Matriisin eksponenttifunktio ja differentiaaliyhtälöryhmät

Petra Maaskola

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013

Tiivistelmä: Petra Maaskola, *Matriisin eksponenttifunktio ja differentiaaliyhtälöryhmät* (engl. *The matrix exponential function and differential equations*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 45. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2013.

Tämän tutkielman tarkoituksena on rakentaa tarvittavat tiedot lineaaristen vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöryhmien $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisemiseen matriisin eksponenttifunktion avulla. Lisäksi tarkastellaan miten matriisin A ominaisuudet liittyvät differentiaaliyhtälön ratkaisujen ominaisuuksiin.

Matriisin eksponenttifunktio määritellään sarjakehitelmän avulla siten, että $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ kaikille neliömatriiseille A. Sarjan suppenemista varten tarvitaan matriisinormi, joka saadaan vektorinormin avulla. Koska sarja suppenee, niin määritelmä on hyvin asetettu. Vakiokertoimiseen differentiaaliyhtälöön $x'(t) = Ax(t)$ liittyvä alkuarvotehtävä saadaan, kun annetaan lisäehdoksi ratkaisun lähtöpiste $x(t_0) = x_0$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on yksikäsitteinen ja muotoa $x(t) = e^{tA}x_0$. Eksponenttifunktion e^{tA} laskeminen riippuu matriisin A tyypistä. Jos matriisi on diagonalisoituva, laskeminen on suoraviivaista. Riittää ratkaista matriisin ominaisarvot ja -vektorit. Jos taas matriisi A ei ole diagonalisoituva, tarvitaan sen Jordanin matriisia J_A.

Matriisin A ominaisarvot ja -vektorit ratkaistaan sen karakteristisen polynomin $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ avulla. Jos matriisi A on diagonalisoituva, sen jokaisen ominaisarvon kertaluku yhtälön $p_A(\lambda) = 0$ juurena on yhtä suuri kuin sitä vastaavien lineaarisesti riippumattomien ominaisvektoreiden lukumäärä. Tällöin matriisin A eksponenttifunktio lasketaan siten, että $e^A = Ve^DV^{-1}$, missä matriisin D diagonaalilla on matriisin A ominaisarvot ja matriisi V muodostuu matriisin A ominaisvektoreista. Jos matriisi A taas ei ole diagonalisoituva, sillä ei ole tarpeeksi ominaisvektoreita. Kun kasvatetaan lineaarisesti riippumattomien vektoreiden määrää sopivasti, saadaan matriisi V. Tällöin ominaisarvosta koostuvan matriisin ja nilpotentin matriisin summa muodostaa Jordanin lohkon $J(\lambda, r)$. Nilpotentti N on sellainen matriisi, jolle N^k on jostain luvusta k alkaen nolla. Jordanin matriisi J_A taas muodostuu Jordanin lohkoista. Nyt matriisi A on similaarinen sen Jordanin matriisin kanssa eli $A = VJ_AV^{-1}$, jolloin matriisin A eksponenttifunktio ratkaistaan yhtälöstä $e^A = Ve^{J_A}V^{-1}$.

Differentiaaliyhtälöiden $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisujen ominaisuudet riippuvat matriisin A ominaisarvoista λ_i. Kun kirjoitetaan ratkaisu ominaisvektorikannassa $\{x_1, \ldots, x_n\}$, sen termit ovat muotoa $e^{t\lambda_i}x_i$, joten ratkaisukäyrän käyttäytyminen, kun $t \to \infty$, nähdään suoraan ominaisarvojen reaaliosien merkeistä. Differentiaaliyhtälön $x'(t) = f(x(t))$ tasapainopisteeksi kutsutaan pistettä p, jos funktio $x(t) = p$ kaikilla t on ratkaisu. Näin on erityisesti silloin, kun $f(p) = 0$. Differentiaaliyhtälön tasapainopistettä kutsutaan stabiiliksi, jos ratkaisukäyrät ovat rajoitetulla etäisyydellä tasapainopisteestä. Jos taas kaikki ratkaisut lähestyvät tasapainopistettä, se on asymptoottisesti stabiili. Myös stabiilisuutta voidaan siis tarkastella ominaisarvojen avulla.

Avainsanat: Matriisin eksponenttifunktio, diagonalisoituva, Jordanin matriisi, differentiaaliyhtälö, stabiilisuus.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Lineaarialgebraa 3
- 1.1. Vektorin ja matriisin normi 3
- 1.2. Ominaisarvoteoriaa 7

Luku 2. Matriisin eksponenttifunktio 14

Luku 3. Matriisin eksponenttifunktion laskeminen 18
- 3.1. Diagonalisoituvan matriisin eksponenttifunktio 18
- 3.2. Matriisin eksponenttifunktio Jordanin muodon avulla 21

Luku 4. Differentiaaliyhtälöryhmät 26
- 4.1. Peruskäsitteitä 26
- 4.2. Lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö 28

Luku 5. Differentiaaliyhtälöryhmien tasapainopisteiden stabiilisuus 40

Liite A. Merkintöjä 44

Kirjallisuutta 45

Johdanto

Monia fysiikan, kemian, biologian ja muiden alojen ongelmia voidaan käsitellä matemaattisilla malleilla, jotka sisältävät lineaarisia vakiokertoimisia differentiaaliyhtälöryhmiä

$$x'(t) = Ax(t).$$

Näitä yhtälöitä ratkaistaan matriisin eksponenttifunktion avulla. Tämän kirjoitelman tavoitteena onkin määritellä matriisin eksponenttifunktio ja differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen sen avulla. Lisäksi tarkastellaan miten matriisin A ominaisuudet liittyvät differentiaaliyhtälön ratkaisujen ominaisuuksiin.

Lukijan oletetaan tuntevan lineaarialgebran perusteet, kuten yleisimmät laskusäännöt vektoreille ja matriiseille, sekä yleisen eksponenttifunktion määritelmän sarjakehitelmän avulla. Lisäksi differentiaaliyhtälöiden perusteet oletetaan tunnetuiksi. Erityisesti luvuissa 1 ja 4.1 tulee kuitenkin myös kertausta näistä asioista, jotta kirjoitelmassa tarvittavat lähtötiedot muistuvat lukijan mieleen.

Matriisin eksponenttifunktio määritellään sarjakehitelmän avulla siten, että

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

kaikille neliömatriiseille A. Sarjan suppenemista varten tarvitaan matriisinormi, joka saadaan vektorinormin avulla. Koska sarja suppenee, niin määritelmä on hyvin asetettu. Vakiokertoimiseen differentiaaliyhtälöön $x'(t) = Ax(t)$ liittyvä alkuarvotehtävä saadaan, kun annetaan lisäehdoksi ratkaisun lähtöpiste $x(t_0) = x_0$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on yksikäsitteinen ja muotoa

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

Eksponenttifunktion e^{tA} laskeminen riippuu matriisin A tyypistä. Jos se on diagonalisoituva, laskeminen on suoraviivaista. Riittää ratkaista matriisin ominaisarvot ja -vektorit. Jos taas matriisi A ei ole diagonalisoituva, tarvitaan sen Jordanin matriisia J_A.

Matriisin A ominaisarvot ja -vektorit ratkaistaan sen karakteristisen polynomin

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

avulla. Jos matriisi A on diagonalisoituva, sen jokaisen ominaisarvon kertaluku yhtälön $p_A(\lambda) = 0$ juurena on yhtä suuri kuin sitä vastaavien lineaarisesti riippumattomien ominaisvektoreiden lukumäärä. Tällöin matriisin A eksponenttifunktio lasketaan siten, että

$$e^A = Ve^DV^{-1},$$

missä matriisin D diagonaalilla on matriisin A ominaisarvot ja matriisi V muodostuu matriisin A ominaisvektoreista. Jos matriisi A taas ei ole diagonalisoituva, sillä ei ole tarpeeksi ominaisvektoreita. Kun kasvatetaan lineaarisesti riippumattomien vektoreiden määrää sopivasti, saadaan matriisi V. Tällöin ominaisarvoista koostuvan matriisin ja nilpotentin matriisin N summasta voidaan muodostaa Jordanin lohkoja $J(\lambda, r)$. Nilpotentti N on sellainen matriisi, jolle N^k on jostain luvusta k alkaen nolla. Jordanin matriisi J_A taas muodostuu Jordanin lohkoista. Nyt matriisi A on similaarinen sen Jordanin matriisin kanssa eli $A = VJ_AV^{-1}$, jolloin matriisin A eksponenttifunktio ratkaistaan seuraavasti:

$$e^A = Ve^{J_A}V^{-1}.$$

Differentiaaliyhtälöiden $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisujen ominaisuudet riippuvat matriisin A ominaisarvoista λ_i. Kun kirjoitetaan ratkaisu ominaisvektorikannassa $\{x_1, \dots, x_n\}$, sen termit ovat muotoa $e^{t\lambda_i}x_i$, joten ratkaisukäyrän käyttäytyminen, kun $t \to \infty$, nähdään suoraan ominaisarvojen reaaliosien merkeistä. Differentiaaliyhtälön $x'(t) = f(x(t))$ tasapainopisteeksi kutsutaan pistettä p, jos funktio

$$x(t) = p$$

on ratkaisu kaikilla t. Näin on erityisesti silloin, kun $f(p) = 0$. Origo on aina differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ tasapainopiste. Differentiaaliyhtälön tasapainopistettä kutsutaan stabiiliksi, jos ratkaisukäyrät ovat rajoitetulla etäisyydellä tasapainopisteestä. Jos taas kaikki ratkaisut lähestyvät tasapainopistettä, se on asymptoottisesti stabiili. Myös stabiilisuutta voidaan siis tarkastella ominaisarvojen avulla.

Kirjoitelman ensimmäisessä luvussa käsitellään välttämättömät lineaarialgebran tiedot, joihin kuuluvat matriisin normin käsite sekä ominaisarvoteoriaa. Toisessa luvussa annetaan matriisin eksponenttifunktion määritelmä ja näytetään, että se on hyvin asetettu. Luvussa 3 tarkastellaan miten eksponenttifunktio lasketaan diagonalisoituville ja ei-diagonalisoituville matriiseille. Luvussa 4 määritellään differentiaaliyhtälöryhmät ja päästään ratkaisemaan niitä matriisin eksponenttifunktion avulla. Viimeisessä luvussa 5 käsitellään vielä differentiaaliyhtälöiden tasapainopisteiden stabiilisuutta.

Työ perustuu pääosin lähteisiin [**2**], [**3**] ja [**4**]. Muita esityksiä aiheesta löytyy esimerkiksi lähteistä [**8**], [**9**] ja [**10**]. Kirjassa [**1**] ja luentomateriaalissa [**5**] on asiaa käsitelty pidemmälle. Lineaarialgebran perustiedot löytyvät lähteistä [**6**] ja [**7**].

LUKU 1

Lineaarialgebraa

1.1. Vektorin ja matriisin normi

Vektoriavaruudessa on määritelty yhteenlasku ja skalaarilla kertominen sekä myös muita laskutoimituksia, kuten vektoreiden pituuksien laskeminen. Oletetaan yleisimmät vektoriavaruuden laskutoimitukset tunnetuiksi. Normiavaruus on vektoriavaruus, jossa on määritelty jokin vektorin pituusfunktio eli normi. Sisätulolla varustettua vektoriavaruutta taas kutsutaan sisätuloavaruudeksi ja sisätulon avulla voidaan myös määritellä normi sekä lisäksi vektorien välisiä kulmia. Annetaan seuraavaksi tarkempi määritelmä normille.

Määritelmä 1.1. Olkoon V $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus, missä $\mathbb{K}$ on $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Kuvaus $\| \cdot \| : V \mapsto \mathbb{R}$ on normi, jos se toteuttaa

(i) $\| v \| \geq 0$ kaikilla $v \in V$.
(ii) $\| v \| = 0 \;\Rightarrow\; v = 0$.
(iii) $\| v + u \| \leq \| v \| + \| u \|$ kaikilla $v, u \in V$.
(iv) $\| \alpha v \| = | \alpha | \| v \|$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{K}, v \in V$.

Tunnetuin vektoriavaruuden normi esitellään seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 1.2. Euklidinen normi vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$ on

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (x \mid x)^{\frac{1}{2}},$$

missä $(x \mid x)$ on vektorin x sisätulo itsensä kanssa. Vektorin x normi toteuttaa selvästi normille määritelmässä 1.1 määritetyt ehdot (i), (ii) ja (iv). Myös ehto (iii) eli vektorinormin kolmioepäyhtälö toteutuu, sillä sisätulon ominaisuuksien ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön $| (x \mid y) | \leq \| x \| \| y \|$ nojalla

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 &= (x + y \mid x + y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) \\ &= \| x \|^2 + 2 \, | (x \mid y) | + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2, \end{aligned}$$

joten

$$\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad \text{kaikilla } x, y \in V.$$

Yleisimpiin vektorinormeihin kuuluu myös esimerkiksi niin sanottu ykkösnormi ja ääretön-normi eli

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_1 | \quad \text{ja} \quad \| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} | x_i | .$$

Normiavaruudessa voidaan siis mitata vektoreiden pituuksia. Normin avulla voidaan määrittää myös alkioiden välinen etäisyys, joka on

$$d(v, u) = \| v - u \| .$$

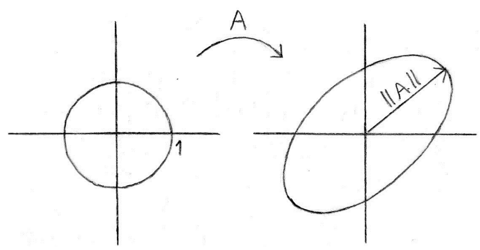
Siten voidaan määrittää vektorijonojen suppeneminen seuraavasti: Vektorijono $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee kohti vektoria x, jos

$$\lim_{i \to \infty} \| x_i - x \| = 0.$$

Nyt kun tunnetaan vektorijonojen ominaisuuksia, niin jatkossa pystytään niiden avulla määrittämään matriisijonojen ja -normien ominaisuuksia.

Määritetään seuraavaksi siis matriisinormi. Olkoon $\| \cdot \|$ jokin vektorinormi. Mitataan matriisin kokoa sillä, kuinka pitkiksi vektoreiksi yksikkövektorit kuvautuvat matriisilla kerrottaessa. Näin ollen matriisille $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ asetetaan

$$\| A \| = \max_{\|x\|=1} \| Ax \| \tag{1.1}$$



Kuva 1.1. Yksikkövektorin kuvautuminen matriisilla kerrottaessa

Näytetään, että myös matriisinormi toteuttaa normille asetetut neljä ehtoa määritelmän 1.1 antamien vektorinormin ominaisuuksien avulla:

(i) Selvästi

$$\| A \| = \max_{\|x\|=1} \| Ax \| \geq 0 \quad \text{kaikilla } A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

(ii) Jos $A \neq 0$, niin sillä on olemassa elementti $a_{ij} \neq 0$. Valitaan $x = e_j$, jolloin

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{ja} \quad \| A \| \geq \| Ax \| > 0.$$

Siten jos $\| A \| = 0$, niin $A = 0$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(iii) Matriisinormin määritelmän perusteella

$$\begin{aligned}\| A+B \| &= \max_{\|x\|=1} \| (A+B)x \| = \max_{\|x\|=1} \| Ax+Bx \| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} (\| Ax \| + \| Bx \|) \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \| Ax \| + \max_{\|x\|=1} \| Bx \| = \| A \| + \| B \|,\end{aligned}$$

missä käytettiin vektorinormin kolmioepäyhtälöä.

(iv) Edelleen matriisinormin määritelmän ja määritelmän 1.1 kohdan (iv) perusteella

$$\| \alpha A \| = \max_{\|x\|=1} \| \alpha Ax \| = \max_{\|x\|=1} | \alpha | \| Ax \| = | \alpha | \| A \| .$$

Matriisinormi siis toteuttaa normille asetetut ehdot ja sillä on vastaavat ominaisuudet kuin vektorinormilla. Näytetään matriisinormille lemman muodossa vielä kaksi hyödyllistä ominaisuutta. Ensimmäinen kertoo, että vektori- ja matriisinormi ovat yhteensopivat.

LEMMA 1.3. *Matriisinormille pätee*

(i) $\| Ax \| \leq \| A \| \| x \|$
(ii) $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$

kaikilla matriiseilla A ja B sekä vektoreilla $x \in \mathbb{R}^n$.

TODISTUS. (i) Olkoon $y = \frac{x}{\|x\|}$, kun $x \neq 0$. Tällöin $\| y \| = \frac{1}{\|x\|} \| x \| = 1$, joten

$$\| A \| \geq \| Ay \| = \frac{\| Ax \|}{\| x \|},$$

ja saadaan

$$\| Ax \| \leq \| A \| \| x \| .$$

Kun $x = 0$, niin

$$\| Ax \| = 0 = \| A \| \| x \|,$$

joten väite on selvä.

(ii) Käyttämällä kohtaa (i) ja matriisinormin määritelmää saadaan

$$\begin{aligned}\| AB \| &= \max_{\|x\|=1} \| (AB)x \| = \max_{\|x\|=1} \| A(Bx) \| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \| A \| \| Bx \| = \| A \| \max_{\|x\|=1} \| Bx \| \\ &= \| A \| \| B \|,\end{aligned}$$

joten väite pätee.

□

Tarkastellaan seuraavaksi normia $\| A \| = \| (a_{ij}) \|$. Varustetaan siis reaalisten $n \times n$ -matriisien vektoriavaruus M_n myös normilla

$$\| A \| = \| (a_{ij}) \| = \max_{1 \leq i,j \leq n} | a_{ij} | . \tag{1.2}$$

Normit $\| A \| = \max_{\|x\|=1} \| Ax \|$ ja $\| A \| = \max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} |$ eivät aina ole yhtäsuuria matriisille A, mutta ne ovat kuitenkin ekvivalentteja keskenään. Todistetaan se seuraavaksi.

LAUSE 1.4. *Normit*

$$\| A \|_a = \max_{\|x\|=1} \| Ax \| \quad \textit{ja} \quad \| A \|_b = \max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} |$$

ovat ekvivalentteja eli on olemassa positiiviset reaaliluvut c_1 ja c_2 siten, että

$$c_1 \| A \|_a \le \| A \|_b \le c_2 \| A \|_a$$

kaikilla matriiseilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

TODISTUS. Todistetaan ensin ensimmäinen epäyhtälö: Olkoon x mielivaltainen vektori, jolle $\| x \| = 1$. Tällöin vektorin Ax j:nnen alkion neliötä voidaan arvioida seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(Ax)_j^2 &= \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right)^2 \\
&\le \max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} |^2 \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i \right)^2 \\
&\le \max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} |^2 \left(\left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= \max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} |^2 \left(n^{\frac{1}{2}} \cdot 1^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&= n \max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} |^2,
\end{aligned}$$

missä käytettiin Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä. Nyt kun $j = 1, \ldots, n$, niin edellisen nojalla

$$\| Ax \|^2 = \sum_{j=1}^n (Ax)_j^2 \le n^2 \max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} |$$

ja väite seuraa tästä, kun valitaan $c_1 = \frac{1}{n}$.
Todistetaan vielä jälkimmäinen epäyhtälö:

$$\left(| a_{ij} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^n | a_{ij} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| Ae_j \| \le \| A \| \| e_j \| = \| A \| .$$

Tämä pätee mille tahansa matriisin A alkiolle, joten

$$\max_{1\le i,j\le n} | a_{ij} | \le \max_{\|x\|=1} \| Ax \|$$

eli väite pätee vakiolla $c_2 = 1$. □

Annetaan nyt määritelmä matriisijonojen suppenemiselle.

MÄÄRITELMÄ 1.5. Matriisijono $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ suppenee kohti matriisia A, jos pätee:

$$\lim_{i\to\infty} \| A_i - A \| = 0.$$

Näytetään seuraavaksi, että lauseen 1.4 ekvivalenteilla normeilla on samat suppenevat jonot eli kun $A_i \to A$, niin $\| A_i - A \| \to 0$.
Oletetaan ensin, että

$$\| A \|_a = \max_{\|x\|=1} \| Ax \| .$$

Tällöin $A_i x \to Ax$ ja

$$\begin{aligned} \| A_i x - Ax \| &= \| (A_i - A)x \| = \| x \| \left\| (A_i - A)\frac{x}{\| x \|} \right\| \\ &\leq \| x \| \| A_i - A \| \to 0. \end{aligned}$$

Kun taas

$$\| A \|_b = \max_{1\leq i,j\leq n} | a_{ij} |,$$

niin nyt lauseen 1.4 nojalla

$$c \| A_i - A \|_b \leq \| A_i - A \|_a \to 0,$$

ja siten $\| A_i - A \|_b \to 0$. Näin ollen jono suppenee molempien normien mielessä, joten voidaan tilanteen mukaan käyttää kumpaa tahansa normia.

Näytetään matriisinormille vielä seuraava ominaisuus, jota tullaan tarvitsemaan myöhemmin matriisin eksponenttifunktiota laskettaessa.

LEMMA 1.6. *Jos*

$$\lim_{i\to\infty} \| A_i - A \| = 0,$$

niin

$$\lim_{i\to\infty} \| CA_iC^{-1} - CAC^{-1} \| = 0.$$

TODISTUS. Koska matriiseille A ja B pätee $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$, niin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \| CA_iC^{-1} - CAC^{-1} \| &= \| C(A_iC^{-1} - AC^{-1}) \| = \| C(A_i - A)C^{-1} \| \\ &\leq \| C \| \| A_i - A \| \| C^{-1} \| \to 0, \end{aligned}$$

kun $i \to \infty$ eli väite pätee. □

1.2. Ominaisarvoteoriaa

Tarkastellaan ominaisarvoja ja -vektoreita, joita tullaan myöhemmin tarvitsemaan matriisin diagonalisoinnissa sekä Jordanin muodon määrittämisessä.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon V $\mathbb{K}$-kertoiminen lineaariavaruus ja L sen lineaarikuvaus siten, että $L : V \to V$, missä $\mathbb{K}$ on $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Tällöin, jos on olemassa $\lambda \in \mathbb{K}$ ja vektori $v \in V\backslash\{0\}$ siten, että

$$Lv = \lambda v, \tag{1.3}$$

niin λ on kuvauksen L ominaisarvo ja vektori v on sitä vastaava kuvauksen L ominaisvektori. Ominaisarvoon λ liittyvät ominaisvektorit taas muodostavat nollan kanssa ominaisavaruuden

$$E_L(\lambda) = \{v \in V \mid Lv = \lambda v\}.$$

Esimerkki 1.8. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ja vektori $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Tällöin lineaarikuvaukselle $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : L_A x = Ax$ voidaan kirjoittaa yhtälö:

$$L_A v = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5v,$$

joten vektori v on kuvauksen L_A ominaisvektori ja 5 sitä vastaava ominaisarvo.

Neliömatriisin $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ominaisarvoilla ja -vektoreilla tarkoitetaan kuvauksen, jossa kerrotaan matriisilla A eli $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : L_A x = Ax$, ominaisarvoja ja -vektoreita. Täten lineaarikuvauksen L_A ominaisarvoyhtälö (1.3) voidaan kirjoittaa muodossa

$$Av = \lambda v$$

eli

$$(\lambda I - A)v = 0.$$

Tällä on ratkaisuja $v \neq 0$ täsmälleen silloin, kun

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{1.4}$$

Näin ollen matriisin A ominaisarvot saadaan ratkaistua yhtälön (1.4) avulla ja voidaan antaa seuraava määritelmä.

Määritelmä 1.9. Matriisin A ominaisarvot λ ovat karakteristisen polynomin

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

nollakohtia.

Algebran peruslauseen nojalla n-asteisella polynomilla on kertaluvut mukaan lukien n kompleksista juurta, joten $n \times n$-matriisilla on n ominaisarvoa, joista osa voi siis olla moninkertaisia. Sanotaan, että jos matriisin A ominaisarvo λ on matriisin A karakteristisen polynomin k-kertainen juuri, niin $m_a(\lambda) = k$ on ominaisarvon λ algebrallinen kertaluku. Ominaisarvon λ geometrinen kertaluku $m_g(\lambda)$ on ominaisarvoon λ liittyvien lineaarisesti riippumattomien ominaisvektoreiden lukumäärä eli sen ominaisavaruuden dimensio, joista lisää myöhemmin tässä luvussa.

Esimerkki 1.10. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määritetään karakteristisen polynomin $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ nollakohdat.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 3 \cdot (-3) \\ =& \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0, \end{aligned}$$

joten

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = 1 \pm 3i.$$

Siis matriisin A ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1 - 3i$ ja $\lambda_2 = 1 + 3i$. Määritetään vielä ominaisarvoja λ_1 ja λ_2 vastaavat ominaisvektorit.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 =& 1 - 3i : \left[A - \lambda_1 I \,|\, 0\right] = \begin{bmatrix} 3i & 3 & |\,0 \\ -3 & 3i & |\,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} i & 1 & |\,0 \\ -1 & i & |\,0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow v_1 =& (1, -i) \\
\lambda_2 =& 1 + 3i : \left[A - \lambda_2 I \,|\, 0\right] = \begin{bmatrix} -3i & 3 & |\,0 \\ -3 & -3i & |\,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} i & -1 & |\,0 \\ 1 & i & |\,0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow v_2 =& (1, i).
\end{aligned}$$

Huomataan, että reaalisen matriisin A kompleksiset ominaisarvot λ esiintyvät aina konjugaattipareina eli $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ja siten myös ominaisvektorit ovat konjugaattipareja.

Esimerkki 1.11. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisilla A on siis kertaluvut huomioonottaen kolme ominaisarvoa, jotka voidaan selvittää seuraavasti:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) =& \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\
=& (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0,
\end{aligned}$$

kun $\lambda = -3$ tai $\lambda = 1$. Matriisilla A on siis ominaisarvo $\lambda_1 = -3$ ja kahden kertaluvun ominaisarvo $\lambda_2 = 1$. Ratkaistaan vielä vastaavat ominaisvektorit:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 =& -3 : \left[A - \lambda_1 I \,|\, 0\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & |\,0 \\ 0 & 4 & 0 & |\,0 \\ 2 & 0 & 2 & |\,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & |\,0 \\ 0 & 1 & 0 & |\,0 \\ 1 & 0 & 1 & |\,0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow v_1 =& (1, 0, -1) \\
\lambda_2 =& 1 : \left[A - \lambda_2 I \,|\, 0\right] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & |\,0 \\ 0 & 0 & 0 & |\,0 \\ 2 & 0 & -2 & |\,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & |\,0 \\ 0 & 0 & 0 & |\,0 \\ 1 & 0 & -1 & |\,0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow v_{2,1} =& (1, 0, 1), v_{2,2} = (0, 1, 0).
\end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi muun muassa vektorien lineaarista riippumattomuutta, vektoriavaruuden kantoja ja matriisien similaarimuunnoksia, jotta myöhemmin voidaan määritellä diagonalisoituvat matriisit.

Määritelmä 1.12. Vektoriavaruuden V epätyhjä osajoukko $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ on lineaarisesti riippumaton, jos nollavektori voidaan voidaan esittää näiden lineaarikombinaationa vain siten, että kaikki kertoimet ovat nollia, eli jos ehdosta

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0 \tag{1.5}$$

seuraa, että $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Muulloin, eli jos on muitakin ratkaisuja, joukkoa S kutsutaan lineaarisesti riippuvaksi. Silloin joukon S vektorien välillä on siis keskinäistä riippuvuutta ja jokin vektori voidaan esittää muiden vektoreiden lineaarikombinaationa. Vektorin v lineaarikombinaation c_i-kertoimia kutsutaan vektorin koordinaateiksi.

Yhtälö (1.5) voidaan kirjoittaa matriisimuotoon

$$Ac = 0, \tag{1.6}$$

missä $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$, eli vektorit v_k muodostavat matriisin A sarakkeet ja $c = (c_1, \dots, c_n)$. Jokainen äärellinen lineaarikuvaus $L : U \to V$ voidaankin esittää matriisin avulla, kunhan avaruuksiin U ja V on kiinnitetty kannat. Lineaarikuvauksen L matriisiesitys riippuu siten valituista kannoista, jotka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 1.13. Vektoriavaruuden V äärellistä osajoukkoa $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ kutsutaan avaruuden V kannaksi, jos se on lineaarisesti riippumaton ja virittää koko vektoriavaruuden V.

Jokaisella vektoriavaruudella V on kanta ja jokaisella avaruuden V kannalla on sama määrä vektoreita. Vektoriavaruuden V dimensio $\dim(V)$ on avaruuden V kantavektoreiden lukumäärä. Tästä seuraa, että jos $\dim(V) = n$ ja $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ on lineaarisesti riippumaton joukko, niin S on avaruuden V kanta. $\mathbb{R}^n$:n luonnolliseksi kannaksi kutsutaan vektorijoukkoa $E_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, missä vektori e_i on sellainen, jossa i:nnes alkio on 1 ja muut nollia.

Esimerkki 1.14. Joukko $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ on polynomiavaruuden $\mathbb{P}^n$ kanta, joten $\dim(\mathbb{P}^n) = n + 1$. Vastaavasti $m \times n$-matriisien muodostaman vektoriavaruuden dimensio on $\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn$, koska kannaksi käy joukko matriiseja, joista jokaisella on yksi, mutta eri alkio ykkönen ja loput nollia. Näin ollen kannan matriisien lukumääräksi tulee mn.

Määritellään seuraavaksi vektorin kannanvaihto. Halutaan vaihtaa vektorin v esitys kannasta $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ kantaan $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ja selvitetään miten uudet koordinaatit voidaan lausua vanhojen avulla. Merkitään vektorin v koordinaatteja näissä kannoissa

$$[v]_B = (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad \text{ja} \quad [v]_U = (\eta_1, \dots, \eta_n).$$

Oletetaan, että vanhat kantavektorit b_j voidaan lausua uusien kantavektoreiden u_i avulla seuraavasti:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tällöin saadaan

$$v = \sum_{i=1}^{n} \eta_i u_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \beta_j \right) u_i,$$

joten on oltava

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \beta_j, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

Merkitään

$$S_{(B,U)} = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}.$$

Tällöin koordinaattien välinen yhtälö (1.7) voidaan kirjoittaa muodossa

$$[v]_U = S_{(B,U)}[v]_B. \tag{1.8}$$

Siis uudet koordinaatit saadaan kertomalla vanhat matriisilla $S_{(B,U)}$. Matriisia S kutsutaan kannanvaihtomatriisiksi.

Esimerkki 1.15. Olkoon kannat $B = \{v_1, v_2\}$ ja $E = \{e_1, e_2\}$ ja merkitään vektorin x koordinaatteja näissä kannoissa

$$[x]_B = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{ja} \quad [x]_E = (\beta_1, \beta_2).$$

Oletetaan, että vanhat kantavektorit x_j voidaan lausua uusien kantavektoreiden e_i avulla seuraavasti:

$$v_j = \sum_{i=1}^{2} s_{ij} e_i, \quad j = 1, 2,$$

joten

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{2} s_{ij} \alpha_j, \quad i = 1, 2.$$

Tällöin vektorin x esitys voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} x =& \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(s_{11}e_1 + s_{21}e_2) + \alpha_2(s_{12}e_1 + s_{22}e_2) \\ =& (s_{11}\alpha_1 + s_{12}\alpha_2)e_1 + (s_{21}\alpha_1 + s_{22}\alpha_2)e_2, \end{aligned}$$

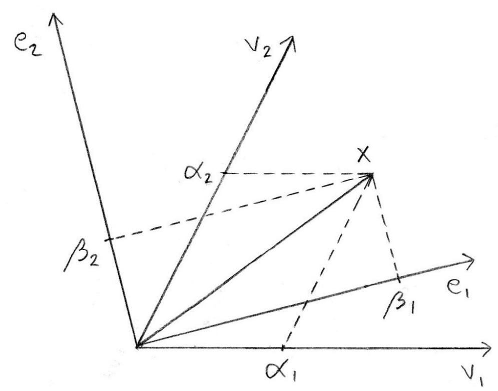
joten

$$[x]_E = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} [x]_B.$$

Merkitään

$$S_{(B,E)} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

ja se on siis vektorin x kannanvaihtomatriisi kannasta B kantaan E.



Kuva 1.2. Vektorin x kannanvaihto

Nyt on määritelty kannanvaihto ja kannanvaihtomatriisi, niin voidaan muodostaa seuraava tärkeä tulos. Olkoon avaruuksilla U ja V kannat B_U ja B_V sekä uudet kannat $\hat{B}_U$ ja $\hat{B}_V$. Lisäksi, olkoon S ja R kannanvaihtomatriisit, joten kaikille $u \in U$ ja $v \in V$ pätee

$$[u]_{\hat{B}_U} = S[u]_{B_U} \quad \text{ja} \quad [v]_{\hat{B}_V} = R[v]_{B_V}. \tag{1.9}$$

Tällöin $[u]_{B_U} = S^{-1}[u]_{\hat{B}_U}$ ja $[v]_{B_V} = S^{-1}[v]_{\hat{B}_V}$. Oletetaan vielä, että $A = [T]_{B_U,B_V}$ on lineaarikuvauksen $T : U \to V$ matriisi kantojen B_U ja B_V suhteen, joten vektorin u lineaarikuvaus $T(u)$ kannassa B_V on vektori u kannassa B_U kerrottuna matriisilla A eli

$$[T(u)]_{B_U} = A[u]_{B_U} \quad \text{kaikilla } u \in U.$$

Kun käytetään yhtälöitä (1.9), niin saadaan

$$[T(u)]_{\hat{B}_V} = R[T(u)]_{B_V} = R(A[u]_{B_U}) = R(A(S^{-1}[u]_{\hat{B}_V})) = (RAS^{-1})[u]_{\hat{B}_V}. \tag{1.10}$$

Siis lineaarikuvauksen T matriisi $\hat{A}$ uusissa kannoissa voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{A} = [T]_{\hat{B}_U,\hat{B}_V} = RAS^{-1}.$$

Erityisesti, jos $U = V$, $B_U = B_V$ ja $\hat{B}_U = \hat{B}_V$, niin $S = R$ ja lineaarikuvauksen T matriisi $\hat{A}$ uudessas kannassa $\hat{B}_U = \hat{B}_V$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{A} = SAS^{-1}.$$

Matriisia $\hat{A}$ kutsutaan matriisin A similaarimuunnokseksi. Annetaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 1.16. Neliömatriisi A on similaarinen matriisin B kanssa, jos on olemassa säännöllinen matriisi S siten, että $B = SAS^{-1}$. Muotoa SAS^{-1} olevaa matriisia kutsutaan matriisin A similaarimuunnokseksi.

Keskenään similaarisilla matriiseilla on muun muassa seuraava ominaisuus.

Lause 1.17. *Keskenään similaarisilla matriiseilla on sama karakteristinen polynomi ja siten myös samat ominaisarvot samoine algebrallisine kertalukuineen.*

Todistus. Olkoon matriisit A ja B similaarisia keskenään eli $B = SAS^{-1}$ jollekin kääntyvälle matriisille S. Tällöin

$$\lambda I - B = \lambda SIS^{-1} - SAS^{-1} = S(\lambda I - A)S^{-1},$$

joten

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - B) &= \det(S)\det(\lambda I - A)\det(S^{-1}) = \det(S)\det(\lambda I - A)(\det(S))^{-1}\\ &= \det(\lambda I - A),\end{aligned}$$

eli matriisien A ja B karakteristiset polynomit $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ ovat samat ja niillä on siten samat polynomin $p_A(\lambda)$ juuret eli samat ominaisarvot samoine algebrallisine kertalukuineen. □

Olkoon matriisilla $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ja näitä vastaavat ominaisvektorit $x_1, \ldots, x_n$. Muodostetaan matriisi $X = [x_1 \ldots x_n]$. Tällöin saadaan

$$AX = [Ax_1 \ldots Ax_n] = [\lambda_1 x_1 \ldots \lambda_n x_n] = [x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = X\Lambda,$$

missä

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Jos nyt ominaisvektorit $x_1, \ldots, x_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niin saadaan

$$A = AXX^{-1} = X\Lambda X^{-1}.$$

Matriisi A on siis similaarinen diagonaalimatriisin Λ kanssa. Matriisia A kutsutaan siten diagonalisoituvaksi. Voidaan siis päätellä, että jos $A = SDS^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi, niin sen diagonaalilla on matriisin A ominaisarvot ja matriisin S sarakkeet ovat matriisin A ominaisvektoreita. Lisäksi nämä ominaisvektorit muodostavat kannan. Tilannetta, jossa matriisin A ominaisvektoreista ei voi muodostaa kantaa, käsitellään myöhemmin.

LUKU 2

Matriisin eksponenttifunktio

Neliömatriiseja $A \in M_n$ voidaan korottaa potenssiin ja niitä voidaan laskea yhteen. Näin neliömatriisille on mahdollista muodostaa sarjakehitelmä. Eksponenttifunktio on tunnetusti eräs sarjakehitelmä. Nyt voidaan siis määritellä neliömatriisin eksponenttifunktio.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Matriisien eksponenttifunktio on $\exp : M_n \to M_n$,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

kaikille neliömatriiseille $A \in M_n$.

Näytetään seuraavan lauseen avulla, että määritelmä 2.1 on hyvin asetettu.

LAUSE 2.2. *Sarja* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ *suppenee kaikille neliömatriiseille* $A \in M_n$.

TODISTUS. Olkoon a_{ij}^k matriisin A^k -kerroin. Tällöin

$$| a_{ij}^2 | = | \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj} | \leq n \, (max \mid a_{ij} \mid)^2 = n \parallel A \parallel^2$$

ja näytetään induktiolla, että $| a_{ij}^N | \leq n^{N-1} \parallel A \parallel^N$. Alkuaskel, jossa $k = 1$, pätee, sillä

$$| a_{ij}^1 | \leq n^0 \max_{1 \leq i,j \leq n} | a_{ij} | = n^{1-1} \parallel A \parallel^1 .$$

Oletetaan nyt, että väite pätee, kun $k = N$ ja osoitetaan, että väite pätee, kun $k = N + 1$:

$$| a_{ij}^{N+1} | = | \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^N a_{kj} | \leq n^N \parallel A \parallel^{N+1} = n^{(N+1)-1} \parallel A \parallel^{N+1} .$$

Siis väite pätee induktion nojalla. Nyt voidaan muodostaa epäyhtälö:

$$\frac{| a_{ij}^N |}{N!} \leq \frac{n^{N-1} \parallel A \parallel^N}{N!} \leq \frac{n^N \parallel A \parallel^N}{N!} = \frac{(n \parallel A \parallel)^N}{N!},$$

ja koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n\|A\|)^N}{N!}$ suppenee reaalisena eksponenttifunktiona, niin Weierstrassin M-testin nojalla sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ suppenee alkioittain tasaisesti. □

Matriisin eksponenttifunktion sarjakehitelmä on siis suppeneva. Eksponenttifunktion e^A laskemista yleiselle neliömatriisille A käsitellään luvussa 3, mutta tarkastellaan ensin kuitenkin muutamaa erikoistapausta esimerkkien avulla.

Esimerkki 2.3. Olkoon $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ diagonaalimatriisi, jolloin sen potenssit ovat $D^k = \mathrm{diag}(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k)$. Tällöin määritelmän 2.1 nojalla matriisin D eksponenttifunktio on

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \mathrm{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_n^k}{k!}\right) = \mathrm{diag}\left(e^{d_1}, \ldots, e^{d_n}\right) = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 2.4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix} = -\alpha^2 I_2, \\ A^3 &= \begin{bmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha^3 \\ \alpha^3 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha^2 A, \\ A^4 &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha^3 \\ \alpha^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^4 & 0 \\ 0 & \alpha^4 \end{bmatrix} = \alpha^4 I_2, \\ A^5 &= \begin{bmatrix} \alpha^4 & 0 \\ 0 & \alpha^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^5 \\ -\alpha^5 & 0 \end{bmatrix} = \alpha^4 A, \\ A^6 &= -\,\alpha^6 I_2, \\ A^7 &= -\,\alpha^6 A, \ldots \end{aligned}$$

Induktion ja sini- ja kosinifunktioiden sarjakehitelmien nojalla saadaan nyt seuraavaa:

$$\begin{aligned} e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} &= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots & \frac{\alpha}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots \\ -\frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^3}{3!} - \frac{\alpha^5}{5!} + \ldots & -\frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{(2k+1)}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi määritellään nilpotentti matriisi, sillä sitä tullaan käyttämään myöhemmin käsiteltäessä matriisin Jordanin muotoa. Matriisia N sanotaan nilpotentiksi, jos $N^l = 0$, jollekin $l \geq 0$. Selvästi tällöin myös kaikki korkeammat potenssit ovat nollia. Määritelmän 2.1 nojalla voidaan siis muodostaa nilpotentin N eksponenttifunktio seuraavasti:

$$e^N = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!} N^k = I + N + \frac{1}{2} N^2 + \cdots + \frac{1}{(l-1)!} N^{l-1}.$$

ESIMERKKI 2.5. Matriisi

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on nilpotentti, sillä

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad N^3 = 0.$$

Siten nilpotentin N eksponenttifunktio on

$$e^N = I + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin eksponenttifunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

LAUSE 2.6. *Olkoot A, B ja $P \in M_n$ neliömatriiseja ja P kääntyvä. Tällöin*

(i) *Jos $C = PAP^{-1}$, niin $e^C = Pe^AP^{-1}$.*
(ii) *Jos $AB = BA$, niin $e^{A+B} = e^Ae^B$.*
(iii) *$e^{-A} = (e^A)^{-1}$.*

TODISTUS. (i) Nyt

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(PAP^{-1})^k,$$

jossa

$$(PAP^{-1})^k = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) \cdots (PAP^{-1}) = PA^kP^{-1},$$

sillä välissä olevat termit $P^{-1}P$ supistuvat pois ja lemman 1.6 nojalla

$$\lim_{k\to\infty}(PA_kP^{-1}) = P(\lim_{k\to\infty} A_k)P^{-1}.$$

Siten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(PAP^{-1})^k = P\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kP^{-1} = Pe^AP^{-1}.$$

(ii) Koska $AB = BA$, eli matriisit A ja B kommutoivat, niin binomikaavan nojalla voidaan määrittää

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k}.$$

Edelleen matriiseille A ja B pätee

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) = e^A e^B, \end{aligned}$$

jossa viimeiselle riville siirryttäessä on käytetty Cauchyn tuloa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right),$$

joka pätee siis myös matriisisarjoille, sillä A ja B kommutoivat.

(iii) Kohdan (ii) nojalla

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A},$$

joten $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.

$\square$

LUKU 3

Matriisin eksponenttifunktion laskeminen

Tässä luvussa tarkastellaan miten eksponenttifunktio voidaan laskea eri matriiseille. Jos matriisi on diagonalisoituva, eksponenttifunktion laskeminen on suoraviivaista. Jos taas matriisi ei ole diagonalisoituva, niin tarvitaan Jordanin muotoa, jota käsitellään myöhemmin luvussa 3.2.

3.1. Diagonalisoituvan matriisin eksponenttifunktio

Jos matriisi A on diagonalisoituva, eli löytyy P siten, että $A = P\Lambda P^{-1}$, jossa Λ on lävistäjämatriisi, niin lauseen 2.6 mukaan

$$e^A = Pe^{\Lambda}P^{-1}. \tag{3.1}$$

Nyt kun tiedetään, että matriisi Λ on diagonaalinen, niin sen eksponenttifunktio lasketaan kuten esimerkissä 2.3.

Esimerkki 3.1. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin A voidaan kirjoittaa muodossa $A = P\Lambda P^{-1}$, jossa

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siten vakiolla t kerrotun matriisin A eksponenttifunktio on

$$e^{tA} = Pe^{t\Lambda}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Lävistäjämatriisin eksponenttifunktio osataan siis ratkaista, joten matriisien eksponenttifunktion e^A laskeminen kaikille diagonalisoituville matriiseille A on ratkaistu.

Erityisesti kun matriisin A ominaisarvot ovat erisuuret, niin yhtälössä (3.1) matriisin P sarakkeet ovat siis matriisin A ominaisvektoreita ja matriisi Λ on diagonaalimatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat matriisin A ominaisarvoja kuten nähtiin luvussa 1.2.

Näytetään vielä tulevia esimerkkejä varten käänteismatriisin eräs ratkaisutapa 2×2-matriisille. Matriisin

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi P^{-1} voidaan ratkaista seuraavasti:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Siis vaihdetaan päälävistäjän alkiot keskenään, muutetaan sivulävistäjän alkiot vastaluvuikseen ja jaetaan matriisin P determinantilla $\det(P)$.

Esimerkki 3.2. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

kuten esimerkissä 1.10, jolloin ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1 - 3i$ ja $\lambda_2 = 1 + 3i$ sekä niitä vastaavat ominaisvektorit

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Matriisille A on siis voimassa $A = P\Lambda P^{-1}$, jossa

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1-3i & 0 \\ 0 & 1+3i \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Lasketaan ensin matriisin P determinantti:

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix} = i - (-i) = 2i.$$

Nyt voidaan määrittää käänteismatriisi P^{-1} seuraavasti:

$$P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

Tällöin lauseen 2.6 ja trigonometristen funktioiden määritelmien nojalla

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1-3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1+3i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(1-3i)t} & e^{(1+3i)t} \\ -ie^{(1-3i)t} & e^{i(1+3i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{(1-3i)t} + \frac{1}{2}e^{(1+3i)t} & \frac{i}{2}e^{(1-3i)t} - \frac{i}{2}e^{(1+3i)t} \\ -\frac{i}{2}e^{(1-3i)t} + \frac{i}{2}e^{(1+3i)t} & -\frac{i^2}{2}e^{(1-3i)t} - \frac{i^2}{2}e^{(1+3i)t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t(e^{3it} + e^{-3it}) & \frac{1}{2i}e^t(e^{3it} - e^{-3it}) \\ -\frac{1}{2i}e^t(e^{3it} - e^{-3it}) & \frac{1}{2}e^t(e^{3it} + e^{-3it}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) & e^t\sin(3t) \\ -e^t\sin(3t) & e^t\cos(3t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vaikka reaalisen matriisin A ominaisarvot ja -vektorit olisivat siis kompleksisia, niin matriisin A eksponenttifunktio e^A on reaalinen, sillä kaikki sarjakehitelmän potenssit A^k ovat reaalisia matriiseja. Myös kompleksisessa tapauksessa saadaan siis reaalinen ratkaisukanta.

Diagonalisoituvassa tapauksessa

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

matriisin A potenssit A^k lasketaan siten, että

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1},$$

kuten jo nähtiin lauseen 2.6 todistuksen kohdassa (i) yleiselle neliömatriisille.

Esitetään vielä yksi esimerkki diagonalisoituvista matriiseista.

Esimerkki 3.3. Olkoon matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

kuten esimerkissä 1.11, jolloin sen ominaisarvot ovat $\lambda_1 = -3$ ja kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda_2 = 1$. Vastaavat ominaisvektorit ovat $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_{2,1} = (1, 0, 1)$ ja $v_{2,2} = (0, 1, 0)$. Nyt matriisi A on similaarinen ominaisarvoista koostuvan matriisin

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kanssa. Tällöin on voimassa yhtälö $A = V\Lambda V^{-1}$, jossa matriisi

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

koostuu matriisin A ominaisvektoreista ja sen käänteismatriisi

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

voidaan ratkaista käyttäen apuna esimerkiksi Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmää. Nyt matriisin A eksponenttifunktio on

$$\begin{aligned} e^A &= V e^\Lambda V^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3} & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^1 \\ -e^{-3} & e^1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-3} + e) & 0 & \frac{1}{2}(-e^{-3} + e) \\ 0 & e & 0 \\ \frac{1}{2}(-e^{-3} + e) & 0 & \frac{1}{2}(e^{-3} + e) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3.2. Matriisin eksponenttifunktio Jordanin muodon avulla

Jos matriisi A ei kuitenkaan ole diagonalisoituva, niin se voidaan muuntaa Jordanin muotoon J_A, joka muodostetaan niin sanottujen yleistettyjen ominaisvektoreiden avulla. Jokainen neliömatriisi A on similaarinen lohkolävistäjämatriisin

$$J = \operatorname{diag}[J_1, \ldots, J_p] = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_p \end{bmatrix}$$

kanssa, missä J_i, $i = 1, \ldots, p$, on $r_i \times r_i$ -matriisi. Matriisia J kutsutaan matriisin A Jordanin muodoksi ja matriiseja J_i kutsutaan Jordanin lohkoiksi. Matriisit A ja B ovat similaarisia keskenään täsmälleen silloin, kun niillä on sama Jordanin muoto. Selvitetään seuraavaksi miten Jordanin matriisit löydetään.

Jos matriisin A ominaisarvon λ geometrinen kertaluku $m_g(\lambda)$ ja algebrallinen kertaluku $m_a(\lambda)$ ovat samat eli $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = k$, niin ominaisavaruudessa $E_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I)v = 0\}$ on ominaisarvoon λ liittyvien ominaisvektoreiden muodostama kanta $\{x_1, \ldots, x_k\}$, jolloin

$$A \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Olkoon $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ matriisin A erisuuret ominaisarvot ja $k_1, \ldots, k_q$ näiden algebralliset kertaluvut. Nyt jos ominaisarvon λ_j, missä $j = 1, \ldots, q$, geometrinen kertaluku on pienempi kuin algebrallinen eli sen ominaisvektoreiden määrä on pienempi kuin ominaisarvon λ_j kertaluku k_j eli $m_g(\lambda_j) < m_a(\lambda_j) = k_j$, niin Jordanin muotoa varten tarvitaan lisää vektoreita. Lisäksi näiden vektorien tulee olla lineaarisesti riippumattomia, jotta niistä muodostuva matriisi olisi kääntyvä. Kasvatetaan siis ominaisavaruutta $E_A(\lambda_j)$.

Määritetään ominaisarvolle λ_j invariantti aliavaruus

$$\widehat{E}_A(\lambda_j) = \{v \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda_j I)^{k_j} v = 0\}.$$

Siten $E_A(\lambda_j) \subset \widehat{E}_A(\lambda_j)$. Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa matriisilla A on ominaisarvo λ siten, että $E_A(\lambda) \neq \widehat{E}_A(\lambda)$. Tällöin on olemassa $\kappa \geq 2$ ja $w_\kappa \in \widehat{E}_A(\lambda)$ siten, että $(A - \lambda I)^\kappa w_\kappa = 0$, mutta $(A - \lambda I)^{\kappa - 1} w_\kappa \neq 0$. Asetetaan

$$w_j = (A - \lambda I)^{\kappa - j} w_\kappa.$$

Tällöin

$$\begin{cases} Aw_1 = \lambda w_1 & \text{ja} \\ Aw_j = \lambda w_j + w_{j-1}, & j = 2, \ldots, \kappa. \end{cases}$$

Matriisimuodossa saadaan

$$A\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vektorijonoa $(w_1, \dots, w_\kappa)$ kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi ja ominaisvektorista w_1 lähteväksi Jordanin ketjuksi. Similaarimuunnoksen $A = VJV^{-1}$ muunnosmatriisi V saadaan siis selvitettyä käyttämällä seuraavia yhtälöitä:

$$\begin{cases} (A - \lambda I)w_2 = w_1 \\ (A - \lambda I)w_i = w_{i-1}, \ i = 2, \dots, r_i. \end{cases}$$

Siis täydennetään matriisin A similaarimuunnoksen $A = VJV^{-1}$ matriisin V mahdollisesti puuttuvat ominaisvektorit Jordanin ketjujen vektoreilla. Lisäksi saatiin selvitettyä miten Jordanin lohko $J(\lambda, r)$ löydetään eli se voidaan kirjoittaa muodossa

$$J(\lambda, r) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{r \times r}.$$

Jordanin matriisi on tällöin lohkodiagonaalinen yläkolmiomatriisi

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_p, r_p) \end{bmatrix},$$

jonka lävistäjä koostuu siis $r_i \times r_i$ kokoisista Jordanin lohkoista.

Esimerkki 3.4. Olkoon matriisi

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ja ratkaistaan sen ominaisarvot:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) =& \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \lambda - \frac{3}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{vmatrix} \\ =& (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0, \end{aligned}$$

kun $\lambda = 1$ tai $\lambda = 2$. Matriisilla A on siis ominaisarvo $\lambda_1 = 1$ ja kahden kertaluvun ominaisarvo $\lambda_2 = 2$. Ratkaistaan vielä vastaavat ominaisvektorit:

$$\lambda_1 = 1 : \big[A - \lambda_1 I |\, 0\big] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & |\,0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & |\,0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & |\,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & |\,0 \\ 1 & 2 & -1 & |\,0 \\ -1 & 0 & 1 & |\,0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = (1,0,1)$$

$$\lambda_2 = 2 : \big[A - \lambda_2 I |\, 0\big] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & |\,0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & |\,0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & |\,0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & |\,0 \\ 1 & 0 & -1 & |\,0 \\ -1 & 0 & -1 & |\,0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2 = (0,1,0).$$

Löytyy siis vain kaksi ominaisvektoria v_1 ja v_2 ja tarvitaan kolme, joten etsitään ominaisarvoon λ_2 liittyvä ja ominaisvektorista v_2 lähtevä Jordanin ketju $\{v_2, v_3\}$. Nyt koska

$$\begin{cases} Av_2 = \lambda_2 v_2 \\ Av_3 = v_2 + \lambda_2 v_3 \ \Rightarrow \ (A - \lambda_2 I)v_3 = v_2, \end{cases}$$

niin vektori v_3 löydetään yhtälön

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & |\,0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & |\,1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & |\,0 \end{bmatrix}$$

avulla. Siis $v_3 = (1, 0, -1)$.

Matriisi A on similaarinen sen Jordanin matriisin J_A kanssa ja Jordanin lohkot ovat

$$J(\lambda_1, r_1) = J(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad J(\lambda_2, r_2) = J(2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

joten

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin on voimassa yhtälö $A = VJ_AV^{-1}$, jossa matriisi

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

koostuu vektoreista v_1, v_2 ja v_3 ja sen käänteismatriisi

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

voidaan ratkaista käyttäen apuna esimerkiksi Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmää.

Jordanin muodon J_A eksponenttifunktio e^{J_A} on lohkolävistäjämatriisi, jonka lohkot koostuvat muotoa $e^{J(\lambda,r)}$ olevista matriiseista. Ne voidaan laskea seuraavasti: Jordanin lohko kirjoitetaan lävistäjämatriisin ja nilpotentin matriisin summana

$$J(\lambda, r) = \lambda I + N = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt koska λI ja N kommutoivat, eksponenttifunktio $e^{J(\lambda,r)}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$e^{J(\lambda,r)} = e^{\lambda I + N} = e^{\lambda} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{1}{j!} N^j, \tag{3.3}$$

sillä nilpotentin N eksponenttifunktio e^N tunnetaan jo esimerkistä 2.5. Näytetään vielä kaksi esimerkkiä Jordanin matriisin eksponenttifunktioista.

Esimerkki 3.5. Olkoon Jordanin matriisi

$$J = \begin{bmatrix} J(4,2) & & \\ & J(3,3) & \\ & & J(2,1) \end{bmatrix}.$$

Tällöin sen eksponenttifunktio on

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{J(4,2)} & & \\ & e^{J(3,3)} & \\ & & e^{J(2,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & & \\ & e^3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \\ & & e^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^4 & e^4 & & & & \\ & e^4 & & & & \\ & & e^3 & e^3 & \frac{1}{2}e^3 & \\ & & & e^3 & e^3 & \\ & & & & e^3 & \\ & & & & & e^2 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3.6. Esimerkissä 3.4 määritettiin matriisille

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

similaarimuunnos $A = VJ_AV^{-1}$. Nyt matriisin A eksponenttifunktio on

$$\begin{aligned}
e^A =& Ve^{J_A}V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{J(1,1)} & \\ & e^{J(2,2)} \end{bmatrix} V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^1 & \\ & e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} V^{-1} \\
=& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & 0 & e^2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ e & 0 & -e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e+e^2) & 0 & \frac{1}{2}(e-e^2) \\ 0 & e^2 & -\frac{1}{2}e^2 \\ \frac{1}{2}(e-e^2) & 0 & \frac{1}{2}(e+e^2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Myös Jordanin matriiseille sekä Jordanin lohkoille voidaan laskea potensseja, mutta niitä ei tarvita tässä työssä, joten jätetään ne väliin. Nyt osataan ratkaista eksponenttifunktio kaikille neliömatriiseille, joten siirrytään tutkielman toiseen osaan eli differentiaaliyhtälöihin.

LUKU 4

Differentiaaliyhtälöryhmät

4.1. Peruskäsitteitä

Tässä luvussa tarkastellaan differentiaaliyhtälöryhmiä

$$x'(t) = f(t, x(t)), \tag{4.1}$$

kun $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva kuvaus. Komponenteittain kirjoitettuna differentiaaliyhtälöryhmä (4.1) on

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, (x_1(t), \ldots, x_n(t))) \\ x_2'(t) = f_2(t, (x_1(t), \ldots, x_n(t))) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, (x_1(t), \ldots, x_n(t))). \end{cases} \tag{4.2}$$

Kutsutaan differentiaaliyhtälöryhmää lyhyesti differentiaaliyhtälöksi. Differentiaaliyhtälöllä on yleensä paljon ratkaisuja, mutta voidaan saada yksikäsitteinen ratkaisu, kun annetaan lisäehtoja. Siten puhutaan alkuarvotehtävistä, joilla on lisäehto $x(t_0) = x_0$ eli on kiinnitetty ratkaisun lähtöpiste.

Differentiaaliyhtälön (4.1) ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on differentioituva kuvaus $x : U \to \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $U \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $x'(t) = f(t, x(t))$ kaikilla $t \in U$ ja $x(t_0) = x_0$.

Jos differentiaaliyhtälön (4.1) oikean puolen kuvauksen arvo ei riipu muuttujan t arvosta, niin tämä riippuvuus voidaan jättää pois ja tarkastellaan kuvauksen $f : U \to \mathbb{R}^n$ määräämää differentiaaliyhtälöä

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.3}$$

jota kutsutaan autonomiseksi differentiaaliyhtälöksi. Yhtälön (4.3) ratkaisu alkuarvolla $x(t_0) = x_0$ on niin ikään differentioituva kuvaus $x : U \to \mathbb{R}^n$ joltain avoimelta väliltä $U \subset \mathbb{R}$, jolle pätee $x'(t) = f(x(t))$ kaikilla $t \in U$ ja $x(t_0) = x_0$.

Esimerkki 4.1. Tasapainoasemasta kulman θ verran poikkeutetulle, L-pituiselle ja m-massaiselle heilurille voidaan Newtonin lain mukaan kirjoittaa yhtälö

$$mv'(t) = -mg\sin(\theta(t))$$

ja geometrian avulla saadaan yhtälö

$$v(t) = L\theta'(t).$$

Siten heiluri toteuttaa yhtälöparin

$$\begin{cases} \theta'(t) = \frac{1}{L}v(t) \\ v'(t) = -g\sin(\theta(t)). \end{cases}$$

Merkitään nyt

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad f(x(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}x_2(t) \\ -g\sin(x_1(t)) \end{bmatrix}.$$

Näin ollen differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $x'(t) = f(x(t))$.

Esimerkki 4.2. Olkoon $\lambda, a \in \mathbb{R}$. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ x(0) = a \end{cases}$$

ratkaisu on $x(t) = ae^{\lambda t}$.

Esimerkki 4.3. Olkoon $\lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{R}$. Alkuarvotehtävän

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = a \\ x_2(0) = b \end{cases}$$

ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1(t) = ae^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = ae^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälö voidaan esittää myös matriisimuodossa, jolloin

$$x'(t) = Ax(t),$$

missä

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Tällöin ratkaisu x on vektorimuodossa

$$x(t) = \begin{bmatrix} ae^{\lambda_1 t} \\ ae^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

Korkeamman kertaluvun differentiaaliyhtälöt voidaan muuntaa ensimmäisen kertaluvun ryhmiksi. Esimerkiksi kolmannen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$y'''(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t))$$

muunnetaan seuraavasti: Asetetaan

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad x_3(t) = y''(t),$$

jolloin saadaan

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = g(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)). \end{cases}$$

Muut kuin kolmannen asteen differentiaaliyhtälöt ratkaistaan vastaavasti. Tässä työssä riittää siis tarkastella ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, sillä muut voidaan aina palauttaa siihen.

Esimerkki 4.4. Ratkaistaan toisen asteen differentiaaliyhtälö

$$y''(t) + y(t) = 0, \tag{4.4}$$

jonka kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(t) = a\cos t + b\sin t,$$

kun tiedetään alkuarvot $y(0) = a$ ja $y'(0) = b$. Asetetaan $x_1(t) = y(t)$ ja $x_2(t) = y'(t)$. Tällöin yhtälö (4.4) on muotoa

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t). \end{cases} \tag{4.5}$$

Matriisimuodossa kirjoitettuna yhtälö (4.5) on siis $x'(t) = Ax(t)$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nyt koska $x'(t) = Ax(t)$, niin yhtälöparin (4.5) yleinen ratkaisu saadaan yhtälöstä $x(t) = A^{-1}x'(t)$ eli

$$x(t) = \begin{bmatrix} a\cos t + b\sin t \\ -a\sin t + b\cos t \end{bmatrix}.$$

Olkoon nyt $A(t)$ $n \times n$-matriisi ja $b(t)$ vektori siten, että kaikki niiden komponentit $a_{ij}(t)$ ja $b_i(t)$ ovat jatkuvia funktioita, kun $i, j = 1, \ldots, n$. Tällöin differentiaaliyhtälöä

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{4.6}$$

kutsutaan lineaariseksi homogeeniseksi yhtälöksi ja differentiaaliyhtälöä

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{4.7}$$

kutsutaan lineaariseksi epähomogeeniseksi yhtälöksi. Jos A ei riipu muuttujasta t, on kyseessä vakiokertoiminen yhtälö ja jos differentiaaliyhtälöä ei voi esittää muodossa (4.7), niin sitä kutsutaan epälineaariseksi. Tässä työssä tarkastellaan vain lineaarisia vakiokertoimisia differentiaaliyhtälöitä.

4.2. Lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

Todistetaan ensin, että alkuarvotehtävän, jossa differentiaaliyhtälö on vakiokertoiminen ja homogeeninen, ratkaisu on eksponenttifunktion muodossa kuten nähtiin jo esimerkissä 4.2. Näytetään myös, että ratkaisu on yksikäsitteinen.

Lause 4.5. *Olkoon $A \in M_n$. Alkuarvotehtävän $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ ainoa ratkaisu on $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x(t) = e^{tA}x_0$.*

Todistus. Koska suppenevia potenssisarjoja saa derivoida termeittäin, niin eksponenttifunktion derivaatta tunnetaan ja voidaan kirjoittaa yhtälö

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}x_0\right) = Ae^{tA}x_0 = Ax(t)$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten $x(t)$ on differentiaaliyhtälön ratkaisu.

Jos $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ on alkuarvotehtävän ratkaisu, niin voidaan määrittää kuvaus $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ asettamalla $z(t) = e^{-tA}y(t)$. Nyt

$$z'(t) = -Ae^{-tA}y(t) + Ae^{-tA}y(t) = (A - A)e^{-tA}y(t) = 0,$$

joten z on vakiokuvaus $z(t) \equiv x_0$. Siispä kuvauksen z määritelmän nojalla $y(t) = e^{tA}x_0$ ja näin ollen differentiaaliyhtälön ratkaisu on yksikäsitteinen. □

Edellisen lauseen 4.5 alkuarvotehtävän ratkaisun voi kuitenkin kirjoittaa myös toisella tavalla. Tarkastellaan vielä sitä, sillä sen avulla nähdään selvemmin ratkaisukäyrien käyttäytymisen perusteet.

Olkoon matriisilla A ominaisarvot $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ja niitä vastaavat lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Nyt koska matriisi A ja sen eksponenttifunktio e^A diagonalisoituvat samassa kannassa, niin niillä on samat ominaisvektorit. Ominaisvektorille v_1 voidaan siis kirjoittaa, että $e^{tA}v_1 = e^{t\lambda_1}v_1$. Vastaavasti muille ominaisvektoreille, joten lineaarisuuden perusteella differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisu ominaisvektorikannassa on

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}v_n. \tag{4.8}$$

Tällöin alkuehdosta $x(0) = x_0$ saadaan

$$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = x_0 \quad \text{eli} \quad Vc = x_0$$

jolloin $c = V^{-1}x_0$, missä $c = (c_1, \ldots, c_n)$ ja $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$. Näin saadaan ratkaisu

$$x(t) = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^{-1}x_0,$$

joka taas on standardikannassa. Tästä voidaan päätellä, että V on ratkaisun kannanvaihtomatriisi ominaisvektorikannasta standardikantaan ja V^{-1} taas päinvastaiseen kannanvaihtoon. Nyt ratkaisun (4.8) etuna on se, että siitä nähdään selvästi ratkaisun kulkusuunta, kun ominaisarvot λ ovat positiivisia tai negatiivisia ja kun $t \to \infty$.

Seuraavaksi tarkastellaan tason lineaarisia differentiaaliyhtälöitä, joissa A on 2×2-matriisi. Ratkaisuja on nyt ominaisarvojen merkeistä riippuen eri tyyppejä. Jos matriisilla A on kaksi positiivista ominaisarvoa, ratkaisukäyrät lähtevät origosta ja origoa kutsutaan lähteeksi. Jos matriisilla A on kaksi negatiivista ominaisarvoa, ratkaisukäyrät lähestyvät origoa ja origoa kutsutaan nieluksi. Jos taas matriisilla A on kaksi erimerkkistä ominaisarvoa, origoa kutsutaan satulaksi. Tarkastellaan tapauksia esimerkkien avulla.

Esimerkki 4.6. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvot $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$ sekä ominaisvektorit $v_1 = (1, 0)$ ja $v_2 = (1, 1)$. Matriisi A on siis diagonalisoituva ja voimme kirjoittaa yhtälön $A = V\Lambda V^{-1}$, missä

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jolloin

$$e^{tA} = Ve^{\Lambda t}V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Alkuarvotehtävän $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ ratkaisu standardikannassa on siten

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)e^t + a_2e^{2t} \\ a_2e^{2t} \end{bmatrix},$$

kun $x_0 = (a_1, a_2)$. Toisaalta ominaisvektorikannassa ratkaisu on

$$x(t) = c_1e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

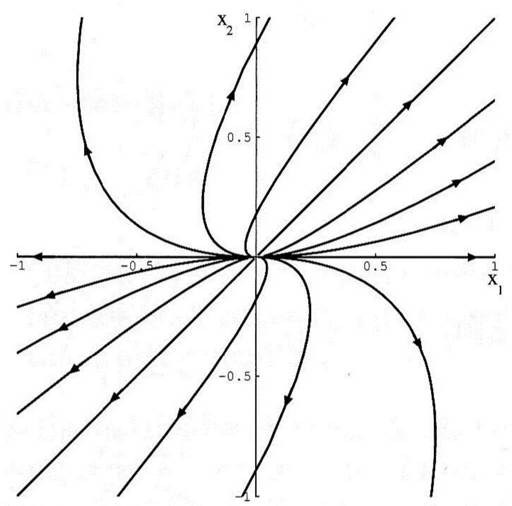
kun

$$x_0 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mistä nähdään, että ratkaisut

$$\| x(t) \| \to \infty, \quad \text{kun} \ \ t \to \infty.$$

Kuvassa 4.1 on joitakin ratkaisukäyriä eri alkuarvoilla x_0. Kaikki ratkaisut kulkevat siis origosta poispäin ja origoa kutsutaan lähteeksi.



KUVA 4.1. Lähde (Eirola & Nevanlinna, 2004, s. 10)

ESIMERKKI 4.7. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvot $\lambda_1 = -3$ ja $\lambda_2 = -1$ sekä ominaisvektorit $v_1 = (1, 1)$ ja $v_2 = (1, -1)$. Kuten esimerkissä 4.6 saamme

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & -e^{-t} + e^{-3t} \\ -e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Alkuarvotehtävän $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ ratkaisu standardikannassa on siten

$$x(t) = e^{tA} x_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (a_1 - a_2)e^{-t} + (a_1 + a_2)e^{-3t} \\ -(a_1 - a_2)e^{-t} + (a_1 + a_2)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

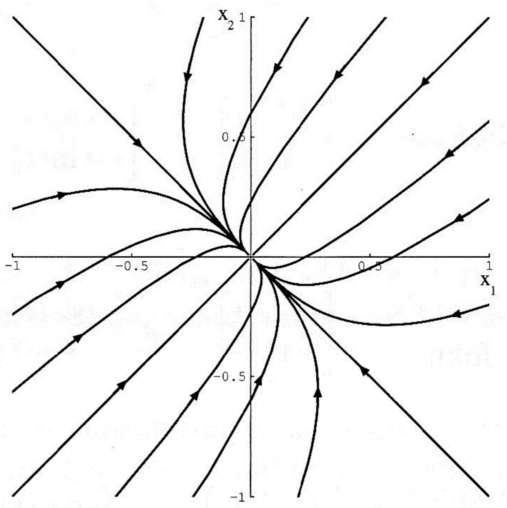
kun $x_0 = (a_1, a_2)$. Nyt ratkaisu ominaisvektorikannassa on

$$x(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

josta nähdään, että ratkaisut

$$\| \, x(t) \, \| \to 0, \quad \text{kun} \quad t \to \infty.$$

Kuvassa 4.2 on joitakin ratkaisukäyriä eri alkuarvoilla x_0. Kaikki ratkaisut kulkevat siis origoa kohti ja origoa kutsutaan nieluksi.



Kuva 4.2. Nielu (Eirola & Nevanlinna, 2004, s. 10)

Esimerkki 4.8. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

on erimerkkiset ominaisarvot $\lambda_1 = -2$ ja $\lambda_2 = 3$ sekä ominaisvektorit $v_1 = (1, 4)$ ja $v_2 = (1, -1)$. Kuten esimerkeissä 4.6 ja 4.7 saamme

$$e^{tA} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 4e^{3t} & e^{-2t} - e^{3t} \\ 4e^{-2t} - e^{3t} & 4e^{-2t} + e^{3t} \end{bmatrix}.$$

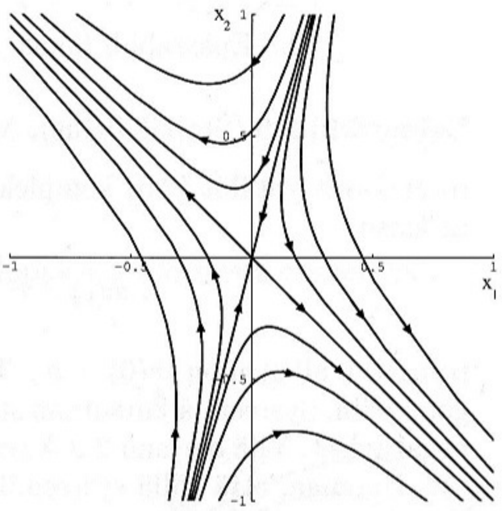
Alkuarvotehtävän $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ ratkaisu standardikannassa on siten

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}(a_1 + a_2)e^{-2t} + (4a_1 - a_2)e^{3t}\\(4a_1 + 4a_2)e^{-2t} + (-4a_1 + a_2)e^{3t}\end{bmatrix}$$

kun $x_0 = (a_1, a_2)$. Kuvassa 4.3 on joitakin ratkaisukäyriä eri alkuarvoilla x_0. Ominaisvektorikannassa ratkaisu on

$$x(t) = c_1e^{-2t}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} + c_2e^{3t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},$$

josta nähdään, että kaikki ratkaisut kulkevat origoon päin ominaisvektorin v_1 suuntaista suoraa pitkin ja etääntyvät asymptoottisesti ominaisvektorin v_2 suuntaan, kuten kuvasta 4.3 myös nähdään. Tätä kutsutaan satulaksi.



KUVA 4.3. Satula (Eirola & Nevanlinna, 2004, s. 11)

Edellä tarkasteltiin differentiaaliyhtälöiden $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisuja, kun matriisi A oli reaalinen. Seuraavaksi käsitellään kaikki kompleksiset tapaukset.

Jos reaalisella matriisilla B on kompleksisia ominaisarvoja, jotka ovat siis muotoa $\alpha \pm i\beta$, niin 2×2-matriisi B on similaarinen matriisin

$$A = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\-\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

kanssa, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Tällöin alkuarvotehtävän

$$\begin{cases}x' = Ax\\x(0) = (a, b)\end{cases}$$

ratkaisu on kuvaus $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(a\begin{bmatrix}\cos(\beta t)\\ -\sin(\beta t)\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}\sin(\beta t)\\ \cos(\beta t)\end{bmatrix}\right).$$

Kun tiedetään ominaisarvoa $\lambda = \alpha + i\beta$ vastaava ominaisvektori $w = u + iv$, niin ominaisarvoa $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ vastaava ominaisvektori $\bar{w}$ saadaan yhtälöstä $A\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$, joten $\bar{w} = u - iv$. Ratkaistaan nyt differentiaaliyhtälö $x' = Ax$. Yhtälön $Aw = \lambda w$ eli

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)$$

reaali- ja imaginaariosista saadaan

$$\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v\\ Av = \beta u + \alpha v\end{cases} \quad \text{eli} \quad A\begin{bmatrix}u & v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}.$$

Eksponenttifunktio saadaan nyt laskettua vastaavasti sini- ja kosinifunktioiden sarjakehitelmien avulla kuten esimerkissä 2.4, sillä matriisit

$$I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

kommutoivat, joten voidaan käyttää lausetta 2.6:

$$\begin{aligned} e^{t\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}} &= e^{t\left(\alpha I + \beta\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)} = e^{t\alpha I}e^{t\beta\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}\\ &= e^{\alpha t}\begin{bmatrix}\cos(\beta t) & \sin(\beta t)\\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Näin ollen differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuarvolla $x_0 = c = (c_1, c_2)$ on

$$x(t) = e^{\alpha t}\begin{bmatrix}u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\beta t) & \sin(\beta t)\\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t)\end{bmatrix}c, \tag{4.9}$$

missä c on koordinaattivektori vektorien u ja v muodostamassa kannassa. Ratkaisu voidaan kuitenkin muuntaa standardikantaan kuten seuraavissa esimerkeissä tehdään.

Esimerkki 4.9. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix}9 & -8\\ 16 & -7\end{bmatrix}$$

on kompleksinen ominaisarvopari $\lambda_{1,2} = 1 \pm 8i$. Vektorit

$$u = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad v = \begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}$$

toteuttavat yhtälön (4.9), joten differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisu vektorien u ja v muodostamassa kannassa saadaan seuraavasti, kun alkuarvo $x(0) = c_1u + c_2v$:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(8t) & \sin(8t)\\ -\sin(8t) & \cos(8t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}\\ &= e^t\begin{bmatrix}(c_1 - c_2)\cos(8t) + (c_1 + c_2)\sin(8t)\\ -2c_2\cos(8t) + 2c_1\sin(8t)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Alkuarvon $x(0) = a$ toteuttava ratkaisu standardikannassa taas saadaan ratkaisemalla seuraava yhtälö

$$x(0) = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ -2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

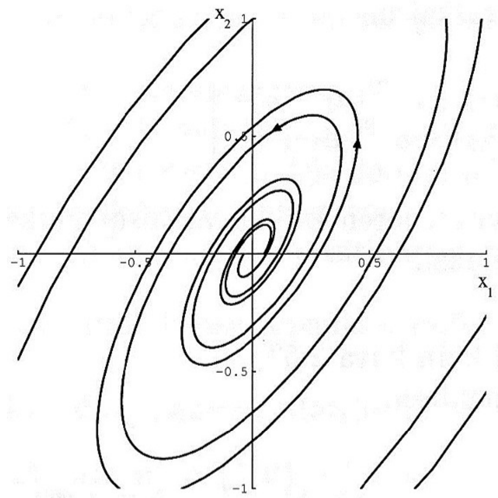
ja sijoittamalla saadut arvot $c_1 = a_1 - \frac{1}{2}a_2$ ja $c_2 = -\frac{1}{2}a_2$, jolloin saadaan ratkaisu

$$x(t) = e^t \begin{bmatrix} a_1 \cos(8t) + (a_1 - a_2)\sin(8t) \\ a_2 \cos(8t) + (2a_1 - a_2)\sin(8t) \end{bmatrix}.$$

Ratkaisukäyrät kulkevat spiraalimaisesti origosta poispäin kuten kuvassa 4.4, jossa on kahdesta eri alkuarvosta lähtevät käyrät. Huomataan siis, että koska matriisin A ominaisarvojen reaaliosat ovat positiiviset, niin

$$\| \, x(t) \, \| \to \infty, \quad \text{kun} \ \ t \to \infty.$$

Tätä kutsutaan epästabiiliksi fokukseksi.



Kuva 4.4. Epästabiili fokus (Eirola & Nevanlinna, 2004, s. 12)

Esimerkki 4.10. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

on kompleksinen ominaisarvopari $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Vektorit

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

toteuttavat yhtälön (4.9), joten differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisu saadaan kuten esimerkissä 4.9:

$$x(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} (c_1 + c_2)\cos t + (-c_1 + c_2)\sin t \\ c_1 \cos t + c_2 \sin t \end{bmatrix}.$$

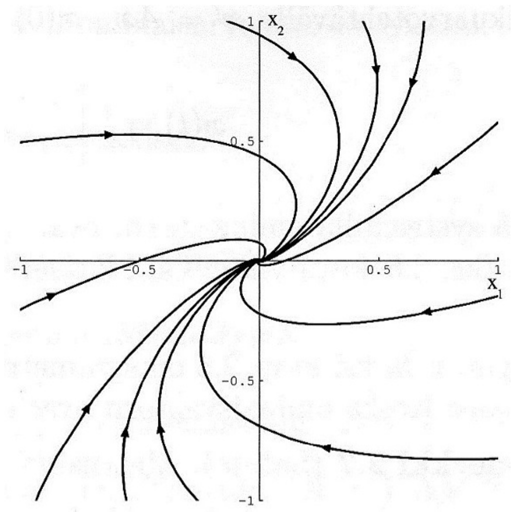
Alkuarvolla $x(0) = a$ ratkaisu standardikannassa on

$$x(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} a_1 \cos t + (-a_1 + 2a_2) \sin t \\ a_2 \cos t + (-a_1 + a_2) \sin t \end{bmatrix}.$$

Nyt ratkaisukäyrät kulkevat spiraalimaisesti kohti origoa kuten kuvassa 4.5, jossa on 11 eri alkuarvosta lähtevät käyrät. Nyt huomataan, että koska matriisin A ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiiviset, niin

$$\| x(t) \| \to 0, \quad \text{kun} \quad t \to \infty.$$

Tätä kutsutaan stabiiliksi fokukseksi.



KUVA 4.5. Stabiili fokus (Eirola & Nevanlinna, 2004, s. 12)

Esimerkeistä 4.9 ja 4.10 huomataan vielä, että ominaisarvojen reaali- ja imaginaariosien suhde vaikuttaa siihen kuinka paljon ratkaisukäyrät kiertävät. Stabiilisuus taas edelleen tarkoittaa sitä, että ratkaisut eivät pakene origosta. Palataan siihen myöhemmin.

Nyt tarkastellaan muuttujanvaihtoa, jota käytetään seuraavassa esimerkissä. Jos $n \times n$-matriisi A on similaarinen $n \times n$-matriisin B kanssa, niin differentiaaliyhtälö $x' = Bx$ alkuarvolla $x(0) = x_0$ voidaan ratkaista muuttujanvaihdolla. Pätee siis $A = CBC^{-1}$ jollain kääntyvällä matriisilla C. Tällöin differentiaaliyhtälön $y' = Ay$ ratkaisu alkuarvolla $y(0) = Cx_0$ on $y = Cx$. Matriisi C on siis muuttujanvaihtomatriisi, joka liittää alkuarvotehtävät toisiinsa.

Muodostetaan nyt 3-ulotteinen esimerkki, jossa käytetään myös muuttujanvaihtoa.

Esimerkki 4.11. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} -14 & -160 & -40 \\ 181 & 5 & 2 \\ 96 & 84 & 18 \end{bmatrix}$$

on kompleksinen ominaisarvopari $\lambda_{1,2} = 6 \pm 180i$ ja sitä vastaavat yhtälön (4.9) mukaiset vektorit $u = (-1, 1, 1)$ ja $v = (1, 1, 0)$. Lisäksi matriisilla A on yksi reaalinen ominaisarvo $\lambda_3 = -3$ ja sitä vastaava ominaisvektori $w = (0, -1, 4)$. Nyt voidaan muodostaa matriisi

$$V = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

jolloin $A = VBV^{-1}$, missä matriisi B muodostuu matriisin A ominaisarvojen reaali- ja imaginaariosista seuraavanlaisesti:

$$B = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 180 & 0 \\ -180 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

eli

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 180 \\ -180 & 6 \end{bmatrix}$$

on kompleksista ominaisarvoparia vastaava 2×2-matriisi. Nyt jos y on differentiaaliyhtälön $y'(t) = By(t)$ ratkaisu, niin muuttujanvaihdon avulla saadaan yhtälön $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisu $x = Vy$. Ratkaistaan ensin eksponenttifunktio

$$e^{tB} = \begin{bmatrix} e^{tC} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix},$$

missä e^{tC} voidaan laskea seuraavasti yhtälön (4.9) avulla:

$$\begin{aligned} e^{tC} =& e^{6t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(180t) & \sin(180t) \\ -\sin(180t) & \cos(180t) \end{bmatrix} \\ =& e^{6t} \begin{bmatrix} -\cos(180t) - \sin(180t) & -\sin(180t) + \cos(180t) \\ \cos(180t) - \sin(180t) & \sin(180t) + \cos(180t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tällöin differentiaaliyhtälön $y'(t) = By(t)$ ratkaisu on

$$\begin{aligned} y(t) =& e^{tB} c \\ =& \begin{bmatrix} e^{6t}(-\cos(180t) - \sin(180t)) & e^{6t}(-\sin(180t) + \cos(180t)) & 0 \\ e^{6t}(\cos(180t) - \sin(180t)) & e^{6t}(\sin(180t) + \cos(180t)) & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} e^{6t}((-c_1 + c_2)\cos(180t) + (-c_1 - c_2)\sin(180t)) \\ e^{6t}((c_1 + c_2)\cos(180t) + (-c_1 + c_2)\sin(180t)) \\ c_3 e^{-3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

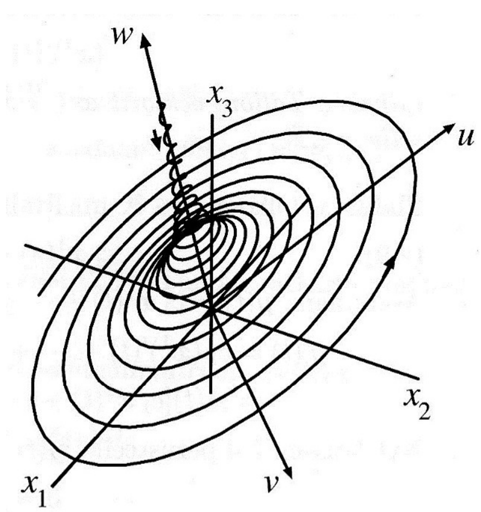
Alkuarvolla $y(0) = a$ ratkaisu on

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{6t}(a_1\cos(180t) - a_2\sin(180t)) \\ e^{6t}(a_2\cos(180t) + a_1\sin(180t)) \\ a_3 e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Nyt siis muuttujanvaihdon avulla saadaan differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ ratkaisu, joka on

$$x(t) = Vy(t) = \begin{bmatrix} a_1 e^{6t}(-\cos(180t) - \sin(180t)) + a_2 e^{6t}(\cos(180t) - \sin(180t)) \\ a_1 e^{6t}(\cos(180t) - \sin(180t)) + a_2 e^{6t}(\cos(180t) + \sin(180t)) - a_3 e^{-3t} \\ e^{6t}(a_1 \cos(180t) + a_2 \sin(180t)) + 4a_3 e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Ratkaisukäyrä alkuarvolla $x(0) = a$ muodostaa kuvan 4.6 mukaisen 3-ulotteisen spiraalin, kun $a \approx w$. Spiraali siis lähtee vektorin w läheltä ja kulkee kohti origoa, sillä jos ratkaisun kirjoittaisi ominaisvektorikannassa, niin vektorin w kerroin olisi e^{-3t}, joka lähestyy nollaa, kun $t \to \infty$. Vektoreiden u ja v kertoimina olisi silloin e^{6t} sekä sini- ja kosinitermien jokin kombinaatio. Sini- ja kosinitermit aiheuttavat ratkaisukäyrän pyörivän liikkeen ja termi e^{6t} taas aiheuttaa sen, että ratkaisu kulkee poispäin origosta.



KUVA 4.6. Spiraali (Eirola & Nevanlinna, 2004, s. 13)

Nyt on näytetty ratkaisutapoja lineaarisille homogeenisille differentiaaliyhtälöille yleensä 2-ulotteisissa tilanteissa. Esimerkissä 4.11 taas oli kyse 3-ulotteisesta tilanteesta ja ratkaisun määrittäminen oli jo melko työlästä. Seuraavassa luvussa tarkastellaan lineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisukäyrien käyttäytymistä tarkemmin. Sitä ennen tarkastellaan kuitenkin paria erikoistapausta, joissa differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ matriisina A on Jordanin lohko sekä lopuksi yleisen lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisua.

Jos matriisi A on similaarinen Jordanin matriisin

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

niin kuvaus $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} a + tb \\ b \end{bmatrix}$$

on differentiaaliyhtälön

$$x' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x$$

ratkaisu alkuarvolla $x(0) = (a, b)$.

Kun $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, niin alkuarvotehtävän

$$x' = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix} x, \quad x(0) = x_0$$

ratkaisu on

$$x(t) = e^{\lambda t}\Big(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{bmatrix}\Big).$$

Ratkaisu seuraa yhtälöstä (3.3) ja esimerkistä 2.5 eli kun tiedetään mitä Jordanin lohkon eksponenttifunktio on.

Muodostetaan vielä yleinen ratkaisu lineaariselle vakiokertoimiselle differentiaaliyhtälölle.

Lause 4.12. *Alkuarvotehtävän $x'(t) = Ax(t) + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ ainoa ratkaisu on*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Todistus. Ratkaisu x toteuttaa alkuehdon, sillä

$$x(t_0) = e^{(t_0-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{(t_0-s)A}b(s)ds = x_0.$$

Sitten koska ratkaisu x voidaan kirjoittaa muodossa

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)ds,$$

niin tulon derivointisäännöllä saadaan

$$\begin{aligned}
x'(t) =& \frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} x_0 + e^{(t-t)A} b(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} e^{(t-s)A} b(s) ds \\
=& A e^{(t-t_0)A} x_0 + b(t) + \int_{t_0}^{t} A e^{(t-s)A} b(s) ds \\
=& A \left(e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds \right) + b(t) \\
=& A x(t) + b(t).
\end{aligned}$$

Lisäksi kahden ratkaisun x_1 ja x_2 erotus toteuttaa

$$\frac{d}{dt} \left(x_1(t) - x_2(t) \right) = A \left(x_1(t) - x_2(t) \right) \quad \text{ja} \quad x_1(0) - x_2(0) = 0,$$

joten $x_1(t) = x_2(t)$ kaikilla t. Näin ollen ratkaisu on yksikäsitteinen ja väite pitää paikkansa. □

LUKU 5

Differentiaaliyhtälöryhmien tasapainopisteiden stabiilisuus

Määritellään ensin tasapainopiste eli piste p on differentiaaliyhtälöryhmän $x'(t) = f(x(t))$ tasapainopiste, jos funktio

$$x(t) = p$$

on ratkaisu kaikilla t. Näin on erityisesti, kun $f(p) = 0$. Differentiaaliyhtälöryhmän eli systeemin ratkaisukäyrien käyttäytymistä kutsutaan stabiilisuudeksi eli kun ratkaisukäyrät pysyvät rajoitetulla etäisyydellä tasapainopisteestä tai lähestyvät sitä, systeemin tasapainopiste on stabiili. Jos taas ratkaisukäyrät pakenevat pois tasapainopisteestä, se ei ole stabiili. Tässä luvussa tarkastellaan lineaaristen differentiaaliyhtälöiden tasapainopisteiden stabiilisuutta. Myös epälineaarisille differentiaaliyhtälöille stabiilisuutta voi selvittää tutkimalla tasapainopisteen ympäristöä, mutta ei kuitenkaan mennä siihen tässä työssä.

Lineaarisella homogeenisellä differentiaaliyhtälöllä $x'(t) = Ax(t)$ origo on tasapainopiste, sillä kun $x(0) = 0$, niin $x(t) = 0$ kaikilla t. Tulee siis tarkastella miten muut ratkaisut eli ratkaisukäyrät käyttäytyvät. Tapauksessa $x'(t) = Ax(t)$ sanotaan, että origo on stabiili tasapainopiste, jos kaikille ratkaisuille pätee:

$$\sup_{t\geq 0} \parallel x(t) \parallel < \infty,$$

ja että origo on asymptoottisesti stabiili, jos kaikille ratkaisuille pätee:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Lineaarisen epähomogeenisen differentiaaliyhtälön $x' = Ax + b$ tasapainopiste taas on, kun A on kääntyvä matriisi, yhtälön $Ax_0 + b = 0$ ratkaisu

$$x_0 = -A^{-1}b.$$

Luvun 4 esimerkeissä 4.7 (nielu) ja 4.10 (stabiili fokus) origo oli siis asymptoottisesti stabiili, ja muissa eli esimerkeissä 4.6 - 4.11 epästabiili.

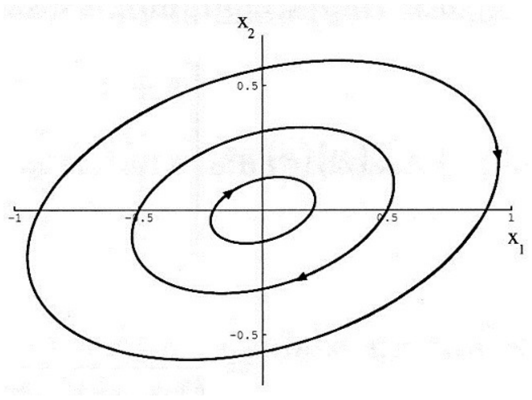
Esimerkki 5.1. Differentiaaliyhtälön

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

ratkaisut ovat

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t) & \frac{2}{3}\sin(3t) \\ -\frac{5}{3}\sin(3t) & \cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t) \end{bmatrix} x(0).$$

Tällöin origo on stabiili tasapainopiste, mutta ei asymptoottisesti stabiili. Tällaisessa tapauksessa origoa kutsutaan keskukseksi.



KUVA 5.1. Keskus (Eirola & Nevanlinna, 2004, s. 22)

Lineaaristen differentiaaliyhtälöiden

$$x' = Ax \quad \text{ja} \quad x' = Ax + b$$

tasapainopisteiden stabiilisuutta voidaan selvittää matriisin A ominaisarvojen $\lambda \in \mathbb{C}$ ja -vektoreiden avulla. Systeemin tasapainopiste on stabiili täsmälleen silloin, kun sen ominaisarvojen reaaliosat $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ ja lisäksi niillä ominaisarvoilla, joilla $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$ pätee $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Jos lisäksi kaikkien ominaisarvojen $\operatorname{Re}\lambda < 0$, niin tasapainopiste on asymptoottisesti stabiili. Jos taas jokin ominaisarvoista $\lambda > 0$, niin systeemi on epästabiili.

Stabiilissa tilanteessa tämä perustuu siihen, että jos $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$ ja jos $\alpha < 0$, niin kerroin $e^{\alpha t}$ aiheuttaa sen, että ratkaisu lähestyy tasapainopistettä, kun $t \to \infty$. Kun taas $\alpha > 0$, niin kerroin $e^{\alpha t}$ aiheuttaa sen, että ratkaisun normi kasvaa rajatta, kun $t \to \infty$, joten systeemin tasapainopiste on silloin epästabiili. Kun $\alpha = 0$, niin ratkaisut parametrisoivat ellipsin, kuten esimerkissä 5.1.

Muodostetaan lopuksi vielä täsmälliset ehdot lineaarisen differentiaaliyhtälön tasapainopisteen stabiilisuudelle ja asymptoottiselle stabiilisuudelle. Niiden avuksi tulee kuitenkin ensin antaa määritelmiä ja esittää kaksi lemmaa.

Olkoon $\Lambda(A)$ matriisin A ominaisarvojen λ joukko. Määritellään sitten luku $\alpha(A)$ siten, että

$$\alpha(A) = \max_{\lambda \in \Lambda(A)} \operatorname{Re}\lambda.$$

Lukua $\alpha(A)$ kutsutaan matriisin A spektraaliabskissaksi. Joukko $M_{\leq 0}$ taas on niiden matriisien A joukko, joille pätee:

(i) $\alpha(A) \leq 0$ ja
(ii) jos $\lambda \in \Lambda(A)$ ja $\operatorname{Re}\lambda = 0$, niin ominaisarvolle λ pätee $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

LEMMA 5.2. *Jos $\alpha(A) < 0$, niin*

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0.$$

TODISTUS. Olkoon matriisin A Jordanin muoto

$$J_A = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_q, r_q) \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$e^{tA} = Ve^{tJ_A}V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{tJ(\lambda_1, r_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ(\lambda_q, r_q)} \end{bmatrix} V^{-1},$$

joten riittää näyttää, että

$$\lim_{t\to\infty} e^{tJ(\lambda,r)} = 0,$$

kun $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Matriisin $e^{tJ(\lambda,r)}$ yläkolmio-osan alkiot ovat muotoa $\frac{t^j}{j!}e^{\lambda t}$. Nämä kaikki lähestyvät nollaa, sillä

$$\lim_{t\to\infty} t^j e^{-\delta t} = 0$$

kaikilla $j \in \mathbb{R}$, kun $\delta > 0$. $\square$

LEMMA 5.3. *Kaikilla $\beta > \alpha(A)$ on olemassa K_β siten, että*

$$\| e^{tA} \| \le K_\beta e^{t\beta},$$

kun $t \ge 0$.

TODISTUS. Jos $A = XDX^{-1}$, niin

$$A - \beta I = X(D - \beta I)X^{-1},$$

jolloin lauseen 1.17 nojalla

$$\alpha(A - \beta I) = \alpha(A) - \beta.$$

Nyt kun $\beta > \alpha(A)$, niin $\alpha(A - \beta I) = \alpha(A) - \beta < 0$, joten lemman 5.2 perusteella

$$\lim_{t\to\infty} e^{t(A-\beta I)} = 0.$$

Siis on olemassa

$$K_\beta = \max_{t\ge 0} \| e^{t(A-\beta I)} \| .$$

Nyt $e^{t(A-\beta I)} = e^{-t\beta}e^{tA}$, joten

$$\| e^{tA} \| \le K_\beta e^{t\beta},$$

kun $t \ge 0$. $\square$

Nyt asetetaan stabiilisuuden ehdot.

LAUSE 5.4. *Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Origo on differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ stabiili tasapainopiste.*
(ii) $A \in M_{\le 0}$.
(iii) *On olemassa K siten, että $\| e^{tA} \| \le K$, $t \ge 0$.*

TODISTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Jos λ on matriisin A ominaisarvo ja u sitä vastaava ominaisvektori siten, että $\operatorname{Re}\lambda > 0$, niin $x(t) = e^{t\lambda}u$ on differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ rajattomasti kasvava ratkaisu. Jos taas $\operatorname{Re}\lambda = 0$ ja $Av - \lambda v = u$, kun $m_g(\lambda) \neq m_a(\lambda)$, niin rajoittamattoman ratkaisun antaa

$$x(t) = e^{t\lambda}v + te^{t\lambda}u.$$

Näin ollen, jos origo on stabiili tasapainopiste, niin on oltava $A \in M_{\leq 0}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Olkoon $A \in M_{\leq 0}$ ja $J_A = V^{-1}AV$ kuten lemman 5.2 todistuksessa. Tällöin

$$\| e^{tA} \| \leq c \| V \| \max_{1 \leq j \leq q} \| e^{tJ(\lambda_j, r_j)} \| \| V^{-1} \|,$$

sillä kun

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_q \end{bmatrix}, \quad \text{niin} \quad \| M \| \leq c \max_{1 \leq j \leq q} \| M_j \|$$

lausetta 1.4 soveltamalla. Jos nyt $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, niin $r_j = 1$ ja

$$\| e^{tJ(\lambda_j, 1)} \| = | e^{t\lambda_j} | = e^{t \operatorname{Re}\lambda_j} = 1.$$

Jos taas $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, niin lemman 5.2 perusteella

$$\| e^{tJ(\lambda_j, r_j)} \| \to 0, \quad \text{kun} \quad t \to \infty,$$

joten tämä on rajoitettu kaikilla $t \geq 0$. Näin ollen löytyy K siten, että

$$\| e^{tA} \| \leq K.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Koska

$$\| x(t) \| \leq \| e^{tA} \| \| x(0) \| \leq K \| x(0) \|,$$

niin ratkaisu on rajoitettu ja origo on stabiili tasapainopiste.

□

LAUSE 5.5. *Seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *Origo on differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ asymptoottisesti stabiili tasapainopiste.*
(ii) $\alpha(A) < 0$.
(iii) *On olemassa $\beta < 0$ ja K siten, että $\| e^{tA} \| \leq Ke^{t\beta}$, $t \geq 0$.*

TODISTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii): Olkoon $\alpha(A) \geq 0$ ja $\lambda \in \Lambda(A)$ siten, että $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ ja x_0 vastaava ominaisvektori. Tällöin $x(t) = e^{t\lambda}x_0$ on differentiaaliyhtälön $x'(t) = Ax(t)$ eräs ratkaisu ja

$$| x(t) | = e^{t\operatorname{Re}\lambda} | x_0 | \nrightarrow 0, \quad \text{kun} \ t \to \infty.$$

Näin ollen, jos origo on asymptoottisesti stabiili, niin on oltava $\alpha(A) < 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Koska $\alpha(A) < 0$, niin on olemassa β siten, että $\alpha(A) < \beta < 0$ ja väite seuraa lemmasta 5.3.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Kun $t \to \infty$, $\beta < 0$ ja

$$\| x(t) \| \leq \| e^{tA} \| \| x_0 \| \leq Ke^{t\beta} \| x_0 \|,$$

niin ratkaisu lähestyy nollaa ja väite seuraa.

□

LIITE A

Merkintöjä

Merkintä	*Selitys*
$\mathbb{R}$	Reaalilukujen joukko
$\mathbb{C}$	Kompleksilukujen joukko: $\mathbb{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} = \{a + ib : a,b \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R} \cup \mathbb{C}$: $x \in \mathbb{K}^n$: $x \in \mathbb{R}^n$ tai $x \in \mathbb{C}^n$
I	Yksikkömatriisi: $I = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1)$
D	Diagonaalimatriisi: $D = \mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$
$\det(A)$	Matriisin A determinantti
$\Lambda(A)$	Matriisin A ominaisarvojen λ joukko
M_n	$n \times n$-matriisien joukko
E_n	$\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta: $E_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$
$(x \mid y)$	Sisätulo: $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\parallel \cdot \parallel$	Normi: $\parallel \cdot \parallel = (\cdot \mid \cdot)^{\frac{1}{2}}$
$m_a(\lambda)$	Ominaisarvon λ algebrallinen kertaluku
$m_g(\lambda)$	Ominaisarvon λ geometrinen kertaluku
Re z	Kompleksiluvun z reaaliosa: Re $z = a$, kun $z = a + ib$
Im z	Kompleksiluvun z imaginaariosa: Im $z = b$ kun $z = a + ib$

Kirjallisuutta

[1] Hirsch, Morris W. & Smale, Stephen: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* kolmas laitos, Academic Press, Inc., 1974.

[2] Eirola, Timo: *Lineaarialgebran perusteet.* Luentomoniste, Teknillinen korkeakoulu, 2003.

[3] Eirola, Timo & Nevanlinna, Olavi: *Differentiaaliyhtälösysteemit.* Luentomoniste, Teknillinen korkeakoulu, 2004.

[4] Parkkonen, Jouni: *Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi.* Luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2010.

[5] Kahanpää, Lauri: *Funktionaalianalyysi.* Verkkojulkaisu, Jyväskylän yliopisto. Internet: http://users.jyu.fi/ laurikah/FAN/FAN3_50.pdf, luettu 7.6.2013.

[6] Purmonen, Veikko T.: *Lineaarinen algebra ja geometria 1.* Luentomoniste 58, Jyväskylän yliopistopaino, 2008.

[7] Purmonen, Veikko T.: *Lineaarinen algebra ja geometria 2.* Luentomoniste 59, Jyväskylän yliopistopaino, 2008.

[8] Alestalo, Pekka: *Matriisieksponenttifunktio.* Verkkojulkaisu, Aalto-yliopisto. Internet: http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/08/L/eAt.pdf, luettu 7.6.2013.

[9] Alestalo, Pekka: *Differentiaaliyhtälöt.* Verkkojulkaisu, Tampereen teknillinen yliopisto. Internet: http://matriisi.ee.tut.fi/courses/7303045/13-15_Differentiaaliyhtalot.pdf, luettu 7.6.2013.

[10] Hirvensalo, Mika: *Insinöörimatematiikka.* Verkkojulkaisu, Turun yliopisto. Internet: http://users.utu.fi/mikhirve/ins1011/ins2b2011.pdf, luettu 7.6.2013.