvaajan pidäkään olla suora, koska (lisättävien laattojen määrään) lisätään aina kaksi. Antti siis ymmärsi, että jos laattojen määrä ei kasva tasaisesti, ei kuvaajankaan kuulu olla tasaisesti nouseva suora.

Toisella tunnilla pojat saivat kana-aitauksen pinta-alan funktioksi *(verkon pituus*$-2\cdot$*seinästä lähtevän sivun pituus)*$\cdot$*seinästä lähtevän sivun pituus.*

Pojat piirsivät kuvaajat siten, että x-akseli kuvaa seinästä lähtevän sivun pituutta ja y-akseli pinta-alaa neliömetreinä. Pisteiden sijoittelussa tuli kuitenkin hieman epäröintiä ja Antti mietti:

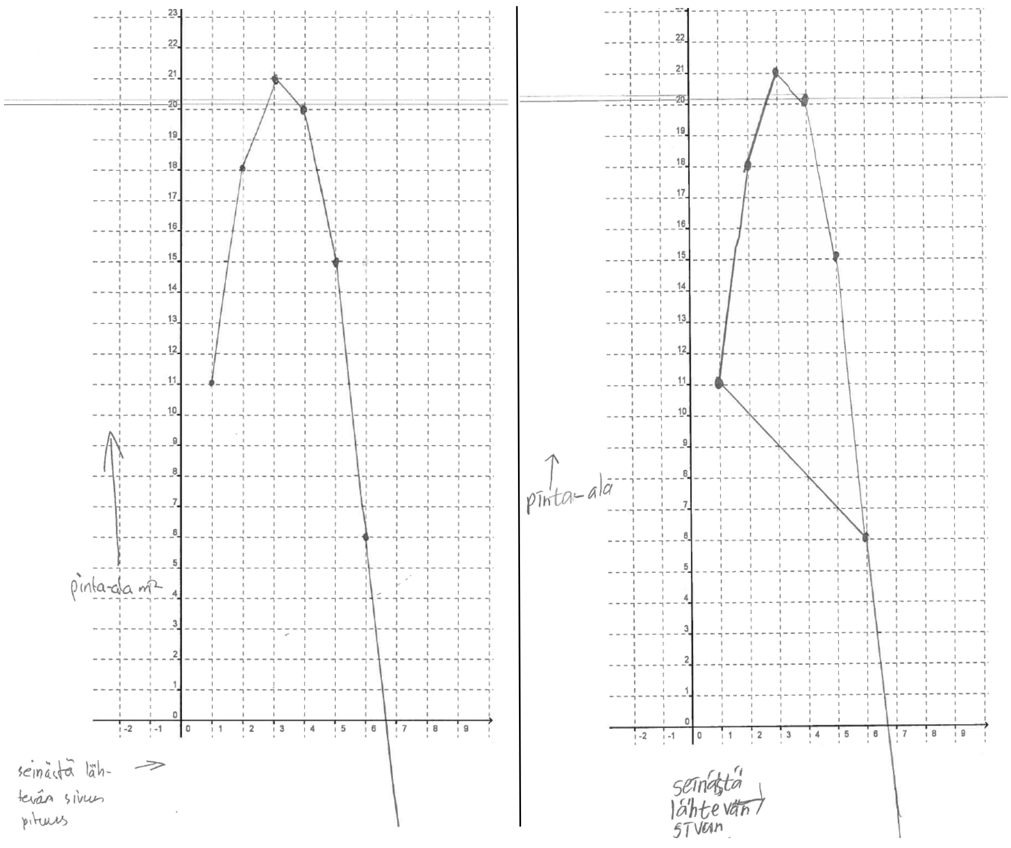
ANTTI: *Eihän siinä oo mitään järkeä, jos sen seinästä lähtevän sivun pituus on 6 metriä. Sillon siitä tulee* $6 \cdot 2$, *siitä tulee 12 ja se miinustetaan 13:sta. Eli siihen jää yks metri tähän väliin. Sit siitä tulee* $1 \cdot 6$ *pinta-ala ja sit siitä tulee kuus metriä.*

Ehkä ajatus siitä, että pinta-alasta tulee todellakin vain 6 m^2, sai Antin pohtimaan ratkaisun oikeellisuutta. Tämä voi osoittaa, että Antti ei ollut vielä huomannut kuinka paljon pinta-ala voi vaihdella riippuen sivujen pituuksista, vaikka sivujen yhteenlaskettu pituus pysyisi koko ajan samana. Pojat kuitenkin jatkoivat eri kokonaislukujen sijoittamista kaavaan ja saivat piirrettyä kuvaajan sijoittamalla lukuparit koordinaatistoon. He yhdistävät pisteet toisiinsa suorilla viivoilla, kuten aiemmissakin kuvaajissa. Antti osasi vastata kysymykseen: ”Miten aitauksen mitat olisi valittava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?”, oikein oman kuvaajansa perusteella.

Antin ja Eeron kuvaajat ovat nähtävissä kuvassa 14. Antin kuvaajassa paraabelin huippu on pisteessä (3,21) eli pinta-alan maksimi olisi 21 m^2. Tämä oli odotettu päätelmä, vaikka se ei ole paraabelin oikea huippu. Oikeasti paraabelin huipun olisi kuulunut olla pisteessä (3,25 ; 21,125). Huipun määritteleminen tuohon pisteeseen olisi ollut vaikeaa seitsemäsluokkalaisen tiedoilla, mutta sitä olisi voinut hieman tarkentaa laskemalla arvoja myös muilla kuin kokonaisluvuilla.

Oppilaat ajattelevat helposti vain kokonaislukuja, joita sijoittavat kaavaan. Asiaan vaikutti myös luultavasti se, että tehtävien 1 ja 2 kuviojonojen yhteydessä käsiteltiin vain kokonaislukuja. Oppitunnin aika kuitenkin loppui kesken, joten tätä asiaa ei ehditty ottaa esille. Huomattavaa oli myös, että Eero yhdisti kuvaajan ensimmäisen ja viimeisen sijoituspisteen siten, että kuvaan muodostui lenkki. Hän ei siis todennäköisesti täysin ymmärtänyt mikä merkitys kuvaajalla oli (kuvassa 14 oikealla).

Poikien piirtämä kuvaaja käytiin myös yhdessä nopeasti läpi toisen tunnin yhteenvedossa. Pojat olivat huomanneet, että x eli seinästä lähtevän sivun pituus ei voinut olla 7 tai sitä suurempi, sillä kuvaaja olisi mennyt negatiiviselle puolelle, koska aitauksen yhteispituus on vain 13 m ja $13 - 2 \cdot 7 < 0$. Antti osasi vastata sanallisesti myös tehtävän d-kohtaan, jossa kysyttiin kuinka aitauksen mitat olisi valittava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri. Hän keksi katsoa kuvaajan korkeinta kohtaa ja luki x-akselilta seinästä lähtevän sivun pituuden. Vastauksesi saatu 3 metriä ei ollut täysin oikea vastaus, koska paraabelin huippu ei ollut aivan oikeassa kohdassa, mutta Antti oli ymmärtänyt idean kuinka, tiedon saa selville.



Kuva 14: *Kana-aitauksen pinta-alan kuvaajat, Antin vasemmalla ja Eeron oikealla*

5 Pohdinta

Tutkimuksen tavoitteena oli tutkia oppilaiden erilaisia ajattelutyylejä ja representaatioiden käyttöä funktion käsitteen oppimisessa tutkivan matematiikan tunnilla. Erityisesti tutkimuksessa kiinnostaa, hahmotetaanko annetut tehtävät eri tavalla ja miksi ongelmanratkaisussa joku idea hylätään ja joku hyväksytään. Representaatioiden käytössä kiinnitetään huomiota siihen kuinka asia, jota ei ole vielä opetettu, ilmaistaan ja millaisia ongelmia oppilaat kohtaavat.

5.1 Oppilaiden erilaiset ajattelutyylit ja representaatiot opetuskokeilussa

Oppilaiden ajattelutyyleissä löytyi paljonkin eroja. Ajattelutapa vaikuttaa paljon siihen kuinka helpoksi tai vaikeaksi ongelmanratkaisu voi muotoutua. Toinen oppilas hahmotti kuviojonon eri tavalla kuin toinen. Varsinkin tyttöryhmän työskentelyssä erilaiset ajattelutyylit aiheuttivat paljon keskustelua. Oman idean tuominen julki ja tovereiden vakuuttaminen idean toimivuudesta tuntuivat olevan haasteellisimpia asioita. Toisaalta luokkatoverin tekemien ehdotuksien ja ideoiden vastaanottaminen ei ollut helppoa. Oppilaiden ei ole yleensä tarvinnut perustella päätelmiään tai ratkaisujaan toisilleen tai opettajalle. Tällaisen uuden toiminnan opettelu vienee "resursseja" ongelmanratkaisemiselta.

Syitä tai perusteluja sille, miksi joku idea hylätään, kävi varsin vähän ilmi opetustuokioiden aikana. Vaikutti siltä, että moni idea hylättiin hyvin intuitiivisin perustein. Ehkä siksi, että ideoille ei esitetty vakuuttavia argumentteja niiden hylkäämiseksi, muutamat jo-hylätyt ideat nousivat aika-ajoin takaisin ehdolle, varsinkin tyttöjen ryhmässä. Vaikkakin perusteleminen olisi vienyt aikaa, niin myös edestakaiseen vatvomiseen kului aikaa, koska tytöt eivät osanneet päättää toimiiko ehdotettu strategia oikeasti vai ei. Se, joka osasi esittää argumenttinsa ajattelumallistaan parhaiten, sai ideansa läpi. Varsinkin kuvioketjutehtävässä tyttöjen ryhmässä oli havaittavissa tätä. Tuntui, että kaikki tytöt saivat tehtävänannosta jollain tasolla kiinni ja saivat luotua omat mallit kuvioista, mutta idean pukeminen sanoiksi, saati tekstiksi, oli vaikeaa.

Oman idean esiintuominen selkeästi ja perustellen oli kompastuskivi. Tytöt puhuivat välillä jopa samasta asiasta ymmärtämättä, kuinka samantapaiset heidän ideansa olivat. Saattaa olla myös niin, että aiemmat oppilaiden väliset suhteet ja käsitykset toistensa osaamisesta vaikuttivat perustelujen vakuuttavuuteen. Oppilaalta, jolla aikaisemmilla matematiikan tunneilla on ollut paljon onnistumisia, odotettiin onnistumista myös tutkivan matematiikan tunnilla. Vastavuoroisesti oppilaalta, joka ei ole menestynyt yhtä paljon aiemmilla matematiikan tunneilla, ei odotettu kannattavia ideoita. Voi siis olla, että muiden on vaikea luottaa sellaisen oppilaan perusteluihin ja selityksiin, joka ei ole osoittanut yhtä hyvää menestymistä.

Oppilailla tuntui olevan vaikeuksia luottaa omiin taitoihin. Monessa tilanteessa vaikutti siltä, että jos oppilas olisi luottanut itseensä enemmän, olisi hän vakuuttunut itse omasta tekemisestään ja ajatusmalleistaan nopeammin ja sitä kautta pystynyt perustelemaan ja saada myös muut vakuuttumaan omasta ideastaan. Opettajan vahvistusta ja tukea haettiin oppitunneilla moneen otteeseen. Opettaja kuitenkin pyrki olla osoittamatta milläänlailla mielipidettään oppilaiden antamista vastauksista tai ehdotuksista. Mahdollisesti oppilaiden luottamus omaan tekemiseen kasvaisi kokemuksen myötä, kun asiat täytyisi aina perustella sekä itselleen että muille. Oppilaat eivät hyväksyisi pelkkiä mielipiteitä oikeiksi ilman päteviä perusteita.

Amit ja Neria (2008) esittävätkin, että ajattelun joustavuus, joka on hyvä ominaisuus ongelman ratkaisemisen kannalta, riippuu oppilaan luottamuksesta omiin taitoihin. Koska oppilaat eivät luota omiin taitoihinsa, he tuskin ovat kovin joustavia ajatuksiltaan ja jumiutuvat helposti ensimmäiseen ratkaisuideaansa, vaikka se osoittautuisikin umpikujaksi. Tämä väite saa tukea tästä tutkimuksesta, koska poikien ja tyttöjen itseluottamus ja ongelmanratkaisutaito kulkivat ehdottomasti käsi kädessä. Tytöt jäivät pyörittelemään pitkäksi aikaa ensimmäistä ideaa ratkaista ongelma ja varsinkin kukkakuvioiden kohdalla palattiin takaisin ideaan, joka oli todettu toimimattomaksi.

5.2 Ryhmien väliset erot

Ero poikien ja tyttöjen ryhmien välillä oli merkittävä. Antti vaikutti olevan vakuuttunut omista ideoistaan ja uskalsi työstää niitä eteenpäin. Niinpä eteneminen tehtävästä toiseen oli nopeaa. Tyttöjen ryhmässä oli havaittavissa paljon enemmän epävarmuutta ja tarvetta opettajan tuelle. Martinon ja Maherin (1999) havainnot siitä, että oppilaat eivät luonnostaan perustele tai todista vastauksiaan sai vahvistusta näillä tunneilla. Toisaalta taas Martinon ja Maherin (1999) päätelmä siitä, että pienissä ryhmissä työskentelevät oppilaat eivät kyseenalaistaisi toistensa perustelujen yksityiskohtia, ei saanut tukea tästä tutkimuksesta. Erityisesti tytöt vaikuttivat olevan erittäin kriittisiä toistensa päätelmiä kohtaan.

Ryhmien sisällä syntyi paljon keskustelua. Sen sijaan kirjallisia representaatioita esiintyi niukasti. Oppilaat eivät piirtäneet juurikaan mitään kuvioita, vaikka opettajana olin ennakkoon ajatellut sen olevan suosittu apuväline ajattelun tueksi. Kuitenkin oppilaiden tehtäväpaperit ja suttupaperit osoittautuivat tärkeiksi tutkimusmateriaaleiksi vastauspaperien lisäksi, aivan kuten Amit ja Neria (2008) ovat huomanneet. Esimerkiksi Antti käytti piirtämistä apunaan täydentäessään toisessa kuvioketjutehtävässä yhden kuviosta täydeksi neliöksi tehtäväpaperiin. Antin luonnostelma näkyy kuvassa 11. Tämä oli oikeastaan ainoa piirros poikien piirtämien kuvaajien lisäksi. Myös kirjalliset perustelut vaikuttivat olevan kaikille haasteellisia muodostaa.

Kuvioketjutehtävissä apuna käytettiin vain lukujen taulukointia, muuten kirjallinen työskentely oli vain vastauksen kirjoittamista. Pojat käyttivät muodostamissaan funktioissa muuttujana kirjoitettua muuttujan nimeä eivätkä omaksuneet x-merkintää toisellakaan tunnilla, vaikka opettaja mainitsi oppilaille tästä merkitsemistavasta. Tytöt taas halusivat alusta asti käyttää muuttujan merkitsemiseen symbolia x. Tunnilla kävi ilmi monesta kommentista, että tytöillä oli halu kirjoittaa matemaattisesti taidokasta tekstiä, mikä taas kostautui ajan käytössä. Tyttöjen kyky ja ymmärrys käyttää symbolia muuttujan merkitsemisessä oli myös huteraa, koska asiaa ei oltu käsitelty, mutta tytöt olivat ehkä nähneet käytettävän sellaista merkintätapaa. Voisi sanoa, että tytöillä on proseduraalista tietoa x:n käytöstä. Konseptuaalinen tieto puuttuu vielä, koska se kehittyy vasta omien ratkaisu- ja ajatteluprosessien myötä (Hiebert & Lefevre 1986).

Ensimmäisessä kuvioketjutehtävässä oli havaittavissa selkeästi kaksi erilaista ajattelutapaa ryhmien välillä. Pojat ajattelivat kuviosta siten, että jokaista mustaa laattaa kohden oli 5 valkoista laattaa ja lisäksi vielä yksi valkoinen laatta eli $5 \cdot x + 1$, missä x on mustien laattojen määrä. Tytöt sen sijaan ajattelivat, että yhden mustan laatan ympärillä oli kuusi valkoista laattaa ja muiden mustien laattojen ympärillä oli viisi valkoista eli $6+5\cdot(x-1)$. Ajattelutavoista poikien ajattelutapa on suoraviivaisempi funktion muodostamisen kannalta. Muuttuja on suoraan mustien laattojen lukumäärä tai kuvion järjestysluku.

Tyttöjen ajattelutavassa luku 6 pitää sisällään jo yhden mustan laatan, joten se täytyy osata vähentää luvusta, joka kerrotaan viidellä. Tyttöjen puheessa muuttujasta käytettiin termejä ”se”, ”niin monta kuin halutaan”, ”joku luku” ja ”tarvittava määrä”. Käsite ”yksi vähemmän kuin” vaikuttaa olevan vaikea käsite ilmaista niin sanallisesti kuin matemaattisesti. Lopulta Siiri sai muotoiltua asian 100. kuvion esimerkin kautta sanoiksi ”tarvitaan joku sadan laatan määrä, siitä vähennetään yksi” ja tätä kautta yleisempään muotoon ”eli niin monta kuviota kuin tarvitaan ja sit siitä miinustetaan yks”. Kun asia saatiin muotoiltua sanoiksi, onnistui kaavan kirjoittaminen melko nopeasti muotoon $6+x-1\cdot 5$. Kaavasta puuttuivat sulkeet $x-1$ ympäriltä, mutta puheesta kävi selväksi mikä kaavan tarkoitus oli.

Sfardin (1991) mukaan $x-1$ voidaan ajatella joko prosessina tai objektina. Tämä tuo oman haasteensa lausekkeen ymmärtämiseen, koska oppilaiden olisi mielekkäämpää ymmärtää $x+1$ objektina annetun ongelman yhteydessä, jolloin sille voidaan suorittaa vielä muitakin laskutoimituksia, kuten tässä tapauksessa kertoa viidellä. Todennäköisesti oppilaat mieltävän sen ennemmin prosessina. Sulkeet lausekkeen $x+1$ ympärillä korostaisivat sen objektimaisuutta. Sulkeet jäivät puuttumaan tyttöjen keksimästä lausekkeesta, mutta Radford (2010) ei laita tällaista epätarkkuutta ongelman väärinymmärtämisen syyksi, vaan ennemminkin oppilaat eivät ymmärrä tarkoin määrättyä merkkien käytön kulttuuria matematiikassa.

Tässä tutkimuksessa saatiin samantapaisia tuloksia kuin Carraher ym. (2006). Kuten Carraherin ym. tutkimuksessa, oppilaat tukeutuivat aluksi tiettyihin numeroarvoihin ilmentäen näin tuntematonta, mutta pystyivät siirtymään algebrallisiin merkintöihin. Luultavasti tyttöjen x-merkintä ei ollut täysin spontaani tässäkään tutkimuksessa, vaan se on ehkä jollain tasolla esitelty heille aiemmin. Tytöt kuitenkin pystyivät käyttämään algebrallisia ilmaisuja mielekkäästi funktion representaationa. Tutkimuksen tulokset ovassa linjassa myös Radfordin (2010) esittämien tulosten kanssa. Oppilaiden päättelyssä esiintyi vastaavalla tavalla rekursiivista päättelyä esimerkiksi, kun oppilaat keksivät, että ensimmäisessä kuviojonossa kuvioiden valkoisten laattojen määrä lisääntyy aina viidellä. Tämä on myös Radfordin mukaan hyvä etappi matkalla kuviojonon yleistämistä lausekkeeksi.

Tämän tutkimuksen kaikkien tehtävien yhteydessä pyydettiin sanallista selitystä oppilaiden laskutavoille. Selitykset koettiin selvästi vaikeiksi muodostaa. Kuten Siiri totesikin tunnilla tekemästään laskutoimituksesta: *”Se on helpompi näyttää kun kertoo, silleen näin näyttää ja selittää”.* Myös Radford (2010) on huomannut tutkimuksessaan, että oppilaille on ongelmallista ilmaista sanallisesti asioita, jotka numeroin ja sanoin ovat helposti ilmaistavissa.

Amitin ja Nerian (2008) väite siitä, että epälineaarisen kuviojonon kuvioiden jakaminen palasiin auttaa ongelman ratkaisemisessa, saa tukea tästä tutkimuksesta. Tämän tutkimuksen toisessa tehtävässä kuviojono muodostui ristimäisistä kuvioista, jotka olivat mahdollista jakaa monellakin eri tavalla ratkaisua edistäviksi paloiksi. Pojat eivät aivan itse keksi ajatella kuvion geometriaa, mutta pienellä opettajan muistutuksella pinta-alan laskemisen mahdollisuudesta pojat pääsevät etenemään. Pojat jakavat, tai oikeastaan täydentävät, kuvion geometrian sellaiseksi, että sen osasten pinta-alat ovat helppo laskea. Ja siten Antti ja Eero löytävät ongelmalle myös ratkaisun.

5.3 Pohdintaa tutkivan matematiikan oppituntien suunnittelusta

Ongelmia tutkivan matematiikan toteuttamisessa todellisessa koulumaailmassa tuottaa opettajien tietämättömyys ja kokemattomuus opetusmetodista. Vaikka oppilaat ovatkin pääroolissa tutkivan matematiikan tunnilla, on opettajalla tärkeä ja vaativa rooli ohjaajana. Opettajan on hallittava oikeanlainen kyselytekniikka ja tunnistettava oppilaiden ongelmakohtia ja erilaisia ajattelutapoja. Tutkivan matematiikan tunnin suunnittelu vie paljon aikaa ja siksi valmiit ja testatut opetuspaketit voisivat helpottaa opettajan työtä ja madaltaa kynnystä ryhtyä toteuttamaan tutkivaa oppimista. Jyväskylän yliopiston matematiikan aineenopettajan koulutuksessa tutkiva matematiikka on otettu mukaan koulutukseen.

Sivustolta *http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat/* löytyy vuosien 2010-2012 aineenopettajaharjottelijoiden suunnittelemia tutkivan matematiikan tunteja. Useimmat opettajat seuraavat käyttämänsä oppikirjan sisältöjä ja noudattavat järjestystä melko tarkasti, koska se on helppoa ja tuntien suunnitteluun kuluu vähemmän aikaa. Oppikirjojen tai opettajanoppaiden vinkit tutkivan oppimisen toteuttamisesta eri aihealueiden osalta voisi lisätä tutkivan oppimisen käyttöä matematiikan tunneilla.

Tutkivan matematiikan tunti ei vie ainoastaan opettajan aikaa, mutta myös oppilaat tarvitsevat aikaa uusien asioiden omaksumiseen. Työskentelytapa oli oppilaille uusi, joten oppilaiden työskentely saattaisi tehostua ajan myötä, kun tutkivan matematiikan tunteja olisi ollut enemmän. Tehtävät olivat tyypiltään erilaisia kuin oppikirjan tehtävät, joita oppilaat ovat yleensä tottuneet tekemään. Mikä tahansa uudentyyppinen tehtävä vie enemmän aikaa kuin sellainen, joita on aikaisemminkin tehty. Tärkeässä roolissa ovat tehtävänantojen sanojen asettelu, mistä riippuu kuinka oppilas käsittää mitä tehtävässä oikeastaan haetaan.

Koulutyöhön käytettävä aika on rajallista ja matematiikan tunteja ei ole määrättömästi. Oppilaiden on osattava tai oppilaille on pitänyt opettaa peruskoulun loppuun mennessä opetussuunnitelmassa mainitut asiat. Tutkivan matematiikan tunnit vievät ehkä enemmän aikaa kuin niin sanotut perinteiset oppitunnit, mutta oppilaiden oppimat asia voivat olla paljon syvemmin opittuja kuin perinteisemmällä tavalla. Peruskoulun matematiikka jää helposti kiireen vuoksi ulkoa opetteluksi ja unohtuu ehkä helpommin kuin asiat, joiden perustat tunnetaan myös. Ehkä olisi aika miettiä korvaako laatu määrän.

5.4 Jatkotutkimusehdotuksia

Lineaaristen funktioiden oppimista on tutkittu jo jonkin verran, mutta epälineaaristen funktioiden oppimisen tutkimus on ollut huomattavasti vähäisempää. Näin ollen epälineaaristen funtioiden oppimista voitaisiin tutkia enemmän. Koska tutkiva oppiminen on melko uusi opetusmenetelmä, saisi siitä tulevaisuudessa varmasti lukuisia erityyppisiä tutkimuksia. Tämä tutkimus toteutettiin kahden oppitunnin pohjalta, joten aika tuntui niukalta valittuun aihepiiriin nähden. Vastaavanlaisen tutkimuksen voisi toteuttaa niin, että aikaa olisi runsaammin, jolloin myös toisen asteen funktioihin päästäisiin paremmin käsiksi.

Tutkimus voisi jatkua niin, että syvennyttäisiin funktion kuvaajiin, joiden kautta päästäisiin käsittelemään jopa derivaattaa. Tutkivasta oppimisesta voisi tehdä vertailevan tutkimuksen siten, että mukaan otettaisiin verrokkiryhmä. Sama aihe opetettaisiin kahdelle ryhmälle, toiselle tutkivan oppimisen keinoin ja toiselle perinteisemmällä tavalla esimerkiksi opettajajohtoisena opetuksena esimerkkien kautta. Näiden kahden ryhmän oppimista voitaisiin tarkastella heti opetuksen jälkeen ja jonkin ajan päästä opetuksesta. Näin saataisin tietoa siitä kuinka kestävää oppiminen on tutkivan matematiikan tunneilla.

Oppilaiden motivaatio ja sitoutuminen matematiikan opiskeluun on heikkoa TIMSS 2011 -tutkimuksen mukaan (Kupari ym. 2012). Kuitenkin oppilaat vaikuttivat tutkivan matematiikan tunneilla innostuneilta ja jaksoivat pääasiassa keskittyä ongelmien pohtimiseen hyvin. Tutkivan oppimisen tutkimuksissa voisi siis tarkastella myös onko oppilaiden motivaatio opiskella matematiikka parempi kuin perinteisellä matematiikan tunnilla. Tämän tutkimuksen pohjalta on vaikea vetää johtopäätöksiä oppilaiden motivaation parantumisesta, koska aineisto on suppea.

Lähteet

[1] Amit, M. & Neria, D. 2008. ”Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems tu unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, 40, 111-129.

[2] Carraher, D. W., Martinez, M. V. & Schliemann A. D. 2008. Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*,40, 3-22.

[3] Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest D. 2006. Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 87-115.

[4] Fennema, E., Carpenter, T., Franke, M., Levi, L., Jacobs, V., & Empson, S. 1996. A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4)*, 403-434.

[5] Francisco, J. & Maher, C. 2005. Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24(3-4),* 361-372.

[6] Francisco, J. & Hähkiöniemi, M. 2011. Students' ways of reasoning about nonlinear functions in Guess-My-Rule games. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21.

[7] Goldin G. 1998. Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal for mathematical behavior, 17(2)*, 137-165.

[8] Goldin G. & Shteingold, N. 2001. Systems of representations and the development of mathematical concepts. Teoksessa A. Cuoco & F. Curcio (toim.) *The roles of representation in school mathematics. Yearbook 2001. Reston, VA: National council of teachers of mathematics*, 1-23.

[9] Goos, M. 2004. Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35(4)*, 258-291.

[10] Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), Matematiikka näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, (2. uudistettu painos) *Niilo Mäki Instituutti*, Jyväskylä, 50-83.

[11] Hassinen, S. 2006. Idealähtöistä koulualgebraa, IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla. *Helsingin yliopisto. Käyttäytymistieteellinen tiedekunta. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274.*

[12] Hiebert, J. & Lefevre, P. 1986. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum,* 1-27.

[13] Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2008. Tutki ja kirjoita. *Helsinki: Tammi*

[14] Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rantanen, A. & Tikka, T. 2009. Pii 9 Matematiikka, Opettajan aineisto 1, Kuvaajia ja yhtälöitä. *Helsinki: Tammi.*

[15] Hähkiöniemi, M. 2006a. The role of representations in learning the derivative. *Raportti 104. Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Jyväskylän yliopisto.*

[16] Hähkiöniemi, M. 2006b. Ajattelun apuvälineet - tapaustutkimus derivaatan representaatioista. *Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 82.*

[17] Hähkiöniemi (toim.), M. 2011. Geogebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa. Tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta. *Jyväskylän yliopisto. Opettajan koulutuslaitos.*

[18] Hähkiöniemi, M. 2011. Tutkijatohtori, Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä. Henkilökohtainen tiedonanto 12.11.2011.

[19] Jyväskylän yliopisto Normaalikoulu. 2004. Jyväskylän normaalikoulun esi- ja perusopetuksen opetussuunnitelma. Saatavilla www-muodossa
URL:< https : //www.norssi.jyu.fi/opetus−ja−opiskelu/opetussuunnitelma/ ops_perusopetus/perusopetuksen_opetussuunnitelma.pdf >
luettu 8.8.2011

[20] Järvinen, R., Latva, O. & Makkonen, J-P. 2005. Kartio 4, Perusopetuksen matematiikkaa kurssit 8-10. *Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki.*

[21] Kilpeläinen, T. 2000/2002. Analyysi 1 -luentomuistiinpanot. Jyväskylän yliopisto.
Saatavilla www-muodossa *www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA111.pdf*
luettu 2.1.2012

[22] Keranto, T. 2004. Kriittinen ajattelu ja tieteen tuntemus matematiikan opetuksessa. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. (2. painos) *Niilo Mäki Instituutti*, Jyväskylä, 32-45.

[23] Kupari, P., Vettenranta, J. & Nissinen, K. 2012. Oppijalähtöistä pedagogiikkaa etsimään. Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa. *Jyväskylän yliopistopaino, Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopisto.*

[24] Kupari, P. 2013. Professori ja TIMSS 2011 -tutkimuksen kansallinen koordinaattori, Koulutuksen tutkimuslaitos, Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä. Henkilökohtainen tiedonanto 7.8.2013.

[25] Latva, O., Hassinen, S., Makkonen, J-P. & Tolvanen, A. 2010. Kuutio 9, Opettajan kirja 8, Funktio ja yhtälöpari.*Kustannusosakeyhtiö Tammi, Helsinki.*

[26] Lindroos-Heinänen, R., Talvitie, K. & Vähä-Vahe, O. 2009. Laskutaito 9, Opettajan opas 2. *WSOY Oppimateriaalit Oy, Helsinki.*

[27] Martino, A.M. & Maher, C.A. 1999. Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice Has Taught Us. *Journal of Mathematical Behavior, 18(1)*, 53-78.

[28] Martino, A.M. & Maher, C.A. 1991. The construction of mathematical knowledge by individual children working in groups. Teoksessa F. Furinghetti (toim.), *Proceedings of the Fifteenth Annula Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 365-372. Assisi, Italy. Julkaisuun viitannut Martino, A.M. & Maher, C.A. 1999. Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice Has Taught Us. *Journal of Mathematical Behavior, 18(1)*, 53-78.

[29] Opetushallitus. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.

[30] Powell, A., Francisco, J. & Maher, C. 2003. An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22 (2003)*, 405-435.

[31] Radford, L. 2010a. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37-62.

[32] Savola, L. 2008. Video-based analysis of mathematics classroom practice: Examples from Finland and Iceland. *Julkaisematon väitöskirja. The Graduate School of Arts and Sciences, Columbia University.*

[33] Schoenfeld, A.H. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Teoksessa D. Grouws (toim.) *Handbook for Research for Mathematics Teaching and Learning,* New York: MacMillan, 334-370.

[34] Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1),* 1-36.

[35] Shimizu, Y. 1999. Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 107-116.

[36] Silver, E. 1997. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM - Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik, 97(3),* 75-80.

[37] Staples, M. 2007. Supporting whole-class collaborative inquiry in a secondary mathematics classroom. *Cognition and Instruction, 25(2)*, 161-217.

[38] Stein, M., Engle, R., Smith, M. & Hughes, E. 2008. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340.

[39] Tall, D. 2003. Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. Teoksessa L. Carvalho & L. Guimarães (toim.). *Coloquio de Historia e Tecnologia no Ensino de Matemática*, Universidade do Estado do Rio De Janiero, 21.-23.2.2002. vol. 1, 1-28.

[40] Wood T. & Sellers, P. 1997. Deepening the analysis: Longitudinal Assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(2),* 163-186.

Liitteet

Liite 1: Tehtävä 1 ja sen koordinaatistopohja

Liite 2: Tehtävä 2 ja sen koordinaatistopohja

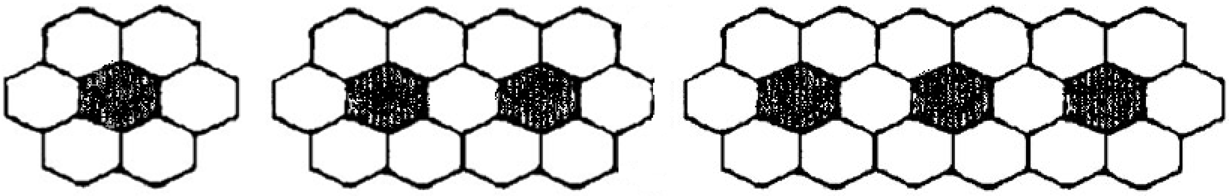
Liite 3: Tehtävä 3 ja sen koordinaatistopohja

Liite 4: Luonnostelmat oppituntien yhteenvedoista sekä lisätehtäviä

LIITE 1: Tehtävä 1 ja sen koordinaatistopohja

TEHTÄVÄT **9.12.2010**

1)



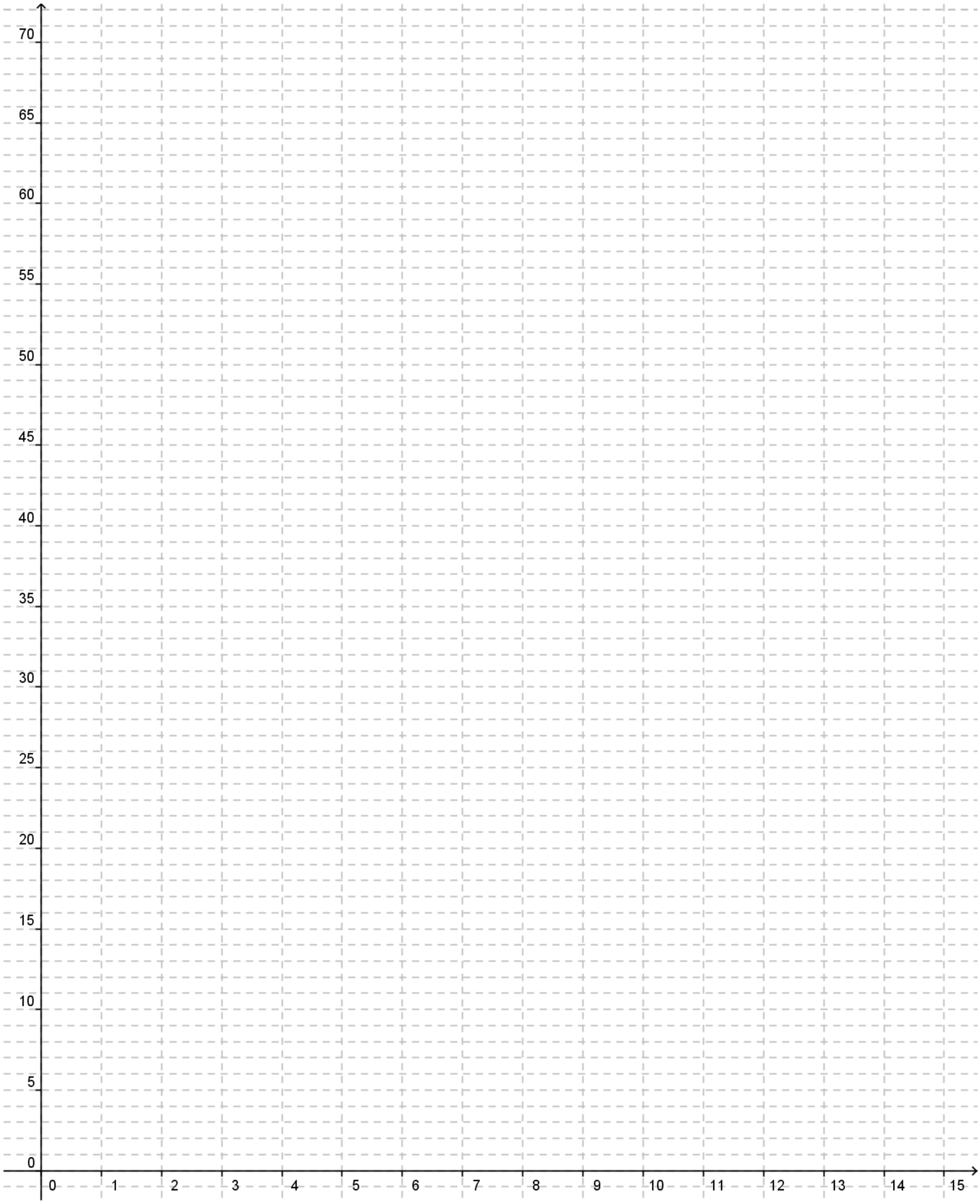
A) Kuinka monta valkoista laattaa olisi seuraavassa kuviossa?

B) Kuinka monta valkoista laattaa tarvitaan kuvioon 10?

C) Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion valkoisten laattojen määrä tässä ketjussa.

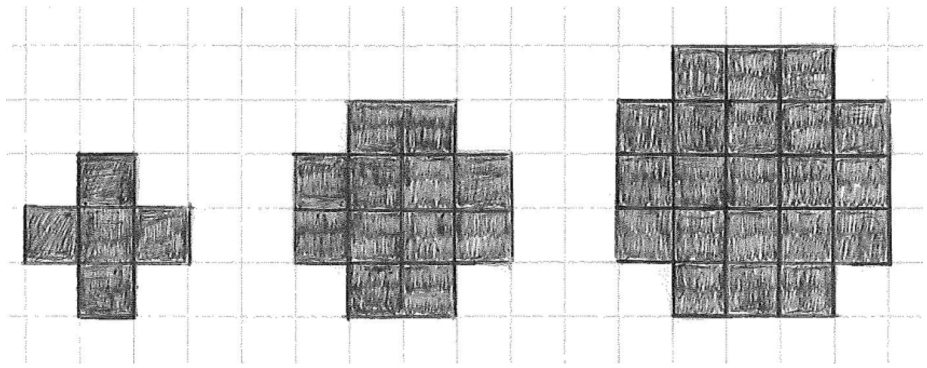
D) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea valkoisten laattojen määrä, kun mustia laattoja on tietty määrä.

E) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä paljonko valkoisia laattoja tarvitaan tietyn kokoiseen laatoitukseen.


70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

LIITE 2: Tehtävä 2 ja sen koordinaatistopohja

2)



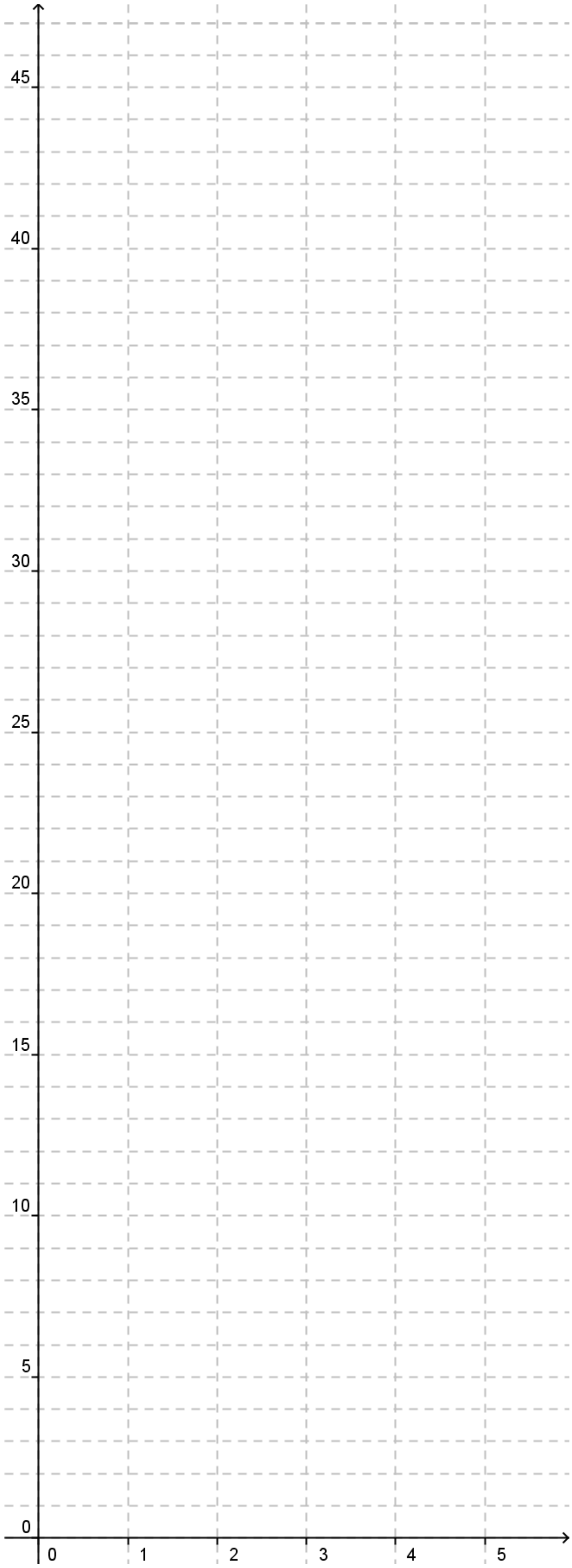
A) Kuinka monta mustaa laattaa olisi seuraavassa kuviossa?

B) Kuinka monta mustaa laattaa tarvitaan kuvioon 10?

C) Keksi tapa, jolla voidaan laskea minkä tahansa kuvion mustien laattojen määrä tässä ketjussa.

D) Muodosta kaava, jolla voidaan laskea mustien laattojen määrä missä tahansa kuviossa.

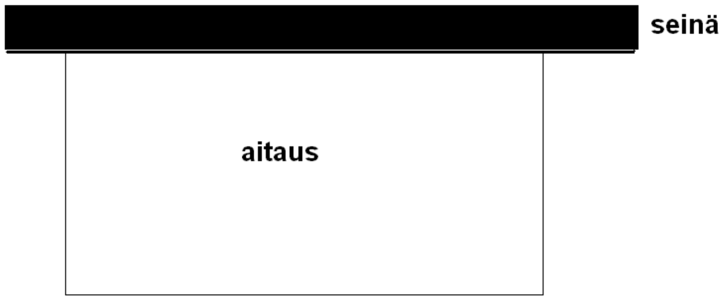
E) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä paljonko mustia laattoja tarvitaan kuhunkin kuvioon.


45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5

LIITE 3: Tehtävä 3 ja sen koordinaatistopohja

TEHTÄVÄT **10.12.2010**

3) Hempalla on 13 metriä kanaverkkoa, josta hän aikoo rakentaa kanoilleen suorakulmionmuotoisen aitauksen kanalan seinän viereen.



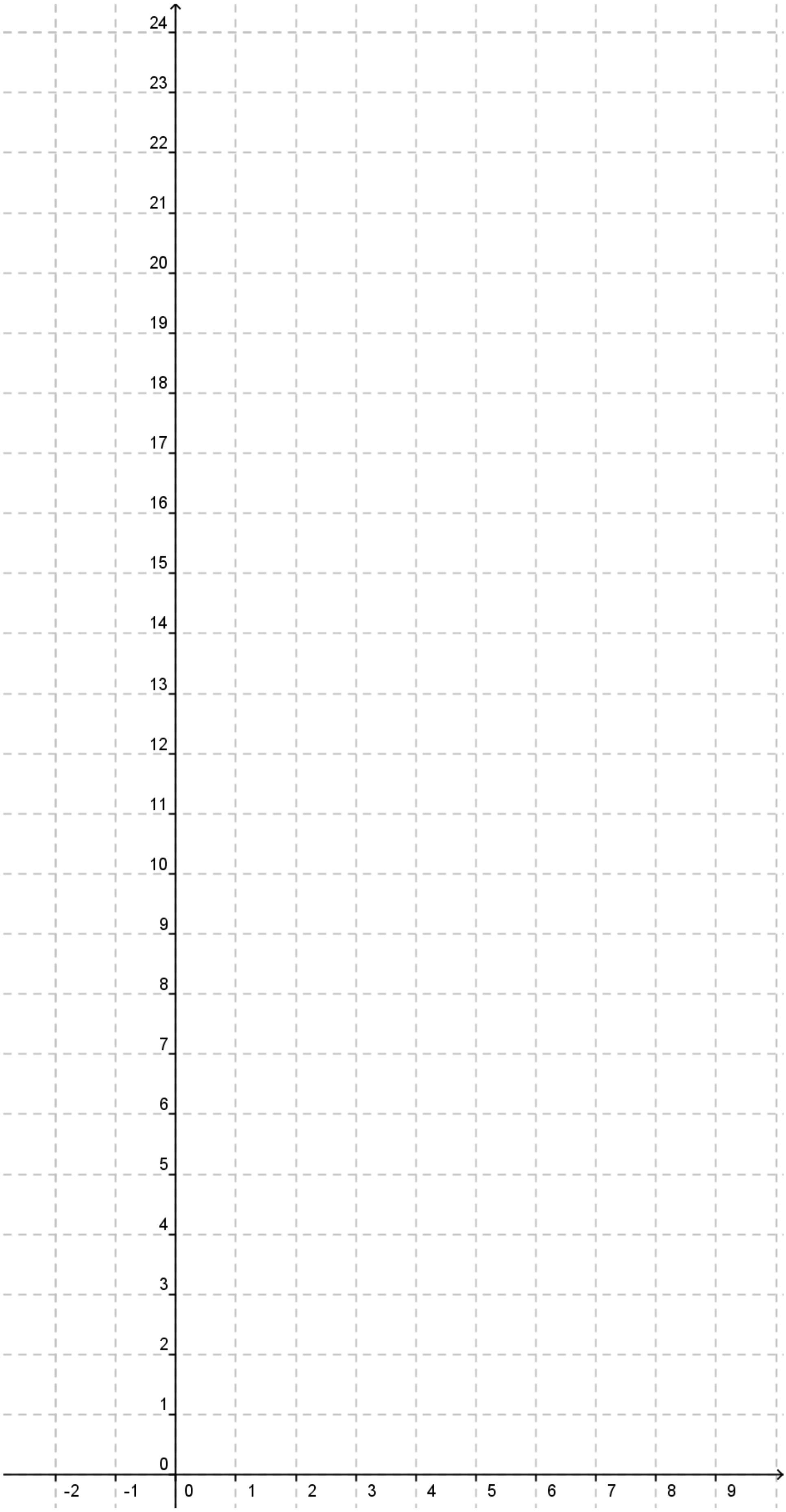
A) Jos aitauksen seinästä lähtevän sivun pituus on 5 metriä, niin kuinka suuri aitauksen pinta-ala on tällöin?

B) Keksi tapa, jolla voidaan laskea aitauksen pinta-ala, kun seinästä lähtevän sivun pituus tiedetään? Miten tämän voi kirjoittaa kaavana?

C) Laadi oheiseen koordinaatistoon esitys, josta lukija voi nopeasti nähdä kuinka suuri aitauksen pinta-ala on, kun seinästä lähtevän sivun pituus tiedetään.

D) Hemppa haluaa vain parasta kanoilleen ja toivoo, että aitauksesta tulisi mahdollisimman iso vaikka kanaverkkoa on käytettävissä 13m. Miten aitauksen mitat olisi valittava, jotta aitauksen pinta-ala olisi mahdollisimman suuri?

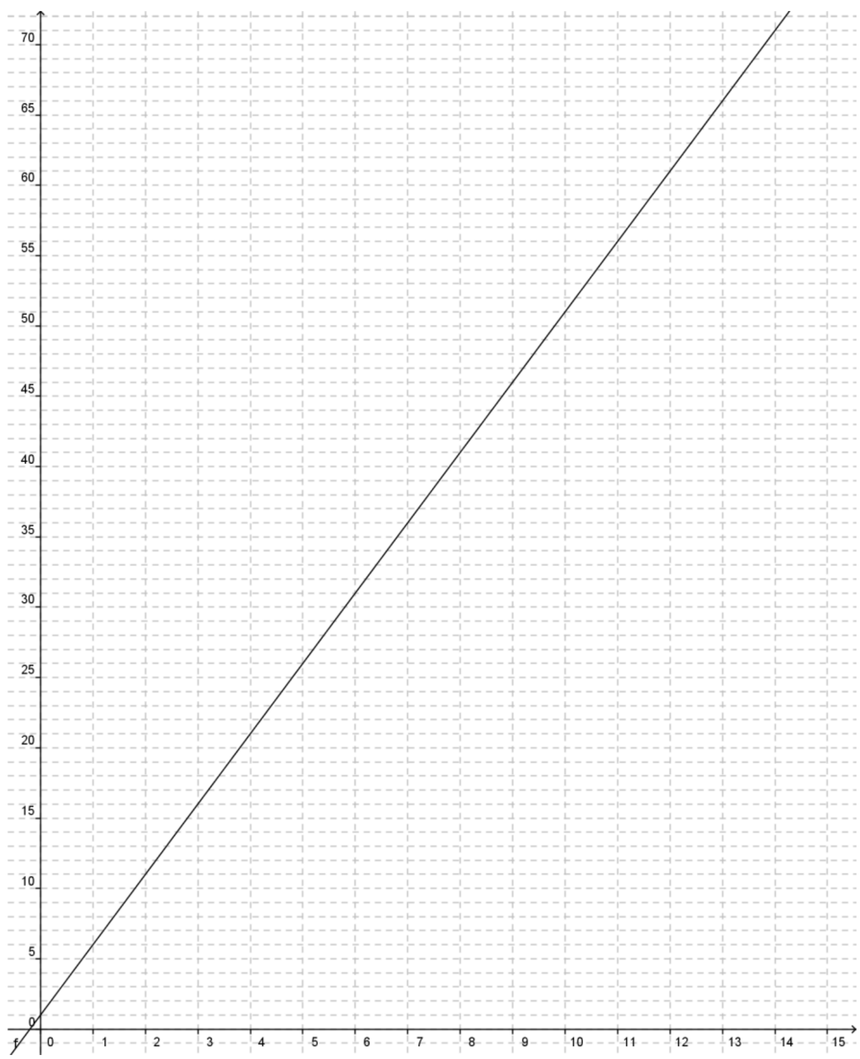
E) Kuinka pitkiä sivujen täytyy olla, jotta aitauksen pinta-ala olisi 18 neliömetriä?


24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

LIITE 4: Luonnostelmat oppituntien yhteenvedoista sekä lisätehtäviä

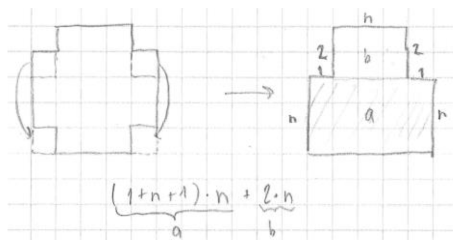
Tehtävän 1 yhteenveto

- Käydään läpi oppilaiden erilaisia ratkaisuja. Vertaillaan niitä. Pohditaan ovatko ratkaisut samoja vaikka näyttävätkin erilaisilta. Oppilaiden täytyy perustella oman ratkaisun toimivuus tai miksi se on oikein.
- Oppilaiden erilaiset merkintätavat → matematiikassa merkitään *x*:llä → keskustelua muuttujan käsitteestä (matemaattisessa lausekkeessa esiintyvä symboli, jolle voidaan antaa eri lukuarvoja, vastakohta on vakio, jolla on yksi kiinteä lukuarvo). Saadaan funktio y=5x+1.
- (jos aikaa ja oppilaat ovat käyttäneet rekursiivista lähestymistapaa eli löytäneet säännön +5 a-, b-, c- tai d-kohdissa: Monellako ruudulla kuvaaja kasvaa y-akselin suunnassa jos x-akselilla mennään yksi ruutu eteenpäin? Miksi kuvaaja kasvaa viidellä? Löytyykö yhtäläisyyttä aiempiin havaintoihin?)
- kuvassa alla tehtävän 1 kuvaajan ratkaisu

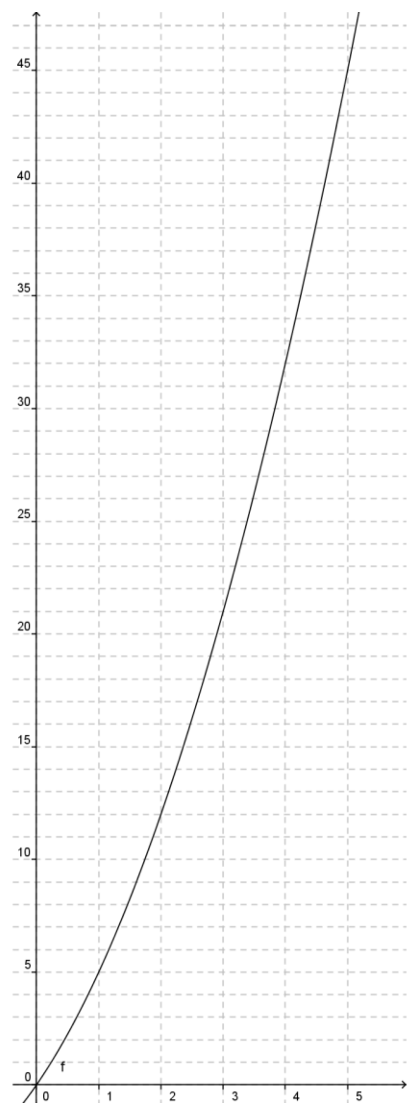


Tehtävän 2 yhteenveto

- Jos oppilaat ovat hoksanneet tehtävien ratkaisut itse, niin yhteenvetoon tarvitaan n. 5 min, mutta jos ratkaisuja ei ole löytynyt niin aikaa tarvitaan n. 15min
- Binomien laskusääntöjä ei käydä läpi. Oppilaille voi todeta, että saman säännön voi esittää monella eri tavalla. Pohditaan kuitenkin, ovatko kaikkien vastaukset päteviä eli toimivatko ne. Perusteluksi riittää myös laattojen erityylinen asettelu.
- n*(n+2)+2n, niin tämän voisi käsitellä. Varsinkin jos asialle tulee luontevasti geometrinen perustelu n*n + n*2



- Jos kukaan ei osaa ratkaista tehtävää: voimakkaampia vihjeitä ja etsitään ratkaisu yhdessä
    - o kuviosta tuttujen kuvioiden etsimistä, joiden alat oppilaat osaavat laskea
- Viereisessä kuvassa tehtävän 2 kuvaajan ratkaisu

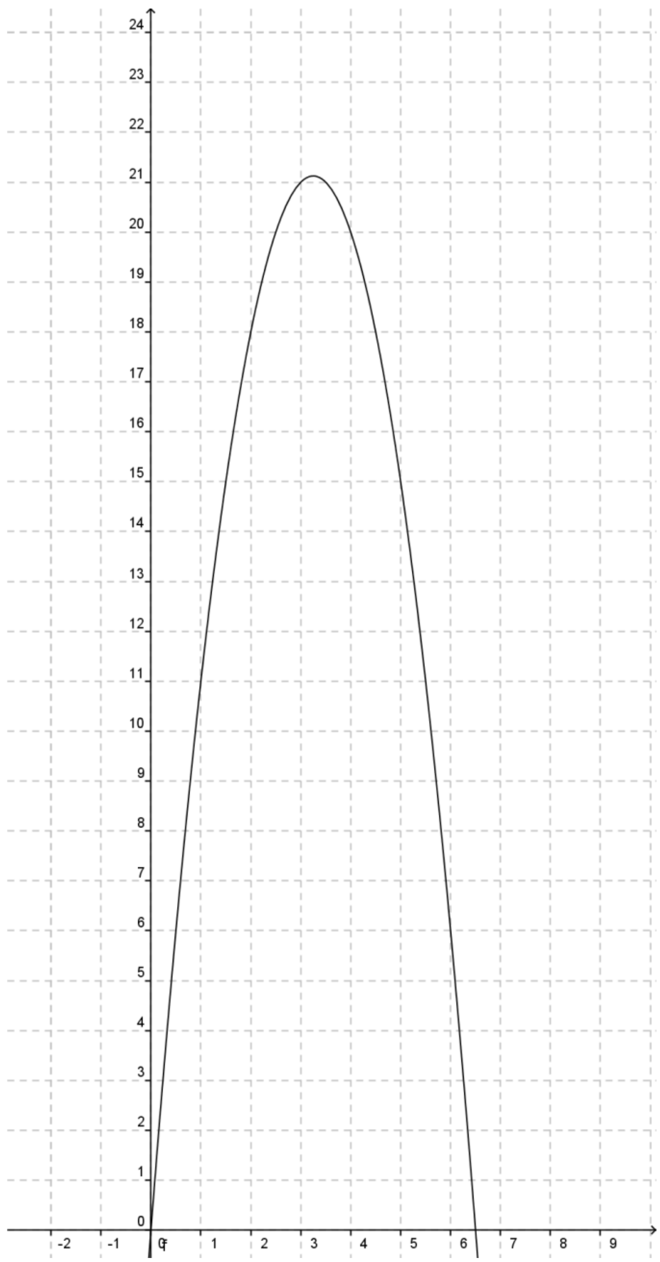


Syventäviä tehtäviä varalle suullisesti tai tehtävänanto kirjoitettuna taululle, esim.:

- keksikää toinen tapa laskea laattojen lukumäärä ja muodostaa kaava
- keksikää oma laatta-ongelma ja ratkaiskaa se
- kerran eräs ryhmä keksi ratkaisuksi $x * (x + 2) + 2x$ tai $\mathrm{n}(\mathrm{n} + 2) + \mathrm{n}(\mathrm{n} + 2) - \mathrm{n}^2$. Ovatko he oikeassa ja miten he keksivät kaavansa?
- kerran eräs ryhmä keksi ratkaisuksi$(\mathrm{x} + 1)^2 - 4$ (väärin, oikea vastaavanlainen$(\mathrm{x} + 2)^2 - 4$). Ovatko he oikeassa ja miten he keksivät kaavansa?

Tehtävän 3 yhteenveto

- Erona viime kertaan on funktion jatkuvuus. Funktio voi siis saada mitä tahansa arvoja väliltä [0, 21.125] eivätkä funktioon sijoitettavat luvut ole välttämättä kokonaislukuja. Laattoja ei voinut olla puolikkaita tms.
- Kuvaajaa voidaan käyttää havainnollistamaan lausekkeet toimintaa.
    - Kuvaajasta näkee suoraan maksimin, jonka funktio voi saada eli tässä tapauksessa aitauksen suurin mahdollinen pinta-ala. (derivaatan nollakohta → lukio-asiaa)
    - Jos aitauksen pinta-ala tiedetään, niin kuvaajasta voidaan päätellä seinästä lähtevän sivun pituus x ja siten myös kolmannen sivun pituus.



Syventäviä tehtäviä varalle, esim.:

- B vaihtoehto: Keksi tapa, jolla voidaan laskea aitauksen pinta-ala, kun seinän suuntaisen sivun pituus tiedetään? Miten tämän voi kirjoittaa kaavana?
- Palataan tehtävään 1 tai 2 tutkimaan kuvaajia, esim. jos mustia laattoja on 45 kpl tehtävässä 2, niin monesko kuvio on kyseessä?