Itsesimilaarit joukot

Henni Nikkilä

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013

Tiivistelmä: Henni Nikkilä, *Itsesimilaarit joukot* (engl. *Self-similar sets*), matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, kevät 2013.

Tämä tutkielma käsittelee fraktaaligeometriaa. Tutkielman tarkoituksena on määritellä itsesimilaari joukko sekä sen dimensio. Lisäksi tarkoituksena on tutkia erilaisia itsesimilaareja joukkoja sekä niiden ominaisuuksia. Näitä varten määritetään aluksi joukon mitta. Perinteinen geometria ja siihen liittyvä mitta, joka määrittelee joukon dimension kokonaisluvuksi, ei ole riittävä kuvaamaan fraktaalisia joukkoja. Sen vuoksi itsesimilaareja joukkoja varten määritetään Hausdorffin dimensio ja laatikkodimensio.

Itsesimilaari joukko määritellään iteroivan systeemin avulla. Iteroiva systeemi koostuu muunnoskuvauksista, joilla on kutistava ominaisuus. Tutkittavien joukkojen näytetään olevan muuttumattomia annetuille muunnoskuvauksille, jolloin joukkoa sanotaan itsesimilaariksi joukoksi. Itsesimilaarille joukolle osoitetaan, että sen Hausdorffin dimensio ja laatikkodimensio ovat yhtäsuuret. Lisäksi osoitetaan, että jos itsesimilaarille joukolle pätee avoimen joukon ehto, niin sen dimensio saadaan laskettua kaavasta

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^s = 1,$$

missä s on joukon dimensio ja luku c_i saadaan muunnoskuvauksista.

Työssä tutkitaan neljää esimerkkijoukkoa: Cantorin joukkoa, Von Kochin käyrää, Sierpińskin kolmiota ja Lévyn lohikäärmettä. Jokaisen joukon osoitetaan olevan itsesimilaari ja sille määritetään dimensio. Kyseisten joukkojen dimensiot ovat keskenään erisuuret. Cantorin joukon dimensiolle pätee $0 < s < 1$, Von Kochin käyrän sekä Sierpińskin kolmion dimensioille pätee $1 < s < 2$ ja Lévyn lohikäärmeen dimensioksi saadaan $s = 2$. Lévyn lohikäärme on poikkeuksellinen fraktaali. Sen dimensio on kokonaisluku ja se sisältää avoimia joukkoja, mikä ei kuvasta katsoen ole selvää.

Sisältö

Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee fraktaaligeometriaa. Nimi 'fraktaali' tulee latinankielen sanasta 'fractus', joka tarkoittaa rikkinäistä tai pirstaleista. Nimityksen otti käyttöön Benoit Mandelbrot vuonna 1975 tutkiessaan kovin epäsäännöllisiä joukkoja. Fraktaalille ei ole olemassa yksikäsitteistä määritelmää, eikä siten annetusta joukosta voida suoraan sanoa, onko se fraktaali vai ei. Mandelbrot määrittelee fraktaalin sellaiseksi joukoksi, jonka Hausdorffin dimensio on aidosti suurempaa, kuin sen topologinen dimensio [**4**]. (Hausdorffin dimensio määritellään työssä Luvussa 1.)

Kenneth Falconer määrittelee fraktaalin Euklidisen avaruuden joukoksi E, joka toteuttaa kaikki tai suurimman osan seuraavista ominaisuuksista [**5**]:

(1) Joukolla E on 'siisti rakenne'; sen rakennetta voidaan tarkastella mielivaltaisen pienellä mittakaavalla.
(2) Joukko E on liian epäsäännöllinen kuvattavaksi perinteisellä geometrialla.
(3) Usein joukko E on itsesimilaari, vähintäänkin approksimatiivisesti.
(4) Usein joukon E fraktaalinen dimensio (joka voidaan määrittää usealla tavalla) on aidosti suurempaa, kuin sen topologinen dimensio.
(5) Usein joukko E voidaan määrittää hyvin yksinkertaisesti ja yleensä rekursiivisesti.

Topologista dimensiota ei tulla määrittelemään työssä, mutta on olennaista tietää, että se on aina kokonaisluku. Tämän vuoksi Mandelbrotin ja Falconerin määritelmät voidaan tulkita seuraavasti: Fraktaali on joukko, jonka dimensio ei ole kokonaisluku.

Sekä Mandelbrot että Falconer sisällyttävät määritelmiinsä fraktaalisen dimension. Tämä onkin ehkä selvin ominaisuus, joka määrittää fraktaalin. Tiedetään, että käyrän dimensio on 1, tason dimensio on 2 ja kuution dimensio on 3. Euklidisessa avaruudessa tätä voidaan jatkaa ja avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio on n, missä luku n on positiivinen kokonaisluku. Harvoin on kuitenkaan olemassa sellaista kokonaislukua n, joka olisi sopiva kuvaamaan fraktaalisen joukon kokoa. Tämän vuoksi on kehitetty fraktaaleille ominainen mittateoria, jonka avulla saadaan määritettyä joukon dimensio, joka siis harvoin on kokonaisluku.

Itsesimilaari joukko määritellään rekursiivisesti muunnoskuvausten avulla. Muunnoskuvauksilla on ominaisuus

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c|x - y| \qquad \text{kaikille } x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

missä $0 < c < 1$. Tällöin kuvaus S_i kutistaa joukkoa. Lisäksi halutaan osoittaa, että tutkittava joukko on muuttumaton annetuille muunnoskuvaksille, toisin sanoen kuvaukset ainoastaan kutistavat joukkoa, mutta kuvaavat sen muuten täsmälleen samaksi joukoksi. Tällöin sanotaan, että joukko on itsesimilaari. Itsesimilaarin joukon kuvassa tämä tarkoittaa sitä, että joukko koostuu itsensä kopioista pienoiskoossa. Jos kuvaa suurennetaan, niin huomataan, että se näyttää edelleen samalta. Itsesimilaarin joukon mitan määrittämisen perinteisen geometrian keinoin tekee hankalaksi se, että joukko määritellään rekursiivisesti siten, että annettua 'kaavaa' jatketaan äärettömiin.

Niin historiassa, kuin nykypäivänäkin, eräänä tutkimuksen kohteena on ollut luonto ja sen kuvaaminen geometrian avulla. Luonnosta ei löydy ympyrää tai ellipsiä eikä suoraa viivaa. Luonnon kappaleet ovat usein monella tapaa rikkonaisia ja ensisilmäyksellä kovin monimutkaisia. Fraktaalit ovat usein erinomaisia approksimoimaan näitä luonnon kappaleita, kuten esimerkiksi pilven reunoja, kasvien lehtiä tai maan rantaviivaa. Useissa tapauksissa hyvän approksimaation antavat kuvaukset ovat lisäksi itsesimilaareja. Fraktaaleitakaan ei toki oikeasti esiinny luonnossa, mutta ne ovat usein riittävälla tarkkuudella sopivia kuvaamaan tutkittavia joukkoja. Rantaviivan pituuden tutkiminen on myös historiallisesti merkittävää, sillä Mandelbrot kehitti fraktaalin käsitteen juuri tutkiessaan Iso-Britannian rantaviivan pituutta.

Ensimmäisessä luvussa aloitetaan mittateorian perusteista, joukon mitan käsitteestä. Tämän jälkeen määritellään kaksi fraktaaligeometrian tärkeää dimensiota: Hausdorffin dimensio sekä laatikkodimensio. Molempien dimensioiden ideana on peittää tutkittava joukko joillain peitejoukoilla ja tämän jälkeen etsiä raja-arvo peitteitä pienennettäessä. Hausdorffin dimensio perustuu Hausdorffin mittaan. Hausdorffin mitta ja dimensio ovat vanhimpia tunnettuja mitan ja dimension määritelmiä ja ne ovat tärkeässä osassa fraktaaligeometriaa, kuten jo Mandelbrotin määritelmästä voidaan todeta. Laatikkodimension tärkeys näkyy etenkin laskennallisissa tapauksissa, sillä se on usein huomattavasti helpompi laskea, kuin Hausdorffin dimensio. Ensimmäisen luvun lopuksi tutkitaan vielä näiden kahden dimension yhtäläisyyttä. On huomattavaa, että fraktaaleille on määritetty myös useita muita dimensioita, mutta tämän työn kannalta edellä mainitut kaksi dimensiota ovat merkittävimmät.

Toisessa luvussa määritellään tutkielman varsinainen aihe, itsesimilaari joukko. Tätä varten määritetään iteroiva systeemi, joka koostuu yhtälön (1) mukaisen ominaisuuden omaavista muunnoskuvauksista, joille tutkittava joukko on muuttumaton. Tämän jälkeen määritetään itsesimilaarin joukon dimensio. Itsesimilaarille joukolle saadaan osoitettua, että sen Hausdorffin dimensio ja laatikkodimensio ovat täsmälleen yhtä suuret. Lisäksi saadaan johdettua hyvin yksinkertainen kaava, jolla dimension arvo saadaan laskettua. Tämän kaavan antavaa lausetta voidaan pitää työn päätuloksena.

Toisessa luvussa tutkitaan myös muutamaa implisiittistä metodia dimension laskemiseksi. Implisiittisellä metodilla tarkoitetaan tapaa, jossa ratkaisuun päästään ilman täsmällistä laskemista. Tällöin riittää varmistua tietyistä ehdoista, joista voidaan osoittaa seuraavan jokin haluttu tulos. Hausdorffin dimensiolle ja laatikkodimensiolle saadaan implisiittisesti johdettua yhtäsuuruus, mutta tällöin dimension arvoa ei saada ratkaistua.

Toisen luvun lopuksi tutkitaan vielä hieman saatujen tulosten soveltamista kuvankäsittelyyn. Kuten jo todettiin, niin luonnossa esiintyy paljon fraktaalisia joukkoja tai ainakin kovasti niitä muistuttavia. Kappaleita voidaan mallintaa itsesimilaarien joukkojen avulla hyvin tarkasti. Näiden approksimaatioiden tarkkuudesta osoitetaan muutama tulos.

Kolmannessa luvussa esitetään neljä itsesimilaaria joukkoa. Esimerkkijoukoille sovelletaan Luvuissa 1 ja 2 johdettuja tuloksia ja osoitetaan siten erilaisia ominaisuuksia. Ensimmäinen esimerkkijoukko on Cantorin joukko, joka on hyvin perinteinen esimerkki muunmuassa sen yksinkertaisen määrittämisen vuoksi. Toisaalta, kovin yksinkertaiselta vaikuttavalta joukolta löytyy paljon yllättäviä ominaisuuksia, kuten esimerkiksi joukon ylinumeroituvuus. Lisäksi tutkitaan Von Kochin käyrää sekä Sierpińskin kolmiota, jotka myös ovat perinteisiä esimerkkejä itsesimilaareista joukoista, mutta ominaisuuksiltaan hieman erilaisia. Viimeinen esimerkkijoukko on Lévyn lohikäärme, joka poikkeaa muista esimerkkijoukoista siten, että sen dimensioksi saadaan kokonaisluku, mikä on fraktaaleille hyvin harvinaista, kuten aiemmin todettiin.

Esimerkkijoukoille on esitetty kuvat iteraatioista eli vaiheista, joilla joukkoa rakennetaan. Lisäksi on esitetty kuva itse joukosta. On kuitenkin huomattavaa, että koska joukot saadaan jatkamalla iteraatioita äärettömiin, ei itse joukkoa voida piirtää. Joukoista esitetyt kuvat ovat siis riittävän pitkälle vietyjä iteraatioita, jolloin kuvaa voidaan pitää hyvänä approksimaationa itse joukolle.

LUKU 1

Mitta ja dimensio

Tässä luvussa määritellään aluksi mitta-teorian avulla joukon mitan käsite. Mitan käsitteen määrittely poikkeaa hieman yleisesti tunnetusta määritelmästä, mutta poikkeavuutta on perusteltu työssä. Tämän jälkeen tutkitaan joukkojen ulottuvuuksia eli dimensioita kahden erilaisen määritelmän avulla. Hausdorffin dimensio on vanhimpia tunnettuja dimensioita ja se voidaan määrittää mille tahansa joukolle. Laatikkodimensio on puolestaan paljon käytetty, sillä se on suhteellisen helppo laskea. Lopuksi tarkastellaan näiden kahden dimension suhdetta toisiinsa. Lähdekirjallisuutena tässä luvussa on K. Falconer, Fractal geometry [**4**].

1.1. Mitta

Määritellään aluksi Borel-joukot, joita lähes kaikki tässä tutkielmassa esiintyvät joukot ovat.

MÄÄRITELMÄ 1.1. *Borel-joukot* ovat pienin kokoelma avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja siten, että ne täyttävät seuraavat ehdot:

(1) Jokainen avoin joukko ja jokainen suljettu joukko on Borel-joukko.

(2) Yhdiste, joka koostuu äärellisestä tai numeroituvasta määrästä Borel-joukkoja, on Borel-joukko, samoin leikkaus, joka koostuu äärellisestä tai numeroituvasta määrästä Borel-joukkoja, on Borel-joukko.

Tarkastellaan Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja $\mathscr{P}$. Tarkoituksena on voida verrata joukkoja niiden koon perusteella. Tätä varten määritetään mitan käsite, joka kuvaa joukon kokoa. Mitan käsitteen määrittely seuraa Falconerin määritelmää [**4**] ja poikkeaa hieman yleisesti tunnetusta määritelmästä.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kuvaus $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ on *mitta*, jos μ on ei-negatiivinen siten, että jokaiselle avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle pätee

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) $\mu(A) \leq \mu(B), \qquad \text{jos } A \subset B$,

(3) jos joukot A_1, $A_2, \ldots$ ovat numeroituva (tai äärellinen) jono joukkoja, niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

(4) jos joukot A_1, $A_2, \ldots$ ovat numeroituva (tai äärellinen) jono erillisiä Borel-joukkoja, niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Lukua $\mu(A)$ kutsutaan joukon A *mitaksi*, toisin sanoen $\mu(A)$ määrittää joukon A koon. Myöhemmin määritellään keino laskea eri mittoja.

Huomautus. Määritelmän kohta (4) pätee yleisesti myös laajemmalle kokoelmalle joukkoja, kuin vain Borel-joukoille. Yleisesti määritelmän kohdat (1) – (3) tunnetaan mittateoriassa 'ulkomittana', joka on määritelty kaikille joukoille. Kohdat (1) ja (4) vastaavat yleisesti mitan määritelmää, joka on määritelty σ-algebrassa eli esimerkiksi Borel-joukoille. Tässä työssä on oleellista, että $\mu(A)$ voidaan määrittää kaikille tutkittaville joukoille A. Koska tutkittavat joukot ovat Borel-joukkoja, niin riittää, että määritelmän kohta (4) pätee Borel-joukoille. Mikäli μ toteuttaa määritelmän kohdat (1) – (4) Borel-joukoille, voidaan määritelmää laajentaa ulkomitaksi kaikille joukoille siten, että kohdat (1) – (3) pätevät, jolloin yllä oleva määritelmä on yhtäpitävä yleisesti tunnetun määritelmän kanssa [**4**, s.10-11].

Määritelmä 1.2 kertoo siis mitan ominaisuuksista. Kohdan (1) nojalla tyhjän joukon mitta on nolla. Kohta (2) sanoo, että mitä suurempi joukko, sen suurempi on sen mitta. Kohdan (3) perusteella, jos joukko koostuu numeroituvasta määrästä osia, jotka voivat olla myös päällekkäisiä, on osien mittojen summa vähintään koko yhdisteen mitta. Mikäli joukko voidaan jakaa numeroituvaan määrään erillisiä Borel-joukkoja, niin kohdan (4) perusteella osien mittojen summa on yhtäsuuri kuin koko joukon mitta.

Viimeinen kohta vaatii, että joukkojen on oltava erillisiä Borel-joukkoja, toisin sanoen joukot eivät saa olla päällekkäisiä. Näin ei kuitenkaan käytännössä usein ole. Seuraavat lemmat antavat keinon laskea mitta myös osittain päällekkäisille joukoille.

Lemma 1.3. *Olkoon $A \supset B$, jolloin A voidaan kirjoittaa yhdisteenä erillisistä joukoista $A = B \cup (A \setminus B)$. Olkoon lisäksi $\mu(B) < \infty$. Tällöin, jos A ja B ovat Borel-joukkoja, niin*

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

Todistus. Määritelmä 1.2 (4) antaa $\mu(A) = \mu(B \cup (A \setminus B)) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$, josta saadaan $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. □

Lemma 1.4. *Olkoon $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ kasvava jono Borel-joukkoja siten, että $\mu(A_i) < \infty$ kaikilla i. Tällöin*

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Todistus. Joukkojen A_i yhdiste voidaan esittää yhdisteenä erillisistä joukoista $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$. Tällöin Määritelmän 1.2 sekä Lemman 1.3

nojalla on

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).\end{aligned}$$

□

Lemmat 1.3 ja 1.4 ovat avuksi siinä vaiheessa, kun halutaan teknisesti laskea jonkin joukon mitta. Esimerkkeihin paneudutaan tarkemmin myöhemmin.

Toinen tekninen apukeino on tutkia joukon *kantajaa*. Mitan μ kantajan voidaan ajatella olevan joukko, johon mitta on kasautunut. Tätä varten määritellään suljettu r-säteinen pallo

$$B_r(x) = \{y : |y - x| \le r\}.$$

MÄÄRITELMÄ 1.5. Mitan μ *kantaja* on pienin suljettu joukko X, jolle $\mu(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$, toisin sanoen se on leikkaus sellaisista suljetuista joukoista, joiden komplementti on nollamittainen. Kantaja on aina suljettu ja x kuuluu kantajaan, jos ja vain jos

$$\mu(B_r(x)) > 0 \qquad \text{kaikilla säteillä } r > 0.$$

Sanotaan, että μ on *mitta joukolla* A, jos A sisältää μ:n kantajan.

MÄÄRITELMÄ 1.6. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoitetun osajoukon A mittaa, jolle $0 < \mu(A) < \infty$ kutsutaan *massajakaumaksi* ja voidaankin ajatella, että $\mu(A)$ on joukon A massa.

Määritellään vielä Lebesguen mitta, johon palataan Hausdorffin mitan yhteydessä.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \le x_i \le b_i\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ suuntaissärmiö, jolloin joukon A n-ulotteinen tilavuus on

$$\mathrm{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Tällöin n-ulotteinen *Lebesguen mitta* $\mathscr{L}^n$ määritellään

$$\mathscr{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}.$$

Usein voidaan merkitä $\mathscr{L}^1 = \mathrm{lenght}(A)$, $\mathscr{L}^2 = \mathrm{area}(A)$ ja $\mathscr{L}^3 = \mathrm{vol}(A)$.

1.2. Hausdorffin mitta

Hausdorffin mitta perustuu ideaan, jossa tarkasteltava joukko peitetään valituilla joukoilla. Tämän jälkeen yritetään etsiä raja-arvoa, jossa valittuja joukkoja kutistetaan siten, että ne juuri ja juuri peittävät tarkasteltavan joukon. Kuten luvun alussa todettiin, Hausdorffin mitta voidaan määrittää kaikille joukoille, minkä vuoksi se on hyvin oleellinen fraktaaleja tutkittaessa. Hausdorffin mitan haittapuolena on kuitenkin sen laskennallinen vaikeus useissa tapauksissa.

MÄÄRITELMÄ 1.8. (1) Olkoon U epätyhjä avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Joukon U *halkaisija* on suurin etäisyys minkä tahansa joukon U kahden pisteparin välillä, toisin sanoen $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$.

(2) Olkoon $\{U_i\}$ numeroituva (tai äärellinen) kokoelma joukkoja, joiden suurin halkaisija on δ ja jotka peittävät joukon F. Siis $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ ja $0 < |U_i| \leq \delta$ kaikilla i, jolloin sanotaan, että $\{U_i\}$ on joukon F *δ-peite.*

MÄÄRITELMÄ 1.9. Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja s mielivaltainen ei-negatiivinen luku. Tällöin kaikille $\delta > 0$ määritellään

$$\mathscr{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ on joukon } F\ \delta\text{-peite}\right\}.$$

Tarkoituksena on siis minimoida halkaisijoiden s:nnen potenssien summa, kun tarkastellaan joukon F peittäviä joukkoja, joiden halkaisija on enitään δ. Kun δ pienenee, niin mahdollisten joukon F peitteiden lukumäärä vähenee. Tällöin $\mathscr{H}^s_\delta(F)$ kasvaa ja siten saavuttaa raja-arvon, kun $\delta \to 0$. Tätä raja-arvoa kutsutaan Hausdorffin mitaksi. On huomattavaa, että raja-arvo voi olla myös ääretön.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Raja-arvoa $\mathscr{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(F)$ kutsutaan joukon F *s-ulotteiseksi Hausdorffin mitaksi.*

LAUSE 1.11. *Hausdorffin mitta on Määritelmän 1.2 mukainen mitta, toisin sanoen*

(1) $\mathscr{H}^s(\emptyset) = 0$,
(2) *jos* $E \subset F$, *niin* $\mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{H}^s(F)$
(3) *jos* $\{F_i\}$ *on numeroituva kokoelma joukkoja, niin*

$$\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^s(F_i) \quad \text{ja}$$

(4) *jos* $\{F_i\}$ *on numeroituva kokoelma erillisiä Borel-joukkoja, niin*

$$\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^s(F_i).$$

TODISTUS. (1) Mikä tahansa kokoelma joukkoja peittää tyhjän joukon, jolloin raja-arvoksi saadaan nolla.

(2) Olkoon $E \subset F$ ja olkoon $\{U_i\}$ joukon F δ-peite. Tällöin $\{U_i\}$ on myös joukon E δ-peite. Siten

$$\mathscr{H}^s_\delta(E) \leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ on joukon } F\ \delta\text{-peite}\right\} = \mathscr{H}^s_\delta(F).$$

Antamalla $\delta \to 0$ saadaan $\mathscr{H}^s(E) \leq \mathscr{H}^s(F)$.

(3) Olkoon $\{U_i^j\}$ joukon F_j δ-peite. Tällöin $\bigcup_{j=1}^{\infty}\{U_i^j\}$ on joukon $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ δ-peite. Siten

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_\delta^s\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\Big) &\leq \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|U_i^j|^s : \{U_i^j\} \text{ on joukon } F_j \ \delta\text{-peite}\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i^j|^s : \{U_i^j\} \text{ on joukon } F_j \ \delta\text{-peite}\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathscr{H}_\delta^s(F_j).\end{aligned}$$

Antamalla nyt $\delta \to 0$ saadaan $\mathscr{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathscr{H}^s(F_i)$.

(4) Sivuutetaan, katso [**7**, s.8-9] Theorem 1.4(3).

□

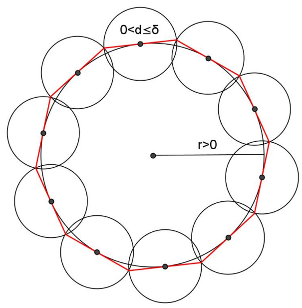
Hausdorffin mitalla on selvä yhteys tuttuihin pituuden, pinta-alan ja tilavuuden käsitteisiin, sillä se on verrannollinen Lebesguen mittaan. Jos F on avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja Borel-joukko, niin voidaan osoittaa, että [**3**, s.70-71]

$$\mathscr{H}^n(F) = c_n\mathscr{L}^n(F), \tag{1.1}$$

missä vakio $c_n = \frac{\alpha(n)}{2^n}$ on n-ulotteisen pallon, jonka halkaisija on 1, tilavuus. Tässä $\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ ja $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$ on gammafunktio, missä $0 < n < \infty$. Tällöin $\mathscr{H}^0(F)$ kertoo joukon F sisältämien pisteiden lukumäärän, $\mathscr{H}^1(F)$ antaa käyrän F pituuden, $\mathscr{H}^2(F) = (4/\pi)\cdot \text{area}(F)$ ja $\mathscr{H}^3(F) = (6/\pi)\cdot\text{vol}(F)$.

Tarkastellaan yksinkertaisena esimerkkinä yksiulotteista Hausdorffin mittaa.

Esimerkki 1.12. Olkoon joukko $F \subset \mathbb{R}^2$ sellaisen ympyrän kehä, jonka säde on r. Valitaan joukon F peittäviksi joukoiksi U_i ympyröitä, joiden halkaisija on enintään δ ja joiden keskipiste kuuluu joukkoon F eli on ympyrän kehällä, katso kuva 1.1. Tällöin $\{U_i\}$ on joukon F δ-peite. Koska tarkastellaan yksiulotteista Hausdorffin mittaa $\mathscr{H}^1(F)$, tarkoituksena on löytää raja-arvo $\mathscr{H}_\delta^1(F)$ kun $\delta \to 0$. Peittävien ympyröiden halkaisijoiden voidaan ajatella myötäilevän ympyrän kehää. Kun halkaisijaa δ pienennetään, niin halkaisijoiden summa vastaa yhä paremmin ympyrän kehän pituutta. Tällöin, kun $\delta \to 0$, raja-arvoksi saadaan $2\pi r$. Siis $\mathscr{H}^1(F) = 2\pi r$.



Kuva 1.1. Joukko F sekä sitä peittävät joukot U_i.

Joukkojen kokoa voidaan muuttaa skaalaamalla niitä jollain tekijällä. Jos joukkoa halutaan suurentaa λ:n verran, niin käyrän pituus pitää kertoa tekijällä λ, pinnan ala pitää kertoa tekijällä λ^2 ja kolmiulotteisen kappaleen tilavuus pitää kertoa tekijällä λ^3. Vastaavasti s-ulotteista Hausdorffin mittaa voidaan skaalata tekijällä λ^s. Seuraava lemma kertoo, kuinka tällaisen skaalatun joukon Hausdorffin mitta saadaan laskettua.

Lemma 1.13. *Jos $F \subset \mathbb{R}^n$ ja $\lambda > 0$, niin*

$$\mathscr{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathscr{H}^s(F),$$

missä $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$, toisin sanoen joukko F, jota on skaalattu tekijällä λ.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon $\{U_i\}$ joukon F δ-peite siten, että $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \leq \mathscr{H}^s_\delta(F) + \epsilon$, jolloin $\{\lambda U_i\}$ on joukon λF $\lambda\delta$-peite. Tällöin Hausdorffin mitan määritelmän nojalla on

$$\mathscr{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \leq \lambda^s \Big(\mathscr{H}^s_\delta(F) + \epsilon\Big).$$

Kun annetaan $\epsilon \to 0$ ja $\delta \to 0$, niin saadaan $\mathscr{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathscr{H}^s(F)$.
Toisaalta edellisen nojalla pätee

$$\lambda^s \mathscr{H}^s(F) = \lambda^s \mathscr{H}^s(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda F) \leq \lambda^s \cdot \frac{1}{\lambda^s} \cdot \mathscr{H}^s(\lambda F) = \mathscr{H}^s(\lambda F),$$

mikä todistaa väitteen. □

Vastaavanlainen skaalausominaisuus saadaan myös joukon F kuvaukselle f.

Lemma 1.14. *Olkoon $F \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $f : F \to \mathbb{R}^m$ kuvaus siten, että*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \tag{1.2}$$

kaikille $x, y \in F$, missä $c > 0$ ja $\alpha > 0$. Tällöin jokaiselle s pätee

$$\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathscr{H}^s(F).$$

Todistus. Olkoon $\{U_i\}$ joukon F δ-peite. Tällöin $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$, mistä seuraa, että $\{f(F \cap U_i)\}$ on joukon $f(F)$ ϵ-peite, missä $\epsilon = c\delta^\alpha$. Tällöin $\sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ ja siten $\mathscr{H}^{s/\alpha}_\epsilon(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathscr{H}^s_\delta(F)$. Väite seuraa tästä antamalla $\delta \to 0$, sillä silloin myös $\epsilon \to 0$. □

Ehdosta (1.2) seuraa, että kuvaus f on jatkuva. Jos $\alpha = 1$ eli $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ kaikille $x, y \in F$, niin kuvausta f sanotaan *Lipschitz-kuvaukseksi*, jolle pätee

$$\mathscr{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathscr{H}^s(F).$$

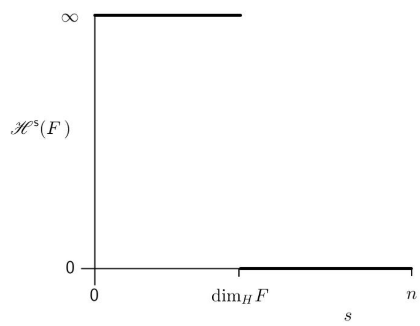
Edelleen, mikäli kuvaukselle f pätee $|f(x) - f(y)| = c|x - y|$, niin tällöin

$$\mathscr{H}^s(f(F)) = c^s \mathscr{H}^s(F). \tag{1.3}$$

Tätä yhtälöä (1.3) kutsutaan Hausdorffin mitan *skaalausominaisuudeksi*.

1.3. Hausdorffin dimensio

Kun tarkastellaan kuvaajaa $\mathscr{H}^s(F)$ s:n funktiona, havaitaan tietty kriittinen arvo s, jossa $\mathscr{H}^s(F)$ 'hyppää' arvosta ∞ arvoon 0. Myöhemmin seuraa päättely, jonka perusteella huomataan, että kriittistä arvoa lukuunottamatta $\mathscr{H}^s(F)$ todella saa ainoastaan arvot ∞ ja 0. Kiinnostavimpana kohteena on siis tuo kriittinen arvo, jota kutsutaankin joukon F *Hausdorffin dimensioksi* ja sitä merkitään $\dim_H F$.



KUVA 1.2. Hausdorffin mitta $\mathscr{H}^s(F)$ s:n funktiona. Hausdorffin dimensio on se arvo s, jossa kuvaaja 'hyppää' arvosta ∞ arvoon 0.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Hausdorffin dimensio määritellään asettamalla

$$\dim_H F = \inf\{s : \mathscr{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathscr{H}^s(F) = \infty\}.$$

Erityisesti

$$\mathscr{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{jos } s < \dim_H F \\ 0 & \text{jos } s > \dim_H F. \end{cases}$$

Jos $s = \dim_H F$, niin $\mathscr{H}^s(F)$ on nolla tai ääretön tai pätee $0 < \mathscr{H}^s(F) < \infty$.

HUOMAUTUS. Määritelmässä on kaksi vaihtoehtoista tapaa dimension määrittämiseen, infimum ja supremum. Ne ovat kuitenkin yhtäpitäviä, mikä nähdään seuraavalla päättelyllä:

Olkoon $t > s$ ja olkoon $\{U_i\}$ joukon F δ-peite. Tällöin, koska $|U_i| \leq \delta$ kaikilla i, saadaan $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$. Hausdorffin mitan määritelmä antaa, kun tarkastellaan suurinta alarajaa, infimumia, $\mathscr{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s}\mathscr{H}_\delta^s(F)$. Antamalla $\delta \to 0$ nähdään, että jos $\mathscr{H}^s(F) < \infty$, niin $\mathscr{H}^t(F) = 0$, kun $t > s$. Toisaalta, koska $\delta > 0$, saadaan $\delta^{s-t}\mathscr{H}_\delta^t(F) \leq \mathscr{H}_\delta^s(F)$. Jälleen antamalla $\delta \to 0$ nähdään, että jos $\mathscr{H}^t(F) > 0$, niin $\mathscr{H}^s(F) = \infty$, kun $t > s$.

Tarkastellaan esimerkkinä litteää kiekkoa.

ESIMERKKI 1.16. Olkoon $F \subset \mathbb{R}^3$ litteä kiekko, jonka säteen pituus on 1. Yleisesti tunnettujen pituuden, pinta-alan ja tilavuuden ominaisuuksien perusteella sekä yhtälön (1.1) nojalla voidaan todeta, että

$$\mathscr{H}^1(F) = \text{pituus}(F) = \infty \qquad \text{ja} \qquad \mathscr{H}^3(F) = (6/\pi) \cdot \text{til}(F) = 0.$$

Yhtälöstä (1.1) saadaan lisäksi, että $0 < \mathscr{H}^2(F) = (4/\pi) \cdot \text{ala}(F) < \infty$. Tällöin

$$\dim_H F = 2 \qquad \text{ja} \qquad \mathscr{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } s < 2 \\ 0, & \text{jos } s > 2. \end{cases}$$

1.4. Laatikkodimensio

MÄÄRITELMÄ 1.17. Olkoon F epätyhjä ja rajoitettu avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja olkoon $N_\delta(F)$ pienin lukumäärä joukkoja, joiden halkaisija on korkeitaan δ ja jotka peittävät joukon F. Tällöin joukon F *alempi* ja *ylempi laatikkodimensio* määritellään asettamalla

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad \text{ja} \quad \overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Jos raja-arvot ovat yhtäsuuret, niin joukon F *laatikkodimensio* on

$$\dim_B F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}.$$

Tässä *alemmalla* ja *ylemmällä raja-arvolla* tarkoitetaan seuraavaa:

$$\underline{\lim}_{\delta \to 0} f(\delta) = \lim_{r \to 0} \big(\inf\{f(\delta) : 0 < \delta < r\} \big),$$
$$\overline{\lim}_{\delta \to 0} f(\delta) = \lim_{r \to 0} \big(\sup\{f(\delta) : 0 < \delta < r\} \big).$$

Laatikkodimension määritelmässä esiintyvä δ on siis määritelty tarkoittamaan joukon F peitejoukkojen suurinta halkaisijaa ja $N_\delta(F)$ tällaisten joukkojen pienintä lukumäärää. Voidaan kuitenkin osoittaa, että on yhtäpitävää määrittää laatikkodimensio myös toisin, esimerkiksi määrittelemällä $N_\delta(F)$ pienimmäksi lukumääräksi kuutioita, joiden sivun pituus on δ. Alaindeksinä esiintyvä B-kirjain tulee englanninkielisestä nimestä 'box-counting dimension', joka viittaa juuri laatikoihin tai kuutioihin.

LAUSE 1.18. *Laatikkodimension määritelmässä 1.17 esiintyvien peittojen lukumääräksi $N_\delta(F)$ on yhtäpitävää valita mikä tahansa seuraavista:*

(1) *pienin lukumäärä joukkoja, joiden halkaisija on korkeintaan δ ja jotka peittävät joukon F;*
(2) *pienin lukumäärä koordinaattiakseleiden suuntaisia kuutioita, joiden sivun pituus on δ ja jotka peittävät joukon F;*
(3) *pienin lukumäärä koordinaattiakseleiden suuntaisia, erillisiä kuutioita (siten, että niillä voi kuitenkin olla yhteinen reuna), joiden sivun pituus on δ ja jotka peittävät joukon F;*
(4) *pienin lukumäärä suljettuja palloja, joiden halkaisija on δ ja jotka peittävät joukon F;*
(5) *suurin lukumäärä epäyhtenäisiä palloja, joiden halkaisija on δ ja joiden keskipiste on joukossa F.*

TODISTUS. Kohta (1) on siis Määritelmän 1.17 mukainen ja sen voidaan osoittaa olevan yhtäpitävää kohdan (3) kanssa seuraavasti:
Olkoon $N_\delta(F)$ Määritelmän 1.17 mukainen ja olkoon $M_\delta(F)$ muotoa $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \cdots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$, missä m on kokonaisluku, olevien erillisten kuutioiden pienin lukumäärä, kuten kohdassa (3). Jos tarkastellaan joukkoja, joiden halkaisija on $\delta\sqrt{n}$, niin huomataan, että nämä muodostavat joukon F peitteen, jonka lukumäärälle pätee

$$N_{\delta\sqrt{n}}(F) \le M_\delta(F).$$

Jos $\delta\sqrt{n} < 1$, niin

$$\frac{\log N_{\delta\sqrt{n}}(F)}{-\log(\delta\sqrt{n})} \leq \frac{\log M_\delta(F)}{-\log\sqrt{n} - \log\delta},$$

jolloin tarkasteltaessa raja-arvoa $\delta \to 0$ saadaan

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log\delta}$$

sekä vastaavasti ylemmälle raja-arvolle.

Jos tarkastellaan mitä tahansa joukkoa, jonka halkaisija on δ, niin kaksiulotteisessa tapauksessa huomataan, että $N_\delta(F) \leq 4 \cdot M_\delta(F)$. Kolmiulotteisessa tapauksessa vastaavasti $N_\delta(F) \leq 8 \cdot M_\delta(F)$ ja siten n-ulotteisessa tapauksessa saadaan $N_\delta(F) \leq 2^n \cdot M_\delta(F)$. Tällöin

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{\log(2^n \cdot M_\delta(F))}{-\log\delta} = \frac{n\cdot\log 2 + \log M_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Nyt tarkasteltaessa raja-arvoa $\delta \to 0$ saadaan

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Vastaava arvio saadaan jälleen myös ylemmälle raja-arvolle. Siten kohdat (1) ja (3) ovat yhtäpitäviä.

Osoitetaan sitten kohdat (2) ja (3) yhtäpitäviksi:
Olkoon $N'_\delta(F)$ kohdan (2) mukainen pienin lukumäärä joukon F peittäviä koordinaattiakseleiden suuntaisia kuutioita, joiden sivun pituus on δ ja olkoon $M_\delta(F)$ kohdan (3) mukainen, kuten edellä. Aivan vastaavasti, kuten edellä, huomataan, että $N'_\delta(F) \leq 2^n \cdot M_\delta(F)$ ja siten

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log\delta}$$

sekä vastaavasti ylemmälle raja-arvolle.

Tarkastellaan nyt kuutioita, joiden sivun pituus on $\delta/2$. Otetaan maksimaalinen kokoelma tällaisia kuutioita siten, että ne ovat erillisiä ja niiden keskipisteet ovat joukossa F. Olkoon tämän kokoelman kuutioiden lukumäärä $P_{\delta/2}(F)$. Maksimaalisuuden nojalla lisäämällä yksikin tällainen kuutio erillisyys ei enää päde. Nyt tuplaamalla sivun pituus saadaan joukolle F peite kuutioista, joiden sivun pituus on δ. Tämä peite on myös pienin mahdollinen. Siten $N'_\delta(F) = P_{\delta/2}(F)$. Koska jokainen kuutio joukosta $M_\delta(F)$ leikkaa korkeintaan 4^n kappaletta joukon $P_{\delta/2}(F)$ kuutioista, saadaan $M_\delta(F) \leq 4^n \cdot N'_\delta(F)$. Siten

$$\frac{\log M_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \frac{\log(4^n \cdot N'_\delta(F))}{-\log\delta} = \frac{n\cdot\log 4 + \log N'_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Tarkasteltaessa raja-arvoa $\delta \to 0$ saadaan

$$\underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log\delta} \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N'_\delta(F)}{-\log\delta}.$$

Jälleen vastaava arvio saadaan myös ylemmälle raja-arvolle. Siten myös kohdat (2) ja (3) ovat yhtäpitäviä.

Muille kohdille voidaan tehdä aivan vastaavat arviot ja siten voidaan todeta, että määritelmät (1) – (5) ovat yhtäpitäviä. □

Laatikkodimensio voidaan laskea myös erikokoisten peittävien joukkojen avulla seuraavan lemman mukaisesti:

LEMMA 1.19. *Olkoon* (δ_k) *vähenevä jono siten, että* $\delta_{k+1} \geq c\delta_k$ *jollekin vakiolle* $0 < c < 1$. *Tällöin*

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

$$\textit{ja} \qquad \underline{\dim}_B F = \underline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \underline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

TODISTUS. Olkoon $\delta_{k+1} \leq \delta < \delta_k$. Peitteiden halkaisijaa kasvattamalla peitteiden lukumäärä pienenee eli $\log N_\delta(F) \geq \log N_{\delta_k}(F)$. Logaritmin kasvavuuden nojalla $\log \delta \geq \log \delta_{k+1}$ eli $-\log \delta \leq -\log \delta_{k+1}$. Tällöin

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_{k+1}},$$

joten tarkasteltaessa raja-arvoja saadaan

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}.$$

Vastaava arvio saadaan myös alemmalle raja-arvolle. Toisaalta

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_k} = \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log(\delta_{k+1}/\delta_k)} \leq \frac{\log N_{\delta_{k+1}}(F)}{-\log \delta_{k+1} + \log c}$$

ja siten tarkasteltaessa raja-arvoja saadaan

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k}$$

ja vastaavasti alemmalle raja-arvolle. Siis väite pätee. □

Lasketaan yksinkertaisena esimerkkinä dimensio kuutiolle.

ESIMERKKI 1.20. Olkoon joukko $F \subset \mathbb{R}^3$ kuutio, jonka sivun pituus on yksi. Peitetään joukko koordinaattiakseleiden suuntaisilla, erillisillä kuutioilla, joiden sivun pituus on $\frac{1}{2^k}$. Tällöin $\delta_k = \frac{1}{2^k}$ ja $N_{\delta_k}(F) = (\frac{1}{\delta_k})^3 = (2^k)^3$. Siten

$$\frac{\log N_{\delta_k}(F)}{-\log \delta_k} = \frac{\log(2^k)^3}{-\log \frac{1}{2^k}} = \frac{\log(2^k)^3}{\log 2^k} \to 3,$$

kun $k \to \infty$. Siten Lemman 1.19 nojalla on $\dim_B(F) = 3$.

1.5. Hausdorffin dimension ja laatikkodimension yhtäläisyyksistä

Hausdorffin dimensiolle ja laatikkodimensiolle voidaan osoittaa joitain tuloksia niiden suhteesta toisiinsa. Määritelmiä katsoessa yksi selvä ero on joukon F peittävien joukkojen valinta. Hausdorffin dimensiossa peittävät joukot U_i valitaan mahdollisimman pieniksi, mutta ne voivat olla keskenään hyvinkin erikokoisia. Laatikkodimensiossa halutaan yhtälailla mahdollisimman pieniä peitteitä, mutta ne kaikki valitaan yleensä samankokoisiksi. Tästä erosta seuraa epäyhtälö dimensioille.

LAUSE 1.21. *Olkoon joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja olkoon $N_\delta(F)$ pienin lukumäärä joukkoja, joiden halkaisija on δ ja jotka peittävät joukon F. Tällöin*

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F. \tag{1.4}$$

TODISTUS. Koska $\underline{\lim}_{\delta\to 0} x_\delta \leq \overline{\lim}_{\delta\to 0} x_\delta$ kaikilla x_δ, niin jälkimmäinen epäyhtälö on selvä. Määritelmä 1.9 antaa $\mathscr{H}^s_\delta(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$. Oletetaan, että $s < \dim_H F$. Tällöin $1 < \mathscr{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(F)$ eli on olemassa $\delta_0 > 0$ siten, että $\mathscr{H}^s_\delta(F) > 1$ kaikilla $0 < \delta < \delta_0$. Tällöin $\log \mathscr{H}^s_\delta(F) > 0$ kaikilla $0 < \delta < \delta_0$ ja saadaan arvio

$$\log N_\delta(F)\delta^s = \log N_\delta(F) + s\log\delta \geq \log \mathscr{H}^s_\delta(F) > 0,$$

kaikilla $0 < \delta < \delta_0$. Siten tutkimalla raja-arvoa $\delta \to 0$ saadaan

$$s \leq \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta} = \underline{\dim}_B F,$$

mikä pätee kaikilla $s < \dim_H F$. Tällöin on siis oltava $\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F$. □

Joissain tilanteissa Hausdorffin ja laatikkodimension välille saadaan myös yhtäsuuruus. Tällaisissa tilanteissa on kyse jollain tavalla 'säännöllisistä' joukoista. Työn varsinaiselle aiheelle, itsesimilaareille joukoille, tämä yhtäsuuruus pätee ja se tullaan todistamaan Luvussa 2. Edelliseen tulokseen voidaan lisäksi yhdistää Määritelmän 1.6 mukainen massajakauma seuraavalla tavalla:

LAUSE 1.22. *Olkoon μ massajakauma joukolla F. Oletetaan, että jollekin $s \geq 0$ on olemassa luvut $c > 0$ ja $\delta_0 > 0$ siten, että*

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

kaikille joukoille U, joille $|U| \leq \delta_0$. Tällöin $\mathscr{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ ja

$$s \leq \dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

TODISTUS. Olkoon $\{U_i\}$ mikä tahansa kokoelma joukon F peitteitä, joiden halkaisija on enintään δ_0, jolloin

$$0 < \mu(F) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s.$$

Nyt siis $\mu(F) \leq c\mathscr{H}^s_\delta(F)$, kun $\delta \leq \delta_0$. Antamalla $\delta \to 0$ saadaan $\mathscr{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$. □

LUKU 2

Itsesimilaari joukko

Tässä luvussa tutkitaan työn varsinaista aihetta, itsesimilaareja joukkoja. Itsesimilaarit joukot saadaan jostain perusjoukosta kuvaamalla joukkoa yhä uudelleen kuvauksella, joka kutistaa alkuperäistä joukkoa. Näin voidaan jatkaa äärettömiin, jolloin itsesimilaari joukko koostuu näistä yhä pienemmistä ja pienemmistä itsensä kopioista. Näille joukoille määritetään myös niiden dimensio, joka lopulta yhdistyy edellisessä luvussa määritettyihin Hausdorffin dimensioon ja laatikkodimensioon. Lähdekirjallisuutena tässä luvussa on K. Falconer, Fractal geometry [**4**], K. Falconer, Techniques in fractal geometry [**5**] sekä G. Edgar, Measure, topology and fractal geometry [**2**].

2.1. Iteroiva systeemi ja itsesimilaari joukko

Tarkoituksena on tutkia tietynlaisia geometrisia kuvioita, fraktaaleja, jotka koostuvat samanlaisina toistuvista osista. Aluksi määritellään joukko sellaisista kuvauksista, jotka muodostavat niin sanotun *iteroivan systeemin*. Tämän avulla päästään lopulta itsesimilaareihin joukkoihin.

MÄÄRITELMÄ 2.1. *Iteroivaksi systeemiksi* kutsutaan kuvausten f_i kokoelmaa $\{f_1, \ldots, f_m\}$ jollain $m \geq 2$. Iteroinnissa annettua pistettä kuvataan toistuvasti iteroivan systeemin kuvauksilla.

Itsesimilaarille joukolle iteroivan systeemin kuvauksilla on tietty ominaisuus: ne kutistavat kuvattavaa joukkoa. Tällaisia kuvauksia kutsutaan pienennöksiksi.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Olkoon D epätyhjä ja suljettu avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Kuvausta $S : D \to D$ kutsutaan *muunnoskuvaukseksi joukolla* D, jos on olemassa luku $c > 0$, siten, että

$$|S(x) - S(y)| \leq c|x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in D.$$

Jos luvulle c pätee $0 < c < 1$, niin kuvausta S kutsutaan *pienennökseksi.* Lisäksi, jos $|S(x) - S(y)| = c|x - y|$, missä $0 < c < 1$, niin S kuvaa joukot geometrisesti samanlaisiksi ja tällöin kuvausta S kutsutaan *similaariksi kuvaukseksi.*

HUOMAUTUS. Pienennös on Lipschitz-kuvaus ja siten jatkuva kuvaus.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Olkoon $S_1, ..., S_m$ pienennöksiä. Joukon D osajoukkoa F kutsutaan *invariantiksi muunnoskuvauksille* S_i, toisin sanoen *muuttumattomaksi*, jos sille pätee

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F). \tag{2.1}$$

HUOMAUTUS. Muuttumattomasta joukosta F käytetään usein myös nimistystä *attraktori.*

Pienennökset S_i kuvaavat joukon F geometrisesti samanlaiseksi, mutta muuttavat sen kokoa. Kun joukkoa F kuvataan pienennöksillä S_i, saadaan siis joukon F kopioita pienoiskoossa. Jos kaikki nämä pienemmät kopiot yhdistämällä saadaan alkuperäinen joukko F, sanotaan joukkoa F muuttumattomaksi.

Seuraavaksi määritellään etäisyys joukon D osajoukkojen välillä.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon $\mathscr{S}$ kokoelma kaikista epätyhjistä, kompakteista, joukon D osajoukoista. Merkitään

$$A_\delta = \{x \in D : |x-a| \leq \delta \quad \text{jollekin } a \in A\}$$

eli A_δ on joukko kaikista niistä pisteistä, jotka ovat etäisyydellä δ joukosta $A \in \mathscr{S}$. Määritellään *etäisyys d joukolla $\mathscr{S}$* asettamalla

$$d(A,B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \quad \text{ja} \quad B \subset A_\delta\}.$$

Tätä etäisyyttä kutsutaan usein *Hausdorffin metriikaksi*.

LAUSE 2.5. *Etäisyys d on metriikka eli se toteuttaa seuraavat ehdot:*

(1) $0 \leq d(A,B) < \infty$ *ja* $d(A,B) = 0$ *jos ja vain jos* $A = B$,
(2) $d(A,B) = d(B,A)$ *ja*
(3) $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ *mille tahansa A, B ja C joukossa $\mathscr{S}$.*

TODISTUS. (1) Määritelmän nojalla on selvää, että $d(A,B) \geq 0$. Joukko D on kompakti, joten se on rajoitettu, olkoon sen halkaisija $|D| = \delta$. Jos $A \neq \emptyset$, niin tällöin $A_\delta = D$. Siten $d(A,B) < \infty$.
Olkoon $A = B$. Tällöin jokaiselle $\delta > 0$ pätee $A \subset B_\delta$. Siis $d(A,B) = 0$. Olkoon nyt $A, B \in \mathscr{S}$ siten, että $d(A,B) = 0$. Jos $x \in A$, niin kaikille $\delta > 0$ pätee $x \in B_\delta$ ja siten $\operatorname{dist}(x,B) = 0$. Koska B on kompakti ja siten suljettu, niin $x \in B$. Siis $A \subset B$. Aivan vastaavasti saadaan $B \subset A$, joten on oltava $A = B$.
(2) Määritelmä sisältää mahdollisuuden järjestyksen vaihtamiseen, joten selvästi on $d(A,B) = d(B,A)$.
(3) Olkoon $A, B, C \in \mathscr{S}$ ja olkoon $\delta > 0$. Jos $x \in A$, niin on olemassa $y \in B$ siten, että $|x-y| \leq d(A,B) + \delta$. Samoin on olemassa $z \in C$ siten, että $|y-z| \leq d(B,C) + \delta$. Kolmioepäyhtälö antaa $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq d(A,B) + d(B,C) + 2\delta$, joten $A \subset C_\gamma$, missä $\gamma = d(A,B) + d(B,C) + 2\delta$. Samoin voidaan osoittaa, että $C \subset A_\gamma$. Siten $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C) + 2\delta$. Koska yhtälö on tosi kaikille $\delta > 0$, niin $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

□

LAUSE 2.6. *Olkoon $S_1,\ldots,S_m$ pienennöksiä joukolla $D \subset \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x-y| \qquad (x, y \in D),$$

missä $c_i < 1$ kaikilla i. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen, epätyhjä, kompakti joukko F, joka on muuttumaton kuvaukselle S_i, toisin sanoen pätee

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Lisäksi, jos määritellään muunnoskuvaus S joukolla $\mathscr{S}$ asettamalla

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E) \tag{2.2}$$

ja merkitään joukon S k:nnetta iteraatiota S^k, missä $S^0(E) = E, S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$ kaikille $k \geq 1$, niin tällöin

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E) \tag{2.3}$$

mille tahansa joukolle $E \in \mathscr{S}$ siten, että $S_i(E) \subset E$ kaikilla i.

TODISTUS. Kuvauksen S määritelmän nojalla se kuvaa kaikki joukon $\mathscr{S}$ alkiot takaisin joukkoon $\mathscr{S}$. Olkoon E mikä tahansa joukon $\mathscr{S}$ osajoukko siten, että $S_i(E) \subset E$ kaikilla i. Tällainen joukko E on olemassa, sillä se voidaan valita origokeskeiseksi ympyräksi, jonka säde on riittävän suuri siten, että kuvajoukot sisältyvät siihen. Koska kuvaukset S_i kutistavat joukkoa E, niin riittävän suuri säde voidaan löytää. Tällöin $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$ siten, että $S^k(E)$ on vähenevä jono epätyhjiä kompakteja joukkoja, ja siten sillä on välttämättä epätyhjä kompakti leikkaus $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$. Koska $S^k(E)$ on vähenevä jono, niin tällöin $S(F) = F$ ja siten F on muuttumaton. Yksikäsitteisyys: Olkoon joukot $A, B \in \mathscr{S}$, jolloin

$$d(S(A), S(B)) = d\Big(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)\Big) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B)).$$

Tällöin

$$d(S(A), S(B)) \leq \Big(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\Big) d(A, B). \tag{2.4}$$

Mikäli nyt $S(A) = A$ ja $S(B) = B$ ovat molemmat muuttumattomia joukkoja, niin koska $c_i < 1$ kaikilla i, on oltava $d(A, B) = 0$ ja siten $A = B$. □

Tämän lauseen suurin hyöty on joukon F approksimoinnissa. Kun joukkoa F halutaan havainnollistaa piirtämällä, antaa kuvauksen S k:nnes iteraatio $S^k(E)$ siihen hyvän approksimaation. Lausetta tarvitaan myös itsesimilaarin joukon dimensiota määritettäessä. Seuraavaksi onkin siis syytä määrittää itsesimilaari joukko.

MÄÄRITELMÄ 2.7. Olkoon $S_1, ..., S_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ similaareja kuvauksia, toisin sanoen

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i |x - y|$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$, missä $0 < c_i < 1$. Lukua c_i kutsutaan kuvauksen S_i *suhdeluvuksi.* Joukkoa, joka on muuttumaton näille similaarien kuvausten kokoelmalle, kutsutaan *itsesimilaariksi joukoksi.*

Muuttumattomalla joukolla tarkoitettiin joukkoa, joka saadaan pienennösten yhdisteenä. Itsesimilaari joukko voidaan siis esittää yhdisteenä similaarikuvausten kuvajoukoista. Siten se on yhdiste lukuisista pienemmistä ja pienemmistä itsensä kopioista; tästä myös nimitys itsesimilaari joukko. Siis, jos tarkastellaan mitä tahansa osaa koko joukosta, se on geometrisesti samanlainen kuin koko joukko. Luvussa 3 on esitetty useita esimerkkejä itsesimilaareista joukoista.

2.2. Itsesimilaarin joukon dimensio

Tutkittaessa itsesimilaareja joukkoja on oleellista määrittää niiden dimensio, sillä se kuvaa joukon kokoa ja siten joukkoja voidaan verrata toisiinsa. Dimensiolle saadaan johdettua hyvinkin yksinkertainen laskukaava, jota on useissa tapauksissa helppo käyttää. Laskukaavan antavaa lausetta varten on kuitenkin ensin määritettävä *avoimen joukon ehto*, joka vaatii, että joukon F pienennökset eivät ole 'liian' päällekäisiä.

MÄÄRITELMÄ 2.8. Olkoon $S_1, ..., S_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ similaareja kuvauksia. Sanotaan, että kuvaukset S_i toteuttavat *avoimen joukon ehdon*, jos on olemassa epätyhjä, rajoitettu, avoin joukko V siten, että

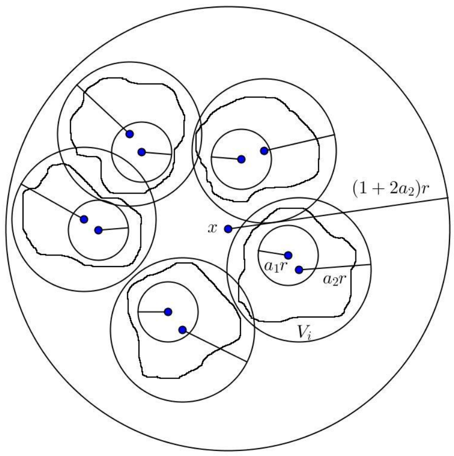
$$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(V), \tag{2.5}$$

missä yhdiste koostuu erillisistä joukoista.

Dimension laskemista varten tarvitaan vielä seuraava geometrinen tulos:

LEMMA 2.9. *Olkoon $\{V_i\}$ kokoelma erillisiä, avoimia avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja siten, että jokainen V_i sisältää pallon, jonka säde on $a_1 r$ ja jokainen V_i sisältyy palloon, jonka säde on $a_2 r$. Tällöin mikä tahansa pallo B, jonka säde on r, leikkaa enintään $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ kappaletta sulkeumia $\overline{V}_i$.*

TODISTUS. Vertaa perusteluja kuvaan 2.1. Olkoon pallo $B = B_r(x)$. Jos $\overline{V}_i$ leikkaa palloa $B_r(x)$, niin $\overline{V}_i$ sisältyy palloon, jonka keskipiste on pallon B keskipiste ja säde $(1 + 2a_2)r$ eli palloon $B_{(1+2a_2)r}(x)$. Olkoon q se luku, kuinka montaa sulkeumaa $\overline{V}_i$ pallo $B_r(x)$ leikkaa. Kun tarkastellaan joukkojen V_i sisältämiä $a_1 r$-säteisiä erillisiä palloja, huomataan, että niitä voi sisältyä palloon $B_{(1+2a_2)r}(x)$ enintään q kappaletta. Kun otetaan huomioon pallojen tilavuudet, saadaan $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$, josta saadaan $q \leq (1 + 2a)^n a_1^{-n}$. □



KUVA 2.1. Erilliset joukot V_i ja niihin sisältyvät sekä niitä ympäröivät pallot.

Seuraava lause on tämän työn oleellisimpia tuloksia. Se antaa yksinkertaisen tavan laskea dimensio sellaisille itsesimilaareille joukoille, joille avoimen joukon ehto on voimassa. Lauseessa yhdistyvät myös aiemmin Luvussa 1 määritetyt Hausdorffin dimensio ja laatikkodimensio.

LAUSE 2.10. *Olkoon kuvaukset S_i avaruuden $\mathbb{R}^n$ similaareja kuvauksia, joiden suhdeluvut ovat c_i, missä $1 \leq i \leq m$, siten, että avoimen joukon ehto* (2.5) *on voimassa. Jos joukko F on muuttumaton eli sille pätee*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F), \tag{2.6}$$

niin $dim_H F = dim_B F = s$, missä luku s saadaan yhtälöstä

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1. \tag{2.7}$$

Lisäksi luvulle s pätee $0 < \mathscr{H}^s(F) < \infty$.

TODISTUS. Olkoon luku s siten, että se toteuttaa yhtälön (2.7). Mille tahansa joukolle A merkitään $A_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(A)$. Olkoon J_k joukko, joka sisältää kaikki k-termiset jonot $(i_1, \ldots, i_k)$, missä $1 \leq i_j \leq m$. Käyttämällä yhtälöä (2.6) toistuvasti, voidaan joukko F kirjoittaa muodossa

$$F = \bigcup_{J_k} F_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Tarkistetaan, että nämä joukon F peitteet ovat sopiva yläraja Hausdorffin mitalle. Koska kuvaus $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}$ on similaarikuvaus, jonka suhdeluku on $c_{i_1} \cdots c_{i_k}$, niin tällöin yhtälön (2.7) nojalla on

$$\sum_{J_k} |F_{i_1,\ldots,i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s |F|^s = \Big(\sum_{i_1} c_{i_1}^s\Big) \cdots \Big(\sum_{i_k} c_{i_k}^s\Big) |F|^s = |F|^s.$$

Mille tahansa $\delta > 0$ voidaan valita k siten, että $|F_{i_1,\ldots,i_k}| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$, joten $\mathscr{H}^s_\delta(F) \leq |F|^s$ ja siten antamalla $\delta \to 0$ saadaan $\mathscr{H}^s(F) \leq |F|^s$ ja $\dim_H(F) \leq s$.

Olkoon I joukko, joka koostuu kaikista äärettömistä jonoista $I = \{(i_1, i_2, \ldots) : 1 \leq i_j \leq m\}$ ja olkoon $I_{i_1,\ldots,i_k} = \{(i_1, \ldots, i_k, q_{k+1}, \ldots) : 1 \leq q_j \leq m\}$ 'sylinteri', joka sisältää ne joukon I jonot, joiden ensimmäiset termit ovat $(i_1, \ldots, i_k)$. Asetetaan joukolle I mitta μ siten, että $\mu(I_{i_1,\ldots,i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s$. Koska $(c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \cdots c_{i_k} c_i)^s$ eli $\mu(I_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1,\ldots,i_k,i})$, niin tällöin μ todella on massajakauma joukon I osajoukoilla ja $\mu(I) = 1$. Nyt μ voidaan muuntaa massajakaumaksi $\tilde{\mu}$ joukolla F määrittelemällä $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \ldots) : x_{i_1,i_2,\ldots} \in A\}$, missä $A \subset F$ ja $x_{i_1,i_2,\ldots} = \bigcap_{k=1}^\infty F_{i_1,\ldots,i_k}$. Nyt myös $\tilde{\mu}(F) = 1$.

Seuraavaksi tarkistetaan, että $\tilde{\mu}$ toteuttaa Lauseen 1.22 oletukset. Olkoon V avoin joukko, kuten avoimen joukon ehdossa (2.5). Koska $\overline{V} \supset S(\overline{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\overline{V})$, niin vähenevä iteraatioiden jono $S^k(\overline{V})$ suppenee kohti joukkoa F, kuten (2.3). Erityisesti $\overline{V} \supset F$ ja $\overline{V}_{i_1,\ldots,i_k} \supset F_{i_1,\ldots,i_k}$ jokaiselle äärelliselle jonolle $(i_1, \ldots, i_k)$. Olkoon B mikä tahansa pallo, jonka säde on $r < 1$. Arvioidaan lukua $\tilde{\mu}(B)$ olettamalla, että joukon $V_{i_1,\ldots,i_k}$ halkaisija on verrattavissa joukon B halkaisijaan ja että sulkeumat leikkaavat joukkoa $F \cap B$. Supistetaan jokaista ääretöntä jonoa $(i_1, i_2, \ldots) \in I$ ensimmäisten i_k termin jälkeen, joille

$$\Big(\min_i c_i\Big) r \leq c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k} \leq r. \tag{2.8}$$

Olkoon lisäksi Q äärellinen joukko, joka koostuu näiden äärellisten jonojen joukosta. Tällöin jokaiselle äärettömälle jonolle $(i_1, i_2, \dots) \in I$ on olemassa täsmälleen yksi arvo k, jolle $(i_1, \dots i_k) \in Q$. Koska joukot $V_1, \dots V_m$ ovat erillisiä, niin myös joukot $V_{i_1,\dots i_k,1}, \dots, V_{i_1,\dots i_k,m}$ jokaiselle $(i_1, \dots, i_k)$ ovat erillisiä. Käyttämällä tätä tietoa saadaan, että kokoelma avoimia joukkoja $\{V_{i_1,\dots,i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$ on erillinen. Samoin saadaan $F \subset \bigcup_Q F_{i_1,\dots,i_k} \subset \bigcup_Q \overline{V}_{i_1,\cdots,i_k}$.

Valitaan a_1 ja a_2 siten, että V sisältää pallon, jonka säde on a_1 ja sisältyy palloon, jonka säde on a_2. Tällöin, jonoille $(i_1, \dots, i_k) \in Q$, joukko $V_{i_1,\dots,i_k}$ sisältää pallon, jonka säde on $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1$, ja siten myös yhden pallon, jonka säde on $(\min_i c_i) a_1 r$. Lisäksi joukko $V_{i_1,\dots,i_k}$ sisältyy palloon, jonka säde on $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_2$, ja siten myös palloon, jonka säde on $a_2 r$. Olkoon Q_1 joukko, joka koostuu niistä jonoista $c_{i_1} \cdots c_{i_k} a_1$, joille joukot B ja $\overline{V}_{i_1,\dots,i_k}$ leikkaavat. Lemman 2.9 nojalla joukossa Q_1 on enintään $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i c_i)^{-n}$ kappaletta jonoja. Tällöin

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) \leq \mu\Big(\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1,i_2,\dots} \in F \cap B\}\Big) \leq \mu\Big(\{\bigcup_{Q_1} I_{i_1,\dots,i_k}\}\Big),$$

koska, jos $x_{i_1,i_2,\dots} \in F \cap B \subset \bigcup_{Q_1} \overline{V}_{i_1,\dots,i_k}$, niin tällöin on olemassa kokonaisluku k siten, että $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$. Siten käyttämällä yhtälöä (2.8) saadaan

$$\tilde{\mu}(B) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1,\dots,i_k}) = \sum_{Q_1} (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q.$$

Koska mikä tahansa joukko U sisältyy palloon, jonka säde on $|U|$, saadaan $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$, jolloin Lause 1.22 antaa

$$\mathscr{H}^s(F) \geq \tilde{\mu}(F) q^{-1} = q^{-1} > 0$$

ja $\dim_H F \geq s$. On saatu osoitettua, että $\dim_H F = s$.

Olkoon Q mikä tahansa äärettömistä jonoista koostuva joukko siten, että jokaiselle $(i_1, i_2, \dots) \in I$ on olemassa täsmälleen yksi kokonaisluku k, jolle $(i_1, \dots, i_k) \in Q$. Tällöin yhtälöstä (2.7) saadaan induktiolla $\sum_Q (c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k})^s = 1$. Siten, jos joukko Q valitaan kuten yhtälössä (2.8), niin Q sisältää enintään $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ jonoa. Jokaiselle jonolle $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ pätee $|\overline{V}_{i_1,\dots,i_k}| = c_{i_1} \cdots c_{i_q} |\overline{V}| \leq r|\overline{V}|$, joten joukko F voidaan peittää $(\min_i c_i)^{-s} r^{-s}$ joukolla, joiden halkaisija on $r|\overline{V}|$ jokaiselle $r < 1$. Laatikkodimension yhtäpitävästä määritelmästä 1.18(4) seuraa $\overline{\dim}_B F \leq s$. Koska myös Hausdorffin dimensio on s, antaa Lause 1.22 $s = \dim_H F = \dim_B F$. □

Itsesimilaareille joukoille on siis saatu yksinkertainen kaava, jolla joukon dimensio saadaan laskettua, kun avoimen joukon ehto on voimassa. Kuten johdannossa jo alustavasti kerrottiin, fraktaaleille ja erityisesti itsesimilaareille joukoille dimensio on harvoin kokonaisluku. Tämä erottaa itsesimilaarit joukot selvästi perinteisistä geometrisista objekteista, kuten suorista, ympyröistä tai kuutioista. Luvussa 3 syvennytään esimerkkeihin itsesimilaareista joukoista ja tutkitaan niiden ominaisuuksia.

2.3. Itsesimilaarin joukon dimensio implisiittimetodeilla

Hausdorffin dimensiota joukolle E määritettäessä on ensin selvitettävä Hausdorffin mitta $\mathscr{H}^s(E)$ ja tämän jälkeen etsittävä luvulle s arvo, jossa $\mathscr{H}^s(E)$ hyppää äärettömästä nollaan. Käytännössä tämän laskeminen, samoin kuin laatikkodimension laskeminen, voi olla hyvin työlästä. Luku s voi löytyä helpommin, jos sitä ei tarvitse ensin laskea, vaan joukko E määritelläänkin siten, että voidaan varmistua ehdosta $0 < \mathscr{H}^s(E)$ tai $\mathscr{H}^s(E) < \infty$, missä $s = \dim_H E$. Tällaista tapaa, jossa ratkaisuun päästään ilman täsmällistä laskemista, kutsutaan implisiittiseksi metodiksi. Seuraavaksi esitetään kaksi tällaista tapaa.

Lause 2.11. *Olkoon E epätyhjä, kompakti, avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja olkoon $a > 0$ ja $r_0 > 0$. Oletetaan, että jokaiselle joukolle U, jolle $|U| < r_0$, ja joka leikkaa joukkoa E, on olemassa kuvaus $g : E \cap U \to E$ siten, että*

$$a|U|^{-1}|x-y| \leq |g(x) - g(y)|,$$

missä $x, y \in E \cap U$. Tällöin, merkitsemällä $s = \dim_H E$, pätee $\mathscr{H}^s(E) \geq a^s > 0$ ja $\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$.

Todistus. Riittää osoittaa, että kaikille $d > 0$, jos $\mathscr{H}^d(E) < a^d$, niin $\overline{dim}_B E < d$. Nimittäin, jos $\mathscr{H}^d(E) < a^d < \infty$, niin $\dim_H E \leq d$. Tällöin valitsemalla d mielivaltaisen läheltä lukua $\dim_H E$, saadaan $\overline{\dim}_B E \leq \dim_H E$. Siten yhtäsuuruus saadaan yhtälöstä (1.4).

Olkoon $\mathscr{H}^d(E) < a^d$. Tällöin on olemassa joukot $U_1, \ldots, U_m$, jotka leikkaavat joukkoa E ja joille $|U_i| < \min\{\frac{1}{2}a, r_0\}$ siten, että $E \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ ja $\sum_{i=1}^m |U_i|^d < a^d$. (Lisäksi joukkojen U_i on oltava avoimia, sillä kun joukko E on kompakti, niin peitteiden kokoelmasta saadaan äärellinen.) Jos valitaan luku t läheltä lukua d siten, että $0 < t < d$, niin saadaan

$$a^{-t}\sum_{i=1}^m |U_i|^t < 1. \tag{2.9}$$

Oletuksen nojalla on olemassa funktiot $g_i : E \cap U_i \to E$, missä $i = 1, 2, \ldots, m$, siten, että

$$|x-y| \leq a^{-1}|U_i||g_i(x) - g_i(y)|, \tag{2.10}$$

missä $x, y \in E \cap U_i$. Esitetään käänteisfunktiot $\{g_1^{-1}, \ldots, g_m^{-1}\}$ ottamalla sopiva määrittelyjoukko, samaan tapaan kuin iteroivassa systeemissä. Olkoon $I_k = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_j \leq m\}$ k-termisten jonojen joukko, missä luvut $\{1, 2, \ldots, m\}$ ovat kokonaislukuja, ja olkoon $I = \bigcup_{k=0}^\infty I_k$. Jokaiselle $\boldsymbol{i}= (i_1, \ldots, i_k) \in I_k$ määritellään

$$U_{i_1,\ldots,i_k} = g_{i_1}^{-1}(g_{i_2}^{-1}(\cdots(g_{i_k}^{-1}(E))\cdots)).$$

Jotkut näistä joukoista voivat olla tyhjiä, sillä $g_i^{-1}(A) = \emptyset$ jos $A \cap g_i(E \cap U_i) = \emptyset$, mutta kuitenkin $E \subset \bigcup_{\boldsymbol{i} \in I_k} U_{\boldsymbol{i}}$ kaikilla k. Toistamalla yhtälöä (2.10) luvuille $x, y \in U_{i_1,\ldots,i_k}$ saadaan

$$|x-y| \leq a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||g_{i_1} \circ \cdots \circ g_{i_k}(x) - g_{i_1} \circ \cdots \circ g_{i_k}(y)|.$$

Erityisesti

$$|U_{i_1,\ldots,i_k}| \leq a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E|.$$

Olkoon $b = a^{-1}\min_{1\leq i\leq m}|U_i|$. Koska $E \subset \bigcup_{\boldsymbol{i} \in I_k} U_{\boldsymbol{i}}$ kaikilla k, niin annetulle $\delta < |E|$, kaikille $x \in E$ on olemassa $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in I$ siten, että $x \in U_{\boldsymbol{i}}$. Lisäksi voidaan valita k siten, että $b\delta \leq a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E| < \delta$.

Merkitään luvulla $N_\delta(E)$ pienintä lukumäärää joukkoja, joiden halkaisija on enintään δ ja jotka peittävät joukon E. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
N_\delta(E) &\leq \sharp\{\boldsymbol{i} \in I : b\delta \leq a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E|\} \\
&\leq \sum_{\boldsymbol{i}\in I} (b\delta)^{-t}(a^{-k}|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}||E|)^t \\
&\leq |E|^t b^{-t}\delta^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} a^{-kt} \sum_{\boldsymbol{i}\in I_k} (|U_{i_1}|\cdots|U_{i_k}|)^t \\
&= |E|^t b^{-t}\delta^{-t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a^{-t}\sum_{i=1}^{m}|U_i|^t\right)^k \\
&\leq c_1\delta^{-t},
\end{aligned}$$

jollekin $c_1 < \infty$ käyttämällä yhtälöä (2.9). Laatikkodimension määritelmästä 1.17 saadaan

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log\delta} \leq \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log\frac{c_1}{\delta^t}}{-\log\delta} = \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\log c_1}{-\log\delta} + t = t.$$

Siis $\overline{\dim}_B E \leq t < d$, mikä piti osoittaa. $\square$

Lause 2.12. *Olkoon joukko E epätyhjä, kompakti avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja olkoon $a > 0$ ja $r_0 > 0$. Oletetaan, että jokaiselle suljetulle pallolle B, jonka keskipiste kuuluu joukkoon E ja jonka säde on $r < r_0$, on olemassa kuvaus $g : E \to E \cap B$, jolle pätee*

$$ar|x-y| \leq |g(x)-g(y)|,$$

missä $x, y \in E$. Tällöin merkitsemällä $s = \dim_H E$ saadaan $\mathscr{H}^s(E) \leq 4^s a^{-s} < \infty$ ja $\underline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B E = s$.

Todistus. Olkoon $N(r)$ suurin lukumäärä erillisiä, suljettuja palloja, joiden säde on r ja joiden keskipiste on joukossa E. Jos nyt $\dim_H E = s$, niin $N(r) \leq a^{-s}r^{-s}$: Tehdään antiteesi ja oletetaan, että jollekin $r < \min\{a^{-1}, r_0\}$ pätee

$$N(r) > a^{-s}r^{-s}. \tag{2.11}$$

Annetulle yhtälölle (2.11) voidaan löytää $t > s$ siten, että

$$m \equiv N(r) > a^{-t}r^{-t}. \tag{2.12}$$

Siten on olemassa erilliset pallot $B_1, \ldots, B_m$, joiden säde on r ja joiden keskipiste on joukossa E.

Oletuksen nojalla on olemassa kuvaukset $g_i : E \to E \cap B_i$, missä $1 \leq i \leq m$, siten, että

$$ar|x-y| \leq |g_i(x)-g_i(y)| \tag{2.13}$$

Erityisesti, $\{g_1, \ldots, g_m\}$ on iteroiva systeemi (ei välttämättä pienenevä), jolla on attraktori, joka on joukon E osajoukko. Etsitään alaraja attraktorin dimensiolle, joka on siten myös joukon E alaraja.

Olkoon $d_0 = \min_{i\neq j} d(B_i, B_j) > 0$. Käyttämällä yhtälöä (2.13) $(q-1)$ kertaa saadaan

$$d(g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E), g_{j_1}\circ\cdots\circ g_{j_k}(E)) \geq (ar)^{q-1} d(B_{i_q}, B_{j_q}) \geq (ar)^q d_0, \tag{2.14}$$

missä q on pienin kokonaisluku siten, että $i_q \neq j_q$ ja $r < a^{-1}$. Olkoon μ mitta joukolla E ja olkoon se määritelty toistuvalla alajaottelulla siten, että $\mu(g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E)) = m^{-k}$ kaikille $(i_1,\ldots,i_k)$. Toistuvalla alajaottelulla tarkoitetaan sitä, että kuvaukset g_i kuvaavat joukon E osajoukkoihin, jotka edelleen kuvaukset g_{i_j} kuvaavat osajoukkoihin. Osajoukot ovat sisäkkäisiä siten, että $g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E) \supset \bigcup_{i=1}^m g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}\circ g_i(E)$, sillä $g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E) \supset g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}\circ g_i(E)$ kaikilla i. Tällöin mitta on määritelty siten, että $\mu(g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E)) = \sum_{i=1}^m \mu(g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}\circ g_i(E))$.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa joukko, joka leikkaa joukkoa E ja jolle $|U| < d_0$, ja olkoon k pienin kokonaisluku siten, että

$$(ar)^{k+1} d_0 \leq |U| < (ar)^k d_0. \tag{2.15}$$

Yhtälöstä (2.14) saadaan, että U leikkaa joukkoa $g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E)$ enintään k-termisen jonon $(i_1,\ldots,i_k)$ verran, toisin sanoen U leikkaa enintään k-kappaletta joukon $g_{i_1}\circ\cdots\circ g_{i_k}(E)$ erillistä osajoukkoa. Tällöin yhtälöistä (2.12) ja (2.15) saadaan

$$\mu(U) \leq m^{-k} < (ar)^{kt} \leq (d_0 ar)^{-t}|U|^t.$$

Lauseesta 1.22 seuraa, että $\dim_H E \geq t > s$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Voidaan siis päätellä, että jos $\dim_H E = s$, niin $N(r) \leq a^{-s} r^{-s}$ kaikille riittävän pienille r. Tällöin laatikkodimension määritelmästä seuraa, että $\overline{\dim}_B E \leq s$, jolloin dimensioiden välinen yhtäsuuruus saadaan yhtälöstä (1.4).

Lisäksi, käyttämällä palloja, joiden säde on kaksinkertainen, joukko E voidaan peittää $N(r)$ pallolla, joiden säde on $2r$, sillä muuten $N(r)$ erillistä palloa, joiden säde on r ja joiden keskipiste on joukossa E, ei olisi suurin mahdollinen kokoelma. Siten $\mathscr{H}^s_{4r}(E) \leq a^{-s}r^{-s}(4r)^s = 4^s a^{-s}$, josta saadaan $\mathscr{H}^s(E) \leq 4^s a^{-s}$. □

Seuraus 2.13. *Olkoon $\{S_1,\ldots,S_m\}$ iteroiva systeemi, jossa similaarikuvausten S_i suhdeluku on $0 < r_i < 1$ ja olkoon E tästä määräytyvä itsesimilaari joukko. Tällöin, jos $\dim_H E = s$, niin $\mathscr{H}^s(E) < \infty$ ja $\underline{\dim}_B(E) = \overline{\dim}_B(E) = s$.*
Lisäksi, jos $\{S_i(E)\}_{i=1}^m$ ovat erillisiä joukkoja, niin $0 < \mathscr{H}^s(E)$ ja luvulle s pätee $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$.

Todistus. Merkitään $r_{\min} = \min_{1\leq i\leq m} r_i$. Olkoon $x \in E$ ja $r \leq |E|$. Tällöin on olemassa jono $(i_1, i_2, \ldots)$ siten, että $x \in S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$ kaikilla k. Valitaan k siten, että $r_{\min} r < r_{i_1}\cdots r_{i_k}|E| \leq r$. Tällöin $S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k} : E \to E \cap B(x,r)$ on similaarikuvaus, jonka suhdeluku on korkeintaan $r_{\min}|E|^{-1}r$, jolloin Lauseesta 2.12 seuraa $\underline{\dim}_B(E) = \overline{\dim}_B(E) = s$ sekä $\mathscr{H}^s(E) < \infty$.

Oletetaan nyt, että $\min_{i\neq j} \operatorname{dist}(S_i(E), S_j(E)) = d > 0$. Tällöin $\operatorname{dist}(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E), S_{j_1}\circ\cdots\circ S_{j_k}(E)) \geq r_{i_1}\cdots r_{i_{k-1}} d$, jos $(i_1,\ldots,i_k)$ ja $(j_1,\ldots,j_k)$ ovat erillisiä. Jos joukko U leikkaa joukkoa E siten, että $|U| < d$ ja $x \in E\cap U$, niin voidaan löytää $(i_1,\ldots,i_k)$ siten, että $x \in S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$ ja $d r_{i_1}\cdots r_{i_k} \leq |U| < d r_{i_1}\cdots r_{i_{k-1}}$. Siten joukot U ja $S_{j_1}\circ\cdots\circ S_{j_k}(E)$ ovat erilliset kaikille $(j_1,\ldots,j_k) \neq (i_1,\ldots,i_k)$, joten $E\cap U \subset S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k}(E)$. Tällöin $(S_{i_1}\circ\cdots\circ S_{i_k})^{-1} : E\cap U \to E$ on similaarikuvaus, jonka suhdeluku on $(r_{i_1}\cdots r_{i_k})^{-1} \geq d|U|^{-1}$, jolloin Lauseesta 2.11 seuraa $0 < \mathscr{H}^s(E)$ sekä jälleen yhtäsuuruus dimensioiden välille.

Mikäli joukot $\{S_i(E)\}_{i=1}^m$ ovat erillisiä, niin Hausdorffin mitan skaalausominaisuudesta eli yhtälöstä (1.3) saadaan $\mathscr{H}^s(E) = \sum_{i=1}^m \mathscr{H}^s(S_i(E)) = \sum_{i=1}^m r_i^s \mathscr{H}^s(E)$. Koska $0 < \mathscr{H}^s(E) < \infty$, niin saadaan $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$, missä $s = \dim_H E$. □

Seurauksena saatiin siis itsesimilaarille joukolle yhtäsuuruus Hausdorffin ja laatikkodimension välille. On huomattavaa, että yhtäsuuruus saatiin ilman avoimen joukon ehtoa. Tällöin dimension arvoa s ei kuitenkaan saada selville. Mikäli joukkojen tiedetään olevan lisäksi erillisiä, saadaan luku s selville tuttuun tapaan, kuten myös avoimen joukon ehdon toteuttavassa tapauksessa.

2.4. Sovellus kuvankäsittelyyn

Tässä kappaleessa on tarkoitus antaa pieni katsaus siihen, miten itsesimilaareja joukkoja ja iteroivaa systeemiä voidaan hyödyntää kuvankäsittelyssä. Tietotekniikan näkökulmaa ei juurikaan tutkita, vaan matematiikan keinoin annetaan idea siitä, miten tietotekniikka voi näitä tuloksia hyödyntää. Lähdekirjallisuutena on K. Falconer, Techniques in fractal geometry [**5**] sekä M. Barnsley, Fractals everywhere [**1**].

Lauseen 2.6 kohdalla todettiin, kuinka similaarikuvausten S_i avulla joukolle F saadaan hyvä approksimaatio. Usein approksimaatio on hyvä jo vain muutaman kuvauksen jälkeen. Tietotekniikkaa ajatellen tiedon siirto on tehokkaampaa, jos tieto voidaan pakata mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Jos siis esimerkiksi monimutkainen kuva saadaan pakattua käyttämällä varsin vähän tietoa, on sen lähettäminen ja tallentaminen hyvin tehokasta. Miten sitten tiedetään, milloin tarkasteltava kohde voidaan esittää tai approksimoida iteroituvan systeemin muuttumattomien joukkojen avulla? Ja toisaalta, miten voidaan löytää kuvaukset, jotka antavat hyvän approksimaation tarkasteltavalle kohteelle?

Sopivien kuvausten löytäminen onkin usein suurin ongelma. Tietokoneella voidaan kuitenkin piirtää yllättävänkin hyviä approksimaatioita luonnossa esiintyvistä kappaleista, kuten esimerkiksi saniaisista, heinistä, puista tai pilvistä. Näihin ei usein edes tarvita montaa muunnoskuvausta. Barnsley esittää [**1**, s.87] muunnoskuvaukset saniaiselle ja eräälle puulle. Molemmille tarvitaan ainoastaan neljä kuvausta, jotka ovat yllättävän yksinkertaisia. Itsesimilaarisuutta siis esiintyy jollain tavoin myös luonnossa.

Luonnossa esiintyvät kappaleet eivät kuitenkaan aivan täysin vastaa fraktaaleja, esimerkiksi kasvin lehdellä on selvästikin positiivinen pinta-ala. Kuvia voidaan kuitenkin piirtää, sillä kuvan ääriviiva voidaan muodostaa jonkin fraktaalisen käyrän avulla. Kuvasta saadaan tällöin mustavalkoinen.

Itseasiassa kuvista voidaan tehdä myös varjostettuja tai jopa värillisiä. Seuraavassa ei esitetä tarkkoja yksityiskohtia, vaan tarkoituksena on antaa idea siitä, miten varjostus tai värit saadaan kuvaan. Jos jokaiselle muunnoskuvaukselle S_i määritellään todennäköisyys p_i, missä $0 \leq p_i \leq 1$ ja $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, niin muuttumattomalle joukolle F voidaan määritellä massajakauma μ siten, että $\mu(A) = \sum_{i=1}^m p_i \mu(S_i^{-1}(A))$. Tällöin joukko voidaan varjostaa tai jopa värittää sen mukaan, mikä on μ:n tiheys joukon eri pisteissä. Muunnoskuvaukset esitetään usein matriiseina, jolloin todennäköisyys p_i voidaan määrittää matriisin determinantin avulla. Matriisimuotoisista kuvauksista on esimerkkejä seuraavassa luvussa, esimerkkijoukkojen yhteydessä.

Seuraava lause antaa käsityksen siitä, miten hyvä approksimaatio muuttumattomalle joukolle on.

LAUSE 2.14. *Olkoon $S_1, \dots, S_m$ pienennöksiä avaruudessa $\mathbb{R}^n$ siten, että $|S_i(x) - S_i(y)| \leq c|x-y|$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja kaikille i, missä $c < 1$. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa epätyhjä, kompakti joukko. Tällöin*

$$d(E,F) \leq d\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\Big) \frac{1}{(1-c)}, \tag{2.16}$$

missä joukko F on muuttumaton kuvauksille S_i ja d on määritelmän 2.4 mukainen Hausdorffin metriikka.

TODISTUS. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä Hausdorffin metriikalle sekä joukon F muuttumattomuutta saadaan

$$\begin{aligned} d(E,F) &\leq d\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\Big) + d\Big(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(E), F\Big) \\ &= d\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\Big) + d\Big(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(E), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)\Big) \\ &\leq d\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\Big) + c \cdot d(E,F), \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö saadaan yhtälöstä (2.4). Tällöin saadaan

$$d(E,F) - c \cdot d(E,F) \leq d\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad d(E,F) \leq d\Big(E, \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)\Big) \frac{1}{(1-c)}.$$

□

Approksimaatio on siis sitä parempi, mitä lähempänä mallinnettavaa objektia se on. Hausdorffin metriikan voidaan ajatella olevan 'visuaalinen' metriikka, sillä sen avulla on helppo nähdä, ovatko verrattavat joukot kaukana toisistaan. Oletetaan, että joukkojen A ja B välinen etäisyys on $\delta > 0$. Jos nyt joukkoja viedään kauemmaksi toisistaan, niin δ kasvaa melko nopeasti. Tällöin approksimaatio ei ole enää kovin hyvä. Toisaalta, jos δ saadaan hyvin lähelle nollaa, approksimaatiota voidaan pitää erittäin hyvänä.

Lauseesta 2.14 seuraa, että mitä tahansa kompaktia, avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoa voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti itsesimilaarin joukon avulla.

SEURAUS 2.15. *Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä ja kompakti joukko. Tällöin annetulle $\delta > 0$ on olemassa pienennökset $S_1, \dots, S_m$, joille joukko F on muuttumaton siten, että $d(E,F) < \delta$.*

TODISTUS. Olkoon $B_1, \dots, B_m$ kokoelma palloja, jotka peittävät joukon E ja joiden keskipiste on joukossa E ja säde enintään $\frac{1}{4}\delta$. Tällöin $E \subset \bigcup_{i=1}^m B_i \subset E_{\frac{1}{4}\delta}$, missä $E_{\frac{1}{4}\delta}$ tarkoittaa niitä pisteitä, jotka ovat korkeintaan etäisyydellä $\frac{1}{4}\delta$ joukosta E. Jokaiselle i olkoon S_i mikä tahansa pienennös, jolle $c < \frac{1}{2}$ ja joka kuvaa joukon E alkiot joukkoon B_i. Tällöin $S_i(E) \subset B_i \subset (S_i(E))_{\frac{1}{2}\delta}$, joten $\bigcup_{i=1}^m S_i(E) \subset E_{\frac{1}{4}\delta}$ ja $E \subset \bigcup_{i=1}^m (S_i(E))_{\frac{1}{2}\delta}$. Hausdorffin metriikan määritelmän 2.4 nojalla on $d(E, \bigcup_{i=1}^m S_i(E)) < \frac{1}{2}\delta$. Tällöin yhtälö (2.16) antaa $d(E,F) < \delta$, missä joukko F on muuttumaton kuvauksille S_i. □

Muuttumattomilla joukoilla approksimointi yllä olevan todistuksen mukaisesti on kuitenkin melko kehno. Siinä saadaan todennäköisesti hyvin paljon muunnoskuvaksia, jotka eivät kuitenkaan anna toivottua tarkkuutta joukosta F. Lähestymistavan on oltava toinen, jos halutaan vakuuttavia kuvia pienellä lukumäärällä muunnoskuvauksia. Eräs tapa, joka usein tuottaa hyvän tuloksen, on piirtää objektille karkea ääriviiva ja sitten peittää se niin läheltä kuin mahdollista pienemmillä similaareilla kopioilla. Näin määritetyillä similaarikuvauksilla voidaan arvioida muuttumatonta joukkoa, jota puolestaan voidaan verrata mallinnettuun objektiin. Lause 2.14 takaa, että muuttumaton joukko on hyvä approksimaatio, mikäli pienempien kopioiden yhdiste on lähellä objektia. Kokeilemalla ja muuttamalla peittäviä joukkoja kuvaa voidaan entisestään parantaa. Monimutkaisempia kohteita voidaan tehdä 'kerrostamalla' muuttumattomia joukkoja erilaisilla muunnoskuvausten joukoilla.

LUKU 3

Esimerkkejä itsesimilaareista joukoista

Tässä luvussa käsitellään neljää erilaista itsesimilaaria joukkoa. Joukot on valittu siten, että niillä on erilaisia ominaisuuksia sekä niiden dimensiot ovat keskenään erisuuria. Valittujen joukkojen on tarkoitus antaa käsitys erityyppisistä itsesimilaareista joukoista. Joukoista on esitetty myös kuvat, mikä helpottaa joukkojen hahmottamista sekä vertaamista toisiinsa. Esimerkkijoukkojen kuvat on piirretty Fractint-ohjelmalla.

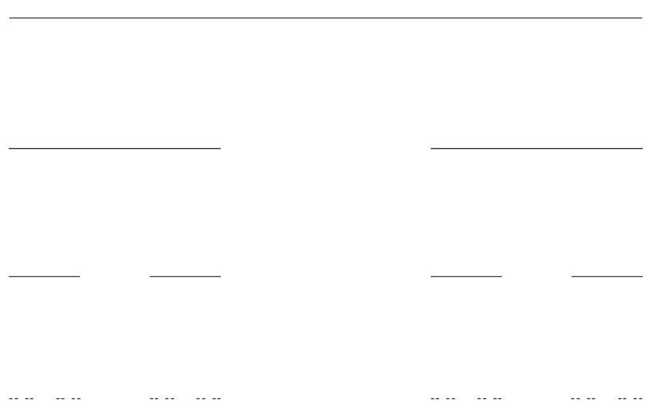
Huomautus. Joukoista esitetyt kuvat on nimetty joukon mukaan, esimerkiksi joukko E, vaikka oikeasti kuvassa on iteraatio E_k, missä k on riittävän suuri approksimoimaan joukkoa E.

3.1. Cantorin joukko

3.1.1. Cantorin joukon itsesimilaarisuus.

Määritelmä 3.1. Olkoon C_0 lukusuoran väli $[0,1]$. Poistetaan suoralta keskimmäinen kolmannes päätepisteitä lukuunottamatta, jolloin saadaan joukko $C_1 = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. Poistamalla nyt saaduilta väleiltä taas keskimmäinen kolmannes saadaan joukoksi $C_2 = [0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$. Jatketaan näin eli poistetaan aina saaduilta väleiltä keskimmäinen kolmannes, jolloin joukko C_k sisältää 2^k väliä, joiden jokaisen pituus on 3^{-k}. *Cantorin joukko* C koostuu joukkojen C_k äärettömästä leikkauksesta eli

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$



Kuva 3.1. Cantorin joukon iteraatiot C_0, C_1 ja C_2 sekä Cantorin joukko C.

Jotta voidaan osoittaa, että edellä määritelty Cantorin joukko on itsesimilaari joukko, on määriteltävä similaarikuvaukset, joiden avulla Cantorin joukko voidaan esittää. Määritellään kuvaukset $S_1, S_2 : [0,1] \to [0,1]$ siten, että

$$S_1(x) = \frac{1}{3}x \qquad \text{ja} \qquad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Tällöin $|S_i(x) - S_i(y)| = \frac{1}{3}|x-y|$, kun $i = 1,2$, joten similaarikuvausten suhdeluku on $\frac{1}{3}$.

Lisäksi itsesimilaarin joukon on oltava muuttumaton kuvauksille S_i. Tämä pätee Cantorin joukolle:

Lause 3.2. *Cantorin joukolle C pätee*

$$C = S_1(C) \cup S_2(C),$$

missä kuvaukset $S_1(x) = \frac{1}{3}x$ ja $S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ovat similaarikuvauksia.

Todistus. Osoitetaan aluksi induktiolla, että $C_{k+1} = S_1(C_k) \cup S_2(C_k)$ kaikille $k = 0,1,2,\dots$ Jos $k=0$, niin $C_1 = S_1(C_0) \cup S_2(C_0) = S_1([0,1]) \cup S_2([0,1]) = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$ eli väite pätee. Oletetaan nyt, että jollekin positiiviselle kokonaisluvulle l pätee

$$C_l = S_1(C_{l-1}) \cup S_2(C_{l-1}) \tag{3.1}$$

ja osoitetaan, että $C_{l+1} = S_1(C_l) \cup S_2(C_l)$. Kun palataan alun määritelmään, jossa Cantorin joukko konstruoitiin geometrisesti, niin joukolle C_{l+1} saadaan

$$\begin{aligned} C_{l+1} &= S_1 \circ S_1(C_{l-1}) \cup S_1 \circ S_2(C_{l-1}) \cup S_2 \circ S_1(C_{l-1}) \cup S_2 \circ S_2(C_{l-1}) \\ &= S_1(S_1(C_{l-1}) \cup S_2(C_{l-1})) \cup S_2(S_1(C_{l-1}) \cup S_2(C_{l-1})) \\ &= S_1(C_l) \cup S_2(C_l), \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus saadaan induktio-oletuksesta (3.1).

Osoitetaan nyt, että $C \subset S_1(C) \cup S_2(C)$. Olkoon $x \in C$. Tällöin $x \in C_1$, joten $x \in [0,\frac{1}{3}]$ tai $x \in [\frac{2}{3},1]$. Oletetaan, että $x \in [\frac{2}{3},1]$, toinen tapaus voidaan osoittaa aivan vastaavasti. Nyt mille tahansa k tiedetään, että $x \in C_{k+1} = S_1(C_k) \cup S_2(C_k)$. Mutta koska $S_1(C_k) \subset S_1([0,1]) = [0,\frac{1}{3}]$, niin on oltava $x \in S_2(C_k)$. Koska tämä pätee kaikille k, niin $x \in S_2(C)$. Toisessa tapauksessa saadaan $x \in S_1(C)$. Tällöin siis $x \in S_1(C) \cup S_2(C)$.

Näytetään vielä, että $C \supset S_1(C) \cup S_2(C)$. Olkoon $x \in S_1(C) \cup S_2(C)$. Tällöin $x \in S_1(C)$ tai $x \in S_2(C)$. Oletetaan, että $x \in S_2(C)$, toinen tapaus saadaan jälleen aivan vastaavasti. Nyt mille tahansa k pätee $x \in S_2(C_k) \subset C_{k+1}$. Siten $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_{k+1} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k = C$. Siis $C \supset S_1(C) \cup S_2(C)$. □

Koska Cantorin joukko on muuttumaton kuvauksille S_i, niin se on itsesimilaari joukko. Pari $\{S_1, S_2\}$ muodostaa tällöin iteroivan systeemin.

3.1.2. Cantorin joukon dimensio. Cantorin joukkoa lähdettiin rakentamaan poistamalla janalta $[0,1]$ kolmasosa. Tätä jatkettiin äärettömiin poistamalla joka vaiheessa saaduilta janoilta kolmasosa, joten mitä lopulta jää jäljelle? Jos ryhdytään tutkimaan Cantorin joukon kokoa pituusmitalla, niin päädytään tulokseen, että sen mitta on nolla.

Lause 3.3. *Cantorin joukon pituus on nolla.*

Todistus. Kuten aluksi todettiin, joukko C_k sisältää 2^k väliä, joiden jokaisen pituus on $(1/3)^k$. Tällöin joukon C_k kokonaispituus on välien pituuksien summa eli $2^k \cdot (1/3)^k = (2/3)^k$. Cantorin joukon pituudeksi saadaan siis $\lim_{k\to\infty}(2/3)^k = 0$. □

Pituus ei näytä olevan järkevä mitta, jos halutaan määrittää Cantorin joukon koko, joukko kun selvästikin sisältää jotain, esimerkiksi luvun 0. Edellisessä luvussa johdettu Lause 2.10 tulee siis tarpeeseen. Sitä varten on kuitenkin tarkistettava, että avoimen joukon ehto (2.5) pätee Cantorin joukolle.

Valitaan sitä varten avoin joukko $V = (0,1)$, jolloin

$$\bigcup_i S_i(V) = S_1(V) \cup S_2(V) = \Big(0, \frac{1}{3}\Big) \cup \Big(\frac{2}{3}, 1\Big) \subset (0,1),$$

missä joukot $(0, \frac{1}{3})$ ja $(\frac{2}{3}, 1)$ ovat erilliset. Siis avoimen joukon ehto pätee.

Nyt voidaan määrittää Cantorin joukon dimensio Lauseen 2.10 avulla:

Lause 3.4. *Cantorin joukon dimensio on* $s = \frac{\log 2}{\log 3} = \dim_H C = \dim_B C$.

Todistus. Koska Lauseen 2.10 oletukset ovat voimassa, niin yhtälön (2.7) nojalla pätee $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$, missä $c_i = \frac{1}{3}$ on Cantorin joukon määrittävien kuvauksien suhdeluku. Tällöin

$$\sum_{i=1}^{2} \Big(\frac{1}{3}\Big)^s = 1 \Leftrightarrow \Big(\frac{1}{3}\Big)^s = \frac{1}{2} \Leftrightarrow s = \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{3}} \Leftrightarrow s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

□

Cantorin joukon dimensiolle pätee siis $0 < \dim C < 1$. Tällaista lukua voi olla vaikea käsittää, kun Euklidisessa avaruudessa on totuttu dimension olevan kokonaisluku. Toisaalta, koska juuri on osoitettu, että Cantorin joukon pituus on nolla, niin on selvää, ettei joukko voi olla 1-ulotteinen, vaan jotain pienempää.

3.1.3. Cantorin joukon ominaisuuksia. Mitä pisteitä Cantorin joukkoon oikeastaan kuuluu? Jos väli $[a,b]$ on eräs suljettu väli, joka saadaan iteraatiosta C_k, niin välin päätepisteet a ja b kuuluvat kaikkiin myöhempiin joukkoihin C_m, $m \geq k$, ja siten myös leikkaukseen C. Ottamalla kaikki päätepisteet kaikista väleistä, jotka saadaan kaikista iteraatioista C_k, saadaan numeroituvasti ääretön joukko pisteitä, jotka kuuluvat joukkoon C (katso Lause 3.9). On kuitenkin huomattava, että joukkoon C kuuluu päätepisteiden lisäksi myös muita pisteitä, kuten seuraavassa Lauseessa 3.6 näytetään. Todistetaan sitä varten ensin yksi aputulos.

Lemma 3.5. *Olkoon* $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^{i-1}$ *geometrinen sarja, missä* a_1 *on sarjan ensimmäinen termi ja* $q \neq 1$ *on alkioiden suhdeluku. Tällöin sarjan osasumma* S_n *on*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Todistus. Sarja voidaan esittää muodossa $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$, josta saadaan $qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^n$. Vähentämällä summa S_n yhtälön molemmilta puolilta saadaan $qS_n - S_n = -a_1 + a_1 q^n$, josta saadaan, kun $q \neq 1$, $S_n = \frac{-a_1(1-q^n)}{q-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. □

Lause 3.6. *Piste* $1/4$ *ei ole minkään joukon* C_k *välin päätepiste, mutta piste* $1/4$ *kuuluu joukkoon* C.

Todistus. Näytetään ensin, että piste $1/4$ ei ole minkään välin päätepiste. Ensimmäisessä vaiheessa päätepisteiksi saadaan pisteiden 0 ja 1 lisäksi pisteet $1/3$ ja $2/3$. Toisessa vaiheessa uudet päätepisteet ovat $1/9$, $2/9$, $7/9$ ja $8/9$. Jokaisessa vaiheessa saadut päätepisteet ovat muotoa $m/3^n$, missä $m, n \in \mathbb{Z}$ siten, että m ei ole jaollinen luvulla 3 ja n kertoo iteraatioiden lukumäärän. Nyt lukua $1/4$ ei voida esittää tässä muodossa, sillä $4 = 2^2$ ei ole mikään luvun 3 potenssi eikä edes jaollinen sillä. Siis luku $1/4$ ei voi olla minkään välin päätepiste.

Koska $1/4$ ei ole minkään välin päätepiste, niin se on aina joko pienempää tai suurempaa, kuin jokin valittu päätepiste, eli geometrisesti valitun päätepisteen vasemmalla tai oikealla puolella. Muistetaan, että k:nnessa iteraatiossa välien pituudeksi saadaan $1/3^k$. Jos lähdetään liikkeelle joukon C_0 päätepisteestä 0 ja lisätään siihen seuraavan iteraation C_1 välin pituus eli $1/3$ päädytään pisteeseen $1/3 > 1/4$. Koska nyt saatu piste on pisteen $1/4$ oikealla puolella, niin seuraavaksi vähennetään seuraavan iteraation C_2 välin pituus $1/9$, jolloin päädytään pisteeseen $2/9 < 1/4$. Nyt puolestaan ollaan pisteen $1/4$ vasemmalla puolella, jolloin taas lisätään iteraation C_3 välin pituus $1/27$ ja päädytään pisteeseen $7/27 > 1/4$. Näin jatkamalla voitaisiin olettaa, että lopulta päädyttäisiin lukuun $1/4$. Tutkitaan summaa

$$p := \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \cdots,$$

joka on geometrisen sarjan summa. Äärelliselle geometrisen sarjan summalle saadaan Lemman 3.5 nojalla, kun $a_1 = 1/3$ ja $q = -1/3$,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{3})^n)}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{3}(1-(-\frac{1}{3})^n)}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}\Big(1-(-\frac{1}{3})^n\Big).$$

Jos n on pariton, niin $(-\frac{1}{3})^n < 0$ ja näistä parittomista luvuista n koostuva osasumma $S_{2n+1} \to \frac{1}{4}$ vasemmalta, kun $n \to \infty$. Jos puolestaan n on parillinen, niin $(-\frac{1}{3})^n > 0$ ja osasumma $S_{2n} \to \frac{1}{4}$ oikealta, kun $n \to \infty$. Siis summalle pätee $p = 1/4$ ja siten voidaan todeta, että luku $1/4$ kuuluu joukkoon C. □

Huomautus. Edellä näytettiin, että Cantorin joukkoon kuuluu välien päätepisteiden lisäksi myös muita pisteitä. Todistuksessa annettiin myös keino, jolla tällaisen pisteen voi löytää: Lähdetään liikkeelle joukosta C_0 ja vuorotellaan kuvauksia S_1 ja S_2, geometrisesti siis kuljetaan vuorotellen oikealle tai vasemmalle. Erilaisilla kombinaatioilla, esimerkiksi kulkemalla kahdesti oikealle ja kahdesti vasemmalle, päädytään eri pisteeseen.

Lause 3.7. *Cantorin joukolle* C *pätee*

(1) *Joukko* C *ei sisällä yhtään väliä (jolla on aidosti positiivinen pituus).*
(2) *Joukolla* C *ei ole eristettyjä pisteitä, toisin sanoen jos* $a \in C$, *niin jokaiselle* $\epsilon > 0$ *välille* $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ *sisältyy joukon* C *pisteitä pisteen* a *lisäksi.*
(3) *Joukko* C *on suljettu, toisin sanoen jos on olemassa* $a \in \mathbb{R}$ *siten, että jokainen väli* $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ *leikkaa joukkoa* C, *niin* $a \in C$.

Todistus. (1) Tämä on jo osoitettu näyttämällä, että Cantorin joukon pituusmitta on nolla. Nimittäin, jos joukko C sisältäisi välin, jolla on aidosti positiivinen pituus, niin tällöin myös itse Cantorin joukon pituus olisi aidosti positiivista.

(2) Olkoon $\epsilon > 0$ ja olkoon $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ avoin väli, missä $a \in C$. Tällöin $a \in C_k$ kaikilla k eli se kuuluu jollekin joukon C_k välille, jonka pituus on $1/3^k$. Olkoon kyseinen väli I. Valitaan k siten, että $1/3^k < \epsilon$. Koska jokainen välin C_k päätepiste kuuluu myös joukkoon C, niin valitaan piste b siten, että se on toinen välin I päätepisteistä. Tällöin $b \in C$ ja $|b-a| \leq 1/3^k < \epsilon$.

(3) On yhtäpitävää osoittaa, että joukon C komplementti $C^{\complement}$ on avoin. Määritelmän perusteella on $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \subset [0,1]$. Tällöin

$$[0,1] \setminus C = [0,1] \cap C^{\complement} = [0,1] \cap \Big[\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k^{\complement}\Big].$$

Nyt joukot $C_k^{\complement}$ ovat avoimia, sillä ne ovat iteraatioissa poistettuja avoimia joukkoja. Siten myös niiden yhdiste on avoin. Koska pisteet 0 ja 1 kuuluvat Cantorin joukkoon, niin ne eivät kuuluu joukkoon $C_k^{\complement}$ millään k. Siis $[0,1] \cap \Big[\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k^{\complement}\Big]$ on avoin joukko.

□

Edellisen lauseen nojalla Cantorin joukko ei siis sisällä yhtään väliä, jolla on positiivinen pituus. Cantorin joukon määritelmän perusteella on selvää, että se sisältää äärettömän määrän pisteitä. Kuitenkaan ei ole aivan itsestään selvää, että Cantorin joukko koostuu itseasiassa ylinumeroituvasti äärettömästä määrästä pisteitä. Tämä näytetään seuraavassa:

LAUSE 3.8. *Cantorin joukko on ylinumeroituva.*

TODISTUS. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että C on numeroituva. Tällöin joukon C alkiot voidaan siis luetella. Olkoon $C = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Joukon C alkiot voidaan esittää kolmikantajärjestelmässä desimaalilukuna siten, että $a_i = 0, j_1^i j_2^i j_3^i \ldots$, missä $j_k \in \{0,2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, j_1^1 j_2^1 j_3^1 j_4^1 \ldots \\ a_2 &= 0, j_1^2 j_2^2 j_3^2 j_4^2 \ldots \\ a_3 &= 0, j_1^3 j_2^3 j_3^3 j_4^3 \ldots \\ a_4 &= 0, j_1^4 j_2^4 j_3^4 j_4^4 \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Määritellään nyt $b = 0, j_1^1 j_2^2 j_3^3 \ldots$, missä

$$j_{k'}^{i'} = \begin{cases} 2, & \text{jos } j_k^i = 0 \\ 0, & \text{jos } j_k^i = 2. \end{cases}$$

Tällöin $b \in C$, mutta $b \neq a_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Siten on löydetty alkio, joka ei ole yllä esitetyssä listassa, joten joukko C ei voi olla numeroituva. Siis joukko C on ylinumeroituva. □

Cantorin joukko on tosiaan ylinumeroituva. On kuitenkin huomattavaa, että välien päätepisteitä on numeroituva määrä.

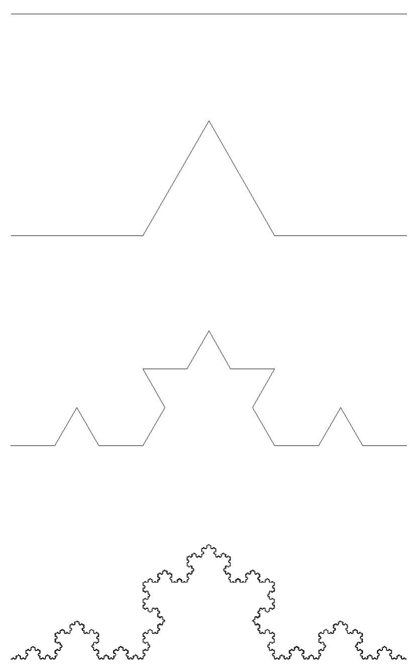
LAUSE 3.9. *Välien C_k päätepisteitä on numeroituvasti ääretön määrä.*

TODISTUS. Joukolla C_0 on 2 päätepistettä, joukolla C_1 on $4 = 2^2$ päätepistettä ja joukolla C_2 on $8 = 2^3$ päätepistettä. Näin jatkamalla huomataan, että vaiheessa n muodostuu yhtä monta uutta päätepistettä, kuin niitä on vaiheessa $n-1$. Osoitetaan päätepisteitä olevan numeroituva määrä muodostamalla bijektio joukon $\mathbb{N}$ ja päätepisteiden välille seuraavasti: Kuvataan alkiot 1 ja 2 joukon C_0 päätepisteiksi. Määritellään kuvaus induktiivisesti siten, että jos joukon C_{n-1} päätepisteet on jo kuvattu bijektiivisesti luvuille $1, 2, \ldots, 2^n$, niin kuvataan joukon C_n 2^n uutta päätepistettä luvuille $2^n+1, 2^n+2, \ldots, 2^{n+1}$. Näin ollen joukolla C_k on numeroituvasti ääretön määrä päätepisteitä. □

3.2. Von Kochin käyrä

3.2.1. Von Kochin käyrän itsesimilaarisuus.

MÄÄRITELMÄ 3.10. Olkoon K_0 jana, jonka pituus on 1. Poistetaan tältä janalta keskimmäinen kolmannes ja korvataan se poistetun osan määräämän tasasivuisen kolmion kahdella muulla sivulla (katso kuva 3.2). Näin on saatu joukko K_1, joka siis koostuu neljästä yhtäpitkästä janasta, joiden jokaisen pituus on $1/3$. Joukko K_2 puolestaan saadaan toistamalla sama menettely joukon K_1 kaikille janoille. Näin jatkamalla joukko K_k saadaan siis korvaamalla joukon K_{k-1} jokaisen janan keskimmäinen kolmannes tasasivuisen kolmion kahdella muulla sivulla, jolloin joukko K_k sisältää 4^k janaa, joiden jokaisen pituus on $(1/3)^k$. *Von Kochin käyräksi* K kutsutaan sitä joukkoa, jota joukko K_k lähestyy, kun iteraatiota jatketaan äärettömiin.

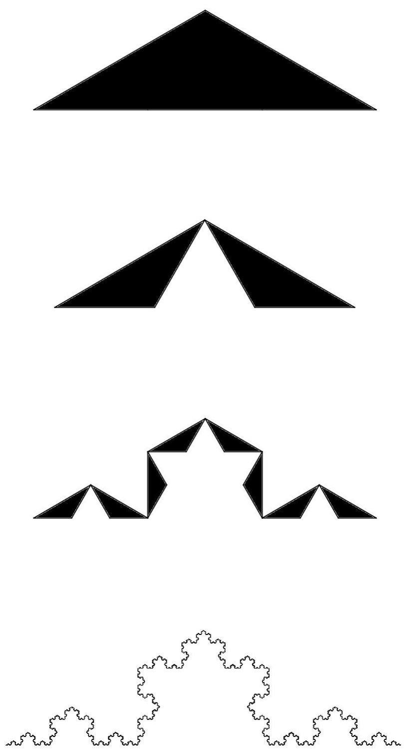


KUVA 3.2. Määritelmän 3.10 mukaiset Von Kochin käyrän iteraatiot K_0, K_1 ja K_2 sekä Von Kochin käyrä K.

Täsmällinen määritelmä Von Kochin käyrälle on seuraava:

MÄÄRITELMÄ 3.11. Olkoon P_0 tasakylkinen kolmio, jonka kulmat ovat 120, 30 ja 30 astetta. Kolmio voidaan jakaa kolmeen pienempään kolmioon, joista kaksi ovat vastaavia tasakylkisiä kolmioita, joiden kulmat ovat 120, 30 ja 30 astetta ja joiden pisimmät sivut ovat alkuperäisen kolmion lyhyet sivut; kolmas kolmio on tasasivuinen kolmio (katso kuva 3.3). Joukko P_1 saadaan poistamalla tasasivuinen kolmio. Näin voidaan jatkaa, jolloin joukko P_2 saadaan poistamalla kaksi tasasivuista kolmiota joukosta P_1. *Von Kochin käyrä* K saadaan joukkojen P_k äärettömästä leikkauksesta eli

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k.$$



KUVA 3.3. Määritelmän 3.11 mukaiset Von Kochin käyrän iteraatiot P_0, P_1 ja P_2 sekä Von Kochin käyrä K.

Muunnoskuvausten määrittämiseen tarvitaan *matriiseja*. Määritellään seuraavanlainen operaattori $\mathbf{T}$ avaruudessa $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{T}(x) = \mathbf{T}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

missä lukua $s \neq 0$ kutsutaan *kutistavaksi*, jos $|s| < 1$, ja *laajentavaksi*, jos $|s| > 1$. Ensimmäistä matriisia kutsutaan *kierroksi* origon ympäri kulman θ verran, $0 \leq \theta < 2\pi$, ja viimeistä sarakevektoria *siirroksi*.

Määritellään nyt Von Kochin käyrän antavat muunnoskuvaukset $S_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{S_1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{S_2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{S_3}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \\
\mathbf{S_4}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

joista saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{S_1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{S_2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{S_3}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix} \\
\mathbf{S_4}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Kuvausten määritelmistä huomataan, että $|S_i(x) - S_i(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$ kaikilla $i = 1, 2, 3, 4$ eli kuvausten suhdeluku on $\frac{1}{3}$.

LAUSE 3.12. *Von Kochin käyrälle pätee*

$$K = S_1(K) \cup S_2(K) \cup S_3(K) \cup S_4(K)$$

eli se on muuttumaton kuvauksille S_i.

TODISTUS. Käyttämällä Määritelmän 3.11 joukkoja P_k induktiolla saadaan $P_{k+1} = S_1(P_k) \cup S_2(P_k) \cup S_3(P_k) \cup S_4(P_k)$, josta väite saadaan täsmälleen samaan tapaan, kuin Lauseen 3.2 todistuksessa. □

Koska Von Kochin käyrä on iteroivan systeemin $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ muuttumaton kuvaus, niin se on itsesimilaari joukko.

3.2.2. Von Kochin käyrän dimensio. Jokaisessa iteraatiossa janojen lukumäärä sekä niiden yhteenlaskettu pituus kasvaa, joten selvästi myös joukon koko kasvaa. Jos lähdetään jälleen mittaamaan käyrän pituutta, niin tulos ei ole kovin mielekäs, sillä Von Kochin käyrän pituudeksi saadaan ääretön.

LAUSE 3.13. *Von Kochin käyrän pituus on ääretön.*

TODISTUS. Jos aluksi janan K_0 pituus on 1, niin käyrän K_1 pituus on $4/3$ ja käyrän K_2 pituus on $(4/3)^2$. Näin jatkamalla huomataan, että käyrän K_k pituus on $(4/3)^k$ ja siten Von Kochin käyrän pituus on $\lim_{k\to\infty}(4/3)^k = \infty$. □

Käytetään siis jälleen Lausetta 2.10. Tarkistetaan sitä varten ensin avoimen joukon ehto Von Kochin käyrälle:

Olkoon V Määritelmän 3.11 joukon P_0 sisus, merkitään sitä intP_0. Tällöin saadaan

$$S_1(\text{int}P_0) \cup S_2(\text{int}P_0) \cup S_3(\text{int}P_0) \cup S_4(\text{int}P_0) = \text{int}P_1 \subset \text{int}P_0.$$

Koska intP_1 koostuu neljästä erillisestä, avoimesta kolmiosta, niin avoimen joukon ehto pätee.

Lause 3.14. *Von Kochin käyrän dimensio on* $s = \frac{\log 4}{\log 3} = \dim_H K = \dim_B K$.

Todistus. Koska Lauseen 2.10 oletukset ovat voimassa ja kuvausten suhdeluku on $c_i = \frac{1}{3}$, niin dimensioksi saadaan yhtälön (2.7) avulla

$$\sum_{i=1}^{4} \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{4} \Leftrightarrow s = \frac{\log \frac{1}{4}}{\log \frac{1}{3}} \Leftrightarrow s = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

□

Von Kochin käyrän dimensiolle saatiin siis $s \approx 1,26$. Tämä on järkevä tulos, sillä edellä osoitettiin, että Von Kochin käyrän pituus on ääretön. Tällöin joukon täytyy olla 1-ulotteista joukkoa suurempi.

3.2.3. Von Kochin käyrän ominaisuuksia.

Lause 3.15. *Pinta-ala, joka jää Von Kochin käyrän ja janan K_0 väliin, on* $\frac{1}{20}\sqrt{3}$.

Todistus. Pinta-ala A_1, joka jää janan K_0 ja käyrän K_1 väliin, on selvästi tasasivuisen kolmion, jonka sivun pituus on $\frac{1}{3}$, pinta-ala. Kyseisen kolmion korkeus on $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$, jolloin sen pinta-ala on

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{1}{16}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{9}.$$

Käyrien K_1 ja K_2 väliin jäävä pinta-ala A_2 koostuu neljästä tasasivuisesta kolmiosta, joiden sivun pituus on $\frac{1}{9}$ ja korkeus $\frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9}$. Tällöin

$$A_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9} = \frac{1}{16}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2.$$

Näin jatkamalla huomataan, että käyrien K_{i-1} ja K_i väliin jäävä pinta-ala A_i koostuu 4^{i-1} tasasivuisesta kolmiosta, joiden sivun pituus on $\frac{1}{3^i}$ ja korkeus $\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^i}$. Tällöin

$$A_i = 4^{i-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3^i} = 4^{i-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{2i}} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^i.$$

Siten kokonaisala, joka jää janan K_0 ja Von Kochin käyrän K väliin on

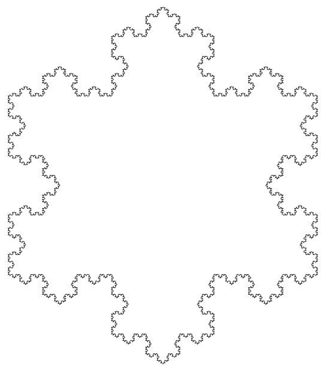
$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \frac{1}{16}\sqrt{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^i.$$

Lemman 3.5 geometrisen sarjan summan avulla saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{\frac{4}{9}(1 - (\frac{4}{9})^n)}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}\Big(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\Big) \to \frac{4}{5},$$

kun $n \to \infty$. Siis kokonaisalaksi saadaan $A = \frac{1}{20}\sqrt{3}$. □

Huomautus. Yhdistämällä kolme Von Kochin käyrää saadaan polkuyhtenäinen alue, jota kutsutaan *Von Kochin lumihiutaleeksi.*



Kuva 3.4. Von Kochin lumihiutale.

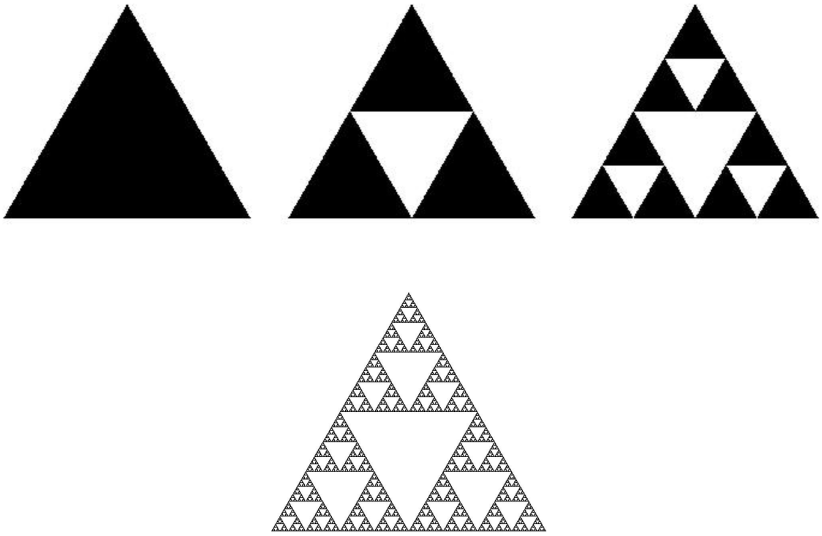
Polkuyhtenäisyydellä tarkoitetaan siis aluetta, jossa jokainen pistepari voidaan yhdistää polulla. Kochin lumihiutaleen polkuyhtenäisyyden todistus sivuutetaan, mutta sitä voidaan perustella itsesimilaarisuuden avulla: On selvää, että Kochin lumihiutaleen 'keskiosassa' polkuyhtenäisyys pätee. Tarkastelua vaativat siis pisteet, jotka ovat lähellä joukon reunaa. Jos lumihiutale muodostettaisiin yhdistämällä kolme joukkoa K_1, niin polkuyhtenäisyys olisi selvää. Koska Kochin lumihiutale koostuu kolmesta itsesimilaarista joukosta, niin se on myös itsesimilaari joukko. Tällöin tarkasteltaessa jotain tiettyä kohtaa joukosta kuvaa voidaan suurentaa ja jälleen suurentaa, jolloin myös tarkasteltava kohta sisältyy joukkoa K_1 vastaavaan joukkoon, jolle polkuyhtenäisyys pätee.

3.3. Sierpińskin kolmio

3.3.1. Sierpińskin kolmion itsesimilaarisuus.

Määritelmä 3.16. Olkoon $\mathscr{S}_0$ tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 1. Tämä kolmio voidaan jakaa neljään yhtäsuureen tasasivuiseen kolmioon, joiden sivun pituus on 1/2. Poistamalla näistä kolmioista keskellä päälaellaan oleva kolmio, sen reunoja lukuunottamatta, saadaan joukko $\mathscr{S}_1$. Joukko $\mathscr{S}_2$ saadaan poistamalla joukon $\mathscr{S}_1$ jokaisesta kolmiosta vastaavasti keskellä oleva kolmio. Näin jatkamalla joukko $\mathscr{S}_k$ koostuu siis 3^k kolmiosta, joiden jokaisen sivun pituus on 2^{-k}. *Sierpińskin kolmio* $\mathscr{S}$ koostuu joukkojen $\mathscr{S}_k$ äärettömästä leikkauksesta eli

$$\mathscr{S} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathscr{S}_k.$$



Kuva 3.5. Sierpińskin kolmion iteraatiot $\mathscr{S}_0$, $\mathscr{S}_1$ ja $\mathscr{S}_2$ sekä Sierpińskin kolmio $\mathscr{S}$.

Määritellään Sierpińskin kolmion antavat muunnoskuvaukset matriisien avulla, kuten Von Kochin käyrälle. Olkoon $S_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{S_1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{S_2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{S_3}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Näiden kaikkien kuvausten suhdeluku on $\frac{1}{2}$, sillä $|S_i(x) - S_i(y)| = \frac{1}{2}|x - y|$ kaikilla $i = 1, 2, 3$.

Lause 3.17. *Sierpińskin kolmille pätee*

$$\mathscr{S} = S_1(\mathscr{S}) \cup S_2(\mathscr{S}) \cup S_3(\mathscr{S})$$

eli se on muuttumaton kuvauksille S_i.

Todistus. Induktiolla saadaan $\mathscr{S}_{k+1} = S_1(\mathscr{S}_k) \cup S_2(\mathscr{S}_k) \cup S_3(\mathscr{S}_k)$, josta väite saadaan täsmälleen samaan tapaan, kuin Lauseen 3.2 todistuksessa. □

Siis $\mathscr{S}$ on iteroivan systeemin $\{S_1, S_2, S_3\}$ muuttumaton joukko ja siten Sierpińskin kolmio on itsesimilaari joukko.

3.3.2. Sierpińskin kolmion dimensio. Jos tutkitaan iteraatioissa syntyvien kolmioiden reunoja, niin jokaisessa iteraatiossa reunojen yhteenlaskettu pituus kasvaa. Toisaalta, jos tutkitaan kolmioiden määräämiä pinta-aloja, niin jokaisessa iteraatiossa kolmioiden yhteenlaskettu pinta-ala pienenee. Mitä joukon koosta voidaan sanoa?

Lause 3.18. *Sierpińskin kolmion pituus on ääretön.*

TODISTUS. Joukon $\mathscr{S}_0$ reunan pituus on 3, merkitään sitä $|\partial\mathscr{S}_0|$. Joukon $\mathscr{S}_1$ reunan pituus on $|\partial\mathscr{S}_1| = |\partial\mathscr{S}_0| + 3\cdot(1/2) = 3 + (3/2)$ ja joukon $\mathscr{S}_2$ reunan pituus on $|\mathscr{S}_2| = 3 + (3/2) + (3/2)^2$. Näin jatkamalla joukon $\mathscr{S}_k$ reunan pituudeksi saadaan $|\mathscr{S}_k| = 3 + (3/2) + (3/2)^2 + \ldots + (3/2)^k$. Siten Sierpińskin kolmion reunan pituus on $|\bigcup_{k=0}^{\infty}\partial\mathscr{S}_k| = \infty$. Koska $\partial\mathscr{S}_k \subset \mathscr{S}$ kaikilla k, niin Sierpińskin kolmion pituudeksi saadaan $|\mathscr{S}| = \infty$. □

LAUSE 3.19. *Sierpińskin kolmion pinta-ala on nolla.*

TODISTUS. Jos tasasivuisen kolmion sivun pituus on 1, niin sen korkeus on $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tällöin, koska joukko $\mathscr{S}_k$ sisältää 3^k kolmiota, jonka jokaisen sivun pituus on $(1/2)^k$ ja korkeus on $(1/2)^k\cdot(\sqrt{3}/2)$, niin kolmioiden kokonaispinta-alaksi saadaan $A_k = 3^k\cdot(1/2)^k\cdot\sqrt{3}/2\cdot(1/2)^k\cdot 1/2 = (3/4)^k\cdot\sqrt{3}/4 \to 0$, kun $k\to\infty$. □

Näiden tietojen perusteella joukon kokoa on vaikea käsittää. Käytetään jälleen Lausetta 2.10. Sitä varten tarkistetaan ensin avoimen joukon ehto (2.5) Sierpińskin kolmiolle:

Valitaan avoimeksi joukoksi V joukon $\mathscr{S}_0$ sisus, merkitään sitä int$\mathscr{S}_0$. Tällöin

$$\bigcup_i S_i(V) = S_1(\mathrm{int}\mathscr{S}_0)\cup S_2(\mathrm{int}\mathscr{S}_0)\cup S_3(\mathrm{int}\mathscr{S}_0) = \mathrm{int}\mathscr{S}_1 \subset \mathrm{int}\mathscr{S}_0.$$

Koska int$\mathscr{S}_1$ koostuu kolmesta erillisestä joukosta, niin avoimen joukon ehto pätee.

LAUSE 3.20. *Sierpińskin kolmion dimensio on* $s = \frac{\log 3}{\log 2} = \dim_H\mathscr{S} = \dim_B\mathscr{S}$.

TODISTUS. Lauseen 2.10 oletukset ovat voimassa, jolloin yhtälön (2.7) nojalla pätee, kun kuvausten suhdeluku on $c_i = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{1}{3} \Leftrightarrow s = \frac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{1}{2}} \Leftrightarrow s = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

□

Sierpińskin kolmiolle saatiin $s \approx 1,58$. Edellä on osoitettu, että Sierpińskin kolmion pituus on ääretön ja pinta-ala on nolla, joten on selvää, että $1 < \dim\mathscr{S} < 2$. Toisaalta voitaisiin pohtia, mitä dimensio kertoo Sierpińskin kolmion suhteesta Von Kochin käyrään, jonka dimensioksi saatiin $s \approx 1,26$. Onko Sierpińskin kolmio jollain tapaa isompi, kuin Von Kochin käyrä?

3.3.3. Sierpińskin kolmion ominaisuuksia. Kuvan 3.5 perusteella Sierpińskin kolmio on kovin monimutkaisen näköinen joukko. Ensisilmäyksellä on kovin vaikea sanoa, koostuuko joukko pisteistä, janoista vai aloista. Kuten aiemmin osoitettiin, niin Sierpińskin kolmion pinta-ala on nolla ja pituus on ääretön. Muistellaan, miten joukko konstruoitiin: Jokaisessa iteraatiossa muodostuu kolmioita, joiden reunat kuuluvat aina seuraavaan iteraatioon ja siten Sierpińskin kolmioon. Näin ollen joukko tosiaan sisältää suuren määrän janoja. Toisaalta joukko on siis jollain tapaa hyvin 'siisti'.

3.4. Lévyn lohikäärme

Lévyn lohikäärmeen määritelmä on helpointa tehdä samaistamalla tason pisteet *kompleksiluvuiksi.* Määritellään kompleksilukujen joukko $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, missä i on *imaginääriyksikkö*, jolle pätee $i^2 = -1$. Kompleksilukujen summa ja tulo määritellään asettamalla

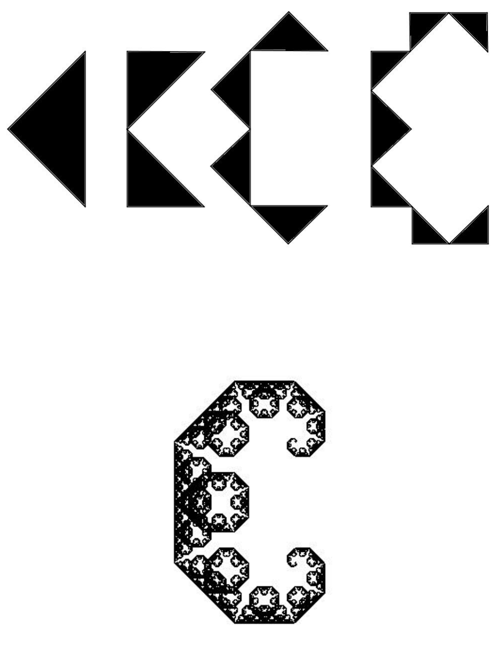
$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$
$$(x + iy) \cdot (u + iv) = xu + x \cdot iv + iy \cdot u + i^2 \cdot yv = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Jos $z = x + iy$, niin sanotaan, että $Re(z) = x$ on luvun z *reaaliosa* ja $Im(z) = y$ on luvun z *imaginääriosa.* Tasossa voidaan merkitä $\mathbb{R} = \{x : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ on reaaliakseli ja $Im = \{iy : y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ on imaginääriakseli.

Määritellään kompleksiluvun $z = x + iy$ *kompleksikonjugaatti* $\bar{z}$ asettamalla $\bar{z} = x - iy$. Luvun z *normi* eli vektorin pituus määritellään $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

3.4.1. Lévyn lohikäärmeen itsesimilaarisuus.

MÄÄRITELMÄ 3.21. Olkoon L_0 tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Korvataan L_0 kahdella vastaavalla kolmiolla, joiden koko on $1/\sqrt{2}$ alkuperäisestä siten, että uusien kolmioiden hypotenuusat ovat alkuperäisen kolmion sivujen paikalla (katso kuva 3.6). Olkoon näiden kahden kolmion muodostama joukko L_1. Seuraavaksi korvataan joukon L_1 kolmiot uusilla kolmioilla, joiden koko on $1/\sqrt{2}$ joukon L_1 kolmioista eli $(1/\sqrt{2})^2 L_0$. Näin saadaan joukko L_2, joka koostuu neljästä kolmiosta. Jatketaan samoin, jolloin joukko L_k koostuu 2^k kolmiosta, joiden jokaisen koko on $(1/\sqrt{2})^k L_0$. *Lévyn lohikäärme* L on joukko, jota joukko L_k lähestyy, kun iteraatiota jatketaan äärettömiin.



KUVA 3.6. Lévyn lohikäärmeen iteraatiot L_0, L_1, L_2 ja L_3 sekä Lévyn lohikäärme L.

Määritellään muunnoskuvaukset $S_1, S_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seuraavasti:

$$S_1(z) = \Big(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\Big)z \qquad \text{ja} \qquad S_2(z) = \Big(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\Big)z + \Big(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\Big).$$

Tällöin pätee $|S_j(z) - S_j(w)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z-w|$ kaikilla $j = 1, 2$, sillä

$$\Big|\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\Big| = \sqrt{\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{ja} \qquad \Big|\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\Big| = \sqrt{\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Siten kuvausten suhdeluku on $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Jotta Lévyn lohikäärmeen muuttumattomuus voitaisiin osoittaa, kuten Lauseessa 3.2, joukko tarvitsee määrittää leikkauksena sisäkkäisistä joukoista. Alun määritelmä ei kuitenkaan ole tällainen, minkä vuoksi tarvitaan vaihtoehtoinen määritelmä.

Määritelmä 3.22. Olkoon pallo $E_0 = B_t(0)$, missä $t = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ja olkoon muunnoskuvaukset $S_1(z) = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})z$ ja $S_2(z) = (\frac{1}{2} - \frac{i}{2})z + (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})$. Kuvataan palloa kuvauksilla S_1 ja S_2 ja merkitään näin saatujen pallojen leikkausta $S_1(E_0) \cap S_2(E_0) = E_1$. Jatketaan näin eli kuvataan saatua joukkoa E_1 jälleen muunnoskuvauksilla, jolloin saadaan leikkaus $S_1(E_1) \cap S_2(E_1) = E_2$. Lévyn lohikäärme saadaan joukkojen E_k äärettömästä leikkauksesta eli

$$L = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k.$$

Pallojen sisäkkäisyys nähdään seuraavasti:
Edellä näytettiin, että muunnoskuvausten suhdeluku on $\frac{1}{\sqrt{2}}$, joten kuvaus S_1 kutistaa pallon $B_t(0)$ palloksi $B_{t/\sqrt{2}}(0)$. Tällöin on selvästi $B_{t/\sqrt{2}}(0) \subset B_t(0)$. Kuvaus S_2 kutistaa palloa vastaavasti tekijällä $\frac{1}{\sqrt{2}}$, mutta lisäksi siirtää pallon keskipisteen origosta pisteeseen $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. Nyt myös $B_{t/\sqrt{2}}(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \subset B_t(0)$, sillä pisteen $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ etäisyys origosta on $|z| = |\frac{1}{2} - \frac{i}{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, jolloin

$$|z| + \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = t.$$

Näin ollen pisteen $x \in B_{t/\sqrt{2}}(\frac{1}{2} - \frac{i}{2})$ pisin etäisyys origosta on t eli pallon $B_t(0)$ säde, joten $x \in B_t(0)$ ja pallot todella ovat sisäkkäin.

Lause 3.23. *Lévyn lohikäärmeelle pätee*

$$L = S_1(L) \cup S_2(L)$$

eli se on muuttumaton muunnoskuvauksille S_i.

Todistus. Käyttämällä Määritelmän 3.22 joukkoja E_k induktiolla saadaan $E_{k+1} = S_1(E_k) \cup S_2(E_k)$, josta väite saadaan täsmälleen samaan tapaan, kuin Lauseen 3.2 todistuksessa. $\square$

3.4.2. Lévyn lohikäärmeen dimensio. Tarkistetaan aluksi avoimen joukon ehto (2.5) Lévyn lohikäärmeelle:

Konstruoitaessa Lévyn lohikäärmettä Määritelmän 3.21 mukaisesti huomataan, että kussakin vaiheessa syntyvien kolmioiden leikkaus on korkeintaan niiden reuna, katso kuva 3.6. Koska kuvan mukainen erillisyys on voimassa, niin avoimen joukon ehto on voimassa. (Tarkka perustelu [**6**, s.30] Example 6.5.)

LAUSE 3.24. *Lévyn lohikäärmeen dimensio on* $s = 2 = \dim_H L = \dim_B L$.

TODISTUS. Lauseen 2.10 oletukset ovat voimassa, joten yhtälön (2.7) avulla saadaan, kun kuvausten suhdeluku on $c_i = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^s = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^s = \frac{1}{2} \Leftrightarrow s = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow s = \frac{\log 2}{\frac{1}{2}\log 2} \Leftrightarrow s = 2.$$

□

HUOMAUTUS. Lévyn Lohikäärmeen dimensioksi saatiin siis kokonaisluku, mikä ei esimerkiksi kuvan 3.6 perusteella ole ollenkaan selvää. Kuten Johdannossa todettiin, tämä on fraktaaleille erikoinen tapaus. Mandelbrotin mielessä Lévyn lohikäärme ei siis itseasiassa olisi fraktaali.

3.4.3. Lévyn lohikäärmeen ominaisuuksia.

LAUSE 3.25. *Lévyn lohikäärme sisältää avoimen joukon.*

TODISTUS. On yhtäpitävää osoittaa, että $L = \overline{\operatorname{int}(L)}$ eli joukko L on sisuksensa sulkeuma. Nyt tiedetään, että joukko L on muuttumaton kuvauksille S_i, joiden suhdeluku on $c_i = 1/\sqrt{2}$, ja se toteuttaa avoimen joukon ehdon. Lisäksi tiedetään, että joukon L dimensio on $s = 2$. Merkitään $I = \{1, 2\}$, jolloin I^n tarkoittaa iteraation vaihetta n. Jos nyt $i \in I^n$, niin $c_i = (1/\sqrt{2})^n$. Tällöin saadaan

$$\sum_{i\in I^n} c_i^2 = \sum_{i\in I^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 2^n\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = 1. \tag{3.2}$$

Olkoon X avaruuden $\mathbb{R}^n$ kompakti osajoukko. Valitaan epätyhjä avoin joukko $V \subset X$, jolle $S_i(V) \subset V$, kun $i \in I$, ja $S_i(V) \cap S_j(V) = \emptyset$, kun $i \neq j$, ja asetetaan

$$T = V \setminus \bigcup_{i\in I} S_i(V).$$

Merkitään $\bigcup_{n=1}^{\infty} I^n = I^*$. Koska $S_i(T) \subset S_i(V)$ ja $S_i(T)\cap S_{ij}(V) = \emptyset$ kaikilla $i \in I^*$ ja $j \in I^*$, niin saadaan $S_i(T) \cap S_j(T) = \emptyset$, kun $i \neq j$. Lisäksi, koska $S_i(T) \subset X$ kaikille $i \in I^*$, niin saadaan

$$\infty > \mathscr{H}^2(X) \geq \mathscr{H}^2\Big(\bigcup_{i\in I^*} S_i(T)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I^n}\mathscr{H}^2(S_i(T)) \geq \mathscr{H}^2(T)\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{i\in I^n} c_i^2. \tag{3.3}$$

Nyt yhtälöistä (3.2) ja (3.3) seuraa, että $\mathscr{H}^2(T) = 0$. Tästä seuraa, että joukko

$$V \setminus \overline{\bigcup_{i\in I} S_i(V)} = \bigcup_{i\in I} S_i(\overline{V})$$

on nollamittainen avoin joukko ja siten tyhjä joukko. Tällöin siis $\overline{V} = \bigcup_{i\in I} S_i(\overline{V})$, josta muuttumattoman joukon yksikäsitteisyyden nojalla saadaan $L = \overline{V}$. □

Kirjallisuutta

[1] Michael Barnsley: *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc. 1988

[2] Gerald A. Edgar: *Measure, topology and fractal geometry*, Springer-Verlag New York Inc, 1990

[3] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy: *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, cop. 1992

[4] Kenneth Falconer: *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons Ltd, 1990

[5] Kenneth Falconer: *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons Ltd, 1997

[6] Antti Käenmäki & Markku Vilppolainen: *Separation conditions on controlled Moran constructions*, Fund. Math. 200 (2008), no. 1, 69-100

[7] Pertti Mattila: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*, Cambridge University Press, 1995