Reaalifunktion epäjatkuvuus

Misa Muotio

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013

Tiivistelmä: Misa Muotio, *Reaalifunktion epäjatkuvuus* (engl. *Discontinuity of a real function*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 9. s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2013.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tutkia, millaisia ovat yhden muuttujan reaalifunktion epäjatkuvuuspisteiden joukot. Tutkielmassa lähdetään liikkeelle funktion jatkuvuudesta yleisesti ja lopussa on pieni tutkimus siitä, mitä lukion differentiaali- ja integraalilaskennan kurssilla olevat oppilaat ymmärtävät jatkuvuudesta ja epäjatkuvuudesta.

Tässä tutkielmassa epäjatkuvuuksia luokitellaan kolmella eri tavalla. Yksinkertaisin tapaus on poistuva epäjatkuvuus. Siinä funktiolla on raja-arvo, mutta se ei ole sama kuin funktion arvo siinä pisteessä. Hyppäysepäjatkuvuudessa funktiolla ei ole reaalista raja-arvoa. Tämä johtuu siitä, että toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa, mutta ne ovat erisuuret. Oleellisessa epäjatkuvuudessa funktiolla ei ole reaalista raja-arvoa ja lisäksi ainakaan toista toispuoleisista raja-arvoista ei ole olemassa.

Toisessa luvussa päästään käsiksi siihen, millaisia ovat funktion epäjatkuvuuspisteiden joukot. Ensin todistetaan, että mikä tahansa äärellinen joukko A on reaalifunktion epäjatkuvuuspisteiden joukko. Lopuksi saadaan tulos, että mikä tahansa numeroituva ääretön joukko on rajoitetun monotonisen funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko ja lisäksi monotonisen funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko on enintään numeroituva. Jotta saadaan todistetuksi lopulta se, että reaalifunktion epäjatkuvuuspisteiden joukko on numeroituva yhdiste suljetuista joukoista, niin tarvitaan funktion heilahtelun määritelmää. Joukkoa kutsutaan F_σ-joukoksi, jos se on numeroituvan monen suljetun joukon yhdiste.

Kaikki joukot $A \subset \mathbb{R}$ luokitellaan kahteen kategoriaan; ensimmäiseen ja toiseen. Joukkoa kutsutaan ensimmäisen kategorian joukoksi, jos se on numeroituva yhdiste ei missään tiheistä joukoista. Toisen kategorian joukoksi kutsutaan sellaista joukkoa, joka ei kuulu ensimmäiseen kategoriaan. Esimerkiksi numeroituva joukko on ensimmäisestä kategoriasta, koska jokainen piste on ei missään tiheä. Jokainen väli on toisesta kategoriasta. Toisen kategorian joukot ovat ylinumeroituvia, mutta ensimmäisen kategrian joukot eivät aina ole numeroituvia. Koska irrationaalilukujen joukko kuuluu toiseen kategoriaan voidaan siten todistaa, että irrationaalilukujen joukko ei ole F_σ-joukko ja siten se ei myöskään voi olla funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko.

Viimeisessä luvussa tarkastellaan epäjatkuvuutta ja jatkuvuutta kouluopetuksessa ja erityisesti differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssilla. Luvussa analysoidaan, miten eri oppikirjoissa jatkuvuus opetetaan ja miten koulukohtaisissa opetussuunnitelmissa huomioidaan funktion jatkuvuus. Tutkimuksessa ilmeni, että yleisin virhekäsitys oppilailla on, että funktio on epäjatkuva pisteessä, jossa sitä ei ole edes määritelty.

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Funktion jatkuvuus 2
1.1. Jatkuvuudesta yleisesti 2
1.2. Epäjatkuvuuksien luokittelu 3

Luku 2. Reaalifunktion epäjatkuvuus 8
2.1. Monotonisen funktion epäjatkuvuus 9
2.2. Funktion heilahtelu 12
2.3. Epäjatkuvuuspisteiden joukon koko 13
2.3.1. Ensimmäisen ja toisen kategorian joukot 13
2.3.2. Cantorin joukko 19

Luku 3. Funktion epäjatkuvuus ja jatkuvuus kouluopetuksessa 21
3.0.3. Lukion matematiikan opetussuunnitelmasta 21
3.0.4. Muita tutkimuksia 22
3.1. Jatkuvuus oppikirjoissa 23
3.1.1. Derivaatta-kurssi 23
3.1.2. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi 24
3.2. Tutkimusongelmat 24
3.3. Tutkimusmenetelmä 25
3.4. Kyselyn tulokset 25
3.5. Pohdintaa 29
3.5.1. Johtopäätökset 29
3.5.2. Jatkotutkimusehdotuksia 30

Liite A. Jatkuvuustesti 31

Kirjallisuutta 35

Johdanto

1700-luvulla reaalifunktiot olivat pääsääntöisesti alkeisfunktioista muodostettuja ja siten jatkuvia lukuun ottamatta korkeintaan yksittäisiä pisteitä. Silloin mikä tahansa käyrä määriteltiin funktioksi, tai jos jokaista x vastaa yksikäsitteinen äärellinen y, niin y on pisteen x funktio. Funktion määritelmä, joka nykyään on käytössä, on peräisin 1800-luvulta. Dirichlet määritti funktion seuraavasti: Funktio $f : A \to B$ koostuu kahdesta joukosta, määrittelyjoukosta A ja arvojoukosta B, ja säännöstä, joka määrittää jokaiselle $x \in A$ yksikäsitteisen $y \in B$. Dirichlet oli ensimmäinen matemaatikko, joka kiinnitti huomiota sellaisten funktioiden olemassaoloon, jotka ovat epäjatkuvia äärettömän monessa pisteessä.

Tämän kirjoitelman tarkoituksena on tutkia, millaisia ovat yhden muuttujan reaalifunktion epäjatkuvuuspisteiden joukot. Tutkielmassa käydään ensin läpi mitä jatkuvuus yleisesti tarkoittaa ja määritellään, millaisia erilaisia epäjatkuvuuksia on olemassa. Tutkielman lopussa tullaan mielenkiintoiseen tulokseen, että irrationaalilukujen joukko ei voi koskaan olla reaalifunktion epäjatkuvuuspisteiden joukko.

Lisäksi tutkitaan, mitä lukion integraali- ja differentiaalilaskennan jatkokurssilla olevat oppilaat käsittävät jatkuvuudesta. Tutkimuksen pääkohdat ovat: käsittävätkö oppilaat, että funktiolla voi olla äärettömän monta epäjatkuvuuskohtaa ja että epäjatkuvuuksia on erilaisia. Tutkimus on tehty pienelle oppilasmäärälle ja sen tarkoitus on tukea omaa opettajuuttani. Tutkimus on luonteeltaan tapaustutkimus, joten sen pohjalta ei voida tehdä mitään laajempia yleistyksiä.

LUKU 1

Funktion jatkuvuus

1.1. Jatkuvuudesta yleisesti

Intuitiivisesti funktio on jatkuva, jos sen arvot eivät muutu äkillisesti minkään pisteen ympäristössä.

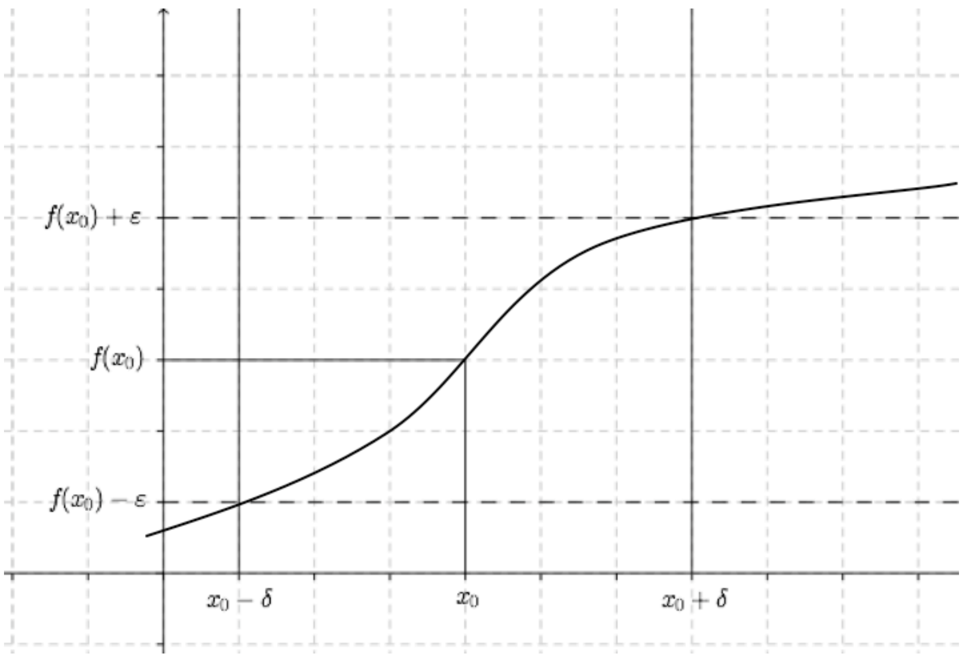
MÄÄRITELMÄ 1.1. Olkoot $I \subset \mathbb{R}$ väli ja piste $x_0 \in I$. Kuvaus $f : I \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

kun $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$.

Kuvaus f on jatkuva välillä I, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$

HUOMAUTUS 1.2.
(1) Funktion jatkuvuutta voidaan tarkastella vain niissä pisteissä, joissa funktio on määritelty.
(2) Luku δ riippuu funktiosta f ja erityisesti luvusta ε ja pisteestä x_0.
(3) Jatkuvuus tarkoittaa sitä, että olipa ε miten pieni tahansa, niin funktion f graafi jää suorien $y = f(x_0) + \varepsilon$ ja $y = f(x_0) - \varepsilon$ väliin pisteen x_0 lähellä.



(4) Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on epäjatkuva pisteessä $x_0 \in I$, jos f ei ole jatkuva pisteessä x_0. Toisin sanoen, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että jokaisella $\delta > 0$ löytyy piste $x \in I$ jolle $|x - x_0| < \delta$, mutta $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.
(5) Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos sen raja-arvo tässä pisteessä on olemassa ja on yhtä suuri funktion arvon kanssa tässä kohdassa.

Tällöin funktion vasemman- ja oikeanpuoleisten raja-arvojen on oltava yhtä suuret tässä pisteessä x_0. Eli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

(6) **Jatkuvuuden jonokarakterisaatio**: Funktio $f : I \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in I$ jos ja vain jos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

kaikilla jonoilla (x_n), joille pätee $x_n \in I$, $n = 1, 2, \ldots$ ja $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

1.2. Epäjatkuvuuksien luokittelu

Olkoon x_0 piste erään funktion f määrittelyalueesta. Jos x_0 on epäjatkuvuuspiste silloin se tarkoittaa, että joko $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ei ole olemassa tai raja-arvo on olemassa, mutta $f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$

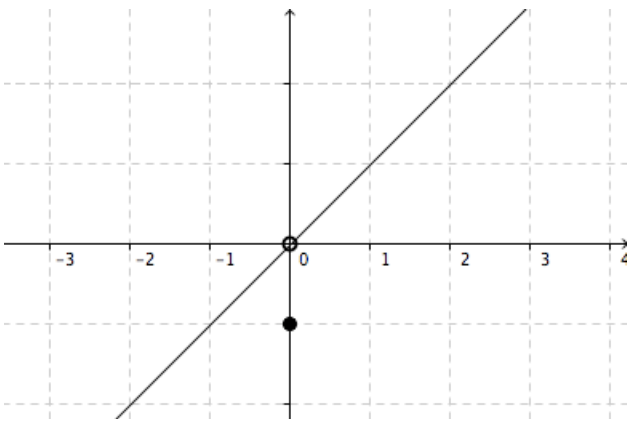
Määritelmä 1.3. **Poistuva epäjatkuvuus**: Yksinkertaisin tapaus on, että raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa, mutta ei ole yhtäkuin $f(x_0)$. Kutsukaamme tätä poistuvaksi epäjatkuvuudeksi pisteessä x_0.

Sana poistuva tulee siitä, että jos määräisimme uuden arvon funktiolle pisteessä x_0 epäjatkuvuus poistuisi. Tämä uusi arvo täytyy olla sama kuin $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Esimerkki 1.4. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{kun } x \neq 0, \\ -1 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on epäjatkuva pisteessä $x = 0$. Tämän funktion epäjatkuvuus voidaan poistaa muuttamalla sen arvo pisteessä $x = 0$ nollaksi.



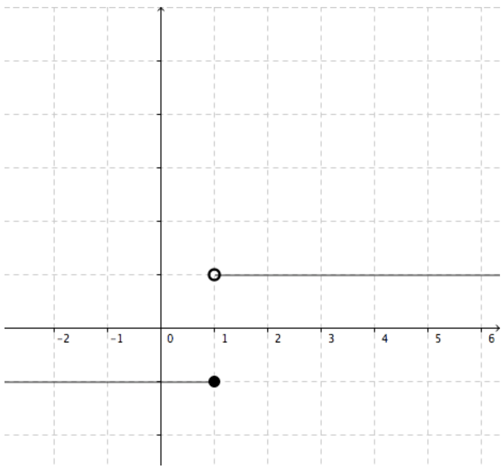
Määritelmä 1.5. **Hyppäysepäjatkuvuus**: Tässä tapauksessa $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ei ole olemassa, koska $\lim_{x \to x_0^-} f$ ja $\lim_{x \to x_0^+} f$ ovat olemassa, mutta ne eivät ole yhtäsuuret. Siis

olkoon $f(x_0)$ mikä arvo tahansa, niin piste x_0 on funktion epäjatkuvuuspiste. Toispuoleisten raja-arvojen erotus $|\lim\limits_{x\to x_0^-} f - \lim\limits_{x\to x_0^+} f|$ on epäjatkuvuuskohdan hyppäyksen pituus.

Esimerkki 1.6. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x > 1, \\ -1 & \text{kun } x \leq 1 \end{cases}$$

on epäjatkuva pisteessä $x = 1$. Funktion vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$ ja oikeanpuoleinen raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ovat erisuuret ja epäjatkuvuuskohdan hyppäyksen pituus on $|\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) - \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)| = |-1-1| = 2$.

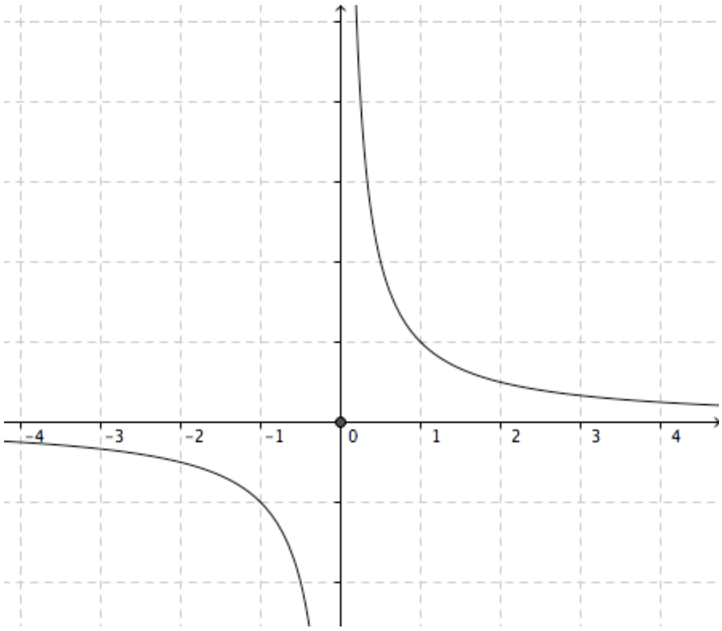


Määritelmä 1.7. **Oleellinen epäjatkuvuus**: Tässä tapauksessa raja-arvoa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ei ole olemassa ja ainakaan toista toispuoleisista raja-arvoista $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ja $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ei ole olemassa. Olkoon $f(x_0)$ mikä tahansa luku, niin x_0 on funktion epäjatkuvuuspiste. Tämä määritelmä kattaa siis kaiken muun mahdollisen epäjatkuvuuden poistuvan ja hyppäysepäjatkuvuuden lisäksi.

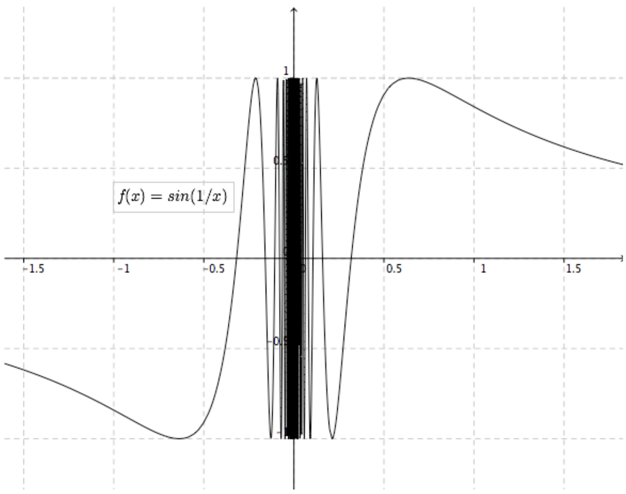
Esimerkki 1.8. Rajoittamaton epäjatkuvuus: Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{kun } x \neq 0, \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on epäjatkuva pisteessä $x = 0$. Toispuoleisia reaalisia ja äärellisiä raja-arvoja ei ole olemassa, koska kummassakin tapauksessa funktion arvo karkaa äärettömyyteen.



Esimerkki 1.9. Heilahteluepäjatkuvuus. Funktio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$, $f(0) = 0$ on jatkuva muualla paitsi origossa. Origo on epäjatkuvuuspiste, koska edes toispuolisia raja-arvoja ei origossa ole olemassa, vaan funktio heilahtelee sitä rajummin arvojen -1 ja 1 välillä, mitä lähempänä origoa ollaan.



Komentteja: Yllä olevat esimerkit ovat yksinkertaisia esimerkkejä oleellisesta epäjatkuvuudesta. Seuraavaksi käymme läpi kaksi hyvin tärkeää ja hieman vaikeampaa esimerkkiä. Dirichlet'n funktion epäjatkuvuus on oleellista epäjatkuvuutta ja Thomaen funktion epäjatkuvuus on poistuvaa epäjatkuvuutta. Thomaen funktio on erityisen hyvä esimerkki, koska siinä saamme jo jonkinlaista käsitystä siitä, millaisia voivat olla reaalifunktion epäjatkuvuuspisteidenjoukot.

Esimerkki 1.10. **Dirichlet´n funktio**. Funktio, joka on epäjatkuva kaikkialla. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \text{ on rationaaliluku,} \\ 0, & \text{jos } x \text{ on irrationaaliluku} \end{cases}$$

Todistetaan, että funktio $f(x)$ on epäjatkuva kaikkialla.

Todistus. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Jos $x_0 \in \mathbb{Q}$, niin on olemassa $y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ja $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Tällöin

$$|f(y) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

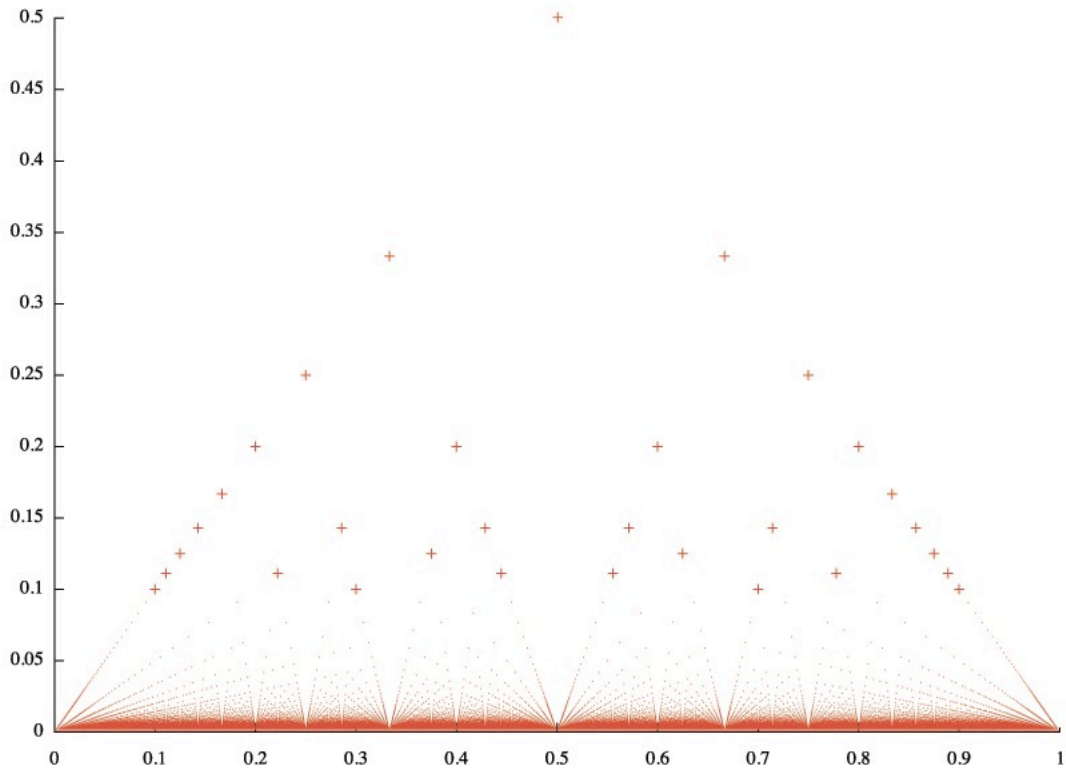
joten funktio f on epäjatkuva, kun $x_0 \in \mathbb{Q}$. Jos taas $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ niin on olemassa $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbb{Q}$. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon,$$

joten f on epäjatkuva, kun $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. □

Esimerkki 1.11. **Thomaen funktio**. Funktio, joka on jatkuva jokaisessa irrationaalipisteessä ja epäjatkuva jokaisessa rationaalipisteessä. Olkoon $T : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{jos } x = \frac{m}{n} \text{ missä } m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{ ja } \frac{m}{n} \text{ on supistetussa muodossa,} \\ 1, & \text{jos } x = 0, \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Todistus. Oletetaan, että x on irrationaaliluku. Tällöin $T(x) = 0$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Koska x ei ole rationaaliluku, ei ole olemassa sellaista lukua $m \in \mathbb{Z}$, jolle $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Olkoon $m_0 \in \mathbb{Z}$ siten, että $x \in]\frac{m_0}{n}, \frac{m_0+1}{n}[$. Olkoon $d_n = \min\{|x - \frac{m_0}{n}|, |x - \frac{m_0+1}{n}|\}$ ja olkoon $\delta_n = \min\{d_1, \ldots, d_n\}$. Huomaa, että $\delta_n < \frac{1}{n}$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Olkoon $\delta = \delta_{n_0}$. Silloin pisteen x δ-ympäristö ei sisällä yhtään rationaalilukua, jonka nimittäjä on pienempi tai yhtäsuuri kuin n. Otetaan mielivaltainen piste y, joka kuuluu pisteen x δ-ympäristöön eli välille $]x - \delta, x + \delta[$.

Oletetaan, että y on rationaaliluku, jolloin $y = \frac{m}{n} \neq 0$ (missä $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ sekä luvuilla m ja n ei ole yhteisiä tekijöitä). Silloin $T(y) = \frac{1}{n}$, missä $n > n_0$, joten $|T(y) - T(x)| = |T(y)| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Jos y on irrationaaliluku silloin $T(y) = 0$ ja siten $|T(y) - T(x)| = 0 < \varepsilon$.

Joka tapauksessa olkoon y rationaali- tai irrationaaliluku pätee, että kun y kuuluu pisteen x δ-ympäristöön, niin

$$|T(y) - 0| < \varepsilon$$

ja siten

$$|T(y) - T(x)| < \varepsilon.$$

Tästä seuraa, että funktio T on jatkuva mielivaltaisessa irrationaalipisteessä x.

Olkoon x rationaaliluku. Silloin $T(x) \neq 0$. Koska irrationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukuavaruudessa $\mathbb{R}$, on olemassa jono $\{z_n\}$ irrationaalilukuja niin, että $z_n \to x$. Jatkuvuuden jonokarakterisaation nojalla, jos T on jatkuva pisteessä x, silloin $T(z_n) \to T(x)$. Mutta kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $T(z_n) = 0$. Tämä merkitsisi sitä, että $T(x) = 0$, joka on ristiriita sille oletukselle, että $T(x) \neq 0$. Tästä seuraa, että funktio T ei voi olla jatkuva pisteessä x. $\square$

Kommentteja. Thomaen funktion jatkuvuus irrationaalipisteissä on varsin hämmästyttävä asia, koska intuitiivisesti funktiota tarkasteltaessa voisi luulla, että funktio on epäjatkuva kaikkialla kuten Dirichlet'n funktio.

LUKU 2

Reaalifunktion epäjatkuvuus

Tässä kappaleessa käydään ensin läpi, millaiset joukot voivat olla yhden muuttujan reaalifunktion epäjatkuvuuspisteiden joukkoja.Tarkastelu aloitetaan yksinkertaisimmasta tapauksesta eli äärellisestä joukosta reaalilukuja.

LAUSE 2.1. *Olkoon $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ äärellinen joukko reaalilukuja. Tällöin on olemassa rajoitettu funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka epäjatkuvuuspisteiden joukko on joukko A.*

TODISTUS. Olkoon f joukon A karakteristinen funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x = a_n \in A, \\ 0 & \text{muualla.} \end{cases}$$

Ensimmäiseksi pitää osoittaa, että funktio f on epäjatkuva joukossa A. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Olkoon $x_0 \in A$ ja valitaan $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ siten, että $x \notin A$. Tälläinen piste x löydetään, koska olkoon δ miten lähellä tahansa pistettä x_0, niin aina löydetään piste $x \notin A$, joka on lähempänä pistettä x_0 kuin δ. Nyt $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$ ja $|x - x_0| < \delta$. Siis funktio f on epäjatkuva pisteessä x_0.

Toiseksi pitää osoittaa, että funktio f on jatkuva joukon A komplementissa eli joukossa A^c. Olkoon $x_0 \in A^c$. Tällöin $f(x_0) = 0$. Valitaan $\delta = \min\{|x_0 - a_1|, \dots, |x_0 - a_n|\} > 0$. Olkoon x pisteen x_0 δ-ympäristöstä eli $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Nyt $|x_0 - x| < \delta$ ja $|f(x_0) - f(x)| = 0 < \varepsilon$.

LAUSE 2.2. *Jokaiselle numeroituvalle joukolle $A \subset \mathbb{R}$ on olemassa rajoitettu funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka epäjatkuvuuspisteiden joukko on joukko A.*

TODISTUS. Olkoon A numeroituva ääretön joukko, äärellinen tapaus on todistettu edellisessä lauseessa. Joten $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ on ääretön. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten että

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{kun } x = a_n \in A, \\ 0 & \text{muualla} \end{cases}$$

Ensimmäiseksi pitää osoittaa, että joukon A komplementti A^c on tiheä. Oletetaan, että A^c ei olekaan tiheä reaaliavaruudessa $\mathbb{R}$. Silloin löydetään väli $]b, c[$ siten, että $A^c \cap]b, c[= \emptyset$. Tästä seuraa, että väli $]b, c[$ sisältyy joukkoon A eli $]b, c[\subset A$. Mutta koska A on numeroituva joukko, niin se ei sisällä yhtään kokonaista väliä, koska jokainen väli on ylinumeroituva. Tämä johtaa ristiriitaan eli ei voi olla $]b, c[\subset A$. Joten joukon A^c täytyy olla tiheä.

Olkoon $x \in A$, jolloin $f(x) \neq 0$. Koska joukon A komplementti on tiheä, on olemassa jono $\{z_n\}$ joukon A komplementin lukuja niin, että $z_n \to x$. Jatkuvuuden jonokarakterisaation nojalla, jos $f(x)$ on jatkuva pisteessä x, niin $f(z_n) \to f(x)$.

Mutta kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = 0$. Tämä merkitsisi sitä, että $f(x) = 0$, joka on ristiriita oletuksen kanssa. Siten funktio f ei voi olla jatkuva pisteessä x.

Seuraavaksi pitää osoittaa, että funktio on jatkuva joukon A komplementissa. Olkoon $x_0 \in A^c$. Silloin $f(x_0) = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $n \in \mathbb{N}$ siten että $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Silloin löydetään pisteen x_0 ympäristö $N =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, missä $\delta = \min\{|x_0 - a_1|, \dots, |x_0 - a_n|\} > 0$ niin, että $a_1 \notin N, a_2 \notin N, \dots, a_n \notin N$. Riittää osoittaa, että kun $x \in N$ niin $0 \leq f(x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(1) Jos $x \notin A$, niin $f(x) = 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
(2) Jos $x \in A$, niin $f(x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ sillä $x = a_k$ jollakin $k > n$.

Nyt funktio f on jatkuva joukon A komplementissa ja epäjatkuva joukossa A, joten joukon A täytyy olla funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko.

□

2.1. Monotonisen funktion epäjatkuvuus

Kun kysytään, kuinka suuri on monotonisen funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko:vastaus on, että ei kovin suuri.

LAUSE 2.3. *Mille tahansa numeroituvalle joukolle $A \subset \mathbb{R}$ löytyy rajoitettu monotonisesti kasvava funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka epäjatkuvuuspisteiden joukko on joukko A.*

TODISTUS. Olkoon joukko $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ numeroituva ja ääretön. Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seuraavasti:

Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0.x_1x_2x_3 \cdots x_n \cdots$ missä $x_i = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < a_i, \\ 1, & \text{jos } x \geq a_i \end{cases}$

Funktio $f(x)$ on siis ääretön desimaaliluku jonka numerot x_i ovat 0 tai 1 riippuen siitä, onko $x < a_i$ tai $x \geq a_i$. Jotta voidaan osoittaa, että mikä tahansa numeroituva ääretön joukko on funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko, täytyy seuraavat kohdat perustella.

(1) f on rajoitettu, koska $0 \leq f(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
(2) Jos $x \leq y$, niin $x_i \leq y_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Antiteesi: Jos $x_i > y_i$ niin $x_i = 1$ ja $y_i = 0$. Mutta tällöin $y < a_i \leq x$, mikä on ristiriita. Joten $x_i \leq y_i$, kun $x \leq y$. Väitteestä seuraa myös, että funktio f on kasvava.
(3) Olkoon $x < y$. Silloin pätee $f(x) = f(y)$ jos ja vain jos väli $(x, y]$ ei sisällä pisteitä joukosta A

   "$\Rightarrow$"Jos $f(x) = f(y)$, niin $x_i = y_i$. Oletus $x < y$ pätee vain, jos $a_i \leq x < y$ tai $x < y < a_i$. Joten väli $(x, y]$ ei sisällä pisteitä joukosta A.

   "$\Leftarrow$"Koska $x < y$ ja väli $(x, y]$ ei sisällä pisteitä joukosta A, niin tällöin jokaisella i pätee $a_i \leq x < y$ tai $x < y < a_i$, joten $x_i = y_i$. Tästä seuraa, että $f(x) = f(y)$.
(4) Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Valitaan mikä tahansa piste $n_0 \in \mathbb{N}$, ja olkoon $\delta = \min\{|x - a_i| : a_i \neq x, i = 1, 2, \dots, n_0\}$. Silloin kaikilla y, jotka kuuluvat pisteen x δ-ympäristöön, ensimmäiset n_0 desimaalia luvuista $f(x)$ ja $f(y)$ ovat yhtäsuuret.

   Olkoon piste $y \in]x - \delta, x + \delta[$.

Jos $a_i > x$ jollakin $i = 1, 2, \dots, n_0$, niin $a_i \geq x + \delta$. Tästä seuraa, että $a_i > y$, joten $x_i = y_i$.

Jos $a_i < x$ jollakin $i = 1, 2, \dots, n_0$, niin $a_i \leq x - \delta$. Tästä seuraa, että $a_i \leq y$, joten $x_i = y_i$.

(5) Funktio f on jatkuva joukon A komplementissa A^c.

Oletetaan, että $x \in A^c$.

Tapaus 1. Oletetaan, että piste x ei ole joukon A kasautumispiste. Silloin on olemassa $\delta > 0$ siten, että pisteen x δ-ympäristö ei sisällä yhtään pistettä joukosta A. Silloin kohdan (4) perusteella f on vakio jossain pisteen x ympäristössä. Täten f on jatkuva pisteessä x.

Tapaus 2. Oletetaan, että piste x on joukon A kasautumispiste. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan luku $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $1/10^{n_0} < \varepsilon$. Olkoon $\delta = \min\{|x - a_i| : i = 1, 2, \dots, n_0\}$. Kohdan (4) nojalla ehdosta $|x - y| < \delta$ seuraa, että ensimmäiset n_0 desimaalia luvuista $f(x)$ ja $f(y)$ ovat yhtäsuuret, joten ehdosta $|x - y| < \delta$ seuraa, että $|f(x) - f(y)| < 1/10^{n_0} < \varepsilon$. Täten funktio f on jatkuva pisteessä x_0.

(6) Pitää osoittaa vielä, että f on epäjatkuva kaikissa joukon A pisteissä. Olkoon $x = a_i \in A$. Jos $y < x$, niin $y_k \leq x_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $y_i = 0$, $x_i = 1$. Kohdan (5) perusteella saadaan, että $f(y) + \frac{1}{10^i} \leq f(x)$. Tällöin on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{y \to x^-} f(y) < f(x)$, koska f on kasvava. Tästä seuraa, että funktio f on epäjatkuva kaikissa joukon A pisteissä.

□

Tähän mennessä on nyt todistettu, että numeroituva ääretön joukko on monotonisesti kasvavan funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko. Täytyy vielä todistaa, että äärellinen numeroituva joukko $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ on monotonisesti kasvavan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ epäjatkuvuuspisteiden joukko.

Todistus. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} b_0, & \text{kun } x < a_1, \\ b_1, & \text{kun } a_1 \leq x < a_2, \\ b_2, & \text{kun } a_2 \leq x < a_3, \\ \vdots & \\ b_{n-1}, & \text{kun } a_{n-1} \leq x < a_n, \\ b_n, & \text{kun } x \geq a_n, \end{cases}$$

jossa $b_0 < b_1 < \cdots < b_n$. Funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko on tällöin $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Osoitetaan, että funktio on epäjatkuva pisteessä $x_0 \in A$ eli $x_0 = a_k$, missä $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Yhtälö $|\lim\limits_{x \to x_0^-} f - \lim\limits_{x \to x_0^+} f| > 0$ pätee, koska $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x_0) = b_{k-1}$ ja $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x_0) = b_k$. Tällöin funktio $f(x)$ ei voi olla jatkuva joukon A pisteissä.

Osoitetaan, että funktio on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$. Tällöin $f(x_0) = b_k$ missä $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Valitaan $\delta = \min\{|x_0 - a_1|, \dots, |x_0 - a_n|\}$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Nyt $|x_0 - x| < \delta$ ja $|f(x_0) - f(x)| = |b_n - b_n| = 0 < \varepsilon$.

□

LAUSE 2.4. *Monotonisella funktiolla on vain hyppäysepäjatkuvuutta.*

TODISTUS. Monotonisella funktiolla on olemassa toispuoleiset raja-arvot $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ja $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ja $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, joten funktiolla ei voi olla oleellista epäjatkuvuutta. Lisäksi monotonisella funktiolla ei voi olla poistuvaa epäjatkuvuutta, koska jos toispuoleiset raja-arvot ovat yhtäsuuret, on funktio jatkuva.

□

MÄÄRITELMÄ 2.5. Olkoon $f(x+0) := \lim_{y \to x^+} f(y)$ ja $f(x-0) := \lim_{y \to x^-} f(y)$. Nyt jos $f(x_0+0)$ ja $f(x_0-0)$ ovat äärellisiä voidaan sanoa erotusta $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ hyppäykseksi pisteessä x_0. On selvää, että jos funktio on jatkuva pisteessä x_0, niin hyppäys siinä pisteessä on nolla. Ja lisäksi jos funktio ei ole jatkuva pisteessä x_0, niin hyppäys voi olla nolla pisteessä x_0 jos $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$.

LAUSE 2.6. ***Frodan lause**. Olkoon f monotoninen funktio, joka on määritelty välillä I. Tällöin funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko on enintään numeroituva.*

TODISTUS. Olkoon $I := [a, b]$ väli, jossa f on määritelty ja kasvava. Siten saadaan $f(a) \leq f(a+0) \leq f(x-0) \leq f(x+0) \leq f(b-0) \leq f(b)$ jokaiselle $a \leq x \leq b$. Olkoon $\alpha > 0$ ja olkoon $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ n pistettä välillä I siten, että funktion hyppäys niissä pisteissä on suurempi tai yhtäsuuri kuin α: $f(x_i+0) - f(x_i-0) \geq \alpha, i = 1, 2, \ldots, n$. Saadaan $f(x_i+0) \leq f(x_{i+1}-0)$ tai $f(x_{i+1}-0) - f(x_i+0) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Silloin

$$f(b)-f(a) \geq f(x_n+0)-f(x_1-0) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i+0)-f(x_i-0)]+\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i+1}-0)-f(x_i+0)]$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}[f(x_i+0) - f(x_i-0)] \geq n\alpha$$

ja siten $n \leq \frac{f(b)-f(a)}{\alpha}$.

Koska $f(b) - f(a) < \infty$ saadaan, että pisteiden lukumäärä, jossa hyppäys on suurempi kuin α, on äärellinen.

Määritellään seuraavat joukot:

$$S_1 := \{x : x \in I, f(x+0) - f(x-0) \geq 1\}$$

$$S_n := \{x : x \in I, \frac{1}{n} \leq f(x+0) - f(x-0) < \frac{1}{n-1}\}, n \geq 2$$

Jokainen joukko S_n on äärellinen. Yhdiste $S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$ sisältää kaikki pisteet missä hyppäys on positiivinen ja siten yhdiste sisältää myös kaikki epäjatkuvuuspisteet. Koska jokainen $S_i, i = 1, 2, \ldots,$ on enintään numeroituva saadaan, että S on enintään numeroituva.

□

2.2. Funktion heilahtelu

Aluksi voi olla hieman hankala nähdä, miksi tämä kappale liity aiheeseen, mutta tarvitsemme seuraavia määritelmiä yhden erittäin tärkeän lauseen todistamiseen. Määritellään funktion heilahtelu pisteessä, jotta nähdään, kuinka epäjatkuva funktio on siinä pisteessä. Ensin määritellään funktion heilahtelu joukossa ja sitten käytetään sitä määritelmää määrittämään funktion heilahtelua tietyssä pisteessä. Merkitään funktion f määrittelyjoukkoa symbolilla $D(f)$.

MÄÄRITELMÄ 2.7. Olkoon $f : D(f) \to \mathbb{R}$ funktio ja joukko $A \subseteq D(f)$. Jos f on rajoitettu joukossa A, määritellään funktion f heilahtelu $\omega_f(A)$ joukossa A

$$\omega_f(A) = \sup f(A) - \inf f(A).$$

Jos f on rajoittamaton joukossa A, määritellään $\omega_f(A) = +\infty$.

MÄÄRITELMÄ 2.8. Olkoon piste $x_0 \in D(f)$. Määritellään funktio $\omega_{f,x_0}(\delta) = \omega_f(N_\delta(x_0) \cap D(f))$, missä $N_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

HUOMAUTUS 2.9. (1) Jos $A \subseteq B$, niin $\omega_f(A) \leq \omega_f(B)$. Jos A on joukon B osajoukko, niin täytyy olla $\sup f(A) - \inf f(A) \leq \sup f(B) - \inf f(B)$.
(2) $\omega_{f,x_0} : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on kasvava. Määritelmän perusteella jos $\delta_1 < \delta_2$, niin $(N_{\delta_1} \cap D(f)) \subset (N_{\delta_2} \cap D(f))$. Siten $\omega_f(N_{\delta_1} \cap D(f)) \leq \omega_f(N_{\delta_2} \cap D(f))$ edellisen kohdan nojalla.
(3) Kaikilla $x_0 \in D(f)$, $\lim_{\delta \to 0^+} \omega_{f,x_0}(\delta)$ on olemassa. Tämä pätee, koska $\omega_{f,x_0}(\delta)$ on kasvava ja alhaalta rajoitettu.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Jokaiselle $x_0 \in D(f)$ funktion f heilahtelu pisteessä x_0 on $\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_{f,x_0}(\delta) = \inf_{\delta > 0} \omega_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

LEMMA 2.11. *Kaikilla $x_0 \in D(f)$ pätee*
(1) $\omega_f(x_0) \geq 0$
(2) *Funktio f on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos $\omega_f(x_0) = 0$.*

TODISTUS. (1) Koska $\omega_{f,x_0}(\delta) \geq 0$ kaikilla $\delta > 0$, niin $\omega_f(x_0) \geq 0$.
(2) "$\Leftarrow$"Oletetaan ensin, että $\omega_f(x_0) = 0$, ja olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\omega_f(x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega_{f,x_0}(\delta) = 0$, on olemassa $\delta_0 > 0$ siten, että $\omega_{f,x_0}(\delta) < \varepsilon$ kaikilla $0 < \delta < \delta_0$.
"$\Rightarrow$"Oletetaan, että f on jatkuva pisteessä x_0 ja olkoon $\varepsilon > 0$. On olemassa $\delta > 0$ niin, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

jos $x_0 - \delta \leq x$, $x' \leq x_0 + \delta$. Kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x') - f(x_0)| < \varepsilon,$$

joten

$$\omega_f(x_0 - h, x_0 + h) \leq \varepsilon$$

jos $h < \delta$; täten $\omega_f(x_0) = 0$.

□

LAUSE 2.12. *Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ epäjatkuvuuspisteiden joukko on numeroituva yhdiste suljetuista joukoista.*

TODISTUS. Olkoon $f : D(f) \to \mathbb{R}$.

Kaikilla $\varepsilon > 0$ olkoon $S_\varepsilon(f) = \{x \in D(f) : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$. Osoitetaan, että $S_\varepsilon(f)$ on suljettu. Osoitetaan ensin, että $\{x : \omega_f(x) < \varepsilon\}$ on avoin. Olkoon $A = \{x : \omega_f(x) < \varepsilon\}$ ja olkoon $x_0 \in A$. Nyt yritetään löytää U, joka on pisteen x_0 ympäristö siten, että U on joukon A osajoukko eli $\omega_f(x) < \varepsilon$ kaikilla $x \in U$. Olkoon $\omega_f(x_0) = \alpha < \varepsilon$ ja olkoon $\beta \in]\alpha, \varepsilon[$.

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta \to 0+} \omega_{f,\delta}(x_0) = \lim_{\delta \to 0} (\sup_{]x_0-\delta, x_0+\delta[} f - \inf_{]x_0-\delta,x_0+\delta[} f)$$

Määritelmän 2.10 ja sen, että $\omega_f(x_0) \leq \omega_{f,\delta}(x_0) \leq \beta$ (δ on pieni) mukaan löydämme sellaisen $\delta > 0$ siten, että $|f(u) - f(v)| \leq \sup f - \inf f = \omega_{f,\delta}(x_0) \leq \beta$ kaikille $u, v \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Olkoon $U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ja $x \in U$. Koska U on avoin, on olemassa $\delta_1 < \delta$ niin, että $]x - \delta_1, x + \delta_1[\subset U$. Siten

$$\begin{aligned} \omega_f(x) \leq \omega_{f,\delta_1}(x) &\leq \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in]x - \delta_1, x + \delta_1[\} \\ &\leq \sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in U\} \leq \beta < \varepsilon \end{aligned}$$

joten $x \in A$. Tämä osoittaa, että A on avoin ja tästä seuraa, että joukon A komplementti on suljettu. Joten $S_\varepsilon(f)$ on suljettu.

Pitää osoittaa vielä, että $S_1(f) \subseteq S_{1/2}(f) \subseteq S_{1/3}(f) \subseteq \cdots \subseteq S_{1/n}(f) \subseteq \ldots$ ja että yhdiste $\bigcup_{n=1}^\infty S_{\frac{1}{n}}(f)$ on funktion f epäjatkuvuuspisteiden joukko. $S_1(f) \subseteq S_{1/2}(f) \subseteq S_{1/3}(f) \subseteq \cdots \subseteq S_{1/n}(f) \subseteq \ldots$ ovat suljettuja joukkoja.

(1) Jos $x_0 \in S_\varepsilon(f)$, niin f on epäjatkuva pisteessä x_0. Lemmassa 2.11 osoitettiin, että funktio f on jatkuva pisteessä x_0 jos ja vain jos $\omega_f(x_0) = 0$. Joten funktio ei voi olla jatkuva pisteessä x_0, koska $x_0 \in S_\varepsilon(f) = \{x \in D(f) : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ ja $\varepsilon > 0$.

(2) Jos f on epäjatkuva pisteessä x_0, niin löytyy jokin $\varepsilon > 0$ siten, että $x_0 \in S_\varepsilon(f)$. Koska f on epäjatkuva pisteessä x_0, niin tiedetään, että $\omega_f(x_0) > 0$. Koska $\varepsilon > 0$, niin voidaan asettaa ε välille $\frac{1}{1+n} < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$. Tällöin $S_{\frac{1}{n}}(f) \subseteq S_\varepsilon(f) \subseteq S_{\frac{1}{n+1}}(f)$, joten $x_0 \in S_{\frac{1}{n+1}}(f)$.

□

MÄÄRITELMÄ 2.13. Joukkoa kutsutaan F_σ joukoksi, jos se on numeroituvan monen suljetun joukon yhdiste.

Kommetteja: F_σ joukko ei ole välttämättä suljettu. Esimerkiksi joukko $\bigcup_{n=2}^\infty [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] =]0, 1[$ on avoin, mutta jokainen joukko $[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ on suljettu. Lause 2.12 osoittaa sen, että funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ epäjatkuvuuspisteiden joukon täytyy olla F_σ joukko. Jotta voidaan osoittaa, että mikä tahansa reaalilukujen osajoukko ei ole funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko täytyy osoittaa, että mikä tahansa reaalilukujen osajoukko ei ole F_σ joukko.

2.3. Epäjatkuvuuspisteiden joukon koko

2.3.1. Ensimmäisen ja toisen kategorian joukot.

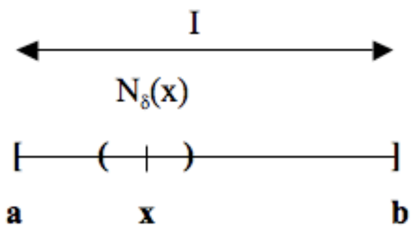
MÄÄRITELMÄ 2.14. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on ei missään tiheä, jos sen sulkeuma $\overline{A}$ ei sisällä yhtään epätyhjää väliä.

Huomaa, että joukko A on ei missään tiheä, jos sen sulkeuma $\overline{A}$ ei sisällä välejä. Joten suljettu joukko joko sisältää välin tai se on ei missään tiheä.

Esimerkki 2.15. (1) Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on ei missään tiheä, koska sen sulkeuma ei sisällä epätyhjää väliä.
(2) Joukko $A =]0, 1[$ ei ole ei missään tiheä, koska sen sulkeuma on väli $[0, 1]$.

Lemma 2.16. *A on ei missään tiheä jos ja vain jos jokaiselle välille I on suljettu väli $J \subseteq I$ niin, että $J \cap A = \emptyset$.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Oletetaan, että A ei ole missään tiheä. Olkoon I väli siten, että $]a, b[\subseteq I \subseteq [a, b]$ missä $a < b$. Koska A ei ole missään tiheä, väli $]a, b[$ ei ole joukon A sulkeuman osajoukko. Silloin on olemassa $x \in]a, b[\setminus \overline{A}$. Koska piste x kuuluu joukon A sulkeuman komplementtiin, joka on avoin, on olemassa $\delta > 0$ niin, että $(x-\delta, x+\delta) \subseteq \overline{A}^c$. Valitsemalla δ^1 sopivan pieneksi, meillä on $[x - \delta^1, x + \delta^1] \subseteq \overline{A}^c \cap I$. Valitaan $J = [x - \delta^1, x + \delta^1]$.



"$\Leftarrow$"Jokaiselle välille I on suljettu väli $J \subseteq I$ niin, että $J \cap A = \emptyset$. Tällöin väliltä J löydetään pisteitä, jotka eivät kuulu joukkoon $\overline{A}$, ja siten myös väliltä I löydetään pisteitä, jotka eivät kuulu joukkoon $\overline{A}$, joten joukon A sulkeuma ei sisällä väliä. Tällöin A on ei missään tiheä.

□

Lause 2.17. *Olkoon joukko A ei missään tiheä. Tällöin myös joukon A osajoukko $B \subset A$ on ei missään tiheä.*

Todistus. Antiteesi: Joukko B ei ole ei missään tiheä. Tällöin $\overline{B}$ sisältää epätyhjän välin. Koska joukko A on ei missään tiheä, niin $\overline{A}$ ei sisällä väliä. Koska $B \subset A$, niin $\overline{B} \subset \overline{A}$. Tämä on ristiriita, koska $\overline{A}$ ei sisällä väliä, joten B on ei missään tiheä.

□

Lause 2.18. *Olkoon $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ei missään tiheitä joukkoja. Silloin yhdiste $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ on myös ei missään tiheä.*

Todistus. Olkoon väli I avoin reaaliavaruudessa $\mathbb{R}$. Täytyy löytää suljettu väli $J \subset I$ siten, että $J \cap A_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Koska A_1 on ei missään tiheä, niin on olemassa suljettu väli $I_1 \subseteq I$ siten, että $I_1 \cap A_1 = \emptyset$. Nyt A_2 on myös ei missään tiheä, niin löydetään suljettu väli $I_2 \subseteq I_1$ niin, että $A_2 \cap I_2 = \emptyset$. Jatkamalla tällä tavalla saadaan suljettuja välejä

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n$$

niin, että $i = 1, \dots, n$, $A_i \cap I_i = \emptyset$. Koska $I_n \subset I_i$ kaikille $i = 1, \dots, n$, niin saadaan $A_i \cap I_n = \emptyset$. Joten

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \cap I_n = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap I_n) = \bigcup_{i=1}^{n} \emptyset = \emptyset,$$

joka oli se mitä haluttiin todistaa.

□

MÄÄRITELMÄ 2.19. Joukkoa $A \subset \mathbb{R}$ kutsutaan **ensimmäisen kategorian** joukoksi, jos se on numeroituva yhdiste ei missään tiheistä joukoista; muutoin sitä kutsutaan **toisen kategorian** joukoksi.

ESIMERKKI 2.20.
(1) Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on ensimmäisestä kategoriasta, koska jokainen piste $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \dots$ on ei missään tiheä ja pisteiden yhdiste on numeroituva joukko $\mathbb{N}$.
(2) Väli $[0, 1]$ on toisesta kategoriasta. Tämä seuraa seuraavasta lauseesta.

Kommentteja: Numeroituva joukko A on ensimmäisestä kategoriasta, koska jokainen yksittäinen piste $\{x\}$ on ei missään tiheä. Erityisesti rationaalilukujen joukko on ensimmäisestä kategoriasta. Siten jos toisen kategorian joukkoja on olemassa, niiden täytyy olla ylinumeroituvia. Mutta toisaalta on olemassa ylinumeroituvia joukkoja, jotka eivät ole toisesta kategoriasta, esimerkiksi Cantorin joukko. Seuraavaksi esittelen yhden tärkeimmistä lauseista.

LAUSE 2.21. ***(Bairen kategorian lause reaaliavaruudessa)*** *Jokainen väli on toisesta kategoriasta.*

TODISTUS. Oletetaan, että I on väli, $]a, b[\subseteq I \subseteq [a, b]$ missä $a < b$. Antiteesinä oletamme, että I on ensimmäisestä kategoriasta. Silloin $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ missä jokainen A_n on ei missään tiheä.

Koska A_1 on ei missään tiheä, Lemman 2.16 mukaan on olemassa suljettu väli $J_1 \subseteq I$ siten, että $J_1 \cap A_1 = \emptyset$. Samalla A_2 on ei missään tiheä ja on olemassa suljettu väli $J_2 \subseteq J_1$ niin että $J_2 \cap A_2 = \emptyset$. Jatkamalla tällä tavalla, muodostuu jono $\{J_n\}$ suljettuja välejä

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \dots$$

ja kaikilla i, $J_i \cap A_i = \emptyset$.

Cantorin sisäkkäisten välien lauseen mukaan on olemassa $x_0 \in \mathbb{R}$ siten että

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n.$$

Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in J_n$, joten on $x_0 \notin A_n$. Täten $x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = I$. Mutta $x_0 \in I$, koska kaikilla n, $x_0 \in J_n \subseteq I$. Tämä on ristiriita, joten I on toisesta kategoriasta.

□

LEMMA 2.22.
(1) *Ensimmäisen kategorian joukon jokainen osajoukko kuuluu ensimmäiseen kategoriaan.*
(2) *Jokainen joukko joka sisältää toisen kategorian joukon, on toisesta kategoriasta.*
(3) $\mathbb{R}$ *on toisesta kategoriasta.*

(4) *Kahden ensimmäisen kategorian joukon yhdiste on ensimmäisen kategorian joukko. Itse asiassa numeroituvan monen ensimmäisen kategorian joukkon yhdiste on ensimmäisen kategorian joukko.*
(5) *Irrationaalilukujen joukko on toisesta kategoriasta.*

Todistus. (1) Olkoon joukko A ensimmäisestä kategoriasta. Tällöin $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ missä jokainen A_n ei ole missään tiheä. Olkoon $B \subset A$. Tästä seuraa, että $B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B \cap A_n)$. Riittää osoittaa, että leikkaus $B \cap A_n$ on ei missään tiheä. Lauseen 2.17 mukaan jos jokainen A_n on ei missään tiheä, niin silloin leikkaus $B \cap A_n$ on myöskin ei missään tiheä. Tästä seuraa, että myös joukko B on ensimmäisestä kategoriasta.
(2) Olkoon joukko A niin, että se sisältää toisen kategorian joukon B eli $B \subset A$. Jos joukko A olisikin ensimmäisestä kategoriasta, tällöin kohdan (1) mukaan myös joukko B olisi ensimmäisestä kategoriasta. Tämä on ristiriita, joten joukon A täytyy olla toisesta kategoriasta.
(3) Lauseen 2.21 mukaan jokainen väli on toisesta kategoriasta ja reaalilukujen joukko sisältää välin $]0,1[$ eli $]0,1[\subset \mathbb{R}$. Joten edellisen kohdan perusteella reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on toisesta kategoriasta.
(4) Olkoon A ja $\hat{A}$ ensimmäisen kategorian joukkoja. Tällöin $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ja $\hat{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n$, jossa A_n ja $\hat{A}_n$ ovat ei missään tiheitä joukkoja. Pitää siis osoittaa, että joukkojen yhdiste $A \cup \hat{A}$ on ensimmäisestä kategoriasta.

$$A \cup \hat{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup \hat{A}_n)$$

Lauseen 2.18 mukaan jos A_n ja $\hat{A}_n$ ovat ei missään tiheitä joukkoja niin täytyy niiden yhdistekin $A_n \cup \hat{A}_n$ olla ei missään tiheä joukko. Joten yhdiste $A \cup \hat{A}$ on ensimmäisestä kategoriasta.
(5) Antiteesi: Irrationaalilukujen joukko on ensimmäisen kategorian joukko. Tällöin rationaalilukujen ja irrationaalilukujen joukot ovat molemmat ensimmäisen kategorian joukkoja. Edellisen kohdan perusteella nyt niiden yhdistekin kuuluisi ensimmäiseen kategoriaan, mutta niiden yhdiste on koko reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Tämä on ristiriita, sillä reaalilukujen joukko kuuluu toiseen kategoriaan. Tästä seuraa, että irrationaalilukujen joukko on toisesta kategoriasta.

□

Lemma 2.23. (1) *Suljettu joukko A joko sisältää välin tai se on ei missään tiheä.*
(2) *F_σ-joukko joko sisältää välin tai se on ensimmäisestä kategoriasta.*

Todistus. (1) Olkoon A suljettu joukko. Jos se on ei missään tiheä, niin Määritelmän 2.14 mukaan joukko A ei sisällä yhtään väliä.
(2) Olkoon A F_σ-joukko, jolloin $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, missä F_i on suljettu. Jos A ei sisällä väliä, niin mikään F_i ei sisällä väliä. Tästä seuraa, että F_i on ei missään tiheä ja A on ensimmäisestä kategoriasta. Jos joukko A sisältää välin I, niin koska väli I kuuluu toiseen kategoriaan ja $I \subset A$, on A toisen kategorian joukko. Siten A ei kuulu ensimmäiseen kategoriaan.

□

SEURAUS 2.24. *Irrationaalilukujen joukko ei ole F_σ joukko.*

TODISTUS. Tämä johtuu siitä, että irrationalilukujen joukko ei sisällä välejä ja se on toisesta kategoriasta.

Viimein voidaan todistaa haluttu tulos.

SEURAUS 2.25. *Ei ole olemassa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka epäjatkuvuuspisteiden joukko olisi irrationaalilukujen joukko.*

TODISTUS. Lauseen 2.12 mukaan funktion epäjatkuvuuspisteiden joukko täytyy olla F_σ-joukko, ja edellisessä seurauksessa todettiin, että irrationaalilukujen joukko ei ole F_σ-joukko. Joten ei voi olla olemassa sellaista funktiota, jonka epäjatkuvuuspisteiden joukko olisi irrationaalilukujen joukko.

Seuraus on todellakin uskomaton. Voimme vain ihmetellä sitä faktaa, että on olemassa funktioita, jotka ovat jatkuvia irrationaalipisteissä ja epäjatkuvia rationaalipisteissä. Mutta EI ole olemassa sellaista funktiota joka olisi jatkuva rationaalipisteissä ja epäjatkuva irrationaalipisteissä.

Vihdoin voimme todistaa Lauseen 2.12 toisenkin suunnan.

LAUSE 2.26. *Olkoon $A \subseteq \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka epäjatkuvuuspisteiden joukko on joukko $A \Leftrightarrow A$ on F_σ joukko.*

TODISTUS. "$\Rightarrow$"on todistettu Lauseessa 2.12

"$\Leftarrow$"Olkoon joukko $H \subset \mathbb{R}$ siten, että $\mathbb{R} \backslash H$ on F_σ joukko. H voidaan kirjoittaa muotoon

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

joista jokainen G_k on avoin. Voidaan olettaa, että $G_1 = \mathbb{R}$ ja että $G_i \supset G_{i+1}$ jokaiselle $i \in \mathbb{N}$.

Olkoon $\{\alpha_k\}$ ja $\{\beta_k\}$ jonoja positiivisia lukuja, joista kumpikin lähestyy nollaa ja

$$\alpha_k > \beta_k > \alpha_{k+1}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Määritetään funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \in H \\ \alpha_k, & \text{jos } x \in (G_k \backslash G_{k+1}) \cap \mathbb{Q} \\ \beta_k, & \text{jos } x \in (G_k \backslash G_{k+1}) \cap \ (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Osoitetaan, että f on jatkuva jokaisessa joukon H pisteessä ja epäjatkuva jokaisessa joukon $\mathbb{R} \backslash H$ pisteessä.

Olkoon $x_0 \in H$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan n siten, että $\alpha_n < \varepsilon$. Koska

$$x_0 \in H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

nähdään, että $x_0 \in G_n$. Silloin joukko G_n on avoin ja on olemassa $\delta > 0$ niin, että $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset G_n$ Funktion f määritelmästä joukossa G_n saadaan

$$0 \leq f(x) \leq \alpha_n < \varepsilon$$

kaikilla $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset G_n$. Joten $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| < \varepsilon$ jos $|x - x_0| < \delta$. Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0.

Olkoon $x_0 \in \mathbb{R} \backslash H$. Silloin on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $x_0 \in G_k \backslash G_{k+1}$. Joten $f(x_0) = \alpha_k$ tai $f(x_0) = \beta_k$. Oletetaan, että $f(x_0) = \alpha_k$. Jos x_0 on sisäpiste joukosta $G_k \backslash G_{k+1}$, silloin x_0 on kasautumispiste joukosta

$$\{x : x \in (G_k \backslash G_{k+1}) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})\} = \{x : f(x) = \beta_k\},$$

joten f on epäjatkuva pisteessä x_0.

Todistus on samantapainen reunapisteille $x_0 \in G_k \backslash G_{k+1}$. Oletetaan, että $f(x_0) = \alpha_k$. Joukon $\mathbb{R} \backslash (G_k \backslash G_{k+1})$ pisteet ovat mielivaltaisen lähellä pistettä x_0. Näissä pisteissä f saa arvoja joukosta

$$S = \{0\} \cup \bigcup_{i \neq k} \alpha_i \cup \bigcup_{j \neq k} \beta_j.$$

Ainoa kasautumispiste tässä joukossa on nolla. Siten S on suljettu. Erityisesti α_k ei ole kasautumispiste tästä joukosta ja se ei myöskään kuulu kyseiseen joukkoon. Olkoon ε puolet pisteen α_k ja suljetun joukon S etäisyydestä;

$$\varepsilon = \frac{1}{2} d(\alpha_k, S).$$

Mielivaltaisen lähellä pistettä x_0 on piste x siten, että $f(x) \in S$. Sellaiselle pisteelle pätee

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - \alpha_k| > \varepsilon,$$

joten f on epäjatkuva pisteessä x_0.

Esimerkki 2.27. Otetaan mikä tahansa suljettu joukko A niin on olemassa funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka epäjatkuvuuspisteiden joukko on joukko A.

Todistus. Olkoon funktio f muotoa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A \cap \mathbb{Q} \\ -1, & \text{jos } x \in A \backslash \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Koska joukko A on suljettu, niin $A = (\partial A) \cup (\mathrm{int} A)$. Olkoon $x_0 \in \partial A$ ja $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tällöin $f(x_0) = 1$ tai $f(x_0) = -1$. Valitaan piste $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap (\mathbb{R} \backslash A)$. Tällöin $|x - x_0| < \delta$ ja $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon$ tai $|f(x) - f(x_0)| = |0 - (-1)| = 1 > \varepsilon$. Joten f on epäjatkuva joukon A reunapisteissä.

Olkoon $x_0 \in \mathrm{int} A$. Olkoon $f(x_0) = 1$. Valitaan piste $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap (A \backslash \mathbb{Q})$. Tällöin $|x - x_0| < \delta$ ja $|f(x) - f(x_0)| = |-1 - 1| = 2 > \varepsilon$. Olkoon $f(x_0) = -1$. Valitaan piste $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap (A \cap \mathbb{Q})$. Tällöin $|x - x_0| < \delta$ ja $|f(x) - f(x_0)| = |1 - (-1)| = 2 > \varepsilon$. Joten f on epäjatkuva kaikissa joukon A sisäpisteissä.

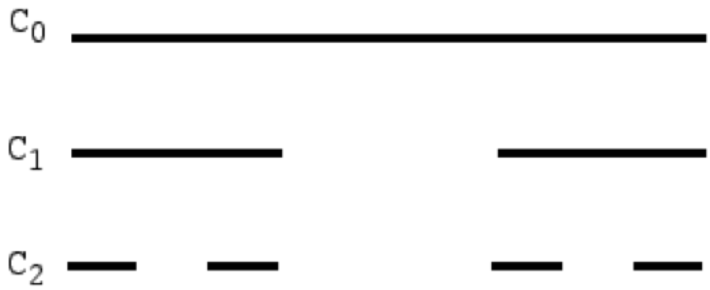
Funktio f on jatkuva pisteessä $x \notin A$, koska A^c on avoin.

□

2.3.2. Cantorin joukko. Tämän kappaleen tarkoitus on osoittaa se, että ylinumeroituva joukko voi myös olla ensimmäisen kategorian joukko. Yksi tällainen joukko on Cantorin joukko.

Cantorin joukko määritellään siten, että jaetaan väli $[0, 1]$ kolmeen yhtäsuureen osaan ja poistetaan keskimmäinen osa. Jäljelle jää siis suljetut välit $[0, \frac{1}{3}]$ ja $[\frac{2}{3}, 1]$. Nämä muodostuneet välit jaetaan taas kolmeen yhtäsuureen osaan ja poistetaan keskimmäinen, jolloin jäljelle jää neljä uutta väliä. Muodostuneiden välien jakoa toistetaan äärettömän monta kertaa. Cantorin joukko koostuu siis jäljelle jääneistä välin $[0, 1]$ pisteistä.

$$C_0 = [0, 1]$$
$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$
$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$
$$\vdots$$



$$\vdots$$

Lause 2.28. *Cantorin joukko on yhtä mahtava kuin väli* $[0, 1]$, *joten se on ylinumeroituva.*

Todistus. Todistettu esimerkiksi Charles Delingerin Elements of real analysis kappaleessa 3 s. 167-168.

Määritelmä 2.29. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on perfekti, jos $A = \hat{A}$ eli joukon A kasautumispisteiden muodostama joukko.

Esimerkki 2.30. Väli $[0, 1]$ on perfekti, koska väli sisältää kaikki kasautumispisteensä, mutta $[0, 1] \cup \{2\}$, $\{0\}$ ja $\mathbb{Q}$ eivät ole. $[0, 1] \cup \{2\}$ on kyllä suljettu, mutta kaikki muut pisteet ovat eristetty pisteestä $\{2\}$. $\{0\}$ ei ole perfekti, koska piste $\{0\}$ ei ole kasautumispiste. $\mathbb{Q}$ ei ole suljettu, joten sekään ei voi olla perfekti.

Lause 2.31. *Cantorin joukko on perfekti.*

Todistus. Olkoon C Cantorin joukko. $\hat{C} \subseteq C$, koska C on suljettu.

Todistetaan, että $C \subseteq \hat{C}$. Valitaan mikä tahansa piste $x \in C$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$ ja $x \in C_n$. Tällöin x kuuluu täsmälleen yhteen 2^n erillisistä suljetuista väleistä, joiden pituus on $\frac{1}{3^n}$, ja jotka muodostavat joukon C_n; merkitään sitä väliä $I_n = [a_n, b_n]$.

Koska $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, sekä $a_n \in N_\varepsilon(x)$ että $b_n \in N_\varepsilon(x)$, voidaan todeta, että molemmat a_n ja b_n ovat Cantorin joukossa. Siten kaikilla $\varepsilon > 0$ $N_\varepsilon(x)$ sisältää pisteen Cantorin joukosta, joka ei ole piste x. Täten x on kasautumispiste joukosta C ja $x \in \hat{C}$. Tällöin $C \subseteq \hat{C}$ ja $C = \hat{C}$.

$\square$

LAUSE 2.32. *Cantorin joukko ei sisällä väliä.*

TODISTUS. Antiteesi: Cantorin joukko C sisältää jonkin välin $]a, b[$. Valitaan jokin luku n siten, että $1/3^n < b - a$. Cantorin joukko sisältyy joukkoon C_n, joka sisältää äärellisen monta suljettua väliä, jotka ovat lyhyempiä kuin $b - a$. Täten C_n ei voi sisältää väliä $]a, b[$ ja täten joukko C ei myöskään voi sisältää kyseistä väliä. Joten Cantorin joukko ei sisällä yhtään väliä.

$\square$

LAUSE 2.33. *Cantorin joukko on ei missään tiheä.*

TODISTUS. Seuraa Lemmasta 2.23 ja Lauseesta 2.32, sillä C on suljettu.

$\square$

SEURAUS 2.34. *Cantorin joukko on ensimmäisestä kategoriasta.*

TODISTUS. Koska C on suljettu joukko, voimme todeta, että C on F_σ-joukko. Edellisten lauseiden ja Lemman 2.23 perusteella Cantorin joukko on ensimmäisestä kategoriasta.

LUKU 3

Funktion epäjatkuvuus ja jatkuvuus kouluopetuksessa

3.0.3. Lukion matematiikan opetussuunnitelmasta. Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaan matemaattista ajattelukykyä. Jotta oppilaalla olisi valmiudet ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa, niin oppilas täytyy tutustuttaa matematiikan perustietoihin ja rakenteisiin sekä kehittää oppilaan laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. Oppilasta tulisi myös kannustaa tekemään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin.

Lukion aloittavalla opiskelijalla on valittavana pitkän tai lyhyen oppimäärän matematiikka. Matematiikan pitkän oppimäärän oppimistavoitteina on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Opetus pyrkii myös antamaan oppilaalle käsityksen siitä, miten matematiikkaa voidaan soveltaa arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa. Oppilaan tulisi oppia luottamaan omiin matemaattisiin taitoihinsa ja oppia näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena.

Lukion pitkän oppimäärän matematiikan pakolliset kurssit ovat 1. Funktiot ja yhtälöt, 2. Polynomifunktiot, 3. Geometria, 4. Analyyttinen geometria, 5. Vektorit, 6. Todennäköisyys ja tilastot, 7. Derivaatta, 8. Juuri- ja logaritmifunktiot, 9. Trigonometriset funktiot ja lukujonot ja 10. Integraalilaskenta. Valinnaisiin syventäviin kursseihin kuuluu 11. Lukuteoria ja logiikka, 12. Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä, 13. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Lukion lyhyen oppimäärän matematiikassa käydään neljännellä kurssilla (Matemaattinen analyysi) hieman derivointia, mutta jatkuvuutta tai epäjatkuvuutta ei lyhyessä oppimäärässä käsitellä. Lyhyen oppimäärän neljännen kurssin tavoitteena on lähinnä ymmärtää derivaatta muutosnopeuden mittana. Tästä johtuen tutkimukseen ei valittu lyhyen matematiikan kursseja.

Analysoitaviksi kursseiksi valittiin tutkimukseen pakollinen Derivaatta ja syventävä Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi, koska niissä kursseissa käsitellään jatkuvuutta ja epäjatkuvuutta. Lukion pitkän matematiikan 7. kurssin aiheena on derivaatta. Kurssin tavoitteena on, että opiskelija omaksuu havainnollisen käsityksen jatkuvuudesta. Kurssi on pakollinen lukion pitkässä matematiikassa ja se suoritetaan yleensä lukion toisen vuoden alussa. Kurssin tavoitteena on, että oppilas osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaaliepäyhtälöitä. Oppilaan tulee omaksua havainnollinen käsitys funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta sekä osata määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat. Oppilaan tulisi osata tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla ja määrittää sen ääriarvot sekä rationaalifunktion suurin ja pienin arvo. Keskeisiksi sisällöiksi mainitaan rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö, funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta, polynomifunktio, funktion tulon ja osamäärän derivointi sekä polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen.

Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi on lukion pitkän matematiikan 13. kurssi. Sen tavoitteena on, että opiskelija tutkii funktion jatkuvuutta ja osaa jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi on valinnainen kurssi lukion pitkässä matematiikassa, jonka oppilas suorittaa yleensä lukion kolmannen vuoden aikana. Kurssin tavoitteina on, että oppilas syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan. Kurssin aikana oppilas täydentää integraalilaskennan taitoja, joita on opittu integraalilaskennan kurssilla ja soveltaa niitä esimerkiksi jatkuvien todennäköisyysjakaumien tutkimiseen. Lisäksi oppilas tutkii lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia. Keskeisiksi sisällöiksi mainitaan funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen sekä jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleiset ominaisuudet. Lisäksi oppilaan tulisi osata määrittää funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä ja epäoleelliset integraalit.

Koulukohtaisista opetussuunnitelmista vertailtiin kahta eri opetussuunnitelmaa. Koulu 1. on se koulu, jossa kysely toteutettiin ja koulu 2. on samantyyppinen koulu, jonka opetussuunnitelmasta on tässä vain vertailun vuoksi. Koulukohtaisissa opetussuunnitelmissa tarkkailtiin sitä, miten jatkuvuus ja epäjatkuvuus kuuluvat opetussuunnitelman sisältöön. Koulun 1. opetussuunnitelmassa sanotaan Derivaatta-kurssin tavoitteeksi, että oppilas omaksuu havainnollisen käsityksen raja-arvosta ja jatkuvuudesta. Lisäksi jatkuvuus ja raja-arvo luokitellaan kurssin keskeiseksi sisällöksi. Jatkokurssilla oppilaan tulisi syventää differentiaali- ja integraalilaskennan perusteiden tuntemista, harjoitella integraalilaskennan taitoja sekä harjoitella epäoleellisten integraalien määrittämistä. Lisäksi keskeiseksi sisällöksi mainitaan funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen ja funktioiden raja-arvot äärettömyydessä.

Koulun 2. opetussuunnitelmassa Derivaatta-kurssin tavoitteet ovat täsmälleen samat kuin edellisessä. Jatkokurssin tavoitteena on myös syventää differentiaali- ja integraalilaskennan perusteita sekä oppia mm. osittaisintegrointia ja epäoleellisia integraaleja. Opetussuunnitelmassa mainitaan, että derivoituvuus, jatkuvuus ja raja-arvo ovat keskeisiä käsitteitä. Näiden kahden koulun koulukohtaisissa opetussuunnitelmissa ei oikeastaan mitään eroa löytynyt. Molempien koulujen opetussuunnitelmat ovat saman tapaiset kuin yleinen opetussuunnitelma.

3.0.4. Muita tutkimuksia. Kuten johdannossakin jo tuli ilmi, tämä tutkimus on luonteeltaan tapaustutkimus ja sen pohjalta ei voida tehdä mitään laajempia yleistyksiä. Tarkoituksena on ollut lähinnä tukea tutkijan omaa opettajuutta ja saada jonkinlaista käsitystä siitä, miten epäjatkuvuus ja jatkuvuus kouluopetuksessa tulisi esittää.

Laajempia tutkimuksia ovat esimerkiksi Lenni Haapasalon ym. *Miten lukiolaiset hallitsevat funktion jatkuvuuden käsitteen* [**2**], jossa tutkitaan lukion ja yliopiston ensimmäisen vuoden opiskelijoiden jatkuvuuden ymmärrystä. Raja-arvon ja jatkuvuuden ymmärrystä on kartoitettu kyselylomakkeen avulla. Lisäksi tutkimuksessa on analysoitu oppikirjoja ja yliopiston opettajien jatkuvuuteen ja raja-arvoon liittyviä käsityksiä. Eräs mielenkiintoinen maininta Lenni Haapasalon ym. tukimuksessa oli, että erään opettajan mielestä oppilaalla ei ole havainnollista käsitystä funktion epäjatkuvuuden eri muodoista. Tutkimustulokseksi saatiin, että lukion 2. vuoden opiskelijat hallitsevat varsin huonosti jatkuvuuden ja raja-arvon käsitteen.

Toinen tutkimus on Paavo Heiskasen *Jatkuvuus- ja derivoituvuus-käsitteet lukion pitkässä matematiikassa* [**7**]. Tutkimus on tehty analysoimalla opetussuunnitelman perusteita ja oppikirjoja näiden käsitteiden osalta. Lisäksi Heiskanen on tutkinut, miten lukion pitkän matematiikan oppilaat hallitsevat jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden. Tätä hän on tutkinut teettämällä oppilailla kyselyn, jota hän on sitten analysoinut vastausten perusteella. Heiskasen tutkimus eroaa tästä tutkimuksesta siten, että Heiskanen ei ole yksistään analysoinut oppilaiden ymmärrystä funktion jatkuvuudesta, vaan hän on tarkastellut vain jatkuvuuden ja derivoituvuuden välistä yhteyttä. Lisäksi Heiskanen on määritellyt tutkimuksessaan erilaisia jatkuvia ei-missään derivoituvia funktioita ja todennut, että tälläisiä funktioita ei lukion oppikirjoissa ole. Paavo Heiskasen tutkimuksessa tärkein tulos on, että lukion pitkän matematiikan opiskelijat hallitsevat varsin heikosti jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden.

3.1. Jatkuvuus oppikirjoissa

Lukiossa funktion jatkuvuutta käsitellään sekä Derivaatta-kurssilla että Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssilla. Tässä tutkimuksessa on tarkasteltu neljän eri kirjasarjan kurssikirjoja molemmilta kursseilta. Tutkimuksessa käytetyt kirjasarjat ovat Pydamidi, Laudatur, Calculus ja Matematiikan taito.

3.1.1. Derivaatta-kurssi. Jatkuvuutta lähestytään usein oppikirjoissa raja-arvon kautta, mutta on myös poikkeuksia. Raja-arvosta käydään läpi sen muodostamissääntöjä ja esitellään *lim*-merkintä. Useimmissa kirjoissa tutkitaan raja-arvoa ensin numeerisesti eli laskemalla funktion arvoja pisteissä, jotka lähestyvät kohtaa, jossa raja-arvoa määritetään. Matematiikan taidossa kerrotaan myös hieman historiasta funktion raja-arvon johdannossa ja määritellään ensin ympäristö, mitä muissa kirjasarjoissa ei ole. Sen jälkeen raja-arvoa tutkitaan numeerisesti ja graafisesti kuten muissakin kirjasarjoissa.

Raja-arvo on määritelty kaikissa kirjoissa vähän eri tavalla. Matematiikan taidossa on ensin sanallisesti selitetty, mitä funktion raja-arvo tarkoittaa ja sitten merkitty $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ tai $f(x) \to a$, kun $x \to x_0$. Calculuksessa on aika samantapainen määritelmä, ja lisäksi siinä on funktion raja-arvon olemassaolon ehto. Myös Laudaturissa on raja-arvon olemassaolon ehto, mutta siinä ei ole varsinaisesti määritelty raja-arvoa muuta kuin esimerkin kautta.

Matematiikan taidossa, Laudaturissa ja Calculuksessa aloitetaan jatkuvuuden käsittely kuvien ja raja-arvon avulla. Kaikkissa näissä kirjoissa on kuvat poistuvasti epäjatkuvasta, hyppäysepäjatkuvasta ja jatkuvasta funktiosta. Laudaturissa on vielä yksi kuva, jossa on funktio, jota ei ole määritelty yhdessä pisteessä. Kuvien jälkeen kirjoissa on määritelty jatkuvuus kohdassa x_0. Matematiikan taidossa ja Calculuksessa on vielä lisätty, että jos f ei ole jatkuva kohdassa x_0, niin se on epäjatkuva tässä kohdassa. Matematiikan taidossa, Laudaturissa ja Calculuksessa jatkuvuuden määrittelyn jälkeen on heti esimerkki. Matematiikan taidossa on viisi esimerkkiä ja viimeisenä on Dirichlet'n funktio. Muissa kirjoissa sitä ei ole esimerkkinä. Pyramidissa jatkuvuuden käsittely aloitetaan jatkuvuuden määritelmistä. Ensin siinä on määritelty vasemmalta ja oikealta jatkuvat funktiot. Sitten määritellään jatkuvuus kohdassa vasemman ja oikeanpuolisen raja-arvon avulla ja yleisen raja-arvon avulla.

Matematiikan taidossa ja Pyramidissa on selvästi eroteltu kappale 'Jatkuvuus annetulla välillä'. Laudaturissa ja Calculuksessa 'Jatkuvuus välillä' on määritelty 'Jatkuvuus kohdassa' määritelmän jälkeen, mutta sitä ei ole kuitenkaan erikseen korostettu tekstistä. Pyramidissa on vielä erikseen kappale 'Jatkuvuus joukossa'. Kaikissa kirjoissa on mainittu, että alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan.

Matematiikan taidossa ja Calculuksessa on lisäksi raja-arvon laajennuksia. Kappaleessa tutkitaan raja-arvoa äärettömyydessä ja epäoleellista raja-arvoa. Calculuksessa käydään hyvin lyhyesti laajennus, mutta Matematiikan taidossa on käydään tarkasti läpi funktioiden erilaisia asymptootteja esimerkkien avulla. Muissa kirjoissa ei ole asymptootteja mainittu.

3.1.2. Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi. Ainoa kirjasarja, jossa ei syvennytä tarkemmin jatkuvuuteen, on Pyramidi. Sen kirjan jatkuvuus ja derivoituvuus kappaleessa kerrotaan vain, että "jos funktio on derivoituva, niin se on jatkuva". Syy, miksi Pyramidi kirjassa ei syvennytä tarkemmin jatkuvuuteen saattaa löytyä Derivaatta-kirjasta. Siinä on käyty hyvin tarkasti läpi erilaisia esimerkkikuvia, joissa on epäjatkuvia ja jatkuvia funktioita sekä kuva funktiosta, jonka jatkuvuudesta ei voida puhua. Tässä kirjassa lähennytään jatkuvuutta ehkä hieman yksityiskohtaisemmin kuin muiden kirjasarjojen Derivaatta-kirjassa. Opettajana olisi hyvä tätä kirjasarjaa käyttäessä ensin kerrata jatkuvuuden perusteet Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssilla esimerkiksi ennen derivoituvuutta.

Kolmessa muussa kirjasarjassa tulee selvästi esille se, että jos funktiota ei ole määritelty jossain kohdassa, niin sen jatkuvuudesta ei voida sanoa mitään. Vaikka näin on, niin silti vielä yliopiston opiskelijatkin yrittävät antaa esimerkiksi epäjatkuvasta funktiosta funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Opettajan olisikin tärkeää painottaa tätä asiaa, että se ei jäisi oppilaiden vastuulle oppia itse kirjasta.

Calculus on ainut kirjasarja, jossa on esimerkkinä kaikkialla epäjatkuva funktio ja funktio, jolla on heilahtelevaa epäjatkuvuutta. Mielestäni esimerkki

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{kun } x \neq 0 \\ 0 & \text{kun } x = 0 \end{cases}$$

on hyvä, koska siitä huomaa, että funktion jatkuvuus ei ole aina selvää kuvasta katsottuna ja jatkuvuutta pitäisi tutkia raja-arvon avulla. Usein oppilaat olettavatkin funktion jatkuvaksi, jos sitä ei erikseen vaadita tutkimaan. Opettajana olisikin hyvä, jos ottaisi tavaksi jatkuvuuden tutkimisen oppilaiden kanssa esimerkiksi, kun on sellaisia tehtäviä, missä halutaan tietää, onko funktio derivoituva vai ei. Mielestäni oppilaille tulisi esittää esimerkki kaikkialla epäjatkuvasta funktiosta, jotta oppilaalle ei jäisi sellainen kuva, että funktio on epäjatkuva vain yksittäisissä pisteissä.

Matematiikan taidossa jatkuvuutta käsitellään ehkä kaikkein laajimmin. Kirjassa lähennytään jatkuvuutta yliopistomatematiikan tavoin. Se on ainut kirjasarja, jossa jatkuvuutta todistetaan $\varepsilon \backslash \delta$ todistuksella. Tässä kirjassa on selvästi muita enemmän panostettu jatkuvuuden käsittelyyn.

3.2. Tutkimusongelmat

Koska tutkielman matemaattisessa osiossa tutkittiin, millaisia ovat reaalifunktion epäjatkuvuuspisteiden joukot ja miten luokitellaan epäjatkuvuuksia, oli luonnollista ottaa huomioon se, miten matemaattinen osio liittyy kyselytutkimukseen. Sen lisäksi haluttiin, että tutkimuksesta olisi jotain hyötyä tutkijan tulevassa ammatissa. Kun lähdettiin miettimään, minkälaisia ongelmia halutaan kyselyllä selvittää, tärkeimmiksi kysymyksiksi nousivat, onko oppilailla havainnollista käsitystä epäjatkuvuuksien erilaisuudesta, ja onko oppilailla matemaattista käsitystä epäjatkuvuuspisteiden joukon koosta. Lisäksi haluttiin selvittää kuinka tuttuja esimerkkitapaukset Dirichlet'n funktio ja heilahtelevasti epäjatkuva sini-funktio ovat oppilaille.

3.3. Tutkimusmenetelmä

Tutkimusmenetelmä on kyselyn teettäminen oppilailla ja sen analysointi (kyselylomake liitteenä). Oppilaat valittiin Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssilta. Kurssikirjana oppilailla oli käytössä Matematiikan taito. Kyselyyn osallistui 12 oppilasta ja oppilailla ei ollut etukäteen tietoa kyselytutkimuksesta. Oppilaiden opettaja piti oppilaita riittävän motivoituneina vastaamaan totuudenmukaisesti kyselyyn. Kysely toteutettiin Diffirentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssin loppupuolella ennen kurssikoetta. Jatkuvuus oli käsitelty noin kaksi viikkoa aikaisemmin. Oppilailla kesti noin 15 minuuttia vastata kysymyksiin ja suurin osa vastasi kaikkiin kysymyksiin.

Oppilaille teetetyn kyselytutkimuksen ensimmäinen tehtävä on johdatus tehtävä, jonka tarkoituksena on saada selville, ymmärtävätkö oppilaat missä pisteissä funktio on epäjatkuva. Funktiossa on myös epäderivoituva kohta tehtävän haasteellisuutta lisäämään. Toinen tehtävä testasi myös oppilaiden käsityksiä jatkuvuuden ja epäjatkuvuuden eroista. Siinä on funktio, joka on epäjatkuva useassa eri pisteessä ja oppilaiden tulisi määrittää, millä väleillä funktio on jatkuva. Näillä kysymyksillä haluttiin selvittää, onko oppilailla perusasiat jatkuvuudesta tiedossa.

Kyselytutkimuksen kolme viimeistä tehtävää ovat tärkeitä tutkimusongelmien kannalta. Kolmannessa tehtävässä tutkitaan, ymmärtävätkö oppilaat, että funktiolla tosiaan voi olla äärettömän monta epäjatkuvuuskohtaa. Kiinnostavaa on myös nähdä, miten oppilaat perustelevat tämän. Neljäs kysymys on myös tutkimuksen kannalta oleellinen. Tässä kysymyksessä tutkitaan, onko oppilailla tietoa kaikkialla epäjatkuvasta funktiosta. Ja vaikka he eivät olisi ikinä kuulleetkaan sellaisesta, niin on kiinnostavaa nähdä, miten he aikovat perustella vastauksensa. Viimeisessä tehtävässä on tarkoitus tutkia, osaavatko oppilaat keksiä eritavalla epäjatkuvia funktiota. Esimerkiksi hyppäysepäjatkuvuutta ja äärettömyyteen karkaavaa epäjatkuvuutta. Mielenkiintoista on saada selville, millaisia epäjatkuvia funktiota oppilaat pitävät erilaisina. Tehtävä on erittäin luova ja avoin, joten vastauksia voi tulla hyvin erilaisia.

3.4. Kyselyn tulokset

Ensimmäinen tehtävä:

Tehtävässä piti kuvan avulla määrittää, missä pisteissä funktio on epäjatkuva ja antaa yksi väli jossa funktio on jatkuva.

Kymmenen oppilasta vastasi ensimmäiseen tehtävään täysin oikein. Vain kahdella oppilaalla oli virheitä vastauksissa, jotka johtuivat lähinnä huolimattomuudesta. Yksi oli antanut a-kohdan yhdeksi epäjatkuvuuspisteeksi $x = 4$, vaikka oikea vastaus olisi ollut $x = 5$. Oppilas oli ehkä katsonut epähuomiossa kuvaa väärin. Toinen oppilas oli unohtanut epäjatkuvuuspisteen $x = 5$ a-kohdasta. Lisäksi hän antoi b-kohtaan välin, jossa funktio olisi jatkuva välillä $(5, 3\frac{1}{2})$, joka on vain siinä mielessä väärin, että arvot ovat väärässä järjestyksessä. Muuten vastaus olisi oikein. Kukaan ei antanut epäjatkuvuuskohdaksi $x = -1$, joka oli epäderivoituvuuskohta. Oppilaat eivät siis sekoittaneet epäderivoituvaa kohtaa epäjatkuvaksi kohdaksi.

Toinen tehtävä:

Tehtävässä kaksi piti kuvan avulla vastata väittämiin, jotka olivat tosia ja epätosia.

Vain yhdellä oppilaalla oli yhdessä kohdassa virhe. Oppilas oli vastannut c-kohtaan, että funktio olisi jatkuva välillä $[1, 3]$. Oppilas ei varmaan ollut huomannut, että pisteessä $x = 3$ funktio on epäjatkuva. Muuten kaikki olivat vastanneet kysymykseen täysin oikein. Oppilaat selvästikin osasivat jatkuvuuden perusteet, mutta kaksi ensimmäistä tehtävää perustuivat suurimmaksi osaksi derivaatta kurssin tietoihin ja taitoihin.

Kolmas tehtävä:

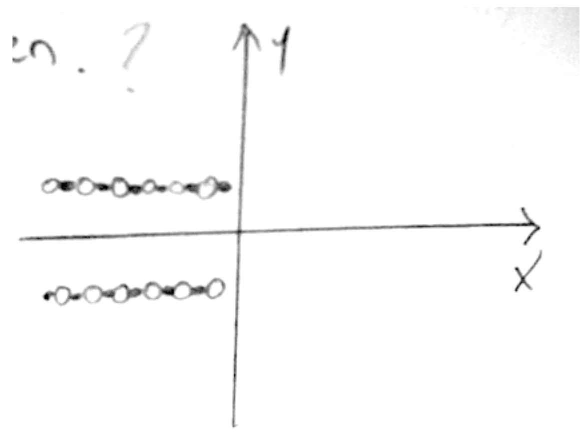
Kolmannessa tehtävässä kysyttiin voiko funktiolla olla äärettömän monta epäjatkuvuuskohtaa sekä pyydettiin perustelemaan vastaus.

Kaksi oppilasta jättivät tehtävän tyhjäksi. Kymmenen oppilasta vastasi tehtävään oikein, joista neljä vastasi kysymykseen oikein, mutta perustelut olivat joko kokonaan väärin tai muuten puutteellisia. Esimerkiksi joku oli vastannut, että funktio ei olisi jatkuva sellaisissa kohdissa, missä funkiota ei ole määritelty. Kuusi oppilasta vastasivat tehtävään perustelujen kanssa oikein. Perustelut vaihtelivat voimakkaasti. Tämä saattoi johtua siitä, että oppilaat eivät olleet aiemmin miettineet tälläistä kysymystä, joten heillä ei ollut valmiita käsityksiä tästä asiasta. Esimerkiksi eräs oppilas oli vastannut kysymykseen, että jos reaalilukujen joukosta poistetaan kaikki rationaaliluvut, niin kyseisellä määrittelyjoukolla funktio olisi äärettömän monessa kohdassa epäjatkuva. Toinen oppilas oli vastannut, että niissä kohdissa funktiota ei ole määritelty, joka on täysin virheellinen perustelu. Jotkut olivat yrittäneet antaa perusteluksi esimerkkiä sellaisesta funktiosta, joka olisi epäjatkuva äärettömän monessa pisteessä. Tälläisiä oli esimerkiksi $f(x) = (-1)^x$. Tämä on muuten hyvä esimerkki, mutta tässä täytyisi vielä määritellä muuttujan x määrittelyjoukko. Jos niin ei tehdä, niin funktio saa myös kompleksilukuarvoja. Hyvin perusteltu vastaus oli ”Voi olla, jos funktio saa x:n arvoja äärettömään asti. Tällöin ei voida asettaa myöskään epäjatkuvuuskohdille ylärajaa”. Saman tyyppinen vastaus oli toisellakin oppilaalla.

Neljäs tehtävä:

Tehtävässä kysyttiin onko olemassa funktiota, joka on epäjatkuva kaikkialla sekä pyydettiin perustelemaan vastaus.

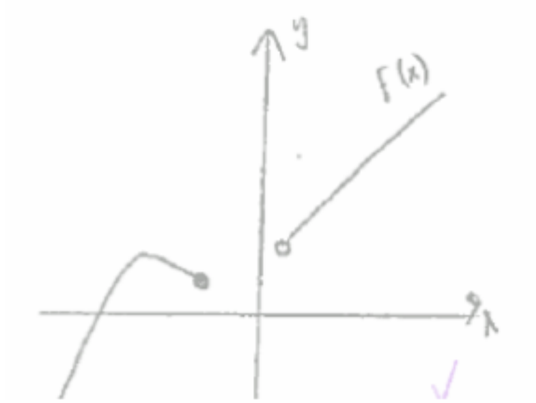
Kaksi oppilasta jätti vastaamatta tehtävään. Kaksi oppilasta vastasi täysin väärin. Yksi oppilas antoi selitykseksi sen, että ei voi olla sellaista funktiota, koska silloin se ei olisi funktio. Toinen vastasi, että funktio täytyy olla jatkuva jossain kohdassa, muuten se on vain piste. Kuusi oppilasta olivat vastanneet lähes oikein ja kaksi oppilasta olivat jopa antaneet esimerkiksi Dirichletin funktion. Neljä oppilasta yritti kuvailla sellaista funktiota, joka saa eri arvoja vierekkäisissä pisteissä. Vaikka tämä vastaus on tavallaan oikein, niin se on silti virheellinen. Lukion kolmannen vuoden oppilailla ei ole vielä käsitystä joukkojen mahtavuudesta ja siitä, että vierekkäisiä pisteitä ei ole olemassa, koska jos olisi niin löydettäisiin nollaa lähinnä oleva rationaalipiste. Mutta vastaus luettiin oikeelliseksi, koska oppilaiden tietojen ja taitojen perusteella se on oikein. Kaksi oppilasta oli vastannut oikein kysymykseen, mutta perustelut olivat hyvin epäselviä. Yksi vastasi, että tällöin funktio saa vain reaalilukuarvoja, jolloin se on kaikkialla epäjatkuva imaginäärilukujoukossa. Toinen vastasi, että esimerkiksi funktio, joka hajaantuu joka toisen pisteen ollessa eri tasolla kuin toinen. Oppilas on ehkä tarkoittanut Dirichlet'n funktiota, koska hän oli piirtänyt seuraavan kuvan esimerkiksi.



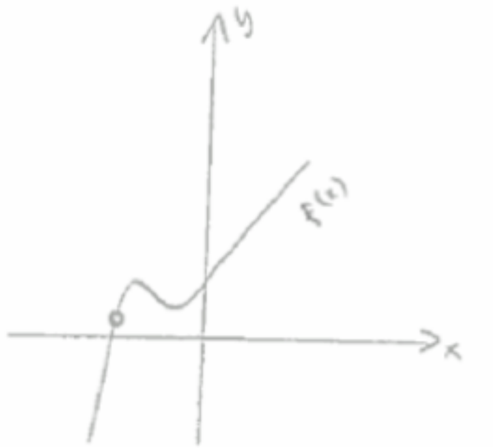
Viides tehtävä:

Viimeisessä tehtävässä pyydettiin piirtämään ja perustelemaan millaisia epäjatkuvia funktioita voi olla olemassa.

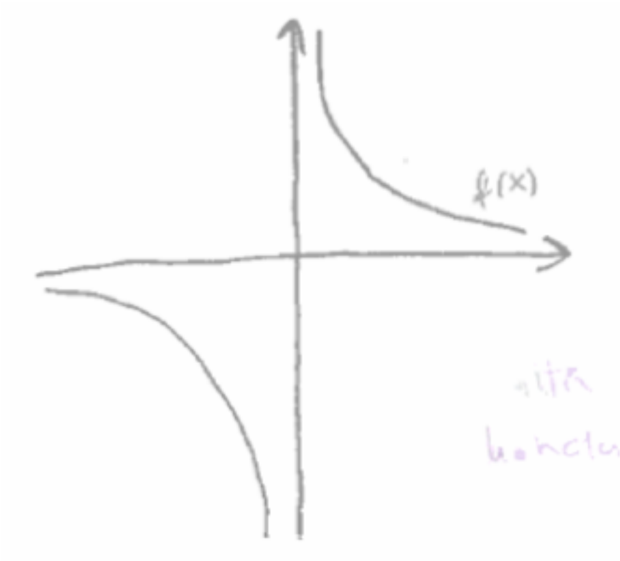
Kysymys oli tutkimuksen kannalta oleellinen, koska tehtävässä ei voinut veikata. Oppilaat vastasivat todella hyvin ja olivat ymmärtäneet, mitä tehtävässä oli tarkoitettu, vaikka tehtävä oli haasteellinen sen avoimuuden vuoksi. Viisi oppilasta oli piirtänyt joko hyppäysepäjatkuvan tai poistuvasti epäjatkuvan funktion. Neljä oppilaista oli piirtänyt kaksi erilailla epäjatkuvaa funktiota (hyppäys- ja poistuvaepäjatkuvuus). Vain kaksi oppilaista oli piirtänyt oleellista epäjatkuvuutta esittävän kuvan, mutta ei ollut sitten muistanut määritellä funktiota pisteessä $x = 0$. Eli periaatteessa sellainen funktio ei ole epäjatkuva tai jatkuva. Kukaan ei piirtänyt tai maininnut sellaista funktiota, jolla olisi ollut heilahtelevaa epäjatkuvuutta. Moni kuitenkin yritti antaa esimerkiksi sellaista funktiota, jota ei ole määritelty jossain kohtaa tai piirsivät sellaisia funktiota, joilla on samanlaista epäjatkuvuutta. Yksi oppilas kirjoitti, että kai niitä voi olla minkälaisia tahansa. Tarkoittaen ehkä sitä, että erilaisilla funktiolla on aina erilaista epäjatkuvuutta.



Yksi tyypillinen virhe piirros.



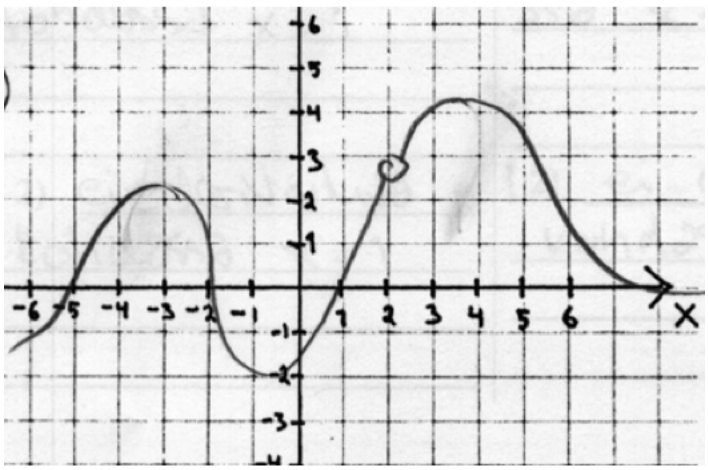
Toinen tyypillinen virhe piirros.



Tälläisiä kuvia oli kahdella oppilaalla. Piirros on muuten hyvä, mutta molemmat oppilaat olivat unohtaneet määritellä funktion pisteessä $x = 0$.

3.5. Pohdintaa

3.5.1. Johtopäätökset. Selvästikin oppilaat osasivat ainakin perusasiat jatkuvuudesta eivätkä sekoittaneet epäderivoituvaa funktiota epäjatkuvaan funktioon. Paavo Heiskasen tutkimuksesta huomaa, että yleisimmät virhekuvat ovat sellaisia, joissa on kuva funktiosta, jolla on epäjatkuvuuskohta pisteessä, jossa funktiota ei ole määritelty.



Virheellinen esimerkkikuva Paavo Heiskasen tutkimuksesta.

Opetuksessa voisi vielä painottaa sitä, että jos funktiota ei ole määritelty jossain kohtaa, niin sen epäjatkuvuudesta ei voida sanoa mitään. Kuitenkin oppilailla tuntui olevan käsitystä siitä, minkä kokoisia funktion epäjatkuvuuspisteiden joukot saattavat olla. Jopa puolet oli vastannut oikein tai jokseenkin oikein tehtäviin kolme ja neljä. Oppilaille tulisi kuitenkin antaa mietittäväksi, mitä tarkoittaa matematiikassa se, että jokin arvo on äärettömän lähellä. Oppikirjasarjan Laudatur Derivaattakurssikirjassa on hyvä pohdintatehtävä koskien tätä ongelmaa. Siinä oppilaan tulisi miettiä, pääseekö oppilas koskaan perille, jos edetään aina puolet jäljellä olevasta matkasta. Opetuksessa voisi käyttää tämän tyyppistä esimerkkiä jo ennen raja-arvon käsittelyä.

Opetettaessa jatkuvuutta on hyvä aloittaa raja-arvon käsitteestä etenkin havainnollisesti. Muutenkin jatkuvuutta opetettaessa tulisi panostaa oikeanlaisiin kuviin, etteivät kuvat johtaisi oppilaita virhekäsityksiin. Kuvat ovat tärkeitä tämän asian käsittelyssä tai muuten opetus menee liian teoreettiseksi, joka vaikeuttaa oppilaiden ymmärtämistä asiasta. Muuten voi käydä niin, että oppilas kyllä ymmärtää, että funktio ei ole jatkuva ja osaa laskea raja-arvon/arvot, mutta ei varsinaisesti ymmärrä mitä se tarkoittaa. Tässä tutkielmassa tarkastelluissa oppikirjoissa on ollut hyviä kuvia aiheesta. Vaikka kaikissa oppikirjoissa ei ole esitelty tapauksia kaikkialla epäjatkuvasta funktiosta ja heilahtelevasti epäjatkuvasta funktiosta, ne olisi oppilaan oppimisen kannalta hyödyllisiä esittää, koska ne voisivat auttaa ymmärtämään kokonaisuutta hieman paremmin.

3.5.2. Jatkotutkimusehdotuksia. Kyselytutkimusta voisi parantaa lisäämällä suoran kysymyksen, onko funktio epäjatkuva pisteessä, jossa sitä ei ole määritelty. Lisäksi kysymystä viisi voisi vähän parantaa pyytämällä, että oppilaat tarkastelisivat piirtämiensä funktioiden raja-arvoa ja toispuoleisia raja-arvoja. Kysymyslomaketta ei kuitenkaan kannattaisi luoda liian pitkäksi. Kiinnostavaa olisi ollut vielä, jos olisi teetetty kysely yliopiston ensimmäisen tai toisen vuoden matematiikan opiskelijoille. Tällä tavalla tutkimus olisi laajentunut hieman, mutta olisi kuitenkin pysynyt tapauskohtaisena. Lisäksi tutkimukseen olisi voinut liittää haastattelun lukion matematiikan opettajilta. Heiltä olisi voinut kysyä esimerkisi, miten he opettavat jatkuvuutta ja hieman yksityiskohtaisempia kysymyksiä kuten, millaisia esimerkkejä heidän mielestään tulisi esittää ja millaisia ongelmia kohdataan tunneilla opetettaessa jatkuvuutta.

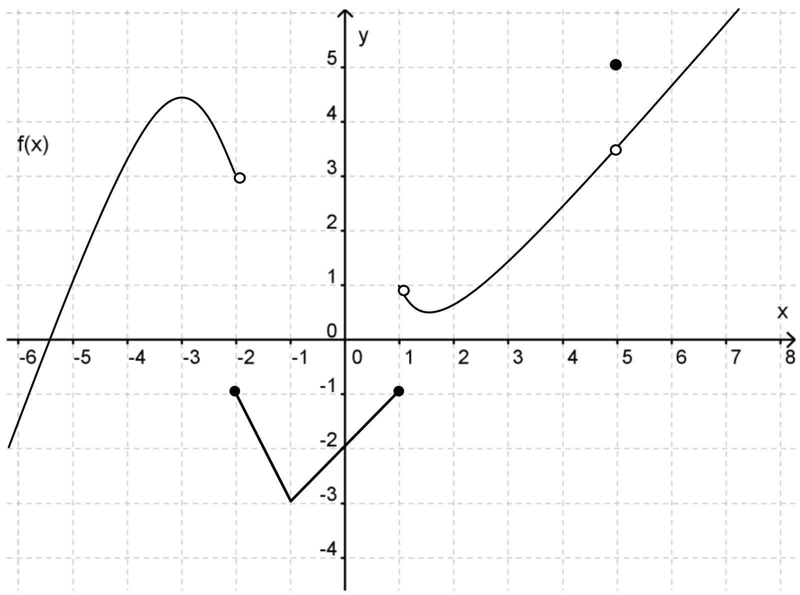
LIITE A

Jatkuvuustesti

JATKUVUUSTESTI

Nimi:______________________

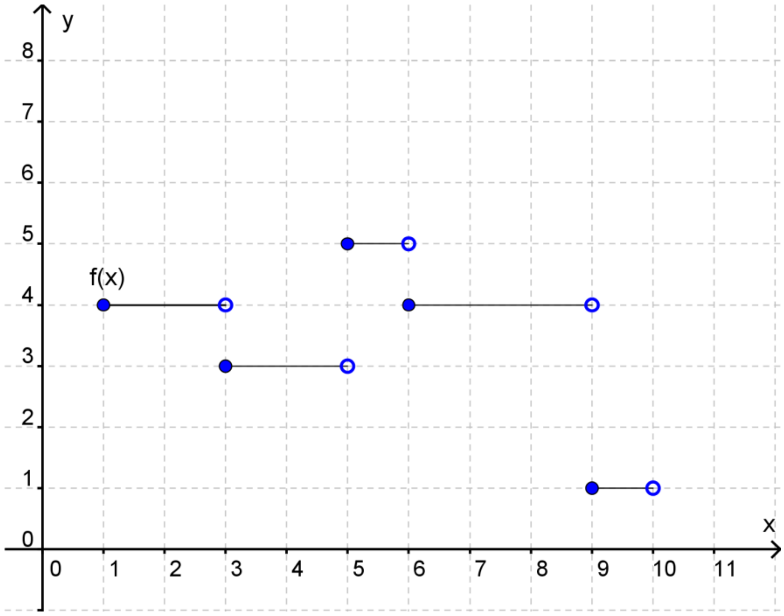
1. Määritä kuvasta katsomalla



a) Missä pisteissä funktio f(x) on epäjatkuva?

b) Määritä yksi väli, jossa funktio f(x) on jatkuva.

2. Määritä kuvasta katsomalla ovatko väittämät tosia vai epätosia (Merkitse E/T)



a. Funktio f(x) on jatkuva kaikilla reaalilukuarvoilla.
b. Funktio f(x) ei ole jatkuva välillä [1,10[.
c. Funktio f(x) on jatkuva välillä [1,3]
d. Funktio f(x) on jatkuva välillä [1,2]
e. Funktio ei ole jatkuva millään välillä.

3. Voiko funktiolla olla äärettömän monta epäjatkuvuuskohtaa? Perustele.

4. Onko olemassa funktiota joka on epäjatkuva kaikkialla? Perustele.

5. Tehtävässä 1. esiintyy funktio, joka on epäjatkuva tietyllä tavalla. Piirrä ja perustele millaisia epäjatkuvia funktioita sinun mielestäsi voi olla olemassa. Voit piirtää niin monta kuvaa kuin haluat.

Kirjallisuutta

[1] Charles G. Delinger: *Elements of real analysis.* Jones and Bartett India Pvt Ltd, 2011.

[2] Lenni Haapasalo, Saana Luotonen ja Pirjo Pellikka: *Miten lukiolaiset hallitsevat funktion jatkuvuuden käsitteen?.* Jyväskylän yliopisto, 1997.

[3] Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli ja Timo Sankilampi: *Matematiikan taito Derivaatta.* Sanoma Pro

[4] Markku Halmetoja, Kaija Häkkinen, Jorma Merikoski, Lauri Pippola, Harry Silfverberg, Timo Tossavainen, Teuvo Laurinolli ja Timo Sankilampi: *Matematiikan taito Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Sanoma Pro.

[5] Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja Leena Wallin-Jaakkola: *Laudatur Derivaatta.* Otava.

[6] Tarmo Hautajärvi, Jukka Ottelin ja Leena Wallin-Jaakkola: *Laudatur Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Otava.

[7] Paavo Heiskanen: *Jatkuvuus- ja derivoituvuus-käsitteet lukion pitkässä matematiikassa.* Jyväskylän yliopisto Pro Gradu, 2010.

[8] Paavo Heiskanen *http://www.maol.fi/fileadmin/users/EDimensio/2008/Heiskanen.pdf.*

[9] Päävo Jäppinen, Alpo Kupiainen ja Matti Räsänen: *Lukion Calculus Derivaatta.* Otava.

[10] Päävo Jäppinen, Alpo Kupiainen ja Matti Räsänen: *Lukion Calculus Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Otava.

[11] Pekka Kotkanen, Jukka Lehtonen ja Kerkko Luosto: *Pyramidi Derivaatta.* Sanoma Pro.

[12] Pekka Kotkanen, Jukka Lehtonen ja Kerkko Luosto: *Pyramidi Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi.* Sanoma Pro.

[13] Opetushallitus *Lukion opetussuunnitelman perusteet*

[14] Andrey Paramonov *http://ndpar.blogspot.fi/2011/08/thomaes-function.html.*

[15] Charles C. Pugh: *Real mathematical analysis.* Spinger-Verlag New York Inc, 2002.

[16] Walter Rudin: *Principles of mathematical analysis.* McGraw-Hill, 2008

[17] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner ja Andrew M. Bruckner: *Elementary real analysis*, second edition, http://classicalrealanalysis.com/download.aspx, 2008.