Ongelmanratkaisu

Miia Vapa

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013

Tiivistelmä: M. Vapa, *Ongelmanratkaisu* (engl. *Problem solving*), matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2013.

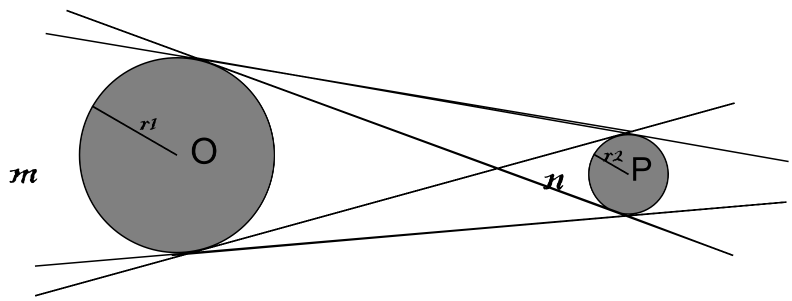
Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä matemaattinen ongelmanratkaisuprosessi, kuuluisimpia ongelmanratkaisumalleja, sekä aktivoida lukija kokeilemaan kykyjään ongelmanratkaisun parissa. Pedagogista näkökulmaa tutkielmaan tuovat luvut ongelmalähtöisestä matematiikan opetuksesta sekä peruskoulun ja lukion matematiikan opetuksen tarpeisiin luotu tehtäväpaketti. Tutkielman tavoitteena on siis, informaatiopaketin lisäksi, tehdä lukijasta entistä osaavampi ja monipuolisempi ongelmanratkaisija niin, että hänen suhtautumisensa käsitettä 'ongelma' kohtaan muuttuu entistä positiivisempaan suuntaan.
Tutkielmassa, niinkuin kaikissa aihetta käsittelevissä lähdekirjoissa, ongelmanratkaisuprosessi on pilkottu moniin pieniin osasiin, ja tarkasteltu näitä osasia erillään itse kokonaisuudesta. Kuitenkin ongelmanratkaisu on ennenkaikkea kokonaisvaltaista, täyden tilanteen hahmottavaa toimintaa, jossa lähtötiedot, päämäärä, ratkaisumetodit, intuitio, luovuus, keskittymiskyky, järki ja tunteet sekoittuvat toinen toisiinsa vaikuttaviksi tekijöiksi, inhimilliseksi ja mielenkiintoiseksi kokemukseksi, joka ongelmanratkaisu pohjimmiltaan on. Tämä kokonaisvaltaisuus näkyy myös tutkielman lukuisissa viittauksissa (ks. tehtävä...) (ks. luku...), jotka yhdistävät eri osa-alueita saumattomaksi kokonaisuudeksi.
Tutkielman informatiivinen osa alkaa perehtymisellä heuristiikkaan, eli 'keksimisen tieteeseen', jota voidaan pitää vanhimpana ongelmanratkaisun teoreettisena pohdintana. Heuristiikan varhaisimmista teksteistä tarkemmin käydään läpi Pappuksen (noin 400 jKr) päättelymetodi "analyysi ja synteesi", joka on yhä edelleen muuttumaton ja elinvoimainen matemaattinen ongelmanratkaisutapa.Tutkielmassa esitellään myös ongelmanratkaisuprosessia edistäviä ongelman muuntelun keinoja, joista monilla on juuret antiikin ajan geometriassa.
Ongelman muuntelun jälkeen pohditaan ongelmanratkaisua yleisellä tasolla ja perehdytään eri ongelmanratkaisumalleihin, kuuluisimpana näistä George Pólyan (1887-1985) luoma ongelmanratkaisumalli vuodelta 1948. Metodeja ongelmanratkaisuun -luvussa esitellään konkreettisia erilaisiin ja -tasoisiin matemaattisiin ongelmiin hyödynnettäviä ongelmanratkaisumalleja, joista useimmat pohjautuvat luvussa 2 esittelemiimme ongelman muuntelun keinoihin. Malleista siirrytään katsaukseen ongelmanratkaisun opettamisesta kouluissa, sekä tulevaisuuden matematiikan opetuksen suuntaan -ongelmalähtöiseen matematiikan opetukseen. Lopuksi pohditaan luovaa ongelmanratkaisua ei niinkään loogisin ja tieteellisin keinoin, vaan enemmänkin filosofisin pohdinnoin.

Sisältö

Johdanto

Ongelmanratkaisu on kokonaisvaltaista, vaativaa mentaalista puuhaa, ja samalla myös erittäin palkitsevaa. Ennen kuin syvennyt lukemaan tutkielmaani ongelmanratkaisun pääpiirteistä sekä yleisistä malleista, haastan sinut ratkaisemaan seuraavat tehtävät:

Tehtävä 1.
Piirrä harppia ja viivoitinta käyttäen kahdelle erilliselle ympyrälle yhteiset tangentit.



Tehtävä 2.
Mies käveli 5h. Ensin tasaista tietä pitkin, sitten ylös vuoren rinnettä ja takaisin samaa reittiä. Mies käveli nopeudella 4km/h tasaista, 3 km/h ylämäkeen ja 6 km/h alamäkeen. Kuinka pitkän matkan mies käveli?

Ratkaistuasi nämä matemaattiset ongelmat tai yritettyäsi niin pitkään että kyllästyit, palaa takaisin ratkaisuprosessin lähtötilanteeseen. Mieti, miten lähdit liikkeelle, mitä teit heti ensimmäiseksi ja millaisiin vaiheisiin ongelmanratkaisuprosessisi jakautui. Syvenny sitten miettimään yksityiskohtaisemmin, miten siirryit vaiheesta toiseen, mitä kussakin vaiheessa tapahtui, mitkä asiat, tiedot ja taidot edistivät ratkaisuprosessiasi, miten suhtauduit ongelmaan ja millainen oli tunnetilasi kussakin vaiheessa, ja miten käsityksesi ongelmasta muuttui ratkaisuprosessin edetessä.
Näiden kysymysten avulla voit luoda oman ongelmanratkaisumallisi, ja verrata sitä tutkielmassa esittelemiimme yleisiin ongelmanratkaisumalleihin, joita ovat kehitelleet monet edistyneet matemaatikot ja filosofit, muun muassa René Descartes (1596-1650) ja George Pólya (1887-1985).

LUKU 1

Heuristiikka

Heuristiikka on tieteenhaara, jonka tutkimuskohteena ovat erilaiset ongelmanratkaisumenetelmät. Heuristiikkaa soveltavat muidenkin alojen tieteilijät kuin matemaatikot; loogikot, psykologit, kasvatustieteilijät sekä filosofit.
Ratkaisumenetelmiä tutkittaessa pääsemme sisälle matematiikkaan ja matemaattiseen ajatteluun syvemmin kuin ennen. Matematiikkahan on totutusti täsmällisen tarkka ja systemaattinen deduktiivinen tiede, mutta toisaalta tehtäessä, ongelmia ratkottaessa, matematiikka on kokeellinen, induktiivinen tiede. Molemmat näkökulmat ovat yhtä vanhoja kuin matematiikka tieteenalana itse. [12]
Heuristiikan, eli 'keksimisen tieteen' juuret ulottuvat Eukleideen aikaisiin kirjoituksiin. Kreikkalaisen matemaatikon, Pappuksen (n. 400 jKr), kokoelmasta "Collectiones"löytyy yksi varhaisimmista matemaattista päättelyä koskeva kirjoitus. Kuuluisimpia yrityksiä yleispätevän ongelmanratkaisumallin luomiseen ovat kirjoittaneet matemaatikko-filosofit René Descartes (1596-1650) (luvut 3.1.3 ja 3.2.4) sekä Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Heuristinen adjektiivina tarkoittaa 'löytämisen palvelemista'. [12]

1.1. Heuristinen päättely

Heuristinen päättely on laajempaa ja epävarmempaa kuin suoraviivainen ja tarkka matemaattinen päättely. Heuristista päättelyä ei pidetä ehdottoman varmana, lopullisena ratkaisutapana, vaan se on tilapäinen, vakuuttavimmalta tuntuva reitti käsiteltävän ongelman ratkaisuun. Heuristinen päättely soveltuu hyvin niin matematiikan kuin arkipäivänkin ongelmanratkaisutilanteisiin. Ongelmalle voidaan saavuttaa ratkaisu ja siten myös täysi varmuus, mutta sitä ennen ratkaisuprosessissa on yleensä tyydyttävä todennäköisimpään arvaukseen, jota tiedepiireissä kutsutaan 'valistuneeksi arvaukseksi'. Heuristinen argumentti perustuu siis ongelmanratkaisijan tietoihin sekä uskomuksiin kyseisestä ongelmasta, ja se toimii yleensä alkusysäyksenä tarkkaan todistukseen. [12]

1.2. Analyysi ja synteesi

Kreikkalainen matemaatikko Pappus (n.400 jKr), kirjoitti tieteenhaarasta nimeltä "Analyomenos", joka tarkoittaa 'ongelmanratkaisun taidetta'. Pappus kirjoitti kahdesta päättelytavasta, analyysistä ja synteesistä. Analyysi tarkoittaa kokonaisuuden hajottamista osiin ja synteesi näiden palasten tai ideoiden yhdistelyä uudeksi, toimivammaksi kokonaisuudeksi.
Pappus loi päättelytavat antiikin geometrian tarpeisiin, jossa analyysivaihe käsitti teoreeman todistuksen etsintää ratkaisusta käsin ja synteesi tämän todistuksen suorittamista. Myöhemmin päättelytapoja alettiin hyödyntää myös muilla matematiikan aloilla, erityisesti algebrassa.

Analyysissä lähdetään siis liikkeelle siitä, mikä pitää todistaa, johdetaan siitä sen looginen edeltäjä, ja taas edeltäjän edeltäjä ja niin edelleen, kunnes saavutetaan edeltäjä, joka on yleisesti tunnettu tosiasia. Kun päästään tähän tulokseen, muuttuu analyysivaihe synteesivaiheeksi, ja koko päättelyketju peruutetaan takaisin haluttuun tuntemattomaan ekvivalenttien välivaiheiden kautta. Analyysia voidaan kutsua 'lopusta alkuun suuntautuvaksi'- ratkaisutavaksi ja synteesiä 'rakenteelliseksi'-ratkaisutavaksi. Vaiheet voidaan suorittaa joko uuden teoreeman todistusta varten tai sitten ratkaistaessa tuntematon, x. Analyysin ja synteesin havainnollistamiseksi voidaan tarkastella esimerkiksi seuraavaa yhtälöä

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Koska $4^x = (2^x)^2$ ja $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, voidaan muuttuja ilmoittaa muodossa $y = 2^x$. Yhtälö näyttää tällöin selkeämmältä,

$$8(y^2 + \frac{1}{y^2}) - 54(y + \frac{1}{y}) + 101 = 0,$$

muttei edelleenkään helposti ratkeavalta. Huomataan, että muuttuja voidaan vaihtaa uudelleen merkitsemällä $z = y + \frac{1}{y}$, jolloin yhtälö muuttuu ratkaistavaan muotoon

$$8z^2 - 54z + 85 = 0.$$

Tässä kohtaa analyysi-päättelyketju muuttuu synteesiksi. Analyysin määräämät vaiheet käydään nyt uudelleen läpi, päinvastaisessa järjestyksessä. Ratkaisemalla $z = \frac{5}{2}$ ja $\frac{17}{4}$, saadaan y ratkaistua, $y = 2, \frac{1}{2}, 4$ ja $\frac{1}{4}$, ja luvun y avulla etsitty tuntematon $x = 1, -1, 2$ ja -2.

Ongelmanratkaisussa analyysiä voitaisiin kutsua keksimisvaiheeksi ja synteesiä toteuttamisvaiheeksi. Molemmat vaiheet perustuvat uskoon, että ongelma on ratkaistavissa. Teoksessaan Pappus kirjoittaa "Analyysissä me siis oletamme, että vaadittu tehtävä on jo ratkaistu, mitä etsitään on jo löydetty, tai mitä täytyi todistaa käsitämme totena." Oletus on vaaraton, sillä jos tuntematon x on olemassa, se selviää analyysin ja synteesin avulla, ja jos tuntematonta x ei ole olemassa, umpikujaan ajautunut analyysi kertoo, että alkuperäinen ongelma on ratkeamaton. Myös ongelman havainnollistamiseksi tällainen toiveajattelu on välttämätöntä.

Samaan tapaan myös tehtävissä, joissa tavoitteena on vakiinnuttaa uusi teoreema voidaan olettaa, että todistusta vailla oleva teoreema A on mahdollinen. Teoreemasta A vedetään johtopäätös B, teoreemasta B johtopäätös C, teoreemasta C johtopäätös D ja niin edelleen, kunnes päädytään viimeiseen teoreemaan L, joka voidaan varmuudella todistaa joko todeksi tai epätodeksi. Käymällä nämä ekvivalentit vaiheet uudelleen läpi takaperin (synteesivaihe) päädytään lopputulokseen A on tosi/epätosi. [12]

Tiivistettynä Pappuksen idean voisi lausua "Ajattele ongelmasi jo ratkenneiksi, niin ne ratkeavat".

1.3. Heuristinen syllogismi

Oppilas ajattelee kokeenpalautuksessa: "Jos koe on mennyt hyvin, niin opettaja hymyilee. Nyt opettaja hymyilee, joten koe on mitä luultavimmin mennyt hyvin." Tämä on esimerkki heuristisesta merkkien tarkkailusta. Toteamuksen ensimmäisiä virkkeitä "Jos koe on mennyt hyvin, niin opettaja hymyilee. Nyt opettaja hymyilee." kutsutaan lähtökohdiksi ja loppukommenttia "Siksipä mitä todennäköisemmin koe on mennyt hyvin" päätelmäksi. Varmaa tietoa ei päättelyn pohjalta voida tehdä, mutta päättelyä ei myöskään voi sivuuttaa, sillä tärkeimmät edistymisen merkit ovat yleensä heuristisia. Yleinen malli kyseisen kaltaisille toteamuksille voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{array}{c}\text{Jos A niin B}\\ \text{B totta}\\ \hline \text{A todennäköisempi.}\end{array}$$

Tätä kutsutaan 'heuristiseksi syllogismiksi', ja se on yksi yleisimmistä heuristisen päättelyn muodoista. Lausunnossa viiva on implikaation merkki, joka yhdistää lähtökohdan sekä päätelmän, ja tarkoittaa sanaa 'siksipä' tai 'jolloin'. Vertailun vuoksi heuristisen syllogismin voi esittää rinnakkain avoimen päättelyn kanssa.

Heuristinen	Avoin
Jos A niin B	Jos A niin B
B totta	B epätosi
———	———
A todennäköisempi	A epätosi

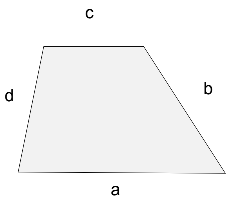
Molemmissa malleissa lähtökohdat ovat samat, mutta päättelyt eroavat toisistaan. Avoimessa päättelyssä lähtökohdat muodostavat täyden perustan päättelylle, ja kun ne pitävät paikkansa, myös päättely pätee. Heuristisen syllogismin päättely puolestaan on epävarmempi kuin sen lähtökohdat, sillä näkyvien lähtökohtien lisäksi päättelyyn vaikuttavat myös vallitsevat olosuhteet, kokemus, tunne sekä muut lausumattomat syyt. Näiden näkymättömien osien muutokset voivat horjuttaa päätelmää tai kumota sen, jättämättä jälkiä perustan näkyvään osaan. Vaikkei heuristinen syllogismi johdakaan varmaan lopputulokseen, on se erittäin hyödyllinen päättelymuoto etenkin fyysisen maailman mallinnuksessa, joka ei tiukkoja matemaattisia lakeja noudata. [12]

LUKU 2

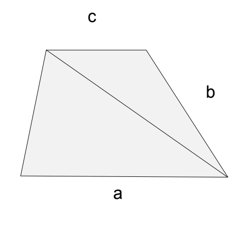
Ongelman muuntelu

Näkökulman sekä eri ratkaisutapojen monipuolisuus ja joustavuus ovat ensiarvoisen tärkeitä ongelmanratkaisijan ominaisuuksia. Matemaattiset ongelmat eivät yleensä ratkea suoraviivaisesti, vaan vaativat pitkällistä pohdintaa ja aiemman matemaattisen tiedon soveltamista käsiteltävään asiaan. Kun tehtävään sovelletaan aiempaa matemaattista tietoa, liitetään prosessia edistäviä apuelementtejä tai muokataan jollain muulla tavalla tehtävää helpommin ratkeavaksi, löytyy ongelmaan tuore näkökulma, jonka myötä kiinnostus ongelmaa kohtaan kasvaa. Tarkastellaan konkreettista esimerkkiä havainnollistaaksemme ongelman muuntelun tärkeyden.

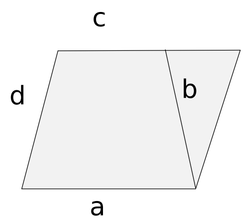
Konstruoi harpilla ja viivottimella puolisuunnikas, jonka sivujen pituudet on annettu. Merkitään pohjan pituutta kirjaimella a, sen kanssa yhdensuuntaista yläsivua kirjaimella c ja oikeaa ja vasenta sivua kirjaimilla b ja d. Ongelmaa voi lähteä muunte-



lemaan sivujen pituuksia vaihtamalla. Tässä $a > c$. Jos c supistuu nollaan, kuvioon muodostuu kolmio, puolisuunnikkaan lävistäjän ja kahden sivun a ja d avulla.
Kuitenkin, jotta kolmion voisi konstruoida, täytyy tietää sen kaikkien kolmen sivun



pituudet, joten tämä keino ei vielä edistä alkuperäisen ongelmamme ratkaisua. Jos taas sivua c pidennetään, niin että siitä tulee yhtä pitkä sivun a kanssa, puolisuunnikas muuttuu suunnikkaaksi.
Huomaamme, että tähän kuvioon muodostuu myös kolmio, jonka sivujen pituudet ovat d, b ja $a - c$. Tämä kolmio on siis konstruoitavissa, ja sen avulla saadaan myös alkuperäinen puolisuunnikas konstruoitua.
Muuntelemalla alkuperäistä ongelmaa (puolisuunnikkaan konstruointi) päädyimme helpommin ratkeavaan apuongelmaan (kolmion konstruointi), jonka avulla saimme alkuperäisen ongelman ratkaistua. [12]



Monesti ongelmanratkaisua ehkäisee vain ratkaisijan jumiutunut ja suppea näkökulma kyseiseen ongelmaan, vaikka muuten hän olisikin kaikinpuolin kykenevä ongelman ratkaisemaan. Ratkaisijan onkin hyvä pitää mielessä, että ongelman muunteluun on monia eri tapoja, joista tässä esittelemme analogian käytön, apuelementtien lisäämisen, osiinjaon ja uudelleenjärjestelyn, sekä yleistämisen ja spesialisaation.

2.1. Analogia

Analogia tarkoittaa samankaltaisuutta, jossa kahdella analogisella kohteella on vastinosia, jotka ovat samassa suhteessa itse kokonaisuuteen. Matemaattisesti saman voi ilmaista seuraavalla tavalla:
Kaksi matemaattista systeemiä, S ja S' ovat yhteydessä toisiinsa niin, että tietyt suhteet systeemin S osasten välillä ovat samojen matemaattisten lakien määräämät kuin vastaavat systeemin S' osasten väliset suhteet.
Esimerkiksi kolmion ja tetraedrin sivut ovat analogisia siinä mielessä, että ne muodostavat yhteensä 180° kulmat kahden muun sivun kanssa, ja niiden väliin jäävän pinta-alan voi laskea jakamalla korkeuden ja kannan tulo kahdella.
Näillä kahdella matemaattisella systeemillä, joista toinen oli yksinkertainen tasokuvio, ja toinen kolmiulotteinen kappale, on siis samankaltaiset systeemien sisäisten osien väliset suhteet. Matemaattisessa ongelmanratkaisussa alkuperäiselle ongelmalle löytyy usein ratkaisu siirryttäessä yksinkertaisempaan analogiseen ongelmaan. Tällaisessa yksinkertaistamisessa pitää kuitenkin huomioida, ettei saatu ratkaisu ole alkuperäiselle ongelmalle liian suppea tai vääristynyt.
Analogia voi olla myös suora vastaavuus kahden systeemin S ja S' osien välillä. Tämä tarkoittaa sitä, että systeemin S osien suhteita määräävät lait ovat samat myös vastaaville systeemin S' osille. Tätä tarkkaa analogian muotoa kutsutaan isomorfiksi. Muun muassa Pythagoraan lauseen päteminen kaikille suorakulmaisille kolmioille, sekä homoteettiset kappaleet ovat tällaisen isomorfismin ilmentymiä. Homomorfismi puolestaan tarkoittaa laajempaa vastaavuutta, jossa systeemin S tiettyjen osien suhteet yleistetään koskemaan laajemman systeemin S' osien välisiä suhteita. (Ks. edellinen esimerkki)

2.1.1. Analoginen päättely. Analogia ei rajoitu vain systeemien osasten välisten suhteiden tarkasteluun, vaan analogian kautta voidaan johtaa myös kokonaisia systeemejä koskevia päätelmiä. Analogiseksi päättelyksi kutsutaan päättelyä, jossa kahden systeemin ollessa monessa suhteessa toistensa kaltaisia tehdään oletus, että ne ovat myös jossain uudessa suhteessa samankaltaisia. Tällöin päädytään todennäköiseen otaksumaan, joka ilman tarkkaa todistusta on kumottavissa. Esimerkiksi siitä, että kolmion painopiste säilyy samana, kun sen kaikkiin kärkipisteisiin asetetaan yhtäsuuret painot, voidaan analogisesti päätellä, että myös tetraedrin painopiste säilyy samana, kun sen neljään eri kärkipisteeseen asetetaan samanpainoiset painot. Tai vastaavasti arkieleämässä päätellään, että koska Maisa muistuttaa kovasti ruumiinrakenteeltaan ja persoonaltaan sisaruksiaan, jotka ovat hyviä jalkapallossa, täytyy siis Maisankin olla hyvä jalkapallossa. Analoginen päättely on epäilemättä yksi yleisimmistä päättelymuodoista sekä arkielämässä että matematiikassa. Muun muassa matemaattinen induktio, jossa alkeistapauksille pätevä sääntö laajennetaan koskemaan koko lukujonoa, perustuu vankasti analogiaan. [12]

2.1.2. Induktiivinen päättely ja matemaattinen induktio. Induktiivinen päättely on päättelytapa, jossa muutamasta yksittäistapauksesta johdetaan yleistys. Induktiivinen päättely on siis erityistapausten yleistämistä, jossa johtopäätös ei kuulu lähtöoletuksiin, toisin kuin induktiivisen päättelyn vastakohdassa, deduktiivisesssa päättelyssä. Induktiivinen päättely on siis tietoa lisäävää päättelyä deduktiivisen ollessa 'yleisestä yksittäiseen'-suuntautuvaa päättelyä. Induktiolla tarkoitetaan aineistosta esiin kohoavan säännönmukaisuuden hyväksyntään yleiseksi laiksi. Tämä yleistys on kumottavissa, kunnes se pystytään jollain keinolla vahvistamaan, esimerkiksi todistamalla kaikille joukon alkioille.
Matemaattinen induktio on muiden tieteiden tapaan yksittäistapausten havainnointia ja yhdistelyä yhtenäiseksi, säännönmukaiseksi kokonaisuudeksi sillä erotuksella, että muissa tieteissä (mm. fysiikassa, kemiassa, tähtitieteissä) mikään muu kuin havainnot eivät vahvista havaittua säännönmukaisuutta todeksi, kun taas matemaattinen induktio voidaan vahvistaa oikeaksi tarkalla todistuksella. Matemaattista induktiota käytetään ainoastaan matematiikan alalla todistamaan tietynlaisia teoreemoja. Sen apuna hyödynnetään analogiaa, yleistämistä sekä spesialisaatiota. Matemaattinen induktio syntyy siis kun havaitulle joukolle luodaan alustava yleistys. Yleistys perustuu joukossa havaittuun säännönmukaisuuteen (analogia) ja sitä testataan muutamalla yksittäistapauksella (spesialisaatio).
Mielenkiintoinen yleistys, jota testataan muutamalla yksittäistapauksella, johtaa kuitenkin vain todennäköiseen oletukseen, jonka todenpitävyydestä ei voi sanoa mitään ennen tarkkaa todistusta. Tarkka todistus lähtee olettamuksesta, että saamamme tulos pätee yleisesti kaikille luvuille n (yleistäminen), ja näin ollen täytyy vain todistaa, että saatu tulos pätee arvosta n seuraavalle arvolle $n+1$. Tämän onnistuttua saamme siis tietämistämme alkuarvoista (esim. $n = 1, 2, 3, 4$) laajennettua kaavan koskemaan koko lukujonoa:
Koska otaksuma toimii, kun $n = 4$, niin se toimii myös kun $n = 5$, ja koska se toimii kun $n = 5$, niin se toimii myös kun $n = 6$ ja niin edelleen.
Induktiotodistus onnistuu vain silloin kun havaittu säännönmukaisuus muokataan täsmälliseksi ja arvosta n riippuvaiseksi väittämäksi. Näin voidaan testata päteekö se myös siirryttäessä kokonaisluvulta toiselle, eli luvusta n lukuun $n + 1$. Tämän todistamisessa auttaa alkuarvojen testaamisprosessissa saavutettu kokemus ja tieto.
Nimi 'matemaattinen induktiotodistus' tulee siitä, että yleistys, joka vahvistetaan todeksi tarkalla todistuksella, syntyy yleensä kokeellisesti alkuarvojen testausprosessissa. Matemaattinen induktio saattaa löytyä yllättäen. Huomaamme, että

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100,$$

joka tarkoittaa samaa kuin

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Väistämättä alamme pohtia: Onko tämä tavallista? Käykö usein niin, että kokonaislukujen kolmansien potenssien summa on kokonaisluvun neliö? Muutetaan tehtävä yleiseen muotoon

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = k^2, \text{ ,jossa } n \text{ ja } k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Alkupään lukuja luetteloimalla ja testaamalla saadaan otaksuma johdettua muotoon

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2, \text{ ,jossa } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

(Ks. tehtäväpaketin tehtävät 8 ja 9) Nämä kaksi väittämää (2.1) sekä (2.2) syntyivät lukujen tarkastelun ja induktiivisen päättelyn pohjalta. Väittämä (2.1) on epäselvempi, riippuvaisempi useammasta muuttujasta kuin väittämä (2.2), ja siten vaikeammin todistettavissa. Tilanne on kuitenkin hieman kummallinen, väittämän (2.2) todistukseen sisältyy väittämän (2.1) todistus, jolloin se on ”painavampi” kuin väittämä (2.1), mutta silti helpommin todistettavissa. Ongelmanratkaisijan onkin syytä pitää mielessä, että toisinaan kunnianhimoisempi ongelma on helpommin ratkaistavissa kuin alkuperäinen, pienempi ongelma.
Induktio on merkittävä matemaattinen laji, sillä monet matemaattiset tulokset ovat ensin löytyneet induktiivisesti, kokeellisesti, ja toisinaan vasta vuosisatoja myöhemmin saaneet täydentävän todistuksen osakseen. [12]

2.2. Hajotus ja uudelleenjärjestäminen

Ongelmaa on mahdotonta lähteä ratkomaan päämäärätietoisesti, jos ei ensin hahmota sitä kokonaisuutena. Ongelman ymmärtäminen ja hahmottaminen kokonaisuutena auttaa kiinnittämään huomion ongelman ydinkohtiin, jotka puolestaan voivat suunnata huomiomme muihin tärkeisiin yksityiskohtiin. Näiden tutkimisen myötä ongelman kokonaisuus hahmotetaan eri valossa kuin lähtötilanteessa. Tätä menettelytapaa kutsutaan ’hajottamiseksi ja uudelleenjärjestelyksi’.
Melkein kaikissa matemaattisissa ongelmissa on hyödyllisintä aloittaa pohtimalla mikä tuntematon on, ja miten se liittyy annettuun dataan. Näiden ydinkohtien avulla tehtävän voi hajottaa osiin muun muassa seuraavin keinoin:

(1) Tuntematon pidetään muuttumattomana, lähtötiedot sekä ehdot vaihdetaan.
(2) Lähtötiedot pidetään muuttumattomana, tuntematon sekä ehdot vaihdetaan.
(3) Vaihdetaan sekä lähtötiedot että tuntematon.
(4) Muutetaan lähtötietoja ja tuntematonta yhdistäviä ehtoja.

Näiden muunnosten avulla yritetään löytää alkuperäistä ongelmaa yksinkertaisempi ongelma, joka on helpommin ratkaistavissa. Tarkastellaan lähemmin tapauksia (1), (2), (3) ja (4).
(1) Tuntemattoman kiinnittäminen
Tuntemattoman pitäminen muuttumattomana suuntaa ongelmanratkaisijan ajatukset tuttujen ongelmien pariin, joissa on sama tai samankaltainen tuntematon. Jos yhtään ei löydy, voidaan miettiä, miten lähtötietoja muokkaamalla tai niitä lisäämällä

saadaan tuntematon ratkaistua. Mitä lähempänä alkuperäistä ongelmaa apuongelma on, sitä paremmat mahdollisuudet on hyödyntää sitä ratkaisussa. Siispä tuntemattoman lisäksi on hyödyllistä yrittää pitää myös osa lähtötiedoista ja ehdoista muuttumattomina. (Ks. tehtäväpaketin teht. 12.2)
(2) Lähtötietojen kiinnittäminen
Lähtötietojen avulla voimme yrittää luoda ongelmanratkaisuprosessiimme uuden tuntemattoman, joka toimii reittinä alkuperäisen tuntemattoman ratkaisuun. Tämä tuntematon täytyy olla helpommin johdettavissa annetuista lähtötiedoista sekä hyödyllinen ratkaisuprosessille. Käytännössä ongelmanratkaisija joutuu monesti tyytymään tuntemattoman luomiseen, jonka hyödyllisyyttä ei heti voi tulkita, tai joka on vaikeasti johdettavissa lähtötiedoista. (Ks. 'takaperin-malli' luvusta 3.2.2)
(3) Tuntemattoman ja lähtötietojen vaihtaminen
Tämä keino tuntuu vaaralliselta, sillä voimme ajautua liian kauas alkuperäisestä ongelmasta. Kuitenkin, jos edelliset keinot (1) ja (2) ovat epäonnistuneet, voimme kokeilla muuttaa sekä tuntemattoman että lähtötiedot, pyrkimyksenä saada ne lähemmäs toisiaan kuin alkuperäiset, ja siten toimia siltana näiden välissä. Tuntemattoman ja lähtötietojen vaihtamisen yksi mielenkiintoisimmista muodoista on vaihtaa tuntematon ja yksi lähtötiedoista keskenään. (Ks. esimerkki luvusta 2. Ongelman muuntelu)
(4) Ehtojen vaihtaminen
Kolme edellistä keinoa keskittyivät tuntemattoman ja lähtötietojen muokkaamiseen. Myös niitä yhdistäviä ehtoja voidaan muuttaa. Toisinaan on hyvä kokeilla pudottaa osa ehdoista pois ja tarkastaa, kuinka paljon tuntematon voi tässä tilanteessa vaihdella. Näiden osan ehdoista täyttävien tuntemattomien listaus voi olla hyödyllistä ratkaisuprosessille. (Ks. tehtäväpaketin teht. 12.1)
Edellisessä tarkasteltiin vain matemaattisia ongelmia, joissa yritetään ratkaista tuntematon, x. Kun ongelmana on jonkin teoreeman todistus, näille pätee vastaavat menetelmät (1), (2), (3). Nyt vain joudutaan operoimaan tuntemattoman, lähtötietojen ja niitä yhdistävien ehtojen sijaan hypoteesien kanssa, joiden pohjalta yritämme vakiinnuttaa uuden teoreeman. Hypoteesin voi jakaa osiin, ja tutkia jokaista osaa erikseen sekä siirtyä osien avulla muiden yksityiskohtien tarkasteluun. Tämän hajotuksen jälkeen voimme yhdistää osaset uudeksi teoreemaksi. Tähän meillä on lukuisia keinoja, joista esittelemme kolme jo tutuksi tullutta, yleisintä keinoa:
(1) Päätelmän kiinnittäminen
Voimme yrittää etsiä päätelmän perustaksi tuttua teoreemaa, tai keksiä sellaisen. Myös hypoteesia voi muokata, esimerkiksi karsia siitä osan pois ja miettiä päteekö päätelmä yhä.
(2) Hypoteesin kiinnittäminen
Mitä hypoteesista on johdettavissa?
(3) Hypoteesin ja päätelmän muuntelu
Jos kaikki muut keinot ovat epäonnistuneet, voidaan pohtia, voiko hypoteesia ja päätelmää muuttaa niin, että uudet hypoteesit ja päätelmät ovat lähempänä toisiaan kuin alkuperäiset?
Ongelman hajottamisvaiheessa joudutaan joskus palaamaan termien määritelmiin asti ja lisäämään ongelmaan määritelmästä saatuja tietoja. (Ks. tehtäväpaketin tehtävä

1) Hajottamisen jälkeen osat yhdistetään uudelleen uudeksi, helpommaksi apuongelmaksi. Uudelleenyhdistämistapoja on lukemattomia; vaikeat ongelmat vaativat poikkeuksellisia, piileviä yhdistämistapoja, ja helpommat suoraviivaisempia. Kuitenkin myös vaikeiden ongelmien kohdalla on syytä kokeilla ensin helpompia ja yksinkertaisempia menetelmiä, ennen kuin valjastaa älynsä vaikeimpiin, vähemmän ilmeisiin yhdistämistapoihin. [12]

2.3. Apuelementit

Apuelementiksi kutsutaan sellaista objektia (kuvio, viiva, teoreema, uusi tuntematon), jonka lisääminen ongelmaan helpottaa sen ratkaisua. Onnistunut apuelementin lisäys laajentaa ymmärrystä käsiteltävästä ongelmasta, vaikkakin käytännössä usein apuelementit lisätään ongelmaan tietämättä ennalta, kuinka ne tulevat vaikuttamaan ongelmanratkaisun kulkuun. Apuelementtien lisäykseen tarvitaan siis intuitiivisten ideoiden ja järkiperäisten syiden symbioosia. Apuelementtien avulla voidaan löytää tilanteeseen sopiva apuongelma, jonka ratkaisu on yleisesti tunnettu, jolloin alkuperäinen ongelma ratkeaa joko apuongelman tuloksen tai sen ratkaisutavan hyödyntämisen kautta. Apuongelma voi siten edistää ratkaisuprosessia suurin harppauksin, mutta sen hyödyntäminen on aina myös ajankäytöllinen riski. Toisinaan pätevältä näyttävä apuongelma osoittautuukin hyödyttömäksi, ja siihen kulutettu aika hukkaanheitetyksi. Erinomainen ongelmanratkaisija ei pelkästään osaa hyödyntää erilaisia apuongelmia ratkaisuprosessissaan, vaan hän on myös harjaantunut arvioimaan ennalta tarpeellisten apuongelmien käytettävyys.
Alkuperäisestä ongelmasta siirtymistä vastaavaan ongelmaan Pólya kutsuu "vastaavaksi siirtymäksi" (equivalent reduction). Vastaava apuongelma ratketessaan selvittää myös alkuperäisen ongelman, kuten seuraavasta esimerkistä voidaan nähdä.

A. Tasasivuisen kolmion jokaisen kulman suuruus on 60°
B. Tasakulmaisen kolmion jokaisen kulman suuruus on 60°

Nämä kaksi ongelmaa eivät ole identtiset, mutta toinen teoreema seuraa toisesta. Kohdan A todistamiseksi riittää siis todistaa kohta B. Teoreema B puolestaan sopii hyvin "vastaavaksi siirtymäksi", sillä se on homogeenisempi kuin teoreema A, ja siten myös helpompi todistaa.
Luvussa "Analyysi ja synteesi" esiteltiin kreikkalaisen matemaatikko Pappuksen ongelmanratkaisutapa ketjusta vastaavia apuongelmia. Algebrallisessa esimerkissä muuttujanvaihdon avulla tuntematon muutti muotoaan. Toisinaan samankaltainen päättelyketju voidaan muodostaa myös ilman muuttujanvaihtoa vastaavan siirtymän avulla, kuten seuraavassa esimerkissä.

Selvitä x yhtälöstä

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0. \tag{2.3}$$

Muutetaan yhtälö muotoon

$$(2x^2)^2 - 2(2x^2) \times 13 + 144 = 0. \tag{2.4}$$

Yhtälöt (2.3) ja (2.4) ovat ekvivalentit, mutteivät identtiset. Siirtyminen yhtälöstä (2.3) yhtälöön (2.4) tavoittelee binomikaavan hyödyntämistä, kuten kaavasta (2.5) voidaan jo selkeästi nähdä

$$(2x^2)^2 - 2(2x^2) \times 13 + 169 = 25. \tag{2.5}$$

Näin saadaan

$$(2x^2 - 13)^2 = 25 \tag{2.6}$$

$$2x^2 - 13 = \pm 5 \tag{2.7}$$

$$x^2 = \frac{13 \pm 5}{2} \tag{2.8}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}} \tag{2.9}$$

$$x = 3 \text{ tai } -3 \text{ tai } 2 \text{ tai} -2. \tag{2.10}$$

Alkuperäisestä ongelmasta (2.3) löydettiin siis reitti yhtäpitävien apuongelmien kautta kohdan (2.10) ratkaisuun. Jotta voidaan varmuudella todeta ratkaisun (2.10) olevan alkuperäisen ongelman (2.3) ratkaisu, on varmistuttava jokaisen apuongelman ekvivalenttius edelliseen apuongelmaan. Tämän jokaisen vaiheen läpikäyvän ekvivalenttiustarkistuksen voi tässä tapauksessa korvata tarkistamalla suoraan, toteuttaako kyseinen ratkaisu alkuperäisen yhtälön, jolloin jokainen vaihe on myös välttämättä ollut ekvivalentti edellisen kanssa. Ekvivalenttiustarkistus on erityisen merkittävää silloin kun ongelma ei ratkea suoraviivaisesti yhden tuntemattoman ratkaisulla, kuten geometrisissa konstruktioissa. Vastaavien siirtymien kautta ratkaisuun päätyminen eroaa Pappuksen ”Analyysistä ja synteesistä” siinä mielessä, että Pappuksen ratkaisumenetelmässä ratkaisun löytymisen jälkeen jouduttiin peruuttamaan takaisin kaikki välivaiheet, jotta löydetään alkuperäisen tuntemattoman ratkaisu. Vastaavan siirtymän kautta alkuperäisen ongelman ratkaisu löytyy siis pelkän analyysin avulla, ilman synteesiä.

Apuongelman ei välttämättä tarvitse olla ekvivalentti alkuperäisen ongelman kanssa. Se voi olla myös laajempi tai kapea-alaisempi kuin alkuperäinen ongelma. Tällaista siirtymää kutsutaan ”yksipuoliseksi siirtymäksi” (unilateral reduction), ja jo nimikin kertoo, että niihin sisältyy suurempi riski kuin vastaaviin siirtymiin. Kapea-alaisempaan ongelmaan siirryttäessä täytyy se varustaa aina lisähuomautuksella, tai muuten ratkaisuja voidaan menettää, ja laajempaan apuongelmaan siirryttäessä vaarana on, että ajaudutaan liian kauas alkuperäisen ongelman ratkaisusta. ’Suorakulmaisen särmiön lävistäjä’- laskussa apuongelmana käytetty ’suorakulmion lävistäjä’-lasku on hyvä esimerkki kapea-alaisemmasta apuongelmasta, johon liitettynä sopiva lisähuomio edistää ratkaisuprosessia. (Ks. seuraava luku 'Yleistäminen ja spesialisaatio') [12]

2.4. Yleistäminen ja spesialisaatio

2.4.1. Yleistäminen. Yleistäminen (generalization) tarkoittaa siirtymää yhden yksittäistapauksen tarkastelusta laajemman kokonaisuuden tarkasteluun, johon tämä yksittäistapauskin kuuluu. Yleistämistä käytetään usein apuna matemaattisessa ongelmanratkaisussa. Esimerkiksi tehtävänanto, jossa tietyn kappaleen mitat on annettu lukuarvoina, voi olla hyödyllistä muuttaa yleisempään 'kirjain' -muotoon, jolloin tehtävänantoa sekä siitä saatua tulosta voidaan testata monin eri tavoin.
Ratkaisuprosessissa puolestaan hyödyllisenä ratkaisukeinona saattaa toimia siirtyminen alkuperäistä ongelmaa yleisempään apuongelmaan, kuten seuraavassa esimerkissä:

On annettu suora ja säännöllinen oktaedri. Etsi taso, joka kulkee suoran kautta ja jakaa oktaedrin kahteen yhtä suureen osaan.

Tehtävä saattaa vaikuttaa hankalalta, varsinkin, jos oktaedri ei ole ennestään kovinkaan tuttu. Kuitenkin siirryttäessä seuraavaan apuongelmaan, alkuperäinen tehtävä selkiytyy huomattavasti:

On annettu suora ja kiinteä kappale, jolla on symmetriapiste. Etsi taso, joka jakaa kappaleen kahteen yhtä suureen osaan, ja kulkee annetun suoran kautta.

Tällainen taso kulkee tietysti symmetriapisteen kautta, ja koska säännöllinen oktaedri on symmetrinen kappale, riittää löytää sen symmetriapiste. Nyt siis alkuperäisen ongelman selvittämiseksi tärkeintä oli keksiä uusi, yleisempi ongelma, joka suuntasi huomiomme tehtävän ydinkohtaan, symmetriapisteen löytämiseen. Toisinaan ongelman laajentaminen suurempiin mittasuhteisiin saa myös arkipäivän ongelmat ratkeamaan:

Olipa kerran yksi köyhä ja nälkäinen suomalainen. Hän päätti perustaa avustusjärjestön nälkäänäkeville. Järjestö jakoi kauppojen ylijäämäruokaa köyhille. Näin kertomuksemme päähenkilö sai myös itse syödä kyllikseen. Siispä laajentaessaan ongelmaansa yleiseksi ongelmaksi, henkilö sai myös oman yksittäistapauksensa hoidettua.

Monet matematiikan, fysiikan ja muiden luonnontieteiden tulokset ovat löytyneet yleistysten avulla. Matematiikan alalla yleistyksen todistus onnistuu yleensä matemaattisella induktiolla, johon perehdyimme luvussa "Induktio ja matemaattinen induktio". [12]

2.4.2. Spesialisaatio. Spesialisaatio tarkoittaa kokonaisen joukon käsitteestä siirtymistä johonkin joukon osajoukkoon tai joukon yksittäistapaukseen. Alkuperäisen ongelman erityinen tapaus varustettuna täydentävällä huomiolla voi johtaa ongelman lopputulokseen vaivattomasti. Usein tällainen erityinen apuongelma, joka on vaatimattomampi kuin alkuperäinen ongelma, löytyy ratkaisuprosessin yhteydessä.

Toisinaan ongelmanratkaisuprosessi ei etene toivotulla tavalla, ja voidaan ajankuluksi testata, päteekö väite ongelman äärimmäisille tapauksille. Yksikin vastaesimerkki, jolle väite ei päde, riittää kumoamaan koko alkuperäisen väitteen. Jos taas äärimmäiset tapaukset ovat linjassa väitteen kanssa, ne vahvistavat sen paikkansapitävyyttä merkittävästi.

Vastaesimerkin lisäksi muita spesialisaation ilmentymiä ovat muun muassa saadun tuloksen testaaminen eri yksittäistapauksilla sekä abstraktien matemaattisten käsitteiden havainnollistaminen konkreettisin esimerkein. Esimerkiksi matematiikan opetuksessa voidaan hyödyntää lämpömittaria laajennettaessa oppilaiden käsitystä lukusuoran negatiivisiin lukuihin. [12]

2.5. Merkkejä edistymisestä

Ongelmanratkaisu koostuu annettujen lähtötietojen sekä tuntemattoman välille etsitystä yhteydestä, sekä kaikkien niiden välisten ehtojen totetumisesta. Uuden tiedon, lisäehdon tai sopivan apuongelman sisällyttäminen ongelmaan on merkki edistymisestä. Jo pienet askeleet tarkoittavat kehitystä. Tuntemattoman paikantaminen, alkuehtojen järjestely, kokonaisuuden visualisoiminen sekä sen osiinjakaminen avaavat reittejä ongelmanratkaisuun, ja ovat siten kehityksen ensiaskelia.

Matemaattinen ongelmanratkaisu ei koostu pelkästään edellä esittelemistämme ongelman muuntelun keinoista, vaan siihen vaikuttavat paljon myös kekseliäisyytemme, ratkaisumallien soveltamiskyky, sekä odotuksemme tehtävästä. Mielialamme ja tunteemme toimivat tilanteen arvioijina. Toisinaan ongelmanratkaisuprosessi etenee yhtäkkisen vahvan tunteen johdattelemana. Tällöin puhutaan inspiraatiosta. Inspiraatiolle tunnusomaista on spontaanius, se tuo mukanaan uuden elementin ratkaisuprosessiin, joka saa meidät syvästi vakuuttumaan ongelman ratkeavuudesta. [13]

Edistymisen merkkien tulkitsemiseen vaaditaan kokemusta. Kokenut ongelmanratkaisija tuntee enemmän merkkejä ja niiden merkityksiä kuin kokematon, ja myös tulkitsee ne oikein. Poikkeuksellisen lahjakkaan ongelmanratkaisijan kyky voi puolestaan perustua eräänlaiseen henkiseen ja älylliseen herkkyyteen, jolla hän tuntee erityisen tarkasti edistymisen merkkejä tai niiden puuttumisen niissäkin tilanteissa, joissa vähemmän lahjakkaat ovat täysin tietämättömiä siitä, mitä ongelmanratkaisuprosessi kulloinkin vaatisi. [12]

LUKU 3

Ongelmanratkaisumallit

3.1. Ongelmaratkaisumallien esittely

Esittelemme seuraavassa kuuluisimpia filosofien, matemaatikoiden sekä kasvatustieteilijöiden laatimia ongelmanratkaisumalleja. Ajattomia ongelmanratkaisumalleja ovat René Descartesin luoma "yleismaailmallinen ongelmanratkaisumalli", jonka esittelemme tarkemmin luvussa 3.2, sekä John Deweyn teoksessaan "How We Think" esittelemä ongelmanratkaisumalli vuodelta 1910. [11]
Tunnetuimman ja varmasti myös käytetyimmän yleisen matemaattisen ongelmanratkaisumallin on puolestaan laatinut George Pólya vuonna 1948. Tämä ongelmanratkaisumalli etenee suoraviivaisesti ja järjestelmällisesti, ja sen pohjalta on kehitetty useita muita, monivaiheisempia ja syklisempiä ongelmanratkaisumalleja, muun muassa Lesterin ongelmanratkaisumalli vuodelta 1978. [11]

Dewey	Polya	Lester
1.ongelman tunnistaminen	1.ongelman ymmärtäminen	1.ongelman tiedostaminen
2.ongelman paikantaminen ja määrittely	2.suunnitelman tekeminen	2.ongelman tulkinta ja sisäistäminen
3.mahdollisen ratkaisun esittäminen	3.suunnitelman toteuttaminen	3.tavoiteanalyysi
4.ehdotuksen seurausten pohdinta	4.katsaus tehtyyn	4.suunnitelman laatiminen
5.havainnointi ja kokeilu		5.suunnitelman toteuttaminen
		6.menettelytavan arviointi
		7.ratkaisujen arviointi

3.1.1. George Pólyan ongelmanratkaisumalli. Pólyan vuonna 1948 julkaisema matemaattinen ongelmanratkaisumalli on osoittautunut ajattomaksi ja käyttökelpoiseksi malliksi sekä matemaattisiin että muunkaltaisiin ongelmiin. Malli jakautuu karkeasti 4 eri vaiheeseen; ongelman ymmärtämiseen, suunnitelman laatimiseen, suunnitelman toteuttamiseen sekä arviointiin. Mallista huokuu läpi Pólyan kokeneisuus sekä ongelmanratkaisijana että matematiikan opettajana. Pólyan johdatteleva pedagoginen kysymyksenasettelu ohjaa ongelmanratkaisijan ajatusprosessia kohti ratkaisua.
1. Ongelman ymmärtäminen
Mitä ongelmassa etsitään? Mikä on tuntematon? Mitä esitietoja on annettu? Millä ehdoilla tuntematon liittyy annettuihin esitietoihin? Piirrä kaavio sopivin merkinnöin.

Erottele ja kirjaa ylös tehtävän lähtötiedot. Pohdi, riittävätkö ne määrittelemään tuntemattoman, vai ovatko ne kenties ristiriitaiset tai riittämättömät.
2. Suunnitelman tekeminen
Etsi yhteys aineiston ja tuntemattoman välille. Tämä saattaa onnistua apuongelman välityksellä. Muistele ongelmia, joissa on samankaltainen tuntematon, voit ehkä hyödyntää niiden ratkaisua tai laskutapaa nykyisessä ongelmassasi. Jos yhtään tällaista ei löydy, yritä ilmaista ongelma uudella tavalla; jätä siitä osa pois, yleistä ongelma koskemaan laajempaa kokonaisuutta tai mieti jokin ongelman erikoistapaus, jota voit lähteä tutkimaan. Mieti tarkkaan, miten ongelmassa annetut tiedot on määritelty. Viimeisimpänä oljenkortena: Käytitkö hyväksesi koko aineistoa? Nämä kehotukset ja kysymykset läpikäytyäsi tulisi suunnitelman olla muodostunut ajatuksissasi.
3. Suunnitelman toteuttaminen
Joka vaiheen jälkeen ongelmanratkaisijan on syytä miettiä: Onko tämä vaihe selvästi oikein? Pystynkö todistamaan, että se on oikein?
4. Tulosten arviointi
Saadun vastauksen arviointi on tärkeä, usein laiminlyöty osa ongelmanratkaisua. Ongelmanratkaisuprosessi voidaan kiinnittää sen jälkeen, kun ongelmanratkaisija on tarkistanut, että kaikkia lähtötietoja hyödynnettiin ja että tulos ja sen perustelut ovat oikein. Lisäksi voidaan pohtia, löytyisikö toista tapaa tuloksen johtamiseksi, ja voisiko saatua tulosta tai käytettyä ongelmanratkaisutapaa hyödyntää muissa ongelmissa.

3.1.2. Lesterin ongelmanratkaisumalli. Lesterin ongelmanratkaisumalli on peräisin vuodelta 1978. Se kehitettiin pääasiassa opettajille avuksi ongelmanratkaisun opettamiseen kouluissa. Mallissa on aikaisempia ongelmanratkaisumalleja yksityiskohtaisemmin otettu huomioon informaation prosessoinnin syklisyys. Siinä missä Pólyan ongelmanratkaisumallista käy ilmi Pólyan vahva matemaatikkotausta, Lesterin mallissa on pohdiskelevampi, psykologisempi vire. Malli sisältää 7 eri vaihetta: ongelman tiedostaminen, ongelman ymmärtäminen, tavoiteanalyysin laatiminen, suunnitelman laatiminen, toteutusvaihe, menetelmän arviointi sekä ratkaisujen arviointi.
1. Ongelman tiedostaminen
Ongelmanratkaisija huomaa eteen nousseen ongelman, joka ei ratkea suoraviivaisesti. Ongelman vaikeustasosta sekä ongelmanratkaisijan halusta riippuen tehtävää joko lähdetään ratkaisemaan tai sitten ei.
2. Ongelman ymmärtäminen
Ongelman ymmärtäminen jakautuu Lesterin mallin mukaan kahteen eri vaiheeseen: ongelman tulkintaan ja sisäistämiseen. Ensin tehtävän sisältämä informaatio on ymmärrettävästi tulkittava ja sen jälkeen ”sisäistettävä”, eli löydettävä ongelman olennainen informaatio ja eriteltävä annettujen tietojen keskinäiset suhteet.
3. Tavoiteanalyysin laatiminen
Tavoiteanalyysissä ongelma muotoillaan niin, että siihen on mahdollista käyttää tuttuja menetelmiä, esimerkiksi ongelman osiinjaolla.
4. Suunnitelman laatiminen
Suunnitelmaa tehdessä valikoidaan käytettävät ongelmanratkaisumenetelmät, asetetaan välitavoitteet sekä piirretään tarvittavat apukuviot.
5. Suunnitelman toteutus
Toteutusvaiheessa ongelmanratkaisija laittaa suunnitelmansa käytäntöön.
6. Menettelyjen arviointi

Menettelyjen arviointivaiheessa analysoidaan käytettyä ratkaisutapaa, ja sen soveltamisen onnistumista. Jos menettelytavassa huomataan puutteita, joudutaan toisinaan palaamaan takaisin 4. portaalle "suunnitelman laatiminen".
7. Ratkaisun arviointi
Ratkaisun arviointivaiheessa tarkastetaan vastauksen oikeellisuus. Arviointivaihe suoritetaan kohdan 3 tavoiteanalyysin laatimisen pohjalta. Jos kaikki tavoitteet on saavutettu ja ongelmassa asetetut ehdot ovat toteutuneet, on ongelma ratkaistu. [11]

3.1.3. René Descartes ja yleismaailmallinen ongelmanratkaisumalli. René Descartes, 1600-luvun tunnetuimpia vapaita tiedemiehiä ja filosofeja, omisti elämänsä totuuden etsimiseen. Metodin esityksessä hän ei yritä opettaa metodia, jota kuvaillaan "ohjaukseksi oikeaan ajattelemiseen", vaan kertoa omasta tavastaan ohjata järkeään. Descartes kertoo pettyneensä saamaansa kirjallisuuden ja tieteiden oppiin, joiden myötä luvattiin hänen saavuttavan selvän ja varman tiedon kaikesta siitä, mikä on hyödyllistä elämälle. Descartes tunsi oppimääränsä suoritettuaan, ettei hän tiennyt mitään muuta varmasti kuin oman tietopohjansa hataruuden. [13] Metodin etsimisen 4 sääntöä, joita Descartes noudatti etsiessään yleismaailmallista, oikeaa tietoa sekä ratkaisumallia kaikkiin ongelmiin, sopivat hyvin myös matemaattiseen ongelmanratkaisuun:
1. Sääntö
Totuutena saa pitää vain sellaisia asioita, jotka on selvästi, ilman ennakko-odotuksia, havaittu todeksi. Vain näistä seikoista saa tehdä muita asioita koskevia johtopäätöksiä.
2. Sääntö
Jokainen tutkittavaksi valittu seikka jaetaan niin moneen yksinkertaiseen osaan kuin tarpeellista asian ratkaisuun pääsemiseksi.
3. Sääntö
Ajatusprosessin täytyy alkaa yksinkertaisimmista ja helpoimmin ymmärrettävistä seikoista, ja vaiheittain edetä tutkimaan kaikkein vaikeimpia asioita. Sellaisissakin seikoissa, jotka eivät luonnostaan seuraa toinen toisiaan, oletetaan olevan keskinäistä järjestystä.
4. Sääntö
Lopuksi ajatusprosessi käydään läpi niin, ettei mitään jää huomaamatta tai mikään päätelmä virheelliseksi.
Descartes perehtyi geometrikkojen yksinkertaisiin perustelusarjoihin, joita he käyttivät laatiessaan vaikeimmat todistuksensa, ja päätteli, että kaikki seikat, jotka voivat langeta ihmisen tietopiiriin, johtuvat toisistaan. "Ja jos siis vain kartamme pitämästä mitään sellaista totena, joka on väärää, ja jos noudatamme sitä järjestystä, joka on tarpeellinen toisen seikan johtamiseksi toisesta, ei saata olla niin etäistä tiedonesinettä ett'emme sitä löytäisi." [4]
Descartesin 23-vuotiaana laatimat säännöt johdattivat hänet "yleismaailmallisen ongelmanratkaisumallin" hahmottamiseen, johon perehdymme luvussa "Metodeja ongelmanratkaisuun" alaotsikolla "karteesinen malli".
Kaikki esittelemämme kolme ratkaisumallia perustuvat vuosikausien työhön, tutkimukseen, opetukseen sekä kokemukseen. Ne ovat tehokkaasti ratkaisuun pyrkiviä, laajoja ja matemaattista päättelyä kehittäviä. Kaikessa tehokkuudessaan ne tuntuvat kuitenkin jäävän hieman pinnallisiksi, vain rutiinitehtäviin soveltuviksi. Ne eivät

kehota hahmottamaan ongelmaa kokonaisuutena, ongelman tietoista työstämistä alitajunnan herättelemiseksi, saati 'sulautumista itse ongelmaksi'. Näihin puuttuviin tekijöihin perehdymme luvussa 5. Luova ongelmanratkaisu. Kyseiset yleiset ongelmanratkaisumallit eivät myöskään sovellu avuksi käytännön ongelmanratkaisutilanteisiin, sillä niissä ongelmanratkaisijaa ohjaa parhaiten itse ongelma ja oma kokemus- ja tietopohja. Kyseiset ongelmanratkaisumallit suuntaisivat vain ongelmanratkaisijan kokeilemaan ongelman ratkeavuuden kannalta aivan päämäärättömiä ratkaisutapoja. Parhaiten nämä ongelmanratkaisumallit auttavatkin ratkaisijaa silloin, kun hän on ajautunut ratkaisuprosessissaan umpikujaan, eikä keksi uutta keinoa ongelman ratkaisemiseksi, tai kun hän haluaa kehittää ongelmanratkaisutekniikkaansa täydemmäksi, jolloin nämä mallit antavat hänelle kaivatun suunnan.

3.2. Metodeja matemaattiseen ongelmanratkaisuun

Seuraavat konkreettiset metodit, jotka on luotu erityisesti matemaattisen ongelmanratkaisun tarpeisiin, perustuvat suurilta osin luvussa 2. "Ongelman muuntelu" esittelemiimme ongelmanratkaisun eri osa-alueisiin (poikkeuksena karteesinen-malli). Nämä eri mallit ovat hyödyllisiä välineitä aina tietyntyyppisille ongelmille, ja niitä on silloin tällöin tarpeellista kerrata unohtamisen välttämiseksi, vaikka monien ongelmien yhteydessä ne juolahtavatkin mieleen intuitiivisesti. Mallien ulkoaopettelu on turhaa, sillä se ei lisää niiden soveltamiskykyä. Tehokkaan ongelmanratkaisijan salaisuus onkin kokemus ongelmanratkaisusta sekä laajat pohjatiedot. Hän tietää ensisilmäyksellä, mitä yksittäistä strategiaa tai strategioiden yhdistelmää käyttää kussakin tilanteessa. Seuraavassa lyhyt esittely jokaisesta ongelmanratkaisutavasta, ennen kuin perehdymme kuhunkin syvällisemmin:

Kahden uran-malli (The Pattern Of Two Loci)
Kahden uran-malli on käyttökelpoinen moniin geometrisiin konstruktioihin. Alkuperäinen ongelma supistetaan yhden pisteen konstruktioksi. Tuntematonta ja annettua dataa yhdistävät ehdot hajotetaan kahdeksi erilliseksi osaksi, jossa kumpikin määrittelee reitin tuntemattomaan pisteeseen. Reitin täytyy olla joko suora viiva tai ympyrän kaari. Kahden uran-malli perustuu ongelmanratkaisutapaan "osiinjako ja uudelleenjärjestely".

Apukuviot-malli
Apukuviot-mallissa konstruoidaan alkuperäisestä kuviosta osa, tai alkuperäistä vastaava kuvio. Apukuviot-mallista on monia sovelluksia, muun muassa takaperin-malli sekä yhdenmuotoiset kuviot-malli. Takaperin-mallissa kuvitellaan ongelma jo ratkaistuksi, piirretään siitä kuvio, ja lähdetään selvittämään reittiä takaisin tuntemattomasta annettuihin lähtötietoihin. Takaperin-malli on sovellus Pappuksen ongelmanratkaisumetodista "Analyysi ja synteesi".
Yhdenmuotoiset kuviot-mallissa konstruoidaan etsittävän kuvion kanssa samankaltainen kuvio. Yhdenmuotoiset kuviot-malli puolestaan perustuu suurilta osin analogiaan.

Karteesinen malli

Karteesinen-malli on René Descartesin hahmotelma yleispätevälle ongelmanratkaisumetodille. Mallin mukaan toimittaessa ongelma kuin ongelma ensin supistetaan matemaattiseksi ongelmaksi. Tämän vaiheen jälkeen supistetaan matemaattinen ongelma algebralliseksi ongelmaksi, ja lopulta vain yhden yhtälön ratkaisua vaativaksi ongelmaksi.

Toisto- sekä kerrostuma-mallit (Recursion and Superposition)
Toisto- ja kerrostuma-mallit perustuvat tiedon keräämiseen ja yhdistämiseen ratkaisun saavuttamiseksi. Toisto-mallissa löydetään jokin säännönmukaisuus joukon lähtötietoja tarkastelemalla, ja laajennetaan se sitten yleispäteväksi säännöksi rekursiivisten yhtälöiden avulla. Kerrostuma-mallissa vaadittu väite puolestaan todistetaan ensin kaikille joukon erityistapauksille, ja yleistetään näiden avulla koskemaan joukon kaikkia alkioita. [13]

3.2.1. Kahden uran-malli. Kahden uran-malli, joka perustuu ongelmanratkaisukeinoon "hajotus ja uudelleenjärjestäminen" (Ks. luku 2.2) on yksi varhaisimpia geometrisiä ongelmanratkaisutapoja. Malli sisältää kolme vaihetta:

(1) Alkuperäinen ongelma supistetaan yhden pisteen konstruoinniksi.
(2) Ehdot hajotetaan kahdeksi erilliseksi osaksi, jotka määrittävät uran tuntemattomaan pisteeseen.
(3) Uran täytyy olla joko suora viiva tai ympyrän kaari.

Malli on selkein esittää seuraavan, konkreettisen ongelman kautta:

Konstruoi kolmio, jonka sivut on annettu.

Tässä ongelmassa tuntematon on geometrinen kuvio, kolmio, ja alkutietoina on annettu kolmion kaikki sivut, joita merkitsemme kirjaimilla a, b ja c. Ongelmaa on helpointa lähteä ratkomaan kiinnittämällä kolmion kannaksi yksi annetuista sivuista, a, jolloin myös kaksi kolmion kärkipistettä B ja C ovat kiinnitetyt. Näin alkuperäinen ongelma muuttuu vastaavaksi, mutta helpommin ratkeavaksi ongelmaksi, jossa tuntematon, x, on kolmion kolmas kärkipiste A, lähtötiedot ovat kaksi muuta kärkipistettä B ja C, sekä kolmion kahden muun sivun pituudet b ja c, ja ehdot, jotka liittävät tuntemattoman dataan, ovat
(r_1) x on sivun b mitan päässä kärkipisteestä C.
(r_2) x on sivun c mitan päässä kärkipisteestä B.
Ehtojen (r_1) ja (r_2) määräämät ympyrän kaaret muodostuvat kaikista niistä pisteistä, jotka täyttävät jomman kumman ehdoista. Jotta tuntematon x täyttäisi molemmat näistä ehdoista, sen täytyy siis sijaita molemmilla urilla, eli ympyrän kaarien leikkauspisteissä. Tehtävässä syntyy kaksi yhtenevää kolmiota, joista molemmat täyttävät tehtävän ehdot.
Kahden uran-malli on selkeä matemaattinen ongelmanratkaisumalli, jota voidaan soveltaa ongelmiin, jotka ovat muutettavissa hyvin pelkistettyyn muotoon. Kaikki matemaattiset ongelmat eivät kuitenkaan ratkea kahden uran avulla, joten mallille on tehty laajennus "yleinen urien"-malli.

Yleinen urien- malli

Yleisessä tapauksessa tuntematon on supistettu yhdeksi pisteeksi x. Kaikki pistettä x rajoittavat ehdot hajotetaan l:ksi erilliseksi ehdoksi, joita merkitään vertauskuvallisilla yhtälöillä

$$r_1(x) = 0, r_2(x) = 0, ..., r_l(x) = 0.$$

Ensimmäisen ehdon r_1 täyttävät pisteet muodostavat ensimmäisen uran, seuraavan ehdon r_2 täyttävät pisteet toisen uran, ja niin edelleen.Tällöin ongelman ratkaisun muodostavat kaikki ne pisteet, jotka kuuluvat jokaiseen uraan $1, 2, ..., l$, eli täyttävät ongelman kaikki ehdot. Toisin sanoen ne leikkauspisteet, jotka sisältävät kaikki urat $1, 2..., l$, ovat ongelman ratkaisuja. Tarkastellaan kahden uran-mallin esimerkkitehtävän kanssa analogista ongelmaa kolmannessa ulottuvuudessa:

Konstruoi tetraedri, jonka kuusi sivua on annettu.

Tetraedrin pohjakolmio voidaan konstruoida edellisen esimerkin mukaisesti. Näin saamme tetraedrin kolme kärkipistettä (A, B ja C) ratkaistua, ja ongelma supistuu viimeisen kärkipisteen D konstruoinniksi. Merkitään tätä pistettä kirjaimella x. Tämä piste on annettujen sivujen pituuksien (d, e ja f) etäisyydellä jo ratkaistuista kärkipisteistä A, B ja C. Ehdot voidaan kirjoittaa muotoon:
(r_1) x on etäisyydellä d annetusta kärkipisteestä A.
(r_2) x on etäisyydellä e annetusta kärkipisteestä B.
(r_3) x on etäisyydellä f annetusta kärkipisteestä C.
Ehdon (r_1) täyttävät kaikki ne pisteet x, jotka sijaitsevat annetun pallon kehällä, keskipisteenään A ja säteenään janan pituus e. Vastaava pätee myös ehdoille (r_2) ja (r_3). Kaikkien näiden ehtojen täyttävät pisteet, x, löytyvät siis näiden kolmen pallonkehän leikkauspisteistä. Kuten vastaavalla ongelmalla tasossa, tälläkin ongelmalla on kaksi ratkaisua. [13]
Tehtäviä kahden- sekä yleisen urien- mallin avulla ratkeavista ongelmista:
(1) Ympyröi kolmio.
(2) Piirrä kolmion sisään mahdollisimman suuri ympyrä.
(3) Olkoon kaksi paralleerista suoraa, ja piste niiden välissä. Piirrä ympyrä, joka sivuaa molempia suoria, ja kulkee annetun pisteen kautta.
(4) Selitä, miten konstruoisit pallon annetun tetraedrin ympärille.

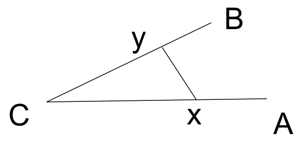
3.2.2. Apukuvio-malli. Apukuvio tai -kuvioita tarvitaan usein alkuperäisen kuvion konstruointiin. Sopivan apukuvion löytäminen voi olla koko ongelmanratkaisun pääkohta, jonka jälkeen ratkaisu löytyy vaivattomasti. Malli perustuu apuelementtien hyödyntämiseen ongelmanratkaisussa (Ks. luku 2.3 Apuelementit). Apukuvio-malli kehottaa konstruoimaan alkuperäisestä kuviosta osan, tai alkuperäistä vastaavan kuvion, mutta se ei anna suoraan vinkkejä, millaista apukuviota lähteä etsimään. Hyödyllinen apukuvio on kuitenkin yleensä yksinkertainen ja helposti johdettavissa alkuperäisestä kuviosta lähtötietojen muuntelulla tai vastaavien kuvioiden etsinnällä. Hyödyllinen apukuvio voi olla yksinkertaisesti alkuperäisen ongelman hahmotus valmiina paperilla. Tämä on alkusysäys apukuvio-mallin alalajille takaperin-mallille.

Takaperin-mallissa ongelma ajatellaan jo ratkaistuksi. Piirretään kuvio, jossa tuntematon ja alkuehdot ovat asianmukaisesti koottuina, jokainen tekijä paikallaan, oikeassa suhteessa muihin tekijöihin. Tätä kuviota tarkastelemalla saattaa löytyä jokin kohta ongelmasta, josta on helppo aloittaa tutun asetelman tai tiedon kautta. Havainnollistetaan tätä esimerkin avulla:

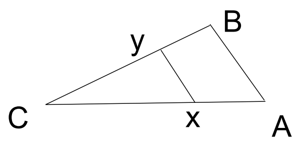
On annettu kolme pistettä A, B ja C tasossa. Piirrä janaa AC leikkaava piste x ja janaa BC leikkaava piste y siten, että

$$Ax = xy = yB.$$

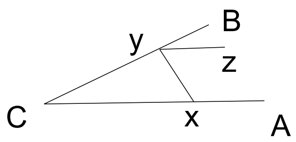
Ongelmaa voidaan lähteä ratkaisemaan kuvitellen, että kolme janaa Ax, xy ja yB ovat yhtäsuuria, eli siten, että tehtävä on jo ratkaistu. (kuvio 1.1) Kuviosta nähdään myös selkeästi, mitä ongelmassa haetaan, ja miten lähtötiedot ja tuntemattomat rakentuvat suhteessa toisiinsa. Tehtävää voi yrittää ratkaista joko annetusta datasta



1.1

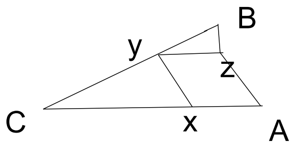


1.2

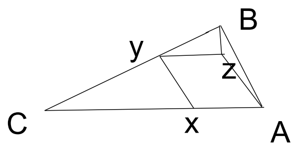


1.3

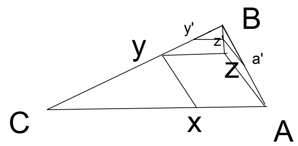
käsin (kuvio 1.2) lisäämällä siihen jana AB, tai sitten takaperin ratkaisusta käsin. Pelkkään annettuun dataan on vaikea lisätä muita hyödyllisiä elementtejä, joten koitetaan vaihtoehtoista reittiä, ongelman ratkaisua sen ratkaisusta käsin.
Kuvioon (1.1) piirretään kokeilumielessä jana yz, joka on samansuuntainen ja -mittainen janan Ax kanssa (kuvio 1.3). Apuviivan hyödyllisyyttä ei ole tässä vaiheessa vielä helppo havaita, mutta sen avulla voi konstruoida kuvioon tuttuja kuvioita; kolmion Byz sekä vinoneliön $Axyz$ (kuvio 1.4).
Kun liitetään kuvioon jana AB, saadaan konstruoitua uusi kolmio BzA (kuvio 1.5). Kaksi kolmiota Byz sekä BzA muodostavat yhdessä nelikulmion $ByzA$, jonka kanssa yhdenmuotoinen nelikulmio $By'z'a'$ voidaan piirtää (kuvio 1.6).



1.4



1.5



1.6

Tässä vaiheessa ongelma muuttuu erinomaiseksi esimerkiksi yhdenmuotoisten kuvioiden -ongelmanratkaisumallista. Tehtävän konstruktiota jatketaan valitsemalla piste y' janalta BC pisteen B läheisyydestä. Valinnan jälkeen piirretään jana $y'z'$, jonka määrittelevät paralleelisuus janan AC kanssa sekä ehto $y'z' = By'$. Nyt voidaan määritellä piste a' janalta BA siten, että $a'z' = y'z'$. Tämä nelikulmio $By'z'a'$ on yhdenmuotoinen alkuperäisen nelikulmion $ByzA$ kanssa. Ensimmäinen haluttu piste z löytyy siis, kun pisteestä A piirretään janan $a'z'$ kanssa yhdensuuntainen suora, ja katsotaan missä pisteessä tämä suora leikkaa janan Bz' jatkeen kanssa. Nelikulmioiden $ByzA$ ja $By'z'a'$ yhdenmuotoisuus perustuu analogiaan, sillä niillä on samat sivujen väliset suhteet, sekä yhteinen homotetiakeskus, piste B. Pisteet x ja y ratkeavat pisteen z paikantamisen jälkeen helposti.
Nelikulmio $ByzA$ siis täytyi ratkaista, mutta nelikulmio $By'z'a'$ konstruoitiin ensin. Tämä esimerkki viittaa yleiseen malliin:

"Jos etsittävä kuvio on mahdoton konstruoida, etsi mahdollisia samankaltaisia kuvioita, joiden avulla alkuperäinen saadaan konstruoitua." [13]

Esimerkkitehtäviä:
(1) Piirrä kahden ympyrän yhteiset tangentit.
(2) Laske särmiön lävistäjä, jonka sivujen pituudet on annettu.
(3) Kuutiosta leikataan yksi kulma pois, jolloin muodostuu suorakulmainen tetraedri. Suoran kulman viereisten tahkojen pinta-alat on annettu. Määritä kulmaa vastapäätä olevan tahkon pinta-ala.

3.2.3. Karteesinen-malli. René Descartes (1596-1650) kehitti aikoinaan ongelmanratkaisulle yleismaailmallisen mallin, jonka avulla ongelman kuin ongelman oletettiin ratkeavan. Descartes jätti kuitenkin työnsä viimeistelemättä, epäilemättä huomattuaan sen puutteelliseksi. Jokainen voi tehdä omat johtopäätöksensä, miksi näin tapahtui, esiteltyämme mallin:

(1) Supista ongelma matemaattiseksi ongelmaksi.
(2) Supista matemaattinen ongelma algebralliseksi ongelmaksi.
(3) Supista algebrallinen ongelma yhden yhtälön ratkaisua vaativaksi ongelmaksi.

Vaikka malli ei olekaan pätevä yleismaailmalliseksi ratkaisumalliksi, on se merkittävä tieteellinen saavutus, jota voidaan soveltaa lukuisiin matemaattisiin ongelmiin. [13] Tulevissa esimerkkitehtävissä malli esiintyy melkein vääjäämättä, ongelmanratkaisija päätyy siihen intuitiivisesti.
Karteesisessa -mallissa Descartes kehottaa ensin poistamaan ongelmasta kaikki tarpeettomat yksityiskohdat niin, että ongelmasta jää jäljelle sen riisuttu, yksinkertaisin muoto. Ongelmia muutettaessa matemaattisiksi täytyy harkita, kuinka radikaalisti ongelmaa voi yksinkertaistaa ja muuttaa abstrakteiksi käsitteiksi, sekä mitä yksityiskohtia voi jättää huomiotta. Siirtyminen konkreettisista objekteista abstrakteihin matemaattisiin käsitteisiin ei ole vaaraton. Fyysisiä olosuhteita kun ei voi yksinkertaistaa liikaa, ja toisaalta matemaattinen ongelma ei saisi jäädä liian ylivoimaiseksi ratkaista. Tämän tiedostaminen on erittäin tärkeää muun muassa rakennusten ja siltojen suunnittelussa.
Karteesisen -mallin mukaan toimittaessa ongelmanratkaisuprosessissa pyritään saavuttamaan vaihe, jolloin yhtälöitä on yhtä monta kuin tuntematontakin. Havainnollistamme tämän seuraavan, yleisen ongelman avulla, jossa tietty ongelma on muutettu neljän eri tuntemattoman, x_1, x_2, x_3, x_4, ratkaisua vaativaksi neljän eri yhtälön laskutoimitukseksi. Yhtälöissä

$$
\begin{aligned}
r_1(x_1) &= 0 \\
r_2(x_1, x_2) &= 0 \\
r_3(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\
r_4(x_2, x_3, x_4) &= 0
\end{aligned}
$$

on ilmaistu matemaattisesti ongelman ehdot, tuntemattomien keskinäiset suhteet, sekä tuntemattomien suhde annettuun dataan. Tuntemattomat voivat olla myös ei-algebrallisia objekteja, esimerkiksi esineitä tai sanoja, jolloin ongelma voidaan hajottaa erillisiin, tuntemattomien keskinäisistä suhteista kertoviin ehtoihin, ilman algebrallista esitystapaa. Tällaisia matemaattisia mallinnuksia voidaan käyttää esimerkiksi ristisanojen ratkomiseen. Ongelman alussa on syytä pysähtyä miettimään, löytyykö ongelmaan vastausta, eli ovatko ehdot riittävät määräämään tuntemattoman, ja onko vastaus yksikäsitteinen. Yhtälöryhmän ratkaisu voi päättyä seuraaviin tapauksiin:

(1) Yhtälöryhmälle ei löydy ratkaisua. Mitkään tuntemattomien arvot eivät ratkaise kaikkia yhtälöitä samanaikaisesti, jolloin yhtälöryhmä on ristiriitainen.

(2) Vastauksia on ääretön määrä. Näin käy, jos esimerkiksi yksi yhtälöistä ratkeaa millä tahansa tuntemattomien arvoilla.
(3) On vain yksi ratkaisu, yhtälöt ovat riippumattomia toisistaan, eli löytyy yksikäsitteinen ratkaisu.

Pyrkimyksenä on tietysti saavuttaa tämä kolmas, harmoninen vaihtoehto, Descartesin sanoin: "Haluamme määritellä täydellisen kysymyksen niin, että se on täysin määräävä vastauksen, ja mitä se kysyy, voidaan johtaa annetuista tiedoista." [13] Seuraavassa hyvin tyypillinen karteesisen-mallin matemaattinen sovellus:

Kolme työmiestä A, B ja C työskentelevät kukin omalla vauhdillaan. A tekee yhden työn kolmessa viikossa, B viimeistelee kolme työtä kahdeksassa viikossa ja työmies C 5 työtä 12 viikossa. Kuinka kauan työmiehillä kestää työn tekemiseen yhdessä?

Karteesisen-mallin mukaisesti ensin muutetaan tehtävän tiedot matemaattisiksi merkinnöiksi:

työmies	työskentelyvauhti t=viikkojen määrä
A	$\frac{1}{3}t$
B	$\frac{3}{8}$t
C	$\frac{5}{12}$t

Seuraavaksi muutetaan ongelma yhden yhtälön ratkaisua vaativaksi ongelmaksi,

$$\frac{1}{3}t + \frac{3}{8}t + \frac{5}{12}t = 1,$$

josta saadaan

$$t = \frac{8}{9},$$

eli työmiehet saavat yhdessä työn tehtyä $\frac{8}{9}$ viikossa.

Arvoitukselliset ongelmat (Puzzling examples)
Toisinaan on mahdoton havaita tehtävänannosta, ovatko alkutiedot riittävät ongelman ratkaisuun. Tällöin tehtävää täytyy lähteä ratkomaan sokeana, kuten seuraavasta esimerkistä voidaan havaita.

Mies käveli $5h$. Ensin tasaista, sitten ylös vuorenrinnettä, ja lopulta takaisin samaa reittiä. Mies kävelee nopeudella $4km/h$ tasaista, $3km/h$ ylämäkeen ja alamäkeen $6km/h$. Kuinka pitkän matkan mies käveli?

Vaikka ongelma vaikuttaa ratkeamattomalta, kaksi tuntematonta (tasaisen pituus, sekä ylämäen pituus) ei tunnetusti yhden yhtälön avulla ratkea, toimitaan silti karteesisen-mallin mukaisesti, toivon varassa. Ensiksi kerätään tiedot, ja muutetaan ne algebrallisiksi merkinnöiksi:

Matkan osuudet	Matkan pituus	Nopeus	Matkan kesto
koko matka	x		5h
ylämäki	y	3 km/h	
alamäki	y	6 km/h	
tasainen	x-2y	4 km/h	

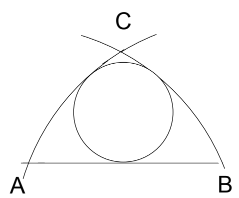
Supistetaan matemaattinen ongelma yhtälön ratkaisuksi, muistaen, että aika saadaan jakamalla matka nopeudella

$$\frac{x-2y}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}=5.$$

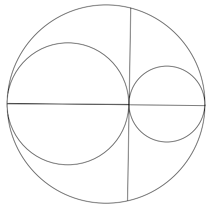
Laskemalla yhtälön termejä yhteen, huomaamme, että y:t supistuvat kokonaan pois, jolloin jäljelle jää $3x = 60$, josta saadaan vastaus $x = 20$. Tämä tarkoittaa sitä, että mies käveli 20 km. [13]

Karteesinen-malli soveltuu hyvin matemaattisiin, suoraviivaisesti ratkeaviin ongelmiin, joita voidaan mallintaa yhtälöillä. Se ei kuitenkaan sovellu syvempien matemaattisten ongelmien ratkaisuun, eikä sellaisten aineellisen maailman ongelmien ratkaisuun, joita on epävarmuuden tai -selvyyden vuoksi mahdotonta esittää yhtälömuodossa. Näin, laajasta käyttökelpoisuudestaan huolimatta, karteesinen-malli ei voi saavuttaa nimeä 'yleismaailmallinen ongelmanratkaisumalli'.

Tehtäviä karteesiselle mallille:
(1) Jana AB sekä kaksi ympyrän kaarta AC (säteenään janan AB pituus ja keskipisteenään piste B) ja BC (säteenään janan AB pituus ja keskipisteeenään piste A) rajaavat kolmiomaisen alueen kuvan mukaisesti. Piirrä alueen sisään mahdollisimman suuri ympyrä.



(2) Kaksi ympyrää ovat ison ympyrän sisällä vierekkäin. Kaikki ympyrät sivuavat toisiaan, ja pienempien ympyröiden halkaisijat ovat ison ympyrän halkaisijalla. Ympyröistä ei tiedetä muuta kuin ison ympyrän säde sekä kahden pienemmän ympyrän yhteisen tangentin pätkä, joka rajoittuu ison ympyrän kehään. Määritä se osa ison ympyrän pinta-alasta, joka jää pienten ympyröiden pinta-alojen ulkopuolelle.



(3) Tuoreissa omenissa on vettä 80% ja sokeria 4%. Kuinka monta prosenttia sokeria on samoissa omenissa, kun ne on kuivattu siten, että kosteusprosentti on 20?
(4) Piste P sijaitsee suorakulmion sisällä niin, että sen etäisyys yhteen kulmaan on 5cm, vastapäiseen 14 cm ja kolmanteen 10cm. Mikä on pisteen P etäisyys suorakulmion neljännestä kulmasta?

3.2.4. Toisto- (Recursion) sekä kerrostuma-(Superposition) mallit. Esittelemme vielä lyhyesti kaksi tarkempaa ongelmanratkaisumallia, toisto- sekä kerrostumamallit, jotka soveltuvat tietyntyyppisiin matemaattisiin ongelmiin. Molemmat perustuvat tiedon keräämiseen ja yhdistelyyn, sekä sitä kautta tiedon laajentamiseen koskemaan koko joukkoa.

Toisto-malli

Numeeriset tuntemattomat $x_1, x_2, ..., x_n$ voidaan käsittää olevan yhden moniosaisen tuntemattoman x peräkkäisiä rakenneosasia. Matemaattisessa ongelmanratkaisussa voimme ratkaista ne rekursiivisesti, eli luomalla sarjan rekursiivisia yhtälöitä, joiden mukaan seuraava tuntematon määräytyy aina edellisen avulla. Tämän mallin tunnetuimpia ja käytetyimpiä sovelluksia on matemaattinen induktio.

Alussa saamme tietoomme vain pienen osan ratkaisua, arvon tuntemattomalle x_1. Kuitenkin tämä pala on riittävä, sen avulla saamme selville seuraavan tuntemattoman, x_2, arvon. Näin pääsemme eteenpäin käyttämällä jokaisessa vaiheessa hyväksemme aiemmin saavutettua tietoa. Aiempi tieto toimii siis pohjana seuraavalle operaatiolle, tiedon lisäämiselle. Tämä malli soveltuu myös arkielämän ongelmiin, kuten ristikoiden ratkomiseen. Tällöin pohjana voi olla monta tuntematonta, sanaa, joiden avulla lähteä ratkomaan uusia. Eikä malli ole muutenkaan epätavallinen, suurin osahan ihmisen saavuttamasta tiedosta rakentuu aina edellisen varaan. [13]

Kerrostuma-malli

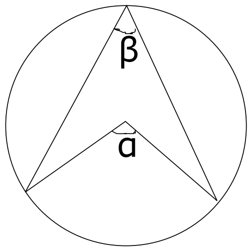
Kerrostuma-malli on erinomainen sellaisten ongelmien ratkaisuun, joita on vaikea todistaa kerralla, yhtenä kokonaisuutena. Kerrostuma-malli jakaantuu kahteen eri vaiheeseen:

(1) Tehtävästä löydetään jokin erikoistapaus, joka on helposti ratkaistavissa. Tämän erikoistapauksen ratkaisutavan kautta löydämme reitin ongelman yleiseen ratkaisuun.

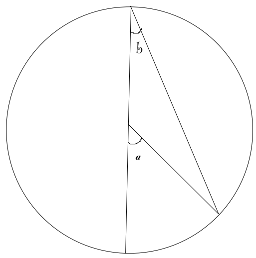
(2) Algebrallisilla operaatioilla yhdistetään tehtävän muita erikoistapauksia niin, että edellisen kohdan ratkaisutapaa pystyy niihin soveltamaan. Näin saavutamme täyden, rajoittamattoman ratkaisutavan, jota voidaan hyödyntää tehtävään yleisesti.

Havainnollistamme tätä esimerkin avulla:

Todista, että ympyrän keskuskulma α on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma β, kun niillä on sama kanta ympyrän kehällä.

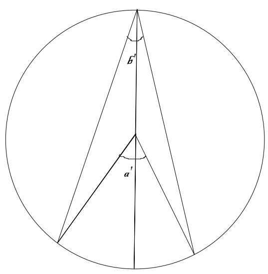


Ongelman yhdessä erikoistapauksesssa yksi kolmion sivuista sijaitsee ympyrän halkaisijalla. Tämä tapaus saadaan helposti ratkaistua

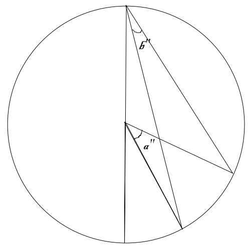


$$\alpha = \pi - (\pi - 2\beta), \text{ jolloin } \alpha = 2\beta.$$

Tämä vaihe toteuttaa Kerrostuma-mallin (1) vaiheen. Mallin (2) vaiheen mukaan jaetaan ongelman muut tapaukset kahteen eri luokkaan kuten kuvissa:



(1) vaiheen erikoistapauksen mukaisesti voimme piirtää ympyrän halkaisijan kulkemaan kärkipisteen β kautta. Näin huomataan, että sekä α' että α'' voidaan jakaa



kahteen osaan:
$\alpha' = \alpha'_1 + \alpha'_2$, jolloin myös β' voidaan jakaa vastaaviin osiin $\beta' = \beta'_1 + \beta'_2$, ja $\alpha'' = \alpha''_1 - \alpha''_2$, joita vastaavat osat $\beta'' = \beta''_1 - \beta''_2$. Nämä hajotetut osat voidaan ilmaista (1) kohdan mukaisilla yhtälöillä, joiden avulla saadaan että $\alpha' = 2\beta'$ ja $\alpha'' = 2\beta''$. Väite on siis todistettu yleisesti, kerrostuma-mallin periaatteiden pohjalta erikoistapauksiin nojaten. Kerrostuma-malli pohjautuu spesialisaatioon. (Ks. luku 2.4.2 Spesialisaatio). [13]

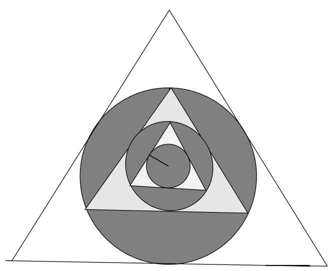
Tehtäviä:
(1) Laske n:n ensimmäisen luonnollisen luvun summa.

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = k, \text{ jossa } n \text{ ja } k \in \mathbb{N}.$$

(2) Todista, että n:n ensimmäisen luonnollisen luvun kolmansien potenssien summa on luonnollisen luvun neliö.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = k^2, \text{ jossa } n, k \in \mathbb{N}.$$

(3) Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a. Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1, joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2, jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1 kuvion mukaisesti. Jatkamalla näin saadaan päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ Laske ympyröiden pinta-alojen summa.



Kahden uran-, apukuviot-, karteesinen-, sekä toisto- ja kerrostuma-mallit ovat ongelmanratkaisumalleja, jotka perustuvat erilaisiin ongelman muuntelun keinoihin. Tehtävästä riippuen, ongelmanratkaisua saattaa helpottaa oleellisesti myös epäsuoran päättelyn hyödyntäminen, ongelman symmetriaominaisuuksien löytyminen sekä erilaisten matemaattisten tulosten, muun muassa Pascalin induktion, Cantorin diagonaalimenetelmän tai Steinerin inversion, hyödyntäminen. [3]

LUKU 4

Ongelmanratkaisu matematiikan opetuksessa

Toisinaan oppilaat joutuvat vaikean, ei-suoraviivaisesti ratkeavan, ongelman eteen matematiikan tunnilla. Tällöin opettajan on hyvä auttaa oppilaita niin, etteivät he edes huomaa tulleensa autetuiksi. Opettajan täytyy ymmärtää, mitä oppilas jo osaa, ja miten hän ajattelee. Näin opettaja pystyy asettelemaan kysymyksensä luonnolliseen tapaan niin, että oppilas olisi voinut kysyä saman kysymyksen itsekin itseltään. Opettajan apu täytyy siis olla tehokasta, mutta luonnollista ja huomaamatonta. Kysymyksenasettelu on oppilaan huomion kiinnittämistä oikeisiin asioihin. Tehokkaat, mutta huomaamattomat kysymykset ovat yleisiä ja yksinkertaisia. ”Mitä ovat tuntematon ja lähtötiedot ja millä ehdoilla ne kytkeytyvät toisiinsa?” Kysymykset ovat suuntaa-antavia, mutta jättävät oppilaille paljon tilaa ajatella. [12]

Tarkastelemme seuraavassa opettajan kysymyksenasettelua George Pólyan ongelmanratkaisumallin neljän eri vaiheen pohjalta. Malli löytyy kokonaisuudessaan luvusta 3.1.1.

Ongelmanratkaisun neljässä eri vaiheessa näkökanta ongelmaan muuttuu. Alussa käsitys on vielä hajanainen ja epämääräinen, vailla yhdistäviä tekijöitä. Tehtävän ratkaisun edetessä näkökanta ongelmaan selkiytyy. Siksipä opettajan on tärkeintä noudattaa kysymystensä kanssa järjestystä: aloitetaan yleisistä, avoimista kysymyksistä, ja vain jos tarpeellista, tarkennetaan kysymyksiä asteittain, kunnes saavutetaan konkreettinen kysymys, joka saa oppilaat havahtumaan.

Ongelmanratkaisu lähtee liikkeelle ongelman ymmärtämisestä. Eritoten täytyy nähdä selvästi, miten annetut tiedot liittyvät toisiinsa ja mikä on tehtävän päämäärä. Tämä kaikki on välttämätöntä ratkaisustrategian luomiseksi. Opettajan on hyvä kerrata lähtötiedot, tehtävän vaatimukset, ja kysyä, millä matemaattisilla merkinnöillä kutakin voitaisiin ilmaista.

Kun ongelma on varmasti ymmärretty, opettaja patistelee oppilaat suunnitteluvaiheeseen. Tässä vaiheessa oppilaiden täytyy olla tietoisia hyödyllisistä laskukaavoista ja konstruktioista. Opettajan on hyvä johdatella oppilaansa muuntelemaan käsiteltävää ongelmaa, keskittymään vain yhteen sen osista, tai miettimään samankaltaisia, helpommin ratkeavia ongelmia. Jos oppilaiden itsenäinen ratkaisuprosessi ajautuu liian kauaksi alkuperäisestä ongelmasta, opettaja voi kysäistä ”Oletteko hyödyntäneet kaikkia lähtötietoja?” tai ”Ovatko kaikki ehdot täyttyneet?”.

Opettajan täytyy varmistaa, että oppilaat tietävät suunnitelmansa toimivuuden loppuun asti, ennen kuin hän voi hengähtää. Suunnitelman toteutusvaiheessa vaarana on, että oppilas unohtaa suunnitelman. Usein näin käy juuri silloin, kun suunnitelma on tullut ulkoapäin, valmiiksi ajateltuna, ja oppilas on hyväksynyt sen opettajan auktoriteettiaseman perusteella. Kuitenkin, jos oppilas on itse luonut suunnitelman ja järkeillyt sen oikeellisuuden, se harvoin pääsee unohtumaan. Suunnitelman toteuttamisvaiheessa opettajan tehtävänä on vaatia, että oppilas tarkistaa jokaisen vaiheen.

Tarkistus voidaan tehdä formaalisti, eli johtaa tulos matemaattisesti, tai tietyissä tapauksissa intuitiivisesti, eli nähdä selvästi, että vaihe pätee. Opettajan kaksi tärkeintä kysymystä ovat tässä vaiheessa: Näetkö selvästi, että vaihe on oikein? Osaatko todistaa, että se on oikein?
Kun vastaukseen on päädytty, oppilaat yleensä tyytyvät siihen tarkistamatta sitä tai kyseenalaistamatta sen oikeellisuutta. Opettajan tehtävänä on saattaa oppilaat uudelleen tehtävän ratkaisun pariin, sekä tarkastelemaan siihen johtanutta päättelyketjua, vahvistaen näin oppilaiden tietoja ja kehittäen heidän ongelmanratkaisutaitojaan. Nopeaa tarkistuskeinoa tulisi aina hyödyntää. Myös vaihtoehtoisten ratkaisujen etsiminen, sekä jo saadun vastauksen tai ratkaisutavan hyödyntäminen muissa samankaltaisissa ongelmissa, vahvistaa oppilaiden matemaattisia taitoja. Ongelman muuntelu onnistuu, jos se on annettu yleisessä "kirjain"- muodossa, numeeristen arvojen sijaan, jolloin oppilas paremmin varmistuu ratkaisunsa paikkansapitävyydestä, ja oppii hyödyntämään saatua tulosta eri tilanteissa. Ongelmaa voidaan muunnella monella eri tapaa, muun muassa varioimalla annettua dataa, poistamalla ehtoja, symmetrian avulla, miettimällä ongelmalle konkreettisia sovelluksia, sekä pohtimalla vastaavia ongelmia. Ongelman muuntelusta oppilaat saavat suurimman hyödyn, kun heidän itsensä pitää keksiä vastaavia ongelmia. [12]
Oppilaiden on tarpeellista saada eväitä ongelmanratkaisuun, sillä se on erittäin hyödyllinen taito niin matematiikassa kuin muussakin elämässä. Kuitenkin tehokas, oppilaiden matemaattista ymmärtämystä kasvattava matematiikan tunti ei pelkästään opeta heille ongelmanratkaisua, vaan uusia matemaattisia käsitteitä ongelmanratkaisun avulla. [15]

4.1. Ongelmalähtöinen matematiikan opetus

Luvussa 3.1.1. esittelemämme George Pólyan ongelmanratkaisumalli on hyödyllinen matemaattiseen ongelmanratkaisuun, mutta tutkimukset osoittavat, että pelkkä ongelmanratkaisun opettaminen erillään itse matematiikan oppimisesta ei lisää oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja. [15] Suomessakin tämä on jo tiedostettu. Vaikka peruskoulun matematiikan opetussuunnitelmamme painottaa matemaattista ymmärrystä, ja antaa tavoitteiksi matemaattisten käsitteiden oikean soveltamisen ongelmanratkaisussa, kyvyn perustella ratkaisumenetelmiään sekä saadun ratkaisun oikeellisuuden, nuorilla on puutteita jo peruslaskutoimituksissa, yksikkömuunnoksissa sekä prosenttilaskuissa, soveltavasta matematiikasta puhumattakaan. Tämä aiheuttaa ongelmia monilla työaloilla, muun muassa sairaanhoidossa suurin osa hoitovirheistä johtuu potilaan väärästä lääkeannostuksesta. [9] Ovatko suomalaiset nuoret siis tyhmentyneet, vai onko matematiikan opetuksessamme kenties puutteita?
Länsimainen matematiikan opetus perustuu vahvasti annettujen ratkaisumallien jäljittelyyn. Tällöin käsitteelliset, haastavat asiat, annetaan oppilaille suoraan niin, ettei oppilaiden tarvitse niitä ollenkaan itse pohtia, ja laskujen suorittaminen onnistuu muistamalla tehtävään soveltuvan algoritmin tai mallin, jota käyttämällä lasku ratkeaa. Oppikirjat tukevat tällaista jäljittelyyn perustuvaa opetusta voimakkaasti. Opetuksessa puolestaan syvällistä, matemaattista pohdiskelua ei välttämättä tarvita lainkaan. Tällaisen jäljittelyyn perustuvan matematiikan opetuksen mallin suosio perustuu sen tehokkuuteen käytännön opetustilanteessa, sekä osaltaan myös matematiikan opetuksen historiaan. [17]

Amerikkalainen sekä Länsi-Eurooppalainen matematiikan opetus perustuu sveitsiläisen kehityspsykologin Jean Piaget'n (1896-1980) teoriaan lapsen kognitiivisesta kehityksestä. Piaget'n mukaan lapsen kehitys muodostuu neljästä eri kognitiivisesta vaiheesta, joista vasta viimeisimmissä vaiheissa -formaalin operationaalisen kehityksenvaiheessa, varhaisessa teini-iässä, lapsi pystyy ymmärtämään symbolisia matemaattisia mallinnuksia.
Matematiikan opetussuunnitelmat rakennettiin Piaget'n ideoiden varaan, ottamatta huomioon, ettei Piaget ollut matemaatikko, ja että hänen teoriansa perustuivat oppimisvaikeuksisten lasten tutkimiseen. Algebra jätettiin pois lasten matematiikan opetussuunnitelmasta, ja se esiteltiin heille vasta varhaisessa teini-iässä. Näin esimerkiksi amerikkalainen matematiikan opetus koostui hajanaisten, vailla yhdistäviä tekijöitä olevien laskutoimitusten; muun muassa kerto- ja jakolaskujen sekä murtolukujen, opettamisesta lapsille. Matematiikan opetusta kuvailtiin lausahduksella 'mailin leveä, tuuman syvä'.
Kylmä sota esti Piaget'n ideoiden leviämisen itäänpäin, jossa sovellettiin venäläistä sodanjälkeistä matemaatikkojen kehittämää opetusssuunnitelmaa, joka perustui algebran opetukseen jo peruskoulun varhaisessa vaiheessa. Venäläisten ja aasialaisten TIMSS- tulokset [1] todistivatkin, että lapset olivat kykeneviä ymmärtämään ja hyödyntämään abstrakteja konsepteja jo varhaisessa vaiheessa. [1]
Vuoden 2011 TIMSS-tutkimuksessa 8-luokkalaiset (13-14-vuotiaat) suomalaiset oppilaat ylsivät matematiikan osaamisessa 8. sijalle 42 maan joukossa, amerikkalaiset 24. sijalle ja kärkipään sijat veivät Etelä-Korea, Singapore, Taiwan, Hongkong ja Japani. [14]
Muun muassa Singaporen matematiikan opetus, joka kehitettiin sodanjälkeisestä venäläisestä opetussuunnitelmasta, on perustunut viimeisen 21 vuoden ajan ongelmalähtöiseen opetukseen. [10] Eipä siis ihme, että matematiikan opetuksen uudistamisen puolestapuhujat ovat kääntyneet itämaiden puoleen. Ongelmalähtöisessä opetuksessa, uuden matemaattisen käsitteen tai taidon oppiminen tapahtuu ongelmanratkaisun myötä. Oppilaiden ratkoessa matemaattista ongelmaa, he hyödyntävät luonnollisesti aikaisempaa tietoaan käsiteltävästä asiasta, yhdistelevät ja muokkaavat sitä, muodostavat hypoteesin, asettavat välitavoitteita, etsivät mielekästä menettelytapaa ja ajattelevat luovasti. Loppukeskustelussa oppilaat kertovat ideoistaan toisilleen ja koko luokalle, perustelevat ratkaisumenetelmiään sekä ratkaisunsa oikeellisuuden. [16] Näin opetussuunnitelmamme tavoitteet täyttyvät kokonaisuudessaan.
Ongelmalähtöisen opetuksen tunti jakaantuu yleensä kolmeen eri vaiheeseen:

(1) Alustusvaihe, jossa opettaja kertaa aiemman relevantin tiedon, alustaa uuden ongelman, varmistaa, että oppilaat ovat ymmärtäneet sen, kertaa ratkaisuprosessissa vaadittavat tiedot, korostaa tunnin tavoitetta ja motivoi oppilaat ongelman pariin.
(2) Toteutusvaihe, jossa oppilaat ratkaisevat ongelman ja opettaja kulkee luokassa havainnoimassa heidän toimintaansa, puuttumatta siihen ja pidättäytyen neuvomasta ja arvottomasta eri ideoita.

[1]TIMSS=Trends in international Mathematics and Science Study, on kansainvälinen vertailututkimus koululaisten matemaattisista ja luonnontieteellisistä kyvyistä

(3) Koontivaihe, jossa opettaja kutsuu eri oppilaita esittelemään ratkaisunsa, joista sitten keskustellaan yhdessä, mietitään, mitä yhdistäviä piirteitä ratkaisuissa on, todistetaan virheellisiä väittämiä epätosiksi, sekä etsitään tehokkaimpia mahdollisia tapoja ongelman ratkaisuun. [6]

Opettajan rooli muuttuu siis aktiivisesta ja hallitsevasta informaatiolähteestä sivustatarkkailijaksi ja kuuntelijaksi. Myös opettajan työ tuntien ulkopuolella laajenee tuntisuunnitelmien ja alustusten valmisteluun sekä eri ratkaisutapojen ennakointiin. Opettajan täytyy tietää, millaisia ongelmia oppilaat ovat tiedollisesti ja taidollisesti valmiita ratkaisemaan, ja millaisia taitoja he oppivat kyseisen ongelman kautta, jolloin opetustunti tulee väistämättä olemaan oppilaiden tieto- ja taitotasoa vastaava. Ongelmalähtöinen matematiikan opetus kehittää ongelmanratkaisun kautta oppilaiden matemaattista ajattelua ja ymmärrystä, passiivisen jäljittelyn sijaan. [16]
Ongelmalähtöiseen opetukseen siirtyminen vaatii siis paljon työtä opettajalta. Opettajan itsensä täytyy perehtyä matemaattisiin käsitteisiin sekä ongelmanratkaisutapoihin syvemmin kuin ennen ja laajentaa matemaattista näkökantaansa ja ymmärrystään. Myös tiedonjakajan ja arvottajan roolista tarkkailijan ja kuuntelijan rooliin tuottanee monille rutinoituneille opettajille koko luonnetta, persoonaa ja ammatti-identiteettiä järisyttävän mullistuksen. Tutkimusten mukaan opettajat odottivat keskimäärin 0,9 sekuntia vastausta oppilaalta kysyttyään kysymyksen. Siispä ei ole mikään ihme, että oppilaat tottuvat ajatukseen, että ongelmat pitäisi ratkaista hyvin vähäisellä ajatustyöllä. [2]
Ongelmalähtöisen ja luovan ajattelun yhdistäminen matematiikan opetukseen saattaa tuoda lisää haastetta oppilaiden ajatusten suuntaamiseksi käsiteltävään asiaan. Luovuudellahan tunnetusti ei ole rajoja. Myös virhekäsitykset epäilemättä voivat jäädä elämään oppilaiden mieliin, jos opettaja ei osaa niitä ymmärrettävästi kumota, tai jättää loppukoonnin liian avoimeksi. Japanissa, jossa matematiikan opetuksessa ongelmanratkaisulla ja matemaattisen ajattelun painottamisella on pitkät perinteet, on havaittu matematiikan opetusta säätelevän seuraavat normit:

(1) Ryhmän jäsenten tulee kehittää useita matemaattisia ideoita, ja pyrkiä kohti mahdollisimman tehokkaita ratkaisumenetelmiä.
(2) Virheellisistä ratkaisuyrityksistä on tarkastettava, mitä matemaattisesti tärkeitä ideoita niistä löytyisi.
(3) Ratkaisutavan selityksessä ei saa vedota mihinkään, mitä ei ole aiemmin todistettu oikeaksi.
(4) Matemaattisen toiminnan tarkoitusta on reflektoitava ryhmän kesken. [6]

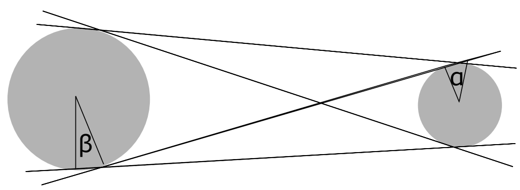
Tämä kaikki vaatii kuitenkin oppilaiden aktiivista osallistumista matematiikan opetukseen. Jotkut oppilaat eivät välttämättä ole kiinnostuneita matemaattisesta ongelmanratkaisusta. Vaarana on myös oppilaiden arvottaminen loppukoonnissa, johon yleensä valitaan pari vaikeahkoa ratkaisumenetelmää, virheellisiä menetelmiä, jotka todistetaan vääriksi, sekä ne tehokkaimmat ratkaisumenetelmät. Ratkaisumenetelmien karsiminen täytyy tapahtua hienovaraisesti sekä se huomioon ottaen, etteivät aina samat oppilaat joudu kokemaan tunnetta ”muiden ratkaisumenetelmät olivat tälläkin kertaa parempia kuin minun”. Matematiikan opetuksen muuttaminen ongelmalähtöiseksi vaikuttanee myös arvostelukriteereihin. Miten järjestetään kurssin loppukoe, ja mitä siinä kysytään? Miten oppilaiden tieto- ja taitotasoa ylipäätään vertaillaan? Jos arvosana perustuu oppilaan kykyyn keksiä uusia, tehokkaita ratkaisutapoja

ongelmiin, eikö silloin ongelmanratkaisusta tule oppilaalle pakonomaista, painostavaa ja turhauttavaa, varsinkin jos hän ei jollain kerralla mitään ratkaisua keksi?
Ongelmalähtöinen matematiikan opetus kuitenkin aktivoi oppilaita jo itsessään, sillä silloin oppilaille jää kuva, että he ovat itse kykeneviä matemaattiseen ongelmanratkaisuun, ja että matematiikassa on sittenkin järkeä. Samalla oppilaiden ymmärrys, itsevarmuus ja luottamus omiin kykyihin kasvaa. Myös ne opettajat, jotka ovat alkaneet opettaa ongelmalähtöisesti, eivät ole enää palanneet takaisin normaaliin, opettajalähtöiseen opettamiseen. [16]
Opettajankoulutuksen luennolla Jyväskylän Yliopistolla järjestettiin kerran kysely ”Mikä on opettajan tärkein ominaisuus?”. Paria poikkeusta lukuunottamatta kaikki opettajaksi opiskelevat vastasivat noin 16-vuoden koulutuksensa pohjalta ”on innostunut opetettavasta aineestaan”, jopa yli vastauksen ”on opetettavan aineensa asiantuntija”. Ongelmanlähtöiseen matematiikan opetukseen siirtyminen voisi olla vastaus sille huutavalle pulalle innostuneista matematiikan opettajista sekä aktiivisista, matemaattista ymmärtämystään kasvattavista oppilaista.

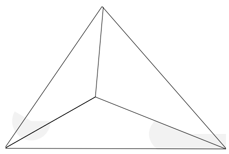
4.2. Tehtäväpaketti yläasteelle ja lukioon

Tässä osiossa on esitetty 15 erilaista ja -tasoista matemaattista ongelmaa vinkkeineen ja ratkaisuineen. Ongelmat ovat suurilta osin lukiotasoisia, pari ongelmaa yläkoulutasoa sekä pari viimeisintä yliopistotasoa. Osiossa on esiteltynä valmis ratkaisu, ratkaisuprosessin kulku paloiteltuna osiin, sekä oppilaiden ratkaisuprosessia edistäviä kysymyksiä. Kysymyksien toimivuutta ei ole testattu käytännössä, mutta ne on laadittu Pólyan kysymysten kaltaisiksi sekä noudattaen linjaa ’yleisistä kysymyksistä spesifimpiin’. Ratkaisuprosessit puolestaan eivät ole esittelytavastaan huolimatta välttämättä yksikäsitteisiä, on siis aivan mahdollista löytää vaihtoehtoisia reittejä näiden ongelmien ratkaisuun. Onnea ratkaisuyrityksiin!

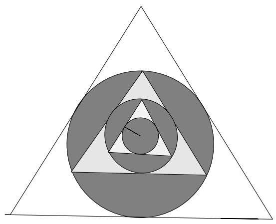
(1) Piirrä annetun pisteen kautta tangentit ympyrälle.
(2) Piirrä kahdelle erilliselle ympyrälle yhteiset tangentit.
(3) Kahden ympyrän yhteiset tangentit muodostavat ympyröiden keskipisteiden kanssa kulmat α ja β. Ovatko nämä yhtäsuuret?



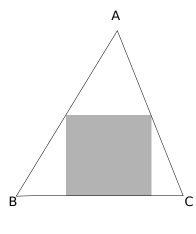
(4) Ympyröi kolmio, eli piirrä ympyrä, joka kulkee kaikkien annetun kolmion kärkipisteiden kautta.
(5) Piirrä kolmion sisään mahdollisimman suuri ympyrä.
(6) Leikataan kuutiosta yksi kulma pois, jolloin muodostuu suorakulmainen tetraedri. Suoran kulman viereisten tahkojen pinta-alat on annettu. Määritä kulmaa vastapäätä olevan tahkon pinta-ala.



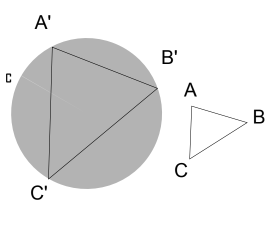
(7) Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a. Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1, joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2, jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1 kuvion mukaisesti. Jatkamalla näin saadaan päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$. Laske ympyröiden pinta-alojen summa.



(8) Laske n:n ensimmäisen luonnollisen luvun summa
(9) Todista, että n:n ensimmäisen luonnollisen luvun kolmansien potenssien summa on kokonaisluvun neliö.
(10) Kukansiemeniä sisältävän säkin kyljessä kerrotaan, että siementen itämistodennäköisyys on 95 prosenttia, ja että 5 prosenttia säkin sisällöstä on samannäköisiä rikkaruohonsiemeniä. Säkin siemenet jaetaan kahdenkymmenen siemenen pusseihin. Millä todennäköisyydellä puutarhuri, joka kylvää tällaisen pussillisen siemeniä, saa vähintään 19 kukantainta? Millä todennäköisyydellä hän saa vähintään yhden rikkaruohonsiemenen?
(11) Etsi kahden yhdenmuotoisen kuvion homotetiakeskus.
(12.1) On annettu kolmio ABC. On piirrettävä neliö, jonka yksi sivu on janalla BC, yksi kärki janalla AB, ja yksi janalla AC.



(12.2) On annettu ympyränkehä c ja kolmio ABC. Piirrä kolmio $A'B'C'$ siten, että sen sivut ovat yhdensuuntaiset kolmion ABC kanssa, ja sen kärjet sijaitsevat ympyrän c kehällä.

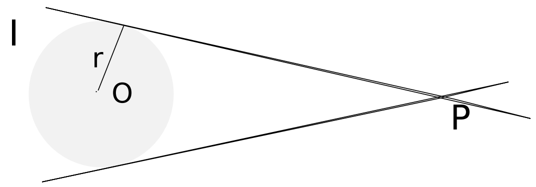


(13) Todista, että kaikille lukua 3 suuremmille alkuluvuille p pätee, että

$$p^2 = 12k + 1, \text{ jossa } k \in \mathbb{N}.$$

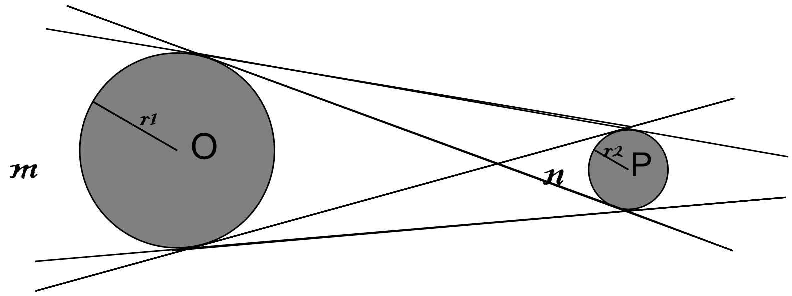
(14) Todista, että jokaisen äärettömän joukon A osajoukkojen muodostama joukko $P(A)$ on äärettömämpi kuin joukko A itse.
(15) 300 eKr peräisin oleva Apolloniuksen ongelma:
On piirrettävä annettua kolmea ympyrää c_1, c_2, c_3 sivuava ympyrä c.

(1) Piirrä annetun pisteen kautta tangentit ympyrälle.



Ratkaisu:
On annettu ympyrä l, keskipisteenään piste O ja säteenään r, sekä ympyrän ulkopuolella oleva piste P. Piirretään ympyrä m halkaisijanaan jana pisteestä P ympyrän l keskipisteeseen O. Piste, jonka kautta haluttu tangentti kulkee, on ympyröiden l ja m leikkauspiste.
Tehtävän ratkaisu on monissa ongelmanratkaisukirjoissa oletettu tunnetuksi, ja se vaikuttaakin ensinäkemältä helposti ratkeavalta, yksinkertaiselta perustehtävältä. Kuitenkin ongelma saattaa osoittautua yllättävän haastavaksi, vaihtoehtoisien ongelmanratkaisutapojen runsaudesta johtuen. Apuviivat, -kolmiot ja -kaaret, joita tehtävään voi piirtää lukemattomin eri tavoin sysäävät ongelmanratkaisijan miettimään yhdenmuotoisia kolmioita, kulmien siirtoja, sekä sivujen suhteita, jotka loppujen lopuksi vievät vain kauemmaksi itse ongelmasta. Tehtävä, yksinkertaisesta ulkoasustaan johtuen, on kuitenkin erinomainen pähkäilytehtävä etenkin peruskoululaisille.
Ensimmäinen vaihe tämän ongelman ratkaisussa on piirtää jana pisteestä P ympyrän l keskipisteeseen O. Ilman tätä janaa on hyvin vaikea edetä minnekään. Opettaja voi johdatella oppilaat huomaamaan tämän, kysymällä: Mitkä olivat tehtävän lähtötiedot? Oletteko piirtäneet havainnollistavan kuvion? Tiedetäänkö muuta kuin annetun ympyrän kehä sekä piste P? Tiedämmekö mahdollisesti muita pisteitä? Miten voisimme näiden avulla lähteä liikkeelle? Saisimmeko piirrettyä hyödyllisen apuviivan tai -kuvion kuvioomme, joka selkeyttäisi tilannetta?
Seuraava vaihe on tangentin sivuamispisteen paikantaminen apuympyrän m avulla. Apuympyrän m konstruoinnin pariin on hankala johdatella oppilaita, paljastamatta liikaa ratkaisusta, joten opettajan on parempi johdatella oppilaat muistelemaan tangentin määritelmää, ja mitä oleellisia tietoja tangentin konstruointiin tarvitaan. Kun tangentin määritelmä on tuoreessa muistissa, voidaan alkuperäinen ongelma supistaa yhden pisteen (sivuamispisteen) ratkaisua vaativaksi ongelmaksi, ja opettaja voi antaa oppilaiden työskennellä itsenäisesti, hyvien neuvojen puutteesta johtuen.
Tangentin määritelmän avulla oppilaat voivat myös huomata halutun apuympyrän m konstruoinnin, sillä sen ja ympyrän l leikkauspiste Q muodostaa ympyrälle m kehäkulman OQP, joka on suorakulma ja säteen r päässä ympyrän l keskipisteestä O. Näin ollen se siis toteuttaa tangentin määritelmän ympyrälle l. Jos oppilaat alkavat turhautua ratkaisuyritystensä ajauduttua umpikujaan lukuisia kertoja, opettaja voi vihjaista heille, että apukuvio voi kyseisessä tapauksessa olla myös muukin kuin viiva tai kolmio.
Oppilaan saavuttaessa ratkaisun, opettaja tietysti vaatii ratkaisulle selitystä, johon oppilas voi vastata ympyrälle m muodostuneen kehäkulman avulla.

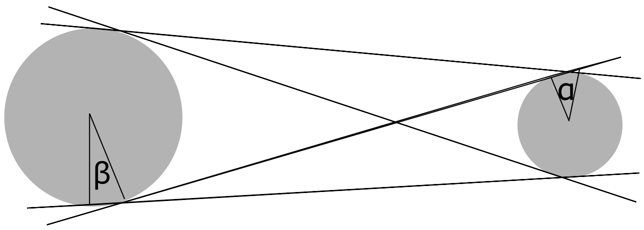
(2) Piirrä kahdelle erilliselle ympyrälle yhteiset tangentit.



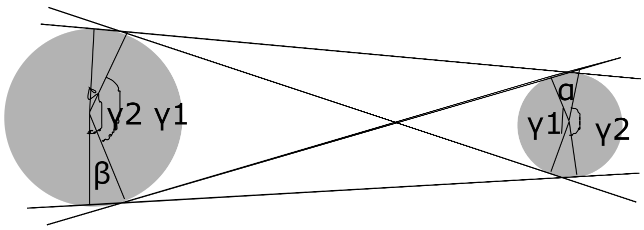
Ratkaisu:
Ongelma on jatkoa edelliselle tehtävälle.
On annettu kaksi ympyrää m, keskipisteenään O ja säteenään r_1, sekä n, keskipisteenään P ja säteenään r_2, kuten kuvassa. Kaksi tangenteista saadaan piirrettyä, kun kutistetaan pienempi ympyrä (tässä ympyrä n) sen keskipisteeksi P, ja piirretään tehtävän 1. mukaan tästä pisteestä tangentit vasemmanpuolimmaiselle ympyrälle m, jota on kutistettu ympyrän n säteen r_2 verran.
Kun on piirretty pisteestä P tangentit kutistetulle ympyrälle m, halutut tangentit löytyvät kun piirretään yhdensuuntaiset suorat säteen r_2 päähän näistä tangenteista. Ympyröiden välissä risteävät tangentit saadaan konstruoitua oleellisesti samalla tavalla.
Tämä ongelma on hyvä alustaa palauttamalla mieliin tehtävän 1. ratkaisu, sekä muistelemalla tangentin määritelmää. Näin oppilaat saavat jonkin kosketuspinnan ongelmaan heti alussa, eikä se vaikuta liian haastavalta: Mitkä ovat lähtötiedot? Mitä vaadittiin tekemään? Oletteko piirtäneet havainnollistavan kuvan? Mikä on tuntematon? Montako tuntematonta on? Tuleeko mieleenne samankaltaista ongelmaa? Tuleeko mieleenne samankaltaista, helpompaa ongelmaa, jonka osaisitte jo ratkaista?
Alustusvaiheen jälkeen opettaja voi antaa oppilaiden työskennellä itsenäisesti. Oppilaat voivat hyvinkin kuvitella ympyröiden välissä tai kauempana ympyröistä risteävien tangenttien leikkauspisteen löytyvän helpommin, jolloin he saattavat ajautua kauas itse ongelmasta. Opettaja voi palauttaa heidät vaihtoehtoisten reittien pariin huomauttamalla, että annetut lähtötiedot ovat vain kaksi ympyrää m ja n. Silloin oppilaat ehkä havahtuvat huomaamaan, että risteämiskohdan löytämiseksi heillä on vain vähän tietoja, mutta sitäkin enemmän tuntemattomia (risteämiskohta, neljä sivuamispistettä). Opettaja voi johdatella oppilaat miettimään edellisen tehtävän ratkaisutapaa, ja jos tarvetta ilmenee, kysyä: Mitä lähtötietoja meillä on? Mitä pisteitä jo tunnemme? Tällöin oppilaat voivat innostua piirtämään apuympyrän halkaisijanaan annettujen ympyröiden keskipisteiden O ja P määräämä jana. Tähän virheelliseen toimintaan opettajan ei ole syytä puuttua, sillä oppilaat voivat hyvinkin sen avulla löytää reitin ongelman ratkaisuun.
Kun oppilas huomaa, että ympyrää m on myös kutistettava ympyrän n säteen verran, muttei sen jälkeen millään pysty konstruoimaan haluttua tangenttia, opettaja voi kysäistä: Mitä yhtäläisyyksiä tällä sekä halutulla tangentilla mahdollisesti on? Onko meillä keinoja konstruoida haluttu yhdensuuntainen suora?

Ratkaisun jälkeen oppilaiden on hyvä kerrata ratkaisuprosessin kaikki vaiheet, ja perustella niiden mielekkyys.

(3) Kahdelle erilliselle ympyrälle on piirretty yhteiset tangentit kuvan mukaisesti. Onko nyt $\alpha = \beta$?

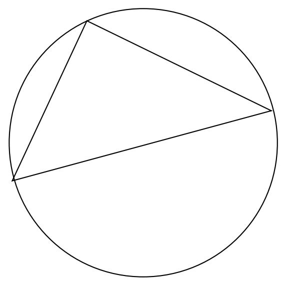


Kulmien α ja β suuruudet voidaan ilmoittaa ympyröille muodostuneiden yhtäsuurien kulmien avulla. Näiden kulmien yhtäsuuruus voidaan perustella yhtenevien nelikulmioiden muodostumisella. Saadaan, että $\beta = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$ ja $\alpha = \frac{2\pi - (\gamma_1 + \gamma_2)}{2}$, jolloin $\alpha = \beta$ vain silloin kun ympyrät ovat yhtäsuuret, eli kun ympyröiden 'ulkosyrjä'tangentit ovat paralleeliset. Tehtävä on jatkumoa edellisille kahdelle tehtävälle, ja opettajan kannat-



taakin esittää se oppilaille, jotka ovat nopeampia edellisten todistusten kanssa kuin toiset, kyllästymisen välttämiseksi. Tehtävänanto on helppo konstruoida tehtävään 2, eikä se tarvitse alustusta. Jos oppilaat tarvitsevat ohjausta tehtävässä, opettajan on syytä johdatella heidän huomionsa niihin oleellisiin seikkoihin, joita tarvitaan kulmien α ja β suuruuksien ilmoittamiseen. Esimerkiksi yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkulmien yhtäsuuruuteen, ristikulmien yhtäsuuruuteen, sekä ympyrän keskuskulman apuna käyttämiseen. Tehtävän selkeyttämiseksi tehtävänantoa voidaan myös muuttaa konstruoimalla tilanne, jossa ympyrät ovat yhtäsuuret.

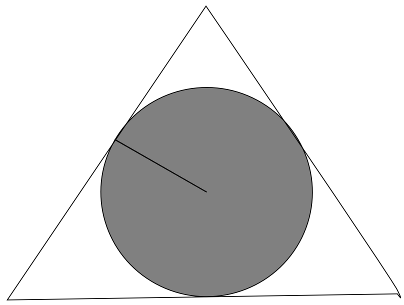
(4) Ympyröi kolmio, eli piirrä ympyrä, joka kulkee kaikkien annetun kolmion kärkipisteiden kautta.



Ratkaisu: Sivujen keskinormaalien leikkauspiste on halutun ympyrän keskipiste.
Tehtävä on erinomainen kokeilu-tehtävä. Tehtävän alustamiseksi opettajan on hyvä suunnata oppilaiden huomio ympyrän keskipisteen etsintään: Joko olette piirtäneet havainnollistavan kuvan? Mitä tehtävässä vaadittiin tekemään? Mietitään ympyrän määritelmää. Mitä tietoja tarvimmekaan ympyrän konstruointiin?
Jos oppilailla on tuoreessa muistissa mediaanien leikkauspisteen konstruointi, sekä keskinormaalien konstruointi, he varmaankin ehdottavat näitä keinoja kyseisen ympyrän keskipisteen löytämiseksi. Silloin opettaja voi kehottaa heitä kokeilemaan. Muuten, jos oppilailla ei ole mitään ehdotuksia, miten lähteä liikkeelle tehtävän ratkaisussa, tai jos he kokeilevat turhautumiseen asti vain hakuammuntaa, opettaja voi johdatella heidät miettimään vastaavaa, helpompaa ongelmaa: Onnistuisiko lähtötietojen muokkaaminen? Onnistuisiko lähtötiedoista osan pois jättäminen? Miten piirtäisitte esimerkiksi ympyrän, joka kulkee kahden pisteen kautta?
Nämä vihjeet saavat todennäköisesti oppilaat kokeilemaan sivujen keskinormaalien piirtämistä, ja niiden leikkauspisteiden etsintää.
Ongelma on mahdollista suorittaa kolmella eri tapaa; oppilaat voivat lähteä kokeilemaan sokkona, missä ympyrän keskipiste sijaitsee, mikä ei ole kovin toivottavaa, oppilaat voivat systemaattisesti kokeilla minkä annetun lauseen (mediaanien leikkauspiste, keskinormaalien leikkauspiste, kulmanpuolittajien leikkauspiste) myötä ympyrän keskipiste löytyisi, tai he voivat ensin järkeillä, miten ympyrän keskipiste löytyy, ja sitten konstruoida sen. Jos oppilas löytää halutun keskipisteen sattumalta, kokeillessaan mihin keskinormaalien leikkauspiste sijoittuu, on tehtävän tärkein vaihe, eli perustelut, vielä suorittamatta. Todistus voidaan suorittaa sanallisesti. Kukin keskinormaali koostuu niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana kolmion kahdesta eri kärkipisteestä, jolloin keskinormaalien leikkauspiste on yhtä kaukana kaikista kolmion kolmesta kärkipisteestä.
Oppilas voi siis hahmottaa valmiin ratkaisun mielessään jo ryhtyessään ratkaisuprosessiin, jolloin hän voi selittää jokaisen vaiheen mielekkyyden samaan aikaan, ratkaisuprosessin yhteydessä. Toiset, joiden visuaalinen hahmottaminen on hankalampaa, tai matemaattinen, looginen järkeily kehnoa, voivat päätyä ratkaisuun yllättäen, kokeillen, jolloin pätevät perustelut täytyy suorittaa tehtävän ratkaisun jälkeen. Näin heillä on kuva tilanteesta, johon he voivat perusteluissaan vedota, eikä pätevien perustelujen suorittaminen enää vaadi mielikuvien avulla tilanteen hahmottamista. Vaikka

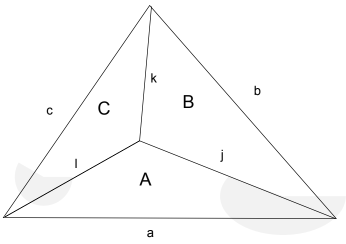
Polyan mukaan oppilaalla tulisi ennen ongelman ratkaisuyritystä olla selvä suunnitelma, miten hän aikoo tehtävän ratkaista loppuun asti, mielestäni tässä tehtävässä on hyväksyttävää ensin kokeilemalla päätyä kyseisen ongelman ratkaisuun ja vasta sen jälkeen suorittaa perustelut saatuun konstruktioon nojaten. Perustelut on tässä tehtävässä helpompi suorittaa kuvan avulla jälkeenpäin kuin mielikuvien avulla ennen ongelman selättämistä, vaikkakin haastavampien ongelmien, joiden ratkaisuun on rajaton määrä vaihtoehtoisia reittejä, yhteydessä on tärkeää, että ongelman ratkaisuun pyritään jo alustavasti järkeillyn suunnitelman mukaan.

(5) Piirrä kolmion sisään mahdollisimman suuri ympyrä.



Ratkaisu:
Halutun ympyrän keskipiste sijaitsee kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteessä. Ympyrän kehä saadaan konstruoitua tehtävän 1. avulla, sillä kolmion sivut voidaan ajatella olevan kärkipisteiden kautta kulkevia tangentteja halutun ympyrän kehälle. Vaihtoehtoisesti voidaan ympyrän säde konstruoida piirtämällä ympyrän keskipisteen kautta kulkeva kohtisuora kolmion sivulle.
Tehtävä on hyvin samankaltainen edellisen tehtävän kanssa. Opettajan johdateltua oppilaat miettimään halutun pisteen, eli ympyrän keskipisteen, sijoituspaikkaa, hän voi suunnata oppilaiden ajattelun edellisen tehtävän kautta nykyiseen: Muistatteko mitä tehtiin edellisessä tehtävässä? Löydättekö näiden kahden tehtävän välille yhtäläisyyksiä? Oletteko piirtäneet ratkaisua vastaavan kuvan vihkoihinne? Mitä vositte kertoa tästä ympyrästä?
Jos oppilaat eivät keksi mitään keinoa halutun ympyrän konstruoimiseksi, opettaja voi taas patistaa heitä helpottamaan tehtävänantoa, poistamalla lähtötietoja. Oppilaat voivat miettiä miten eri kohtiin kahden leikkavan suoran väliin voidaan piirtää mahdollisimman iso ympyrä. Näin on myös opettajan helpompi suunnata heidän huomionsa kulman puolittajaan, sillä kaikkien ympyröiden keskipisteet sijaitsevat mitä ilmeisemmin sillä: Osaisitteko piirtää näiden kahden suoran väliin mahdollisimman suuren ympyrän? Kertokaahan jotain piirtämistänne ympyröistä, löytyykö niille yhdistäviä tekijöitä? Osaisitteko sanoa jotain ympyröiden eri osasista, kehistä, keskipisteistä?
Kun oppilaat huomaavat ympyröiden keskipisteiden sijaitsevan kulmanpuolittajalla, he varmasti innokkaasti lähtevät soveltamaan tätä keinoa alkuperäisen ongelman ratkaisussa. Lopuksi opettajan on varmistettava, etteivät oppilaat konstruoi vaadittua ympyrää epätarkasti, vaan ratkaisevat vaaditut ympyrän ja kolmion sivuamispisteet, joko tehtävän 1 mukaan ajattelemalla kolmion sivuja ympyrän tangentteina, tai sitten piirtämällä pisteen kautta kohtisuorat janat kolmion sivuille. Jos oppilaat ovat ratkaisseet tehtävän kaikki vaiheet tietoisina niiden oikeellisuudesta, perustelut voidaan käydä nopeasti suullisesti läpi.

(6) Leikataan kuutiosta yksi kulma pois, jolloin muodostuu suorakulmainen tetraedri. Suoran kulman viereisten tahkojen pinta-alat on annettu. Määritä kulmaa vastapäätä olevan tahkon pinta-ala.



Ratkaisu:
Merkitään kulman viereisten tahkojen pinta-aloja kirjaimilla A, B ja C, sekä tuntematonta kirjaimella D. Merkitään edelleen tahkon D sivuja kirjaimilla a, b ja c, sekä muita sivuja kirjaimilla j, k ja l. Esittelemme tässä kaksi vaihtoehtoista ratkaisutapaa, ensimmäisessä hyödynnetään Heronin kaavaa, ja toisessa sopivaa apukuviota. Molemmissa tavoissa oleellisena osana esiintyy Pythagoraan lause, jota tehtävänanto kolmiulotteisine suorinekulmineen mitä selvimmin vaatii.
Tapa 1. (Tätä ei suositella kenellekään)
Heronin kaavalla saadaan pinta-alaksi:

$$D = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

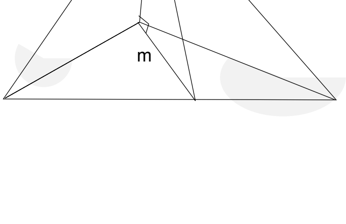
jossa a, b ja c ovat halutun kolmion sivut, ja $s = \frac{a+b+c}{2}$ eli halutun kolmion piirin puolikas. [13] Sivujen a, b ja c pituudet saadaan laskettua Pythagoraan lauseen avulla:

$$a^2 = j^2 + l^2 \ , \ b^2 = j^2 + k^2 \text{ ja } \ c^2 = k^2 + l^2.$$

Näistä j, k ja l ovat puolestaan kytköksissä annettuun dataan vastaavasti:

$$A = \frac{lj}{2} \ , \ B = \frac{kj}{2} \text{ ja } C = \frac{kl}{2}.$$

Nyt ongelma on muutettu algebralliseksi, seitsemällä tuntemattomalla a, b, c, j, k, l, s varustetuksi seitsemän yhtälön ratkaisuksi, joten periaatteessa ongelman ratkaisemiseksi tietoa on riittävästi. Laskut ovat kuitenkin aikaavieviä ja raskaita, siksipä esittelemme vaihtoehtoisen, kevyemmän, mutta enemmän hoksaamista vaativan ratkaisumetodin.
Tapa 2.



Piirretään kuvioon apukolmio hmk. Halutun kolmion D pinta-ala saadaan laskettua kannan ja korkeuden avulla $\frac{ah}{2}$. Lähdetään selvittämään halutusta tuloksesta reittiä takaisinpäin annettuihin lähtötietoihin (Ks. luku 1.2 Analyysi ja synteesi, sekä luku 3.2.2 alaotsikolla 'Takaperin-malli') Laskemisen helpottamiseksi korotetaan tulos toiseen potenssiin:

$$\begin{aligned} 4D^2 &= a^2h^2 \\ &= a^2(m^2 + k^2) \\ &= a^2m^2 + a^2k^2 \\ &= 4A^2 + (j^2 + l^2)k^2 \\ &= 4A^2 + j^2k^2 + l^2k^2 \\ &= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2 \end{aligned}$$

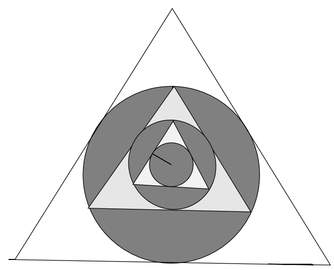
Näin saadaan, että

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

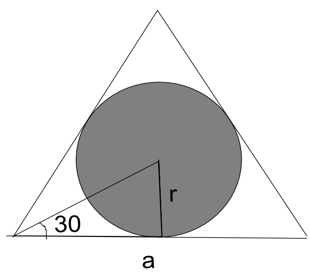
Tehtävässä pääsee alkuun oikeanlaisilla matemaattisilla merkinnöillä. Oppilaat saattavat vieroksua tehtävänannon ja siihen liittyvän kuvan paljautta, sekä ylipäätään kolmiulotteista kappaletta käsittelevää ongelmaa, sillä sitä on taso-ongelmia hankalampi hahmottaa. Opettaja voi kuitenkin hälventää oppilaidensa epävarmuutta kehumalla tehtävää mielenkiintoiseksi, ja kysymällä mitä tuttuja asioita oppilaat huomaavat tehtävänannossa. "Mitä lähtötietoja on annettu tehtävässä ja mitkä olisivat niille sopivat matemaattiset merkinnät?" "Mitä ominaisuuksia olikaan kulmalla, joka on 'leikattu kuutiosta'?" "Osaisitteko nimetä vastaavan ongelman tasogeometriasta? Vaikka lähtötietomme ovatkin erilaiset kuin aikaisemmissa ongelmissamme, tavoite on kuitenkin tuttu...kolmion pinta-alan selvittäminen."
Näin opettaja saa johdateltua oppilaat halutun apukolmion konstruoinnin pariin.
"Mitä tietoja tarvitsemme kolmion pinta-alan selvittämiseen? Kuviomme on niin paljas, voisimmeko lisätä kyseisen kolmion korkeusjanan kuvioomme? Voisimmeko nimetä muita osia?"
Seuraavaksi opettajan on hienovaraisesti patistettava oppilaansa kytkemään myös korkeusjana annettuihin lähtötietoihin, kuten halutun kolmion kanta a edustaa kolmion A hypotenuusaa, kateetteinaan sivut j ja k . Näin oppilaat saavat konstruoitua apukolmion hkm, joka on ongelmanratkaisun elintärkeä osa. Tässä vaiheessa oppilaiden mielenkiinto ensialkuun niin paljasta ja vaikeahkon näköistä ongelmaa kohtaan varmasti kasvaa. Tällöin opettajan on annettava heidän työskennellä itsenäisesti, ja vain tarvittaessa suunnattava oppilaiden huomio lähtötietoihin, sekä Pythagoraan lauseen soveltamiseen.
Apukuvion jälkeen oppilaille saattaa muodostua ongelmalliseksi pinta-alan kaavan toiseen potenssiin korottaminen ratkaisuprosessin etenemiseksi, sekä saatujen arvojen hahmottaminen lähtötietojen avulla (esimerkiksi $a^2m^2 = 4A^2$). Opettaja voi avustaa näissä tilanteissa monin eri tavoin: Olet nähtävästi edistynyt tehtävässä kun päädyit tulokseen $D = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + j^2}h$, mutta nyt on vaikea edetä. Mikä avuksi? Mikä estää etenemisen? Onko meillä keinoa saada yhtälö vapaaksi etenemistä hankaloittavista neliöjuurista? Kolme Pólyan kuuluisinta kysymystä ovat tässäkin paikallaan: Mitä

tehtävässä vaadittiin tekemään? Mitkä olivat lähtötiedot? Oletko hyödyntänyt kaikkia lähtötietoja? Tässä vaiheessa oppilas varmasti huomaa oikean ratkaisustrategian, ja alunperin niin vaativalta ja mystiseltä näyttävä ongelma tasoittuu arkipäiväisiksi kaavoiksi ja laskutoimituksiksi.
'Kirjain'- muodossa annetun ongelman ratkaisua on tarpeellista testata monin eri tavoin. Opettajan onkin syytä johdatella oppilaat näin tekemään kyselemällä tarkentavia kysymyksiä: Mitä osaisitte kertoa saadusta tuloksesta? Mikä olisi vastaava tasogeometrinen tulos? Jos tahkojen A, B ja C pinta-alat kasvavat 12-kertaisiksi, miten käy tahkon D pinta-alan? Entä kun tahkot A, B ja C ovat yhtä suuria, tai kun jokin niistä supistuu nollaan? Miten ratkaisisitte ongelman, jos tahkon A pinta-ala onkin tuntematon, ja kaikkien muiden tahkojen pinta-alat tunnettuja? Opettaja voi myös kehottaa oppilaita luomaan vastaavan ongelman, jossa hyödynnetään edellisen tehtävän ratkaisua tai ratkaisutapaa. Näiden ratkaisua testaavien kysymysten jälkeen oppilailla on varmuus ratkaisun paikkansapitävyydestä, sekä paljon edellytyksiä soveltaa saatua tulosta muihin matemaattisiin ongelmiin.

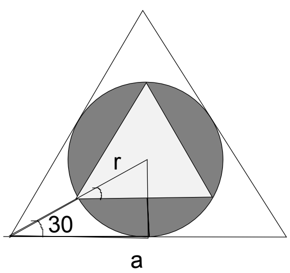
(7) Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a. Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1, joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2, jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1. Jatkamalla näin saadaan päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_2, Y_3, ...$ Laske ympyröiden pinta-alojen summa.



Ratkaisu:
Tiedetään, että kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee kulmanpuolittajien keskipisteessä (teht.5), ja että tasasivuisen kolmion jokainen kulma on 60°. Nyt siis ympyrän säde saadaan laskettua sitä kehystävän kolmion sivujanan pituuden avulla kaavalla $r_n = \frac{1}{2}a_n \times \tan 30° = \frac{1}{2\sqrt{3}}a_n$. Jolloin ensimmäisen ympyrän säteen pituus on siis $r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.



Jokainen ympyröiden sisäänpiirretty tasasivuinen kolmio puolestaan on pienempi, yhtenevä versio alkuperäisestä kolmiosta, jolloin jokaisen kolmion sivun pituus voidaan selvittää kaavalla $a_n = 2r_{n-1} \times \cos 30° = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}r_{n-1} = \sqrt{3}r_{n-1}$.



Nämä kaavat yhdistämällä saadaan, että $r_n = \frac{1}{2}r_{n-1}$.

Vaadittujen ympyröiden pinta-alat muodostavat päättymättömän jonon

$$\pi {r_1}^2,\ \pi {r_2}^2,\ \pi {r_3}^2,\ \pi {r_4}^2...$$

,joita vastaavat luvut

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2\pi, \left(\frac{a}{2^2\sqrt{3}}\right)^2\pi, \left(\frac{a}{2^3\sqrt{3}}\right)^2\pi, \left(\frac{a}{2^4\sqrt{3}}\right)^2\pi...$$

Koska kahden peräkkäisen pinta-alan suhde on

$$\frac{\left(\frac{a}{2^{n+1}\sqrt{3}}\right)^2\pi}{\left(\frac{a}{2^n\sqrt{3}}\right)^2\pi} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{4},$$

on lukujono geometrinen, suhdelukunaan $\frac{1}{4}$. Pinta-alojen yhteenlaskettu arvo voidaan siis laskea geometrisen lukujonon summakaavan avulla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{3}\pi\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{a^2}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4a^2}{9}\pi.$$

Tehtävän ratkaisussa oppilaalta vaaditaan laajaa pohjatietoa kolmioiden ja ympyröiden geometriasta, geometristen kuvioiden muuttamisesta algebrallisisiksi yhtälöiksi (ks. karteesinen malli luvusta 4.2.3), trigonometristen funktioiden sulavan käytön, sekä pohjatiedot geometrisen sarjan tunnistamiseen ja summakaavan soveltamiseen. Tehtävä voi vaikuttaa oppilaasta monimutkaiselta, ja etenkin tehtävänannon toteamus ”...saadaan päättymätön jono ympyröitä...” voi saada monet luopumaan ongelman ratkaisuyrityksestä heti alkuunsa.
Opettajan rooli on pilkkoa tehtävä pienempiin osiin niin, että oppilaat uskaltautuvat lähteä pala palalta rakentamaan sen ratkaisua. Aluksi opettaja voi kehottaa oppilaita selvittämään ensimmäisen ympyrän säteen pituuden: ”Lähdetään liikkeelle ihan alusta, ja unohdetaan hetkeksi kaikki muu. Tässä meillä on tasasivuinen kolmio, jonka sisään piirretään mahdollisimman suuri ympyrä.” ”Mitä tietoja tarvitaan ympyrän konstruointiin?” ”Mitä tiedämme annetusta kolmiosta?” ”Oletteko piirtäneet tilannetta vastaavan apukuvion?” ”Miten saamme ympyrän pinta-alan selvitettyä?” ”Onko meillä keinoa ympyrän säteen selvittämiseen?”
Kun oppilaat ovat saaneet 1.ympyrän säteen selvitettyä, he siirtyvät seuraavan kolmion konstruointiin. Tarkasti piirtämiensä apukuvioiden sekä tehtävänannon avulla oppilaat huomaavat kolmioiden olevan yhteneviä, samoilla kulmanpuolittajilla varustettuja kolmioita, jolloin myös vaadituilla ympyröillä on aina sama keskipiste. Kun oppilaat huomaavat tehtävän toistavan itseään, kolmioden sivujen pituuden sekä ympyröiden säteiden selviävän aina samalla kaavalla, opettaja voi alkaa patistella heitä miettimään yleistä kaavaa haluttujen ympyröiden säteelle: Kuinka selvitit ensimmäisen ympyrän säteen pituuden? Kuinka selvitit seuraavan kolmion sivujanan pituuden? Miten selvittäisit seuraavan ympyrän säteen? Miten selvittäisit n:n ympyrän säteen? Tehtävänannon kannalta meillä on paljon turhaa tietoa muodostuneista kolmioista

sekä niiden sivujanojen pituuksista, eikö? Voisikohan tätä kaavakokoelmaa supistaa koskemaan vain ympyröiden säteitä? Opettaja voi näin muistuttaa oppilaita, että kyseisessä yleisessä kaavassa ympyröiden säteen selvittämiseksi kaavoista $r_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}a_n$ ja $a_n = \sqrt{3}r_{n-1}$ saadaan sopivasti yhdistämällä pelkkiä ympyröiden säteitä koskeva kaava $r_n = \frac{1}{2}r_{n-1}$.

Kun oppilaat ovat tämän saaneet ratkaistua, he varmasti selvittävät nopeasti ympyröiden pinta-aloista koostuvan jonon, ja melko varmasti myös huomaavat pinta-alojen muodostavan geometrisen jonon, suhdelukunaan $\frac{1}{4}$. Jos näin ei kuitenkaan tapahdu, opettaja voi kysäistä heiltä, miten he pääsisivät eteenpäin, mitä tietoja heillä jo on ja mitä uupuu, ja muistavatko he kenties tapoja päättymättömän jonon lukujen summaamiseen. Jos oppilaat eivät kykene näihin kysymyksiin mitään ehdottamaan, heillä todennäköisesti on puutteita pohjatiedoissa.

Tehtävän ratkaisun jälkeen opettajan on syytä kysyä, kuulostaako saatu vastaus realistiselta, ja patistaa oppilaat laskemaan tehtävänannossa annetun kolmion pinta-alan ja vertaamaan saatua vastausta siihen. Jos aikaa jää tuhlattavaksi asti, opettaja voi kehottaa oppilaita ratkaisemaan tehtävän uudelleen, entistä tehokkaammalla ratkaisutavalla. Toiset, jotka ovat omasta mielestään maksimaalisen tehokkaan ratkaisutavan jo saavuttaneet, voivat kokeilla, voiko samanlaisella päättelyketjulla saada ei-tasasivuisten kolmioiden sisäänpiirrettyjen ympyröiden pinta-alojen summan ratkaistua. Näitä eri tapoja päättelyineen voidaan esittää koko luokalle.

(8) Laske n:n ensimmäisen luonnollisen luvun summa.

Tämä on tehtävä, josta kuuluisa saksalainen matemaatikko Carl Friedrich Gauss (1777-1855) on tunnettu. Hän laski jo kouluaikoinaan lukujen $1, 2, 3.., 100$ summan parissa minuutissa. Matematiikan kielelle ongelma on käännettynä:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = k, \text{ jossa } n \text{ ja } k \in \mathbb{N}.$$

Ratkaisu:
Summataan sarja itsellään, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + +... + (n-1) + n \\ & +n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1 \\ & = \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)}_{n \text{ kpl}}, \end{aligned}$$

joten siis

$$\begin{aligned} & 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) = n(n+1), \text{ eli} \\ & (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Tehtävä siis ratkeaa nopeasti, jos huomaa kääntää sarjan ympäri ja summata sen itsellään. Tähän on kuitenkin äärimmäisen hankala johdatella oppilaiden huomio, paljastamatta liikaa itse ratkaisusta, joten on varmempi antaa oppilaiden pohtia tehtävää itsenäisesti, ja antaa heidän taulukoida alkupään summia yleisen kaavan löytämiseksi. Lukujen taulukoinnissa oppilaat saattavat puolestaan ajautua harhaan itse ratkaisusta, vaihtoehtoisten reittien runsaudesta johtuen. Opettaja voi vihjaista oppilaille, että parillisiin ja parittomiin lukuihin päättyvät sarjat voidaan taulukoida erikseen, ja etsiä sitä kautta toimivaa kokonaisuutta, sillä parillisiin lukuihin päättyvistä sarjoista halutun summakaavan johtaminen on suoraviivaisempaa kuin parittomista: Onko meillä keinoja yhdistellä jonojen lukuja erillä tavalla? Voisiko jonon lukujen paikkoja vaihdella? Oppilaat voivat myös hyvinkin ajautua ratkaisuun, jossa summa k on mukana, jolloin lopun induktiotodistus ei onnistu. Silloin opettajan on syytä muistuttaa, että yhden yhtälön avulla kahden tuntemattoman (n ja k) ratkaisu ei ole mahdollinen. Oikean summakaavan induktiotodistus puolestaan on jo paljon helpompaa luoda kuin päätyä oikeaan summakaavaan.
Induktio-todistus:
Induktio-oletus:

$$1 + 2 + 3 + .. + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ jollekin } n \in \mathbb{N}.$$

Induktioväite:

$$1 + 2 + 3 + .. + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Todistus:

$$1 + 2 + 3 + .. + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} +^{2)} (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Joten induktioväite pätee.

(9) Todista, että n:n ensimmäisen luonnollisen luvun kolmansien potenssien summa on kokonaisluvun neliö.

Tehtävä voidaan ilmoittaa matemaattisesti muodossa:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = k^2, \text{ jossa } n, k \in \mathbb{N}.$$

Ratkaisu:
Ratkaisu löytyy lukujen taulukoinnin avulla.

n	k
1	1
2	3 =1+2
3	6 =1+2+3
4	10 =1+2+3+4
5	15 =1+2+3+4+5

Oletetaan siis, että

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2, \text{ jollekin } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{jossa } 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ks. edellinen tehtävä)

Induktioväite:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1))^2$$

Todistus:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 +^{4)} (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Tehtävässä tärkeintä on huomata, miten luonnollinen luku k rakentuu. Siksipä opettajan onkin syytä varmistaa, että oppilaat ovat taulukoineet alkupään lukuja. Selkeästä, yksinkertaisesta taulukosta, jossa vasemmalla puolella ovat alkupään luvut $1, 2, 3, .., n$ ja oikealla niitä vastaavat luvut k huomaa helpoiten, miten luku k rakentuu lukujen $1, 2, 3, .., n$ avulla. ”Miten arvelet luvun k rakentuvan? Miten arvelet luvun k rakentuvan lukujen $1, 2, 3, .., n$ avulla?” Toinen tehtävässä vaadittu tieto on summakaavan hyödyntäminen, jonka todistaminen olisi hyvä olla oppilailla tuoreessa muistissa. Kyseinen tehtävä on erinomainen esimerkki siitä, miten matemaattista tietoa rakennetaan edellisen varaan, sekä matemaattisen tiedon sovellettavuudesta.

(10) Kukansiemeniä sisältävän säkin kyljessä kerrotaan, että siementen itämistodennäköisyys on 95 prosenttia, ja että 5 prosenttia säkin sisällöstä on samannäköisiä rikkaruohonsiemeniä. Säkin siemenet jaetaan kahdenkymmenen siemenen pusseihin. Millä todennäköisyydellä puutarhuri, joka kylvää tällaisen pussillisen siemeniä, saa vähintään 19 kukantainta? Millä todennäköisyydellä hän saa vähintään yhden rikkaruohonsiemenen?

Ratkaisu:
Merkitään siementen itämistodennäköisyyttä merkinnällä $P(A)$ ja oikean siemenen löytymistodennäköisyyttä merkinnällä $P(B)$.

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,95 \\ P(B) &= 1 - 0,05 = 0,95 \\ P(A \text{ ja } B) &= 0,95^2 \end{aligned}$$

Molempiin kysymyksiin ratkaisut löytyvät binomitodennäköisyyskaavan avulla:

$$P(\text{vähintään 19 itävää tainta}) = P(\text{19 itävää tainta}) \text{ tai } P(\text{20 itävää tainta})$$

Saadaan:

$$\binom{20}{19}(0,95^2)^{19}(1-0,95^2) + \binom{20}{20}(0,95)^{20} = 0,4061838... \approx 0,41.$$

Todennäköisyys sille, että puutarhuri kylvää vähintään yhden rikkaruohonsiemenen:

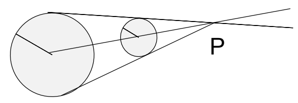
$$P(\text{vähintään 1 rikkaruohonsiemen}) = 1 - P(\text{ei yhtään rikkaruohonsiementä})$$

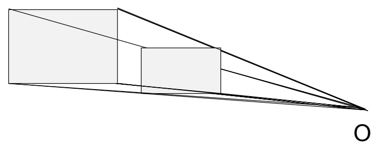
$$1 - \binom{20}{20}(0,95)^{20} = 0,64151... \approx 0,64.$$

Opettajan haasteena on ensialkuun kääntää tehtävää vilkaisseen hätääntyneen oppilaan tuntemukset päinvastaisiksi. ”Tokkopa tehtävä, jossa on annettu noin paljon lähtötietoja, voi olla ylitsepääsemättömän vaikea.”
Todennäköisyyslaskentatehtävissä, etenkin binomikaavaa hyödynnettäessä, korostuu matemaattisten merkintätapojen tärkeys. On aivan eri asia lähteä ratkomaan tehtävää, jossa sanotaan ”20 siemenestä pitäisi saada kylvettyä 19 oikeaa tainta”, kuin samaa tehtävää muodossa ”20 alkeistapauksesta 19 on suotuisaa”. Lähtötietojen luetteloiminen matemaattisin merkinnöin on tehtävän oleellisimpia askelia. Opettaja voi avustaa oppilasta kiinnittämällä hänen huomionsa ensin ensimmäiseen kysymykseen, ja sen ratkettua vasta seuraavaan, jolloin aluksi niin rönsyilevä tehtävä entisestään selkiytyy. ”Miten muotoilisit kysymyksen matematiikan kielelle? Miten voimme selvittää, millä todennäköisyydellä saamme 19 suotuista tapausta 20 alkeistapauksen joukosta? Miten tämä sana ’vähintään’ näkyy kaavassamme?” Jos oppilas käyttää binomikaavaa oikein, muttei ole huomannut laskea yhteistodennäköisyyttä sille, että saadaan kylvettyä oikea siemen, ja että se itää, opettaja voi huomauttaa: ”Lue vielä kertaalleen tehtävänanto. Oletko käyttänyt hyväksesi kaikkia lähtötietoja?” Myös viimeisen kysymyksen kohdalla opettajan täytyy epäilemättä moneen otteeseen kehottaa oppilaita lukemaan tehtävänanto uudelleen, sillä siinä helposti hyödyntää vahingossa yhteistodennäköisyyttä oikean siemenen kylvämiselle ja itämiselle, vaikkei itämistodennäköisyyttä kyseisessä tehtävässä tarvita lainkaan.

Vastauksen saatuaan oppilaiden on syytä pohtia, onko se uskottava, käytettiinkö kaikkia tehtävän lähtötietoja hyväksi, ovatko kaikki ratkaisuprosessin vaiheet perusteltuja ja ostaisivatko he itse kyseisen siemenpussin kylväessään kukkia kesäisin.

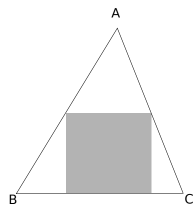
(11) Etsi kahden yhdenmuotoisen kuvion homotetiakeskus.



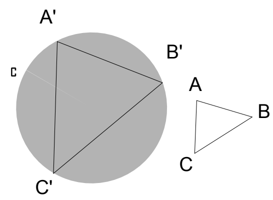


Ratkaisu:
Oppilaat piirtävät kaksi yhdenmuotoista, selkeää kuviota, ja konstruoivat sitten vastinpisteitä yhdistäviä suoria. Näiden suorien leikkauspiste on kysytty kuvioiden homotetiakeskus P.
Jos oppilas ei pääse alkuun tehtävässä, opettaja voi kysäistä häneltä, oliko homotetia- eli venytys-käsitteessä oppilaalle jäänyt jokin epäselväksi. Jos oppilas vastaa, että homotetia on käsitteenä hänelle tuttu, mutta ettei hän ollut ikinä etsinyt homotetiakeskusta, vaan aina piirtänyt sen avulla kuvioista joko suurempia tai pienempiä, opettaja voi kehottaa häntä tekemään ensin niin, eli suurentamaan tai pienentämään kuviota homotetiapisteen avulla. Tämän avulla oppilas huomaa homoteettisten kuvioiden konstruoinnin oleellisia osia, ja mitä todennäköisimmin hyödyntää löytämäänsä tietoa etsiessään homotetiakeskusta kahdelle yhtenevälle kuviolle.
”Meillä on tässä kaksi yhdenmuotoista kuviota. Mitä tehtävässä vaadittiinkaan tekemään? Mitä kuviostamme puuttuu? Mitä osaat kertoa näistä puuttuvista suorista?”
Kuvioiden yhdistämisen suorilla ja homotetiakeskuksen löytämisen jälkeen, opettaja voi kysyä: Oletko varma, että juuri tämä piste on etsimäsi homotetiakeskus? Onko piste yksikäsitteinen, toisin sanoen, voisiko piste löytyä myös jostain muualta? Voitko todistaa, että löytämäsi piste on kyseinen homotetiapiste? Voitko perustella sen yksikäsitteisyyden? Oppilas voi perustella kyseisen pisteen oikeellisuuden pisteiden välisillä, muuttumattomilla suhteilla, sekä vastinsivujen suhteiden säilyvyydellä. Yksikäsitteisyyden hän voi perustella sillä, että homotetiakeskuksen täytyy sijaita jokaisella vastinpisteitä yhdistävällä suoralla, jolloin se voi sijaita ainoastaan näiden suorien leikkauspisteessä.

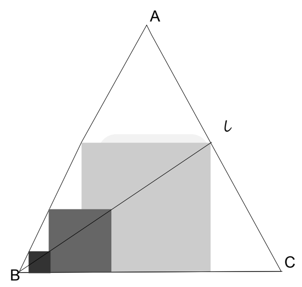
(12.1) On annettu kolmio ABC. On piirrettävä neliö, jonka yksi sivu on janalla BC, yksi kärki janalla AB, ja yksi janalla AC.



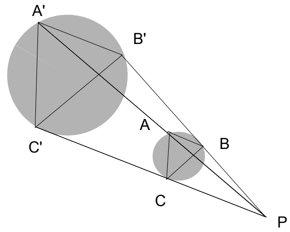
(12.2) On annettu ympyränkehä c ja kolmio ABC. Piirrä kolmio $A'B'C'$ siten, että sen sivut ovat yhdensuuntaiset kolmion ABC kanssa, ja sen kärjet sijaitsevat ympyrän c kehällä.



Ratkaisu (12.1):
Sovelletaan ongelmanratkaisukeinoa ”jätä vaadituista ehdoista osa pois”, ja piirretään kolmion sisään neliöitä, jotka toteuttavat vain kaksi annetuista ehdoista, eli kannan sijainnin janalla BC, sekä yhden kärjen sijainnin janalla AB. Näin muodostuu homoteettisia neliöitä, homotetiakeskuksenaan kolmion yksi kärjistä B. Halutun neliön yksi kärjistä löytyy homotetiasuoran l ja sivun AC leikkauspisteestä.
Ratkaisu (12.2):



Tehtävässä (12.2) edellisen tehtävän ”pudotetaan osa pois vaadituista ehdoista”-periaatteen suora soveltaminen ei enää onnistu, sen sijaan täytyy ensin konstruoida kolmion kärkipisteiden kautta ympyrä (ks. tehtävä(4)). Tämän, sekä jo annetun ympyrän avulla löydetään haluttu homotetiakeskus.



Tehtävät (12.1) ja (12.2) ovat erinomaisia homotetian sovellustehtäviä. Tehtävissä oppilaiden on hyvä antaa itse kokeilla erilaisia tapoja ratkaisun löytymiseksi. Tehtävässä (12.1) turhautuneet oppilaat voi johdatella oikealle polulle, kehottamalla heitä jättämään tehtävänannosta osan pois. Jos oppilaat eivät siltikään yllä oikeaan ratkaisutapaan, opettaja voi kehottaa heitä etsimään yhtäläisyyksiä konstruoitujen neliöiden välille, ja loppujen lopuksi kehottaa heitä etsimään neliöitä yhdistävän homotetiakeskuksen. Kun oppilaat saavuttavat ratkaisun, opettaja pyytää heitä vielä perustelemaan, miksi nyt saatu nelikulmio on vaadittu neliö. Oppilaille tämä ei tuota suuriakaan vaikeuksia, kun he tiedostavat, että jokainen neliön kärkipiste sijaitsee yhdellä homotetiasuorista.

Tehtävässä (12.2) haasteellisin vaihe on huomata, että vaaditun homotetiakeskuksen löytämiseksi annetun kolmion ympärille on piirrettävä ympyrä. Tässä tehtävässä opettajan on hyvä antaa oppilaiden ensin itse tulla siihen tulokseen, ettei edellisen tehtävän ratkaisumetodi päde tässä tehtävässä. Oppilaiden arvaillessa, että tämä tehtävä on liian monimutkainen homotetiapisteen kautta ratkaistavaksi, tai että homotetiakeskus liikkuu, opettaja voi patistaa heitä piirtämään ratkaisusta hahmotelman. Tämän avulla oppilaat huomaavat, että kyseinen homotetiakeskus on todella olemassa, ja vieläpä paikallaanpysyvä piste. Nyt opettaja voi vihjailla tarvittavasta apukuviosta: Nyt emme siis enää yritä suoraan etsiä haluttua kolmiota. Millaiseksi ongelma on muuttanut muotoaan? Miten voisimme löytää kyseisen pisteen? Mitä lähtötietoja meillä on ja mitä tietoja uupuu? Palataan takaisin määritelmiin, mitä tarvitaan homotetiakeskuksen löytämiseksi? Kun oppilaat keksivät, että homotetiakeskuksen löytämiseksi tarvitaan kaksi yhdenmuotoista kuviota, joiden vastinpisteiden kautta piirrettyjen suorien leikkauspisteessä haluttu homotetiakeskus sijaitsee, opettaja voi johdatella heidät takaisin aineiston pariin: Tarvitsemme siis kaksi yhdenmuotoista kuviota. Onko tästä tiedosta hyötyä tehtävässämme? Olisiko mahdollista piirtää apukuvio, jonka avulla, sekä annetun datan avulla, vaadittu homotetiakeskus löytyy? Vaadittu kuvio olisi jollain tapaa yhteydessä koko annettuun dataan, eikö? Kolmion piirtäminen ympyrän sisään ei onnistu näillä tiedoilla, onnistuisiko sama toisinpäin? Näin selvistä vihjailuista oppilaat eivät voi erehtyä. Kuitenkin, ongelman täytyy olla todella haastava ja yllättäviä ratkaisuja vaativa, jotta opettajan näinkin suora vihjeiden anto voi silti edistää itse oppimista. Tehtävän perustelut puolestaan on helppo nähdä valmiista konstruktiosta. Lopuksi opettaja voi kehottaa oppilaita luomaan oman ongelman, joka perustuu tai ratkeaa homotetialla.

(13) Todista, että kaikille lukua 3 suuremmille alkuluvuille p pätee, että

$$p^2 = 12k + 1, \text{jossa } k \in \mathbb{N}.$$

Ratkaisu:
Ongelma on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$p^2 - 1 = 12k,$$

josta saadaan, että

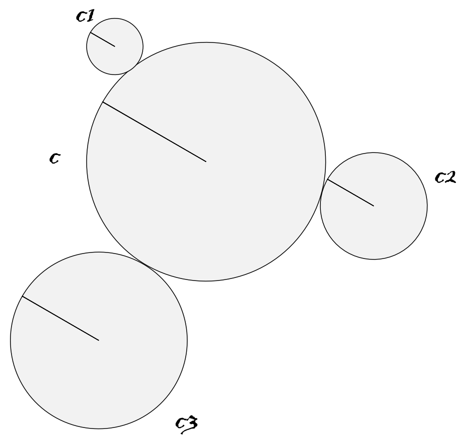
$$(p-1)(p+1) = 12k.$$

Huomataan, että kaikki luvut, jotka ovat jaollisia sekä kolmella että neljällä, ovat jaollisia luvulla 12. Nyt, koska p on alkuluku, on se välttämättä pariton, jolloin luvut $(p-1)$ ja $(p+1)$ ovat parillisia, yhteen kerrottuna siis neljällä jaollinen luku. Koska mikään alkuluku p ei voi olla myöskään kolmen moninkerta, on p muotoa $(3m \pm 1)$ jossa $m \in \mathbb{Z}_+$. Kuitenkin kun kumpi tahansa näistä luvuista sijoitetaan alkuluvun p paikalle, saadaan tulokseksi kolmen moninkerta, eli kolmella jaollinen luku. Näin ollen $(p-1)(p+1)$ on 12:n moninkerta, ja alkuperäinen väite pätee.
Tehtävässä tärkeimmiksi kohdiksi osoittautui alkuperäisen yhtälön muokkaus sekä alkuluvun p tarkastelu. Jos oppilas ei pääse tehtävässä etenemään, opettaja voi kysäistä, mikä hänen mielestään tekee tehtävästä liian haastavan. Näin opettaja voi johdatella oppilaan muokkaamaan tehtävänantoa. ”Onko mahdollista muokata tehtävää helpommaksi tai selkeämmäksi muuttamatta tehtävässä annettuja lukuarvoja tai tuntemattomia? Voisimmeko muokata yhtälöä helpommaksi? Vaikuttaa hankalalta etsiä 12:n moninkertaa, saati sitten 12:n moninkertaa, johon on lisätty 1.” Jos oppilas huomaa siirtää luvun 1 yhtälön toiselle puolelle, ei häneltä varmaan myöskään jää huomaamatta ilmoittaa luku $p^2 - 1$ muodossa $(p-1)(p+1)$. Tämän jälkeen opettajan apua tuskin enää tarvitaan muuhun kuin oppilaan muistuttamiseen alkuluvun ominaisuuksista, sekä 12:n hajottamiseen muotoon 3×4 .
Tehtävän suoritettuaan oppilaiden on syytä kerrata ratkaisuprosessin kulku niin, ettei mikään vaiheista jää epäselväksi. Tehtävä on mainio esimerkki siitä, kuinka paljon ongelmanratkaisija tarvitsee kokemusta itse ongelmanratkaisusta huomatakseen, miten tehtävää lähteä ratkomaan, ja mitä ongelmanratkaisustrategiaa lähteä soveltamaan, sillä pelkkä ongelmanratkaisukeinojen tunteminen ei auta tositilanteessa.

(14) Todista, että jokaisen äärettömän joukon A osajoukkojen muodostama joukko $P(A)$ on äärettömämpi kuin joukko A itse.

Todistus on tanskalaisen matemaatikon Georg Cantorin (1845-1918) luomus, ja se johti aikanaan uuteen ajattelutapaan äärettömän käsitteestä. Esittelemme tämän sekä seuraavan yliopistotasoisen ongelman todistuksineen ilman kommentteja. Todistus on mielenkiintoisen filosofinen, ja siihen on syytä opiskelijoiden perehtyä, etenkin silloin, kun he kyseenalaistavat 'suurempien' ja 'pienempien' äärettömien olemassaolon. Tiedämme, että äärellisen joukon A, jossa on n alkiota, osajoukkojen $P(A)$ lukumäärä on 2^n. Entäpä äärettömien joukkojen tapauksessa? Cantor todisti, että äärettömän joukon osajoukko on äärettömämpi kuin alkuperäinen joukko.
Todistus lähtee olettamuksesta, että joukon A osajoukkojen joukkoa $P(A)$ ei voida varustaa nimilapuilla joukon A alkioita käyttämällä. Olettamus käännetään päinvastaiseksi, tehdään antiteesi siten, että $P(A)$ on joukko, joka voidaan varustaa joukon A alkioilla nimetyillä nimilapuilla. Näin siis oletamme, että jokaisella joukon A osajoukolla on täsmälleen yksi joukon A alkio nimilappuna, ja että jokainen joukon A alkio on täsmälleen yhden osajoukon nimilappu. Joukolta A joukolle $P(A)$ muodostuu siis bijektio.
Varustamme joukon A osajoukon H nimilapulla e, joka on joukon A alkio. Koska joukon A osajoukko H koostuu joukon A alkioista, alkio e kuuluu sinne tai ei. Jos alkio e kuuluu osajoukkoon H, värjätään se punaiseksi, ja jos ei, värjätään se mustaksi. Nyt siis jokainen joukon A alkio on joko musta tai punainen. Olkoon joukko M kaikkien mustien nimilappujen joukko. Tämä joukko on myös joukon A osajoukko, joten sillä täytyy olla nimilappuna jokin joukon A alkio. Kuitenkaan osajoukon M nimilappu ei voi olla punainen, koska joukossa on vain mustia nimilappuja. Mutta myöskään nimilappu ei voi olla musta, sillä musta nimilappu tarkoittaisi, ettei kyseinen alkio kuulu edustamaansa osajoukkoon.
Vastaväitteemme, että $P(A)$ voidaan varustaa nimilapuilla käyttämällä joukon A alkioita, johtaa ristiriitaan, joten alkuperäisen väitteen täytyy olla tosi. Tämä tarkoittaa sitä, että äärettömän joukon A osajoukkojen joukko $P(A)$ on äärettömämpi kuin ääretön joukko A itse.

(15) 300 eKr peräisin oleva Apolloniuksen ongelma:
On piirrettävä annettua kolmea ympyrää c_1, c_2, c_3 sivuava ympyrä c.



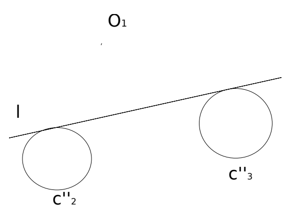
Tehtävä ratkeaa inversion avulla. Inversio on muuntosuhde kuten homotetia, sillä erotuksella, että piste P ja sen vastinpiste P' toteuttavat yhtälön

$$OP \times OP' = R^2,$$

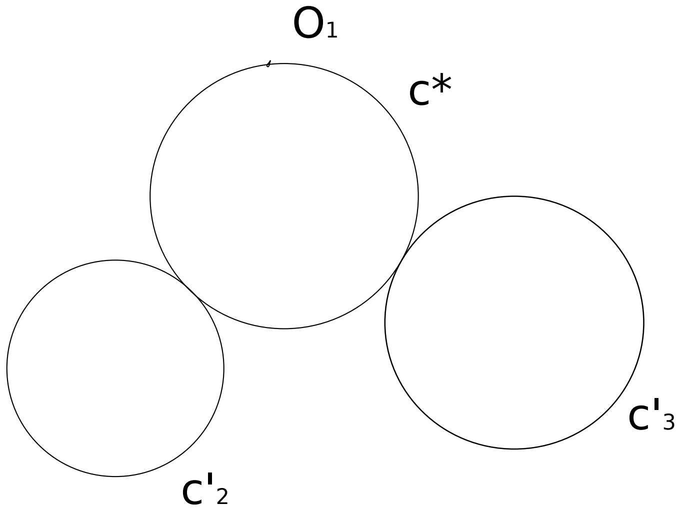
jossa piste O on inversiokeskus ja R asetettu inversiosäde. Inversio kuvaa suorat ja ympyrät vastaavasti:

suora, joka kulkee pisteen O kautta	suora joka kulkee pisteen O kautta
O-keskinen ympyrä	O-keskinen ympyrä
suora, joka ei kulje O:n kautta	ympyrä, joka kulkee O:n kautta
ympyrä joka kulkee O:n kautta	suora, joka ei kulje O:n kautta
ympyrä, joka ei kulje O:n kautta, eikä ole O-keskinen	Ympyrä, joka ei kulje O:n kautta, eikä ole O-keskinen

Tehtävässä kutistetaan ensin ympyröitä c_2 ja c_3 ympyrän c_1 säteen r_1 verran. Merkitään näitä saatuja ympyröitä kirjaimilla c_2' ja c_3'. Valitaan ympyrän c_1 keskipiste O_1 inversiokeskukseksi, ja inversiosäteeksi 1. Inversiossa ympyränkehä c_2' kuvautuu ympyränkehäksi c_2'' ja c_3' ympyränkehäksi c_3''. Ympyrä c^* kuvautuu inversiossa suoraksi l, joka sivuaa saatuja ympyröitä c_2'' ja c_3''. Tämä suora l on siis näiden kahden ympyrän



yhteinen tangentti. Konstruoimalla kyseinen tangentti, saadaan ympyrä c^* selvitettyä inversion avulla tästä tangentista. Lopuksi tarvitsee vain kutistaa tätä ympyrää $c*$ ympyrän c_1 säteen r_1 verran ja haluttu kaikkia kolmea ympyrää sivuava ympyrä c on ratkaistu. Näin vanha Apolloniuksen ongelma ratkeaa uuden matemaattisen työkalun, inversion avulla.



LUKU 5

Luova ongelmanratkaisu

”Otaksuisin, että intuitio on jotain sellaista, millä ei ole mitään tekemistä loogisen ajattelun kanssa. Se on jotain, mikä sijaitsee alitajunnassa. Ja otaksun, että alitajunta on paljon älykkäämpi kuin tietoinen, looginen ajattelu.”
Gerd Binning [5]

”On kahta erityyppistä tietoa: älyllinen ja intuitiivinen. Näistä älyllinen suuntautuu jo tunnettua kohti, ja intuitiivinen taas tuntemattomaan. Älyllinen ei pysty ymmärtämään aikaa, liikettä eikä elämää, ne ovat intuitiivisen ainutlaatuisia objekteja.”
Henri Bergson [8]

Luovuuteen vaikuttavat useat tekijät: henkilön persoonallisuuden piirteet, asenteet ja näkökulmat käsiteltävään ongelmaan, tietovarasto, mielentila, intuitio, tietoinen ja alitajuntainen ajattelu. Luovuuden on todettu kukoistavan rentoutuneessa, sallivassa mielessä ja ilmapiirissä. Tämä sotii yliopistojen järjestämiä lukuisia 'luo luova liikeidea, ja voit voittaa starttirahaa'-kilpailuja vastaan, joita viime vuosina on ilmestynyt ilmoitustauluille. Paineen alla, ulkoisten palkintojen varassa, luovuus monesti vain näivettyy. Luulisin, että nämä kilpailut heijastelevatkin taloudellisesti kaatuilevien länsimaiden yrityksiä pitää kansalaisten ylemmyydentuntoa yllä hokemalla mantraa 'ylivoimaisesta innovatiivisuudestamme'.
Luovuuden huonosta paineensietokyvystä kertoo myös se, että monet kuuluisat tutkijat, kuvataiteilijat, kirjailijat ja keksijät saavat ratkaisevan idean mieltänsä pitkään vaivanneeseen ongelmaan aamuhorroksessa, unessa tai lomamatkalla, juuri silloin kun mieli on rentoutuneimmillaan, eikä ongelmaa enää tietoisesti pohdita. Tätä ideaa on yleensä edeltänyt pitkäkestoinen, tietoinen ja älyllinen ponnistelu ongelman parissa. [5] Tällaisen tietoisen ja tiedostamattoman yhteistyön merkitystä korosti ensimmäisenä psykoanalyytikko Sigmund Freud (1856-1939). Freud kuitenkin ajatteli ihmisen tiedostamattoman olevan ääretön voimavara, josta ideoita kumpuaa yhtämittaa. Luovan ja ei-luovan ihmisen ero on siis vain siinä, kuinka vapaana tiedostava ajattelu sallii alitajunnan elää. Freud kuvaili luovaa prosessia piilotajunnasta pulppuavana kiihokkeena, ilman tietoisesti harkittuja päämääriä. Hän käytti siitä sanaa 'neuroosi', joka kuvastaa hyvin monien luovien henkilöiden olemusta ja mieltä. Carl Gustav Jung (1875-1961), Freudin kuuluisin oppilas, ajatteli puolestaan luovan prosessin olevan mystinen tapahtumasarja, johon vaikuttaa vahvasti kollektiivinen tiedostamaton aines, kaikkia ihmisiä yhdistävä kollektiivinen mieli. Tällä selittyisi monet tiedeyhteisöissäkin havaitut yhdenmukaisuudet, joissa eri tahoilla työskentelevät tiedemiehet päätyvät lähes samoihin aikoihin samoihin tuloksiin, toisistaan tietämättä. [5]
Sekä Jungin että Freudin teorioita on kuitenkin suomittu lukuisia kertoja, muun

muassa Freudista on todettu ”Freud kuuluu maailmanhistorian suurmiesten joukkoon, muttei Darwinin ja Kopernikuksen rinnalle, vaan Hans Christian Andersenin ja Grimmin veljesten pariin.” [5] Kritiikki ilahduttaa lukijaansa luovuudeellaan, liekö ollut tietoisen ajattelun tulos?

Mitä syvemmälle pohditaan luovuuden perimmäistä olemusta, alitajunnan ja tajunnan välistä yhteyttä, intuitiota sekä yhtäkkisiä, kirkkaita ideoita, ei voi olla törmäämättä kysymyksiin: Mitä on ajattelu? Onko tiedostamatonta, piilevää ajattelua olemassa, ja miten se syntyy? Mikä on ihminen? Mitä on aika? Näihin kysymyksiin on vaikea todistettavasti löytää muita kuin pintapuolisia vastauksia.

Nerous ja luovuus kulkevat monesti käsi kädessä. Robert Schumannin sanoin: ”lahjakkaat työskentelevät, nerot luovat”. [5] Monien luovuustutkijoiden mukaan voimakkaimmin luovia neroja yhdistävät piirteet ovat herkkyys ja joustavuus, sekä kyky eri tavoin havaita olennaisin ongelma. Herkkyydellä tässä tarkoitetaan jonkinnäköistä ’aistien avoimuutta’, jonka Pólyakin mainitsi jo aiemmin. Näin nerot tavallaan ’näkevät’ enemmän kuin muut. Luovat huippulahjakkuudet myös jatkuvasti suuntaavat omaa toimintaansa uusien näkökulmien etsimiseen, ja näihin pyrkiessään he irrottautuvat herkästi omasta minästään sekä institutionaalisista sovinnaisuuksista. [5]

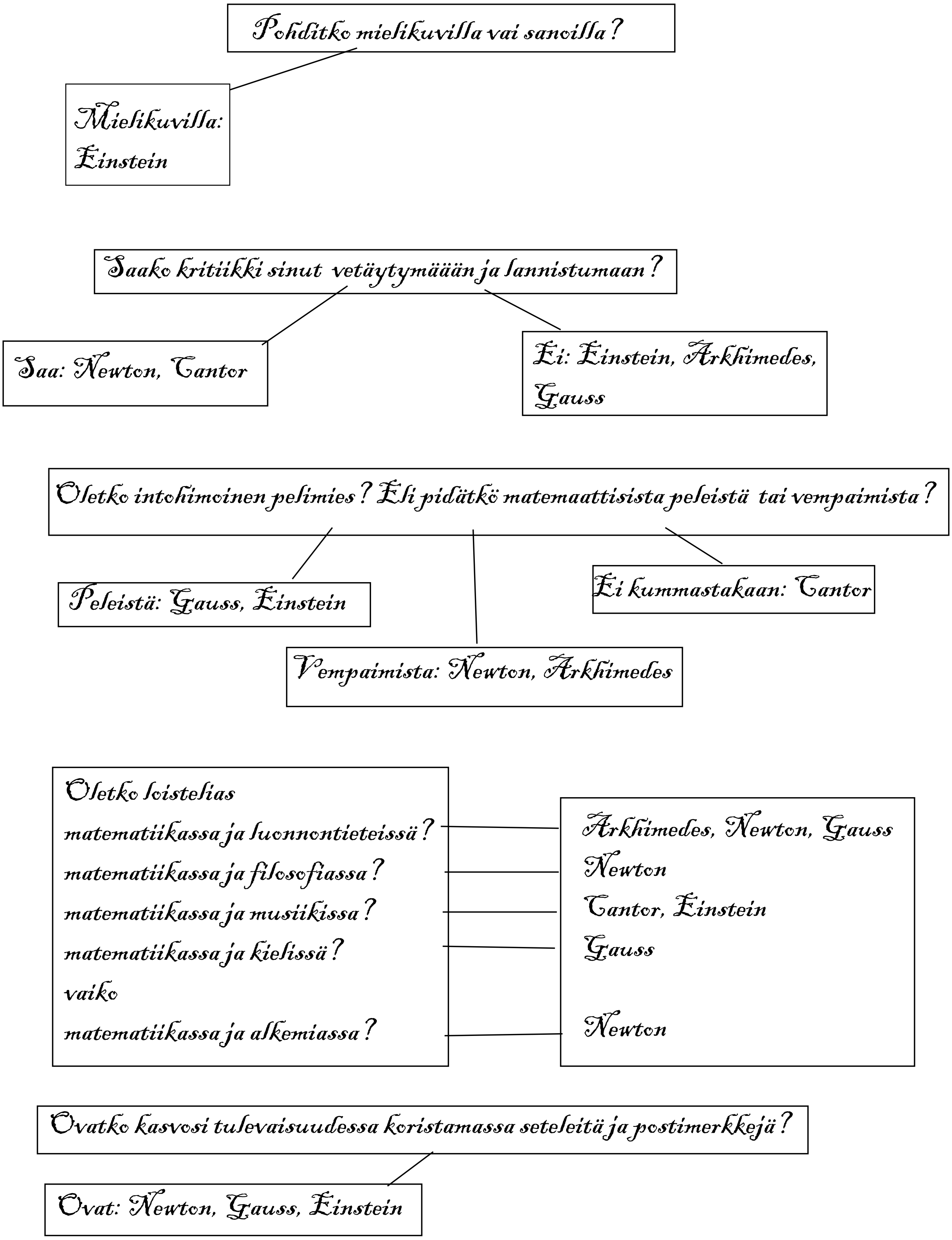
On myös hyvin tavallista, että luovimmat oman alansa ongelmanratkaisijat ovat persoonallisuuspiirteiltään ja taipumuksiltaan hyvin vahva kokonaisuus, yhteistoiminta, jossa eri piirteet ja kyvyt tukevat toisiaan niin, että he yltävät elämänsä aikana korkeampiin suorituksiin kuin muut kanssaihmiset. Nämä henkilöt vaikuttavatkin yleensä aktiivisesti monissa eri vuorovaikutusten piireissä, ja ovat aktiivisia monilla eri aloilla. Sen lisäksi luovuustutkimuksissa on huomattu luovuuden kehittyvän myös päinvastaisilla kyvyillä, eli kyvyllä vastaanottaa ja hyödyntää erilaisia ärsykkeitä oman toimintansa suuntaamiseen, sekä soveltaa hyvin kaukaisistakin kokemuksista opittua tietoa nykyhetkessä käsiteltävään ongelmaan. [5]

Luovan toiminnan yksi peruspiirteitä, sekä lahjakkaita ongelmanratkaisijoita yhdistävä tekijä, on ongelman hahmottaminen kokonaisuutena, täydellisenä. [5] Filosofiassa tämä yhdistetään intuition käsitteeseen. Ranskalainen filosofi Henri Bergson (1859-1941) kuvailee intuitiota ’metafysiikan analysoimiskeinoksi’, jossa ongelmanratkaisijan mieli saavuttaa elävän suhteen objektinsa kanssa ja muuttuu vähitellen tuoksi objektikseen, ymmärtäen näin sen kokonaisuuden monien irrallisten osien asemesta. Bergson vakuuttaa sen olevan mahdollista ’älyllisen sympatian avulla’. Puolalainen filosofi Leszek Kolakowski (1927-2009), täydensi Bergsonin filosofiaa korvaamalla ajan absoluuttisuuden erilaisilla aikaulottuvuuksilla, jotka ovat ihmisen kokemaa aikaa joko matalammalla tai korkeammalla tasolla. Kolakowski sanoo ihmisen pääsevän itsensä tuolle puolen, kokemaan nämä muut olemassaolon tasot, juuri intuition avulla. [8] Bergsonin ja Kolakowskin teoriat näyttäisivät käyvän yksiin luovien nerojen erityispiirteiden kanssa, joita edellä mainitsimme. Nämä teoriat, joita ei voi tieteellisesti perustella, antavat ymmärtää, että myös Bergson ja Kolakowski lukeutuvat luovien nerojen joukkoon, sillä heidän teoriansa eivät voi pohjautua oikein muuhun kuin omakohtaisiin kokemuksiin intuitiosta ja sen syvimmästä olemuksesta.

Bergsonia ja Kolakowskia tiukemmin jalat maassa kulkeva luovuustutkija Mihaly

Csikszentmihalyi (1934-), nimittää luovia henkilöitä 'autoteleiksi'. Autotelisille henkilöille tyypillistä on uusien ideoiden sekä haasteellisen tekemisen luoma sisäinen mielihyvä, ulkoisten palkkioiden, kuten raha, sijaan. Csikszentmihalyin kuvaaman luovuuden ydin on 'flow' (virta, virtaus), joka tarkoittaa ihmisen intensiivistä toimintaa ongelmanratkaisun parissa, joka vie ihmisen 'ajan ja paikan tuolle puolen'. Matematiikan tunneillakin toisinaan päästään sopivien, haastavien tehtävien parissa kokemaan 'ryhmäflow'. 'Flow'-tilasta on toisinaan vaikea irrottautua, ja autoteliset yksilöt oppivatkin vähitellen tietoisesti pyrkimään kohti näitä kokemuksia. 'Flow'- kokemuksen on huomattu olevan riippuvainen siitä, että ongelma on tarpeeksi haastava ja mielenkiintoinen, jolloin sen parissa pähkäilevän ongelmanratkaisijan minätietoisuus häviää. Tällöin siis yksilön toiminta ja tietoisuus sulautuvat yhteen. Toiminnan on oltava keskittymistä vaativaa ja päämäärätietoista, sekä saada ongelmanratkaisijassa aikaan hallitsevuuden tunteen. Tehtävän parissa aika menettää merkityksensä.
Autotelisen kokemuksen vastakohdaksi Csikszentmihalyi nimeää 'eksotelisen' kokemuksen, jolla tarkoitetaan behavioristista, ulkoisilla palkkioilla motivoitua toimintaa. [5] Filosofiassa autotelisiin kokemuksiin viittaa termi 'metafyysiset kvaliteetit'. Metafyysiset kvaliteetit tarkoittavat yksilön salaisia kaipauksia, joiden konkreettiseen paljastumiseen, yksilön Minässä piilevän potentiaalin realisoitumiseen, työmme ja tavoitteemme tähtäävät. "Tämä paljastuminen konstituoi olemassaolon huipun ja todelliset syvyydet". Hallitsevuuden ja onnistumisen tunne tulee siitä, että kykenee suoritukseen itse ilman auktoriteetin 'holhoavaa katsetta'. [7]
Olipa ongelmanratkaisija sitten sisäisesti tai ulkoisesti motivoitunut, hetkellinen oivallus, tunne, joka koetaan yleensä tietoisen päämäärän tavoittelun ja sisukkaan järkeilyn yhteydessä, saa ongelman eri palaset loksahtamaan kohdilleen ja ongelmanratkaisijan mielen selkiytymään. Tätä monet matemaatikot, kuten paljon luontoa tutkinut Henri Poincaré (1854-1912) kuvailevat kauneudeksi: "Tarkoitan tässä kauneutta, joka tulee osien harmonisesta järjestyksestä, jotain, mihin vain puhtaalla järjellä on mahdollista tarttua.". Tieteessä aina pyritään totuuden löytämiseen, ja myös kauneuden tavoittelu on tälle alisteinen päämäärä. Kuitenkin, etenkin juuri matematiikassa, kauneus, jolla käsitetään tässä harmoniaa, yksinkertaisuutta, järjestystä sekä laadun puhtautta, on sekoittunut totuuden kanssa yhdeksi. Poincarén sanoin: "Etenkin juuri matematiikassa toimivat ratkaisut ovat usein harmonisia ja sopusuhtaisia.". [5]
Luovuus on siis kaikenkaikkiaan jokaisen ulottuvilla oleva piirre. Sitä voi harjoittaa etsiytymällä usein ongelmanratkaisun pariin, flow-kokemusten äärelle, olemalla monipuolinen tekemisissään ja kanssakäymisen verkostoissaan, heittäytymällä alitajuntansa vietäväksi, herkistämällä aistejaan ja mieltään, kuuntelemalla sekä etsimällä kauneutta. Larssonin sanoin: "Mikäli haluaa kuulla suuren salaisuuden, on osattava olla hiljaa. Ainoastaan intuition rauhallisuudessa paljastuu kätketty totuus. Vain siellä on mahdollista elää kokonaisena, täysin voimin vilpittömässä ykseydessä." [7]

5.1. Testi: Millainen ongelmanratkaisija olet?



Oletko äkkipikainen ja omapäinen?

Kyllä: Einstein, Newton

En: Cantor

Vain, jos minut keskeytetään kesken ongelmanratkaisun:
Gauss, Arkhimedes

Onko sinulla vaikutusvaltaisia tukijoita?

Kyllä: Gauss, Arkhimedes, Newton

Ei: Cantor, Einstein

Tunnetko vetoa valjastaa älysi joukkotuhoaseiden kehittelyyn?

Kyllä: Einstein, Arkhimedes

Onko elämänkumppanisi järkähtämätön tukijasi, elämäsi valo ja sydämesi palo sekä hieman hupsu?

Kyllä: Gauss

Ei: Newton, Einstein, Arkhimedes

Olitko jo lapsuudesta lähtien keskimääräistä nerompi?

Kyllä: Gauss, Einstein

En: Newton, Arkhimedes

Oletko noussut ryysyistä rikkauksiin?

Kyllä: Gauss, Newton

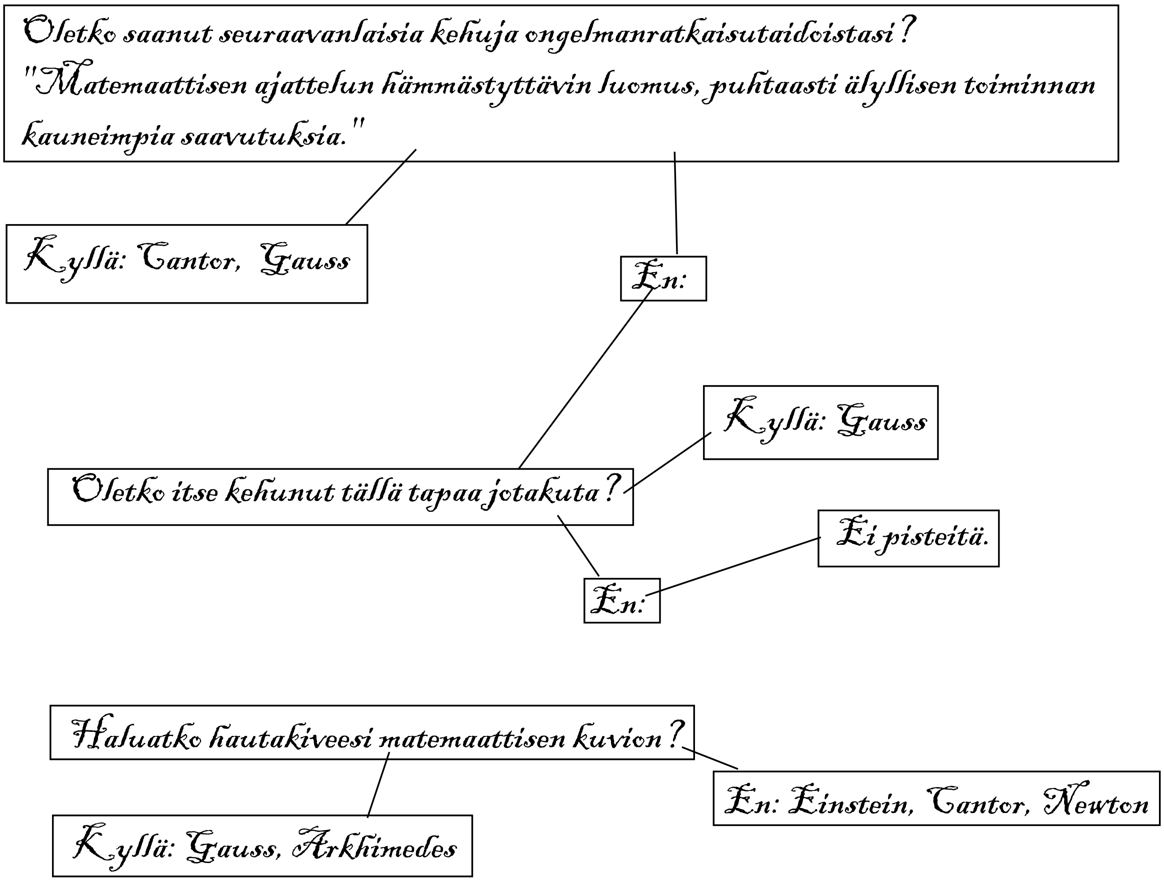
En: Einstein, Cantor, Arkhimedes

Olen tehnyt päinvastoin

Ei pisteitä.

Kirjaa ylös kaikki matemaatikkopisteet, joita saavutat testin eri kohdista. Näin saat selville, ketä kuuluisaa matemaatikkoa muistutat eniten. Testin jälkeen voit etsiä teitä yhdistäviä piirteitä seuraavista tekstinpätkistä.

Albert Einstein (1879-1955)
Einstein oli saksalaissyntyinen teoreettinen fyysikko. Hän loi kuuluisan suhteellisuusteorian, ja vaikutti kvanttimekaniikan ja kosmologian kehitykseen. Albert Einstein



muutti ihmiskunnan käsityksen maailmankaikkeudesta sekä valon, ajan, energian ja painovoiman olemuksesta. Einstein oli rohkea ja villi nero, intohimoisen utelias, ja hänen suurin tieteellinen kykynsä oli hänen mielikuvituksensa. Kun Einstein näki valonsäteen, hän kuvitteli ratsastavansa sillä, ja kun hän katsoi taivasta, hän päätteli ajan ja avaruuden olevan kaareutuneita. Hänen kuolemansa jälkeen huomattiin, että hänen aivoistaan puuttui parietaalinen operculum (aivojen osa, joka muun muassa säätelee kirjoittamista, puhumista ja lukemista) ja hänen päälakilohkonsa olivat symmetriset, vaikka normaalisti ne ovat epäsymmetriset, ja lohkojen välillä oli tavallista paremmat yhteydet, joka viittaa poikkeukselliseen matemaattiseen kyvykkyyteen ja erityisen hyvään kolmiulotteiseen hahmottamiseen. Einstein olikin poikkeuksellisen lahjakas algebrassa jo lapsena, hän osasi muun muassa 12-vuotiaana todistaa Pythagoraan lauseen itse. Kuitenkin etenkin lapsena hän sai monesti raivokohtauksia, jos asiat eivät hoituneet niinkuin hän halusi, ja sotien aikana hän osallistui tieteellisiin hankkeisiin atomipommien ja kaasuaseiden kehittelyä varten. Hän oli kuitenkin pohjimmiltaan pasifisti, ja kannatti demokratiaa ja kampanjoi ydinaseriisunnan puolesta. Naisasiansa Einstein aina sotki pettämällä kulloistakin vaimoaan milloin kenenkin kanssa, ja yksi hänen vaimoistaan, Elsa Löwenthal, sanoi "Avioliitto Albertin kanssa on joka suhteessa hermoille käyvää ja hankalaa." Einstein oli vain huumorintajun päässä Aspergerin syndrooman diagnoosista.
http://www.amnh.org/exhibitions/past-exhibitions/einstein
http://fi.wikipedia.org/wiki/AlbertEinstein

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
Gauss, kuten Einsteinkin, oli saksalainen matemaatikko, tähtitieteilijä ja fyysikko. Hän on muun muassa osoittanut, että jokainen luonnollinen luku voidaan esittää yksikäsitteisesti alkulukujen tulona, sekä todistanut algebran ja aritmetiikan peruslauseet. Gauss täytti lapsena kaikki lapsineron piirteet. Kun hänen isänsä vei hänet kolmivuotiaana työpaikalleen muurausyritykseen, Gauss oli huutanut kesken palkanlaskijoiden töiden "Isä, nämä laskelmat ovat väärin!". Työmiehet huomasivat pian hänen olevan oikeassa. Kielistä Gauss puhui sujuvasti ranskaa, kreikkaa, latinaa, englantia, venäjää ja tanskaa. Hän harjoitti kielitaitoaan kirjoittamalla kirjeitä natiivipuhujien kanssa. Vuonna 1804 Gauss kosi kirjeitse Johanna Osthoffia, joka ei ollut erityisen viehättävä tai sivistynyt nainen, mutta jonka ystävällisyys ja iloisuus sekä ymmärtäväisyys hurmasivat Gaussin. Toisaalta Gaussin prioriteetit olivat harvinaisen matemaattiset, sillä vuonna 1807, kun hänen ongelmanratkaisunsa keskeytettiin kertomalla, että hänen vaimonsa oli kuolemaisillaan, Gauss oli vastannut "Kerro hänelle, että odottaa hetken, kunhan saan tämän valmiiksi." Hautakiveensä Gauss toivoi saavansa 17-kulmion, muistuttamaan hänen konstruktiotaan 17-kulmiosta harpin ja viivaimen avulla. Toivetta ei toteutettu.
http://scienceworld.wolfram.com/biography/Gauss.html
http://fi.wikipedia.org/wiki/CarlFriedrichGauss

Isaac Newton (1642-1727)
Newton oli englantilainen fyysikko, matemaatikko, tähtitieteilijä, alkemisti sekä filosofi. Hän loi perustan klassiselle mekaniikalle, ja parhaiten hänet tunnetaan painovoima- ja liikelaeistaan. Newton teki myös alkemiallisia tutkimuksia laboratoriossaan, jossa hän altistui monille kemikaaleille, muun muassa hänen hiuksestaan otetussa näytteessä sanottiin olevan 40-kertainen määrä elohopeaa normaaliin hiukseen verrattuna. Newton oli luonteeltaan eristäytynyt ja vakava. Kouluaikoinaan hän oli ujo, eikä ollenkaan ahkera. Sen vuoksi hän ei suoriutunut opinnoistaan kovinkaan hyvin. Newton opiskeli mieluiten yksin, rakennellen mekaanisia vempaimia, kuten tuulimyllyjä, vesikelloja ja aurinkokelloja. Tieteellisessä työssäänkin hän varjeli löytämiään tuloksiaan mustasukkaisesti, ja julkaisi niitä vain kun muut tutkijat olivat päässeet hänen kannoilleen. Newton uskoi, että tutkimusten myötä Jumalan perimmäisistä ajatuksista saataisiin selvyys, ja että niitä piti siksi varjella joutumasta väärien ihmisten käsiin. Newton oli herkkä kritiikille ja hän kärsi mielenterveydellisistä ongelmista koko elämänsä. Hänen sanottiin nauraneen kerran elämänsä aikana, eikä hän koskaan mennyt naimisiin tai hankkinut lapsia. Newton kuitenkin saavutti paljon tieteen saralla, joka oli ällistyttävää siinäkin mielessä, että hän oli itse vain luku- ja kirjoitustaidottoman maanviljelijän poika. Vuonna 1705 Newton lyötiin ritariksi ensimmäisenä tiedemiehenä, ja hänen kuoltuaan hänelle järjestettiin suureelliset hautajaiset.
http://scienceworld.wolfram.com/biography/Newton.html
http://fi.wikipedia.org/wiki/IsaacNewton

Georg Cantor (1845-1918)
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor tunnetaan parhaiten joukko-opin luojana.

Hän syntyi saksalaiseen perheeseen 3. maaliskuuta 1845 Pietarissa. Cantor oli jo nuoruudessaan taitava viulunsoittaja ja matemaatikko, hän osoitti poikkeuksellisia kykyjä muun muassa trigonometriassa. Elinaikanaan Cantor kohtasi kuitenkin paljon vastustusta matemaatikkopiireissä. Muut sen ajan matemaatikot olivat konservatiivisia ja ennakkoluuloisia Cantorin tuloksia kohtaan. Murskaavasta arvostelusta johtuen Cantor sairastuikin masennukseen ja hänen itsetuntonsa kärsi niin, että hänen oli keskeytettävä työnsä. Matematiikka olikin hänen henkireikänsä, jopa kuherruskuukautta Sveitsissä viettäessään tuoreen vaimonsa, Vally Guttmannin kanssa, vuonna 1874, Cantor omistautui matemaattisille keskusteluille samaisessa paikassa lomailleen Dedekindin kanssa. Cantorin työt saivat kuitenkin tunnustusta toiselta saksalaiselta matemaatikolta, Hilbertiltä: "..matemaattisen ajattelun hämmästyttävin luomus, ihmisen puhtaasti älyllisen toiminnan ylivertaisimpia saavutuksia."
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Cantor.html
http://fi.wikipedia.org/wiki/GeorgCantor

Arkhimedes Syrakusalainen (287eaa-212eaa)
Arkhimedes oli kreikkalainen insinööri, filosofi, fyysikko, tähtitieteilijä ja matemaatikko. Hän oli ensimmäisiä, jotka yhdistivät matematiikan luonnonilmiöiden tutkimiseen, ja hänen työnsä enteilivät differentiaali- ja integraalilaskentaa. Arkhimedes tunnetaan myös hydrostatiikan isänä, jonne hänen nimensä on jäänyt elämään 'Arkhimedeen lakiin'. Hän tutki myös vipuja ja aineen tiheyttä. Arkhimedeen kehittelemiä erikoisia sotakoneita käytettiin vuonna 213 Syrakusan kaupungin puolustamiseen roomalaisten hyökkäyksiä vastaan. Arkhimedeella oli suotuisat välit sen aikaiseen Syrakusan vallanpitäjään, kuningas Hieron ll:seen. Arkhimedes sai tehtäväkseen määritellä kuninkaan kruunun materiaalin. Tähän vaaditun pohjatyön Arkhimedes suoritti eräänä päivänä kylpiessään. Arkhimedes päätteli veden pinnan nousevan oman kehonsa syrjäyttävän veden tilavuuden verran, jolloin epäsäännöllisen muotoisten esineiden tilavuus saataisiin tällä keinoin ratkaistua. Tilavuuden avulla Arkhimedes saisi siis kruunun tiheyden selvitettyä ja sitä kautta sen materiaalin. Arkhimedeen kerrotaan juosseen sen sileän tien alastomana kaupungille huutaen "Heureka!". Arkhimedes oli työssään aina hyvin keskittynyt. Kun roomalaiset hyökkäsivät Syrakusaan, Arkhimedes oli niin silloisen ongelman lumoissa, että oli tuhahtanut valloittajille vain "Älkää sotkeko ympyröitäni.". Ne jäivät hänen viimeisiksi sanoikseen. Arkhimedes toivoi hautakivensä olevan sylinterin muotoinen, jonka sisällä on mahdollisimman suuri pallo. Hänen toiveensa toteutettiin. http://fi.wikipedia.org/wiki/Arkhimedes

Kirjallisuutta

[1] Benson, Ian *Ditchin Piaget, 14.1.2007, Prospect Magazine www.prospectmagazine.co.uk/magazine/ditchingpiaget*

[2] Cai, Jinfa and Lester, Frank: *Why is teaching with problem solving important for student learning? Principles and standards for school mathematics, NCTM's, 8.4.2010. http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_and_Advocacy/Research/Clips_and_Briefs /Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf*

[3] De Guzman, Miquel: *Matemaattisia seikkailuja.* toinen espanjankielinen painos, suom. Marjatta Näätänen, Loimaan kirjapaino Oy, 1990, Loimaa.

[4] Descartes, René: *Metodin esitys -mielenliikutuksen tutkiskelu -metafyysillisiä mietelmiä.* suom. Jalmari Hahl ja P.H Suuronen, Suomalaisen kirjall. seuran kirjapaino Oy, 1899, Helsinki.

[5] Hakala, Juha: *Luova prosessi tieteessä.* Gaudeamus kirja, Oy Yliopistokustannus University Press Finland, 2002, Helsinki.

[6] Hähkiöniemi, Markus: *Suunnikkaan pinta-ala japanilaisittain.* Dimensio 2/2012, s:40-45.

[7] Itkonen, Matti: *Itseyteni ja toiseutesi -opettajuutemme jäljitetty maa. Esseistinen montaasi kasvatusfilosofian perusteiksi. Kertoma ynnä Kestämä-elämykset. Mielen sisältö 2.* väitöskirja, Jyväskylän Yliopistopaino, 1996, Jyväskylä.

[8] Itkonen, Matti: *Koetut kuvat, eletyt sanat. Kirjoituksia kulttuurifilosofiasta. Kadonneen tapa- ja ruokakulttuurin säkeet. Filosofis-esteettinen tutkimuskattaus.* Toimittaneet Matti Itkonen, V.A Heikkinen ja Sam Inkinen, Jyväskylän Yliopisto, Haaga Instituutin ammattikorkeakoulu, Euroopan kestävän tietoyhteiskunnan instituutti, Jyväskylän Yliopistopaino, 2005, Jyväskylä.

[9] Korkeakivi, Riitta: *Matikkaa ei voi ohittaa.* Opettaja 7/2013 s:12-15.

[10] Kow, Kai and Yeo, Joseph *Student's Difficulties in Solving Non-Routine Problems, 8.10.2009, International Journal for Mathematics Teaching and Learning www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm*

[11] Leppäaho, Henry: *Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskouluissa.* Jyväskylän Yliopistopaino, 2007, Jyväskylä.

[12] Polya, George: *How to solve it.* toinen painos, Princeton University Press, 1973, Princeton, New Jersey.

[13] Polya, George: *Mathematical Discovery -on understanding, learning and teaching problem solving.* yhdistetty painos, John Wiley and Sons, 1981, New York.

[14] *Suomalaisten oppilaiden kouluosaaminen kansainvälistä kärkeä (tiedote 11.12.2012) https://ktl.jyu.fi/ktl*

[15] Suurtamm, Chris and Vézina, Nancy *Transforming Pedagogical Practice in Mathematics: Moving from Telling to Listening, 12.10.2010, International Journal for Mathematics Teaching and Learning www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm*

[16] Van de Walle, J.A: *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.* 5. painos, MA: Pearson Education, 2004, Boston.

[17] Viholainen, Antti: *Lisää luovuutta matematiikkaan.* Dimensio 6/2010, s:70-72.