HALLITSEEKO YLIOPPILASKOKELAS PITKÄN MATEMATIIKAN?

Pitkän matematiikan tehtävien aihealuejaottelua ja tehtäväkohtaisten pisteiden analysointia

Tiia Tallila

Matematiikan Pro gradu

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Jyväskylän yliopisto

Kesäkuu 2013

TIIVISTELMÄ

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tallila, Tiia: Hallitseeko ylioppilaskokelas pitkän matematiikan? Pitkän matematiikan tehtävien aihealuejaottelua ja tehtäväkohtaisten pisteiden analysointia

Pro gradu -tutkielma, 85 s., 37 liites.

Ohjaaja: Lassi Kurittu

Kesäkuu 2013

Ylioppilastutkinnossa mitataan lukiolain 18§ (13.8.2004/766) mukaan sitä, ovatko lukion opiskelijat omaksuneet lukion opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot sekä saavuttaneet lukiokoulutuksen tavoitteiden mukaisen riittävän kypsyyden. Tämä tutkimus keskittyy kevään pitkän matematiikan kokeiden tutkimiseen tutkimusaikavälillä 2004–2012. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, miten ylioppilastutkinnon matematiikan kokeiden tehtävät jakautuvat aihealueittain. Tutkimuksessa selvitetään, painotetaanko joitakin osa-alueita enemmän ja millaisia muutoksia ylioppilastehtävissä on havaittavissa matematiikan aihealueiden painotuksessa. Aihealuejaottelu 15 eri aihealueeseen perustuu pääpiirteittäin lukion opetussuunnitelman perusteiden (2003) mukaiseen kurssijakoon. Tutkija on tehnyt aihealuejaon itse analysoiden pitkän matematiikan tehtäviä ja malliratkaisuja useita lähteitä käyttäen. Tutkielmassa analysoidaan myös tarkemmin viiden eri aihealueen osalta tehtävien hallintaa. Aihealueet ovat Todennäköisyys ja tilastot, Geometria, Integraalilaskenta, Prosenttilaskut ja Ääriarvotehtävät. Näiden aihealueiden osalta on tutkittu myös sitä, onko sillä merkitystä tuloksiin, jos pitkän matematiikan kirjoittaa pakollisena tai ylimääräisenä. Tehtäväkohtaisten tulosten analysoinnissa käytettiin hyödyksi emeritusprofessori Aatos Lahtisen kokoamia taulukoita kevään kokeiden tuloksista.

Tutkimus osoittaa, että Derivaatta-, Integraalilaskenta-, Geometria- ja Analyyttinen geometria –aihealueita on kevään tehtäväsarjoissa useimmiten. Poikkeuksellista on trigonometriatehtävien vähäinen esiintyminen tehtäväsarjoissa. Prosenttilaskun osalta tutkimuksessa tehdään merkittävä havainto, sillä prosenttilaskun painotus tehtäväsarjoissa on viime vuosina vähentynyt huomattavasti. Tarkemman tarkastelun aihealueista hallitaan parhaiten juuri prosenttilaskut. Tehtäväkohtaisten tulosten analysoinnin perusteella voidaan tehdä se johtopäätös, että tarkemmassa tarkastelussa olevien aihealueiden osalta suuri osa kokelaista joko osaa tehtävän täydellisesti tai ei saa yhtään pistettä. Valitettavan suuri osa kokelaista ei sisäistä matematiikan asioita ja taidoissa on näin ollen puutteita ja aukkoja. Tutkimusaikavälillä on tapahtunut myös muutamia uudistuksia matematiikan kokeen rakenteessa ja sallittujen apuvälineiden käytössä. Merkittävin uudistus on ollut symbolisen laskimen salliminen apuvälineenä. Matematiikan koe tulee olemaan uudistusten alla myös jatkossa, jos sähköistämisprojekti Digabi toteutuu. Tässä tutkimuksessa otetaan kantaa sekä käytössä että suunnitteilla oleviin uudistuksiin, sillä ainakaan laskinohjeuudistuksen suhteen ei ole vielä onnistuttu.

Hakusanat: ylioppilaskirjoitukset, pitkä matematiikka, aihealuejaottelu, tehtäväkohtaiset pisteet, laskinohjeuudistus, sähköistämisprojekti

ESIPUHE

Haluan kiittää yliopistonopettaja Lassi Kurittua tutkielmani joustavasta ohjauksesta ja selkeistä neuvoista. Suuri kiitos kuuluu myös emeritusprofessori Aatos Lahtiselle, joka antoi minulle käyttöön liitteissä olevat tehtäväkohtaiset pistetaulukot. Ilman näiden taulukoiden tietoja, tutkimuksen toteuttaminen ei olisi onnistunut. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen ja professori Juha Kinnunen auttoivat myös vastaamalla kysymyksiin matematiikan ylioppilaskokeen määräyksiin liittyen. Lisäksi kiitoksen ansaitsevat avopuolisoni ja vanhempani. Teidän tukenne tämän tutkielma-prosessin aikana oli tärkeä.

Jyväskylä, kesäkuu 2013

Tiia Tallila

Sisällysluettelo

1. JOHDANTO

”Caesar pääsi koko Rooman valtiaaksi sen kokemuksen perusteella, minkä hän oli Gallian sotaretkillä hankkinut. Roomaa ei enää ole, mutta Caesarin maksiimia kokemuksen hankkimisen tärkeydestä voi käyttää hyväkseen myös Matematiikan Imperiumissa. … Harjoituskentillä saadun kokemuksen avulla voi päästä koko lukiomatematiikan valtiaaksi. Matematiikan Imperiumin herruus on tavoittelemisen arvoinen.” *Aatos Lahtinen (Dimensio 6/06, 19)*

Suomalaiset ylioppilaskirjoitukset ovat erikoisuus, jota ei muualla maailmalla tunneta vastaavanlaisena. Näin on todennut muun muassa Opettaja-lehden päätoimittaja Hannu Laaksola (2013b). Ylioppilaaksi pääsyä arvostetaan ja se on myös edellytyksenä monille jatko-opiskelualoille pääsemiseksi. Ylioppilaskirjoitukset ovat siis tärkeä merkkipaalu monen suomalaisen nuoren elämässä. Matematiikka on yksi ylioppilastutkinnon tärkeimmistä oppiaineista, joten Matematiikan Imperiumin herruus on todella tavoittelemisen arvoinen, kuten emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2006, 19) on todennut. Onko matematiikka kuitenkaan nykypäivä se oppiaine, jonka suuri osa kokelaista hallitsee ja johon panostetaan?

Tässä tutkimuksessa keskitytään kevään pitkän matematiikan tehtävien analysoimiseen tutkimusaikavälillä 2004–2012. Tutkimus on kaksijakoinen. Ensimmäisessä osassa kappaleessa 4 selvitetään tehtävien jakautumista aihealueittain ja aihealuejaon painotusten muutoksia. Toisessa osassa kappaleessa 5 analysoidaan tehtäväkohtaisia tuloksia. Tehtäväkohtaisten tulosten analysoinnin yhteydessä selvitetään myös sitä, että onko sillä merkitystä, jos matematiikan kirjoittaa pakollisena tai ylimääräisenä. Aihealuejaottelussa pitkän matematiikan kevään tehtävät on jaettu 15 eri aihealueeseen. Jaottelun avulla selvitetään, testataanko joitakin aihealueita enemmän kuin toisia. Pääperiaate lukion opetussuunnitelman (2003) mukaan on, että jokaista aihealuetta käsitellään lukio-opinnoissa yhden kurssin aikana. Matematiikka on kuitenkin sellainen tiede, jossa uutta tietoa rakennetaan usein aiemmin opitun päälle, joten useat aihealueet liittyvät jossakin suhteessa toisiinsa. Toki on myös sellaisia aihealueita, kuten esimerkiksi Vektorit ja Lukuteoria ja logiikka, jotka ovat selviä omia kokonaisuuksiaan. Tutkielman tuloksista ilmenee, että selviä painotuseroja aihealueiden välillä löytyy. Tutkimusaikavälillä on myös tapahtunut muutoksia pitkän matematiikan kirjoittajien rakenteessa ja kokonaismäärässä. Näitä muutoksia tarkastellaan tutkielman kappaleen 5 yhteydessä. Tutkimuksen aihealuejaottelun tutkija on laatinut itse. Tehtäväkohtaiset pistetaulukot ovat emeritusprofessori Aatos Lahtisen kokoamia. Niiden avulla tutkija on laatinut tässä tutkimuksessa tarvittavat taulukot ja kuviot.

Ylioppilaskirjoitukset pyrkivät pysymään ajan hengessä mukana. Pitkän matematiikan kokeen osalta tehtävien kontekstia, rakennetta ja kokeessa käytettäviä apuvälineitä ajanmukaistetaan aika ajoin. Tutkimusaikavälillä on tapahtunut muutamia uudistuksia pitkän matematiikan kokeen rakenteessa ja sallittujen apuvälineiden käytössä. Esimerkiksi kevään 2012 kokeesta lähtien sallittiin symbolisten laskimien käyttö. Uudistus on aiheuttanut runsaasti keskustelua mediassa keväällä 2013. Uudistukseen otetaan kantaa myös tämän tutkielman yhteydessä. Pitkän matematiikan koe tulee myös jatkossa olemaan esillä mediassa, koska ylioppilastutkintolautakunta suunnittelee ylioppilaskokeiden sähköistämistä.

Ylioppilaskirjoitukset ovat siis tällä hetkellä keskeisessä asemassa suomalaisessa yhteiskunnassa. Tämän arvostetun aseman säilyttämiseksi on merkittävää, että niiden sisällöstä tehdään tutkimuksia. Tässä tutkimuksessa pyritään pitkän matematiikan osalta tuomaan näitä tärkeitä asioita ilmi ja herättämään lisää keskustelua.

2. YLIOPPILASTUTKINTO SUOMESSA MATEMATIIKAN NÄKÖKULMASTA

2.1 YLIOPPILASTUTKINNON HISTORIAA

Ylioppilastutkinto järjestettiin ensimmäisen kerran Suomessa vuonna 1852. Matematiikan koe on ollut yksi ylioppilastutkinnon pakollisista kokeista alusta alkaen. Aluksi matematiikan koe oli suullinen ja kokelas sai käyttää apuna liitutaulua. Matematiikan koe muuttui vuonna 1874 kirjalliseksi ja se sisälsi kymmenen tehtävää, joista tuli suorittaa vähintään kolme. Ratkaisemisessa sai käyttää apuna logaritmitauluja. Matematiikan kokeita järjestettiin aluksi vain yksi. Erottelua pitkään ja lyhyeen matematiikkaan ei vielä silloin tunnettu. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2002)

Ylioppilastehtävät seuraavat oman aikakautensa kontekstia. Tehtävät laaditaan siis sellaisista aihealueista, jotka ovat ylioppilaskokelaille ajankohtaisia. Esimerkkinä ylioppilastehtävä vuodelta 1874, joka eroaa kielellisesti vuoden 2012 lyhyen matematiikan tehtävästä.

Ylioppilastehtävä vuodelta 1874, tehtävä 7. (Lauren 1924, 5-6):

7. Pellolla on pitkin tienviertä 20 kuhilasta 10 m päässä toisistaan. Nämä ovat koottavat pellon päähän siihen, missä ensimäinen kuhilas on. Pitkäkö matka on kuljettava, ennenkuin kaikki kuhilaat saadaan kokoon, jos yksi kuhilas kerrallaan viedään?

Lyhyt matematiikka, kevät 2012, tehtävä 7. (Kivelä 2012):

7. Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella.

Lyhyen matematiikan koe järjestettiin ensimmäisen kerran vuonna 1901. 1960-luvulle asti sekä lyhyen että pitkän matematiikan kokeessa oli kymmenen tehtävää. Tämän jälkeen uudistuksena olivat vaihtoehtoiset tehtävät erilaisten oppimäärien vuoksi. Pääpiirteittäin ylioppilastutkinto on tehtäväasetuksiltaan kuitenkin pysynyt pitkään alkuperäisillä urillaan. Vasta vuonna 2000 sekä pitkän että lyhyen matematiikan kokeita uudistettiin radikaalimmin. Vuodesta 2000 lähtien matematiikan kokeessa on ollut 15 tehtävää, joista ylioppilaskokelas saa käsitellä enintään kymmentä tehtävää. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2002)

Vuodesta 1996 lähtien kokelas on saanut lukemastaan oppimäärästä riippumatta valita vapaasti joko pitkän tai lyhyen matematiikan kokeen tai reaalikokeen sillä ehdolla, että ylioppilastutkintoon voi kuulua vain yksi koe samassa oppiaineessa. Aiemmin, 1940-luvulla niin sanotuissa sotilasylioppilaskirjoituksissa, matematiikka oli poikkeuksellisesti vaihtoehtoinen reaalikokeen kanssa. Vuonna 1962 palattiin kuitenkin alkuperäisiin säädöksiin sillä muotoa, että pitkän matematiikan koe oli pakollinen niille, jotka olivat lukeneet matematiikassa vähintään 15 viikkotunnin kurssin. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2002)

2.2 YLIOPPILASTUTKINTO NYKYPÄIVÄNÄ

Ylioppilastutkinnon tarkoituksena on saada selville, ovatko lukion opiskelijat saavuttaneet lukion tavoitteiden mukaisen riittävän kypsyyden ja omaksuneet lukion opetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot. Tutkinnon johtamisesta, järjestämisestä ja toimeenpanosta vastaa ylioppilastutkintolautakunta, jonka jäsenet nimittää Opetusministeriö. Ylioppilastutkintolautakunta koostuu puheenjohtajasta ja noin neljästäkymmenestä jäsenestä. Jäsenet edustavat ylioppilastutkinnon eri oppiaineita. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2011). Eri oppiaineiden sensorit määrätään erikseen kutakin tutkintokertaa varten. Matematiikan sensoreiden määrä vaihtelee siis tutkintokerrasta toiseen. Esimerkiksi keväällä 2010 matematiikassa oli 32 sensoria. Keväällä 2009 vastaava luku oli 27. (Lahtinen, 2012b)

Tämä tutkielma käsittelee tarkemmin matematiikan kevään ylioppilaskirjoituksia keväästä 2004 kevääseen 2012. Tänä aikana ylioppilastutkintolautakunnassa on toiminut vuoteen 2006 asti matematiikan jaoksen puheenjohtajana professori Aatos Lahtinen. Lahtinen toimi samalla myös ylioppilastutkintolautakunnan puheenjohtajana. Vuosina 2007–2012 matematiikan jaoksen puheenjohtajana toimi professori Juha Kinnunen. Vuoden 2013 alusta alkaen matematiikan jaoksen puheenjohtajana on toiminut professori Matti Vuorinen.

2.3 MATEMATIIKAN YLIOPPILASKOKEEN MÄÄRÄYKSISTÄ

2.3.1 Koetehtävät

Sekä pitkän että lyhyen matematiikan kokeessa on 15 tehtävää, joista kokelas saa valita kymmenen tehtävää oman valintansa mukaan. Ylioppilastutkintolautakunta pyrkii järjestämään koetehtävät likimääräiseen vaikeusjärjestykseen helpoimmasta vaativimpaan. Syventävien kurssien tehtävät ovat yleensä niiden vaikeusasteesta riippumatta tehtäväsarjan lopussa. Sekä perustehtävät että syventävät tehtävät arvostellaan asteikolla 0-6. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2011)

Viimeisin muutos pitkän matematiikan kokeen rakenteeseen tehtiin kevään 2007 tutkinnosta alkaen muuttamalla kaksi kokeen tehtävää vaativammaksi siten, että niiden ratkaiseminen edellyttää tavallisia tehtäviä syvällisempää ja laajempaa käsittelyä. Kokeen tehtävien määrä pysyi siis edelleen 15 tehtävässä. Muutosta perusteltiin ylioppilastutkintolautakunnan (2012) mukaan sillä, että sen avulla pystytään paremmin mittaamaan opiskelijoiden matemaattisia tietoja, taitoja ja kypsyyttä. Nämä kaksi vaativampaa tehtävää merkitään erikseen tehtäväpaperiin ja arvostellaan asteikolla 0-9. Ne sijoitetaan tehtäväsarjan loppuun syventävien tehtävien jälkeen. Kymmenen tehtävän paketti voi sisältää yhden tai kaksi niin sanotuista haastavammista tähtitehtävistä.

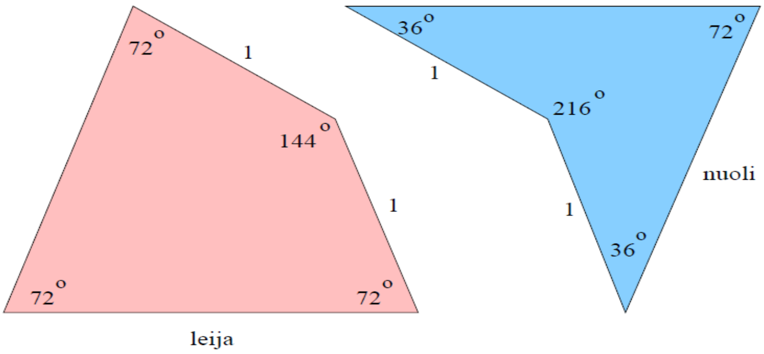
Emeritusprofessori Aatos Lahtisen (2012c) mukaan keväästä 2010 alkaen matematiikan tehtäville on varattu neljä sivua entisen kahden sijaan. Tämä on mahdollistanut sen, että tehtävät on voitu laatia entistä helppolukuisemmiksi. Tehtävistä on myös pystytty laatimaan entistä monipuolisempia kuvien ja taulukoiden avulla. Tämän tehtäväpaperin uudistuksen tavoitteena on ollut se, että kokelaiden osaamista voitaisiin mitata entistä monipuolisemmin. Lisäksi ajatuksena on ollut, että apukuviot takaisivat entistä paremman osaamisen. Tähän jälkimmäiseen tavoitteeseen ei ole varmuudella päästy. (Lahtinen 2012c, 22–23) Ongelmana on, että kokelaat eivät osaa tarpeeksi hyvin käyttää annettuja kuvioita tai taulukoita. Tätä asiaa sivutaan myös tässä tutkimuksessa kappaleen 5.1.2 geometrian kevään 2004 tehtävän 4 tarkastelun yhteydessä. Joka tapauksessa on selvää, että matematiikan kokeet ovat muuttuneet sisällöltään tehtäväpaperiuudistuksen myötä. Esimerkkinä tästä on muun muassa kevään 2011 tehtävä 7, joka sisältää sanallisen tehtävänannon lisäksi sekä kaksi matemaattisen monikulmion kuvaa että tilannetta havainnollistavan kuvan kävelykadun laatoituksesta. Keväällä 2011 pitkän matematiikan kokeen tehtäväsivulla numero kaksi olisi siis yhteensä vain kaksi tehtävää, tehtävät 6 ja 7, ja tämä tehtävä 7 vei suurimman tilan tehtäväsivusta.

KEVÄT 2011, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 7

7. Osa Helsingin Keskuskatua muutettiin kävelykaduksi ja päällystettiin Penrosen laatoilla, jotka keksi englantilainen matemaatikko Roger Penrose 1970-luvulla. Niiden avulla taso voidaan laatoittaa äärettömän monella eri tavalla niin, ettei laatoitus ole jaksollinen. Laattoja on kahta eri muotoa, leija ja nuoli. Molemmat ovat nelikulmioita, joiden kulmien suuruudet ja osa sivujen pituuksista on merkitty kuvioon.

a) Laske muiden sivujen pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Laske laattojen pinta-alojen likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.



Lähde: http://blogisisko.blogspot.com/2009/11/penrosen-laatat-keskuskadulla.html (17.5.2010)

(Kivelä 2012)

2.3.2 Apuvälineet – Laskinohjeuudistus

Suomalaisten päässälaskutaidot ovat heikentyneet ja yhä useammin laskinta käytetään apuvälineenä ihan peruslaskuihin. Näverin (2009, 98) väitöstutkimuksen mukaan päässälaskutaidoista on huolehdittava rakenteiden ymmärtämisen ja vastausten suuruusluokan arvioinnin takia. Keskeistä matematiikassa on rakenteiden ymmärtäminen, eikä drillaus, kuten Näveri (2009) väitöstutkimuksessaan toteaa.

Matematiikan ylioppilaskokeessa saa Ylioppilastutkintolautakunnan määräysten (2011) mukaan käyttää tavanmukaisten kirjoitus- ja piirustusvälineiden lisäksi ylioppilastutkintolautakunnan määräysten mukaisia laskimia ja taulukkokirjoja. Punakynää saa käyttää vain opettaja arvostellessaan vastaukset.

Matematiikan ylioppilaskokeen määräyksiä muutettiin kevään 2012 kokeesta alkaen, ja suurin muutos on laskinohjeessa. Aiemmin hyväksyttiin vain funktiolaskimet ja graafiset laskimet, mutta uuden ohjeen mukaan kokeessa sallitaan myös symboliset laskimet. Symbolinen laskin eroaa perinteisestä, numeerisesta laskimesta siten, että se osaa käsitellä matemaattisia lausekkeita. Ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaoksen puheenjohtajana toimineen professori Juha Kinnusen (2011, 19) mukaan uuden laskinohjeen tarkoituksena oli ajanmukaistaa kokeen apuvälineitä ja poistaa aiemmin esiintyneitä epäselvyyksiä laskimien käytön suhteen. Lukioiden välillä oli nimittäin ollut epäselvyyttä siinä, mitä laskimia ylioppilaskokeessa saa käyttää ja mitä ei.

Symbolisen laskimen salliminen on herättänyt paljon keskustelua siitä, että mennäänkö kehityksessä oikeaan suuntaan. Matemaattisten Aineiden Opettajien Liiton (MAOL) puheenjohtaja Leena Mannila (2011a) on todennut Dimensio-lehden pääkirjoituksessaan, että nämä muutokset saattavat olla uhkana matematiikan ymmärtävälle oppimiselle. Professori Juha Kinnunen ei kieltänyt sitä, että uuden laskinohjeen käyttöönotto olisi täysin ongelmatonta. Hän toteaa, että kokeesta on ehkä mahdollista päästä läpi pelkällä laskimen käytöllä, mutta jos haluaa paremman arvosanan kuin A:n, niin se ei pelkällä laskimen käyttötaidoilla tule. (Suomen Kuvalehden verkkolehti 17.3.2012)

Apuvälineiden käyttö on siis monipuolistunut matematiikan kokeessa keväästä 2012 alkaen, mutta siltikään koetehtävien luonne ei tule muuttumaan ainakaan kolmeen vuoteen. Perusteena tähän on professori Kinnusen (2011, 19) mukaan se, että tällä hetkellä lukioissa opiskelevilla ei ole ollut aiemmin mahdollisuutta käyttää uuden ohjeen mukaisia laskimia. Uudistuksilla ja tietoteknisen kehityksen seuraamisella on kuitenkin kääntöpuolensa. Suomen Kuvalehden (verkkolehti 17.3.2012) väite siitä, että uudistuksen jälkeen jaossa on aikaisempaa enemmän pisteitä, jotka voi saada pelkästään laskinta käsittelemällä, pitää nimittäin paikkansa.

Esimerkki Casion symbolisella laskimella ClassPad 330 Plus lasketusta kevään 2012 lyhyen matematiikan ylioppilastehtävästä:

TEHTÄVÄ 5. K-12

Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x+3)(x^2-4)$.

a) *Laske funktion f(x) nollakohdat.*
b) *Määritä derivaatta f '(x).*
c) *Laske derivaatan nollakohdat.* (Kivelä 2012)

Laskimella saadaan ratkaistua

Define $f(x) = (x+3)(x^2-4)$	
	done
solve(f(x)=0)	
	{x=-3, x=-2, x=2}
$\frac{d}{dx}(f(x))$	
	$3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4$
solve($\frac{d}{dx}f(x) = 0$)	
	$\{x = \frac{-\sqrt{21}}{3} - 1, x = \frac{\sqrt{21}}{3} - 1\}$

Se, mihin tämä uudistus ja joidenkin kokelaiden läpipääsy pelkällä laskimen käyttötaidoilla johtaa, nähdään vasta tulevaisuudessa. Huolestuttavaa on se, että aiemmin tässä tutkimuksessa mainittu

Mannilan väite matematiikan ymmärtävän oppimisen heikentymisestä voi olla hyvin paikkansa pitävä tulevaisuudessa.

Laskimen tulisi toimia opiskelijan apuvälineenä esimerkiksi tulosten tarkistamiseen ja ratkaisun tukena, eikä ensisijaisena tai äärimmilleen viedyssä tilanteessa ainoana ratkaisumenetelmänä. Uudistuksen myötä opettajilla on merkittävä rooli saada oppilaat ymmärtämään, että laskin on vain apuväline. Asian toistaminen ja kertominen oppilaille suullisesti eivät pelkästään riitä, vaan oppilaita tulisi osata neuvoa, miten apuvälineitä käytetään ja miten vastaus kirjataan niiden avulla paperille. Tämä on ajankohtainen asia, johon pitäisi kiinnittää laajemmin huomiota myös matemaattisten aineiden opettajankoulutuksessa. Jokaisella valmistuvalla matematiikan opettajalla tulisi olla valmiudet ohjeistaa opiskelijoita apuvälineiden käytössä. Sitäkin vielä merkittävämpää olisi, että opettajilla olisi käytössään tehokkaat keinot siihen, miten opetetaan tehtävän välivaiheiden ja vastauksen kirjaaminen ylös, kun laskinta käytetään apuvälineenä.

Keväällä 2013 laskinohjetta tarkennettiin. Ylioppilastutkintolautakunta (2013a) toteaa:

> Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tälläisiä ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Teknologian kehittyessä on ymmärrettävää, että lukio ja näin ollen myös ylioppilaskirjoitukset muuttuvat tämän kehityksen myötä koko ajan. Tulevaisuudessa on mahdollista se, että matematiikan ylioppilaskirjoituksissa käytetään tietokoneita. Tähän kehitykseen on otettu huolestuneena kantaa Matemaattisen Aineiden Opettajien Liiton MAOL ry:n lehdistötiedotteessa jo marraskuussa 2010 (MAOL Ry, 2010). Tiedotteessa pohditaan sitä, että onko opiskelijoita valmisteltu muutokseen. Muutokseen täytyy päästä kiinni jo opettajankoulutuslaitoksessa, koska tällä hetkellä apuvälineiden käytön ohjeistus jää huolestuttavan usein opettajaksi opiskelevan oman aktiivisuuden vastuulle.

Keväällä 2013 Ylioppilastutkintolautakunta julkaisi tiedotteen projektista, joka tulee lisäämään huomattavasti tieto- ja viestintätekniikan hyödyntämistä ylioppilastutkinnossa ja kokeen suorittamisessa. Projektin tavoitteena on luoda tutkinto, joka suoritetaan kouluissa tietotekniikkaa hyödyntäen. Projektin toteuttaminen tullaan tekemään vaiheittain ja tavoitteena on, että vuodesta 2016 alkaen osa ylioppilaskokeista suoritetaan tieto- ja viestintätekniikkaa käyttäen. (Ylioppilastutkintolautakunta 2013b) Projekti on nimetty Digabi-projektiksi. Projektin Internet-sivuilla julkaistun siirtymäaikataulun mukaan matematiikan pitkän ja lyhyen matematiikan kokeet ovat projektin viimeisessä vaiheessa siirtymässä sähköiseen muotoon kevään 2019 tutkinnosta lähtien. (Digabi 2013) Aika näyttää, tulevatko nämä muutokset todella tapahtumaan ja, että pystytäänkö sähköinen ylioppilaskoe toteuttamaan siten, että kaikki kokeiden suorittajat ovat tasavertaisessa asemassa. Matematiikka on yksi niistä oppiaineista, jonka ylioppilaskirjoitukset tulevat muuttumaan huomattavasti, jos projekti todella toteutuu.

2.3.3 Laskinohjeuudistus esillä mediassa keväällä 2013

Laskinohjeuudistus on saanut aikaan aktiivista keskustelua mediassa matematiikan ylioppilaskokeen apuvälineistä ja kokeen rakenteesta. Keskisuomalaisessa julkaistiin 15.4.2013 Heikki Kärjen uutinen siitä, kuinka Lohjan yhteiskoulun lukion matemaattisten aineiden opettajat tekivät tutkielman kevään 2013 ylioppilastehtävien ratkaisemisesta symbolisella laskimella. Tutkimuksen mukaan peräti yhdeksän pitkän matematiikan tehtävää pystyi ratkaisemaan symbolisella laskimella ilman omaa matemaattista ajattelua. Käytännössä tämän tarkoittaa sitä, että kevään 2013 kokelailla oli mahdollisuus ansaita 66 tarjolla olleesta pisteestä peräti 57 pistettä pelkällä laskimen käyttötaidoilla. Huolestuttavaa on se, että laskin tarjosi suurimpaan osaan tehtävistä suoraan oikean vastauksen. Tutkimuksessa mukana olleen lohjalaisopettajan, FL, Jukka Lehtosen mukaan täysiin pisteisiin vaadittavien välivaiheiden kirjaamiseen ei tarvita enää matematiikkaa. Itse asiassa on siis käynyt niin, että ylioppilastutkintolautakunta on sallinut kokelaiden käytettäväksi lunttausjärjestelmäksi paljastuneet symboliset laskimet. (Kärki 2013)

Ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaoston edustajat totesivat Keskisuomalaisen mielipidepalstalla 25.4.2013 (Ylioppilastutkinto matemaattisen ajattelun kehittäjänä), että lohjalaisten opettajien tekemä tutkimus kevään 2013 pitkän matematiikan kokeen ratkaisemisesta symbolisella laskimella oli virheellinen. Matematiikan jaoksen jäsenten mukaan kevään 2013 kokeesta pystyi saamaan maksimissaan 48 pistettä symbolisen laskimen avulla. Oli pistemäärä mikä tahansa, eikö nyt keskustella ihan vääristä asioista, kun kyseessä pitäisi olla koe, jonka tulisi mitata lukiosta valmistuvien opiskelijoiden matemaattisen ajattelun tasoa tasavertaisesti?

Solmun päätoimittaja Markku Halmetoja toteaa Keskisuomalaisen (28.2.2013) mielipidekirjoituksessaan, että miksi matematiikan kokeesta pitäisi saada yleensäkään pisteitä laskinta näppäilemällä. Halmetoja esittää myös kysymyksen, eikö matematiikan tulisi olla ajattelua puhtaimmillaan? Matematiikan jaoksen jäsenten Hästö, Merenti–Välimäki, Oikkonen ja Vuorinen (2013, Keskisuomalainen) mukaan koetta tullaan kehittämään yhteistyössä opettajien ja opiskelijoiden kanssa suuntaan, jossa erityisesti ei-rutiinitaitoja ja käsitteellistä ymmärrystä painotettaisiin. Ylioppilastutkintolautakunta tavoittelee siis juuri sitä, mitä kentältä toivotaankin, mutta mikä kiire uudistuksilla on? Keskustelu herättää paljon uusia kysymyksiä. Onko koetta alun perin kehitetty lainkaan yhteistyössä opettajien ja lukiolaisten kanssa? Vai tuleeko tämä yhteistyö käyttöön vasta nyt, kun huomataan, että alkuperäinen suunnitelma ei toimikaan käytännössä? Kentältä tulevan viestin mukaan lukioita, lukion opettajia ja erityisesti ylioppilaskokelaita tulisi valmistella koetta koskeviin uudistuksiin paremmin ennen uudistuksen käyttöönottoa. Esimerkiksi Halmetoja (2013) on todennut mielipidekirjoituksessaan, että laskinuudistus tuli useimmille lukion opettajille täydellisenä yllätyksenä.

Symbolisten laskinten salliminen asettaa ylioppilaskokelaat eriarvoiseen asemaan. Ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaoksen puheenjohtaja, professori Matti Vuorinen myöntääkin kritisoinnin symbolisia laskimia kohtaan osittain oikeutetuksi. Vuorisen mukaan eriarvoisuutta pyritään poistamaan riittävän suurella valinnanvapaudella. Hän korostaa myös, että laskimen käyttö kuuluu olennaisesti matemaattiseen osaamiseen, vaikka matematiikan luonne onkin enemmän päättelyä kuin laitteiden käyttöä. (Kärki 2013)

Ylioppilastutkintolautakunnalla on kunnianhimoinen tavoite kehittää tehtäviä, joita ei voi ratkaista laitteiden kapasiteetilla. Onko tämä vielä tänä päivänä liian kunnianhimoinen tavoite? Se jää nähtäväksi. Kiistatta ollaan kuitenkin tultu tilanteeseen, jossa ylioppilaskoe testaa nykyaikana yhä useammin sitä, kuinka hyvin kokelas on pysynyt teknologian kehityksessä mukana sen sijaan, että se testaisi vain kokelaan matemaattisen ajattelun tasoa. Aamulehdessä (30.4.2013) Maolin puheenjohtaja Leena Mannila toteaa, että teknologia on olemassa, eikä sitä voi kieltää, mutta opetuksessa pitää haastaa oppilas ajattelemaan. Apuvälineitä ei siis tarvitsisi kieltää kokonaan, vaan esimerkiksi Tanskassa ja Norjassa on käytössä malli, joka toimii siten, että matematiikan koe on kaksiosainen. Ensimmäisessä osassa saa käyttää apuvälineinä ainoastaan kynää ja paperia. Toisessa osassa apuvälineeksi sallitaan lisäksi laskin. (Pulliainen 2013)

Ylioppilastutkintolautakunta perustelee muutoksia sillä, että ylioppilaskirjoituksissa ei ole haluttu jämähtää helmitaulujen aikakaudelle. (Kärki 2013) Näin ei varmasti pidäkään, mutta kun jotakin muutetaan, tulisi aina huomioida se, että muutosta pitäisi tapahtua silloin myös muilla tahoilla. Tällä hetkellä ylioppilastutkintoa pyritään kehittämään teknologisempaan suuntaan, mutta samaan aikaan esimerkiksi yliopistossa sallitaan vain peruslaskimen käyttö matemaattisen ymmärtämisen takaamiseksi. Voidaanko siis tulevaisuudessa olla varmoja, että kokelas, joka on saavuttanut matematiikasta arvosanan L, hallitsee matematiikan ilman symbolista laskinta ja pärjää jatko-opinnoissaan? Eikö kunnianhimoinen tavoite ole ollut, että ylioppilaskokeita voitaisiin entistä useammin hyödyntää myös jatko-opintojen valintakokeiden tilalla?

2.3.4 Arvostelu

”*Se, mitä kokeessa vaaditaan, on, että ajattelun tuloksena syntyy oikea, riittävästi perusteltu ratkaisu, jossa kaikki oleelliset kohdat on kirjoitettu näkyviin.” (Lahtinen 2011, pitkä oppimäärä, esipuhe)*

Hyvässä matematiikan ylioppilaskirjoituksen tehtävän suorituksessa tulee näkyä, miten kokelas on päätynyt vastaukseen. Ratkaisussa tulee olla tarvittavat laskut tai muut perustelut ja lopputulos. Myös kuviot ja funktioiden kuvaajat, koordinaatistot ja diagrammit on esitettävä selkeästi. (Ylioppilastutkintolautakunta 2011, Matematiikan kokeen määräykset)

Ylioppilastutkintolautakunnan matematiikan jaoksen puheenjohtajana toimineen professori Juha Kinnusen (2011, 20) mukaan kokeen arvostelua on viime aikoina kehitetty niin, että aikaisempaan enemmän pyritään ottamaan huomioon suorituksen kokonaisuus. Pienet laskuvirheet eivät merkittävästi alenna pistemäärää, jos virheestä ei seuraa mahdotonta tai ilmeisen väärää tulosta. Jos tehtävän tarkoituksena on testata kokelaan kykyä tehdä virheettömiä laskutoimituksia, pistemäärä luonnollisesti alenee. (Ylioppilastutkintolautakunta 2011, Matematiikan kokeen määräykset)

Jokaisesta tehtävästä annetaan siis kokonaislukupistemäärä 0-6. Poikkeuksena ovat pitkän matematiikan tähtitehtävät, joista annetaan 0-9 pistettä. Lyhyen matematiikan kokeen maksimipistemäärä on 60 pistettä. Pitkän matematiikan kokeen maksimipistemäärä oli ennen kevättä 2007 myös 60 pistettä, mutta kokeen uudistamisen jälkeen keväästä 2007 alkaen maksimipistemäärä on ollut 66 pistettä. Lautakunta päättää kullakin tutkintokerralla arvosanarajat suoritusten pistejakauman perusteella. Pyrkimyksenä on, että kokeen tulostaso säilyisi tutkintokerrasta toiseen samana ja eri vuosien kokeiden arvosanat olisivat keskenään vertailukelpoisia. (Lahtinen 2011, pitkä oppimäärä, 9) Arvosteluun tullaan tulevaisuudessa tekemään muutoksia. Opettaja-lehden päätoimittaja Hannu Laaksola (2013a) on maininnut osana huhtikuun lehden pääkirjoitustaan, että arvioinnissa tultaisiin luopumaan Gaussin käyrän käytöstä. Gaussin käyrää eli normaalijakaumaa käytettäessä arvosanat on suhteutettu toisten kokelaiden saamiin arvosanoihin. Tämä on vaikeuttanut kokeiden vertailua sekä eri aineiden että eri kirjoituskertojen välillä, kuten Laaksola (2012) on todennut jo kevään 2012 Opettaja-lehden verkkolehden artikkelissaan.

Matematiikan ylioppilaskokeen arvosanarajat saattavat siis vaihdella. Lyhyen ja pitkän matematiikan kokeissa käytetään kummassakin omia arvosanarajoja, eikä arvosteluun vaikuta se, että onko koe ollut kokelaalle pakollinen vai ylimääräinen. Aluksi käytössä olivat arvosanat (alimmasta ylimpään) improbatur (I), approbatur (A), cum laude approbatur (C) ja laudatur (L). Lubenter approbatur (B) ja magna cum laude approbatur (M) otettiin käyttöön vuonna 1970. Uusin arvosana uudistus, eximia cum laude approbatur (E), otettiin käyttöön vuonna 1996. (Ylioppilastutkintolautakunta 2011, Uudistuva ylioppilastutkinto)

Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2011, pitkä oppimäärä, 5) toteaa, että etenkin korkeita arvosanoja tavoittelevien kannattaa vakavasti harkita tähtitehtävien suorittamista pitkän matematiikan kokeessa. Kymmenen kuuden pisteen tehtävän täydellistä ratkaisua ei välttämättä takaa kokelaalle laudatur arvosanaa. Laudatur- raja voi nimittäin aivan hyvin nousta yli 60 pisteen. Ylioppilastutkintolautakunta on ainakin toistaiseksi antanut laudaturin parhaalle viidelle prosentille kokeen suorittajista. Jos tämän joukon alin pistemäärä on esimerkiksi 61, niin laudaturin rajaksi tulee 61. Toistaiseksi korkein laudaturin raja on ollut 59 pistettä. (Lahtinen 2012a)

3. TUTKIMUSONGELMAT

3.1 TEHTÄVIEN JAKAUTUMINEN

1. Mitä aihealueita matematiikan kevään ylioppilaskokeissa testataan eniten/vähiten?
2. Painotetaanko joitakin aihealueita selkeästi enemmän?
3. Millaista muutosta ylioppilastehtävissä on havaittavissa tutkimusaikavälillä matematiikan aihealueiden painotuksessa?

3.2 TULOSTEN ANALYSOINTI

1. Miten kokelaat hallitsevat seuraavien aihealueiden tehtävät: Todennäköisyys ja tilastot, geometria, integraalilaskenta, prosenttilaskut ja ääriarvotehtävät?
2. Onko sillä merkitystä tehtäväkohtaisiin tuloksiin, jos pitkän matematiikan koe on suoritettu pakollisena tai ylimääräisenä kokeena?

4. KEVÄÄN PITKÄN MATEMATIIKAN YLIOPPILASKOKEIDEN TEHTÄVIEN JAKAANTUMINEN AIHEALUEITTAIN

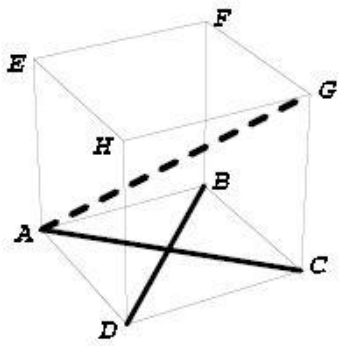
Tässä tutkimuksessa on jaoteltu pitkän matematiikan kevään tehtävät aihepiireittäin aikavälillä kevät 2004 – kevät 2012. Perustana aikarajaukselle on se, että nykyiset nuorten lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet ovat vuodelta 2003. Uusien opetussuunnitelman perusteiden mukaiset paikalliset opetussuunnitelmat otettiin käyttöön asteittain ja näin ollen viimeistään 1.8.2005 lukion aloittavilla opiskelijoilla. Tutkimuksessa tullaan tarkastelemaan ylioppilaskokeen tehtäväkohtaisten tulosten eroja ja yhtäläisyyksiä suhteessa aihealuejakoon. Kevään ylioppilaskokeiden tulosten tehtäväkohtaiset taulukot (liitteet 2A-10C) ovat emeritusprofessori Aatos Lahtisen kokoamia ja niitä käytetään tässä tutkielmassa Lahtisen luvalla. Syksyn ylioppilaskirjoitusten osalta vastaavaa taulukointia ei ole tehty, joten sen vuoksi tämä tutkielma keskittyy kevään tulosten analysoimiseen.

Tehtävien jaottelussa on pyritty noudattamaan pitkän matematiikan opetussuunnitelman perusteiden (2003) mukaista kurssijakoa. Pitkän matematiikan osalta jaotteluun on lisätty omaksi kokonaisuudekseen prosenttilasku, vaikka se opetussuunnitelman perusteiden (2003) mukaan kuuluu Funktiot ja yhtälöt - kurssin asiasisältöihin. Tämä lisäys on tehty siksi, että prosenttilaskutehtävät muodostavat ylioppilastehtävissä selvästi yhden keskeisen kokonaisuuden, jonka aihealueiden hallintaa on tärkeää tutkia jäljempänä tässä tutkimuksessa. Lisäksi pitkän matematiikan kurssin Trigonometriset funktiot ja lukujonot aiheet on jaettu kahteen omaan osa-alueeseen; 1. trigonometriset funktiot ja 2. lukujonot ja summat. Lukujonot ja summat aihealueeseen on liitetty tässä tutkimuksessa myös lukujonon sarjojen ja niiden summien tutkiminen, vaikka se lukion opetussuunnitelman perusteiden (2003) mukaan kuuluu Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin – aihealueisiin. Tässä tutkimuksessa yhdeksi aihealueeksi on siis nimetty Lukujonot, sarjat ja summat.

Useat ylioppilastehtävät ovat laajoja ja monia matemaattisia taitoja testaavia. Sen vuoksi taulukointia tarkastellessa on hyvä ottaa huomioon, että osa tehtävistä voi vaatia oikeaan ratkaisuun pääsemiseksi usean aihealueen hallitsemista. Lisäksi tulee ottaa huomioon myös matematiikan hieno ominaisuus siitä, että samaan ratkaisuun voidaan päästä erilaisilla laskutavoilla. Tästä on esimerkkinä kevään 2007 pitkän matematiikan tehtävä 9. Tehtävä ratkeaa helpoimmin vektoreilla. Se voidaan kuitenkin ratkaista myös vektoreitta geometriaa apuna käyttäen.

KEVÄT 2007, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 9.

Laske kuution avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän AC suuntien välinen kulma 0,1 asteen tarkkuudella. Laske edelleen avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän BD suuntien välinen kulma.

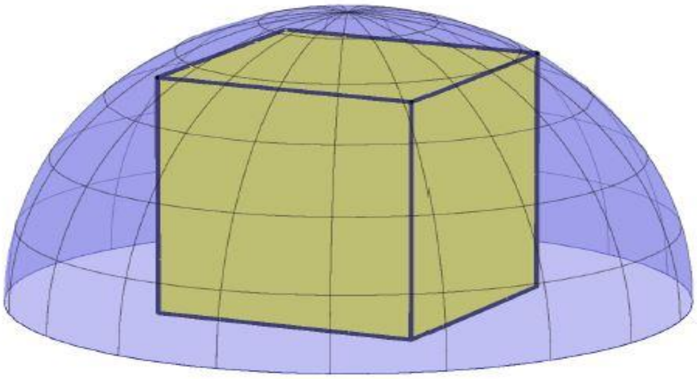


(Kivelä 2012)

Samassa yksittäisessä tehtävässä voi siis olla kahden tai jopa useamman eri aihealueen ratkaisumahdollisuus. Tässä tutkimuksessa pitkän matematiikan tehtäväkohtainen jaottelu painokertoimineen on liitteissä 1A-1I. Jaottelu perustuu siihen, että jos koko tehtävä on samaa aihealuetta, niin painokerroin on 1. Jos tehtävän ratkaisuun tarvitaan selvästi kahden aihealueen hallitsemista, molemmat aihealueet lasketaan mukaan painokertoimella $\frac{1}{2}$. Muutamien tehtävien jaottelussa on myös käytetty painokertoimia $\frac{3}{4}$ ja $\frac{1}{4}$, sillä näissä tehtävissä toisen aihealueen hallitseminen on ratkaisun kannalta selvästi merkittävämpi. Täydellinen ratkaisu ei kuitenkaan onnistu ilman molempien aihealueiden hallintaa. Tästä on esimerkkinä pitkän matematiikan kevään 2010 tehtävä 4, jossa on testattu sekä geometriaa (painokerroin $\frac{3}{4}$) että prosenttilaskua (painokerroin $\frac{1}{4}$).

KEVÄT 2010, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 4.

Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?



(Kivelä 2012)

Jos samaan vastaukseen voidaan päätyä kahdella täysin eri aihepiiriin kuuluvalla tavalla, käytetään painokerrointa $\frac{1}{2}$ kumpaankin aihealueeseen. Tästä on esimerkkinä aiemmin tässä tutkimuksessa esillä ollut kevään 2007 tehtävä 9, jossa sekä geometria että vektorit ovat painokertoimilla $\frac{1}{2}$. Jos aihealue esiintyy esimerkiksi yhtenä kolmesta a), b) tai c) kohdasta, niin se lasketaan mukaan painokertoimella $\frac{1}{3}$. Keväällä 2012 tehtävä 2 koostui a) - f) kohdista. Kohdissa a) ja b) testattiin Funktiot ja yhtälöt – aihealueen taitoja, joten painokerroin tämän aihealueen suhteen tehtävässä 2 on $\frac{2}{6}$. Kohdat c) ja f) sisälsivät juuri - ja logaritmifunktioita, kohdassa d) testattiin trigonometrisen lausekkeen sieventämistä ja kohdassa e) määrätyn integraalin laskemista. Juuri - ja logaritmifunktiot aihealue on tässä tehtävässä siis painokertoimella $\frac{2}{6}$, Trigonometriset funktiot ja Integraalilaskenta -aihealueet painokertoimilla $\frac{1}{6}$.

KEVÄT 2012, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 2.

a) Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - (\frac{6}{3})^2$ *arvo.*

b)Laske lausekkeen $\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6$ *arvo.*

c) Sievennä lauseke $\ln\frac{x}{2} + \ln 2.$

d) Sievennä lauseke $sin^2x + cos^2x(x + 2\pi).$

e) Laske integraali $\int_0^1 (x+1)dx.$

f) Laske funktion $(x) = 4e^{2x}$ *derivaatta kohdassa* $x = 0.$ (Kivelä 2012)

Matematiikka on oppiaine, jossa uusi opetettava asia rakentuu aikaisemmin opitun asian pohjalle (Mannila 2011b). Lukion syventävien kurssien pohjatietoina täytyy luonnollisesti olla runsaasti peruskurssien tietoja. Tässä tutkimuksessa syventävien kurssien jaottelu aihealueisiin on perustunut opetussuunnitelman perusteiden (2003) kurssisisältöihin ja tämän vuoksi esimerkiksi kevään 2005 tehtävä 15 on luokiteltu pelkästään Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä – alueeseen painokertoimella 1. Tehtävä vaatii kyllä selkeästi esimerkiksi Derivaatta-, Trigonometria- ja Lukujonot – aihealueiden hallintaa ja se olisi voitu siis luokitella myös näihin aihealueisiin kuuluvaksi. Opetussuunnitelman perusteissa (2003) Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä – kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluu kuitenkin selvästi tehtävässä tarvittavan Newtonin menetelmän hallitseminen, johon tarvitaan pohjatietona kyseisiä peruskurssien aihealueita.

<u>KEVÄT 2005, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 15.</u>

Määritä funktion $f(x) = x \sin x$ pienin positiivinen ääriarvokohta ja vastaava ääriarvo ratkaisemalla derivaatan nollakohta Newtonin menetelmällä. Anna vastaukset viiden desimaalin tarkkuudella. Hahmottele funktion kuvaaja välillä $[0, 2\pi]$.

(Lahtinen 2011, 20)

Jaottelun selkeyttämiseksi syventävien kurssien tehtävät ovat siis pääpiireittäin jaettu yhteen tiettyyn aihealueeseen painokertoimella 1, kuten yllä oleva esimerkki tehtävä osoittaa. Keväästä 2007 alkaen pitkän matematiikan kokeessa on ollut joka vuosi kaksi tähtitehtävää. Tähtitehtävien osalta tämän tutkimuksen jaottelussa on useissa tapauksissa luokiteltu tehtävä useisiin aihealueisiin, koska tehtävä on ollut niin laaja, että siinä on selvästi testattu kokelaalta useita eri asioita. Esimerkki kevään 2008 tähtitehtävän 14 jaottelusta, jossa koko tehtävän ratkaisemiseksi täytyy hallita asiasisältöjä analyyttisen geometrian, trigonometrian, funktioiden ja yhtälöiden, integraalilaskennan ja derivaatan aihealueista. Jokainen näistä aihealueista on luokiteltu tässä tehtävässä mukaan painokertoimella $\frac{1}{5}$.

<u>KEVÄT 2008, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 14. (Tähtitehtävä)</u>

Olkoon $f(x) = \cos x - \sin x$.

a) *Laske funktion f nollakohdat välillä $[0,2\pi]$. (2p)*

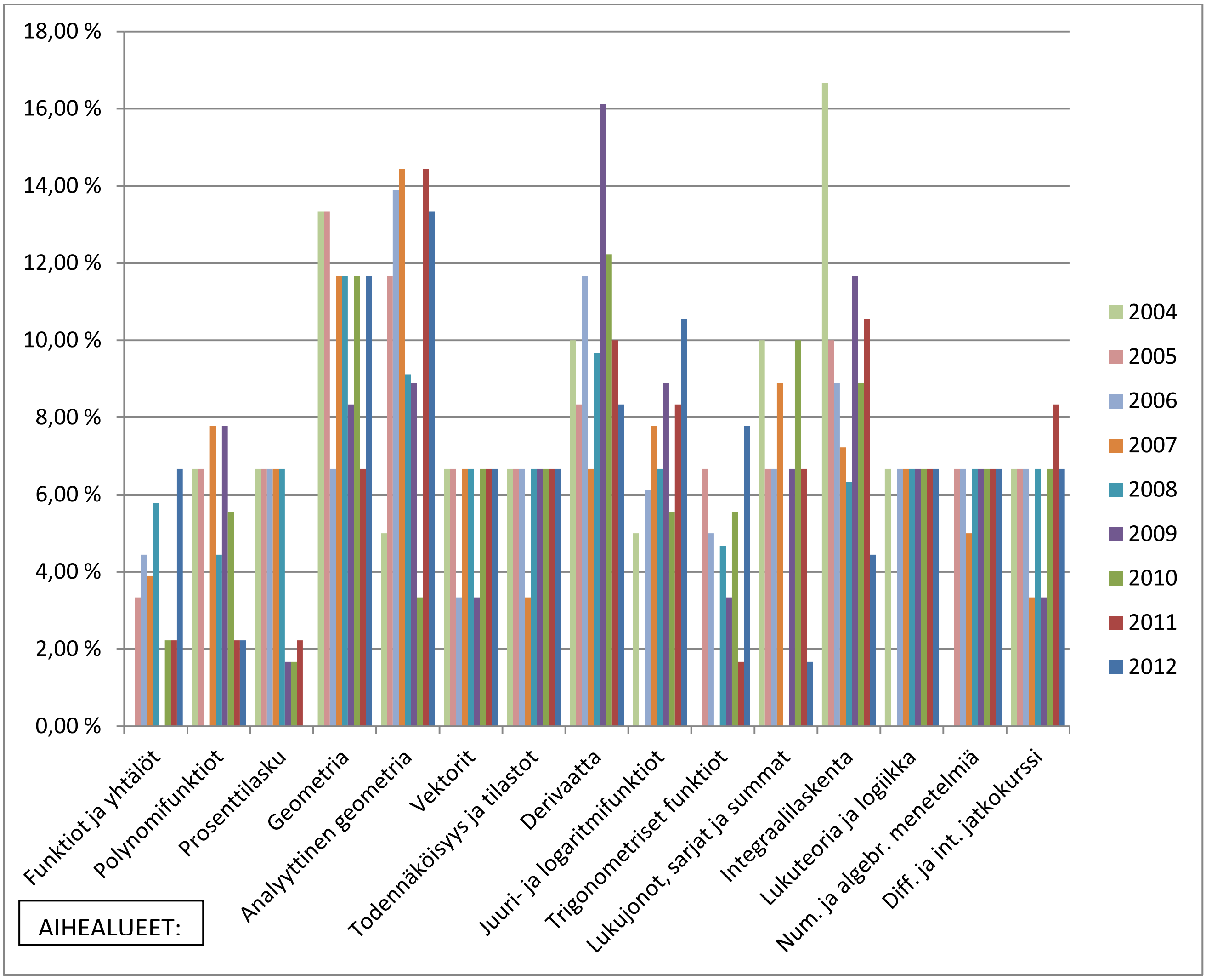
b) *Millä muuttujan arvoilla funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä* $[0,2\pi]$*? (2p.)*

c) *Laske* $\int_0^{2\pi} f(x)dx$*. (2p.)*

d) *Laske* $\int_0^{2\pi} |f(x)|dx$*. (2p.)* *(Lahtinen 2011, 213-215)*

4.1 PITKÄN MATEMATIIKAN AIHEALUEET

Kuviossa 1 on kuvattu kevään pitkän matematiikan tehtävien jakautumista aihealueittain vuosina 2004–2012. Tehtäviä on jokaisena vuonna ollut siis 15 kappaletta. Jos aihealuetta on esiintynyt kokeessa yhden tehtävän arvoisesti, vastaa se pylvään arvoa 6,67 %.



KUVIO 1: Pitkän matematiikan tehtävien jakaantuminen aihealueittain

Seuraavaksi tässä tutkimuksessa esitellään matematiikan aihealuekohtaisia havaintoja. Jäljempänä tässä tutkimuksessa kappaleessa 5 tarkastellaan tarkemmin viittä aihealuetta. Nämä aihealueet ovat 1. Todennäköisyys ja tilastot, 2. Geometria, 3. Integraalilaskenta, 4. Prosenttilasku ja 5. Ääriarvotehtävät. Tarkemman tarkastelun yhteydessä kappaleessa 5 esitellään myös esimerkkitehtäviä näistä aihealueista. Kaikkien muiden aihealueiden kohdalla esimerkkitehtävät löytyvät alla olevan aihealuekohtaisen jaottelun yhteydestä.

Funktiot ja yhtälöt:

Kuviosta 1 nähdään, että Funktiot ja yhtälöt -kurssin asioita on testattu kokelailta huomattavan vähän. Tulee kuitenkin ottaa huomioon se, että myös prosenttilasku kuuluu Funktiot ja yhtälöt – kurssin sisältöön. Lisäksi tämän kurssin tietoja tarvitaan pohjatietona useisiin muihin matematiikan aihealueisiin. Kevään 2009 kokeessa ei ollut yhtään selvää Funktiot ja yhtälöt – aihealueen tehtävää. Aihealueen asiat tulevat kuitenkin testattua, koska näitä taitoja tarvitaan myös vaativampien tehtävien ratkaisemiseen. Funktiot ja yhtälöt – aihealueen keskeisempiä asiasisältöjä ovat potenssifunktio ja potenssiyhtälön ratkaiseminen, juuret ja murtopotenssi ja eksponenttifunktio. Myös verrannollisuus kuuluu tähän aihealueeseen ja sitä tarvitaan apukeinona erityisesti geometrian tehtävien ratkaisemisessa. Esimerkkinä tämän aihealueen tehtävästä on kevään 2011 tehtävä 1a.

KEVÄT 2011, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 1 a.

Ratkaise yhtälö $\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}$. (Lahtinen 2011, 288)

Polynomifunktiot:

Polynomifunktiot – aihealueen tehtävät sijoittuvat usein kokeen alkupäähän kuten Funktiot ja yhtälöt – aihealueen tehtävät. Polynomifunktiotehtävät ovat aina tehtävien osakohtia eli tutkimusvälillä ei ollut yhtään kokonaista polynomifunktiotehtävää. Yksi keskeisimmistä sisällöistä Polynomifunktiot – aihealueeseen liittyen on epäyhtälön ratkaiseminen. Myös Polynomifunktiot – aihealueet ovat perustana monille muille aihealueille. Huomionarvoista on kuitenkin se, että Funktiot ja yhtälöt – tehtäviä testataan selkeästi enemmän, sillä kuten aiemmin tässä tutkimuksessa on todettu, prosenttilaskutehtävät kuuluvat Funktiot ja yhtälöt – aihealueeseen opetussuunnitelman perusteissa. Esimerkkinä Polynomifunktiot – aihealuetta testaavasta tehtävästä on kevään 2011 epäyhtälön ratkaisemiseen liittyvä tehtävä 1b.

KEVÄT 2011, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 1b.

Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2 \leq x$. (Lahtinen 2011, 288)

Prosenttilasku:

Prosenttilaskutehtävä sijoittuu yleisesti tehtäväpaikalle 3 tai 4. Ainoa poikkeus on ollut keväällä 2011, kun prosenttilasku on ollut tehtävän 2 a-kohtana. Vuosina 2004–2008 on joka kevät ollut kokonainen tehtävä, jossa on testattu prosenttilaskutaitojen hallintaa. Huomattavaa on se, että tutkimusaikavälillä on tapahtunut selkeä muutos prosenttilaskutehtävien laatimisen suhteen. Vuodesta 2009 lähtien prosenttilaskun sisältävässä tehtävässä on testattu myös jotakin toista aihealuetta tai prosenttilasku on ollut jonkin tehtävän osakohtana (esimerkiksi a- tai b- kohtana). Vuosina 2009 ja 2010 prosenttilasku on ollut osana geometrian tehtävää. Kevään 2012 koe on prosenttilaskun suhteen poikkeuksellinen, koska kokeessa ei esiinny yhtään selkeää prosenttilaskutehtävää. Ainoastaan Todennäköisyys ja tilastot - aihealueen tehtävässä numero 6 tulee ymmärtää prosentin käsite täydelliseen ratkaisun määrittämiseksi. On siis havaittavissa, että tutkimusaikavälillä keväästä 2009 lähtien prosenttilaskun painottaminen ylioppilastehtävissä on vähentynyt. Prosenttilaskun hallintaa tarkastellaan tässä tutkimuksessa tarkemmin kappaleessa 5.1.4.

Geometria:

Kuviosta 1 nähdään, että geometriaa testataan usein jopa kahden tehtävän arvoisesti ja aina vähintään yhden tehtävän arvoisesti. Geometria on siis usein yksi niistä aihealueista, jonka hallintaa testataan runsaasti kevään pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa. Geometrian tehtävät ovat usein tehtäväpaikoilla 6-9. Myös tehtäväpaikalla 3 on esiintynyt keväällä 2006, 2009 ja 2010 geometrian perustehtäviä, joissa on testattu kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen tai tilavuuksien laskemisen hallintaa. Keväällä 2007 ja 2008 geometria on ollut osana tähtitehtävää ja keväällä 2009 toinen tähtitehtävistä käsitteli kokonaan geometrian aihealuetta. Geometrian hallintaa tarkastellaan tässä tutkimuksessa tarkemmin kappaleessa 5.1.2.

Analyyttinen geometria:

Analyyttisen geometrian tehtävämäärät vaihtelevat suuresti tutkimusvälillä. Yhteensä analyyttistä geometriaa on testattu kokonaisena tai jonkin tehtävän osana 24 eri tehtävässä. Keväällä 2012, 2011, 2007, 2006 ja 2005 analyyttisen geometrian tehtäviä on yli tai ainakin melkein kahden tehtävän arvoisesti. Toisaalta keväällä 2004 ja 2010 analyyttisen geometrian tehtäviä on huomattavasti alle yhden tehtävän arvoisesti. Neljänä keväänä (2007, 2008, 2011 ja 2012) analyyttistä geometriaa on esiintynyt pieninä osakohtina myös tähtitehtävissä. Tyypillisimpiä analyyttisen geometrian perustehtäviä ovat paraabeleihin ja ympyrän yhtälön määrittämiseen liittyvät tehtävät. Suoria ratkaise yhtälöryhmä – tehtäviä esiintyy tutkimusaikavälillä ainoastaan kevään 2005 tehtävässä 2a. Yhtälöryhmän ratkaisemisen taitoja tarvitaan kuitenkin useissa analyyttisen geometrian aihealueeseen luokitelluissa tehtävissä. Näin on esimerkiksi kevään 2009 tehtävässä 8, jossa sijoittamalla annetut pisteiden koordinaatit tason yhtälöön saadaan muodostettua yhtälöryhmä, jonka ratkaisu on tehtävän vastaus.

KEVÄT 2009, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 8

Taso T kulkee pisteiden A=(3,0,0), B=(0,4,0) ja C=(1,2,3) kautta. Muodosta tason yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$. (Lahtinen 2011, 236)

Tyypillinen esimerkki ympyrän yhtälön määrittämisestä on kevään 2006 tehtävä 7.

KEVÄT 2006, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 7

Etsi yhtälö ympyrälle, jonka keskipiste on suoralla $y = \frac{1}{2}x$ *ja joka sivuaa x-akselia ja suoraa* $4x + 3y - 24 = 0$. *Määritä kaikki tehtävän ratkaisut.* (Lahtinen 2011, 152)

Vektorit:

Tutkimusaikavälillä vektoritehtäviä esiintyy kahden kevään sykleissä yhden tehtävän arvoisesti ja jokaisen syklin väliin mahtuu yksi kevät, jolloin vektoreita on vain puolen tehtävän arvoisesti. Keväät 2004 ja 2005 ja 2007 ja 2008 ja 2010 ja 2011 sisälsivät siis yhden vektoritehtävän. Keväällä 2006 ja 2009 vektoritehtävä oli vain osana tehtävää jonkin toisen aihealueen kanssa. Yleensä vektoritehtävä esiintyy yhdessä geometriaan tai analyyttiseen geometriaan liittyvän aihealueen kanssa. Yhteensä vektoreita on testattu 10 eri tehtävässä tutkimusaikavälillä. Yhdessäkään tähtitehtävässä ei esiinny vektoreita. Tärkeitä käsitteitä tässä aihealueessa ovat muun muassa kantavektorit, paikkavektori, skalaari- eli pistetulo sekä vektoreiden yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus. Yhdensuuntaisuutta ja kohtisuoruutta tarkastellaan esimerkiksi kevään 2008 tehtävässä 6.

KEVÄT 2008, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 6

Määritä parametri t siten, että vektorit $\bar{a} = 5\bar{\imath} - 2\bar{\jmath}$ ja $\bar{b} = 3\bar{\imath} + t\bar{\jmath}$ ovat yhdensuuntaiset. Millä parametrin arvolla vektorit ovat kohtisuorat? (Lahtinen 2011, 205)

Todennäköisyys ja tilastot:

Lähes poikkeuksetta Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen tehtäviä on ylioppilaskokeessa tasan yksi kokonainen kuuden pisteen tehtävä. Ainoa poikkeus on kevään 2007 tehtävä 8, jossa testataan sekä Todennäköisyys ja tilastot - että Integraalilaskennan – aihealueiden hallintaa. Kevään kokeissa on lähes aina klassisen todennäköisyyden laskemiseen liittyvä helpohko perustehtävä. Samassa tehtävässä kysytään usein myös odotusarvoa. Muutamassa tehtävässä tarvitaan apuna myös kombinatoriikan taitojen hallitsemista. Se ei ole kuitenkaan aina välttämätöntä pienen perusjoukon vuoksi. Tästä esimerkkinä on kevään 2010 Todennäköisyys ja tilastot – tehtävä 6. Tyypillistä Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen perustehtäville on se, että tehtäviä voidaan ratkaista monilla eri tavoilla. Tutkimusaikavälillä esiintyy keväällä 2006 myös normaalijakaumatehtävä. Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen hallintaa tarkastellaan tässä tutkimuksessa tarkemmin kappaleessa 5.1.1.

Derivaatta:

Derivaatta on aihealue, jota on testattu joka kevät vähintään yhden tehtävän arvoisesti. Lukio-opetuksessa tulisi huomioida erityisesti Derivaatta-aihealueiden käsitteleminen, koska tutkimuksen mukaan sen osaamista vaaditaan jokaisessa ylioppilaskokeessa huomattava määrä. Lisäksi on myös huomioitava se, että sen laskutaitoja tarvitaan useissa syventävissä kursseissa. Alkupään tehtävissä derivointi on usein osakohtana tehtävää. Keväällä 2008 derivointi oli osana molempia tähtitehtäviä 14 ja 15. Derivaattatehtävillä ei ole siis mitään tiettyä keväästä toiseen toistuvaa tehtäväpaikkaa pitkän matematiikan kokeessa. Ääriarvotehtävät kuuluvat Derivaatta-aihealueeseen. Huomionarvoista on se, että tutkimusaikavälillä on joka kevään kokeessa ollut yksi ääriarvotehtävä tehtäväpaikalla 5-15. Kevään 2005 tehtävä 15 on kuitenkin poikkeuksellinen, koska siinä käsitellään ääriarvoja, mutta tehtävänannossa pyydetään määrittämään ääriarvo Newtonin menetelmää käyttäen. Sen vuoksi tämä tehtävä on luokiteltu tässä tutkielmassa Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä – aihealueeseen. Ääriarvotehtävien hallintaa tarkastellaan tässä tutkimuksessa tarkemmin kappaleessa 5.1.5. Myös kevään 2005 tehtävä 15 on mukana tarkastelussa.

Juuri- ja logaritmifunktiot:

Tutkimusaikavälin kahtena ensimmäisenä keväänä 2004 ja 2005 juuri- ja logaritmifunktioita on testattu vähän. Kevään 2006 kokeesta lähtien on tapahtunut muutos, sillä siitä lähtien juuri- ja logaritmifunktiota on testattu aina vähintään kahden eri tehtävän osakohtien yhteydessä. Keväällä 2012 jopa neljässä eri tehtävässä on tarvinnut hallita juuri- ja logaritmifunktioiden aihealueita. Keväällä 2011 ja 2012 juuri- ja logaritmifunktiot ovat olleet osana tähtitehtävää. Yhteensä tämän aihealueen tehtäviä on testattu tutkimusaikavälillä kokonaisena tai osakohtana 18 eri tehtävässä. Juuri- ja logaritmitehtävät sijoitetaan usein tehtäväpaikoille 2-3 ja 5-10. Alkupään tehtävät liittyvät yleensä juuri- tai logaritmifunktion sieventämiseen, derivointiin tai integrointiin. Tehtävänumeroilla 5-10 esiintyvät tehtävät liittyvät yleensä juuri- tai logaritmifunktion kulun tutkimiseen. Koska juuri- ja logaritmifunktiotehtävät esiintyvät lähes aina osakohtina, ei niiden kokonaismäärä kunkin kevään osalta nouse eniten testattujen aihealueiden joukkoon. Ainoa kokonainen juuri- ja logaritmifunktiot – aihealueen tehtävä on kevään 2008 tehtävä 10. Esimerkki tyypillisestä tämän aihealueen perustehtävästä on kevään 2011 sievennystehtävä 2c.

KEVÄT 2011, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 2c

Sievennä $e^{5\ln 2-\ln 8}$ *välivaiheet esittäen.* (Lahtinen 2011, 289)

Trigonometriset funktiot ja Lukujonot, sarjat ja summat:

Trigonometriset funktiot – aihealueen tehtäviä esiintyy tutkimusaikavälillä selvästi keskiarvoa vähemmän. Vain keväällä 2005 ja 2012 trigonometriaa on testattu yhden tai enemmän kuin yhden tehtävän arvoisesti. Kaikkina muina keväinä trigonometrian tehtäviä on huomattavasti alle yhden tehtävän eli vain osakohtina. Jopa kahtena keväänä (2004 ja 2007) trigonometrian tehtäviä ei ole lainkaan. Keväällä 2007 oli ainakin useita analyyttisen geometrian ja geometrian tehtäviä, joten onko näiden aihealueiden hallitseminen tärkeämpää kuin trigonometrian hallitseminen? Joka tapauksessa on kuitenkin huomioitava se, että lukion opetussuunnitelman perusteissa (2003) Trigonometriset funktiot ja Lukujonot muodostavat yhden kokonaisuuden ja Sarjat ja niiden summat kuuluvat opetussuunnitelman perusteissa Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin aihepiireihin. Esimerkiksi vuosina 2004 ja 2007 on testattu keskimääräistä enemmän Lukujonot, sarjat ja summat – aihealueiden tehtäviä. Pääpiirteittäin Lukujonot, sarjat ja summat – aihealueen tehtäviä on keskimäärin useammin kuin Trigonometriset funktiot - aihealueen tehtäviä.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (2003) määritellään suunnattu kulma ja radiaani sekä trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen keskeisimpien käsiteltävien aihealueiden joukkoon trigonometrian osalta. Kevään 2005 tehtävä 2b on esimerkki trigonometrian perustehtävästä.

KEVÄT 2005, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 2b

Tiedetään, että $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ *ja* $180° < x < 270°$. *Määritä* $\cos x$ *ja* $\tan x$ *(tarkat arvot).*

(Lahtinen 2011, 124)

Trigonometrian tehtäviä esiintyy siis ihan ensimmäisten tehtävienkin joukossa, mutta Lukujonot, sarjat ja summat – aihealueen tehtävät on sijoitettu aina tehtäväpaikalle 9-13 eli ne on luokiteltu tutkimusaikavälillä joka kevät haastavammaksi tehtäväksi. Esimerkki tämän aihealueen tehtävästä on kevään 2004 suppenevaa lukujonoa käsittelevä tehtävä 14.

KEVÄT 2004, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 14

Anna esimerkki sellaisesta suppenevasta lukujonosta $x_1, x_2, x_3, \ldots$*, että vastaava sarja* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *hajaantuu. Voiko lukujono hajaantua ja vastaava sarja supeta?* (Lahtinen 2011, 110)

Integraalilaskenta:

Integraalilaskenta on derivaatan ohella yksi useimmin testatuista aihealueista. Keväällä 2004 integraalilaskentaa käsitteleviä tehtäviä oli jopa kahden ja puolen tehtävän arvoisesti. Tämä on koko tutkimusaikavälin suurin yksittäisen aihealueen esiintymä, kuten kuvioista 1 nähdään. Integraalilaskennan tehtävillä ei ole ylioppilaskokeessa mitään vuodesta toiseen toistuvaa tehtäväpaikkaa, vaan integraalilaskennan taitoja testataan sekä alkupään perustehtävissä että loppupään haastavimmissa tehtävissä. Perustehtävät liittyvät usein alkeisfunktion integrointiin. Integraalilaskutaitojen soveltamista tarvitaan muun muassa Numeeriset ja algebralliset menetelmät – aihealueen tehtävissä. Tavallisesti integraalilaskenta on osakohtana useissa eri tehtävissä. Integraalilaskentaa on testattu myös tähtitehtävien yhteydessä (kevät 2009, 2010 ja 2011). Poikkeuksellisesti keväällä 2012 integraalilaskentaa oli erittäin vähän, kun sitä testattiin vain yhden osakohdan arvoisesti tehtävässä 2 painokertoimella $\frac{1}{6}$. Integraalilaskennan hallintaa tarkastellaan tässä tutkimuksessa tarkemmin kappaleessa 5.1.3.

<u>Lukuteoria ja logiikka:</u>

Lukuteoria ja logiikka – tehtäviä on testattu lähes aina yhden tehtävän arvoisesti. Ainoastaan kevät 2005 on poikkeus, koska silloin ei ollut yhtään lukuteorian ja logiikan tehtävää. Tehtävät ovat usein selkeitä jaollisuuteen liittyviä todistustehtäviä, joiden ratkaiseminen onnistuu Lukuteoria ja logiikka – aihealueen perusteiden hallitsemisella. Tehtävät sijoittuvat aina tehtäväpaikoille 11–15, mutta kokelaan ei kannata vältellä tämän aihealueen tehtäviä syventävän tehtävän vaikeutta peläten. Esimerkiksi keväällä 2008 tehtävässä 11 on ollut mahdollista ansaita kuusi pistettä melko helposti, jos on hallinnut suurimman yhteisen tekijän määrittämisen ja Diofantoksen yhtälön ratkaisemisen.

<u>KEVÄT 2008, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 11</u>

a) *Määritä lukujen 154 ja 126 suurin yhteinen tekijä.*
b) *Ratkaise Diofantoksen yhtälö 154x + 126y = 56.* (Lahtinen 2011, 211)

Logiikan puolelta esimerkkitehtävänä on kevään 2006 tehtävä 15. Huomioitavaa on, että tämä on kokeen viimeinen tehtävä. Tehtävän pystyy ratkaisemaan helposti peruslogiikan taidot hallitsemalla. Syventävien kurssien suorittamisesta on siis huomattava hyöty ainakin niille kokelaille, jotka tavoittelet korkeimpia arvosanoja.

<u>KEVÄT 2006, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 15</u>

Muodosta totuusarvotaulut lauseille (propositioille) $p \Rightarrow q$ *ja* $\neg q \Rightarrow \neg p$, *ja osoita, että lause* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ *on tautologia.* (Lahtinen 2011, 160)

Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä:

Kuvion 1 mukaan myös Numeeriset ja algebralliset menetelmät – tehtäviä on pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa lähes aina yhden tehtävän arvoisesti. Tehtävät sijoittuvat kokeen loppupuolelle tehtäväpaikoille 12–13, koska Numeeriset ja algebralliset menetelmät – aihealue luokitellaan matematiikan syventäväksi tiedoksi. Tämän aihealueen tehtävien hallitsemiseen tarvitaan derivoinnin ja integroinnin laskutekniikoiden sujuvaa hallintaa, joita soveltamalla hyödynnetään esimerkiksi Newtonin menetelmää derivaatan nollakohdan määrittämiseksi ja puolisuunnikassääntöä integraalin arvon määrittämiseksi. Esimerkkinä tämän aihealueen tehtävästä on kevään 2010 tehtävä 13, jossa tarvitaan juuri puolisuunnikassääntöä.

Kevät 2010, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 13

Funktion f *kuvaajan kaarenpituus välillä* $[a, b]$ *on*

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2 dx.}$$

Laske funktion $\ln x$ *kuvaajan kaarenpituus välillä* $[1,2]$ *puolisuunnikassäännöllä jakamalla väli neljään osaväliin. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.* (Lahtinen 2011, 269)

Differentiaali ja integraalilaskennan jatkokurssi:

Lukion opetussuunnitelman perusteiden (2003) mukaan Differentiaali- ja Integraalilaskennan jatkokurssin yksi keskeisimmistä tavoitteista on syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemusta. Keskeisiä sisältöjä tässä aihealueessa ovat muun muassa funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen, funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä ja epäoleelliset integraalit. Ennen keväällä 2007 alkanutta tähtitehtäväuudistusta tämän aihealueen tehtävät olivat aina tehtävä paikalla 14 tai 15. Keväästä 2007 lähtien tehtäväpaikat ovat olleet 11–15.

Keväästä 2009 lähtien differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin aihealueita on testattu aina kokonaisena tai vähintäänkin osana tähtitehtävää. Keväällä 2012 tähtitehtävä 14 on ollut kokonainen tämän aihealueen yhdeksän pisteen tehtävä. Tämän aihealueen tehtävät tarjoavat siis usein kokelaalle tavallista enemmän haastetta. Tähtitehtävien määritelmän mukaan niiden suorittaminen edellyttääkin tavallisia tehtäviä laajempaa tai syvällisempää käsittelyä. (Lahtinen 2011, 5) Esimerkkinä tämän aihealueen tehtävästä on kevään 2005 differentiaaliyhtälön ratkaisemistehtävä 14.

KEVÄT 2005, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 14

Etsi ratkaisut differentiaaliyhtälölle $y'^2 - xy' + y = 0$ *derivoimalla se kerran ja ratkaisemalla tällöin syntynyt uusi differentiaaliyhtälö. Ovatko tämän ratkaisut myös alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja? Piirrä alkuperäisen yhtälön ratkaisujen kuvaajia.*

(Lahtinen 2011, 135)

5. PITKÄN MATEMATIIKAN YLIOPPILASKOKEIDEN TULOSTEN ANALYSOINTIA

Tutkimusaikavälillä ylioppilastutkinnon varsinaisia kokelaita on ollut keväisin noin 35 000 kokelasta. Esimerkiksi keväällä 2007 varsinaisia kokelaita oli yhteensä 35 112. (Ylioppilastutkintolautakunta 2013c) Lyhyen tai pitkän matematiikan kirjoitti yhteensä 25326 kokelasta keväällä 2007. (Lahtinen, liite 11) Keväällä 2008 MAOL Ry:n sen aikaisen hallituksen puheenjohtaja Irma Iho totesi Dimension pääkirjoituksessaan, että onneksi kokonaan matematiikan kokeeseen osallistumattomien määrä ei ole kovin suuri. Koska matematiikan hallitsemisessa on kyse perustaidosta, Iho korosti tietysti sitä, että mitä pienempi kokonaan osallistumattomien määrä on sitä parempi. Kevään 2007 jälkeen matematiikan kokelasmäärät ei ole kuitenkaan kehittyneet toivottuun suuntaan. Esimerkiksi emeritusprofessori Aatos Lahtinen kirjoitti huolestuneena Dimension artikkelissaan, että kevään 2010 tutkinnossa vain 58 prosenttia ilmoittautuneista valitsi matematiikan. (Lahtinen 2010, 30)

TAULUKKO 1. Kevään pitkän matematiikan suorittajat. Taulukon tietojen laskemiseen on käytetty apuna liitteessä olevia emeritusprofessori Aatos Lahtisen taulukoita (liitteistä 2B-10B taulukot 1 ja 2)

Kevät	Pakollinen koe, lkm	%	Ylimääräinen koe, lkm	%	Yhteensä, lkm
2004	5524	44,2 %	6967	55,8 %	12491
2005	6644	54,4 %	5561	45,6 %	12205
2006	7481	64,5 %	4125	35,5 %	11606
2007	7906	67,0 %	3893	33,0 %	11799
2008	8283	71,1 %	3364	28,9 %	11647
2009	8666	74,3 %	2993	25,7 %	11659
2010	8779	74,9 %	2943	25,1 %	11722
2011	8534	76,8 %	2582	23,2 %	11116
2012	8442	78,6 %	2304	21,4 %	10746

Taulukosta 1 nähdään, että pitkän matematiikan kirjoittajia on keväisin yhteensä noin 12000 kokelasta. Tutkimusaikavälillä on havaittavissa pientä laskusuhdannetta pitkän matematiikan suorittajien lukumäärässä, sillä keväinä 2011 ja 2012 matematiikan kokelaiden lukumäärä on ollut lähempänä 11 000. Huomattava muutos on se, että pitkää matematiikkaa kirjoitetaan yhä useammin pakollisena. Ylimääräisenä kokeen suorittavien lukumäärä on vähentynyt tutkimusaikavälillä joka kevät. Keväällä 2004 pitkää matematiikkaa suoritti ylimääräisenä yli 55 % ja keväällä 2012 vastaava luku oli vain 21,4 %. Tilanne on siis muuttunut radikaalisti keväästä 2004 kevääseen 2012. Myös emeritusprofessori Aatos Lahtinen on todennut, että ollaan kulkemassa kohti tilannetta, missä yhä useammin pitkää matematiikkaa kirjoitetaan tosi tarkoituksella vain pakollisena. (Lahtinen 2010, 31)

Keväällä 2005 ylioppilastutkinnon rakenne muuttui siten, että vanha matematiikan kokeen ja reaalikokeen vaihtoehtoisuus laajeni tasapuolisemmaksi vaihtoehtoisuudeksi. Toisen kotimaisen kielen kokeen, vieraan kielen kokeen, matematiikan kokeen ja reaalikokeen väliltä on pitänyt uudistuksen jälkeen valita kolme ainetta pakollisiksi. Neljännen saa luonnollisesti kirjoittaa ylimääräisenä. Uudistus jatkui kevään 2006 siten, että vanha reaalikoe muuttui reaaliaineiden kokeiksi. Erityisesti kevään 2005 uudistuksen ennakoitiin nostavan matematiikan suosiota ja lisäävän opiskelumotivaatiota. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2005) joutui kuitenkin toteamaan kevään 2005 ylioppilaskirjoituksia analysoineessa artikkelissaan, että tässä suhteessa mentiin ainakin näin uudistetun ylioppilastutkinnon ensimmäisellä kerralla metsään, sillä tutkinnon rakenteen muuttuminen ei ainakaan heti lisännyt pitkän matematiikan kirjoittamista. (Lahtinen 2005, 16–17) Eikä se valitettavasti ole lisääntynyt myöhemminkään. Taulukosta 1 nähdään, että on itse asiassa käynyt täysin päinvastoin. Pitkän matematiikan kirjoittajien määrä on vähentynyt joka vuosi. Eikö tähän pitäisi jo reagoida?

5.1 TULOSTEN ANALYSOINTI AIHEALUEITTAIN

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan tarkemmin viiden aihealueen pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden kokelaiden tuloksia tehtäväkohtaisesti. Tarkasteltavat aihealueet ovat 1. Todennäköisyys ja tilastot, 2. Geometria, 3. Integraalilaskenta, 4. Prosenttilaskut ja 5.Ääriarvotehtävät.

Ensimmäinen tarkasteltavissa oleva aihealue on Todennäköisyys ja tilastot. Perusteena tämän aihealueen valinnalle on se, että Todennäköisyys ja tilastot muodostavat selkeästi oman kokonaisuuden sekä koko matematiikan alalla että ylioppilaskokeissa. Tämän tutkimuksen tutkimusaikavälillä Todennäköisyys ja tilastot – aihealueesta on ollut lähes joka vuosi yksi kokonainen kuuden pisteen tehtävä painokertoimella 1. Ainoa poikkeus on kevät 2007, jolloin Todennäköisyyttä ja tilastoja on testattu painokertoimella $\frac{1}{2}$. Tämän aihealueen säännöllinen testaaminen ja keväästä toiseen vakiona pysyvä aihealueen tehtävämäärä mahdollistaa sen, että tässä tutkimuksessa pystytään ottamaan tarkasteluun tutkimusaikavälin jokaiselta keväältä kaikki ne tehtävät, joissa kokelas on tarvinnut todennäköisyyteen tai tilastoihin liittyvien taitojen hallintaa. Kappaleessa 5.1.1 olevat taulukot ja niistä tehtävät päätelmät kuvaavat siis luotettavasti kokelaiden aihealueen hallintaa.

Toinen tarkasteltavissa oleva aihealue on Geometria. Aiemmin tässä tutkimuksessa tehdyn aihealuejaon (Luku 4.1) perusteella Geometria on usein yksi niistä aihealueista, jonka hallintaa kokelailta testataan runsaasti. Toisaalta Geometria on juuri se matematiikan aihealue, joka tuottaa usein opiskelijoille eniten haastetta. Opetushallitus julkaisi keväällä 2013 peruskoululaisten matematiikan osaamisen arviointitulokset, jotka perustuivat vuonna 2012 pidettyihin matematiikan testeihin. Marjukka Liiten (2013) toteaa näihin arviointituloksiin liittyvässä Helsingin Sanomien verkkolehden artikkelissaan, että arviointitulosten mukaan peruskoululaisille vaikeimmiksi aihealueiksi osoittautuivat geometria ja funktiot. Jos geometria koetaan jo peruskoulussa kompastuskiveksi, onko se sitä myöhemmin myös lukiolaiselle?

Kolmas tarkasteltavissa oleva aihealue on Integraalilaskenta. Perusteena tämän aihealueen valinnalle on se, että luvun 4.1 kuvion 1 aihealuejaon perusteella integraalilaskenta oli koko tutkimusaikavälin suurin yksittäisen aihealueen esiintymä. Integraalilaskenta on siis yksi useimmin testatuista aihealueista. Jenni Ristonmaa toteaa integraalilaskentaa käsittelevässä Pro gradu tutkielmassaan (2011, 3), että integraalilaskentaa pidetään vaikeana matematiikan osa-alueena ja ylioppilaskokelaiden kiinnostus integraalilaskennan tehtäviä kohtaan on vähäistä. Ristonmaan tutkielmassa on tarkasteltu 1990- ja 2000-luvun pitkän matematiikan kevään ja syksyn ylioppilastehtäviä integraalilaskennan osalta. Tämän tutkielman kappaleessa 5.1.3 selvitetään, että onko tilanne integraalilaskennan kevään 2004–2012 tehtävien tuloksien valossa edelleen samansuuntainen, että kiinnostus tehtäviä kohtaan olisi vähäistä. Luvun 4.1 aihealuejako ainakin osoittaa, että ylioppilastutkintolautakunnassa integraalilaskentaa pidetään erittäin merkittävänä aihealueena, koska sitä testataan sen verran usein.

Neljäs tarkasteltavissa oleva aihealue on Prosenttilaskut. Prosenttilaskun todetaan usein olevan se matematiikan aihealue, josta on konkreettisesti hyötyä elämässä. Näin on todennut myös Anne Vihavainen (2011) Uutisvuoksi-verkkolehdessä. Hän myös nostaa esille esimerkin siitä, että on vaikeaa rakentaa elämää itsellisen talouden varaan, jos ei osaa laskea sitä, kuinka paljon asuntolaina todellisuudessa tilistä vie. Tai nuorison suosion saavuttaneiden vippilainojen suhteen voi olla hankaluuksia selvittää, kuinka suuri todella on se summa, joka seuraavalla viikolla pitäisi pystyä maksamaan takaisin. Prosenttilaskutaidonhallinta on siis sellainen taito, jota jokaisen ylioppilaskokelaan olisi mielenkiinnolla tullut koulu-uransa aikana opiskella. Jos ajattelee edellä olevia Vihavaisen (2011) esimerkkejä, onhan se ihan selvää, että elämä on paljon helpompaa, kun hallitsee prosenttilaskut. Lukion opetussuunnitelman perusteiden (2003) mukaan prosenttilaskut kuuluvat Funktiot ja yhtälöt - kurssin asiasisältöihin. Tässä tutkielmassa prosenttilasku on lisätty omaksi kokonaisuudekseen, koska halutaan selvittää, kuinka ylioppilaskokelaat hallitsevat tämän tärkeäksi korostetun matematiikan aihealueen.

Viides tarkasteltavissa oleva aihealue on Ääriarvotehtävät. Ääriarvotehtävät kuuluvat lukion opetussuunnitelman perusteissa (2003) Derivaatta-aihealueeseen. Pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa ne muodostavat selvästi oman tehtäväkokonaisuuden, jonka hallintaa on syytä tutkia tässä tutkielmassa tarkemmin. Ääriarvotehtäviä on tutkimusaikavälillä nimittäin joka kevät yksi tehtävä. Usein tehtävät ovat helppoja, mekaanisia ääriarvotehtäviä tai erilaisten geometristen kappaleiden suurimpien mahdollisten pinta-alojen määrittämistä. Hallitsevatko kokelaat nämä keväästä toiseen lähes samantyyppisenä pysyvät tehtävät?

5.1.1 Todennäköisyys ja tilastot

Todennäköisyys ja tilastot tehtäviä on tutkimusaikavälillä yhteensä 9 tehtävää. Kevään 2004 tehtävässä 9 pitää hallita toistokoe, kevään 2005 tehtävässä 9 määritettään kertymäfunktiota ja kevään 2006 tehtävä 8 on normaalijakaumatehtävä. Kevään 2007 tehtävä 8 on tutkimusaikavälin ainoa Todennäköisyys ja tilastot - tehtävä, joka ylittää aihealuerajat. Tehtävä on tiheysfunktion integroimistehtävä. Sen täydelliseen ratkaisemiseen tarvitaan huomattavasti myös Integraalilaskennan taitoja. Sekä taulukkoja 2 ja 3 että kuviota 2 analysoidessa pitää huomioida siis, että Todennäköisyys ja tilastot – aihealue on tässä kevään 2007 tehtävässä vain painokertoimella $\frac{1}{2}$.

Keväällä 2008, 2009 ja 2010 tarjottiin kokelaille helppoja pisteitä, sillä kaikissa kolmessa tehtävässä testattiin todennäköisyyden määrittämisen perusasioiden hallintaa. Kevään 2008 tehtävässä 5 pitää hallita komplementtitodennäköisyys ja kevään 2009 tehtävässä 6 alkeistodennäköisyys. Myös kevään 2010 tehtävän 6 pystyy ratkaisemaan esimerkiksi alkeistodennäköisyyden avulla. Tyypillistä varsinkin todennäköisyyttä koskevien tehtävien ratkaisemisessa on, että ratkaisumahdollisuuksia on usein monia erilaisia. Helpossakin tehtävässä kokelaan pitää vain osata kirjoittaa ajatuksensa ratkaisumallista paperille. Se osoittautuu kuitenkin varsin usein erittäin haastavaksi tehtäväksi, kuten pistejakauma-taulukosta 2 ja kuviosta 2 nähdään.

Tyypillinen perustehtävä tältä aihealueelta on kevään 2010 tehtävä 6:

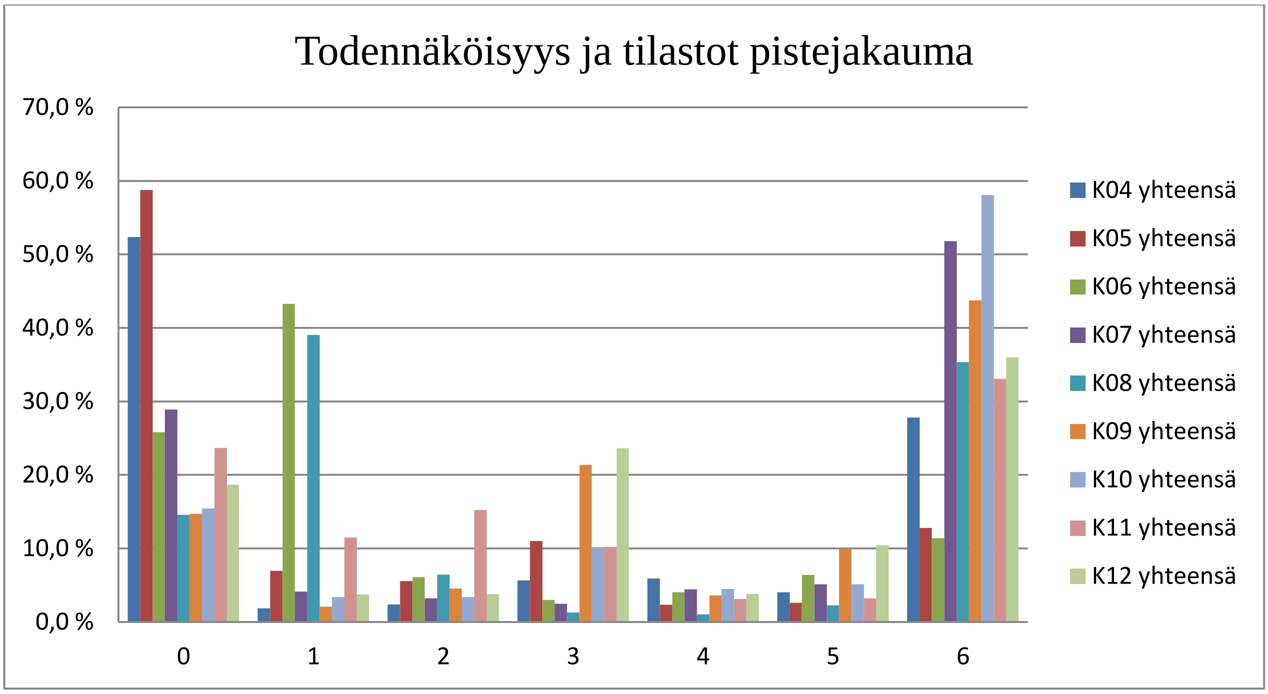
KEVÄT 2010, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 6:

a) *Laatikossa on kaksi eriväristä palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo, pannaan se takaisin ja nostetaan taas umpimähkään pallo. Mikä on todennäköisyys, että nostetut pallot ovat eriväriset?*
b) *Mikä on vastaava todennäköisyys, jos laatikossa onkin kolme keskenään eriväristä palloa ja samalla tavalla nostetaan kaksi palloa?*
(Lahtinen 2011, 262–263)

Keväällä 2011 ja 2012 Todennäköisyys ja tilastot – tehtävät sijoitettiin myös tehtäväpaikoille 6. Kevään 2011 tehtävän saa ratkaistua, kun hallitsee kombinatoriikan tai tuloperiaatteen perusteita. Keväällä 2012 tarvittiin perinteisen todennäköisyyslaskennan hallitsemisen lisäksi myös taitoa määrittää odotusarvo.

TAULUKKO 2. Todennäköisyys ja tilastot - tehtävät. Pistejakauma. Otantana ovat sekä pakollisena että ylimääräisenä pitkän matematiikan kokeen suorittaneet. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C)

Pisteet	K04 yhteensä	K05 yhteensä	K06 yhteensä	K07 yhteensä	K08 yhteensä	K09 yhteensä	K10 yhteensä	K11 yhteensä	K12 yhteensä
0	4466	4075	2187	1185	1085	1488	1578	1846	1670
1	159	483	3665	169	2905	211	345	897	333
2	204	386	517	131	479	461	344	1187	337
3	481	762	252	101	96	2163	1040	799	2113
4	503	163	342	181	77	366	456	245	341
5	343	179	541	211	168	1008	525	250	932
6	2370	886	965	2125	2629	4433	5942	2580	3222
Yht.lkm	8526	6934	8469	4103	7439	10130	10230	7804	8948
Vast.%	68,2	56,8	73,0	34,8	63,9	86,9	87,3	70,2	83,3



KUVIO 2. Todennäköisyys ja tilastot - tehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien yhteispistejakauma

Kuvio 2 osoittaa tutkimusaikavälillä vallitsevan trendin, että Todennäköisyys ja tilastot – tehtäviä joko osataan täydellisesti kuuden pisteen arvoisesti tai sitten kokelaalla ei ole mitään käsitystä tehtävän ratkaisemisesta. Valitettavan usein kokelaat valitsevat tämän aihealueen tehtäviä ansaitsematta pisteen pistettä. Keväällä 2004 ja 2005 yli puolet Todennäköisyys ja tilastot – tehtävään vastanneista kokelaista sai nolla pistettä. Lisäksi esimerkiksi keväällä 2006 normaalijakauma tehtävä osoittautui kokelaille erittäin haastavaksi. Vain noin 11 % tehtävään vastanneista kokelaista sai täydet pisteet. Kuviosta 2 nähdään, että tämä on alhaisin täysiin pisteisiin oikeuttanut prosentuaalinen osuus tehtävään vastanneiden lukumäärään suhteutettuna. Samana keväänä yli 69 % kokelaista sai 0 tai 1 pistettä.

Taulukossa 2 hämmästyttää se, kuinka harva valitsi Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen tehtävän keväällä 2005 ja 2007. Tarkemmin tehtäviä tutkiessa huomaa, että molemmissa tehtävissä testataan jollakin tavalla myös tiheysfunktion hallintaa ja erityisesti kevään 2007 tehtävässä integrointitaitojen hallitseminen on suuressa osassa. Todennäköisyyslaskujen soveltaminen integraalilaskentaan ei siis selvästikään ole kokelaiden suosiossa. Keväällä 2007 vain kolmas osa kokelaista uskalsi valita tämän tehtävän. Positiivista oli se, että tehtävän valinneista yli puolet sai täydet pisteet. Silti suuri osa ei saanut yhtään pistettä.

KEVÄT 2007, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 8:

Satunnaismuuttuja X saa arvoja väliltä $[0,1]$, *ja sen tiheysfunktio on muotoa*

$$f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{2}.$$

Määritä vakio a. Millä todennäköisyydellä X on välillä $[0,\frac{1}{2}]$*?*

(Lahtinen 2011, 181)

Kuten jo aiemmin tässä kappaleessa mainittiin, keväällä 2008, 2009 ja 2010 tarjottiin kokelaille helppoja pisteitä todennäköisyyden määrittämisessä. Valitettavasti tämä ei kuitenkaan näy tehtäväkohtaisissa tuloksissa. Keväällä 2008 vain 63,9 % kokelaista uskalsi yrittää todennäköisyystehtävää. Keväällä 2009 yrittäjiä oli jo 86,9 % ja keväällä 2010 87,3 %. Oliko tehtävän asettelulla mahdollisesti vaikutusta tehtävän helpompaan lähestymiseen? Sekä kevään 2009 että 2010 tehtävä rakentui a) ja b) kohdista siten, että a) kohtaa tarvittiin b) kohdan ratkaisemisessa. Myös kevään 2012 tehtävä oli rakennettu tällä tavalla ja erityisesti kevään 2009 ja 2012 tehtävien pistejakaumasta on havaittavissa, että kokelaat ovat ansainneet näissä tehtävissä useammin kolme pistettä kuin tutkimusaikavälin muissa tehtävissä. Positiivista on se, että kevään

2010 tehtävästä lähes 60 % kokelaista sai täydet pisteet. Herää kysymys, että kun kahtena aiempana keväänä oli jo tarjottu helppoa todennäköisyyden määrittämistehtävää, oliko tätä tehtävä tyyppiä ymmärretty harjoitella myös enemmän? Keväällä 2011, kun tehtävän rakenne oli taas erilainen, tehtävään vastasi 70,2 % kokelaista ja yli 50 % heistä ansaitsi 0, 1 tai 2 pistettä.

TAULUKKO 3. Todennäköisyys ja tilastot - tehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien tehtäväkohtaiset pisteet. P = pakollinen, Y= ylimääräinen. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C)

Pisteet	**K04 P**	**K04 Y**	**K05 P**	**K05 Y**	**K06 P**	**K06 Y**	**K07 P**	**K07 Y**	**K08 P**	**K08 Y**
0	1589	2877	2068	2007	1202	985	676	509	722	363
1	56	103	293	190	2223	1442	92	77	1954	951
2	79	125	252	134	378	139	100	31	345	134
3	252	229	500	262	183	69	65	36	71	25
4	270	233	118	45	244	98	133	48	65	12
5	211	132	135	44	420	121	166	45	128	40
6	1601	769	693	193	808	157	1722	403	2061	586
Yht. lkm	4058	4468	4059	2875	5458	3011	2954	1149	5346	2093
Vastaus %	73,4	64,1	61,1	51,7	73,0	73,0	37,4	29,5	64,5	62,2

Pisteet	**K09 P**	**K09 Y**	**K10 P**	**K10 Y**	**K11 P**	**K11 Y**	**K12 P**	**K12 Y**
0	893	595	1073	505	1288	558	1178	492
1	140	71	233	112	660	237	231	102
2	304	157	214	130	889	298	262	75
3	1561	602	762	278	617	182	1590	523
4	268	98	336	120	195	50	280	61
5	790	218	412	113	190	60	767	165
6	3620	813	4689	1253	2189	391	2729	493
Yht. lkm	7576	2554	7719	2511	6028	1776	7037	1911
Vastaus %	87,4	85,3	87,9	85,3	70,6	68,8	83,4	82,9

Taulukon 2 yhteispistejakauman mukaan keväällä 2004 ja 2005 yli puolet Todennäköisyys ja tilastot – tehtävät valinneista kokelaista sai nolla pistettä. Kun tarkastellaan tilannetta tarkemmin taulukon 3 pakollisten ja ylimääräisten kokeiden suorittajien tehtäväkohtaisista pisteistä, huomataan, että erityisesti ylimääräisenä kokeen suorittaneille Todennäköisyys ja tilastot – aihealue on ollut todellinen ongelma näinä kahtena keväänä. Keväällä 2004 lähes kaksi kolmasosaa tehtävän valinneista ylimääräisen kokeen suorittajista ei saanut tehtävästä yhtään pistettä. Se, miksi näin suuri osa kokelaista on yrittänyt tämän aihealueen tehtävää ansaitsematta pisteen pistettä, ihmetyttää, sillä esimerkiksi kevään 2004 tehtävä on tyypillinen todennäköisyyslaskennan perustehtävä.

KEVÄT 2004, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 9

Leirikoulun hyväksi järjestetyissä arpajaisissa ilmoitettiin, että joka 20:s arpa voittaa. Kuinka monta arpaa on ostettava, jotta todennäköisyys ainakin yhteen voittoon olisi yli 50 %?

(Lahtinen 2011, 106)

Huolestuttavaa on, että keväällä 2005 nollille jääneitä kokelaita oli vielä huomattavasti enemmän. Lähes 70 % ylimääräisenä kokeen suorittaneista ei saanut keväällä 2005 yhtään pistettä. Kevään 2005 tehtävässä tulee hallita muun muassa käsitteet kertymäfunktio ja binomitodennäköisyys. Tehtävä on siis jo astetta haastavampi, mutta jokaisella kokelaalla pitäisi olla hyvät valmiudet sen ratkaisemiseen lukiokurssin tiedoilla. Ongelma haastavampien tehtävien ratkaisemisessa tulee siitä, että perusasioiden hallinnassa on turhan usein niin suuria puutteita, että ei tiedetä lainkaan, mistä tehtävän ratkaisussa voidaan edes lähteä liikkeelle. Jo pelkillä perustaidoilla ja määritelmien hallinnalla kustakin aihealueesta pitäisi pystyä ansaitsemaan edes yksi tai kaksi pistettä tehtävää kohden.

Aiemmin tässä tutkimuksessa taulukon 1 (kappale 5) yhteydessä todettiin, että kevään pitkän matematiikan suorittajien rakenteessa on tutkimusaikavälillä tapahtunut selkeää muutosta. Taulukkoon 1 laskettujen tietojen mukaan keväällä 2004 ylimääräisen kokeen suorittajia (55,8 %) oli enemmän kuin pakollisen kokeen suorittajia (44,2 %). Kaikkina muina tutkimusaikavälin keväinä koetta suoritettiin pakollisesti huomattavasti useammin kuin ylimääräisenä. Ylimääräisen kokeen suorittajien prosentuaalinen määrä on vähentynyt joka kevät. Nämä kokelaiden lukumäärässä tapahtuneet muutokset täytyy ottaa huomioon myös pakollisen ja ylimääräisen kokeen tehtäväkohtaisia pisteitä vertailtaessa.

Taulukon 3 mukaan kevääseen 2007 asti pakollisen ja ylimääräisen kokeen vastausprosenteissa on ollut suurempaa hajontaa. Keväällä 2005 ero oli vajaa 10 prosenttiyksikköä, kun pakollisen kokeen suorittajista Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen tehtävään vastasi 61,1 % ja ylimääräisen kokeen suorittajista ainoastaan 51,7 %. Joka kevät koko tutkimusaikavälin aikana pakollisen kokeen suorittaneista suurempi osa on vastannut tämän aihealueen tehtäviin kuin ylimääräisen kokeen suorittaneista. Keväästä 2008 lähtien ero on pysynyt vakaana noin 1 – 2 prosenttiyksikköä.

Aihealueiden rajat ylittäviin, sovellusta ja aihealueiden yhdistelyä vaativiin tehtäviin vastataan yleensä niukasti. Tässä suhteessa ei tehdä myöskään poikkeusta Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen suhteen tämän tutkimusaikavälin tehtävissä. Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen tarkemmassa tarkastelussa ollut kevään 2007 aihealuerajat ylittävä tehtävä testasi myös integraalilaskentaa. Taulukon 3 tiedot osoittavat, että tämän tehtävän osalta ero pakollisena tai ylimääräisenä kirjoittavien osalta on pieni. Sekä pakollisena että ylimääräisenä kokeen suorittaneet karttoivat kevään 2007 tehtävää.

5.1.2 Geometria

Geometrian osalta tarkempaan tarkasteluun tehtäväkohtaisista pisteistä on valittu kaikki kokonaiset geometrian tehtävät (painokerroin 1). Lisäksi tarkastelussa on mukana tähtitehtävä 15 (painokerroin $\frac{3}{4}$) vuodelta 2007, tähtitehtävä 15 (painokerroin $\frac{3}{4}$) vuodelta 2008 ja kokonainen geometriaa käsittelevä tähtitehtävä 14 vuodelta 2009. Tähtitehtävistä kokelas voi siis ansaita maksimissaan 9 pistettä normaalin 6 pisteen tehtävän sijaan. Tämä tehtävien välinen piste-ero tulee näkymään taulukoissa 4 ja 5 siten, että taulukossa on myös tyhjiä ruutuja kaikkien niiden tehtävien sarakkeissa, joissa maksimipistemäärä on kuusi eikä yhdeksän. Kokonaisten tehtävien ja tähtitehtävien lisäksi tarkastelussa on myös vuoden 2010 tehtävä 4 ja vuoden 2012 tehtävä 11, koska niissä geometriaa on testattu painokertoimella $\frac{3}{4}$. Yhteensä tarkasteltaviksi geometrian tehtäviksi on siis valittu 12 tehtävää tutkimusaikaväliltä kevät 2004 – kevät 2012. Esimerkki tyypillisestä kolmioiden geometriaan liittyvästä perustehtävästä on kevään 2006 tehtävä 3.

KEVÄT 2006, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 3

Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 15 cm ja piiri 36 cm. Määritä kateettien pituudet. (Lahtinen 2011, 22)

Geometriaa esiintyy tutkimusaikavälillä useissa tehtävissä myös painokertoimella $\frac{1}{2}$. Näitä tehtäviä ovat vuoden 2005 tehtävät 7 ja 11, vuoden 2007 tehtävät 7 ja 9 ja vuoden 2010 tehtävä 3a. Käytettävissä olevan aineiston perusteella ei pystytä kuitenkaan saamaan tarpeeksi luotettavaa tietoa siitä, kuinka kokelas näissä tehtävissä on hallinnut juuri geometrian osa-alueen vai onko geometria mahdollisesti ollut kokelaalle kompastuskivi tehtävän täydellisen ratkaisun suorittamiseksi. Esimerkiksi kevään 2005 tehtävä 7 sisältää painokertoimella $\frac{1}{2}$ geometriaa ja painokertoimella $\frac{1}{2}$ trigonometrisia funktioita. Liitteessä olevien emeritusprofessori Aatos Lahtisen taulukoiden avulla pystytään määrittämään, kuinka paljon kokelas on saanut pisteitä tehtävästä 7, mutta emme tiedä tarkalleen, mitä asioita kokelas on vastaukseensa osannut kirjata. Käytettävissä olevan aineiston perusteella selviää siis, kuinka paljon kokelas on saanut pisteitä kustakin tehtävästä yhteensä. Mahdollisimman luotettavan ja todenmukaisen analysoinnin takaamiseksi geometria-aihealueen hallitsemisen tarkastelussa, kaikki alle painokertoimen $\frac{3}{4}$ geometria-aihealuetta sisältävät tehtävät on jätetty alla olevasta tarkemmasta tarkastelusta pois.

Esimerkkinä geometrian tähtitehtävästä on kokonainen yhdeksän pisteen kevään 2009 geometrisen konstruktion sisältävä tehtävä.

KEVÄT 2009, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 14

Vinon pyramidin pohja on neliö, jonka sivu on a. Pyramidin kahden vastakkaisen sivutahkon kulmat pohjan kanssa ovat 30 ja 135 astetta (pyramidin sisäpuolelta mitattuina).

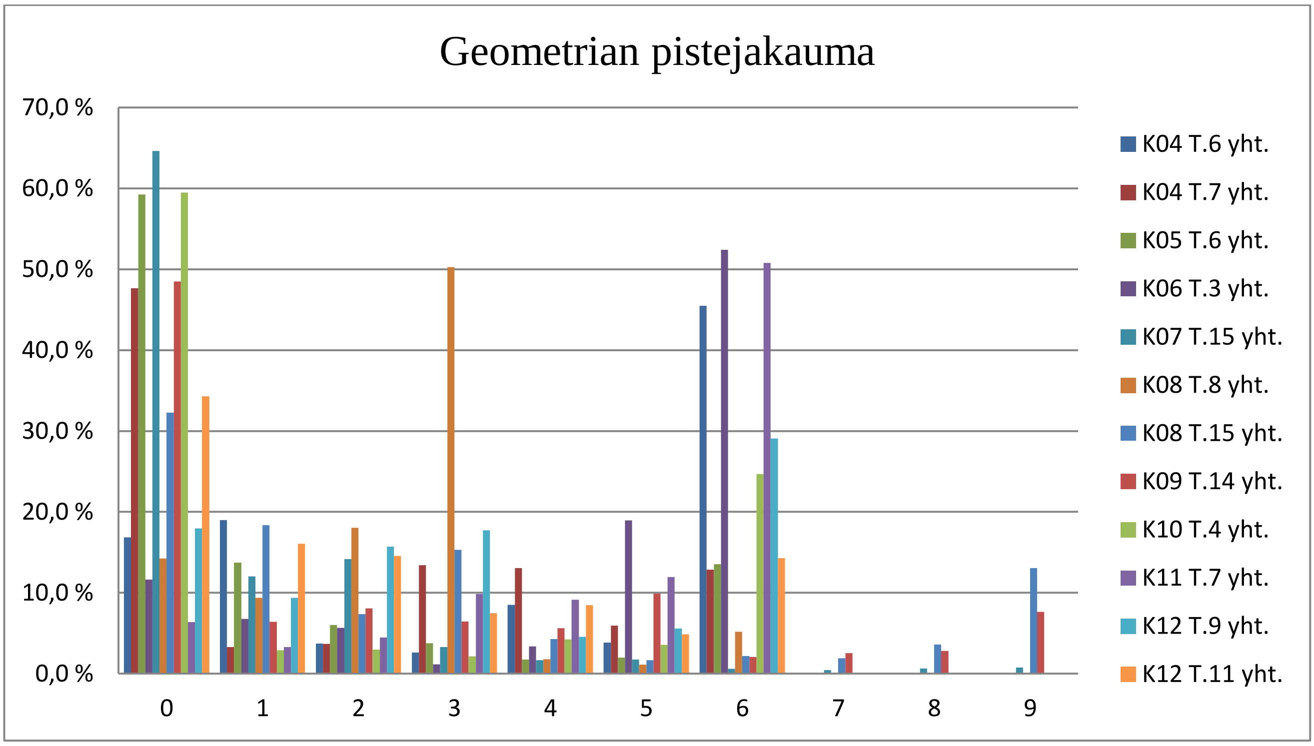
a) *Laske pyramidin korkeus. (3 p.)*
b) *Määritä pyramidin tilavuus. (2 p.)*
c) *Kahden muun sivutahkon kulmat pohjan kanssa ovat keskenään yhtä suuret. Määritä tämä kulma asteen tarkkuudella. (4 p.)* (Lahtinen 2011, 34)

TAULUKKO 4. Geometrian tehtävät. Pistejakauma. Otantana ovat sekä pakollisena että ylimääräisenä pitkän matematiikan kokeen suorittaneet. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C)

Pisteet	K04 T.6 yht.	K04 T.7 yht.	K05 T.6 yht.	K06 T.3 yht.	K07 T.15 yht.	K08 T.8 yht.
0	1836	4595	4619	1333	2702	1327
1	2065	317	1069	776	503	872
2	404	357	468	650	593	1677
3	286	1291	294	133	138	4675
4	925	1259	136	387	70	165
5	419	571	155	2171	73	105
6	4948	1240	1055	6001	25	483
7					19	
8					27	
9					32	
Yht. lkm	10883	9639	7796	11451	4182	9304
Vastaus %	87,1	77,1	63,9	98,7	35,1	79,9

Pisteet	K08 T.15 yht.	K09 T.14 yht.	K10 T.4 yht.	K11 T.7 yht.	K12 T.9 yht.	K12 T.11 yht.
0	544	2779	5161	616	1640	965
1	309	367	250	320	856	452
2	124	462	259	434	1435	410
3	258	370	187	956	1619	210
4	72	323	369	887	415	238
5	28	567	310	1159	510	137
6	37	119	2144	4920	2653	402
7	32	145				
8	61	161				
9	220	438				
Yht. lkm	1685	5731	8680	9692	9128	2814
Vastaus %	14,5	49,2	73,4	87,2	84,9	26,2

Huom. Maksimipistemäärä tähtitehtävistä on 9 pistettä ja kaikista muista tehtävistä 6 pistettä. Taulukossa on mukana molempia tehtäviä, joten 6 pisteen tehtävissä jää taulukkoon tyhjää pisteiden 7-9 kohdalla.



KUVIO 3. Geometrian tehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien yhteispistejakauma.

Kuvion 3 ja taulukon 4 arvoista on huolestuttavan suuri osa painottunut nollan pisteen kohdalle. Prosentuaalisesti eniten nollan pisteen suorituksia on ollut kevään 2007 tehtävässä 15. Kyseessä on tähtitehtävä. Tämän tehtävän osalta tulee huomioida se, että tähtitehtävät otettiin käyttöön ensimmäisen kerran keväällä 2007. Tehtävä 14 ja 15 keväällä 2007 olivat siis ensimmäiset tähtitehtävät pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksissa. Tässä suhteessa voi siis mahdollista, että kokelaat ovat liian innokkaasti lähteneet ratkaisemaan jotakin sellaista uutta, mihin heidän taitonsa eivät ole riittäneet. Tehtävään 15 vastasi nimittäin peräti yli kolmannes kevään 2007 pitkän matematiikan kokelaista. Toisaalta tämä tähtitehtävä rakentui vain pakollisten kurssien osaamiselle eli ei olisi pitänyt olla mitään syytä, miksi kokelaat eivät olisi voineet tehtävää hallita. Täydet yhdeksän pistettä ansaitsi vain 32 kokelasta. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2007, 33) onkin todennut, että ei tähtitehtävääkään kannata valita, ellei siitä saa mitään positiivista irti.

Joka tapauksessa merkittävää on se, että edellä mainitun tähtitehtävän jälkeen toiseksi ja kolmanneksi eniten nollaa pistettä ansaittiin prosentuaalisesti kevään 2010 tehtävästä 4 ja kevään 2005 tehtävästä 6. Nämä ovat siis alkupään tehtäviä ja molemmissa tehtävissä lähes kolme viidesosaa vastanneista ei saanut yhtään pistettä! Kevään 2004 tehtävä 4 käsittelee perinteistä geometrian tehtävää sisäkkäisistä kappaleista. Tehtävä esiintyy tässä tutkielmassa kappaleen 4 yhteydessä sivuilla 19–20 esimerkkinä aihealuejaon painotuksista. Ylioppilastutkintolautakunnan puheenjohtajana toimineen emeritusprofessori Aatos Lahtisen (2010, 36) mukaan yleisin syy nollaan pisteeseen tässä tehtävässä oli se, että suuri osa kokelaista kuvitteli tason leikkaavan kuutiosta neliön. Tehtävään oli lisätty kuvio juuri sen vuoksi, että tällaisia virheitä ei tulisi, mutta valitettavasti kuviota ei osattu käyttää hyödyksi.

Kevään 2005 tehtävä 6 käsittelee kolmioiden geometriaa. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2005, 25) on kirjoittanut osuvasti, että tämä asia hallittiin jo yli 2000 vuotta sitten, mutta silti se on nykypäivänä liian vaikea useammille. Lahtinen (2005, 21) on herättänyt ilmoille myös kysymyksen siitä, että missä on perimmäinen ongelma, kun kahdentoista vuoden kouluopinnoista huolimatta matematiikan ylioppilaskokeen tulokset jäävät joka vuosi monien kokelaiden osalta perin vaatimattomaksi. Tässäkin tutkielmassa tulee esille se, että ongelma ei voi olla ainakaan ylioppilaskokeen tehtävien liiallisessa haastavuudessa, koska lähes poikkeuksetta jokaisella kokelaalla pitäisi olla lukion kurssien suorittamisella riittävät valmiudet tehtävien ratkaisemiseksi. Esimerkiksi tämän tutkielman tutkimusaikavälin geometrian tehtäviä tarkasteltaessa ei voida väittää, että kokelailta olisi testattu jotakin sellaista, mistä olisi hyväksyttävää jäädä nollille pisteille.

Emeritusprofessori Aatos Lahtisen (2005, 21) toteamus siitä, että pohjimmiltaan matematiikka ei ole muuta kuin tavallisen kaupunkilaisjärjen käyttämistä tiettyjen pelisääntöjen puitteissa päätee erityisesti geometriaan. Geometrian tehtävät eivät yleisesti ole haastavia, mutta ilmeisesti kokelaat kokevat tehtävät haastaviksi sen vuoksi, että ne eroavat tehtävätyypiltään muiden aihealueiden tehtävistä. Tehtävät ovat sanallisia ja usein paljon informaatiota sisältäviä. Kokelaan pitää ymmärtää ja sen lisäksi vielä osata muodostaa tarvittavat laskut tai perustelut tehtävän ratkaisemiseksi. Suora sievennys onnistuu siis vasta, kun kokelas osaa ensin muodostaa sievennettävän lausekkeen tai yhtälön. Poikkeuksetta geometrian tehtävissä tarvitsee osata piirtää mallikuva tai ne voivat sisältää myös kuvan valmiina, jota pitää osata käyttää tehtävän ratkaisemisessa. Jo kappaleen 2.3.1 yhteydessä mainitun kevään 2010 tehtäväpaperiuudistuksen myötä geometrian tehtävissä on yhä useammin ollut valmiina mallikuva selventämässä tehtävänantoa. Kokelaiden vastauksista on kuitenkin ilmennyt, kuten aiemmin tämän geometrian kappaleen yhteydessä todettiin kevään 2004 tehtävän 4 osalta, että vain harva kokelaista osaa käyttää kuvia apunaan.

Geometria-aihealuetta käsitellään pitkässä matematiikassa ainoastaan yhden kurssin aikana, joten voiko ongelma olla siinä, että useat kokelaat eivät ole ehtineet sisäistää kaikkea tarvittavaa yhden kurssin aikana? Jääkö geometria liian irralliseksi aihealueeksi lukion matematiikan opinnoissa? Ensivaikutelma geometrian kuvion 3 ja taulukon 4 tarkastelusta ei ainakaan välttämättä ole positiivinen, mutta tarkempi tarkastelu osoittaa, että geometria on sellainen aihealue, josta kokelaat saavat prosentuaalisesti useammin pisteitä väliltä 1-5 kuin tämän tutkimuksen muissa tarkemman tarkastelun aihealueissa. Tämä viittaisi siis siihen, että geometriaa osataan, mutta asioita ei välttämättä ole ymmärretty täydellisesti oikein. Esimerkiksi kuvion 3 kevään 2008 tehtävän 8 korkea oranssipylväs kolmen pisteen kohdalla tarkoittaa sitä, että positiivisena poikkeuksena muihin tarkemman tarkastelun geometrian tehtäväpisteisiin nähden, tästä tehtävästä puolet tehtävään vastanneista on saanut puolet tehtävästä oikein. Toisaalta vain 8 prosenttia kokelaista ylsi korkeampiin arvosanoihin, kun kaiken kaikkiaan neljä viidesosaa kokelaista yritti tätä klassisen geometrian tehtävää.

KEVÄT 2008, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 8

Kolmion ABC pinta-ala on $6cm^2$. *Sivun AB pituus on* 5 *cm ja sivun AC pituus* 4 *cm. Määritä kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.* (Lahtinen 2008, 24)

Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2008, 24) kommentoi Dimensiolehden artikkelissaan, että vain joka kymmenes kokelas havaitsi, että kevään 2008 geometrian tehtävällä 8 on kaksi ratkaisua. Lahtinen (2008, 25) toteaa samassa yhteydessä, että tämän kyllä tiesi jo Eukleides ja hänen kauttaan tietoa on levitetty ympäri maailmaa yli kaksituhatta vuotta. Siltikään tieto ei ole välittynyt jokaiselle pitkän matematiikan kokelaalle. (Lahtinen 2008, 24–25) Kokelaat hallitsevat siis geometrian asioita, mutta turhan usein tehtävän suorittaminen jää puolitiehen ja täysiin pisteisiin pääsee vain pieni osa kokelaista.

Tähtitehtävien osalta taulukosta 4 nähdään, että vastausprosentit geometria-aiheisiin tähtitehtäviin vaihtelevat suuresti. Kevään 2008 tähtitehtävään 15 vastasi vain alle 15 prosenttia pitkän matematiikan kokelaista. Kevään 2009 pyramiditehtävä 14 oli selvästi suositumpi, sillä lähes puolet pitkän matematiikan kokelaista valitsi sen. Muiden geometrian tehtävien osalta vastausprosentit ovat keskimäärin reilun 70 % luokkaa, jos kevään 2012 epäsuosittua ympyräjonotehtävää 11 ei oteta huomioon.

TAULUKKO 5. Geometrian tehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien tehtäväkohtaiset pisteet. P = pakollinen, Y = ylimääräinen. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C).

Pisteet	K04 P T.6	K04 Y T.6	K04 P T.7	K04 Y T.7	K05 P T.6	K05 Y T.6	K06 P T.3	K06 Y T.3
0	536	1300	1551	3044	2185	2434	669	664
1	641	1424	125	192	632	437	373	403
2	144	260	148	209	294	174	381	269
3	130	156	640	651	187	107	86	47
4	467	458	749	510	91	45	257	130
5	210	209	356	215	113	42	1439	732
6	2915	2033	900	340	816	239	4193	1808
Yht. lkm	5043	5840	4469	5161	4318	3478	7398	4053
Vastaus %	91,3	83,8	80,9	74,1	65,6	62,5	98,9	98,3

Pisteet	K07 P T.15	K07 Y T.15	K08 P T.8	K08 Y T.8	K08 P T.15	K08 Y T.15	K09 P T.14	K09 Y T.14
0	1829	873	781	546	370	174	1957	822
1	379	124	549	323	230	79	287	80
2	453	140	1090	587	104	20	367	95
3	124	14	3540	1135	223	35	320	50
4	65	5	130	35	63	9	282	41
5	62	11	89	16	28	0	503	64
6	20	5	405	78	34	3	106	13
7	19	0			31	1	134	11
8	26	1			58	3	147	14
9	32	0			212	8	416	22
Yht. lkm	3009	1173	6584	2720	1353	332	4519	1212
Vastaus %	38,1	29,2	79,5	80,9	16,3	9,9	52,2	40,5

Pisteet	K10 P T.4	K10 Y T.4	K11 P T.7	K11 Y T.7	K12 P T.9	K12 Y T.9	K12 P T.11	´K12 Y T.11
0	3726	1435	403	213	1190	450	733	232
1	179	71	229	91	634	222	348	104
2	188	71	304	130	1095	340	326	84
3	155	32	699	257	1237	382	175	35
4	303	66	664	223	348	67	202	36
5	267	43	1205	354	405	105	122	15
6	1853	291	3956	964	2240	413	351	51
Yht. lkm	6671	2009	7460	2232	7149	1979	2257	557
Vastaus %	76,0	68,3	87,4	86,4	84,7	85,9	26,7	24,2

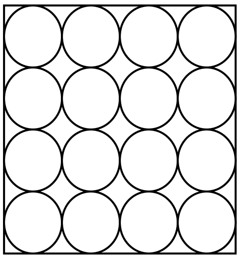
Pakollisten ja ylimääräisten kokeiden suorittajien geometrian tehtävien tehtäväkohtaisia pisteitä taulukosta 5 analysoitaessa nousee esille kaksi poikkeuksellista kevättä. Kevään 2008 tehtävään 8 ja kevään 2012 tehtävään 9 on vastannut suhteellisesti suurempi osa ylimääräisen kokeen suorittajista kuin pakollisen kokeen suorittajista. Ero on molempien tehtävien osalta kuitenkin vain reilun yhden prosenttiyksikön luokkaa. Kaikkien muiden kymmenen tehtävän osalta pakollisen kokeen suorittajat ovat vastanneet prosentuaalisesti useammin geometrian tehtäviin. Suurimmillaan ero pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien osalta on ollut kevään 2009 tähtitehtävän 14 osalta 11,7 prosenttiyksikköä.

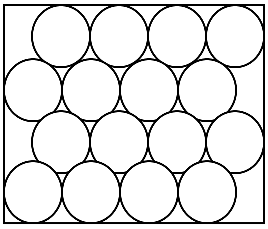
Geometrian perustehtävien osalta joka kevät pakollisen kokeen suorittajista prosentuaalisesti suurempi osa tehtäviin vastanneista on saanut täydet kuusi pistettä kuin ylimääräisen kokeen suorittajista. Ero on joinakin keväinä huomattavan suuri. Esimerkiksi kevään 2004 tehtävän 6 osalta se on jopa 23 prosenttiyksikköä. Toisaalta myös joka kevät prosentuaalisesti selvästi pienempi osa pakollisen kokeen suorittaneista on jäänyt nollille pisteille tarkastelussa olevien geometrian tehtävien osalta. Pakollisena pitkän matematiikan kokeen suorittavat kokelaat menestyvät siis tämän perusteella huomattavasti paremmin geometrian perustehtävissä kuin ylimääräisen kokeen suorittajat. Geometrian tähtitehtävät eivät tee tässä suhteessa myöskään poikkeusta.

Taulukon 4 yhteispistejakaumaa analysoitaessa todettiin, että vastausprosentti kevään 2008 tähtitehtävään 15 oli erittäin alhainen. Taulukon 5 arvoista nähdään, että ylimääräisenä kokeen suorittaneista vain reilu kolme sataa eli vajaa 10 prosenttia uskalsi yrittää tehtävää. Vain 15 heistä sai enemmän kuin viisi pistettä. Tämä osoittaa, että tehtävä tarjosi kokelaille haastetta, mutta emeritusprofessori Aatos Lahtisen artikkelin (2008) mukaan tähtitehtävän virheet olivat kuitenkin sen luonteisia, että enemmänkin pisteitä olisi voinut olettaa useamman hankkivan. Lahtisen (2008, 28) mukaan tyyppitapauksessa oli käsitelty vain vasemmanpuoleista laatikkoa ja ehkä mahdollisesti myös joitain oikeanpuoleisen pisteitä tuottamattomia yksityiskohtia. Kevään 2008 tähtitehtävä käsittelee siis laatikoiden täyttösuhteita.

KEVÄT 2008, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 15

Viinipullon pohjan säde on r. Suorakulmaiseen laatikkoon pakataan n^2 viinipulloa rinnakkain n riviin, jolloin jokaisessa rivissä on n pulloa. Pakkaaminen tehdään jommallakummalla seuraavien kuvioiden esittämistä tavoista (kuvissa on n = 4):





a) Laske, mikä on laatikoiden täyttösuhde, so. viinipullojen pohjien yhteispinta-alan suhde tarvittavan laatikon pohjapinta-alaan kummassakin tapauksessa. Laske kummankin täyttösuhteen numeerinen arvo kahden desimaalin tarkkuudella, kun $n = 10$. (4 p.)

b) Miten täyttösuhteet käyttäytyvät, kun viinilaatikko tulee äärettömän suureksi, ts. $n \to \infty$? (5p.) (Kivelä 2012)

Keväästä 2010 lähtien käytössä olleen tehtäväpaperiuudistuksen ei voida ainakaan vielä tämän tutkimusaikavälin tehtävien perusteella todeta parantaneen geometrian osaamista. Erityistä on kuitenkin se, että kevään 2011 tehtävän 7 ja kevään 2012 tehtävän 9 vastausprosentit sekä pakollisen että ylimääräisen kokeen suorittajien osalta ovat reilusti yli 80 %. Tämä ei ole tavanomaista tutkimusaikavälin kevättä 2010 edeltäneille tehtäväpaikan 6-8 tehtäville. Tehtäväpaperiuudistus vaikutti siis geometrian tehtäviin merkittävästi sillä tavoin, että uudistuksen jälkeen geometrian tehtävät ovat sisältäneet jo valmiiksi mallikuvion, kun aiemmin se piti useissa tehtävissä osata itse piirtää. Voi siis olla mahdollista, että tämän vuoksi geometrian tehtävistä on tullut helpommin lähestyttäviä. Tätä asiaa voidaan tutkia tarkemmin vasta muutaman vuoden kuluttua, kun vertailupohjaa tällä tavalla muotoiltujen geometrian tehtävien ratkaisemisesta on enemmän.

5.1.3 Integraalilaskenta

Integraalilaskennan osalta tarkempaan tarkasteluun tehtäväkohtaisissa pisteissä on valittu kaikki kokonaiset integraalilaskennan tehtävät (painokerroin 1). Tällaisia tehtäviä on tutkimusaikavälillä yhteensä viisi kappaletta. Lisäksi tarkastelussa on mukana lähes kaikki painokertoimella $\frac{1}{2}$ integraalilaskennan taitoja testanneet tehtävät. Ainoat poikkeukset ovat kevään 2005 tehtävä 11 (integraalilaskennan painokerroin $\frac{1}{2}$) ja kevään 2009 tehtävä 9 (integraalilaskennan painokerroin $\frac{1}{2}$). Taulukoinnin tulee kuvata mahdollisimman luotettavasti juuri integraalilaskennan hallitsemista. Näistä kahdesta poissuljetusta tehtävästä ei voida tarkalleen tietää käytettävissä olevan pisteaineiston avulla, kuinka kokelas on hallinnut integraalilaskennan osa-alueen. Kevään 2005 tehtävä 11 vaatii vahvaa geometrista osaamista ennen kuin integraalilaskennan taitojen hyödyntäminen tehtävässä on mahdollista. Kevään 2009 tehtävässä tarvitaan aluksi huomattavasti trigonometrian hallintaa.

Integraalilaskentaa testaava tehtävä on siis valittu tarkempaan tarkasteluun, jos se sisältää integraalilaskentaa painokertoimella $\frac{1}{2}$ tai enemmän. Lisäehtona on, että tehtävä alkaa heti integraalilaskennan taitojen testaamisella. Esimerkki tällaisesta tarkastelussa mukana olevasta painokertoimen $\frac{1}{2}$ integraalilaskennan tehtävästä on kevään 2009 tehtävä 10. Tehtävän ratkaisemiseen tarvitaan integraalilaskennan lisäksi juuri – ja logaritmifunktioiden hallintaa.

KEVÄT 2009, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 10

Kun funktion $e^{-x}, x \epsilon [0, a]$, kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyskappale, jonka tilavuus on $V(a)$. Määritä $V(a)$ ja $V_\infty = \lim_{a\to\infty} V(a)$. Millä a:n arvolla $V(a) = 0{,}99V_\infty$? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella. (Lahtinen 2011, 239)

Yhteensä Integraalilaskenta – aihealueen tehtäviä esiintyy tutkimusaikavälillä 25 eri tehtävässä. Tarkempaan tarkasteluun yllä olevin perusteluin on valittu näistä yhteensä 10 tehtävää. Useita integraalilaskennan perustehtäviä on alkupään tehtävien osakohtina (a, b tai c ja niin edelleen) ja painokerroin on silloin $\frac{1}{3}$ tai pienempi. Nämä tehtävät ovat ongelmallisia pistejakauman tulkitsemisen kannalta, koska käytettävissä olevan aineiston perusteella ei voida tietää, mitä kohtia kokelas on tehtävästä osannut. Sen vuoksi näitä tehtäviä ei ole voitu valita taulukointiin mukaan. Tarkemman tarkastelun tehtäviä on kuitenkin sen verran paljon, että analysointi antaa integraalilaskennan osalta selkeää suuntaa siitä, miten kokelaat aihealuetta hallitsevat. Tuloksia tarkastellessa on kuitenkin otettava huomioon, että tarkastelussa olevat integraalilaskennan tehtävät ovat usein tehtäväpaikoilta 8-15 eli varsinaiset alkupään perustehtävät eivät ole mukana tarkastelussa. Ainoa poikkeus on kevään 2004 kokonainen integraalilaskentaa testaava tehtävä 2.

KEVÄT 2004, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 2

Määritä a siten, että $\int_a^{a+1}(2x+3)dx = \frac{1}{2}$. (Lahtinen 2011, 16)

Tutkimusaikavälillä integraalilaskentaa esiintyy kolmessa eri tähtitehtävässä. Näistä kevään 2010 tehtävä koostuu painokertoimella $\frac{1}{2}$ integraalilaskennasta ja painokertoimella $\frac{1}{2}$ differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin aihealueista. Tämä tehtävä on tarkastelussa mukana.

KEVÄT 2010, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 15, TÄHTITEHTÄVÄ:

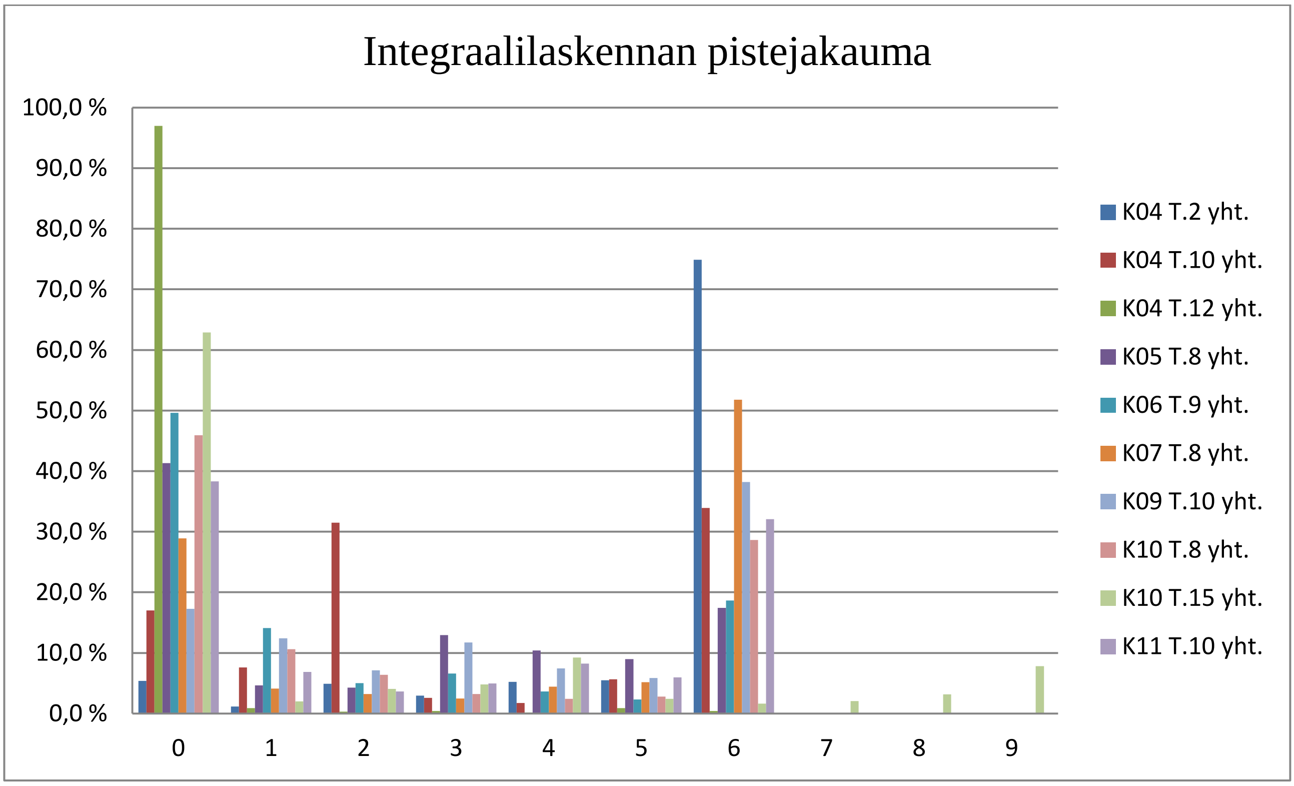
Funktio $f: [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *määritellään seuraavasti:*

$f(x) = 2^{1-n}\sin x$, *kun* $x \in [(n-1)\pi, n\pi[$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

a) *Piirrä funktion kuvaaja, kun* $x \in [0,3\pi]$. *(2p.)*
b) *Laske* $\int_0^{3\pi} f(x)dx$. *(2p.)*
c) *Laske* $\int_0^{n\pi} f(x)dx$. *(2p.)*
d) *Määritä* $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f(x)dx$. *(2p.)* (Lahtinen 2011, 271)

TAULUKKO 6. Integraalilaskennan tehtävät. Pistejakauma. Otantana ovat sekä pakollisena että ylimääräisenä pitkän matematiikan kokeen suorittaneet. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C)

Pisteet	**K04 T.2 yht.**	**K04 T.10 yht.**	**K04 T.12 yht.**	**K05 T.8 yht.**	**K06 T.9 yht.**	**K07 T.8 yht.**	**K09 T.10 yht.**	**K10 T.8 yht.**	**K10 T.15 yht.**	**K11 T.10 yht.**
0	637	1185	675	1218	3890	1185	841	3964	982	831
1	135	530	6	136	1107	169	604	918	31	149
2	582	2191	2	126	394	131	346	553	63	79
3	348	181	3	381	518	101	571	279	75	107
4	614	120	1	306	284	181	362	209	144	178
5	651	391	6	265	181	211	286	240	38	129
6	8855	2360	3	514	1463	2125	1861	2470	25	696
7									32	
8									49	
9									122	
Yht. lkm	11822	6958	696	2946	7837	4103	4871	8633	1561	2169
Vastaus %	94,6	55,7	5,6	24,1	67,5	34,8	41,8	73,6	13,3	19,5



KUVIO 4. Integraalilaskennan tehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien yhteispistejakauma.

Kuviossa 4 huomio kiinnittyy ensimmäiseksi vihreään kevään 2004 tehtävän 12 erittäin korkeaan pylvääseen. Kuvion mukaan lähes kaikki tehtävään vastanneet ovat jääneet nollaan pisteeseen. Taulukkoa 6 tarkemmin tarkastellessa huomataan, että tehtävään on vastannut ainoastaan reilu viisi prosenttia kevään 2004 pitkän matematiikan kirjoittajista. Tehtävä on ollut erittäin haastava, koska ainoastaan kolme kokelasta on osannut tehtävän täyden kuuden pisteen arvoisesti. Kolme pistettä tai enemmän on saanut vain 13 kokelasta! Tehtävä käsittelee paloittain määritellyn funktion integroimista. Lisäksi kokelaan tulee hallita geometriset sarjat eli tehtävä ylittää aihealuerajat. Integraalilaskenta on tehtävässä painokertoimella $\frac{1}{2}$. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2004) totesi kevään 2004 matematiikan ylioppilaskirjoituisten Dimensio-lehden analyysissään, että tyypillisellä tämän tehtävän yrittäjällä oli jo tehtävän alussa hahmotusvaikeuksia. Kokelas sotkeentui jo funktion $f(x)$ sijoittamiseen integraaliin tai viimeistään integraalin jakoon sopiviin palasiin. Lahtinen (2004) päätyikin lopulta siihen, että ilmeisesti tehtävän väliin jättäneet tekivät viisaasti. (Lahtinen 2004, 22)

KEVÄT 2004, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 12

Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *määritellään seuraavasti:*

$$f(x) = 2^{-n}, kun\ n\pi \leq x < (n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Laske integraali

$$I(k) = \int_{0}^{k\pi} f(x) \sin x \, dx \text{ , } kun\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Määritä tämän jälkeen raja-arvo $\lim_{k \to \infty} I(k)$. (Lahtinen 2011, 108–109)

Integraalilaskennan osalta kevään 2004 tehtävä 2 on siis ainoa tarkemmassa tarkastelussa oleva alkupään tehtävä. Taulukon 6 mukaan lähes 95 % pitkän matematiikan kokelaista vastasi tähän tehtävään. Näistä kokelaista lähes 75 % sai täydet kuusi pistettä. Kuviosta 4 nähdään, että tästä tehtävästä on saavutettu eniten täysiä pisteitä tehtävään vastanneiden määrään suhteutettuna. Erityistä on myös se, että juuri tästä tehtävästä on myös vähiten nollaan pisteeseen jääneitä kokelaita. Vain 5,4 % tehtävään vastanneista sai nolla pistettä. Tämän tehtävän perusteella voisi siis päätellä, että kokelailla on integraalilaskennan perusintegrointitaidot hallussa. Luotettavampien tuloksien saamiseksi olisi tarkastelussa oltava useita alkupään integrointitehtäviä. Tähän vaaditaan tarkemmat tehtäväkohtaiset pistejakauma-aineistot osakohtia sisältävistä tehtävistä.

Joka tapauksessa kuvion 4 perusteella voidaan todeta, että suuri osa integraalilaskennan tehtäviin vastaavista kokelaista hallitsee integraalilaskennan vähintään välttävästi, koska jopa haastavampia integraalilaskennan tehtäviä osataan keskinkertaisesti. Jopa neljässä tarkastelun tehtävässä täydet kuusi pistettä on yleisin pistemäärä. Nämä tehtävät ovat kevään 2004 tehtävät 2 ja 10, kevään 2007 tehtävä 8 ja kevään 2009 tehtävä 10. Huomattavaa on se, että kaikissa näissä tehtävissä on myös prosentuaalisesti vähiten nollan pisteen suorittajia. Tämä nähdään kuviossa 4 matalimpina pylväinä nollan pisteen kohdalla. Näistä neljästä tehtävästä ainoastaan kevään 2004 tehtävä 2 on siis alkupään perustehtävä, joten se nostaa entisestään muiden kolmen tehtävien hallinnan arvoa. Tietysti on todettava, että tarkastelun kymmenestä tehtävästä on kuudessa nolla yleisin pistemäärä, mutta näistä neljässä on taas täydet kuusi pistettä toiseksi yleisin pistemäärä.

Kevään 2004 tehtävä 10 on kokonainen integraalilaskennan tehtävä ja reilu 55 % kokelaista vastasi siihen. Kevään 2007 tehtävässä 8 tarvitsee integraalilaskennan lisäksi hallita myös todennäköisyyden ja tilastojen asiasisältöjä. Aihealuerajoja ylittävä tehtävä ei kuitenkaan houkutellut suurta joukkoa kokelaista valitsemaan tehtävää, sillä ainoastaan vajaa 35 % kokelaista valitsi tämän tehtävän. Kevään 2009 tehtävään 10 vastasi sentään yli 40 % kokelaista ja, kuten edellä mainittiin, menestys tässä tehtävässä oli tutkimusaikavälin integraalilaskennan tehtävistä keskivertoa parempi. Tämän tehtävätyypin osalta voitaisiin kuitenkin odottaa vielä huomattavasti parempaa osaamista, koska tällaiset pyörähdyskappaleen tilavuuden määrittämistehtävät kuuluvat olennaisena osana lukion integraalilaskennan kurssiin ja ovat potentiaalisia ylioppilaskokeen tehtäviä. Vaikka tämän tyyppisten tehtävien ratkaisemisessa vaaditaan jo selvästi edistyneempää matemaattista ajattelua, ei sen pitäisi olla ylipääsemätön este kenellekään integraalilaskennan kurssin käyneelle kokelaalle ja matematiikan ylioppilaskokeeseen valmistautuneelle.

Tarkastelussa olevassa kevään 2010 tähtitehtävässä 15 pisteet 1-9 jakautuvat varsin tasaisesti. Valitettavasti kuitenkin täysin ilman pisteitä jäi lähes kaksi kolmas osaa tehtävää yrittäneistä. Ainoastaan 1561 kokelasta uskalsi yrittää tehtävää. Tämän kevään toinen lukujonoja käsittelevä tähtitehtävä oli selvästi suositumpi, joten ehkä sekin jo lisäsi varovaisuutta, että ei enää uskallettu yrittää toista haastavampaa tehtävää. Aatos Lahtisen liitteissä olevien taulukoiden 5 (liitteet C; 5C-10C) mukaan tähtitehtävien vastausprosentti vaihtelee suuresti keväästä ja tehtävästä toiseen. Tutkimusaikavälin tähtitehtävistä suurin vastausprosentti on kevään 2008 tähtitehtävällä 14, jonka ratkaisemiseen tarvitaan viittä eri aihealuetta. Pienin vastausprosentti on tähtitehtävällä 15 keväällä 2011, kun vain 3,8 % kokelaista on uskaltanut vastata analyyttistä geometriaa, juuri – ja logaritmifunktioita sekä differentiaali – ja integraalilaskennan jatkokurssin – aihealueita testaavaan tehtävään.

TAULUKKO 7. Integraalilaskennan tehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien tehtäväkohtaiset pisteet. P = pakollinen, Y = ylimääräinen. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C).

Pisteet	K04 P T.2	K04 Y T.2	K04 P T.10	K04 Y T.10	K04 P T.12	K04 Y T.12	K05 P T.8	K05 Y T.8	K06 P T.9	K06 Y T.9
0	174	463	384	801	265	410	655	563	2290	1600
1	37	98	170	360	3	3	83	53	687	420
2	172	410	796	1395	0	2	87	39	307	87
3	121	227	77	104	3	0	241	140	393	125
4	223	391	57	63	0	1	219	87	225	59
5	246	405	230	161	5	1	225	40	141	40
6	4420	4435	1677	683	3	0	434	80	1210	253
Yht. lkm	5393	6429	3391	3567	279	417	1944	1002	5253	2584
Vastaus %	97,6	92,3	61,4	51,2	5,1	6,0	29,3	18,0	70,2	62,6

Pisteet	K07 P T.8	K07 Y T.8	K09 P T.10	K09 Y T.10	K10 P T.8	K10 Y T.8	K10 P T.15	K10 Y T.15	K11 P T.10	K11 Y T.10
0	676	509	590	251	2714	1250	718	264	605	226
1	92	77	389	215	649	269	25	6	116	33
2	100	31	260	86	411	142	53	10	66	13
3	65	36	405	166	215	64	66	9	85	22
4	133	48	289	73	173	36	129	15	153	25
5	166	45	247	39	197	43	36	2	117	12
6	1722	403	1654	207	2179	291	24	1	652	44
7							29	3		
8							48	1		
9							118	4		
Yht. lkm	2954	1149	3834	1037	6538	2095	1246	315	1794	375
Vastaus %	37,4	29,5	44,2	34,6	74,5	71,2	14,2	10,7	21,0	14,5

Pakollisten ja ylimääräisten kokeiden suorittajien integraalilaskennan tehtäväkohtaisia pisteitä taulukosta 7 tarkasteltaessa huomataan, että vastausprosenteissa on ajoittain suurempaakin hajontaa. Suurimmillaan ero on 10,2 prosenttiyksikköä kevään 2004 tehtävässä 10. Lähes joka kevät pakollisen kokeen suorittajien vastausprosentti integraalilaskennan tehtäviin on korkeampi kuin ylimääräisen kokeen suorittajien. Ainoastaan kevään 2004 tehtävä 12 on tässä suhteessa poikkeus. Se on ainoa tutkimusaikavälin integraalilaskennantehtävä, johon on vastannut prosentuaalisesti suurempi osa ylimääräisen kokeen suorittaneista. Jo aiemmin tässä integraalilaskentaa käsittelevässä kappaleessa on todettu, että tämä kyseinen tehtävä osoittautui kokelaille erittäin haastavaksi. Ehkä pakollisen kokeen suorittajat toimivat siis viisaammin, kun suurempi osa heistä jätti tehtävän kokonaan väliin. Ylimääräisenä kokeen suorittaneista 417 kokelasta uskaltautui yrittämään tehtävää. Vain seitsemän heistä sai pisteitä, kun kaikki muut jäivät nollaan pisteeseen.

Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien integraalilaskennan tehtävien ratkaisemisessa on eroa. Joka kevät suurempi osa pakollisena kokeen suorittavista hallitsee integraalilaskennan tehtävät paremmin ja saa enemmän pisteitä tehtävistä. Kun tarkastellaan taulukosta 7 joka kevään osalta 4-6 pistettä saaneiden kokelaiden lukumäärää pakollisen ja ylimääräisen kokeen osalta ja verrataan näitä keskenään, käy ilmi, että näiden korkeimpien pistemäärien 4-6 osalta ero on ajoittain jopa huomattavan suuri. Esimerkiksi kokonaisesta integraalilaskennantehtävästä numero 10 sai keväällä 2011 yli puolet pakollisen kokeen tehtävään vastanneista 4-6 pistettä, kun ylimääräisen kokeen osalta vain noin viidesosa ylsi samaan. Viittaisiko tämä siis siihen, että pakollisen kokeen suorittavat panostavat enemmän integraalilaskennan aihealueeseen lukio-opintojensa aikana? Integraalilaskenta on matematiikan aihealue, jonka hallintaa tarvitaan jatko-opinnoissa useilla aloilla. Vastausprosentit integraalilaskennan tehtävien suhteen sekä pakollisen että ylimääräisen kokeen osalta pitäisivät siis olla huomattavasti korkeammat. Lukiolaisten kanssa työskentelevillä riittää siis vielä runsaasti haastetta herättää mielenkiintoa integraalilaskentaa kohtaan.

Tutkimusaikavälin ainoan tarkemmassa tarkastelussa olevan integraalilaskennan perustehtävän (kevät 2004 tehtävä 2) suhteen pisteet jakautuvat samassa suhteessa sekä pakollisen että ylimääräisen kokeen suorittajien osalta. Positiivista on se, että pakollisen kokeen suorittajista yli 90 % ja ylimääräisen kokeen suorittajista yli 80 % on saanut tästä perustehtävästä yli 4 pistettä. Tarkastelussa olevan tähtitehtävän osalta pakollisen kokeen suorittaneista 118 kokelasta pääsi täyteen yhdeksään pisteeseen. Ylimääräisen kokeen suorittajista neljä kokelasta ylsi tähän samaan tulokseen. Ainoastaan 315 ylimääräisen kokeen suorittajaa ylipäätään uskalsi yrittää tätä tehtävää. Tämä on kuitenkin lukumäärällisesti enemmän kuin kevään 2004 erittäin haastavaksi osoittautuneeseen tehtävään 12 vastanneiden pakollisen kokeen suorittajien lukumäärä, joka oli vain 279 kokelasta eli noin viisi prosenttia pakollisena kokeen sinä keväänä suorittaneista.

5.1.4 Prosenttilasku

Tutkimusaikavälillä prosenttilaskua on testattu kahdeksassa eri tehtävässä. Kevään 2004 – 2008 tehtävät ovat kokonaisia painokertoimen 1 prosenttilaskutehtäviä. Keväästä 2009 lähtien prosenttilasku on ollut joko osana tehtävää (kuten keväällä 2010 painokertoimella $\frac{1}{4}$) tai jonkin tehtävän a- tai b-kohtana (kuten keväällä 2009 tehtävän 3 b-kohtana ja keväällä 2011 tehtävän 2 a-kohtana). Keväällä 2012 ei ollut lainkaan prosenttilaskun tehtäviä. Tarkempaan tarkasteluun tehtäväkohtaisista pisteistä prosenttilaskun osalta on valittu kaikki kokonaiset prosenttilaskun tehtävät. Olisi mielenkiintoista tarkastella myös osakohtina olleita kevään 2009 ja 2011 tehtäviä, mutta käytettävissä olevan aineiston perusteella ei voida tehdä tarpeeksi luotettavaa analyysiä siitä, kuinka kokelas on näissä tehtävissä hallinnut juuri prosenttilasku-osakohdan. Viiden kevään prosenttilaskutehtävien tehtäväkohtaiset tulokset antavat kuitenkin selkeää kuvaa siitä, että hallitsevatko kokelaat tätä yleishyödylliseksi korostettua matematiikan osa-aluetta.

Prosenttilaskutehtävät ovat aina sanallisia tehtäviä ja tehtävän ratkaisemiseksi kokelaan pitää osata muodostaa jonkinlainen yhtälö. Ylioppilastehtävien aihealueet prosenttilaskun osalta liittyvät usein läheisesti kokelaiden omaan arkipäivän elämään tai sellaisiin aiheisiin, jotka tulevat monelle kokelaalle ajankohtaiseksi lukion jälkeen. Esimerkiksi kevään 2004 tehtävässä 3 käsitellään perheen vuokramenoja. Myös kevään 2005 tehtävässä 3 lasketaan vuokrien korostusta. Kevään 2006 tehtävässä määritellään rakennustarvikkeiden osuutta ja kevään 2008 prosenttilaskutehtävässä parturimaksuja.

KEVÄT 2004, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 3

Perheen vuokramenot olivat 25 % tuloista. Vuokramenot nousivat 15 %. Montako prosenttia vähemmän rahaa riitti muuhun käyttöön korotuksen jälkeen? (Lahtinen 2011, 16)

Kevään 2007 prosenttilaskutehtävän tehtäväasettelu poikkeaa muista tutkimusaikavälin tehtävistä, koska koko tehtävä käsittelee prosenttilaskua, mutta tehtävä on silti jaettu a- ja b-kohtaan. Alla olevasta taulukosta 8 nähdään, että 95,5 % kokelaista vastasi tähän tehtävään, joten muista keväistä eroava tehtäväasettelu ei ainakaan saanut kokelaita hyppäämään prosenttilaskutehtävän yli.

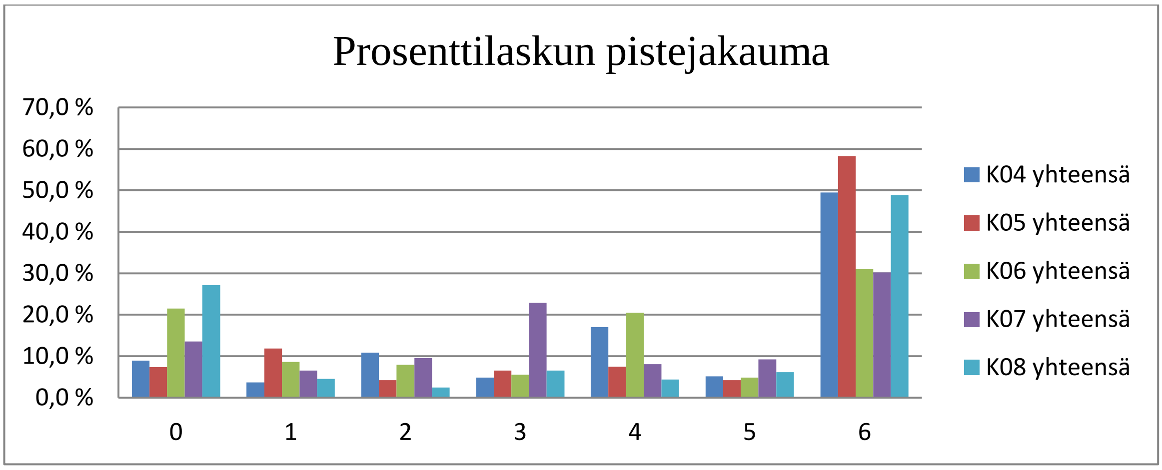
KEVÄT 2007, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 3

a) *Merivettä, jossa on 4,0 painoprosenttia suolaa, haihdutetaan altaassa, kunnes sen massa on vähentynyt 28 %. Mikä on suolapitoisuus haihduttamisen jälkeen? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.*

b) *Mikä on vuotuinen korkoprosentti, jos tilille talletettu rahamäärä kasvaa korkoa korolle 1,5-kertaiseksi 10 vuodessa? Lähdeveroa ei oteta huomioon. Anna vastaus prosentin sadasosan tarkkuudella.* (Lahtinen 2011, 25)

TAULUKKO 8. Prosenttilasku – tehtävät. Pistejakauma. Otantana ovat sekä pakollisena että ylimääräisenä pitkän matematiikan kokeen suorittaneet. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-6C).

Pisteet	K04 yhteensä	K05 yhteensä	K06 yhteensä	K07 yhteensä	K08 yhteensä
0	1106	863	2072	1529	2313
1	452	1387	834	739	383
2	1346	495	766	1071	207
3	603	764	537	2578	559
4	2110	872	1976	907	373
5	637	492	470	1043	524
6	6124	6811	2991	3401	4159
Yht. lkm	12378	11684	9646	11268	8518
Vastaus %	99,1	95,7	83,1	95,5	73,1



KUVIO 5. Prosenttilasku- tehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien yhteispistejakauma

Kuviota 5 tarkasteltaessa positiivista on se, että selvästi yleisin pistemäärä joka kevät on täydet kuusi pistettä. Joka kevät vähintään 30 % tehtävään vastanneista on saanut kuusi pistettä. Selkeä ero muihin tässä tutkimuksessa tarkemmassa tarkastelussa oleviin aihealueisiin on, että yhteispistejakauman kuviossa 5 nolla ei ole vallitseva pistemäärä, vaikka toki se on useana keväänä toiseksi tai kolmanneksi yleisin pistemäärä. Yleisesti ottaen prosenttilaskutehtävien pisteet jakautuvat selvästi tasaisemmin ja tehtävän täydellisesti osaavia on joka kevät huomattava määrä tehtävään vastanneista. Näin tietysti pitääkin olla, koska prosenttilaskutehtävät ovat aina alkupään perustehtäviä.

Taulukon 8 ja kuvion 5 perusteella voidaan siis todeta, että varsin suuri osa kokelaista hallitsee prosenttilaskun. Edelleen on kuitenkin myös suuri osa kokelaita, joille prosenttilasku tuottaa paljon hankaluuksia. Taulukosta 8 nähdään, että esimerkiksi kevään 2006 kesämökin rakentamisen rahoittamiseen liittyvästä tehtävästä 4 reilu 30 % tehtävään vastanneista kokelaista sai vain 0 tai 1 pistettä. Voi vain pohtia sitä, että kuinkahan moni näistä kokelaista on myöhemmin elämänsä aikana joutunut suurien haasteiden eteen, kun on pitänyt laskea oman asunnon ostamiseen tai esimerkiksi juuri kesämökin rahoittamiseen liittyen prosenttilaskuja.

Tutkimusaikavälillä kokelaat ovat vastanneet prosenttilaskutehtäviin kiitettävällä vastausprosentilla. Keväällä 2004 vastausprosentti oli lähes 100 % ja keväällä 2005 ja 2007 yli 95 %. Kevät 2008 on tässä suhteessa poikkeus, koska silloin vain 73,1 % kokelaista vastasi prosenttilaskun tehtävään. Ehkä tämä saattoi olla viisas päätös, sillä lähes 30 % tehtävään vastanneista kokelaista sai nolla pistettä. Toisaalta kuitenkin lähes 50 % tehtävään vastanneista sai täydet pisteet tästä tehtävästä. Kyseessä oleva kevään 2008 tehtävä 4 käsittelee arvonlisäveroja.

<u>*KEVÄT 2008, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 4*</u>

Vuonna 2007 alennettiin parturimaksujen arvonlisäveroa 22 prosentista 8 prosenttiin. Jos alennus olisi siirtynyt täysimääräisenä parturimaksuihin, kuinka monta prosenttia ne olisivat alentuneet? Arvonlisävero ilmoitetaan verottomasta hinnasta ja se on osa tuotteen tai palvelun hintaa.

(Lahtinen 2011, 2008)

TAULUKKO 9. Prosenttilasku. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien tehtäväkohtaiset pisteet. P = pakollinen, Y= ylimääräinen. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-6C)

Pisteet	K04 P	K04 Y	K05 P	K05 Y	K06 P	K06 Y
0	298	808	395	468	1105	967
1	137	315	618	769	454	380
2	441	905	225	270	449	317
3	204	399	350	414	366	171
4	809	1301	441	431	1360	616
5	280	357	263	229	346	124
6	3327	2797	4147	2664	2281	710
Yht. lkm	5496	6882	6439	5245	6361	3285
Vastaus %	99,5	98,8	96,9	94,3	85,0	79,6

Pisteet	K07 P	K07 Y	K08 P	K08 Y
0	794	735	1474	839
1	383	356	244	139
2	646	425	140	67
3	1700	878	376	183
4	642	265	263	110
5	747	296	378	146
6	2691	710	3244	915
Yht. lkm	7603	3665	6119	2399
Vastaus %	96,2	94,1	73,9	71,3

Kevään 2004 pakollisen ja ylimääräisen kokeen tehtäväpisteitä verrattaessa huomio kiinnittyy siihen, että lähes 7000 ylimääräisen kokeen suorittajaa on valinnut prosenttilaskennan tehtävän ja pakollisen kokeen suorittajista vain vajaa 5500. Pitää kuitenkin muistaa kevään 2004 tutkimusaikavälille poikkeuksellinen tilanne, että koko tutkinnossa matematiikan ylimääräisen kokeen suorittajia oli enemmän kuin pakollisen kokeen suorittajia. Silti myös keväällä 2004 pakollisen kokeen suorittaneet vastasivat prosenttilaskutehtävään suuremmalla vastausprosentilla kuin ylimääräisen kokeen suorittaneet. Tutkimusaikavälillä muina keväinä ylimääräisen kokeen suorittajista prosenttilaskutehtäviä on valinnut keskimäärin vajaa 3700 ylimääräisenä matematiikan kokeen suorittanutta kokelasta. Tämä on huomattavasti vähemmän kuin jokaisen kevään pakollisen kokeen prosenttilaskutehtäviin vastanneiden lukumäärä. Prosentuaalisesti ero ei ole kuitenkaan suuri, koska ylimääräisen kokeen suorittajien lukumäärä on vähentynyt joka kevät. Suurimmillaan ero on ollut keväällä 2006 5,4 prosenttiyksikköä. Keväällä 2005, 2007, 2008 ero on ollut kuitenkin vain reilut kaksi prosenttiyksikköä.

Kun taulukon 9 tiedot suhteutetaan pakollisen tai ylimääräisen kokeen osallistujamääriin, osoittautuu, että ylimääräisenä kokeen suorittavat saavat prosenttilaskutehtävistä heikommin pisteitä kuin pakollisena kokeen suorittavat. Keskimäärin 15–20 prosenttiyksikköä vähemmän ylimääräisen kokeen suorittajista saa täydet pisteet kuin pakollisen kokeen suorittajista. Huomionarvoista on kuitenkin se, että lähes joka kevät ylimääräisen kokeen suorittaneet saavat tehtävään vastanneiden määrään suhteutettuna useammin pisteitä väliltä 3-5. Esimerkiksi keväällä 2004 ylimääräisen kokeen suorittaneista lähes 20 % sai 4 pistettä, kun pakollisena kokeen suorittaneista vain alle 15 % ansaitsi tämän pistemäärän. Joka tapauksessa pistejakauman erot pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien välillä ovat yllättävänkin pieniä.

Pakollisen ja ylimääräisen kokeen yhteispistejakauman taulukkoa 8 analysoitaessa, todettiin, että kevät 2008 oli prosenttilaskutehtävien osalta erikoinen. Yhteensä vain 73,1 % pitkän matematiikan kokeeseen osallistuneista kokelaista vastasi prosenttilaskutehtävään. Taulukon 9 mukaan pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien välillä ei tässä suhteessa kuitenkaan ole huomattavaa eroa, sillä molemmissa vastausprosentti oli reilut 70 %. Merkittävää on kuitenkin se, että juuri tämän kevään tehtävästä yli 50 % tehtävään vastanneista pakollisen kokeen suorittajista sai täydet kuusi pistettä. Esimerkiksi kevään 2006 ja 2007 tehtävien osalta tämä osuus oli vain noin 35 %.

5.1.5 Ääriarvotehtävät

Ääriarvotehtäviä on tutkimusaikavälillä yhteensä yhdeksän tehtävää, jotka kaikki ovat mukana tämän kappaleen tarkemmassa tarkastelussa. Neljä näistä tehtävistä on luokiteltu kokonaisiksi painokertoimen yksi Derivaatta-aihealueen tehtäviksi. Kolmena keväänä (2006, 2007 ja 2012) Derivaatta-aihealue on mukana ääriarvotehtävässä painokertoimella $\frac{1}{2}$ tai $\frac{3}{4}$. Ääriarvotehtävät ovat aihealuerajat ylittäviä näinä keväinä joko Juuri- ja logaritmifunktiot tai Geometria – aihealueen kanssa.

Kevään 2004 tehtävä 8 koostuu a ja b – kohdista. Kyseessä on analyyttisen geometrian ääriarvotehtävä, jossa a- kohdassa pitää määrittää ensin ympyrän yhtälö (analyyttisen geometrian aihealuetta) ja b- kohdassa ääriarvotehtävänä ympyrän alan suurin mahdollinen arvo. Tämä tehtävä on siis otettu myös mukaan tarkempaan tarkasteluun. Tuloksia analysoidessa ja muiden kevään tehtäviin vertailtaessa tulee kuitenkin muistaa, että käytössä olevan pistejakauma-aineiston avulla ei voida olla täysin varmoja, kuinka suuri osa kokelaista on hallinnut tässä tehtävässä ääriarvotehtäväosuuden. Tehtävä on laadittu siten, että jos ei hallitse analyyttisen geometrian aihealueista ympyrän yhtälöä, on erittäin vaikeaa saada ratkaistuksi b-kohdan ääriarvotehtävää. Toinen poikkeus tutkimusaikavälillä on se, että kevään 2005 ääriarvotehtävä 15 on tehtävänannossa pyydetty laskemaan Newtonin menetelmällä. Newtonin menetelmä kuuluu opetussuunnitelman perusteiden (2003) mukaan Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä – aihealueen piiriin. Sen vuoksi tämä tehtävä on luokiteltu tässä tutkimuksessa (liite 1B) Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä – aihealueen tehtäväksi. Koska kyseessä on kuitenkin selvästi ääriarvotehtävä, on se valittu myös tähän kappaleeseen 5.1.5 tarkempaan ääriarvotehtävien tarkasteluun.

Keväällä 2008, 2011 ja 2012 kokelaille on tarjottu helppoja pisteitä ääriarvotehtävistä. Kevään 2008 ja 2012 on annettu funktion lauseke valmiina ja tehtävänä on ollut määrittää suurin ja pienin arvo tietyllä välillä. Myös keväällä 2011 on samantyyppisestä laskutaidosta ollut hyötyä, kun tehtävänä on ollut määrittää polynomin suurin ja pienin arvo. Eurajoen lukion matematiikan opettaja Leena Mannila on todennut Elisa Lautalan (2012) LUMA Sanomien artikkelissa pitkän matematiikan kevään 2012 kokeesta, että tehtävä 5 oli ääriarvotehtävänä hyvin odotettu tehtävätyyppi. Tehtävässä ei ole monimutkaista derivaattafunktiota ja sen nollakohtien etsiminen tapahtuu helposti, jos Derivaatta-aihealueen perusasiat ovat kokelaiden hallussa. Mannila korosti myös, että tämän tehtävän ratkaisemisessa symbolisen laskimen käytöstä oli huomattavaa hyötyä. (Mannilan kommentit Lautalan artikkelissa 2012) Tämä kevään 2012 tehtävä on esimerkkinä mekaanisesta ääriarvotehtävästä, jossa funktion lauseke on annettu.

KEVÄT 2012, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 5

Määritä funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ *suurin arvo, kun* $x > 0$. (Lahtinen 2012c, 27)

Toinen perinteinen tyyppiesimerkki pitkän matematiikan ääriarvotehtävästä on erilaisten geometristen kuvioiden suurimpien mahdollisten pinta-alojen määrittäminen. Esimerkkinä on kevään 2009 tehtävä 7, jossa geometrisena kuviona on kolmio.

KEVÄT 2009, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 7

Paraabelin $y = x^2$ *pisteeseen* $(x_0, y_0), x_0 \in \,]0,1]$*, piirretty tangetti, x-akseli ja suora* $x = 1$ *muodostavat kolmion. Millä arvolla* x_0 *tämä kolmio on pinta-alaltaan suurin?*
(Lahtinen 2009, 27)

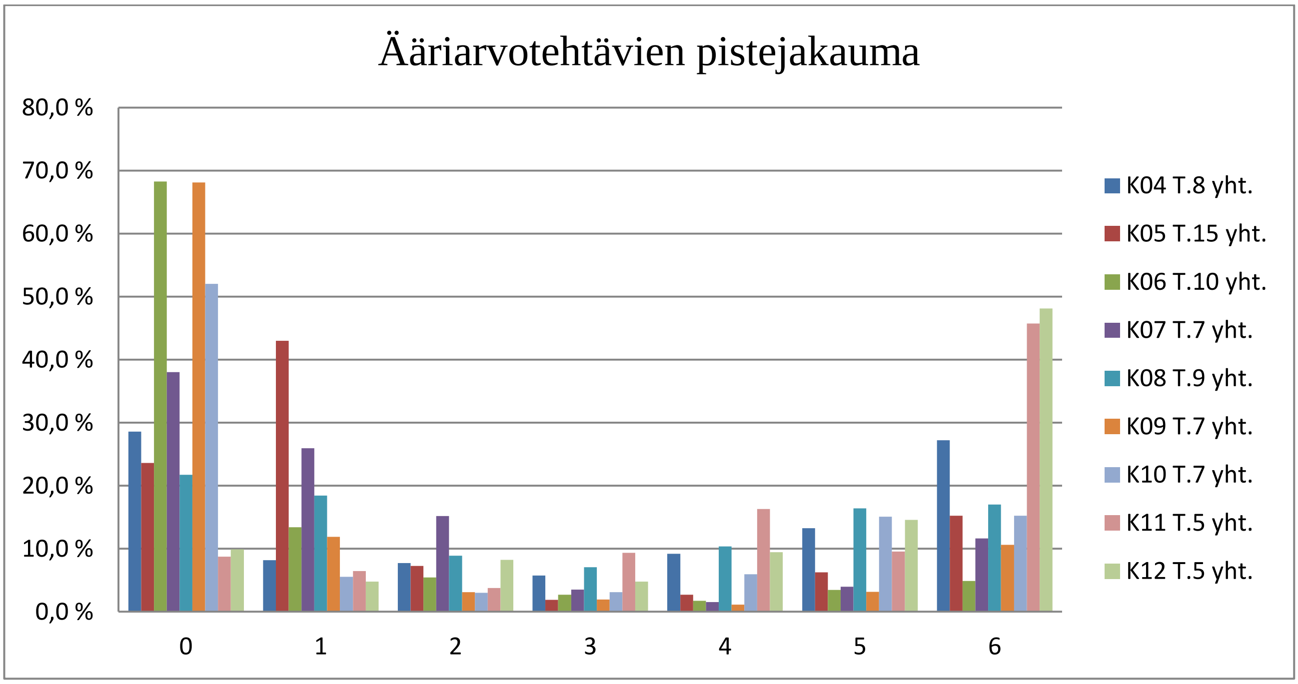
Kevään 2006 ääriarvotehtävä poikkeaa kontekstiltään huomattavasti muista tutkimusaikavälin ääriarvotehtävistä. Tehtävä 10 käsittelee tulta syökseviä lohikäärmeitä ja sanallisena ääriarvotehtävänä se voidaan luokitella haastavaksi. Yllättäen esimerkkitehtävän 10 jälkeisestä taulukosta 10 nähdään, että tehtävän erikoisuudesta riippumatta joka kolmas kokelaista halusi testata taitojaan lohikäärmeitä vastaan. Tehtävän poikkeuksellisuus suuntasikin osan kokelaista ihan väärille jäljille. Emeritusprofessori Aatos Lahtisen (2006, 23) mukaan jotkut kokelaista tyytyivät tehtävän ratkaisun sijasta pohtimaan tilannetta muun muassa seuraavaan tyyliin: ”Koska lohikäärme on mielikuvituksen tuotetta, voi solassa kulkea missä tahansa” tai ”Kannattaa kulkea, kun lohikäärmeet nukkuvat”. Kun kyseessä on matematiikan ylioppilaskoe, voi miettiä, millaisella asenteella tämän tyyppisiä vastauksia kirjoittaneet kokelaat ovat lähteneet tätä tehtävää ratkaisemaan?

KEVÄT 2006, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 10

Tulta syöksevät lohikäärmeet Draco ja Nid vartoivat solaa, ja solassa kulkeva joutuu menemään niiden välistä. Lohikäärmeiden välinen etäisyys on 200 kyynärää. Tulisuihkun vaikutus on suoraan verrannollinen lohikäärmeen kokoon ja kääntäen verrannollinen lohikäärmeestä mitatun etäisyyden kolmanteen potenssiin. Draco on kaksi kertaa niin suuri kuin Nid. Mistä kohtaa lohikäärmeiden välistä kulkijan on vaellettava, jotta hän selviäisi mahdollisimman vähällä? Anna vastaus kyynärän tarkkuudella. (Lahtinen 2011, 155)

TAULUKKO 10. Ääriarvotehtävät. Pistejakauma. Otantana sekä pakollisena että ylimääräisenä pitkän matematiikan kokeen suorittaneet. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C)

Pisteet	K04 T.8 yht.	K05 T.15 yht.	K06 T.10 yht.	K07 T.7 yht.	K08 T.9 yht.	K09 T.7 yht.	K10 T.7 yht.	K11 T.5 yht.	K12 T.5 yht.
0	2128	325	2951	3098	1967	4457	3475	947	939
1	610	592	581	2114	1668	778	371	698	455
2	577	100	235	1239	806	203	201	411	781
3	429	26	118	288	639	129	209	1010	455
4	685	37	75	128	936	74	397	1764	896
5	989	86	151	325	1485	206	1007	1032	1380
6	2029	210	211	949	1540	696	1019	4945	4555
Yht. lkm	7447	1376	4322	8141	9041	6543	6679	10807	9461
Vastaus %	59,6	11,3	37,2	69,0	77,6	56,1	57,0	97,2	88,0



KUVIO 6. Ääriarvotehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien yhteispistejakauma.

Taulukossa 10 erityistä on se, että tutkimusaikavälin ääriarvotehtävien vastausprosentit vaihtelevat suuresti. Linjana on selvästi se, että mekaaniseen suurimman ja pienimmän arvon määrittämistehtävään vastaa tyypillisesti suuri osa kokelaista. Kevään 2011 tehtävän viisi osalta vastausprosentti on ollut jopa 97 %. Positiivista oli se, että myös tulostaso tämän kevään tehtävän osalta oli kohtuullinen. Kuvion 6 vaaleanpunaiset pylväät tehtävän 11 (kevät 2011) osalta painottuvat selkeämmin pisteiden 4-6 alueelle. Siltikin esimerkiksi kevään 2012 osalta samantyyppiseen tehtävään jätti yli 1200 kokelasta vastaamatta. Keväällä 2008 vastausprosentti oli vielä alhaisempi, kun noin neljä viides osaa kokelaista uskalsi yrittää sitä. Jälkimmäisen tehtävän osalta se oli ehkä viisastakin, koska nolla oli tässä tehtävässä yleisin pistemäärä. Kevään 2012 tehtävässä menestys oli huomattavasti parempaa, kun lähes puolet tehtävään vastanneista ansaitsi täydet kuusi pistettä. Hämmästyttävää on se, kuinka suuresti kokelaiden osaamistaso ja vastausprosentit vaihtelevat näiden kolmen tehtävän kesken, kun kyseessä on ennakkoon odotettu ääriarvotehtävien tehtävätyyppi. Miksi jokainen matematiikan kokelas ei harjoittele näitä tehtäviä niin, että ne sujuisivat vaikka unissaan? Onko suurin ongelma jo itse derivoinnissa? Tätä puoltaa ainakin emeritusprofessori Aatos Lahtisen (2008) kommentti huonosti menneen tehtävän 9 osalta, josta hän toteaa, että eniten virheitä oli neliöjuuren sisältävän funktion derivoinnissa. Joka tapauksessa kuviosta 6 nähdään, että juuri nämä mekaaniset suurimman ja pienimmän arvon määrittämistehtävät ovat niitä ääriarvotehtäviä, jotka kokelaat hallitsevat parhaiten.

Taulukosta 10 nähdään, että toiseksi eniten vastataan ääriarvotehtäviin, joissa pitää määrittää jonkin geometrisen kuvion suurinta mahdollista pinta-alaa. Tällaisia tehtäviä on tutkimusaikavälillä neljä kappaletta (kevät 2004 T.8b, kevät 2007 T. 7, kevät 2009 T. 7 ja kevät 2010 T.7) ja vastausprosentti näissä tehtävissä on keskimäärin 60 prosenttia. Vastausprosentti on kuitenkin alhainen siihen nähden, että tällaisia tavanomaisia ääriarvotehtäviä lasketaan varmasti lukiossa useita. Valitettavasti jokaisessa näistä neljästä tehtävästä nolla on yleisin pistemäärä. Tämän tyyppiset ääriarvotehtävät tuottavat siis kokelaille yllättävän paljon ongelmia.

Pienimmät vastausprosentit tutkimusaikavälillä ovat kevään 2006 lohikäärme-aiheisessa tehtävässä reilu 37 prosenttia ja kevään 2005 Newtonin menetelmä-tehtävässä vain vajaa 12 prosenttia. Lohikäärmetehtävän erikoisuus tyypillisiin ääriarvotehtäviin verrattuna on karkottanut suuren osan kokelaista. Kevään 2005 tehtävän erittäin pieni vastausprosentti kummastuttaa, koska niille kokelaille, jotka ovat suorittaneet Numeeriset ja algebralliset menetelmät – kurssin lukiossa, tässä olisi ollut tarjolla helppoja pisteitä tehtäväsarjan viimeisestä tehtävästä. Ne, ketkä tehtävää uskalsivat yrittää, saivat useimmiten edes muutamia pisteitä suorituksestaan.

KEVÄT 2005, PITKÄ MATEMATIIKKA, TEHTÄVÄ 15

Määritä funktion $f(x) = x \sin x$ pienin positiivinen ääriarvokohta ja vastaava ääriarvo ratkaisemalla derivaatan nollakohta Newtonin menetelmällä. Anna vastaukset viiden desimaalin tarkkuudella. Hahmottele funktion kuvaaja välillä $[0, 2\pi]$. (Lahtinen 2011, 137)

TAULUKKO 11. Ääriarvotehtävät. Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien tehtäväkohtaiset pisteet. P = pakollinen, Y = ylimääräinen. Taulukon tiedot on koottu liitteessä olevista emeritusprofessori Aatos Lahtisen aineistoista (liitteet A ja C liitteistä 2A-10C)

Pisteet	**K04 P**	**K04 Y**	**K05 P**	**K05 Y**	**K06 P**	**K06 Y**	**K07 P**	**K07 Y**	**K08 P**	**K08 Y**
0	776	1352	171	154	1798	1153	1772	1326	1182	785
1	266	344	318	274	477	104	1356	758	1048	620
2	215	362	70	30	198	37	870	369	506	300
3	202	227	24	2	105	13	224	64	468	171
4	376	309	27	10	69	6	106	22	704	232
5	598	391	69	17	145	6	275	50	1171	314
6	1425	604	178	32	202	9	833	116	1319	221
Yht. lkm	3858	3589	857	519	2994	1328	5436	2705	6398	2643
Vastaus %	69,8	51,5	12,9	9,3	40,0	32,2	68,8	69,5	77,2	78,6

Pisteet	**K09 P**	**K09 Y**	**K10 P**	**K10 Y**	**K11 P**	**K11 Y**	**K12 P**	**K12 Y**
0	3100	1357	2313	1162	626	321	673	266
1	592	186	258	113	483	215	336	119
2	174	29	169	32	278	133	547	234
3	110	19	176	33	703	307	312	143
4	64	10	342	55	1308	456	690	206
5	188	18	894	113	820	212	1114	266
6	646	50	924	95	4108	837	3827	728
Yht. lkm	4874	1669	5076	1603	8326	2481	7499	1962
Vastaus %	56,4	55,8	57,8	54,5	97,6	96,1	88,8	85,2

Taulukon 11 pakollisten ja ylimääräisten kokeiden suorittajien ääriarvotehtävien tehtäväkohtaisten pisteiden analysointi osoittaa, että erot pakollisten ja ylimääräisten kokeiden vastausprosenteissa ovat pääasiassa suhteellisen pieniä (0,6-3,6 prosenttiyksikköä). Kevään 2004 tehtävän osalta vastausprosentit eroavat radikaalisti, sillä eroa on jopa 18,3 prosenttiyksikköä. Kuten aiemmin todettiin taulukon 1 yhteydessä, kevään 2004 tutkinnon suorittaneiden rakenne oli tämän tutkimuksen tutkimusaikavälille hyvin poikkeuksellinen. Keväällä 2004 ylimääräisen kokeen suorittaneita oli huomattavasti suurempi määrä kuin pakollisen kokeen suorittaneita. Kaikkina muina tutkimusaikavälin keväinä pakollinen koe on ollut suositumpi. Erikoista on se, että vaikka kevät 2004 tässä suhteessa eroaakin muista tutkimusaikavälin keväistä, ei kevään 2004 tehtäväkohtainen pisterakenne ääriarvotehtävän osalta kuitenkaan eroa muiden keväiden ääriarvotehtävien pisterakenteesta. Nimittäin kaikkina tutkimusaikavälin keväinä suurempi osa pakollisena kokeen suorittaneista menestyy ääriarvotehtävissä paremmin täyden kuuden pisteen arvoisesti kuin ylimääräisenä kokeen suorittaneet. Pakollisena kokeen suorittavat hallitsevat siis nämä tehtävät paremmin, sillä taulukon 11 tietojen mukaan he myös jäävät joka kevät prosentuaalisesti harvemmin ilman pisteitä ääriarvotehtävistä.

Kevään 2007 ja 2008 tehtävät ovat olleet siinä suhteessa poikkeuksellisia, että niihin on vastannut prosentuaalisesti suurempi osa ylimääräisen kokeen suorittajista. Miksi suurempi osa pakollisen kokeen suorittajista on jättänyt väliin nämä kaksi tehtävää? Onko se voinut ollut jopa viisasta omien taitorajojen tuntemista? Kuten aiemmin tässä kappaleessa jo mainittiin, kevään 2008 tehtävä meni erittäin huonosti. Tehtävä on hyvin tyypillinen lukio-opetuksessa esiintyvä ääriarvotehtävätyyppi, mutta ilmeisesti kokelaat eivät olleet valmistautuneet tarpeeksi hyvin tämän tyyppiseen tehtävään. Aikavälillä kevät 2004–2007 tällaista tehtävätyyppiä ei oltu käytetty pitkän matematiikan kevään kokeiden tehtäväsarjoissa. Jos käy läpi tutkimusaikaväliä edeltäneitä kevään kokeita, ei tehtävätyyppi kuitenkaan ole mitenkään odottamaton. Jokaisella kokelaalla pitäisi olla valmiudet tämän tehtävän ratkaisemiseen Derivaatta-kurssin läpikäynnin jälkeen.

Kevään 2007 tehtävän osalta emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2007) on todennut Dimension artikkelissaan, että suorituksissa oli nähtävissä koulukohtaisia eroja. Joissain kouluissa enemmistönä olivat hyvin loppuunviedyt suoritukset, kun joissain kouluissa taas mentiin jo heti alkuun väärille jäljille tai ei yritetty lähes lainkaan. (Lahtinen 2007, 27) Onko siis kuitenkin niin, että ääriarvotehtäviä painotetaan eri lukioissa eri tavoin?

6. TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS

Koko tutkimuksen toteutuksen ajan periaate on ollut se, että tutkimuksen kulku kuvataan niin tarkasti, että jokainen voi halutessaan toteuttaa tutkimuksen uudelleen. Tutkija on kertonut yksityiskohtaisesti aihealuejaottelun periaatteista. Lopullinen aihealuejaottelu löytyy jokaisen tutkimusaikavälin kevään osalta liitteistä 1A-1I. Pitkän matematiikan tehtäväsarjat sisältävät usein aihealuerajat ylittäviä tehtäviä, joten jaottelun selkeyttämiseksi on käyttöön otettu painokertoimet. Luotettavuutta lisäävänä tekijänä voidaan pitää sitä, että tutkija jakoi aihealuejaotteluprosessin kahteen osaan. Ensin tutkija tutki kevään tehtäviä ja laati näistä jaottelun opetussuunnitelman perusteiden (2003) kurssijakoa mukaillen. Sen jälkeen tutkija käytti useiden lähteiden malliratkaisuja apunaan tarkastaessaan, että ensimmäisessä vaiheessa tehty jaottelu on näiden mallivastauksien kanssa samassa linjassa. Malliratkaisujen analysointiin käytettiin emeritusprofessori Aatos Lahtisen kirjaa (2011) Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen 2002–2011 ja Lahtisen laatimia Dimensio-lehden artikkeleita kevään pitkän matematiikan ylioppilaskirjoituksista. Lisäksi lähteenä olivat sekä Simo K. Kivelän mallivastaukset MatTa-sivustolta että filosofian maisteri Teemu Kekkosen ja diplomi-insinööri Antti Suomisen laatimat mallivastaukset MAFY – valmennus - verkkosivulla.

Tutkimuksessa heikkona elementtinä voidaan pitää sitä, että tutkimus ei anna todellista kuvaa Funktiot ja yhtälöt – ja Polynomifunktiot – aihealueiden testaamisen määrästä kevään pitkän matematiikan kokeissa. Näiden kahden aihealueen tietoja tarvitaan pohjatietoina lähes jokaisen muun aihealueen hallinnassa, joten käytännössä niiden osuus suurempaan osaan tehtävistä olisi pitänyt osoittaa tehtävien yhteydessä pienellä painokertoimella. Näin ei tehty, koska se olisi tehnyt aihealuejaottelusta erittäin pirstaleisen ja sekavan.

Tehtäväkohtaisten tulosten analysointiin ja tutkijan laatimien taulukoiden ja kuvioiden laatimiseen käytettiin emeritusprofessori Aatos Lahtisen kokoamia taulukoita. Ne taulukot, joiden tietoja tutkimuksessa on käytetty, ovat liitteenä tässä tutkimuksessa liitteissä 2A-10C ja 11. Luotettavuutta lisäävänä tekijänä voidaan pitää sitä, että tehtäväkohtaiset pistetaulukoita on saatu pitkältä aikaväliltä. Tämä mahdollistaa aihealueiden hallinnan kokonaisvaltaisen tarkastelun. Lisäksi luotettavuutta lisää se, että kaikki tutkimusaikavälin lähteenä käytetyt tehtäväkohtaiset taulukot ovat saman henkilön laatimia. Näin ollen myös tässä tutkielmassa tutkijan laatimat taulukot ovat joka kevään osalta keskenään vertailukelpoisia.

Tarkasteltaessa tutkimuksen luotettavuutta tutkimusongelmien kautta, on tässä tutkimuksessa heikentävänä elementtinä se, että lähteenä käytetyt pistejakaumataulukot olivat muutamien aihealueiden tehtävien osalta epätarkkoja. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen on laatinut tehtäväkohtaisen pisteaineiston siten, että jokainen tehtävä on mukana yhtenä kokonaisena tehtävänä. Tehtäväsarjoissa esiintyy kuitenkin usein tehtäviä, jotka koostuvat osakohdista a, b, c ja niin edelleen. Varsin usein nämä osakohdat ovat täysin erillisiä tehtäviä ja eri aihealueita testaavia. Esimerkiksi keväällä 2010 tehtävässä 2 testattiin a-kohdassa Integraalilaskentaa, b-kohdassa Trigonometriaa ja c-kohdassa Juuri- ja logaritmifunktioita. Käytettävissä olevan aineiston avulla tiedetään, kuinka paljon kokelas on saanut pisteitä koko tehtävästä yhteensä. Tämän tutkimuksen kannalta olisi ollut mielenkiintoista tietää, kuinka kokelas on osannut esimerkiksi a-kohdan Integraalilaskennan osuuden vai onko se juuri ollut se aihealue, josta pisteitä ei ole kertynyt. Osakohtia sisältävien tehtävien osalta tehtäväpisteistä ei voida siis tehdä luotettavia päätelmiä. Sen vuoksi tämän tutkielman viiden aihealueen tarkemman tarkastelun osuudessa kappaleessa 5 ei ole otettu huomioon lainkaan tällaisia tehtäviä. Tarkastelu on laadittu siten, että päätelmät, jotka siitä tehdään, ovat luotettavia.

7. POHDINTA

Hannu Laaksola (2013b) totesi Opettaja-lehden pääkirjoituksessaan kesäkuun 2013 alussa, että Suomen ylioppilaskirjoituksilla on maailmalla laatuleima. Hyvä, jos näin on, sillä lukiolaissa 18§ (13.8.2004/766) todetaan kunnianhimoisesti, että tutkinnon tarkoituksena on selvittää, ovatko lukion opiskelijat omaksuneet lukionopetussuunnitelman mukaiset tiedot ja taidot sekä saavuttaneet lukion tavoitteiden mukaisen riittävän kypsyyden. Ylioppilaskirjoitukset ovat olleet mediassa suurennuslasin alla koko kevään 2013 ajan. Syynä tähän on se, että ylioppilaskirjoituksia aiotaan uudistaa radikaalisti. Jos kaikki suunnitellut uudistukset toteutuvat, nähtäväksi jää, säilyykö Suomen positiivinen laatuleima maailmalla myös uudistusten jälkeen.

Ongelmana on se, että kouluissa ei tiedetä, mitä uudistuksien myötä oikeasti tulee tapahtumaan ja mihin kokelaita pitäisi kouluttaa ja valmistella. Tämä on kuin holmöläisten touhua! Ylioppilaskirjoituksia uudistetaan, mutta perusopetus ja jatko-opintojen oppilaitokset eivät ole uudistuksessa mukana. MAOL ry:n hallituksen puheenjohtajana toiminut Irma Iho (2012, 5) totesi jo keväällä 2012 Dimensio-lehden pääkirjoituksessa, että tieto- ja viestintätekniikan osaamisen pitää lähteä tyvestä eli perusopetuksesta, sillä latvasta ja ylioppilaskirjoitusten suunnasta lähteminen ei tuota toivottua tulosta.

Opettajakoulutuksen ja opettajaopiskelijoiden tulisi olla aikaansa edellä. Opettajakoulutuksen opettajaopiskelijoita pitäisi valmistella ja ajaa sisään tällaisiin tieto- ja viestintätekniikan uudistamisprosessin laajuisiin muutoksiin jo hyvissä ajoin ennen muutosten käyttöönottoa. Kun opettajaopiskelijat valmistuvat, he ovat työelämässä laajempaa kokemusta vailla olevia keltanokkia. Ajankohtaisena ongelmana on se, että sen lisäksi heidän tulisi heti alkuvaiheessa alkaa kouluttamaan itseään lisää. Jatkuva kouluttautuminen on opettajan työssä edellytys, mutta vastavalmistuneilla opettajilla ei ole vielä mitään vertailupohjaa eli käytännön kokemusta näin laajan muutoksen prosessointiin.

Symboliset laskimet on sallittu kevään 2012 kokeesta lähtien matematiikan kokeen apuvälineenä. Opettajien tulisi siis jo hallita näiden käyttö ja ennen kaikkea symbolisen laskimen käytön ohjeistus.

Näin ei kuitenkaan välttämättä ole, sillä symbolisten laskimien laaja-alaisempi markkinointi ja käyttökoulutus ovat vasta nostamassa profiiliaan. Tieto- ja viestintätekniikan osaamisen suhteen opettajia, opettajaksi opiskelevia tai lukion tulevia opiskelijoita ei ole vielä aiemmin voitu osata ohjeistaa, koska se mitä uudistus todella tulee sisältämään, julkistettiin keväällä 2013 Digabi - projektin nimellä. Ohjeita teknisestä toteutuksesta ja esimerkkitehtävätyypeistä tullaan julkaisemaan vasta myöhemmin. Tietoyhteiskunnan kehittämiskeskus ry:n tutkimus- ja kehitysjohtaja Jyrki Kasvi (2012) totesi Yle Uutisten Internet-sivujen kirjoituksessaan jo joulukuussa 2012, että uudenlaiset ylioppilaskirjoitukset vaativat uudenlaisia valmiuksia. Kasvi (2012) korosti ennen kaikkea sitä, että näiden valmiuksien opettaminen tulisi aloittaa jo syksyllä 2013, koska syksyllä 2013 lukion aloittavat nuoret ovat ne ensimmäiset suomalaiset lukiolaiset, jotka vuonna 2016 suorittavat osan ylioppilaskirjoituksista tietokoneella. Kuten Kasvi (2012) on todennut, lukiovuosi 2016 alkaa siis käytännössä jo syksyllä 2013. Ovatko opettajat valmiita tähän? Ovatko kaikkia opettajat tietoisia, mitä nämä uudenlaiset valmiudet ovat? Koulujen kesäloma on juuri alkanut. Järjestetäänkö kesäaikana koulutusta opettajien perehdyttämiseen ylioppilaskokeen uudistuksista? Jos näin on, kuinka moni opettaja kouluttaa itseään tämän asian suhteen? Kaikki nämä edellä esitetyt kysymykset pohjautuvat huoleen siitä, miten lukiokoulutusta ja ylioppilaskirjoituksia voidaan jatkossa järjestää yhtä tasa-arvoisesti kuin aiemmin. Kiistatta tilanne tulee olemaan tulevina vuosina sellainen, että opiskelijat eivät ole tasa-arvoisessa asemassa eri koulujen välillä. Kaikki koulut eivät pysy uudistuksessa samassa tahdissa mukana, jos asian suhteen ei tehdä kiireesti koko maata koskevia koulutustoimia. Tässä suhteessa tulevat sitten jo vastaan kuntien resurssit.

Tässä Pro gradu-tutkielmassa on tutkittu kevään pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtäviä ja tehtäväkohtaisia pisteitä aikavälillä 2004–2012. Tutkimusaikavälillä on tapahtunut muutamia uudistuksia matematiikan kokeen rakenteessa ja sallittujen apuvälineiden käytössä. Näiden muutosten vaikutusta tehtäviin ja tehtävissä menestymiseen analysoidaan myös osana tätä tutkimusta. Tutkimusaikavälin kevään pitkän matematiikan tehtävät on jaoteltu tässä tutkielmassa 15 eri aihealueeseen kappaleessa 4. Tehtävien jaottelussa on täytynyt huomioida matematiikan laaja-alaisuus eli se, että tehtävät voivat vaatia oikeaan ratkaisuun pääsemiseksi usean aihealueen hallintaa. Tämän vuoksi tehtäväjaottelussa on käytetty painokertoimia. Tarkempi jaottelu tehtäväkohtaisesti löytyy liitteistä 1A-1F.

Yleinen tehtävämäärä aihealuetta kohden on yksi tehtävä per tehtäväsarja. Tässä suhteessa on kuitenkin poikkeuksia, sillä tutkimus osoittaa, että joitakin aihealueita painotetaan enemmän. Joka kevät tehtäväsarjarakenteet muuttuvat, mutta tutkimuksen tuloksista on havaittavissa, että erityisesti Derivaatta – ja Integraalilaskenta – aihealueita sekä myös Geometria – ja Analyyttinen geometria – aihealueita testataan useimmiten. Keväällä 2004 integraalilaskentaa käsitteleviä tehtäviä oli tehtäväsarjassa jopa kahden ja puolen tehtävän arvoisesti. Tämä on koko tutkimusaikavälin suurin yksittäisen aihealueen esiintymä. Juuri- ja logaritmifunktiot – ja Lukujonot, sarjat ja summat – aihealueiden tehtäviä esiintyy myös ajoittain enemmän kevään pitkän matematiikan tehtäväsarjoissa. Näitä tehtäviä on tehtäväsarjoissa kuitenkin selvästi harvemmin kuin edellä mainittuja neljää aihealuetta. Juuri- ja logaritmifunktiot – ja Lukujonot, sarjat ja summat – aihealueiden kohdalla täytyy huomioida myös se, että tutkimusaikavälin kahtena keväänä ei ole ollut lainkaan näiden aihealueiden tehtäviä. Tutkimuksen mukaan vähiten testattavia aihealueita ovat lukion opetussuunnitelman perusteiden (2003) kaksi ensimmäistä pakollista kurssia kattavat aihealueet Funktiot ja yhtälöt ja Polynomifunktiot. Näin pitääkin olla, sillä nämä kaksi kurssia muodostavat pohjan lähes kaikille muille tutkimuksen aihealueille. Näiden kahden aihealueen hallintaa tarvitaan siis useissa tehtävissä, vaikka se ei suoranaisesti näy aihealuejaottelussa. Tämä kuvastaa myös matematiikan luonnetta siitä, että uusi tieto rakentuu aiemmin opitun päälle. Kolmas selkeästi harvimmin kevään tehtäväsarjoissa esiintyvä aihealue on Trigonometria. Tämä on enemmän poikkeuksellinen tulos. Jopa kahtena tutkimusaikavälin keväänä trigonometrian tehtäviä ei ole lainkaan. Onko muiden aihealueiden hallitseminen siis tärkeämpää kuin trigonometrian?

Kevään tehtäväsarjat ovat sisältäneet tavallisesti yhden kokonaisen prosenttilaskutehtävän. Tutkimusaikavälillä on tapahtunut selvä muutos prosenttilaskutehtävien painotuksessa, sillä keväästä 2009 lähtien prosenttilaskutehtävien painottaminen ylioppilastehtävissä on vähentynyt. Kokonaisen prosenttilaskutehtävän sijaista prosenttilaskun hallintaa on alettu testaamaan jonkin tehtävän osakohtana tai jonkin toisen aihealueen yhteydessä. Prosenttilaskun painotuksen vähentämistä puoltaa myös se, että tutkimusaikavälin viimeisen kevään 2012 tehtäväsarja ei sisällä yhtään prosenttilaskutehtävää. Lisäksi tutkimusaikavälille kuulumaton, uusin kevään 2013 pitkän matematiikan koe ei myöskään sisällä prosenttilaskutehtävää.

Tässä tutkielmassa tutkitaan kokelaiden menestystä prosenttilaskutehtävissä kappaleessa 5.1.4. Valitettavasti käytössä oleva tehtäväkohtainen pistejakauma-aineisto ei mahdollista niiden tehtävien luotettavaa tarkastelua, jossa prosenttilasku on ollut vain osana tehtävää. Tämä tarkoittaa sitä, että tällä aineistolla ei pystytä selvittämään, miten prosenttilaskutehtävien tehtävärakennemuutokset ovat vaikuttaneet kokelaiden menestykseen prosenttilaskujen osalta, koska juuri nämä kevään 2009–2011 tehtäväkohtaiset pistejakaumat eivät ole prosenttilaskennan tehtävien kannalta tarpeeksi kattavia. Tarkempien päätelmien tekemiseksi tätä asiaa tulisi tutkia laajemmin aineistolla, joka sisältää tehtävien osakohtien pistejakaumat. Yleisesti ottaen varsin suuri osa kokelaista hallitsee tutkimusaikavälin tarkemman tarkastelun prosenttilaskutehtävät. Joka tapauksessa emeritusprofessori Aatos Lahtisen Dimensio-lehden kommentti kevään 2006 prosenttilaskutehtävän yhteydessä pitää paikkaansa myös koko prosenttilaskun hallintaa analysoitaessa. Lahtisen (2006, 21) mukaan prosenttilaskun suoritustaso jää aina omituisen heikoksi, kun otetaan huomioon se, että prosenttilaskua on lähes joka tehtäväsarjassa.

Keväästä 2010 käytössä olleen tehtäväpaperiuudistuksen myötä matematiikan tehtäville on varattu neljä sivua entisen kahden sijaan. Uudistuksen myötä ei ole havaittavissa mitään radikaalia muutosta matematiikan osa-alueiden painotuksessa vaan muutokset ovat ennemminkin muuttaneet tehtävien asettelua ja tehtäväantojen sisältöä. Tehtäväpaperiuudistus on mahdollistanut ennen kaikkea entistä monipuolisemman kokelaiden osaamisen mittaamisen. Eniten tehtäväpaperiuudistus vaikutti tämän tutkimuksen aihealueista geometrian tehtäväsisältöihin. Uudistuksen jälkeen geometrian tehtävät ovat lähes poikkeuksetta sisältäneet jo valmiin mallikuvion, jota kokelaan pitäisi osata hyödyntää tai soveltaa tehtävän ratkaisemisessa.

Kappaleessa 5 viittä aihealuetta on tutkittu tarkemmin. Huolestuttavaa on se, että jokaisen aihealueen analysoinnissa nousee enemmän tai vähemmän esille vallitseva trendi siitä, että tietyn aihealueen tehtäviä joko osataan täydellisesti kuuden pisteen arvoisesti tai sitten kokelaalla ei ole mitään käsitystä tehtävän ratkaisemisesta. Tutkimuksen mukaan jokaisella tarkemman tarkastelun aihealueella suuri osa kokelaista nimittäin vastaa sellaisiin tehtäviin, joiden ratkaisemiseen heidän taitonsa eivät riitä ja tuloksena on nolla pistettä. Tätä huomiota tukee myös emeritusprofessori Aatos Lahtisen toteamus kevään 2010 Dimensio-lehden pitkän matematiikan tuloksien analysoinnin yhteydessä. Lahtinen (2010, 32) ei ymmärrä sitä, miksi niin usein valitaan tehtäviä, joihin ei osata vastata. Eri aihealueiden kohdalla on havaittavissa tässä suhteessa kuitenkin painotuseroja. Todennäköisyys ja tilastot – aihealueen tarkastelussa edellä mainitun trendin mukainen pistejakauma näkyy selkeimmin. Integraalilaskennan ja ääriarvotehtävien osalta pistejakaumat ovat huolestuttavimmat, sillä pistejakauma painottuu eniten alhaisimpiin pistemääriin. Myös geometrian osalta suuri osa pisteistä painottuu alhaisimpiin pistemääriin, mutta integraalilaskentaan verrattuna pisteet ovat jakautuneet kuitenkin laajemmin. Geometria ja Integraalilaskenta ovat siinä mielessä poikkeuksellisia tarkemman tarkastelun aihealueita, että niitä esiintyy myös tähtitehtävissä ja sen vuoksi tutkielman kuvioiden pisteet jakautuvat suuremmalle alueelle. Prosenttilasku on tarkemmassa tarkastelussa positiivinen poikkeus. Prosenttilaskussa täydet kuusi pistettä on selkeästi vallitseva pistemäärä.

Kappaleen 5 taulukoita ja kuviota tarkastellessa tulee kuitenkin muistaa, että näiden viiden aihealueen tehtävät esiintyvät tarkemmassa tarkastelussa erityyppisinä kokonaisuuksina ja ovat tehtävätyypeiltään erilaisia. Prosenttilaskutehtävät esiintyvät usein tehtäväsarjan alkupäässä ja sen hallitseminen onkin välttämätöntä. Todennäköisyys ja tilastot – ja Ääriarvotehtävät – aihealueiden suhteen tutkimustulokset kuvaavat kaikkein luotettavimmin kokelaiden näiden aihealueen hallintaa. Tutkimusaikavälillä on ollut nimittäin joka kevät yksi kokonainen Todennäköisyys ja tilastot – ja Ääriarvotehtävät – aihealueen tehtävä. Geometrian osalta tutkimustulokset ovat kriittisimmät, koska se on aihealue, jota testaan useasti, mutta se on myös aihealue, joka tuottaa useille kokelaille ongelmia. Geometria – aihealuetta käsitellään pitkässä matematiikassa vain yhden kurssin aikana, joten onko ongelma siinä, että kokelaat eivät pysty sisäistämään tarvittavia perusasioita yhden kurssin aikana? Integraalilaskennankaan osalta tulokset eivät vakuuta siitä, että kokelaat hallitsisivat aihealueen. Tarkemmassa tarkastelussa on kuitenkin tämän aihealueen osalta mukana vain yksi perustehtävä. Syynä tähän on se, että lähes kaikki integraalilaskennan perustehtävät ovat osakohtina alkupään tehtävissä, eikä niiden tehtäväkohtaisista pisteistä voida tehdä luotettavia päätelmiä käytettävissä olevalla aineistolla. Tämän tutkimuksen mukaan voidaan todeta, että suuri osa integraalilaskennan tehtäviin vastaavista kokelaista hallitsee integraalilaskennan vähintään välttävästi, koska jopa haastavampia tehtäviä osataan tällä tasolla. Integraalilaskenta on matematiikan aihealue, jonka hallintaa tarvitaan jatko-opinnoissa useilla aloilla, joten siihen nähden suurin haaste integraalilaskennan osalta tämän tutkimuksen mukaan on haastavampien tehtävien vastausprosentit. Kokelaiden jatko-opintoja ajatellen vastausprosentit integraalilaskennan tehtävien suhteen sekä pakollisen että ylimääräisen kokeen osalta pitäisivät olla huomattavasti korkeammat.

Pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajamäärissä on tutkimusaikavälillä tapahtunut suuri muutos. Pitkää matematiikkaa kirjoitetaan yhä useammin pakollisena, sillä ylimääräisenä kokeen suorittavien lukumäärä on vähentynyt joka kevät. Keväällä 2004 tilanne oli päinvastainen, kun ylimääräisen kokeen suorittajia oli huomattavasti enemmän kuin pakollisen kokeen suorittajia. Vastausprosenteissa pakollisen ja ylimääräisen kokeen suorittajien välillä on yksittäisten tehtävien osalta suuriakin eroja. Pääpiireittäin erot ovat kuitenkin joka aihealueen suhteen yllättävänkin pieniä. Tyypillistä jokaiselle tarkemman tarkastelun aihealueelle on, että pakollisena kokeen suorittavat menestyvät aihealueiden tehtävistä paremmin kuin ylimääräisenä kokeen suorittavat. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2010, 31) on aavistellut, että pitkää matematiikkaa kirjoitetaan yhä useammin tosi tarkoituksella vain pakollisena. Tämä tutkimus osoittaa, että nämä pakollisena kokeen suorittavat hallitsevat ainakin nämä tarkemmassa tarkastelussa olleet aihealueet paremmin kuin ylimääräisen kokeen suorittajat. Onko kyse kokeeseen valmistautumisen tasosta vai matemaattisesta lahjakkuudesta?

Symbolisten laskimien salliminen on jakanut mielipiteitä suuresti. Ylioppilastutkintolautakunnalla on symbolisen laskimen käytön suhteen kunnianhimoiset tavoitteet, mutta ainakaan kevään 2012 tehtävän kaksi tehtävänasettelussa ei onnistuttu tavoitteiden mukaisesti. Tehtävä kaksi oli yllättävä aiempiin vuosiin verrattuna. Se sisälsi kuusi toisistaan riippumatonta osakohtaa testaten Funktiot ja yhtälöt -, Juuri – ja logaritmifunktiot -, Trigonometriset funktiot – ja Integraalilaskenta –aihealueiden hallintaa. Eurajoen lukion matematiikan opettaja Leena Mannila kommentoi tehtävää Elisa Lautalan (2012) LUMA Sanomien artikkelissa pohtien sitä, että mitataanko tehtävässä vain laskimen näpyttelytekniikkaa. Mannila toteaa, että tehtävä voidaan laskea laskimella tai perinteisesti välivaihe kerrallaan. Tässä tehtävässä pelkkä vastauskin tuottaa pisteen ja toisaalta pieni laskuvirhe välivaiheessa voi viedä pisteen. Mannila nostaa esiin kärjistetyn version siitä, millaisen tilanteen symbolinen laskin tämän tehtävän osalta mahdollistaa. Ajatellaan, että toinen oppilas näpyttelee tehtävän laskimeen ilman sen perimmäistä matemaattista merkitystä ymmärtämättä ja saa pisteen oikeasta vastauksesta. Toisaalta toinen opiskelija ymmärtää matemaattisen idea, mutta tekee pienen laskuvirheen välivaiheessa ja tippuu nollaan pisteeseen. (Mannilan kommentit Lautalan artikkelissa 2012) Tämä ei ole sitä, mitä ylioppilastutkintolautakunta laskinohjeuudistuksella tavoittelee. Kuinka pitkälle tässä suhteessa uskalletaan mennä metsään? Se jää nähtäväksi. Nykyisellään laskinohjeuudistus ei ainakaan vielä toimi.

Matematiikan ylioppilaskirjoitukset ovat tällä hetkellä siis monessa suhteessa muutospaineen alla. Tämä tutkimus osoittaa, että ainakin tarkemmassa tarkastelussa olevien aihealueiden osalta valitettavan moni kokelas ei hallitse tämän tällä hetkelläkään käytössä olevan matematiikan kokeen matemaattisia ongelmia. Pelkona on, että uudistusten myötä taitotaso tippuu entisestään heikoimpien kokelaiden osalta ja toisaalta myös se, että pystyvätkö kaikki kokelaat näyttämään todellisen matemaattisen taitotasonsa uudenmuotoisessa kokeessa. Onko se nykypäivää, että jos käytät matemaattiseen ajattelun prosessointiin vain paperia ja kynää, etkä pysy tieto – ja viestintätekniikan uudistuksissa mukana, et hallitse matematiikkaa tarpeeksi hyvin? Eiväthän esimerkiksi Pythagoras tai Eukleideskaan käyttäneet tietotekniikkaa hyväkseen heidän matemaattisesti merkittävien tulosten ratkaisemiseen. Teknologia on kehittynyt valtavasti näistä ajoista nykypäivään ja matematiikan ylioppilaskirjoituksien kuuluukin muuttua sen kehityksen mukana, mutta perimmäistä matemaattisen ajattelun prosessia ei pitäisi antaa hukuttaa tekniikan uudistuksiin.

Pitkän matematiikan kirjoittajien lukumäärä on ollut jo pitkään laskusuhdanteessa. Toivottavaa olisi, että käsillä olevat uudistukset olisivat sen tyyppisiä, että kirjoittajien määrä saataisiin nousuun. Emeritusprofessori Aatos Lahtinen (2010, 28) on verrannut matematiikkaa lähes läpitunkemattomaksi viidakoksi monelle kokelaalle. Matematiikan viidakossa vallitsevat kuitenkin yksikäsitteiset lait, joita noudattamalla metsästysonnen eli ylioppilaskirjoitusten näkökulmasta tehtävästä ansaittujen pisteiden hyvä taso pitäisi olla taattu. Näitä lakeja opetetaan sentään koko koulu-uran ajan! Lahtisen mukaan perimmäinen ongelma on siinä, että opiskelijat eivät ole sisäistäneet heille opetettuja asioita, koska he eivät koe näitä asioita tärkeäksi. (Lahtinen 2010, 28) Jos kaavaillut uudistukset tulevat matematiikan osalta oikeasti toteutumaan, Lahtisen edellä vertaiskuvallisesti kutsumat matematiikan viidakon lait tulevat muuttumaan. Toivottavasti kokelaat ymmärtävät, että vastuu näiden lakien sisäistämisestä on ennen kaikkea heillä itsellään. Ylioppilastutkintolautakunnan uusi jäsen, Oulun yliopiston matematiikan opettajakoulutuksen professori Peter Hästö (2013, 30) on varoittanut Dimension artikkelissaan, että jos hän pystyy asiaan vaikuttamaan, niin jatkossa matematiikan ylioppilaskokeissa nähdään enemmän epästandardeja tehtäviä. Näissä tehtävissä pitäisi rutiinien pyörittämisen sijaan osata soveltaa lukion tietoja. Hästö (2013, 30) korostaa, että tehtävissä tulisi käyttää tunnettuja tietoja vähän eri kontekstissa, eikä edetä vain tutun ja turvallisen kaavan mukaan. Tämä on kunnianhimoinen tavoite, joka tarkoittaa toteutuessaan sitä, että kokelaita haastettaisiin entistä enemmän matematiikan tehtävien ratkaisemisessa mukavuusalueen ulkopuolelle. Se, miten muutos vaikuttaa kokelasmääriin ja matematiikan aihealueiden tasojen hallintaan, jää nähtäväksi. Haastetta tässä suhteessa ainakin riittää.

7.1 JATKOTUTKIMUSEHDOTUKSIA

Tätä tutkielmaa aloittaessa ei löytynyt yhtään tämän tyyppistä matematiikan ylioppilaskirjoituksia tutkivaa tutkimusta. On kuitenkin mainittava, että emeritusprofessori Aatos Lahtinen on kiistatta matematiikan ylioppilaskirjoituksiin liittyvien tutkimusten uran uurtaja. Tämän tutkielman toteuttaminen ei olisi onnistunut ilman emeritusprofessori Aatos Lahtiselta saatuja tehtäväkohtaisia pistetaulukoita. Tutkimus on herättänyt ajatuksia tutkia tutkimuskysymyksiä myös lyhyen matematiikan osalta. Lisäksi sekä pitkän että lyhyen matematiikan kokeiden osalta olisi kiinnostavaa selvittää ylioppilastehtävien laatimiseen osallistuvilta henkilöiltä, millainen prosessi ylioppilastehtävien valinta tehtäväsarjoihin todellisuudessa on.

LÄHTEET

Aamulehti. 2013. (Kirj. Pulliainen, M.) Kolmetoista kurssia ja kirjoituksista nolla. 30.4.2013. Uutiset, A04.

Digabi – ylioppilastutkinnon sähköistämisprojekti. 2013. Viitattu 21.5.2013 http://digabi.fi/doku.php

Halmetoja, M. 2013. Kehittääkö yo-koe matemaattista ajattelua? Keskisuomalainen 28.4.2013, Mielipide, 4.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2004. Tutki ja kirjoita. Jyväskylä: Gummeruksen kirjapaino Oy. 293-319, 338-361.

Hästö, P. Matematiikan yo-kokeen arvostelun tulevaisuus. Dimensio 2013; 1: 30.

Hästö, P., Merenti-Välimäki, H., Oikkonen, J. & Vuorinen, M. (yo-tutkinnon matematiikan jaos) 2013. Ylioppilastutkinto matemaattisen ajattelun kehittäjänä. Keskisuomalainen 25.4.2013, Mielipide, 5.

Iho, I. 2012. Perusopetuksen tavoitteet ja tuntijakoesitys julkistettu. Dimensio 2012; 2: 5. Pääkirjoitus.

Kasvi, J. 2012. Lukiovuosi 2016 alkaa ensi syksynä. Yle Uutisten blogi-kirjoitus 5.12.2012. Viitattu 5.6.2013 http://yle.fi/uutiset/jyrki_kasvi_lukiovuosi_2016_alkaa_ensi_syksyna/6401559

Kekkonen, T. & Suominen, A. 2013. Mallivastaukset. MAFY – valmennus. Viitattu 21.9.2012 http://www.mafyvalmennus.fi/mallivastaukset/

Kinnunen, J. 2011. Ylioppilaskokeessa sallitaan kaikki laskimet. Dimensio 2011; 4: 18- 20.

Kivelä, Simo K. 14.10.2012. Matematiikan ylioppilastehtävät. MatTa-sivusto. Viitattu 14.4.2013. https://matta.hut.fi/matta/yoteht/index.html

Kärki, H. 2013. Skandaali muhii matematiikan yo-kokeissa – paras arvosana ilman osaamista. Viitattu 12.5.2013. http://www.ksml.fi/uutiset/kotimaa/skandaali-muhii-matematiikan-yo-kokeissa-paras-arvosana-ilman-osaamista/1316761

Laaksola, H. 2012. Gaussin käyrä aikansa elänyt. Opettaja-lehden verkkolehti 22.5.2012.Viitattu 17.3.2013.http://www.opettaja.fi/pls/portal/docs/PAGE/OPETTAJALEHTI_EPAPER_PG/2012_21/170653.htm

Laaksola, H. 2013a. Sähköisellä ylioppilaskokeella liian kiire. Opettaja-lehti 2013; 15: 3. Pääkirjoitus 9.4.2013.

Laaksola, H. 2013b. Ylioppilaskirjoituksilla on arvo. Opettaja-lehti 2013; 23: 3. Pääkirjoitus 4.6.2013.

Lahtinen, A. 2004. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2004. Dimensio 2004; 6: 12–22.

Lahtinen, A. 2005. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2005. Dimensio 2005; 6: 16–28.

Lahtinen, A. 2006. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2006. Dimensio 2006; 6: 14–25.

Lahtinen, A. 2007. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2007. Dimensio 2007; 6: 17–33.

Lahtinen, A. 2008. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2008. Dimensio 2008; 6: 15–28.

Lahtinen, A. 2009. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2009. Dimensio 2009; 6: 16–31.

Lahtinen, A. 2010. Matematiikan koe ylioppilastutkinnossa keväällä 2010. Dimensio 2010; 6: 28–44.

Lahtinen, A. 2011. Matematiikan ylioppilastehtävät ratkaisuineen 2002-2011, pitkä oppimäärä. MFKA-kustannus Oy: Helsinki.

Lahtinen, A. 2012a. Exel-taulukot. Email:aatos.lahtinen@helsinki.fi 8.6.2012. Tulostettu 20.7.2012.

Lahtinen, A. 2012b. Matematiikan sensorit. Email: aatos.lahtinen@helsinki.fi 22.8.2012. Tulostettu 22.8.2012

Lahtinen, A. 2012c. Matematiikan koe ylioppilastutkinnossa keväällä 2012. Dimensio 2012; 6: 19-33.

Lahtinen, A. 2013. Kevään 2012 taulukot. Email: aatos.lahtinen@helsinki.fi 16.4.2013. Tulostettu 25.4.2013

Lautala, E. 2012. Pitkän matematiikan koe helpohko, lyhyen suhteessa haastavampi. LUMA Sanomat. Verkkolehti 27.3.2012. Viitattu 5.6.2012. http://www.luma.fi/artikkelit/1151

Lauren, R. 1924. Matemaattiset tehtävät ylioppilaskirjoituksissa vuosina 1874–1923. K. J. Gummerus Osakeyhtiö Jyväskylä.

Liiten, M. 2013. Peruskoululaisten matematiikan taidot murenemassa. Helsingin Sanomat. Verkkolehti 19.3.2013. Tulostettu 23.5.2013. http://www.hs.fi/kotimaa/Peruskoululaisten+matematiikan+taidot+murenemassa/a1363660574167

Lukiolaki. 1998/629.

Mannila, L. 2011a. Pääkirjoitus: Matematiikan oppiminen vaarassa. Dimensio 2011; 6: 5.

Mannila, L. 2011b. Pääkirjoitus: Onko matematiikan ymmärtäminen kadonnut?. Dimensio 2011; 3:5.

Matematiikan opettajien liitto, MAOL ry. 2010. MAOL:n lehdistötiedote 15.11.2010. ”Tietokoneet ylioppilaskirjoituksiin” – ovatko opiskelijat valmiita? Viitattu 23.10.2012. http://www.maol.fi/fileadmin/users/Julkaisut/Lehdistotiedote_liittokokous_15112010.pdf

Näveri, L. 2009. Aritmetiikasta algebraan: Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana. Helsingin yliopisto. Käyttäytymistieteellinen tiedekunta. Väitöskirja. Viitattu 1.6.2012. http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-10-5759-5.

Opetushallitus. 2003. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Määräys 33/011/2003. Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy.

Pullainen, M. 2013. Kolmetoista kurssia ja kirjoituksista nolla. Aamulehti 30.4.2013, Uutiset, A04.

Ristonmaa, J. 2011. Integraalilaskennan esivaiheista nykyiseen lukio-opetukseen. Tampereen yliopisto. Informaatiotieteiden yksikkö. Pro gradu tutkielma. Viitattu 30.5.2013. http://tutkielmat.uta.fi/pdf/gradu04835.pdf

Suomen Kuvalehti. 2012. (Kirj. Vanhala, L.) Kaikki laskimet sallitaan yo-kokeissa – tuliko matematiikasta helppoa? Verkkolehti 17.3.2012. Tulostettu 3.6.2012. http://suomenkuvalehti.fi/jutut/kotimaa/kaikki-laskimet-sallitaan-yo-kokeissa-tuliko-matematiikasta-helppoa

Vihavainen, A. 2011. Kaikki joukolla yhtälöitä ratkomaan. Uutisvuoksi verkkolehti, Mielipidekirjoitus, 22.9.2011. Viitattu 28.5.2013. http://www.uutisvuoksi.fi/Mielipide---Anne-arjessa/2011/09/22/Kaikki+joukolla+yht%C3%A4l%C3%B6it%C3%A4+ratkomaan/2011512130571/72

Ylioppilastutkintolautakunta. 2002. Ylioppilastutkinto 150 vuotta. Matematiikan koe yhtä vanha kuin tutkintokin. Tulostettu 8.6.2012. http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/ylioppilastutkinto/150/

Ylioppilastutkintolautakunta. 2011. Matematiikan kokeen määräykset. Tulostettu 8.6.2012.http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/maaraykset/ainekohtaiset/20060517142916.html

Ylioppilastutkintolautakunta. 2012. Uudistuva ylioppilastutkinto. Pitkän matematiikan kokeen uudistaminen. Tulostettu 25.5.2012. http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/ylioppilastutkinto/uudyot/

Ylioppilastutkintolautakunta. 2013a. Matematiikan koe, pitkä oppimäärä 20.3.2013. Hyvän vastauksen piirteitä. Tulostettu 14.4.2013.
http://www.ylioppilastutkinto.fi/hyvan_vastauksen_piirteita/fi/index.html

Ylioppilastutkintolautakunta. 2013b. Projekti tieto- ja viestintätekniikan käytöstä ylioppilastutkinnon suorittamisessa. Kevät 2013. Tulostettu 14.4.2013.
http://virtual351.tentacle.fi/vote/projektikuvaus_fi.pdf

Ylioppilastutkintolautakunta. 2013c. Tilastoja. (Kevät 2007). Tulostettu 21.5.2013.

http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/files/documents/Tilastot/Ylioppilastutkinto2007_nettiin.pdf

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2004:

1.a) Polynomifunktiot

b.) Polynomifunktiot

c.) Polynomifunktiot → 1 tehtävä Polynomifunktiot

2. Integraalilaskenta

3. Prosenttilasku

4. Vektorit

5. Derivaatta

6. Geometria

7. Geometria

8.a) Analyyttinen geometria → analyyttinen geom. 1/2

b.) Analyyttinen geometria + derivaatta → analyyttinen geom. ¼ ja derivaatta 1/4 (Ääriarvotehtävä)

9. Todennäköisyys ja tilastot

10. Integraalilaskenta

11. Juuri- ja logaritmifunktiot ¾ ja derivaatta 1/4

12. Integraalilaskenta ½ ja Lukujonot, sarjat ja summat 1/2

13. Lukuteoria ja logiikka

14. Lukujonot, sarjat ja summat

15. Differentiaali ja Integraalilaskennan jatkokurssi

LIITE 1B

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2005:

1.a) Funktiot ja yhtälöt 1/2

b.) Polynomifunktiot 1/2

2.a) Analyyttinen geometria 1/2

b.) Trigonometriset funktiot 1/2

3. Prosenttilasku

4. Vektorit

5. Analyyttinen geometria

6. Geometria

7. Geometria ½ ja Trigonometriset funktiot 1/2

8. Integraalilaskenta

9. Todennäköisyys ja tilastot

10. Polynomifunktiot 1/2, Derivaatta 1/4 ja Analyyttinen geometria 1/4

11. Geometria1/2 ja Integraalilaskenta 1/2

12. Derivaatta

13. Lukujonot, sarjat ja summat

14. Differentiaali ja Integraalilaskennan jatkokurssi

15. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (Ääriarvotehtävä)

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2006:

1.a) Funktiot ja yhtälöt

b.) Analyyttinen geometria

c.) Funktiot ja yhtälöt → Funktiot ja yhtälöt 2/3 ja analyyttinen geometria 1/3

2.a) Juuri- ja logaritmifunktiot

b.) Integraalilaskenta

c.) Juuri- ja logaritmifunktiot → Juuri ja logaritmifunktiot 2/3 ja integraalilaskenta 1/3

3. Geometria

4. Prosenttilasku

5. Trigonometriset funktiot ¾ ja analyyttinen geometria 1/4

6. Analyyttinen geometria ½ ja Vektorit 1/2

7. Analyyttinen geometria

8. Todennäköisyys ja tilastot

9. Integraalilaskenta

10. Juuri- ja logaritmifunktiot 1/4 ja Derivaatta 3/4 (Ääriarvotehtävä)

11. Lukujonot, sarjat ja summat

12. Derivaatta

13. Numeeriset ja algebralliset menetelmät

14. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi

15. Lukuteoria ja logiikka

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2007:

1.a) Polynomifunktiot 1/3

b.) Analyyttinen geometria 1/3

c.) Funktiot ja yhtälöt 1/3

2. a.) Integraalilaskenta 1/3

b.) ja c.) Juuri ja logaritmifunktiot 2/3

3. Prosenttilasku

4. Analyyttinen geometria ½ ja Vektorit ½

5. Analyyttinen geometria

6. Derivaatta ½ + polynomifunktiot ½

7. Derivaatta ½ ja geometria ½ (Ääriarvotehtävä)

8. Todennäköisyys ja tilastot ½ ja integraalilaskenta ½

9. Geometria ½ ja vektorit ½

10. Lukujonot, sarjat ja summat

11. Juuri ja logaritmifunktiot ¼ ja differentiaali ja integraalilaskennan jatkokurssi ¾

12. Integraalilaskenta ¼ ja numeeriset ja algebralliset menetelmät ¾

13. Lukuteoria ja logiikka

14. TÄHTI, Polynomifunktiot 1/3, Lukujonot, sarjat ja summat 1/3 ja Analyyttinen geometria 1/3

15. TÄHTI, Geometria ¾ ja funktiot ja yhtälöt ¼

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2008:

1.a) Polynomifunktiot

b.) Funktiot ja yhtälöt c.) Polynomifunktiot → 2/3 Polynomifunktiot ja 1/3 Funktiot ja yhtälöt

2. a) Analyyttinen geometria

b.) Funktiot ja yhtälöt

c.) Analyyttinen geometria → 2/3 Analyyttinen geometria ja 1/3 Funktiot ja yhtälöt

3. a) Derivaatta 1/4 ja Integraalilaskenta 1/4

b.) Trigonometriset funktiot

4. Prosenttilasku

5. Todennäköisyys ja tilastot

6. Vektorit

7.a) Analyyttinen geometria ½

b.) Integraalilaskenta ½

8. Geometria

9. Derivaatta (ääriarvotehtävä)

10. Juuri ja logaritmifunktiot

11. Lukuteoria ja logiikka

12. Numeeriset ja algebralliset menetelmät

13. Differentiaali ja integraalilaskennan jatkokurssi

14. TÄHTI, analyyttinen geometria 1/5, Trigonometriset funktiot 1/5, Integraalilaskenta 1/5, Derivaatta 1/5 ja Funktiot ja yhtälöt 1/5 (Tehtävän b-kohta on ääriarvotehtävä.)

15. TÄHTI, Geometria ¾ ja Derivaatta ¼

LIITE 1F

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2009:

1.a) Polynomifunktiot b.) Polynomifunktiot

c.) Analyyttinen geometria → 2/3 Polynomifunktiot ja 1/3 analyyttinen geometria

2.a) Integraalilaskenta

b.) Juuri- ja logaritmifunktiot

c.) Integraalilaskenta 1/6 ja Derivaatta 1/6 → Integraalilaskenta ½, Juuri ja logaritmifunktiot 1/3 ja derivaatta 1/6

3.a) Vektorit 1/2

b.) prosenttilasku 1/4 ja geometria 1/4

4. Derivaatta ½ ja polynomifunktiot 1/2

5.a) Juuri ja logaritmifunktiot 1/2

b.) Juuri- ja logaritmifunktiot ¼ ja Derivaatta ¼ → Juuri ja logaritmifunktiot ¾ ja Derivaatta 1/4

6. Todennäköisyys ja tilastot

7. Derivaatta (Ääriarvotehtävä)

8. Analyyttinen geometria

9. Trigonometriset funktiot ½ ja Integraalilaskenta ½

10. Integraalilaskenta ½ ja Derivaatta ¼ ja juuri ja logaritmifunktiot 1/4

11. Lukuteoria ja logiikka

12. Numeeriset ja algebralliset menetelmät

13. Lukujonot, sarjat ja summat

14. TÄHTI, Geometria

15. TÄHTI, Differentiaali ja integraalilaskennan jatkokurssi ½, Derivaatta ¼ ja Integraalilaskenta ¼

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2010:

1.a.) Polynomifunktiot 1/3

b.) Funktiot ja yhtälöt 1/3

c.) Derivaatta 1/3

2.a) Integraalilaskenta 1/3

b.) Trigonometriset funktiot 1/3

c.) Juuri- ja logaritmifunktiot 1/3

3. a) Geometria ½

b.) Polynomifunktiot ½

4. Geometria ¾ ja prosenttilasku ¼

5. Vektorit

6. Todennäköisyys ja tilastot

7. Derivaatta (Ääriarvotehtävä)

8. Analyyttinen geometria ½ ja Integraalilaskenta ½

9. Trigonometria ½ ja Derivaatta ½

10. Juuri ja logaritmifunktiot ½ ja geometria ½

11. Lukujonot, sarjat ja summat

12. Lukuteoria ja logiikka

13. Numeeriset ja algebralliset menetelmät

14. TÄHTI, Lukujonot, sarjat ja summat ½ ja Differentiaali ja Integraalilaskennan jatkokurssi ½

15. TÄHTI, Integraalilaskenta ½ ja Differentiaali ja Integraalilaskennan jatkokurssi ½

LIITE 1H

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2011:

1.a.) Funktiot ja yhtälöt 1/3

b.) Polynomifunktiot 1/3

c.) Analyyttinen geometria 1/3

2.a.) Prosenttilasku 1/3

b.) Analyyttinen geometria 1/3

c.) Juuri ja logaritmifunktiot 1/3

3. a +b.) Juuri ja logaritmifunktiot 2/3

c.) Integraalilaskenta 1/3

4. Analyyttinen geometria

5. Derivaatta (Ääriarvotehtävä)

6. Todennäköisyys ja tilastot

7. Geometria

8. Vektorit

9. Lukujonot, sarjat ja summat

10. Integraalilaskenta

11. Differentiaali ja Integraalilaskennan jatkokurssi

12. Lukuteoria ja logiikka

13. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä

14. TÄHTI, Trigonometriset funktiot ¼, Integraalilaskenta ¼ ja Derivaatta ½

15. TÄHTI, Analyyttinen geometria ½, Juuri- ja logaritmifunktiot ¼ ja Differentiaali ja Integraalilaskennan jatkokurssi ¼

PITKÄ MATEMATIIKKA KEVÄT 2012:

1.a) Polynomifunktiot

b.) Funktiot ja yhtälöt

c.) Funktiot ja yhtälöt → Funktiot ja yhtälöt 2/3 ja polynomifunktiot 1/3

2. a) + b.) Funktiot ja yhtälöt 2/6 c.) Juuri ja logaritmifunktiot

d.) Trigonometriset funktiot

e.) Integraalilaskenta

f.) Juuri ja logaritmifunktiot → Funktiot ja yhtälöt 2/6 , Juuri ja logaritmifunktiot 2/6, Trigonometria 1/6 ja Integraalilaskenta 1/6

3. Analyyttinen geometria

4. Vektorit

5. Derivaatta ¾ ja Juuri ja logaritmifunktiot ¼ (Ääriarvotehtävä)

6. Todennäköisyys ja tilastot

7. a) Analyyttinen geometria ½, b) Integraalilaskenta 1/2

8. Juuri ja logaritmifunktiot ½ ja Derivaatta ½

9. Geometria

10. Trigonometriset funktiot

11. Geometria ¾ ja Lukujonot, sarjat ja summat ¼

12. Lukuteoria ja logiikka

13. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä

14. TÄHTI, Differentiaali ja Integraalilaskennan jatkokurssi

15. TÄHTI, Analyyttinen geometria ½ ja Juuri- ja logaritmifunktiot ½

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2004

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	5	174	298	319	333	536	1551	776	1589	384	1450	265	425	109	426	8640
1	6	37	137	208	561	641	125	266	56	170	305	3	49	7	33	2604
2	39	172	441	429	217	144	148	215	79	796	326	0	57	21	55	3139
3	21	121	204	183	41	130	640	202	252	77	55	3	137	33	44	2143
4	215	223	809	363	190	467	749	376	270	57	54	0	43	33	49	3898
5	370	246	280	466	201	210	356	598	211	230	61	5	35	9	40	3318
6	4849	4420	3327	3217	3519	2915	900	1425	1601	1677	112	3	136	12	86	28199
Summa	5505	5393	5496	5185	5062	5043	4469	3858	4058	3391	2363	279	882	224	733	51941

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2004

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	30	463	808	789	1128	1300	3044	1352	2877	801	2127	410	430	141	695	16395
1	14	98	315	468	1249	1424	192	344	103	360	328	3	37	6	30	4971
2	72	410	905	1036	355	260	209	362	125	1395	241	2	43	17	33	5465
3	76	227	399	328	57	156	651	227	229	104	34	0	62	16	22	2588
4	439	391	1301	514	185	458	510	309	233	63	22	1	21	13	20	4480
5	619	405	357	478	207	209	215	391	132	161	27	1	14	5	9	3230
6	5711	4435	2797	2503	2515	2033	340	604	769	683	27	0	28	9	22	22476
Summa	6961	6429	6882	6116	5696	5840	5161	3589	4468	3567	2806	417	635	207	831	59605

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2004

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2004 %	2003 %	2002 %	2001 %	2000 %
L	441	11,5	189	11,2	630	11,4	9,9	9,1	10,6	10,1
E	868	22,7	434	25,5	1302	23,6	23,5	23,1	24,4	22,9
M	925	24,2	435	25,6	1360	24,6	24,2	24,8	22,4	22,9
C	719	18,8	298	17,5	1017	18,4	18,1	20,3	18,9	21,1
B	508	13,3	198	11,6	706	12,8	13,7	11,8	12,4	13,2
A	224	5,9	98	5,8	322	5,8	6,6	6,6	7,1	5,6
I	139	3,6	48	2,8	187	3,4	4,1	4,3	4,2	4,2
Yhteensä	3824		1700		5524	5524	6071	6417	6226	5791
Keskiarvo	4,65		4,76			4,68	4,57	4,56	4,60	4,58
Hajonta	1,65		1,58			1,63	1,67	1,66	1,69	1,66

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2004

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2004 %	2003 %	2002 %	2001 %	2000 %
L	72	2,3	86	2,2	158	2,3	1,4	1,3	1,1	2,1
E	207	6,7	320	8,2	527	7,6	7,2	7,3	8,2	8,3
M	453	14,7	642	16,5	1095	15,7	15,6	16,7	15,5	15,9
C	704	22,8	894	22,0	1598	22,9	21,5	21,7	22,7	22,3
B	701	22,7	910	23,4	1611	23,1	23,7	21,0	21,3	22,8
A	515	16,7	571	14,7	1086	15,6	16,1	17,2	17,1	14,8
I	433	14,0	459	11,8	892	12,8	14,4	14,8	14,1	13,8
Yhteensä	3085		3882		6967	6967	6640	6709	6635	6789
Keskiarvo	3,32		3,40			3,32	3,21	3,21	3,23	3,31
Hajonta	1,78		1,74			1,76	1,77	1,79	1,78	1,80

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2004

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	5,80	0,6	100,0	5,67	0,8	99,9	5,73	0,8	99,9
2	5,45	1,4	97,6	4,95	1,9	92,3	5,18	1,7	94,6
3	4,77	1,8	99,5	3,94	2,1	98,8	4,31	2,0	99,1
4	4,76	1,9	93,8	3,76	2,3	87,8	4,22	2,2	90,5
5	4,74	2,1	91,6	3,33	2,6	81,8	4,00	2,5	86,1
6	4,31	2,3	91,3	2,99	2,5	83,8	3,60	2,5	87,1
7	2,80	2,3	80,9	1,50	2,0	74,1	2,10	2,3	77,1
8	3,72	2,4	69,8	2,39	2,3	51,5	3,08	2,5	59,6
9	3,13	2,7	73,4	1,62	2,4	64,1	2,34	2,7	68,2
10	3,96	2,3	61,4	2,42	2,1	51,2	3,17	2,3	55,7
11	0,98	1,6	42,8	0,46	1,0	40,3	0,70	1,4	41,4
12	0,20	1,0	5,1	0,04	0,4	6,0	0,10	0,7	5,6
13	1,97	2,3	16,0	0,99	1,7	9,1	1,56	2,1	12,1
14	1,77	2,0	4,1	1,06	1,8	3,0	1,43	1,9	3,5
15	1,62	2,2	13,3	0,50	1,3	11,9	1,03	1,9	12,5

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2005

Pisteet \ Tehtävä	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	164	138	395	694	1088	2185	592	655	2068	854	2144	204	764	568	171	12684
1	147	167	618	1681	416	632	407	83	293	567	297	124	393	20	318	6163
2	245	322	225	1008	831	294	249	87	252	223	279	177	536	8	70	4806
3	1126	1538	350	467	487	187	686	241	500	153	635	229	418	14	24	7055
4	501	627	441	286	323	91	410	219	118	199	111	81	262	4	27	3700
5	560	933	263	256	549	113	286	225	135	118	88	41	271	1	69	3908
6	3889	2798	4147	1156	2058	816	914	434	693	742	381	30	865	7	178	19108
Summa	6632	6523	6439	5548	5752	4318	3544	1944	4059	2856	3935	886	3509	622	857	57424

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2005

Pisteet \ Tehtävä	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	226	188	468	839	1433	2434	700	563	2007	874	2369	180	682	596	154	13713
1	204	208	769	1692	443	437	486	53	190	360	194	89	414	16	274	5829
2	348	385	270	804	730	174	252	39	134	105	139	86	498	10	30	4004
3	1291	1694	414	284	450	107	541	140	262	57	277	93	260	5	2	5877
4	559	595	431	118	210	45	214	87	45	66	33	29	128	0	10	2570
5	512	765	229	140	255	42	143	40	44	28	34	17	118	1	17	2385
6	2401	1564	2664	428	973	239	335	80	193	123	70	10	291	1	32	9404
Summa	5541	5399	5245	4305	4494	3478	2671	1002	2875	1613	3116	504	2391	629	519	43782

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2005

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2005	2004	2003	2002	2001
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	~~%~~	%	%
L	442	9,4	159	8,1	601	9,1	11,4	9,9	9,1	10,6
E	938	20,0	478	24,4	1416	21,3	23,6	23,5	23,1	24,4
M	915	19,5	493	25,2	1408	21,2	24,6	24,2	24,8	22,4
C	929	19,8	393	20,1	1322	19,9	18,4	18,1	20,3	18,9
B	668	14,3	212	10,8	880	13,2	12,8	13,7	11,8	12,4
A	509	10,9	155	7,9	664	10,0	5,8	6,6	6,6	7,1
I	285	6,1	68	3,5	353	5,3	3,4	4,1	4,3	4,2
Yhteensä	4686		1958		6644	6644	5524	6071	6417	6226
Keskiarvo	4,28		4,58			4,36	4,68	4,57	4,56	4,60
Hajonta	1,82		1,61			1,77	1,63	1,67	1,66	1,69

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2005

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2005	2004	2003	2002	2001
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	46	2,2	40	1,2	86	1,6	2,3	1,4	1,3	1,1
E	168	7,9	319	9,3	487	8,8	7,6	7,2	7,3	8,2
M	286	13,5	620	18,0	906	16,3	15,7	15,6	16,7	15,5
C	509	24,0	873	25,4	1382	24,8	22,9	21,5	21,7	22,7
B	414	19,5	646	18,9	1060	19,1	23,1	23,7	21,0	21,3
A	429	20,2	581	16,9	1010	18,2	15,6	16,1	17,2	17,1
I	268	12,6	362	10,5	630	11,3	12,8	14,4	14,8	14,1
Yhteensä	2120		3441		5561	5561	6967	6640	6709	6635
Keskiarvo	3,25		3,45			3,38	3,32	3,21	3,21	3,23
Hajonta	1,77		1,70			1,73	1,76	1,77	1,79	1,78

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2005

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	4,85	1,6	99,8	4,33	1,8	99,6	4,61	1,7	99,7
2	4,50	1,6	98,2	4,01	1,7	97,1	4,28	1,7	97,7
3	4,67	2,0	96,9	4,08	2,3	94,3	4,41	2,2	95,7
4	2,61	2,1	83,6	1,83	1,8	77,4	2,27	2,0	80,7
5	3,46	2,4	86,6	2,47	2,3	80,8	3,03	2,4	83,7
6	1,76	2,3	65,6	0,84	1,7	62,5	1,35	2,1	63,9
7	3,25	2,2	53,3	2,32	2,0	48,0	2,85	2,2	50,9
8	2,87	2,4	29,3	1,58	2,1	18,0	2,43	2,4	24,1
9	1,87	2,3	61,1	0,97	1,8	51,7	1,50	2,2	56,8
10	2,56	2,4	43,0	1,17	1,8	29,0	2,06	2,3	36,6
11	1,51	2,0	59,2	0,65	1,4	56,0	1,13	1,8	57,8
12	2,12	1,6	13,3	1,59	1,6	9,1	1,92	1,6	11,4
13	2,94	2,3	52,8	2,11	2,0	43,0	2,60	2,2	48,3
14	0,23	0,9	9,4	0,10	0,5	11,3	0,16	0,7	10,2
15	2,39	2,3	12,9	1,27	1,6	9,3	1,97	2,1	11,3

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2006

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	22	93	669	1105	2440	992	2703	1202	2290	1798	719	115	213	1161	134	15656
1	21	178	373	454	629	671	654	2223	687	477	452	41	105	432	154	7551
2	222	331	381	449	217	214	187	378	307	198	435	81	68	174	64	3706
3	209	633	86	366	232	154	147	183	393	105	655	72	92	178	57	3562
4	1240	1105	257	1360	378	295	215	244	225	69	897	208	57	93	124	6767
5	1223	2156	1439	346	386	418	500	420	141	145	42	235	84	67	182	7784
6	4542	2861	4193	2281	1184	2293	902	808	1210	202	127	691	133	208	1577	23212
Summa	7479	7357	7398	6361	5466	5037	5308	5458	5253	2994	3327	1443	752	2313	2292	68238

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2006

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	20	101	664	967	1787	876	2235	985	1600	1153	484	43	161	787	58	11921
1	24	165	403	380	327	544	336	1442	420	104	320	12	64	211	104	4856
2	201	337	269	317	82	107	90	139	87	37	204	26	35	83	28	2042
3	180	565	47	171	65	52	53	69	125	13	257	17	29	65	26	1734
4	916	745	130	616	118	98	71	98	59	6	198	54	20	29	63	3221
5	774	1158	732	124	101	128	96	121	40	6	6	46	12	13	90	3447
6	2010	962	1808	710	235	657	181	157	253	9	7	114	17	29	556	7705
Summa	4125	4033	4053	3285	2715	2462	3062	3011	2584	1328	1476	312	338	1217	925	34926

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2006

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2006	2005	2004	2003	2002
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	402	7,8	215	9,2	617	8,3	9,1	11,4	9,9	9,1
E	896	17,5	528	22,5	1424	19,0	21,3	23,6	23,5	23,1
M	1070	20,8	570	24,3	1640	21,9	21,2	24,6	24,2	24,8
C	1089	21,2	494	21,1	1583	21,2	19,9	18,4	18,1	20,3
B	824	16,1	292	12,4	1116	14,9	13,2	12,8	13,7	11,8
A	470	9,1	136	5,8	606	8,1	10,0	5,8	6,6	6,6
I	383	7,5	112	4,8	495	6,6	5,3	3,4	4,1	4,3
Yhteensä	5134		2347		7481	7481	6644	5524	6071	6417
Keskiarvo	4,15		4,54			4,27	4,36	4,68	4,57	4,56
Hajonta	1,82		1,67			1,78	1,77	1,63	1,67	1,66

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2006

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2006	2005	2004	2003	2002
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	21	1,5	43	1,6	64	1,6	1,6	2,3	1,4	1,3
E	73	5,3	207	7,6	280	6,8	8,8	7,6	7,2	7,3
M	159	11,5	484	17,7	643	15,6	16,3	15,7	15,6	16,7
C	293	21,1	685	25,0	978	23,7	24,8	22,9	21,5	21,7
B	286	20,6	581	21,2	867	21,0	19,1	23,1	23,7	21,0
A	264	19,1	423	15,4	687	16,6	18,2	15,6	16,1	17,2
I	290	20,9	316	11,5	606	14,7	11,3	12,8	14,4	14,8
Yhteensä	1386		2739		4125	4125	5561	6967	6640	6709
Keskiarvo	2,84		3,39			3,21	3,38	3,32	3,21	3,21
Hajonta	1,85		1,71			1,78	1,73	1,76	1,77	1,79

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2006

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	5,27	1,1	100,0	4,98	1,2	100,0	5,17	1,2	100,0
2	4,77	1,4	98,3	4,23	1,6	97,8	4,58	1,5	98,1
3	4,70	2,0	98,9	3,97	2,4	98,3	4,44	2,2	98,7
4	3,66	2,3	85,0	2,70	2,3	79,6	3,34	2,3	83,1
5	2,25	2,5	73,1	1,13	2,0	65,8	1,88	2,4	70,5
6	3,69	2,5	67,3	2,39	2,5	59,7	3,26	2,6	64,6
7	1,93	2,4	70,1	0,82	1,7	74,2	1,53	2,3	72,1
8	2,10	2,1	73,0	1,28	1,6	73,0	1,81	2,0	73,0
9	2,16	2,4	70,2	1,13	1,9	62,6	1,82	2,3	67,5
10	1,14	1,9	40,0	0,24	0,8	32,2	0,86	1,7	37,2
11	2,36	1,7	44,5	1,60	1,5	35,8	2,13	1,7	41,4
12	4,55	1,9	19,3	3,99	2,1	7,6	4,45	2,0	15,1
13	2,61	2,3	10,1	1,37	1,8	8,2	2,23	2,2	9,4
14	1,41	1,9	30,9	0,76	1,4	29,5	1,19	1,8	30,4
15	4,94	1,9	30,6	4,62	2,1	22,4	4,85	2,0	27,7

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2007

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	23	302	794	828	793	1762	1772	676	505	481	134	253	229	59	1829	15808
1	47	213	383	317	564	930	1356	92	341	156	16	638	9	54	379	5495
2	298	834	646	1667	1011	537	870	100	2612	983	29	2689	7	21	453	12759
3	408	502	1700	221	708	748	224	65	310	398	10	154	3	37	124	5615
4	1441	1754	642	657	933	478	106	133	246	840	10	248	4	21	65	7582
5	1741	584	747	403	1332	708	275	166	213	627	10	167	1	33	62	7074
6	3946	3678	2691	1670	2233	2422	833	1722	1197	1505	26	813	3	50	20	70
7														55	19	74
8														74	26	100
9														88	32	129
Summa	7904	7867	7603	5763	7574	7585	5436	2954	5424	4990	235	4962	256	492	3009	15937

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2007

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	21	274	735	687	700	1259	1326	509	445	376	94	210	120	18	873	7647
1	55	203	356	164	393	554	758	77	208	89	11	501	1	22	124	3516
2	316	647	425	1000	598	272	369	31	1154	582	6	1380	3	4	140	6927
3	353	368	878	87	378	362	64	36	81	150	0	49	0	10	14	2830
4	881	1100	265	275	411	219	22	48	51	294	0	84	0	4	5	3659
5	888	235	296	122	505	288	50	45	40	164	2	31	1	5	11	2683
6	1378	1026	710	371	646	719	116	403	164	344	1	151	0	7	5	6041
7														4	0	4
8														7	1	8
9														4	0	4
Summa	3892	3853	3665	2706	3631	3673	2705	1149	2143	1999	114	2406	125	85	1173	33319

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

LIITE 5B

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2007

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2007 %	2006 %	2005 %	2004 %	2003 %
L	396	7,5	197	7,4	593	7,5	8,3	9,1	11,4	9,9
E	960	18,3	577	21,8	1537	19,4	19,0	21,3	23,6	23,5
M	1094	20,8	652	24,6	1746	22,1	21,9	21,2	24,6	24,2
C	1195	22,7	594	22,4	1789	22,6	21,2	19,9	18,4	18,1
B	879	16,7	323	12,2	1202	15,2	14,9	13,2	12,8	13,7
A	412	7,8	182	6,9	594	7,5	8,1	10,0	5,8	6,6
I	319	6,1	126	4,7	445	5,6	6,6	5,3	3,4	4,1
Yhteensä	5255		2651		7906	7906	7481	6644	5524	6071
Keskiarvo	4,23		4,45			4,31	4,27	4,36	4,68	4,57
Hajonta	1,74		1,65			1,71	1,78	1,77	1,63	1,67

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2007

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2007 %	2006 %	2005 %	2004 %	2003 %
L	18	1,5	32	1,2	50	1,3	1,6	1,6	2,3	1,4
E	61	5,1	240	8,9	301	7,7	6,8	8,8	7,6	7,2
M	157	13,0	429	16,0	586	15,1	15,6	16,3	15,7	15,6
C	278	23,0	738	27,5	1016	26,1	23,7	24,8	22,9	21,5
B	275	22,7	574	21,4	849	21,8	21,0	19,1	23,1	23,7
A	214	17,7	366	13,6	580	14,9	16,6	18,2	15,6	16,1
I	206	17,0	305	11,4	511	13,1	14,7	11,3	12,8	14,4
Yhteensä	1209		2684		3893	3893	4125	5561	6967	6640
Keskiarvo	3,01		3,43			3,30	3,21	3,38	3,32	3,21
Hajonta	1,78		1,78			1,73	1,78	1,73	1,76	1,77

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2007

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	5,06	1,2	100,0	4,62	1,4	100,0	4,92	1,3	100,0
2	4,50	1,7	99,5	3,72	1,9	99,0	4,24	1,8	99,3
3	3,84	2,0	96,2	2,90	2,1	94,1	3,54	2,1	95,5
4	3,29	2,2	72,9	2,35	2,0	69,5	2,99	2,2	71,8
5	3,76	2,1	95,8	2,97	2,2	93,3	3,50	2,1	95,0
6	3,19	2,4	95.9	2,40	2,4	94,4	2,94	2,4	95,4
7	1,94	2,1	68,8	1,01	1,5	69,5	1,63	2,0	69,0
8	4,12	2,5	37,4	2,68	2,8	29,5	3,72	2,7	34,8
9	2,90	1,9	68,6	1,94	1,6	55,0	2,63	1,9	64,1
10	3,78	2,0	63,1	2,88	2,0	51,3	3,52	2,1	59,2
11	1,49	2,1	3,0	0,34	1,0	2,9	1,11	1,9	3,0
12	2,66	1,8	62,8	2,00	1,4	61,8	2,44	1,7	62,4
13	0,28	1,0	3,2	0,10	0,6	3,2	0,22	0,9	3,3
*14	5,13	3,2	6,2	3,09	2,9	2,2	4,83	3,2	4,9
*15	0,99	1,7	38,1	0,49	1,0	29,2	0,85	1,6	35,1

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

LIITE 6A

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2008

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	51	43	66	1474	722	415	289	781	1182	480	412	465	78	315	370	16548
1	71	44	232	244	1954	233	128	549	1048	220	316	427	14	340	230	6050
2	300	195	949	140	345	238	176	1090	506	374	229	395	14	712	104	5769
3	364	214	1179	376	71	897	1437	3540	468	75	834	291	49	408	223	10429
4	1426	849	876	263	65	585	849	130	704	53	210	417	8	442	63	6944
5	743	1088	1647	378	128	758	1271	89	1171	58	498	717	4	336	28	8919
6	5319	5830	3139	3244	2061	3990	3398	405	1319	47	922	968	15	406	34	440
7														318	31	349
8														422	58	480
9														1025	212	1246
Summa	8274	8263	8088	6119	5346	7116	7548	6584	6398	1307	3421	3680	182	4724	1353	17794

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2008

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	30	40	48	839	363	285	217	546	785	293	245	270	22	177	174	4334
1	46	37	158	139	951	145	90	323	620	96	186	230	1	219	79	3320
2	208	137	626	67	134	131	84	587	300	118	104	156	3	428	20	3103
3	259	130	687	183	25	497	835	1135	171	28	356	114	6	207	35	4668
4	765	515	406	110	12	253	343	35	232	5	57	104	1	165	9	3012
5	374	498	588	146	40	257	425	16	314	3	142	164	0	99	0	3066
6	1681	1991	769	915	568	1103	966	78	221	3	143	130	0	119	3	8690
7														55	1	56
8														51	3	54
9														90	8	98
Summa	3363	3348	3282	2399	2093	2671	2960	2720	2643	546	1233	1168	33	1610	332	30401

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2008

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2008 %	2007 %	2006 %	2005 %	2004 %
L	505	9,3	242	8,5	747	9,0	7,5	8,3	9,1	11,4
E	935	17,2	548	19,3	1483	17,9	19,4	19,0	21,3	23,6
M	1032	18,9	655	23,1	1687	20,4	22,1	21,9	21,2	24,6
C	1286	23,6	655	23,1	1941	23,4	22,6	21,2	19,9	18,4
B	900	16,5	434	15,3	1334	16,1	15,2	14,9	13,2	12,8
A	543	10,0	208	7,3	751	9,1	7,5	8,1	10,0	5,8
I	249	4,6	91	3,2	340	4,1	5,6	6,6	5,3	3,4
Yhteensä	5450		2833		8283	8283	7906	7481	6644	5524
Keskiarvo	4,26		4,44			4,33	4,31	4,27	4,36	4,68
Hajonta	1,71		1,60			1,78	1,71	1,78	1,77	1,63

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2008

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2008 %	2007 %	2006 %	2005 %	2004 %
L	18	1,7	39	1,7	57	1,7	1,3	1,6	1,6	2,3
E	62	5,8	168	7,3	230	6,8	7,7	6,8	8,8	7,6
M	122	11,4	380	16,6	502	14,9	15,1	15,6	16,3	15,7
C	242	22,6	647	28,2	889	26,4	26,1	23,7	24,8	22,9
B	287	26,8	549	23,9	836	24,8	21,8	21,0	19,1	23,1
A	205	19,1	347	15,1	552	16,4	14,9	16,6	18,2	15,6
I	135	12,6	163	7,1	298	8,9	13,1	14,7	11,3	12,8
Yhteensä	1071		2293		3364	3364	3893	4125	5561	6967
Keskiarvo	3,13		3,43			3,41	3,30	3,21	3,38	3,32
Hajonta	1,67		1,78			1,60	1,73	1,78	1,73	1,76

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2008

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	5,21	1,2	99,9	4,83	1,4	100,0	5,10	1,3	99,9
2	5,43	1,1	99,8	5,14	1,3	99,6	5,35	1,2	99,7
3	4,48	1,6	97,7	3,85	1,6	97,6	4,30	1,6	97,6
4	3,93	2,6	73,9	3,12	2,7	71,3	3,70	2,6	73,1
5	3,02	2,5	64,5	2,37	2,4	62,2	2,83	2,5	63,9
6	4,70	1,8	85,9	4,05	2,1	72,4	4,52	1,9	84,0
7	4,63	1,6	91,1	4,07	1,8	88,0	4,47	1,7	90,2
8	2,54	1,4	79,5	2,06	1,4	80,9	2,40	1,4	79,9
9	3,13	2,2	77,2	2,10	2,1	78,6	2,83	2,2	77,6
10	1,51	1,6	15,8	0,86	1,1	16,2	1,32	1,5	15,9
11	3,55	2,1	41,3	2,64	2,0	36,7	3,31	2,1	40,0
12	3,57	2,1	44,4	2,48	2,1	34,7	3,31	2,2	41,6
13	1,82	1,9	2,2	0,88	1,3	1,0	1,67	1,9	1,8
*14	5,02	3,0	57,0	3,21	2,5	47,9	4,56	2,0	57,0
*15	3,17	3,3	16,3	1,15	1,9	9,9	2,77	3,1	14,5

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2009

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	82	199	75	197	1013	893	3100	2042	1683	590	1524	314	612	1957	206	17330
1	121	228	380	511	501	140	592	632	709	389	244	385	168	287	71	5358
2	361	462	577	168	773	304	174	228	685	260	156	216	49	367	43	4825
3	449	552	1267	233	1356	1561	110	116	562	405	41	255	41	320	30	7301
4	1382	1251	1253	857	995	268	64	124	645	289	55	570	12	282	33	8084
5	1305	1188	1384	558	711	790	188	93	865	247	31	610	10	503	27	8515
6	4965	4663	3642	5854	1705	3620	646	564	509	1654	106	1535	7	106	29	135
7														134	20	154
8														147	15	162
9														416	19	444
Summa	8665	8543	8578	8378	7054	7576	4874	3799	5658	3834	2157	3885	899	4519	493	17774

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2009

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	71	140	57	116	499	595	1357	990	773	251	686	138	198	822	55	6748
1	58	123	235	270	236	71	186	228	266	215	73	170	37	80	7	2255
2	184	203	344	79	311	157	29	108	192	86	46	71	6	95	0	1911
3	232	273	566	130	436	602	19	44	140	166	3	66	1	50	2	2730
4	579	440	497	502	285	98	10	26	97	73	6	165	3	41	4	2826
5	455	488	485	196	159	218	18	27	136	39	7	107	2	64	0	2401
6	1412	1212	760	1588	246	813	50	93	40	207	7	202	0	13	0	6643
7														11	0	11
8														14	0	14
9														22	0	22
Summa	2991	2879	2944	2881	2172	2554	1669	1516	1644	1037	828	919	247	1212	68	25561

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2009

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2009	2008	2007	2006	2005
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	456	8,4	192	6,0	648	7,5	9,0	7,5	8,3	9,1
E	921	16,9	534	16,6	1455	16,8	17,9	19,4	19,0	21,3
M	1168	21,4	775	24,1	1943	22,4	20,4	22,1	21,9	21,2
C	1373	25,2	804	25,1	2177	25,1	23,4	22,6	21,2	19,9
B	840	15,4	516	16,1	1356	15,7	16,1	15,2	14,9	13,2
A	509	9,3	291	9,1	800	9,2	9,1	7,5	8,1	10,0
I	189	3,5	98	3,0	287	3,3	4,1	5,6	6,6	5,3
Yhteensä	5456		3210		8666	8666	8283	7906	7481	6644
Keskiarvo	4,32		4,29			4,31	4,33	4,31	4,27	4,36
Hajonta	1,62		1,54			1,59	1,78	1,71	1,78	1,77

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2009

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2009	2008	2007	2006	2005
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	13	1,5	17	0,8	30	1,0	1,7	1,3	1,6	1,6
E	46	5,4	138	6,5	184	6,2	6,8	7,7	6,8	8,8
M	121	14,1	345	16,2	466	15,6	14,9	15,1	15,6	16,3
C	233	27,2	609	28,5	842	28,1	26,4	26,1	23,7	24,8
B	208	24,4	523	24,5	731	24,4	24,8	21,8	21,0	19,1
A	152	17,7	340	15,9	492	16,4	16,4	14,9	16,6	18,2
I	85	9,9	163	7,6	248	8,3	8,9	13,1	14,7	11,3
Yhteensä	858		2135		2993	2993	3364	3893	4125	5561
Keskiarvo	3,30		3,45			3,40	3,41	3,30	3,21	3,38
Hajonta	1,59		1,51			1,54	1,60	1,73	1,78	1,73

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2009

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	5,08	1,3	100,0	4,74	1,5	99,9	4,99	1,4	100,0
2	4,88	1,6	98,6	4,45	1,8	96,2	4,78	1,6	98,0
3	4,56	1,6	99,0	3,94	1,7	98,4	4,40	1,6	98,8
4	5,12	1,6	96,7	4,63	1,9	96,3	4,99	1,7	96,6
5	3,39	2,1	86,6	2,57	2,0	72,6	3,19	2,1	79,1
6	4,25	2,1	87,4	3,35	2,3	85,3	4,02	2,2	86,9
7	1,30	2,2	56,4	0,44	1,2	55,8	1,08	2,0	56,1
8	1,52	2,2	43,8	0,91	1,7	50,7	1,35	2,1	45,6
9	2,43	2,1	65,3	1,45	1,8	54,9	2,21	2,1	62,6
10	3,77	2,3	44,2	2,52	2,2	34,6	3,50	2,4	41,8
11	0,78	1,6	24,9	0,33	0,9	27,7	0,66	1,4	25,6
12	4,15	2,0	44,8	3,17	2,2	30,7	3,96	2,1	41,2
13	0,59	1,1	10,6	0,30	0,8	8,3	0,53	1,1	9,8
*14	2,68	3,1	52,2	1,13	2,1	40,5	2,35	3,0	49,2
*15	2,27	2,7	5,7	0,43	1,1	2,3	2,05	2,7	4,8

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2010

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	35	107	433	3726	1663	1073	2313	2714	1599	1965	405	1528	638	645	718	17548
1	50	100	397	179	669	233	258	649	536	1381	531	210	612	164	25	5994
2	178	356	420	188	512	214	169	411	446	2618	86	69	270	369	53	6361
3	259	356	1118	155	265	762	176	215	201	474	83	81	109	355	66	4678
4	1168	1239	1007	303	257	336	342	173	118	86	49	22	133	260	129	5626
5	925	894	964	267	310	412	894	197	193	79	83	20	120	310	36	5709
6	6159	5668	4280	1853	2909	4689	924	2179	462	445	1213	83	859	205	24	229
7														423	29	452
8														167	48	215
9														320	118	447
Summa	8774	8720	8619	6671	6585	7719	5076	6538	3555	7048	2450	2013	2741	3218	1246	17995

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2010

	Tehtävä															
Pisteet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	33	81	242	1435	818	505	1162	1250	693	967	166	620	222	246	264	8704
1	31	62	227	71	303	112	113	269	198	492	201	74	205	45	6	2409
2	106	198	206	71	192	130	32	142	173	837	17	25	74	114	10	2327
3	97	213	477	32	77	278	33	64	63	157	8	27	17	94	9	1646
4	547	544	365	66	66	120	55	36	16	13	5	8	32	57	15	1945
5	353	393	271	43	70	113	113	43	12	4	21	1	21	49	2	1509
6	1774	1425	1067	291	488	1253	95	291	32	55	164	7	168	18	1	7129
7														54	3	57
8														14	1	15
9														11	4	15
Summa	2941	2916	2855	2009	2014	2511	1603	2095	1187	2525	582	762	739	702	315	25756

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2010

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2010	2009	2008	2007	2006
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	449	8,2	161	4,9	610	7,0	7,5	9,0	7,5	8,3
E	960	17,6	562	17,0	1522	17,3	16,8	17,9	19,4	19,0
M	1220	22,3	790	23,8	2010	22,9	22,4	20,4	22,1	21,9
C	1204	22,0	732	22,1	1936	22,0	25,1	23,4	22,6	21,2
B	950	17,4	630	19,0	1580	18,0	15,7	16,1	15,2	14,9
A	459	8,4	298	9,0	757	8,6	9,2	9,1	7,5	8,1
I	222	4,1	142	4,3	364	4,2	3,3	4,1	5,6	6,6
Yhteensä	5464		3315		8779	8779	8666	8283	7906	7481
Keskiarvo	4,37		4,18			4,27	4,31	4,33	4,31	4,27
Hajonta	1,56		1,60			1,63	1,59	1,78	1,71	1,78

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2010

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2010	2009	2008	2007	2006
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	12	1,5	24	1,1	36	1,2	1,0	1,7	1,3	1,6
E	34	4,3	148	6,9	182	6,2	6,2	6,8	7,7	6,8
M	109	13,8	333	15,5	442	15	15,6	14,9	15,1	15,6
C	174	22,0	567	26,3	741	25,2	28,1	26,4	26,1	23,7
B	255	32,2	568	26,4	823	28	24,4	24,8	21,8	21,0
A	125	15,8	314	14,6	439	14,9	16,4	16,4	14,9	16,6
I	82	10,4	198	9,2	280	9,5	8,3	8,9	13,1	14,7
Yhteensä	791		2152		2943	2943	2993	3364	3893	4125
Keskiarvo	3,32		3,40			3,35	3,40	3,41	3,30	3,21
Hajonta	1,56		1,58			1,58	1,54	1,60	1,73	1,78

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2010

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	5,41	1,1	99,9	5,14	1,3	99,9	5,34	1,1	99,9
2	5,20	1,3	99,3	4,73	1,6	99,1	5,08	1,4	99,3
3	4,54	1,8	98,7	3,95	2,0	97,0	4,39	1,9	97,9
4	2,20	2,7	76,0	1,26	2,2	68,3	1,98	2,6	73,4
5	3,42	2,6	75,0	2,21	2,5	68,4	3,14	2,6	73,4
6	4,47	2,2	87,9	3,89	2,4	85,3	4,33	2,3	87,3
7	2,46	2,5	57,8	1,02	1,9	54,5	2,12	2,5	57,0
8	2,58	2,7	74,5	1,36	2,2	71,2	2,28	2,6	73,6
9	1,76	2,2	40,5	0,88	1,4	40,3	1,54	2,0	40,5
10	1,62	1,6	80,3	1,20	1,2	85,8	1,51	1,5	81,7
11	3,61	2,6	27,9	2,35	2,5	19,8	3,37	2,6	25,9
12	0,63	1,5	22,9	0,37	1,0	25,9	0,56	1,3	23,7
13	2,83	2,5	31,2	2,23	2,4	25,1	2,70	2,5	29,7
*14	4,03	3,0	36,7	2,46	2,5	23,9	3,75	3,0	33,4
*15	2,26	3,2	14,2	0,62	1,7	10,7	1,93	3,0	13,3

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

LIITE 9A

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2011

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	39	10	833	223	626	1288	403	1422	532	605	466	1057	1830	1098	73	17062
1	67	65	483	1364	483	660	229	1058	99	116	312	55	116	407	13	5527
2	190	236	1601	190	278	889	304	674	153	66	836	77	100	330	5	5931
3	340	594	742	125	703	617	699	150	367	85	612	34	186	231	4	5492
4	872	1956	1272	135	1308	195	664	162	228	153	970	78	78	188	3	8266
5	1497	1203	681	282	820	190	1205	89	573	117	472	117	234	116	13	7614
6	5526	4450	2608	4953	4108	2189	3956	518	1720	652	843	557	2363	65	45	34553
7														89	41	130
8														78	51	129
9														174	146	329
Summa	8531	8514	8220	7272	8326	6028	7460	4073	3672	1794	4511	1975	4907	2776	394	17391

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2011

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	11	7	423	108	321	558	213	565	230	226	212	332	689	442	20	4357
1	39	26	219	610	215	237	91	456	34	33	111	13	52	109	1	2246
2	88	119	620	57	133	298	130	262	37	13	254	21	29	53	2	2116
3	187	318	246	44	307	182	257	57	103	22	149	9	55	40	0	1976
4	357	833	364	40	456	50	223	48	54	25	173	16	29	29	0	2697
5	565	368	167	97	212	60	354	18	130	12	62	15	55	14	2	2131
6	1333	909	415	1089	837	391	964	76	247	44	83	77	391	6	2	6864
7														2	3	5
8														2	0	2
9														1	2	3
Summa	2580	2580	2454	2045	2481	1776	2232	1482	835	375	1044	483	1300	698	32	22397

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2011

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2011	2010	2009	2008	2007
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	487	9,1	170	5,4	657	7,7	7,0	7,5	9,0	7,5
E	844	15,7	536	17,0	1380	16,2	17,3	16,8	17,9	19,4
M	1168	21,7	794	25,2	1962	23,0	22,9	22,4	20,4	22,1
C	1209	22,5	754	23,9	1963	23,0	22,0	25,1	23,4	22,6
B	1012	18,8	531	16,8	1543	18,1	18,0	15,7	16,1	15,2
A	437	8,1	255	8,1	692	8,1	8,6	9,2	9,1	7,5
I	223	4,1	114	3,6	337	3,9	4,2	3,3	4,1	5,6
Yhteensä	5380		3154		8534	8354	8779	8666	8283	7906
Keskiarvo	4,27		4,28			4,28	4,27	4,31	4,33	4,31
Hajonta	1,66		1,55			1,62	1,63	1,59	1,78	1,71

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2011

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2011	2010	2009	2008	2007
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	9	1,2	19	1,0	28	1,1	1,2	1,0	1,7	1,3
E	32	4,4	134	7,2	166	6,4	6,2	6,2	6,8	7,7
M	88	12,0	335	18,1	423	16,4	15,0	15,6	14,9	15,1
C	180	24,7	541	29,2	721	27,9	25,2	28,1	26,4	26,1
B	202	27,7	446	24,1	648	25,1	28,0	24,4	24,8	21,8
A	127	17,4	236	12,7	363	14,1	14,9	16,4	16,4	14,9
I	92	12,6	141	7,6	233	9,0	9,5	8,3	8,9	13,1
Yhteensä	730		1852		2582	2582	2943	2993	3364	3893
Keskiarvo	3,12		3,56			3,43	3,35	3,40	3,41	3,30
Hajonta	1,62		1,53			1,57	1,58	1,54	1,60	1,73

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2011

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti
1	5,34	1,1	100,0	5,05	1,3	99,9	5,28	1,2	100,0
2	5,03	1,2	99,8	4,59	1,3	99,9	4,93	1,2	99,8
3	3,66	2,1	96,3	2,84	2,0	95,0	3,47	2,1	96,0
4	4,65	2,2	85,2	3,93	2,4	79,2	4,49	2,2	83,8
5	4,46	2,0	97,6	3,75	2,1	96,1	4,30	2,0	97,2
6	3,18	2,4	70,6	2,38	2,3	68,8	3,00	2,4	70,2
7	4,74	1,8	87,4	4,29	2,0	86,4	4,63	1,8	87,2
8	1,73	2,0	47,7	1,27	1,6	57,4	1,61	1,9	50,0
9	4,25	2,2	43,0	3,31	2,4	32,3	4,08	2,3	40,5
10	3,13	2,6	21,0	1,46	2,2	14,5	2,84	2,6	19,5
11	3,35	1,9	52,9	2,46	1,8	40,4	3,18	1,9	50,0
12	2,30	2,7	23,1	1,41	2,3	18,7	2,13	2,7	22,1
13	3,37	2,8	57,5	2,31	2,7	50,3	3,15	2,8	55,8
*14	2,27	2,8	32,5	0,85	1,5	27,0	1,98	2,6	31,3
*15	6,07	3,4	4,6	2,06	3,1	1,2	5,77	3,6	3,8

(Lahtinen 2012a, Exel-taulukot)

Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2012

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	11	10	433	1914	673	1178	568	725	1190	1077	733	184	726	283	589	10294
1	28	107	71	88	336	231	1347	709	634	1158	348	146	107	78	289	5677
2	79	435	175	69	547	262	250	930	1095	845	326	88	129	378	133	5743
3	197	786	481	51	312	1590	207	552	1237	1365	175	81	62	140	726	7965
4	551	1428	151	115	690	280	85	1154	348	376	202	226	105	609	129	6453
5	1343	2590	473	76	1114	767	118	602	405	528	122	291	364	477	48	9323
6	6232	3066	6582	672	3827	2729	993	1475	2240	1534	351	1389	965	132	160	32347
7														154	53	207
8														54	18	72
9														128	99	236
Summa	8441	8422	8366	2985	7499	7037	3568	6147	7149	6883	2257	2405	2458	2433	2244	10530

(Lahtinen 2013, Kevään 2012 taulukot)

Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2012

Pisteet	Tehtävä 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Summa
0	4	5	180	779	266	492	250	318	450	413	232	69	322	101	189	4070
1	9	54	32	23	119	102	494	223	222	441	104	55	34	27	46	1985
2	27	166	74	27	234	75	57	302	340	251	84	30	34	113	24	1838
3	70	316	177	20	143	523	42	146	382	372	35	31	17	34	109	2417
4	219	514	37	27	206	61	13	199	67	73	36	55	21	117	11	1656
5	414	783	144	11	266	165	9	80	105	96	15	48	55	70	3	2264
6	1559	460	1624	72	728	493	110	156	413	194	51	239	143	12	11	6265
7														24	4	28
8														2	1	3
9														3	9	12
Summa	2302	2298	2268	959	1962	1911	975	1424	1979	1840	557	527	626	503	407	20538

(Lahtinen 2013, Kevään 2012 taulukot)

Taulukko 1. Pakollinen pitkä matematiikka, kevät 2012

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2012	2011	2010	2009	2008
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	399	7,6	181	5,6	580	6,9	7,7	7,0	7,5	9,0
E	938	17,9	538	16,7	1476	17,5	16,2	17,3	16,8	17,9
M	1123	21,5	731	22,8	1854	22,0	23,0	22,9	22,4	20,4
C	1138	21,8	725	22,6	1863	22,1	23,0	22,0	25,1	23,4
B	923	17,6	629	19,6	1552	18,4	18,1	18,0	15,7	16,1
A	492	9,4	299	9,3	791	9,4	8,1	8,6	9,2	9,1
I	218	4,2	108	3,4	326	3,9	3,9	4,2	3,3	4,1
Yhteensä	5231		3211		8442	8442	8354	8779	8666	8283
Keskiarvo	4,27		4,22			4,25	4,28	4,27	4,31	4,33
Hajonta	1,66		1,57			1,63	1,62	1,63	1,59	1,78

(Lahtinen 2013, Kevään 2012 taulukot)

Taulukko 2. Ylimääräinen pitkä matematiikka, kevät 2012

Arvosana	Pojat		Tytöt		Yht.	2012	2011	2010	2009	2008
	lkm.	%	lkm.	%	lkm.	%	%	%	%	%
L	16	2,4	29	1,8	45	1,9	1,1	1,2	1,0	1,7
E	40	6,0	134	8,2	174	7,6	6,4	6,2	6,2	6,8
M	86	13,0	270	16,4	356	15,4	16,4	15,0	15,6	14,9
C	171	25,8	412	25,1	583	25,3	27,9	25,2	28,1	26,4
B	172	26,0	433	26,4	605	26,3	25,1	28,0	24,4	24,8
A	120	18,1	244	14,9	364	15,8	14,1	14,9	16,4	16,4
I	57	8,6	120	7,3	177	7,7	9,0	9,5	8,3	8,9
Yhteensä	662		1642		2304	2304	2582	2943	2993	3364
Keskiarvo	3,36		3,53			3,48	3,43	3,35	3,40	3,41
Hajonta	1,59		1,57			1,58	1,57	1,58	1,54	1,60

(Lahtinen 2013, Kevään 2012 taulukot)

Taulukko 5. Tehtäväkohtaisia tuloksia, pitkän oppimäärän koe, kevät 2012

Pakollisena				Ylimääräisenä			Yhteensä		
Teht. nro	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-prosentti	Suoritusten keskiarvo	hajonta	Vastaus-Prosentti
1	5,58	0,9	100,0	5,46	0,9	99,9	5,55	0,9	100,0
2	4,80	1,3	99,8	4,38	1,3	99,7	4,71	1,3	99,8
3	5,30	1,6	99,1	4,99	1,9	98,4	5,23	1,7	99,0
4	1,76	2,6	35,4	0,76	1,8	41,6	1,52	2,4	36,7
5	4,49	2,0	88,8	3,84	2,2	85,2	4,35	2,1	88,0
6	3,82	2,2	83,4	3,06	2,3	82,9	3,65	2,3	83,3
7	2,62	2,4	42,3	1,53	1,8	42,3	2,39	2,3	42,3
8	3,37	2,1	72,8	2,39	2,0	61,8	3,18	2,1	70,5
9	3,27	2,2	84,7	2,69	2,2	85,9	3,15	2,2	84,9
10	2,95	2,1	81,5	2,17	1,9	79,9	2,78	2,1	81,2
11	2,24	2,2	26,7	1,62	1,9	24,2	2,11	2,2	26,2
12	4,68	2,0	28,5	3,99	2,3	22,9	4,56	2,1	27,3
13	3,49	2,6	29,1	2,19	2,6	27,2	3,23	2,7	28,7
*14	3,92	2,3	28,8	2,89	2,1	21,8	3,74	2,3	27,3
*15	2,61	2,4	26,6	1,63	2,0	17,7	2,46	2,4	24,7

(Lahtinen 2013, Kevään 2012 taulukot)

Taulukko 3. Pakollinen lyhyt matematiikka, kevät 2007

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2007 %	2006 %	2005 %	2004 %	2003 %
L	213	4,1	394	7,5	607	5,8	5,4	6,8	7,0	7,4
E	641	12,3	856	16,3	1497	14,3	15,1	16,6	19,7	18,5
M	1024	19,7	1069	20,3	2093	20,0	19,3	19,7	23,3	21,8
C	1217	23,4	1156	21,9	2373	22,7	21,9	23,2	19,6	21,2
B	1032	19,8	896	17,0	1928	18,4	14,3	15,7	13,5	14,3
A	584	11,2	486	9,2	1070	10,2	13,7	11,7	11,0	11,2
I	498	9,6	412	7,8	910	8,7	10,3	6,3	5,9	5,7
Yhteensä	5209		5269		**10478**	10478	9497	8356	5941	6329
Keskiarvo	3,76		4,08			3,92	3,83	4,09	4,24	4,22
Hajonta	1,78		1,82			1,81	1,89	1,76	1,76	1,75

(Lahtinen 2012, Exel-taulukot)

Taulukko 4. Ylimääräinen lyhyt matematiikka, kevät 2007

Arvosana	Pojat lkm.	%	Tytöt lkm.	%	Yht. lkm.	2007 %	2006 %	2005 %	2004 %	2003 %
L	25	3,8	135	5,7	160	5,3	5,4	4,8	4,7	4,1
E	82	12,3	323	13,6	405	13,3	14,4	14,2	12,3	11,8
M	120	18,0	500	21,0	620	20,3	16,9	18,7	18,2	16,9
C	167	25,1	573	24,1	740	24,3	21,1	21,8	20,3	20,3
B	118	17,7	422	17,7	540	17,7	13,7	17,0	16,5	18,2
A	75	11,3	248	10,4	323	10,6	16,1	13,5	16,5	16,6
I	79	11,9	182	7,6	261	8,6	12,4	10,0	11,4	12,1
Yhteensä	666		2383		**3049**	3049	3838	5375	6982	7294
Keskiarvo	3,66		3,96			3,90	3,66	3,78	3,62	3,53
Hajonta	1,85		1,75			1,78	1,97	1,86	1,90	1,89

(Lahtinen 2012, Exel-taulukot)