Eksponenttifunktio

Sanni Muotka

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013

Tiivistelmä: S. Muotka, *Eksponenttifunktio*, matematiikan pro gradu -tutkielma, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos.

Alkeisfunktiot jaetaan algebrallisiin ja transsendenttisiin alkeisfunktioihin. Algebrallisiin alkeisfunktioihin kuuluvat polynomi-, rationaali- ja juurifunktiot. Muut funktiot ovat transsendenttisia. Eksponenttifunktio kuuluu transsendenttisiin alkeisfunktioihin, eli sitä ei voida esittää äärellisenä polynomifunktiona tai polynomien rationaalifunktiona. Tässä tutkielmassa perehdytään eksponenttifunktioon, jonka kantalukuna on Neperin luku.

Tutkielman aluksi tutustutaan Neperin luvun historiaan ja määritellään Neperin luku raja-arvona

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Neperin luvulle osoitetaan sen irrationaalisuus ja transsendenttisuus, eli että se ei toteuta mitään kokonaiskertoimista polynomiyhtälöä. Tämän jälkeen määritellään eksponenttifunktio exp viidellä eri tavalla: rationaalipotenssin, potenssisarjaesityksen, differentiaaliyhtälön, käänteisfunktion ja raja-arvon avulla. Jokaisesta määritelmästä lähtien osoitetaan eksponenttifunktiolle exp jatkuvuus, derivoituvuus, monotonisuus, additiivisuusominaisuus

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b),$$

ja että eksponenttifunktiolla on käänteisfunktio. Tutkielman lopuksi osoitetaan, että nämä kaikki viisi määritelmää johtavat samaan funktioon exp.

Sisältö

Johdanto

Alkeisfunktiot ovat funktioita, jotka sisältävät yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja, potenssiin korotuksia, käänteisfunktion ottoa tai funktioiden yhdistämistä. Alkeisfunktiot jaetaan algebrallisiin ja transsendenttisiin alkeisfunktioihin. Transsendenttisia funktioita ovat funktiot, jotka eivät ole polynomi-, rationaali- tai juurifunktioita. Näin ollen eksponenttifunktio kuuluu transsendenttisiin funktioihin. Tässä tutkielmassa perehdytään eksponenttifunktioon, jonka kantalukuna on Neperin luku.

Tämän työn tarkoituksena on aluksi tutustua Neperin lukuun e, joka tulee eteen hyvin usein matemaattista kirjallisuutta lukiessa. Pääasiassa työ koostuu viidestä eksponenttifunktion exp määritelmästä. Eksponenttifunktio määritellään rationaalipotenssin, potenssisarjaesityksen, differentiaaliyhtälön, käänteisfunktion ja raja-arvon avulla. Jokaisesta määritelmästä lähtien näytetään eksponenttifunktion jatkuvuus, derivoituvuus, monotonisuus, käänteisfunktion olemassaolo ja additiivisuusominaisuus

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Lopuksi näytetään, että kaikki määritelmät johtavat samaan eksponenttifunktioon exp.

Tutkielma jakautuu seitsemään lukuun, joista ensimmäinen käsittelee Neperin lukua. Luvussa määritellään Neperin luku raja-arvona

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Luvussa tutustutaan myös hieman Neperin luvun historiaan ja osoitetaan sen irrationaalisuus ja transsendenttisuus. Luvuissa 2-6 johdetaan kustakin määritelmästä lähtien eksponenttifunktion jatkuvuus, derivoituvuus, monotonisuus, käänteisfunktion olemassaolo ja additiivisuusominaisuus. Luku 2 käsittelee rationaalipotenssimääritelmää, joka on ehkä tunnetuin määritelmä eksponenttifunktiolle. Määritellään siis $\exp(x) = e^x$, kun $x \in \mathbb{R}$. Luvussa 3 määritelmänä käytetään potenssisarjaesitystä

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Luvussa 4 määritellään eksponenttifunktio yksikäsitteisenä differentiaaliyhtälön $f' = f$, $f(0) = 1$ ratkaisuna. Luvun 5 määritelmän mukaan eksponenttifunktio on raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Viimeinen määritelmä luvussa 6 eksponenttifunktiolle on logaritmifunktion

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

käänteisfunktiona. Ominaisuuksien esitysjärjestys luvuissa vaihtelee hieman määritelmän luonteesta riippuen. Viimeisessä luvussa näytetään potenssisarjaesityksestä lähtien, että kaikki määritelmät johtavat samaan funktioon.

Tutkielmassa käytetty kirjallisuus on pääasiassa yleisteoksia matemaattisesta analyysistä, tärkeimpänä Robert S. Strichartzin *The Way of Analysis* ([**7**]). Ensimmäisessä luvussa päälähteenä on ollut Eli Maorin kirja *e: The story of a number* ([**4**]) ja viimeisessä luvussa jo mainittu Strichartzin teos. Muut luvut eivät varsinaisesti seuraa mitään teosta.

LUKU 1

Neperin luku, e

Tässä luvussa esitellään hieman Neperin luvun historiaa, määritellään Neperin luku raja-arvona $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ja osoitetaan sen irrationaalisuus ja transsendenttisuus. Luvun päälähteenä on Eli Maorin teos *e: The story of a number* ([**4**]).

1. John Napier 1550-1617

Neperin luvun isä, John Napier, syntyi vuonna 1550 lähellä Edinburghia Skotlannissa. Hänen vanhempansa olivat Sir Archibald Napier ja tämän ensimmäinen vaimo Janet Bothwell. Kolmentoista vuoden ikäisenä John Napier lähetettiin St. Andrewsin yliopistoon opiskelemaan uskontoa. Hänen suurin kiinnostuksensa oli uskonto, mutta maanomistajana hän kehitteli myös lannoitteita ravitakseen maaperää ja oli kiinnostunut sotilaallisista toimista. Hän julkaisi uskonnollisia näkemyksiään kirjassaan *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John*(1593), jossa hän kritisoi katolista kirkkoa. Kirjaa julkaistiin usealla kielellä ja hänen elinaikanaan siitä tehtiin kymmenen laitosta, myöhemmin yhteensä 21. Kirjalla hän vakuutti itsensä siitä, että hänen nimensä säilyisi historiassa.

Napierin nimi jäi historiaan, ei tosin niinkään uskonnollisesta kirjastaan, vaan ideasta, jota hän kehitteli kaksikymmentä vuotta: logaritmeista. Tarkalleen ei tiedetä, miten hän keksintöönsä päätyi. Hän oli perehtynyt trigonometriaan, joten luultavasti ajatuksien pohjana on ollut trigonometria ja geometriset lukujonot. ([**4**], s. 3-9.)

2. Neperin luvun historiaa

Ihmiset ovat vuosituhansia olleet kiinnostuneita taloudellisesta vaurastumisesta. Tämä on ollut pohjana myös Neperin luvun löytymisessä. Jo Mesopotamiassa noin 1700 eKr. on pohdittu, kauanko kestää kaksinkertaistaa pääoma, jos vuosittainen korko on 20 prosenttia. Pääoma korkojen jälkeen voidaan laskea kaavalla

$$S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}, \tag{1.1}$$

missä *P=alkupääoma, r=vuotuinen korkoprosentti, n=korkoerien määrä vuodessa, t=aika vuosina* ja *S=kasvanut pääoma.*

Jos tarkastellaan epätodellista tilannetta, jossa pankki maksaisi sataprosenttista korkoa yhden euron pääomalle yhden vuoden, kaava (1.1) tulee muotoon

$$S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}. \tag{1.2}$$

Kun korkoerien määrää kasvatetaan, saadaan tulokset, jotka on esitetty taulukossa 1. Huomataan, että luvun n kasvaessa lähestytään lukua $e \approx 2,71828$. Tarkalleen ei tiedetä, kuka tämän havainnon on ensimmäisenä tehnyt, mutta keksintö ajoittuu aikaan, jolloin Napier kehitti logaritmin. ([**4**], s. 23-27.)

TAULUKKO 1

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	$2,25$
3	$2,37037$
4	$2,44141$
5	$2,48832$
10	$2,59374$
100	$2,70481$
1000	$2,71692$
10 000	$2,71815$
100 000	$2,71827$
1 000 000	$2,71828$
10 000 000	$2,71828$

3. Neperin luvun määritelmä

Neperin luvun löytämiseksi tutkitaan edellisessä alaluvussa pääomalle saatua lauseketta $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, kun $n \to \infty$. Seuraava Lemma 1.1 on Pascalin kaava, jota käytetään lauseketta $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ avaavan binomikaavan todistamiseen.

LEMMA 1.1. *Olkoon $n, k \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{1.3}$$

TODISTUS.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{k}{k(n-k)} + \frac{n-k}{k(n-k)} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k} \right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 1.2 on binomikaava, jonka avulla voidaan aukaista lukujonoa $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

LEMMA 1.2. *Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p \\
&= x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} y^3 + \dots \\
&+ \frac{n}{1!} x y^{n-1} + y^n.
\end{aligned}
$$

TODISTUS. Todistetaan väite induktiolla. Kun $n = 1$, niin

$$(x+y)^1 = x^1 + \frac{1}{1!} x^{1-1} y = x + y.$$

Oletetaan, että väite pätee, kun $n = m$ eli

$$(x+y)^m = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} x^{m-p} y^p.$$

Kun $n = m + 1$, pätee

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= (x+y)(x+y)^m = (x+y) \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} x^{m-p} y^p \\
&= \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} x^{m-p+1} y^p + \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} x^{m-p} y^{p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} x^{m-p+1} y^p + \sum_{p=1}^{m+1} \binom{m}{p-1} x^{m-p+1} y^p \\
&= \sum_{p=0}^{m+1} \binom{m}{p} x^{m+1-p} y^p + \sum_{p=0}^{m+1} \binom{m}{p-1} x^{m+1-p} y^p \\
&= \sum_{p=0}^{m+1} \left[\binom{m}{p} + \binom{m}{p-1} \right] x^{m+1-p} y^p \\
&= \sum_{p=0}^{m+1} \binom{m+1}{p} x^{m+1-p} y^p.
\end{aligned}
$$

$\square$

Nyt Lemman 1.2 avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p} \left(\frac{1}{n}\right)^p \\
&= 1 + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + 1 + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots + \frac{1}{n^{n-2}} + \frac{1}{n^n}.
\end{aligned}
$$

Kun annetaan luvun n kasvaa, toisin sanoen $n \to \infty$, saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....$$

Merkitään tätä summaa kirjaimella e eli

$$e := 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....$$

([**4**], s. 35.)

Osoitetaan seuraavaksi, että tällainen summa on olemassa. Palautetaan ensin mieleen geometrisen sarjan summa.

LEMMA 1.3. *Jos $q \in \mathbb{R}$ on geometrisen lukujonon suhdeluku ja $q \neq 1$, niin geometrisen lukujonon summa S_n saadaan kaavalla*

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Seuraava lemma antaa ehdon lukujonon suppenemiselle. Muistetaan, että joukko $E \subset \mathbb{R}$ on ylhäältä rajoitettu, jos on olemassa luku M siten, että $x \leq M$ kaikille $x \in E$. Tällöin M on joukon E yläraja.

LEMMA 1.4. *Kasvava reaaliarvoinen lukujono suppenee jos ja vain jos se on ylhäältä rajoitettu. Silloin sen raja-arvo on pienin lukujonon yläraja.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Katso [**2**], s. 99. □

Nyt voidaan osoittaa, että lukujono $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$ suppenee.

LAUSE 1.5. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Tällöin summa*

$$S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$$

suppenee, kun $n \to \infty$.

TODISTUS. Summa kasvaa monotonisesti eli $S_n < S_{n+1}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$. Kun $n \geq 3$, pätee myös $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot > 1\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2 = 2^{n-1}$, joten

$$S_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Jälkimmäinen summa on geometrinen summa, jonka suhdeluku on $\frac{1}{2}$. Tällöin summalle pätee Lemman 1.3 mukaan

$$S_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+2=3.$$

Summa S_n on siis ylhäältä rajoitettu rajana 3. Nyt Lemman 1.4 mukaan S_n suppenee kohti lukua S. □

Merkitään tutkittua lukujonoa $T_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Näytetään, että jono $T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ suppenee kohti samaa lukua kuin Lauseen 1.5 jono $S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$. Nyt

Lemman 1.2 (binomikaava) avulla saadaan

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =&1+n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+...\\&+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n\\=&1+1+\frac{(1-\frac{1}{n})}{2!}+...+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})}{n!}.\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että $T_n \leq S_n$, joten T_n on ylhäältä rajoitettu. Lukujono T_n on myös monotonisesti kasvava. Tämä todistetaan Lemmassa 1.8. Siis summa T_n suppenee Lauseen 1.4 nojalla kohti lukua T.

Seuraavaksi osoitetaan, että $S = T$.

LAUSE 1.6. *Kun $n \in \mathbb{N}$ ja summa $S_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$ suppenee kohti lukua S ja jono $T_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kohti lukua T, niin $S = T$.*

TODISTUS. Koska $S_n \geq T_n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, niin $S \geq T$. Näytetään siis, että pätee myös $S \leq T$. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$ siten, että $m < n$. Summan T_n ensimmäiset $m+1$ termiä ovat

$$1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+...+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{m!}.$$

Koska $m < n$, niin tämä summa on pienempi kuin T_n. Kun n kasvaa rajatta ja m on kiinteä, lähestyy summa lukua S_m ja T_n lähestyy summaa T. Näin ollen $S_m \leq T$ ja $S \leq T$, mikä haluttiin osoittaa. □

Näin ollen luku

$$T = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... = e \approx 2,71828.$$

([**4**], s.201-202.)

Myöhemmin tarvitaan tietoa jonon $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ käyttäytymisestä. Osoitetaan seuraavaksi, että jonon raja-arvo on $\frac{1}{e}$.

LEMMA 1.7.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

TODISTUS. Koska $e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+... > 1$, niin $e^q < 1$ kaikilla $q \in \mathbb{Q}$, $q < 0$. Bernoullin epäyhtälö $(1+x)^a \geq 1+ax$ antaa

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1-n\frac{1}{n^2}\right) \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1.$$

Näin ollen saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

sillä on osoitettu, että $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. □

Osoitetaan vielä lukujonojen kasvavuus.

LEMMA 1.8. *Lukujonot*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad ja \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

ovat kasvavia.

TODISTUS. Osoitetaan, että lukujono $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ on kasvava. Jono $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ on kasvava, sillä Bernoullin epäyhtälöä $(1+x)^a \geq 1+ax$ käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &\geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1.\end{aligned}$$

Vastaavasti lukujono $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ on kasvava, sillä Bernoullin epäyhtälöä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1-\frac{1}{n})^n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \\ &\geq \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+(n+1)\frac{1}{n^2-1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1.\end{aligned}$$

□

4. Neperin luvun ominaisuuksia

Neperin luku on irrationaalinen. Tämä tarkoittaa, että se ei toteuta mitään kokonaislukukertoimista lineaarista yhtälöä, joka on muotoa $ax+b=0$, missä $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$. Tiedetään lisäksi, että Neperin luku e ei toteuta mitään kokonaislukukertoimista polynomiyhtälöä $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0 = 0$. Tätä ominaisuutta kutsutaan luvun transsendenttisuudeksi. Tässä alaluvussa osoitetaan nämä ominaisuudet.

1.4.1. Irrationaalisuus. Neperin luku e on irrationaalinen, toisin sanoen sitä ei voida esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Osoitetaan tämä.

LAUSE 1.9. *Neperin luku*

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

on irrationaalinen.

TODISTUS. Oletetaan, että e on rationaalinen. Olkoon $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Tiedämme, että $2 < e < 3$ (katso Lauseen 1.5 todistus), joten e ei ole kokonaisluku eli on oltava $q \geq 2$. Kerrotaan yhtälön

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

molemmat puolet kertoimella $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot q$. Tällöin yhtälön vasen puoli antaa

$$e \cdot q! = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot q = p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (q-1)$$

ja oikea puoli antaa

$$\begin{aligned}&\big(q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot q + ... + (q-1) \cdot q + q + 1\big)\\&+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ...\end{aligned}$$

Vasenpuoli on selvästi kokonaisluku, samoin kuin oikeanpuoleisen lausekkeen sulkujen sisältö. Oikeanpuoleisen lausekkeen jäljelle jäävät termit eivät ole kokonaislukuja, sillä $q \geq 2$. Näytetään, että jäljelle jäävien termien summa ei ole kokonaisluku. Kun on $q \geq 2$, niin geometrisen sarjan summan Lemma 1.3 avulla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{(3 \cdot 4)} + ...\\&< \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + ... = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Lisäksi $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ... > 0$, kun $q \geq 2$. Näin ollen jäljelle jäävien termien summa ei ole kokonaisluku.

Siirtämällä yhtälön oikean puolen kokonaisluku termit vasemmalle puolelle päädytään tilanteeseen, jossa on kokonaisluku yhtälön vasemmalla puolella ja lukua yksi pienempi ei-kokonaisluku oikealla puolella. Luku e ei siis voi olla rationaalinen. ([**4**], s. 202-203) □

1.4.2. Transsendenttisuus. Neperin luvun transsendenttisuuden on todistanut Charles Hermite vuonna 1873. Seuraava todistus on Hurwitz'in yksinkertaistus Hermiten todistuksesta.

Todistusta varten johdetaan aluksi aputuloksia. Oletetaan, että $f(x)$ on polynomi, jonka aste on r ja $F(x)$ on summa sen derivaatoista

$$F(x) := f(x) + f'(x) + f''(x) + ... + f^{(r)}(x). \tag{1.4}$$

Määritellään funktio $\Phi = e^{-x}F(x)$, jolloin

$$\Phi'(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x)) = -e^{-x}f(x).$$

Nyt väliarvolauseen, Lemma 5.4, nojalla välillä $[x_1, x_2]$ saadaan

$$\Phi(x_1) - \Phi(x_2) = \Phi'(x_1 + \xi(x_2 - x_1))(x_1 - x_2),$$

missä $0 < \xi < 1$. Olkoon $x_1 = 0$ ja $x_2 = k$, $k \in \mathbb{N}$, jolloin

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -e^{-\xi_k k}f(\xi_k k)k,$$

missä ξ_k riippuu luvusta k ja $0 < \xi_k < 1$. Kertomalla tämä termillä e^k saadaan

$$F(k) - F(0)e^k = -ke^{(1-\xi_k)k} f(\xi_k k). \tag{1.5}$$

Tarkemmin esitettynä saadaan

$$\begin{cases} F(1) - F(0)e = -e^{(1-\xi_1)} f(\xi_1) =: \epsilon_1 \\ F(2) - F(0)e^2 = -2e^{2(1-\xi_2)} f(2\xi_2) =: \epsilon_2 \\ \vdots \\ F(n) - F(0)e^n = -ne^{n(1-\xi_n)} f(n\xi_n) =: \epsilon_n. \end{cases} \tag{1.6}$$

Osoitetaan vielä aputuloksena Lemma 1.10, jota tarvitaan myöhemmin.

LEMMA 1.10. *Olkoon $Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$, missä $b_k \in \mathbb{Z}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja*

$$f(x) = \frac{Q(x)}{(p-1)!}.$$

Jos $i \geq p$, $i, p \in \mathbb{N}$, niin $f^{(i)}(x)$ on polynomi, jonka kertoimet ovat luvulla p jaollisia kokonaislukuja.

TODISTUS. Laskemalla $f^{(i)}(x)$ saadaan

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x) &= \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{k=i}^{m} b_k k(k-1)\cdots(k-i+1)x^{k-i}\right) \\ &= \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{k=i}^{m} b_k \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}\right) \\ &= \sum_{k=i}^{m} b_k \frac{k!}{(k-i)!i!}\frac{i!}{(p-1)!} x^{k-i} \\ &= \sum_{k=i}^{m} b_k \binom{k}{i} \frac{i!}{(p-1)!} x^{k-i}. \end{aligned}$$

Nyt b_k, $\binom{k}{i}$ ja $\frac{i!}{(p-1)!}$ ovat kokonaislukuja, sillä $i \geq p$. Tällöin siis $f^{(i)}(x)$ on polynomi, jonka kertoimet ovat kokonaislukuja.

Osoitetaan vielä kertoimien jaollisuus luvulla p. Nyt

$$\frac{f^{(i)}(x)}{p} = \frac{1}{p}\sum_{k=i}^{m} b_k \binom{k}{i} \frac{i!}{(p-1)!} x^{k-i} = \sum_{k=i}^{m} b_k \binom{k}{i} \frac{i!}{p!} x^{k-i},$$

missä b_k, $\binom{k}{i}$ ja $\frac{i!}{p!}$ ovat kokonaislukuja, sillä $i \geq p$. Tällöin siis $f^{(i)}(x)$ on jaollinen luvulla p. □

Nyt voidaan siirtyä Neperin luvun transsendenttisuuden todistukseen. Todistuksen ajatuksena on olettaa, että yhtälölle $c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + .. + c_n e^n = 0$ löytyy kokonaiskertoimiset ratkaisut c_i, joista vähintään yksi eroaa nollasta. Tällöin päädytään kuitenkin ristiriitaan.

LAUSE 1.11. *Neperin luku ei toteuta mitään kokonaiskertoimista polynomiyhtälöä*

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + .. + c_n e^n = 0.$$

Todistus. Tehdään antiteesi. Väitetään, että on olemassa kokonaisluvut c_i, $c_0 > 0$ siten, että

$$c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + .. + c_n e^n = 0. \tag{1.7}$$

Voidaan olettaa, että $c_0 > 0$. Jos olisi $c_0 = 0$, voidaan yhtälö jakaa puolittain luvulla e, tai, jos olisi $c_0 < 0$, voidaan yhtälö kertoa puolittain luvulla -1, jolloin päästään yhtälöön (1.7).

Kertomalla ensimmäinen yhtälöistä (1.6) luvulla c_1, toinen luvulla c_2 ja niin edelleen sekä summaamalla yhtälöt saadaan

$$c_1F(1) + c_2F(2) + .. + c_nF(n) - F(0)(c_1e + c_2e^2 + ... + c_ne^n) = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n\epsilon_n.$$

Yhtälöstä (1.7) saadaan $c_1e + c_2e^2 + .. + c_ne^n = -c_0$. Tämän avulla saadaan edelleen

$$c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + .. + c_nF(n) = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + ... + c_n\epsilon_n. \tag{1.8}$$

Muistetaan, että funktio $F(x)$ on rakentunut mielivaltaisesta polynomista $f(x)$. Valitaan polynomiksi $f(x)$ Hermiten polynomi

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1-x)^p(2-x)^p \cdots (n-x)^p,$$

missä p on mikä tahansa alkuluku siten, että $p > n$ ja $p > c_0$. Nyt polynomin $f(x)$ avulla voidaan tutkia yhtälöä (1.8). Muokataan tämä polynomi muotoon

$$f(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{a_0x^p}{(p-1)!} + \frac{a_1x^{p+1}}{(p-1)!} + \cdots, \tag{1.9}$$

missä $a_0, a_1, ...$ ovat kokonaislukuja.

Lemmassa 1.10 on osoitettu, että kaikille kokonaisluvuille j pätee, että $f^{(i)}(j)$ on kokonaisluku ja luvun p monikerta, kun $i \geq p$. Nyt määritelmän mukaan polynomilla f on p -kertainen juuri, kun $x = 1, 2, ..., n$. Siten, jos $j = 1, 2, ..., n$, $f(j) = 0$, $f^{(1)}(j) = 0$,..., $f^{(p-1)}(j) = 0$. Tällöin siis

$$\begin{aligned}F(j) &= f(j) + f^{(1)}(j) + ... + f^{(p-1)}(j) + f^{(p)}(j) + ... + f^{(r)}(j)\\ &= f^{(p)}(j) + ... + f^{(r)}(j)\end{aligned}$$

on kokonaisluku, joka on luvun p monikerta.

Tutkitaan tapaus $j = 0$ eli $F(0)$. Yhtälöstä (1.9) nähdään, että polynomilla $f(x)$ on $(p-1)$ -kertainen juuri pisteessä $x = 0$, joten $f(0) = f^{(1)}(0) = ... = f^{(p-2)}(0) = 0$. Jos $i \geq p$, $f^{(i)}(0)$ on kokonaisluku, joka on luvun p monikerta. Toisaalta $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$. Kun $p > n$ ja p on alkuluku, niin $p \nmid (n!)^p$, joten $f^{(p-1)}(0)$ on kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p. Tällöin

$$F(0) = f(0) + f^{(1)}(0) + ... + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + ... + f^{(r)}(0)$$

on kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p, sillä termi $f^{(p-1)}(0)$ on ainoa termeistä, joka ei ole jaollinen luvulla p. Koska $c_0 > 0$, $p > c_0$ ja $p \nmid F(0)$, kun taas $p \mid F(1)$, $p \mid F(2)$,..., $p \mid F(n)$, saadaan, että $c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + .. + c_nF(n)$ on kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p.

Nyt siis tiedetään, että yhtälön (1.8) vasen puoli on kokonaisluku, joka ei ole jaollinen luvulla p. Tarkastellaan seuraavaksi yhtälön oikeaa puolta. Nyt

$$\epsilon_i = \frac{-e^{i(1-\xi_1)}(1-i\xi_i)^p...(n-i\xi_i)^p(i\xi_i)^{p-1}i}{(p-1)!},$$

missä $0 < \xi_i < 1$. Tällöin

$$|\epsilon_i| \leq e^n \frac{n^p(n!)^p}{(p-1)!}.$$

Kun $p \to \infty$,

$$e^n \frac{n^p(n!)^p}{(p-1)!} \to 0,$$

koska tiedetään, että $\lim_{k\to\infty} \frac{m^k}{k!} = 0$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Voidaan siis löytää tarpeeksi suuri alkuluku p, $p > c_0$, $p > n$ siten, että $|c_1\epsilon_1 + ... + c_n\epsilon_n| < 1$. Yhtälö (1.8)

$$c_1\epsilon_1 + ... + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + ... + c_nF(n)$$

on voimassa, joten on oltava kokonaisluku, joka on pienenempi kuin 1. Ainoa mahdollisuus on, että $c_1\epsilon_1 + ... + c_n\epsilon_n = 0$. Tällöin myös $c_0F(0) + ... + c_nF(n) = 0$. Tiedetään, että $p \nmid (c_0F(0) + ... + c_nF(n))$, kun taas $p \mid 0$. Tämä on ristiriita, joten luvun e on oltava transsendenttinen. ([**3**], s. 176-178.)

$\square$

LUKU 2

Määrittely rationaalipotenssien avulla

Tässä luvussa määritellään eksponenttifunktio exp rationaalipotenssien avulla. Neperin luvun olemassaolo on osoitettu luvussa 1.3,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Oletetaan tunnetuksi potenssifunktio x^n, $x > 0$ ja $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin rationaalisille luvuille $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ voidaan määritellä funktioiden x^m ja $x^{\frac{1}{n}}$ yhdistettynä funktiona

$$x^q = (x^m)^{\frac{1}{n}},$$

kun $x^{\frac{1}{n}}$ on funktion x^n käänteisfunktio. Oletetaan lisäksi tunnetuksi rationaalisia potenssifunktioita koskevat seuraavat ominaisuudet:

- $x^{p+q} = x^p x^q$, kun $p, q \in \mathbb{Q}$, $x > 0$.
- $x^q \geq 1$ kaikilla $q > 0$, $q \in \mathbb{Q}$, $x \geq 1$.
- $x^q \leq 1$ kaikilla $q < 0$, $q \in \mathbb{Q}$, $x \geq 1$.
- $x^q \leq x^p$ kaikille $q < p$, $p, q \in \mathbb{Q}$, $x \geq 1$.

Erikoistapauksessa $x = e$ rationaalisille potensseille $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ voidaan määritellä

$$e^q := (e^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Tällöin edellä todetut ominaisuudet siirtyvät funktiolle e^q, sillä $e \geq 1$. Funktiolle e^q siis pätee ominaisuudet

(1) $e^{p+q} = e^p e^q$, kun $p, q \in \mathbb{Q}$.

(2) $e^q \geq 1$ kaikilla $q > 0$, $q \in \mathbb{Q}$.

(3) $e^q \leq 1$ kaikilla $q < 0$, $q \in \mathbb{Q}$.

(4) $e^q \leq e^p$ kaikille $q < p$, $p, q \in \mathbb{Q}$.

Eksponenttifunktion yleinen potenssi Neperin luvun avulla saadaan seuraavasta määritelmästä.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Jos $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\exp(x) := e^x := \sup\{e^q : q \in \mathbb{Q} \quad \text{ja} \quad q < x\}.$$

Eksponenttifunktio on siis rationaalipotenssin potenssifunktion pienin yläraja. Merkitään joukkoa $A := \{e^q : q \in \mathbb{Q} \quad \text{ja} \quad q < x\}$. Jotta määrittely olisi järkevä, täytyy osoittaa, että joukko A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu.

Joukko on epätyhjä, sillä jos valitaan jokin $q \in \mathbb{Q}$ siten, että $q < x$, niin tällöin $e^q \in A$ ja joukko A on epätyhjä.

Joukko on ylhäältä rajoitettu, sillä jos valitaan $p \in \mathbb{Q}$ siten, että $p > x$, niin funktiolle e^q todetun ominaisuuden (4) mukaan e^p on joukon A yläraja.

Osoitetaan, että Määritelmä 2.1 ja aiempi määritelmä $e^q = (e^m)^{\frac{1}{n}}$, kun $q \in \mathbb{Q}$, johtavat samaan tulokseen. Tätä varten osoitetaan ensin, että $\exp(0) = 1$.

LEMMA 2.2.

$$\exp(0) = \sup\{e^q : q \in \mathbb{Q} \quad ja \quad q < 0\} = 1$$

TODISTUS. Koska Lemmassa 1.8 on osoitettu lukujonon $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ kasvavuus, pätee

$$\frac{1}{e} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

joten

$$e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{n-1}{n} \to 1,$$

kun $n \to \infty$. Lisäksi ominaisuuden (3) mukaan $e^q \leq 1$ kaikilla $q < 0$. Tällöin siis $\exp(0) = 1$. $\square$

Jos $p \in \mathbb{Q}$ ja tiedetään, että $e^{p+q} = e^p e^q$, kun $p, q \in \mathbb{Q}$, niin

$$\begin{aligned}\exp(p) &= \sup\{e^q : q \in \mathbb{Q} \quad \text{ja} \quad q < p\} \\ &= \sup\{e^q e^p : q \in \mathbb{Q} \quad \text{ja} \quad q < 0\} \\ &= e^p \sup\{e^q : q \in \mathbb{Q} \quad \text{ja} \quad q < 0\} \\ &= e^p \exp(0) \\ &= e^p.\end{aligned}$$

1. Additiivisuus

Osoitetaan, että Määritelmässä 2.1 esitellylle funktiolle exp pätee niin sanottu additiivisuusominaisuus

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

Tämän todistamisessa käytetään tunnetuksi oletettua tietoa, että luvuille $p, q \in \mathbb{Q}$ pätee $e^{p+q} = e^p e^q$ ja $e^q \leq e^p$ kaikille $q < p$, $p, q \in \mathbb{Q}$.

LAUSE 2.3. *Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

TODISTUS. Väite on siis $e^{x+y} = e^x e^y$. Nyt $x, y \in \mathbb{R}$ ja olkoon $r \in \mathbb{Q}$ sellainen, että $r < x + y$. Valitaan $p, q \in \mathbb{Q}$ siten, että $p < x$, $q < y$ ja $p + q > r$. Näin voidaan tehdä, sillä rationaaliluvut ovat tiheässä. Nyt

$$e^r \leq e^{p+q} = e^p e^q \leq e^x e^y,$$

joten otetaan supremum kaikista $r \in \mathbb{Q}$, joilla $r < x + y$, ja saadaan

$$e^{x+y} \leq e^x e^y.$$

Toisaalta luvut p ja q on valittu niin, että $p+q < x+y$. Tällöin

$$e^p e^q = e^{p+q} \leq e^{x+y}.$$

Otetaan supremum kaikista tällaisista luvuista p ja q. Näin saadaan

$$e^x e^y \leq e^{x+y},$$

joten on oltava $e^{x+y} = e^x e^y$. □

2. Monotonisuus

Osoitetaan, että määritelty eksponenttifunktio exp on aidosti kasvava, eli jos $x < y$, niin $f(x) < f(y)$. Osoitetaan ensin kaksi aputulosta, Lemmat 2.4 ja 2.5.

LEMMA 2.4. *Kaikilla* $x > 0$ *on* $\exp(x) > 1$.

TODISTUS. Nyt $\exp(x) = e^x$ ja jos $x > 0$, niin $\exp(x) \geq 1$ funktion e^q ominaisuuden (2) nojalla. Jos olisi $x_0 > 0$ siten, että $e^{x_0} = 1$, niin additiiviisuuden nojalla olisi

$$e^{kx_0} = \underbrace{e^{x_0} \cdot e^{x_0} \cdot \ldots \cdot e^{x_0}}_{k\,kpl} = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Jos valitaan $k \geq \frac{1}{x_0}$ eli $kx_0 \geq 1$, saadaan

$$e = e^1 \leq e^{kx_0} = (e^{x_0})^k = 1.$$

Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että Lemmassa 1.8 on osoitettu lukujono $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ on kasvavaksi. Tällöin pätee

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 > 1.$$

Siis $e^x > 1$ kaikilla $x > 0$. □

LEMMA 2.5. $\exp(x) > 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Lemmassa 2.2 on osoitettu, että $\exp(0) = 1 > 0$. Jos $x > 0$, niin Lemman 2.4 nojalla saadaan

$$\exp(x) > 1 > 0.$$

Jos taas $x < 0$, seuraa additiivisuudesta

$$\exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x) = 1$$

eli

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0,$$

sillä tällöin $\exp(-x) > 0$. Väite siis pätee. □

Palataan eksponenttifunktion aidon kasvavuuden osoitukseen.

LAUSE 2.6. $\exp(x)$ *on aidosti kasvava.*

TODISTUS. Jos $x < y$, niin $y - x > 0$ ja additiivisuuden nojalla saadaan

$$e^y = e^{y-x+x} = e^{y-x}e^x > e^x,$$

sillä Lemman 2.4 nojalla $e^{y-x} > 1$ ja Lemman 2.5 nojalla $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Ehdosta $x < y$ siis seuraa $e^x < e^y$, joten exp on aidosti kasvava. □

3. Jatkuvuus

Lauseessa 2.7 näytetään, että määritelty eksponenttifunktio exp on jatkuva koko reaaliakselilla.

LAUSE 2.7. $\exp(x)$ *on jatkuva, kun* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Koska jonot

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

on osoitettu kasvaviksi Lemmassa 1.8, saadaan

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad \text{ja} \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{e}.$$

Kun yhdistetään nämä saadaan

$$\frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n-1}. \tag{2.1}$$

Kun siis $n \to \infty$, saadaan suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1,$$

joten myös

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Koska eksponenttifunktio exp on osoitettu aidosti kasvavaksi, saadaan se jatkuvaksi pisteessä 0, sillä

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} e^x = 1 = e^0.$$

Edelleen additiivisuuden perusteella saadaan

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0}e^{x_0} = (\lim_{y\to 0} e^y)e^{x_0} = e^{x_0},$$

joten exp on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Näin ollen se on jatkuva koko reaaliakselilla.

□

4. Derivaatta

Tässä alaluvussa näytetään, että funktio exp on derivoituva ja sen derivaatta on funktio itse. Funktion derivoituvuus näytetään erotusosamäärän raja-arvon

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

olemassaolon kautta.

LAUSE 2.8. *Funktio* $\exp(x) = e^x$ *on derivoituva kaikkialla, ja* $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että $\exp(x) = e^x$ on derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$. Näin on, jos erotusosamäärän raja-arvo $\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$ on olemassa jokaisessa pisteessä avoimella välillä $x \in]-\infty, \infty[$. Erityisesti tämä tarkoittaa, että raja-arvo $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$ on olemassa, sillä

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h},$$

koska $e^{x+h} = e^x e^h$. Osoitetaan tämä Lemmassa 2.9.

LEMMA 2.9. *Raja-arvo*

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

on olemassa.

TODISTUS. Näytetään, että lauseke

$$\frac{e^h - 1}{h} \tag{2.2}$$

lähestyy jotakin raja-arvoa, kun $h \to 0$.

1° Lähestyköön aluksi h nollaa oikealta. Näytetään seuraavaksi, että lauseke (2.2) on kasvava h:n funktio. Lauseke on alhaalta rajoitettu nollalla, sillä monotonisuuden yhteydessä on näytetty, että $e^h > 1$, kun $h > 0$. Näytetään seuraavaksi, että jos on $u, v \in \mathbb{R}$ siten, että $0 < u \leq v$, niin pätee

$$\frac{e^u - 1}{u} \leq \frac{e^v - 1}{v},$$

eli

$$ve^u - ue^v \leq v - u.$$

Riittää osoittaa tämä rationaalisille u ja v, sillä approksimoimalla lukuja u ja v rationaalilukujen jonoilla (u_n) ja (v_n) saadaan funktion $\exp(x) = e^x$ jatkuvuuden nojalla

$$\lim(v_n e^{u_n} - u_n e^{v_n}) = ve^u - ue^v.$$

Tällöin tilanne palautuu rationaalisiin lukuihin u ja v.

Oletetaan siis, että $u = \frac{p}{n}$ ja $v = \frac{q}{n}$, kun n, p ja q ovat kokonaislukuja, ja $n > 0$, $p < q$, kun $u < v$. Tällöin jakamalla luvulla n epäyhtälö

$$\frac{e^u - 1}{u} \leq \frac{e^v - 1}{v}$$

tulee muotoon

$$\frac{e^{p/n} - 1}{p} \leq \frac{e^{q/n} - 1}{q}.$$

Edelleen, kun merkitään $e^{1/n} = c > 1$, saadaan

$$\frac{c^p - 1}{p} \leq \frac{c^q - 1}{q}. \tag{2.3}$$

Tämä on lähtötilanne, jossa p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja.

Olkoon nyt $c = 1 + d$, kun $d > 0$. Tällöin binomikaavan (Lemma 1.2) avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{c^p - 1}{p} &= \frac{1}{p}(c^p - 1) \\
&= \frac{1}{p}\left(\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 1^{p-k} d^k\right) - 1\right) \\
&= d + (p-1)d^{[2]} + (p-1)(p-2)d^{[3]} + ... + (p-1)\cdots 1 d^{[p]}
\end{aligned}$$

ja samanlainen yhtälö termille $\frac{c^q-1}{q}$. Jos $p < q$, selvästi termin $d^{[k]} = \frac{d^k}{k!}$ kerroin $(p-1)\cdots(p-(k-1))$ on lausekkeessa $\frac{c^p-1}{p}$ pienempi kuin lausekkeessa $\frac{c^q-1}{q}$. Lisäksi termin $\frac{c^q-1}{q}$ lauseke sisältää enemmän termejä. Kaikki termit ovat positiivisia, joten yhtälö (2.3) on todistettu ja samoin alkuperäinen väite $\frac{e^u-1}{u} \leq \frac{e^v-1}{v}$.

On siis osoitettu, että lausekkeella (2.2) on raja-arvo, kun h lähestyy nollaa oikealta.

2° Käsitellään tapaus, kun h lähestyy nollaa vasemmalta. Olkoon siis $h = -k$, kun $k > 0$, jolloin

$$\frac{e^h-1}{h} = \frac{\frac{1}{e^k}-1}{-k} = \frac{\frac{e^k-1}{e^k}}{k} = e^{-k}\frac{e^k-1}{k}.$$

Tällöin h:n lähestyessä nollaa vasemmalta e^{-k} lähestyy lukua 1 ja koko lauseke lähestyy samaa lukua kuin edellisessä tapauksessa.

On siis löydetty oikea ja vasen raja-arvo ja osoitettu, että ne ovat samat. Näin ollen haluttu raja-arvo $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ on olemassa. ([**2**], s. 339-341) □

Halutaan vielä määrittää derivaatta $\frac{d}{dx}e^x$. Tehdään tämä erotusosamäärän raja-arvon avulla:

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.$$

Jatkuvuuden yhteydessä on saatu yhtälö (2.1):

$$\frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n-1}.$$

Tästä saadaan kertomalla luvulla $n > 0$

$$1 \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \leq \frac{n}{n-1}.$$

Nyt jos $h = \frac{1}{n}$, niin

$$1 \leq \frac{e^h-1}{h} = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \leq \frac{n}{n-1} \to 1,$$

kun $n \to \infty$. Koska $h \to 0$, niin $n \to \infty$, jotta $h = \frac{1}{n} \to 0$. Siis $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$ ja tällöin

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x.$$

□

5. Käänteisfunktio

Muistetaan, että bijektiivisellä funktiolla on käänteisfunktio. Funktion tulee siis olla injektio ja surjektio. Funktio $f : A \to B$ on injektio, jos sen yhtä arvojoukon arvoa vastaa tasan yksi määrittelyjoukon arvo, toisin sanoen jos $x, y \in A$ siten, että $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$. Funktio f on surjektio, jos se saa kaikki maalijoukkonsa arvot, toisin sanoen kaikilla $y \in B$ on olemassa $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Tämän työn bijektiivisyystodistuksissa injektiivisyys tulee suoraan funktion aidon kasvavuuden kautta.

Osoitetaan, että funktio $\exp(x) = e^x$ on bijektio. Todistuksessa ja myöhemminkin tullaan tarvitsemaan Bolzanon lausetta jatkuville funktioille. Esitetään se seuraavaksi.

LEMMA 2.10. *Bolzanon lause. Jos* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva funktio siten, että* $f(a) \le c \le f(b)$*, niin tällöin on olemassa* $x_0 \in [a, b]$ *siten, että* $f(x_0) = c$*.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Katso [**7**], s. 130-131. □

LAUSE 2.11. *Eksponenttifunktio* $e^x : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ *on bijektio.*

TODISTUS. Näytetään, että e^x on injektio ja surjektio. Lauseessa 2.6 on osoitettu funktion e^x aito kasvavuus, joten funktio on myös injektio. Riittää siis osoittaa, että eksponenttifunktio on surjektio.

Nyt $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$, sillä e^n kasvaa rajatta, kun $n \to \infty$ ja $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$, sillä additiivisuuden nojalla $e^{-n}e^n = 1$, jolloin $e^{-n} = \frac{1}{e^n} \to 0$, kun $n \to \infty$.

Funktio e^x on Lauseen 2.7 nojalla jatkuva koko reaaliakselilla. Olkoon $c \in]0, \infty[$. Koska $\lim_{n\to\infty} e^n = +\infty$, niin on olemassa $n_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $e^{n_1} > c$. Tiedosta $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ puolestaan saadaan, että on olemassa $n_2 \in \mathbb{N}$ siten, että $e^{-n_2} < c$. Tällöin Bolzanon lauseen (Lemma 2.10) nojalla on olemassa $x_0 \in]-n_2, n_1[$ siten, että $e^{x_0} = c$. Tämä voidaan tehdä kaikille luvuille c, joten funktio e^x on siis surjektio.

□

Eksponenttifunktiolla e^x on siis käänteisfunktio. Käänteisfunktio on luonnollinen logaritmi $\ln x$, joka on kasvava bijektio määrittelyalueenaan $\mathbb{R}^+$ ja arvojoukkona $\mathbb{R}$.

LUKU 3

Määrittely potenssisarjojen avulla

Seuraavaksi määritellään eksponenttifunktio potenssisarjan avulla.

MÄÄRITELMÄ 3.1. Olkoon funktio $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jotta määritelmä voidaan ottaa käyttöön, täytyy ensin tutkia, suppeneeko kyseinen sarja. Tätä varten palautetaan mieleen seuraava suppenemista koskeva Määritelmä 3.2 ja Lemma 3.3.

MÄÄRITELMÄ 3.2. Potenssisarjan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenemissäde on

$$R = \sup\{|x-x_0| \mid sarja \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n suppenee\}.$$

Jos potenssisarjan kaikki kertoimet eroavat nollasta, suppenemissäde voidaan määrittää seuraavasti:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

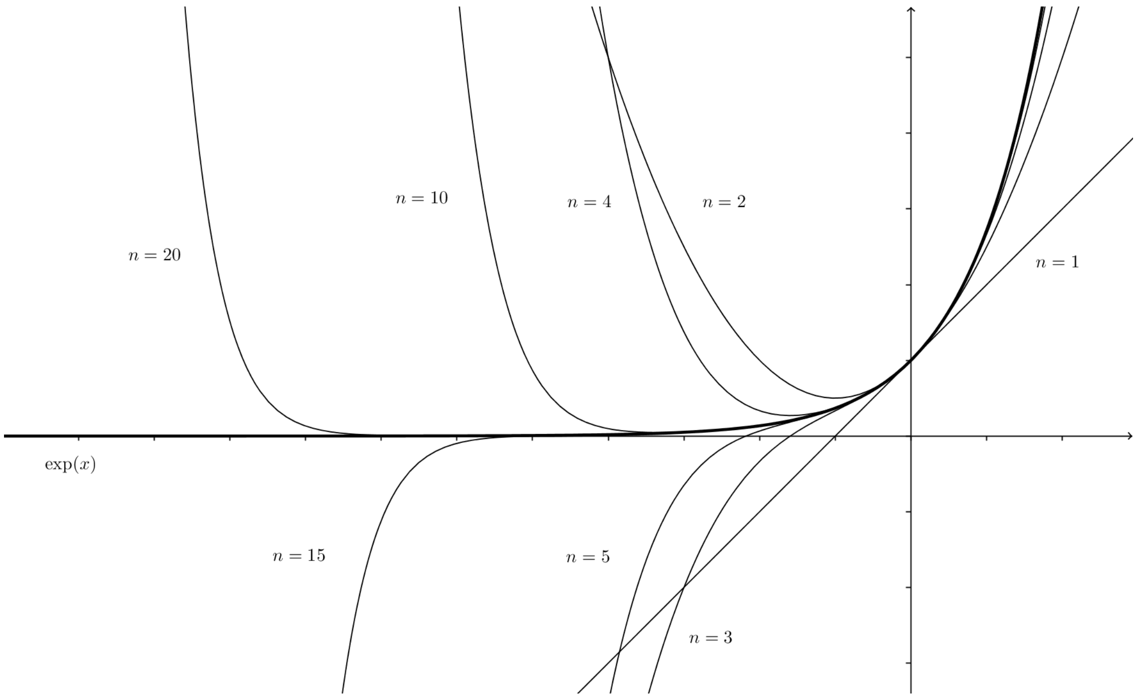
jos tämä raja-arvo on olemassa.

LEMMA 3.3. *Olkoon $R > 0$ sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenemissäde. Tällöin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenee itseisesti suppenemisvälillään $]x_0-R, x_0+R[$ ja hajaantuu välin $[x_0-R, x_0+R]$ ulkopuolella. Lisäksi olkoon $0 < r < R$. Tällöin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ suppenee tasaisesti välillä $[x_0-r, x_0+r]$.*

Palataan Määritelmässä 3.1 esitettyyn sarjaan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Tutkitaan, mikä on sarjan suppenemissäde R:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \infty.$$

Suppenemissäteeksi saadaan ääretön, jolloin siis sarja suppenee välillä $]-\infty, \infty[$ eli koko reaaliakselilla. Sarjan suppenemista on esitetty kuvassa 3.1. Sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ käyttö funktion exp määritelmänä on siis mahdollista.



KUVA 3.1. Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$ suppeneminen. Kuvassa on esitetty osasummien $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ suppenemista eri arvoilla n.

1. Derivaatta ja jatkuvuus

Osoitetaan, että myös näin määritelty eksponenttifunktio exp on derivoituva. Muistetaan, että potenssisarjaa voidaan derivoida termeittäin sen suppenemisvälillä. Potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ suppenemisväli on siis $\mathbb{R}$.

LAUSE 3.4. *Funktio* $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *on derivoituva kaikkialla ja*

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$$

.

TODISTUS. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Sarja

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

voidaan siis derivoida termeittäin, ja näin saadaan

$$\begin{aligned} \exp'(x) = D\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) &= 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x). \end{aligned}$$

□

Myös siis potenssisarjaesityksen kautta löydetään eksponenttifunktion derivaatalle identtisyys itse funktion kanssa. Koska potenssisarja on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin se on myös jatkuva koko joukossa $\mathbb{R}$.

2. Additiivisuus

Funktion $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ additiivisuus ominaisuuden todistamiseksi tarvitaan potenssisarjojen Cauchy-tuloa. Cauchy-tulo on määritelty seuraavaksi.

MÄÄRITELMÄ 3.5. Kun sarjat $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ suppenevat, niiden Cauchy-tulo on

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

Kahden itseisesti suppenevan sarjan Cauchyn tulosarja suppenee itseisesti.

Tämän avulla voidaan todistaa seuraava lause eli eksponenttifunktion additiivisuus.

LAUSE 3.6. *Kaikille $a, b \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

TODISTUS. Sarjat $\exp(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!}$ ja $\exp(b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!}$ suppenevat itseisesti, joten Cauchy-tulo voidaan laskea. Toiseksi viimeisessä yhtäsuuruudessa käytetään binomikaavaa (Lemma 1.2).

$$\begin{aligned}
\exp(a)\exp(b) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a^i}{i!}\frac{b^{k-i}}{(k-i)!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!}\frac{k!}{i!(k-i)!}a^i b^{k-i}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(a+b)^k = \exp(a+b).
\end{aligned}$$

□

3. Monotonisuus

Osoitetaan, että $\exp(x)$ on aidosti kasvava eli summa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ on aidosti kasvava. Muistetaan, että funktio on aidosti kasvava joukossa $\mathbb{R}$, jos sen derivaatta on aidosti positiivinen kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoitetaan ensin avuksi Lemma 3.7.

LEMMA 3.7. *Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee* $\exp(x) > 0$.

TODISTUS. Jos $x > 0$, niin jokainen potenssisarjan termi on positiivinen, joten $\exp(x) > 0$. Käsitellään tapaus $x < 0$. Sarjasta saadaan

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + ... + \frac{0^n}{n!} + ... = 1.$$

Nyt additiivisuuden nojalla

$$\exp(0) = \exp(x)\exp(-x) = 1,$$

joten $\exp(x) = \frac{1}{exp(-x)}$ on positiivinen, kun $x < 0$. □

LAUSE 3.8. *Funktio* $\exp(x)$ *on aidosti kasvava.*

TODISTUS. On osoitettu, että funktion $\exp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ derivaatta on

$$\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Koska Lemman 3.7 mukaan $\exp(x) = \exp'(x) > 0$, on funktio $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ aidosti kasvava. □

4. Käänteisfunktio

Funktiolla $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ on käänteisfunktio, jos se on bijektio. Osoitetaan, että $\exp(x)$ on bijektio.

LAUSE 3.9. *Eksponenttifunktio* $\exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *on bijektio.*

TODISTUS. Näytetään, että $\exp x$ on injektio ja surjektio. Funktio on osoitettu aidosti kasvavaksi Lauseessa 3.8, joten se on injektio. Riittää siis osoittaa, että $\exp(x)$ on surjektio. Nyt $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, kun $x \to \infty$, sillä

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \geq 1 + x,$$

kun $x > 0$. Lisäksi $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, sillä Lemman 3.7 todistuksessa huomattiin, että $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$. Kun $x < 0$, niin $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \to 0$, kun $x \to -\infty$. Lauseen 2.11 todistuksen päättelyllä saadaan, että jatkuvana funktiona $\exp(x)$ saa Bolzanon lauseen (Lemma 2.10) nojalla kaikki positiiviset arvot. Näin ollen funktio on myös surjektio. □

Tällöin siis eksponenttifunktiolla $\exp(x)$ on käänteisfunktio.

LUKU 4

Määrittely differentiaaliyhtälöitä käyttäen

Tässä luvussa eksponenttifunktio $\exp(x)$ määritellään differentiaaliyhtälön avulla. Ennen määritelmän käyttöä on oleellista näyttää, että määritellyllä differentiaaliyhtälöllä on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu. Määritellään eksponenttifunktio seuraavasti.

MÄÄRITELMÄ 4.1. Eksponenttifunktio $\exp(x)$ on yksikäsitteinen differentiaaliyhtälön

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1,$$

ratkaisu, kun $x \in \mathbb{R}$.

On siis määritelty eksponenttifunktio $\exp(x)$ ainoaksi funktioksi, joka toteuttaa ehdot

(E1) $f'(x) = f(x)$ kaikille $x \in \mathbb{R}$, ja
(E2) $f(0) = 1$.

Ennen kuin voidaan käyttää edellä olevaa määritelmää täytyy varmistaa, että ehdot (E1) ja (E2) täyttävä funktio on olemassa ja yksikäsitteinen. Tähän tarvitaan differentiaaliyhtälön globaalia olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslausetta Lemmaa 4.2.

LEMMA 4.2. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ väli, $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva sekä olkoon $\frac{\partial f}{\partial y}$ olemassa joukossa $A \times \mathbb{R}$. Lisäksi oletetaan, että $\frac{\partial f}{\partial y}$ on rajoitettu jokaisessa joukossa $[a, b] \times \mathbb{R}$, missä $[a, b]$ on välin A osaväli. Silloin jokaiselle $(x_0, y_0) \in A \times \mathbb{R}$ alkuarvotehtävällä*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on yksi ja vain yksi koko välillä A määritelty ratkaisu $y : A \to \mathbb{R}$.

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Katso [**5**], s. 83-85. □

Määritelmän 4.1 differentiaaliyhtälö on muotoa

$$\begin{cases} y'(x) = g(x, y(x)) \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

kun $x \in \mathbb{R}$.

Tarkastellaan tilannetta välillä $A \subset \mathbb{R}$. Määritelmän mukaan $g(x, y) = y$. Nyt $g(x, y)$ on derivoituvana jatkuva. Funktion g osittaisderivaataksi muuttujan y suhteen välillä A saadaan

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1.$$

Funktion g osittaisderivaatta on siis kaikkialla rajoitettu ja näin ollen Lemman 4.2 mukaan differentiaaliyhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu $y : A \to \mathbb{R}$.

Tällöin siis alkuarvotehtävällä $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ on yksikäsitteinen ratkaisu ja Määritelmää 4.1 voidaan käyttää.

1. Derivaatta ja jatkuvuus

Koska $\exp(x)$ on yhtälön $f'(x) = f(x)$ ratkaisu, sen täytyy olla derivoituva, eli sillä on olemassa derivaatta määrittelyjoukossaan. Edelleen jokainen derivoituva funktio on jatkuva. Ominaisuudet siis seuraavat suoraan määritelmästä.

2. Additiivisuus

Osoitetaan eksponenttifunktion exp additiivisuusominaisuus.

LAUSE 4.3. *Kaikille $a, b \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b).$$

TODISTUS. Merkitään väitettä seuraavasti

$$f(a + b) = f(a)f(b).$$

Nyt siis funktio f toteuttaa ehdot $f = f'$ ja $f(0) = 1$. Todistusta varten määritellään funktio g seuraavasti

$$g(x) = \frac{f(x + b)}{f(x)f(b)}.$$

Funktio g on hyvin määritelty eli $f(x) \neq 0$ ja $f(b) \neq 0$. Näin on, sillä funktiot, jotka toteuttavat ehdon $f = f'$, eivät voi differentiaaliyhtälön yksikäsitteisyyden nojalla leikata toisiaan. Ehdon $f = f'$ toteuttavia funktioita ovat $f(x) = 0$ ja $f(x) = \exp(x)$. Lisäksi tiedetään, että $f(0) = 1$, joten määritelmässä oleva funktio ei voi olla $f(x) = 0$. Funktio $f(x) = \exp(x)$ ei voi siis leikata funktiota $f(x) = 0$. Ehdosta $f(0) = 1$ siis saadaan, että funktio $f(x) = \exp(x)$ on aina funktion $f(x) = 0$ yläpuolella.

Derivoidaan funktio g. Määritelmän ehdon $f = f'$ nojalla saadaan

$$\begin{aligned} g'(x) =& \frac{f'(x + b)f(x)f(b) - f'(x)f(b)f(x + b)}{(f(x)f(b))^2} \\ =& \frac{f(x + b)f(x)f(b) - f(x + b)f(x)f(b)}{(f(x)f(b))^2} = 0. \end{aligned}$$

Funktio g on siis vakio. Määritetään tämä vakio laskemalla $g(0)$.

$$g(0) = \frac{f(0 + b)}{f(0)f(b)} = 1,$$

sillä määritelmän nojalla $f(0) = 1$. On siis saatu, että

$$g(x) = \frac{f(x + b)}{f(x)f(b)} = 1$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin $f(x + b) = f(x)f(b)$. □

3. Monotonisuus

Osoitetaan, että exp on aidosti kasvava. Näytetään ensin Lemmassa 4.4, että $\exp(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

LEMMA 4.4. *Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee* $\exp(x) > 0$.

TODISTUS. Väite on todistettu Lauseen 4.3 yhteydessä, sillä pääteltiin, että funktio $\exp(x)$ on aina funktion $f(x) = 0$ yläpuolella. □

Lause 4.5. *Funktio* exp *on aidosti kasvava.*

Todistus. Määritelmän 4.1 ja Lemman 4.4 nojalla saadaan,

$$(\exp(x))' = \exp(x) > 0,$$

eli derivaattafunktio on aina positiivinen, joten siis exp on aidosti monotoninen, erityisesti aidosti kasvava. □

4. Käänteisfunktio

Osoitetaan, että määritelty funktio $f(x) = \exp(x)$ on bijektio, jolloin sillä on myös käänteisfunktio.

Lemma 4.6. *Funktio* $\exp(x)$ *on bijektio.*

Todistus. Lauseessa 4.5 on osoitettu funktion $\exp(x)$ aito kasvavuus, joten se on injektio. Riittää siis osoittaa, että funktio $\exp(x)$ on surjektio. Määritelmän ja Lemman 4.4 nojalla pätee

$$f''(x) = f'(x) = f(x) > 0,$$

joten f' on kasvava funktio. Edelleen derivaatan f' kasvavuus ja Määritelmä 4.1 antaa

$$f'(x) \geq f'(0) = f(0) = 1, \quad \text{kaikilla} \quad x \geq 0.$$

Nyt Analyysin peruslauseen ([**1**], s. 188) avulla saadaan

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \geq f(0) + x = 1 + x \quad \text{kaikilla} \quad x \geq 0.$$

Näin ollen siis $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Additiivisuuden ja määritelmän ($f(0) = 1$) nojalla saadaan $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$, jolloin siis $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Lauseen 2.11 päättelyllä jatkuvana funktiona $f(x) = \exp(x)$ saa Bolzanon lauseen (Lemma 2.10) nojalla kaikki positiiviset arvot. □

On näytetty, että määritellyllä funktiolla $f(x) = \exp(x)$ on olemassa käänteisfunktio $g(x)$. Tarkastellaan funktiota g. Käänteisfunktion derivoimissäännön perusteella saadaan

$$g'(x) = \frac{1}{\exp'(g(x))} = \frac{1}{\exp(g(x))} = \frac{1}{x},$$

sillä määritelmän mukaan $\exp(x) = \exp'(x)$. Tällöin Analyysin peruslause sanoo, että integroimalla voidaan löytää funktio $g(x)$. Nyt siis

$$g(x) = g(x_0) + \int_{x_o}^x g'(t)dt = g(x_0) + \int_{x_o}^x \frac{1}{t}dt.$$

Koska määritelmän nojalla tiedetään $f(0) = 1$, niin käänteisfunktion ominaisuuksien nojalla saadaan $g(1) = 0$, koska funktio g oli funktion f käänteisfunktio. Valitaan nyt $x_0 = 1$. Tällöin funktion $\exp(x)$ käänteisfunktioksi saadaan

$$g(x) = \int_1^x g'(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

LUKU 5

Määrittely raja-arvoa käyttäen

MÄÄRITELMÄ 5.1. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin eksponenttifunktio on raja-arvo

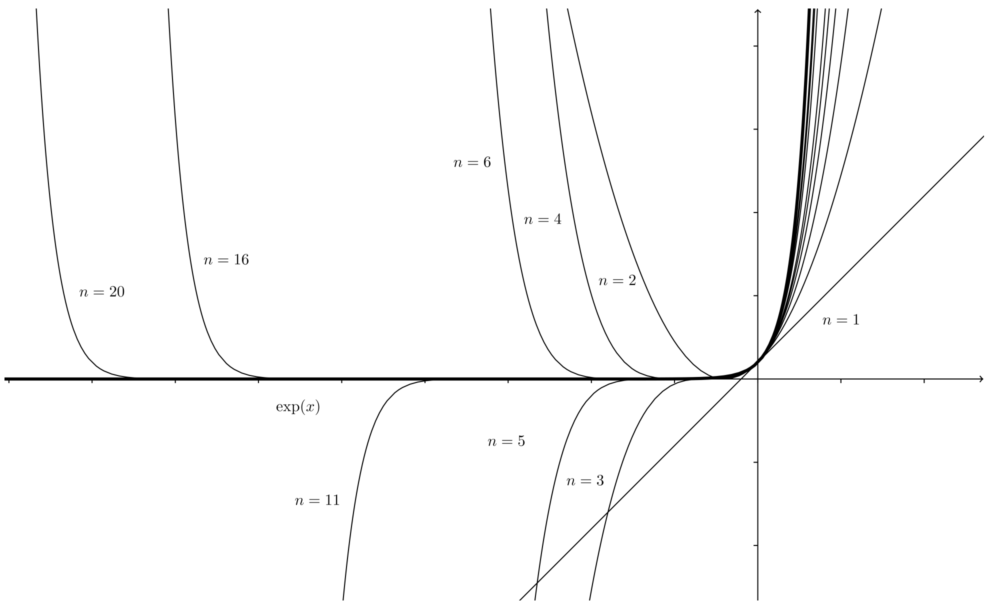
$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Jotta määritelmää voidaan käyttää, tulee osoittaa, että funktiojono $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ suppenee tasaisesti joukossa $\mathbb{R}$, jolloin on olemassa rajafunktio $f(x) = \exp(x)$. Funktiojonon rajafunktiolle voidaan osoittaa halutut ominaisuudet: jatkuvuus, derivoituvuus, additiivisuus, monotonisuus, ja että sillä on käänteisfunktio.

Tämän määritelmän kohdalla ominaisuudet osoitetaan kahdessa osassa, kun $x \geq 0$, ja kun $x < 0$. Kuvassa 5.1 on esitetty funktiojonon suppenemista. Kuvasta nähdään, että funktiojono on monotoninen, kun $x \geq 0$. Tällöin voidaan käyttää tasaisen suppenemisen päättelyyn Dinin lausetta, jonka jälkeen halutut ominaisuudet pystytään osoittamaan. Kun $x < 0$, funktiojono ei ole enää monotoninen, jolloin ominaisuuksien osoittamista varten määritellään funktio $F : \mathbb{R} \to]0, \infty[$,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jos } x \geq 0 \\ \frac{1}{f(-x)} & \text{jos } x < 0 \end{cases}.$$

Tämän avulla eksponenttifunktiolle saadaan halutut ominaisuudet myös, kun $x < 0$.



KUVA 5.1. Funktiojonon $f_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ suppeneminen.

1. Määrittely raja-arvoa käyttäen, kun $x \geq 0$

Tässä alaluvussa osoitetaan eksponenttifunktion jatkuvuus, derivaatta ja additiivisuus, kun $x \geq 0$. Monotonisuus ja käänteisfunktion olemassaolo osoitetaan alaluvussa 5.2.

Määritellään funktiojono $f_n : [0,\infty[\to [0,\infty[$,

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Huomaa, että oletuksena on $x \geq 0$. Nyt halutaan osoittaa, että f_n suppenee tasaisesti kohti funktiota $f(x) = \exp(x)$. Tähän käytetään Dinin lausetta 5.2.

LEMMA 5.2. *Dinin lause. Olkoon f_n monotoninen jono jatkuvia funktioita suljetulla välillä $[a,b]$. Jos f_n suppenee kohti funktiota f pisteittäin, ja jos rajafunktio on myös jatkuva, niin f_n suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä $[a,b]$.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Katso [**8**], s. 143-144. □

Dinin lauseessa 5.2 on huomattava sen tarkat oletukset. Funktiojonon tulee olla monotoninen. Funktiojonon $f_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ kohdalla monotonisuus pätee: jos valitaan $n < m$, niin pätee $(1+\frac{x}{n})^n < (1+\frac{x}{m})^m$. Näin on, koska polynomissa $(1+\frac{x}{m})^m$ on suuremmat termit ja siinä on enemmän termejä kuin polynomissa $(1+\frac{x}{n})^n$. Tämä nähdään binomikaavasta

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{k}\right)^k &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}1^{k-l}\left(\frac{x}{k}\right)^l = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{x^l}{k^l} \\
&= 1 + x + \frac{(1-\frac{1}{k})}{2!}\,x^2 + \frac{(1-\frac{3}{k}+\frac{2}{k^2})}{3!}x^3 + ... + \frac{x^{k-1}}{k^{k-1}} + \frac{x^k}{k^k} \\
&= \sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\left(1-\frac{l-1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)x^l.
\end{aligned}$$

Lisäksi kaikki termit ovat positiivisia, sillä $x \geq 0$. On siis $f_n(x) < f_m(x)$.

Dinin lause vaatii myös, että funktioiden f_n tulee olla jatkuvia suljetulla välillä $[a,b]$. Potenssifunktioina ne ovat jatkuvia koko reaaliakselilla. Lisäksi vaaditaan vielä, että f_n suppenee kohti funktiota f pisteittäin, ja rajafunktion tulee olla jatkuva. Osoitetaan nämä Lemmoissa 5.3 ja 5.5.

Pisteittäisessä suppenemisessa funktiojono suppenee jossakin valitussa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, toisin sanoen se on lokaali ominaisuus. Tasainen suppeneminen on globaalimpi ilmiö, ja siksi myös vahvempi kuin pisteittäinen suppeneminen. Tasaisesta suppenemisesta tietyllä välillä seuraa funktiojonon pisteittäinen suppeneminen samalla välillä, mutta pisteittäinen suppeneminen ei takaa suoraan tasaista suppenemista.

Jotta voidaan käyttää Dinin lausetta riittää osoittaa, että jono $f_n = (1+\frac{x}{n})^n$ suppenee pisteittäin. Tehdään tämä seuraavaksi.

LEMMA 5.3. *Jono $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$.*

TODISTUS. Valitaan piste $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $x_0 \geq 0$. Binomikaavan avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
f_n(x_0) &= \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{x_0}{n}\right)^k \\
&= 1 + x_0 + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2!} x_0^2 + ... + \frac{{x_0}^{n-1}}{n^{n-1}} + \frac{{x_0}^n}{n^n}.
\end{aligned}
$$

Tehdään arvio

$$
f_n(x_0) \leq 1 + x_0 + \frac{{x_0}^2}{2!} + ... + \frac{{x_0}^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{{x_0}^n}{n!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{{x_0}^k}{k!}.
$$

Sarjalle $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{{x_0}^k}{k!}$ on osoitettu luvussa 3 potenssisarjamäärittelyn yhteydessä sen suppeneminen. Saatu summa on siis ylhäältä rajoitettu rajana $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^k}{k!}$. Nyt Lemman 1.4 mukaan f_n suppenee kohti funktiota $f(x)$, kun $x_0 \geq 0$. □

On siis osoitettu, että f_n suppenee pisteittäin kohti funktiota f jollakin arvolla $x_0 \geq 0$. Dinin lauseen 5.2 oletuksista on näytetty muut paitsi rajafunktion jatkuvuus. Tehdään se seuraavaksi, jotta voidaan todeta funktiojonon f_n tasainen suppeneminen kohti rajafunktiota f. Jatkuvuuden osoittamiseen tarvitaan Lemmaa 5.4.

LEMMA 5.4. *Väliarvolause. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Tällöin on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että*

$$
f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).
$$

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Katso [**7**], s. 160-162. □

LEMMA 5.5. *Olkoon $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$. Tällöin $f(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ on jatkuva.*

TODISTUS. Nyt funktiot f_n ovat polynomifunktioina jatkuvia ja derivoituvia, joten voidaan käyttää Väliarvolausetta. Tutkitaan erotusta $|f(b) - f(a)|$ tiedolla, että f_n suppenee kohti funktiota f ja käytetään Väliarvolausetta 5.4. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^+$. Väliarvolauseen avulla voidaan löytää $c_n \in]a, b[$ siten, että

$$
\begin{aligned}
|f(b) - f(a)| &= |\lim_{n\to\infty} f_n(b) - \lim_{n\to\infty} f_n(a)| \\
&= |\lim_{n\to\infty} (f_n(b) - f_n(a))| \\
&= |\lim_{n\to\infty} f_n'(c_n)(b - a)| \\
&= |\lim_{n\to\infty} f_n'(c_n)||b - a| \\
&= |\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^{n-1} ||b - a| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + c_n} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n\right| |b - a| \\
&\leq \left|\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c_n}{n}\right)^n\right| |b - a| \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}\right) |b - a| =: L|b - a|,
\end{aligned}
$$

kaikilla $a, b \in [0, M]$.

Nyt $L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \geq 0$ on vakio, joka ei riipu luvusta n, sillä on osoitettu, että kyseinen sarja suppenee. On siis osoitettu, että

$$|f(b) - f(a)| \leq L|b - a|, \text{kun}\, a, b \in [0, M].$$

Tällöin funktio $f(x)$ on jatkuva. □

Näin ollen on osoitettu, että kaikki Lemman 5.2 oletukset toteutuvat, joten funktiojono $f_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f jollakin välillä $[a, b]$, kun $a, b \in \mathbb{R}^+$. Sama päättely voidaan kuitenkin tehdä kaikilla väleillä joukossa $\mathbb{R}^+$, joten tulos voidaan yleistää koko joukkoon $\mathbb{R}^+$. Voidaan nyt määritellä

$$f : [0, \infty[\to [0, \infty[, f(x) = \exp(x).$$

5.1.1. Jatkuvuus. Funktiojonon $f_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ rajafunktio $\exp(x)$ on osoitettu jatkuvaksi Lemmassa 5.5.

5.1.2. Derivaatta. Tässä alaluvussa näytetään, että funktiojonon $f_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ rajafunktio $f(x) = \exp(x)$ on derivoituva välillä $[0, \infty[$ ja että $f(x) = f'(x)$ kaikilla $x \geq 0$. Tähän tarvitaan Lemmaa 5.6.

LEMMA 5.6. *Olkoot $f_n :]a, b[\to R$ jatkuvasti derivoituvia funktioita. Jos $f_n \to f$ tasaisesti välillä $]a, b[$, ja jos derivaattojen f_n' jono suppenee myös tasaisesti välillä $]a, b[$ kohti funktiota g, niin f on derivoituva ja $f' = g$.*

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Katso [**2**], s. 266-268. □

Osoitetaan nyt rajafunktion f derivoituvuus.

LAUSE 5.7. *Funktio $f(x) = \exp(x)$ on derivoituva välillä $[0, \infty[$, ja $f'(x) = f(x)$ kaikilla $x \geq 0$.*

TODISTUS. Funktiojonon f_n funktiot ovat polynomifunktioina derivoituvia joukossa $\mathbb{R}$, joten voidaan derivoida jono f_n. Saadaan

$$f_n'(x) = n \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \frac{f_n(x)}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{n}{n + x} \cdot f_n(x).$$

Olkoon $h_n(x) := \frac{n}{n+x}$. Osoitetaan, että

$$h_n(x) = \frac{n}{n + x} \to 1, \text{kun} \quad n \to \infty,$$

toisin sanoen $h_n(x) = \frac{n}{n+x}$ suppenee tasaisesti kohti vakiofunktiota 1 välillä $[0, r]$ kaikilla $r > 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0,r]} |h_n(x) - h(x)| &= \sup_{x \in [0,r]} \left| \frac{n}{n + x} - 1 \right| \\
&= \sup_{x \in [0,r]} \frac{|x|}{|n + x|} \leq \frac{r}{n - r} \to 0, \quad \text{kun} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Funktiojono $h_n(x) = \frac{n}{n+x}$ suppenee siis tasaisesti kohti vakiofunktiota 1 välillä $[0, r]$. Tämä pätee kaikilla väleillä $[0, r]$, kun $r > 0$.

Aiemmin on osoitettu, että funktiojono f_n suppenee lokaalisti tasaisesti kohti funktiota f, kun $n \to \infty$. Saadaan siis, että derivaattajono $f_n'(x)$ suppenee tasaisesti kohti jotakin funktiota g, sillä kahden lokaalisti tasaisesti suppenevan jonon tulo suppenee tasaisesti. Pätee siis

$$f_n'(x) = \frac{n}{n+x} \cdot f_n(x) \to g(x).$$

Nyt edellä on näytetty, että Lemman 5.6 oletukset ovat voimassa, joten rajafunktio $f(x) = \exp(x)$ on derivoituva välillä $[0, \infty[$ ja sen derivaatta on $f'(x) = g(x)$, kun $x > 0$.

Jos katsotaan derivaatan lauseketta tarkemmin huomataan, että

$$f_n'(x) = \frac{n}{n+x} \cdot f_n(x) \to 1 \cdot f(x) = f(x) = g(x).$$

Rajafunktion $f(x) = \exp(x)$ derivaatalle siis pätee $f'(x) = f(x) = \exp(x)$, kun $x > 0$. □

5.1.3. Additiivisuus. Additiivisuuden osoituksessa käytetään kaavaa

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

LAUSE 5.8. *Kaikille $x, y \geq 0$ pätee*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

TODISTUS. Kirjoitetaan väite muodossa

$$\exp(x+y) - \exp(x)\exp(y) = 0.$$

Tutkitaan väitteen erotusta funktiojonojen avulla.

$$\begin{aligned} &|f_n(x+y) - f_n(x)f_n(y)| \\ &= \left| \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n - \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right) \right]^n \right| \\ &= \left| \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n \right| \\ &= \Bigg| \left[1 + \frac{x+y}{n} - \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)\right] \Bigg[\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-2} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right) \\ &\quad + \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-3} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^2 + ... + \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^{n-3} \\ &\quad + \left(1 + \frac{x+y}{n}\right) \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^{n-2} + \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^{n-1} \Bigg] \Bigg| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| -\frac{xy}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-1-k} \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^k \right| \\
&\leq \frac{|x||y|}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{|x|+|y|}{n}\right)^{n-1-k} \left(1 + \frac{|x|+|y|}{n} + \frac{|x||y|}{n^2}\right)^k \\
&= \frac{|x||y|}{n^2} \cdot n \cdot \left(1 + \frac{|x|+|y|}{n} + \frac{|x||y|}{n^2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{|x||y|}{n} \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^{n-1} \\
&\leq \frac{1}{n}|x||y| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y|^k}{k!}\right) \to 0,
\end{aligned}
$$

kun $n \to \infty$. Tällöin siis $|f_n(x+y) - f_n(x)f_n(y)| \to 0$ ja kun edelleen $n \to \infty$, niin tasaisen suppenemisen nojalla $f_n \to f$, joten $f(x+y) = f(x)f(y)$ eli $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. □

2. Määrittely raja-arvoa käyttäen, kun $x < 0$

Funktiojono $f_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ ei ole monotoninen, kun $x < 0$. Dinin lausetta (Lemma 5.2) ei voida siis käyttää tasaiselle suppenemiselle koko alueeseen $\mathbb{R}$. Aiemmin määriteltiin, että $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$, kun $x \geq 0$. Määritelmä 5.1 voidaan kuitenkin osoittaa toimivaksi myös, kun $x < 0$. Määritellään tätä varten funktio F seuraavasti.

Määritelmä 5.9. Olkoon $F : \mathbb{R} \to]0, \infty[$,

$$
F(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{jos } x \geq 0 \\ \frac{1}{f(-x)} & , \text{jos } x < 0 \end{cases},
$$

missä $f(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$.

Lemmassa 5.14 tullaan osoittamaan, että $f(x) = \exp(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen Määritelmän 5.9 funktio on hyvin määritelty.

Määritelmässä 5.1 määriteltiin $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$. Määritelmän 5.9 funktion on siis toteutettava ehto $F(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$, kun $x < 0$, jotta Määritelmät 5.1 ja 5.9 olisivat yhtäpitäviä. Osoitetaan tämä seuraavaksi.

Olkoon $x < 0$, jolloin $-x > 0$ ja

$$
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} f_n(-x) = f(-x).
$$

Tällöin

$$
\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right]^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1
$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi Bernoullin epäyhtälön $(1+x)^a \geq 1 + ax$ nojalla

$$
\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{x^2}{n^2} = 1 - \frac{x^2}{n} \to 1,
$$

kun $n \to \infty$. Näin ollen suppiloperiaatteen nojalla

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n = 1.$$

Edelleen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{f(-x)} = F(x).$$

Näin on siis osoitettu, että Määritelmän 5.9 funktio $F(x)$ täyttää Määritelmän 5.1 ehdon.

5.2.1. Jatkuvuus. Osoitetaan Määritelmän 5.9 funktio jatkuvaksi.

LAUSE 5.10. *Funktio*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \textit{jos } x \geq 0 \\ \frac{1}{f(-x)} & , \textit{jos } x < 0 \end{cases}$$

on jatkuva.

TODISTUS. Funktio $F(x)$ on osoitettu jatkuvaksi Lemmassa 5.5 välillä $]0,\infty[$. Välillä $]-\infty,0[$ funktio on $F(x) = \frac{1}{f(-x)}$. Tällöin $F(x)$ on yhdistetty funktio välillä $]-\infty,0[$ jatkuvista funktioista $\frac{1}{x}$ ja $f(-x)$ eli myös $F(x)$ on jatkuva välillä $]-\infty,0[$. Tutkitaan vielä funktion $F(x)$ jatkuvuutta, kun $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$$
$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{f(0)} = 1.$$

Näin ollen siis $F(x)$ on jatkuva myös pisteessä $x = 0$. □

5.2.2. Additiivisuus.

LAUSE 5.11. *Kaikille $x < 0$ tai $y < 0$ pätee*

$$F(x+y) = F(x)F(y).$$

TODISTUS. Huomaa, että Lemmassa 5.8 on osoitettu additiivisuus, kun $x, y \geq 0$.
1° Jos $x, y < 0$, niin

$$F(x)F(y) = \frac{1}{f(-x)}\frac{1}{f(-y)} = \frac{1}{f(-(x+y))} = F(x+y).$$

2° Jos $x < 0$ ja $y \geq 0$ siten, että $y + x \geq 0$, niin

$$F(x)F(y) = \frac{1}{f(-x)}f(y) = \frac{1}{f(-x)}f((y+x)-x) = \frac{1}{f(-x)}f(y+x)f(-x) = F(x+y).$$

3° Jos $x < 0$ ja $y \geq 0$ siten, että $y + x < 0$, niin

$$F(x)F(y) = \frac{1}{f(-x)}f(y) = \frac{1}{f(-(x+y)+y)}f(y) = \frac{1}{f(-(x+y))f(y)}f(y) = F(x+y).$$

□

5.2.3. Derivoituvuus. Osoitetaan, että Määritelmän 5.9 funktio on derivoituva. Tehdään tämä osoittamalla, että funktio on derivoituva, kun $x > 0$ ja $x < 0$. Tapaukseen $x = 0$ tarvitaan seuraavaa lemmaa.

LEMMA 5.12. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva, kun $x \neq 0$ siten, että f on jatkuva nollassa ja on olemassa raja-arvo*

$$L = \lim_{x \to 0} f'(x).$$

Tällöin f on derivoituva nollassa ja $f'(0) = L$.

TODISTUS. Väite voidaan todistaa Väliarvolauseen Lemma 5.4 avulla. □

Nyt voidaan osoittaa Määritelmän 5.9 funktion derivoituvuus. Huomaa, että luvussa 5.1.2. on jo osoitettu funktion $f(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ derivoituvuus, kun $x > 0$.

LAUSE 5.13. *Funktio*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , \textit{jos } x \geq 0 \\ \frac{1}{f(-x)} & , \textit{jos } x < 0 \end{cases}$$

on derivoituva ja $F'(x) = F(x)$.

TODISTUS. Kun $x > 0$, niin funktion $F(x)$ derivoituvuus ja $F'(x) = F(x)$ on osoitettu luvussa 5.1.2. Kun $x < 0$, funktio

$$F(x) = \frac{1}{f(-x)}$$

on yhdistetty funktio funktioista $g(x) = \frac{1}{x}$ ja $f(-x)$. Kun $x < 0$, niin luvussa 5.1.2. on osoitettu funktio $f(-x)$ derivoituvaksi ja, että $f'(x) = f(x)$. Lisäksi funktio $g(x)$ on derivoituva, kun $x > 0$, sillä erotusosamäärän raja-arvoksi saadaan

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2}.$$

Nyt siis funktio g on derivoituva arvolla $f(-x) > 0$. Tällöin $F(x)$ on derivoituva ja yhdistetyn funktion derivoimissäännön nojalla saadaan

$$\begin{aligned} F'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) &= -\frac{1}{f(-x_0)^2} \cdot f'(-x_0) \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{f(-x_0)^2} \cdot f(-x_0) = \frac{1}{f(-x_0)} = F(x_0). \end{aligned}$$

On osoitettu, että funktio F on derivoituva, kun $x > 0$ ja $x < 0$ ja tällöin $F(x) = F'(x)$. Lisäksi Lauseessa 5.10 on osoitettu, että funktio F on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin Lemman 5.12 nojalla funktio $F(x)$ on derivoituva nollassa ja $F'(0) = F(0)$. Funktio $F(x)$ on siis osoitettu derivoituvaksi kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $F(x) = F'(x)$. □

5.2.4. Monotonisuus. Tässä alaluvussasa osoitetaan, että funktio exp on aidosti kasvava kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kun $0 \leq x \leq y$, funktiojono f_n on kasvava jokaiselle $n \in \mathbb{N}$, sillä

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

eli $f_n(x) \leq f_n(y)$. Tästä seuraa, että $f(x) \leq f(y)$, kun $0 \leq x \leq y$. Huomaa kuitenkin, että tällä päättelyllä ei saada aitoa kasvavuutta. Funktiolle exp voidaan kuitenkin osoittaa aito kasvavuus derivaatan avulla. Tähän tarvitaan seuraavaa Lemmaa 5.14.

LEMMA 5.14. $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n > 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Jos $x \geq 0$, niin $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1^n = 1$. Tällöin siis $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1$. Jos taas $x < 0$, niin olkoon $x = -y$, kun $y > 0$. Nyt funktion f additiivisuuden ja tiedon $\exp(0) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{0}{n})^n = 1$ nojalla saadaan

$$\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} > 0,$$

sillä $\exp(y) > 0$. Väite on siis todistettu. □

LAUSE 5.15. $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ *on aidosti kasvava kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. On saatu, että $\exp(x) = \exp'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten derivaatan ollessa aidosti positiivinen, funktio exp on aidosti kasvava. □

5.2.5. Käänteisfunktio. Osoitetaan, että funktio $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ on bijektio, jolloin seuraa suoraan, että sillä on olemassa käänteisfunktio.

LAUSE 5.16. $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$ *on bijektio.*

TODISTUS. Lauseessa 5.15 on osoitettu, että $\exp(x)$ on aidosti kasvava, kun $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen se on myös injektio. Riittää siis osoittaa, että $\exp(x)$ on surjektio. Nyt $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n \geq 1 + x \to \infty$, kun $x \to \infty$. Additiivisuuden nojalla jo Lemman 5.14 todistuksessa saatiin tulos, kun $y > 0$, niin

$$\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}.$$

Nyt, jos $y \to \infty$, saadaan

$$\lim_{y\to\infty} \exp(-y) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\exp(y)} = 0.$$

Lauseen 2.11 päättelyllä saadaan, että Bolzanon lauseen 2.10 nojalla jatkuvana funktiona $\exp(x)$ saa kaikki arvot positiiviset arvot ja on näin ollen surjektio. Funktio $\exp(x)$ on siis injektio ja surjektio, joten se on myös bijektio. □

LUKU 6

Määrittely käänteisfunktion avulla

Eksponenttifunktio voidaan määritellä myös funktion $\log x$ käänteisfunktiona. Määritellään funktio $\log x$ seuraavasti:

MÄÄRITELMÄ 6.1. Olkoon $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Jotta $\exp(x)$ voidaan määritellä funktion $\log(x)$ käänteisfunktiona, täytyy varmistua, että funktiolla $\log(x)$ on käänteisfunktio. Tehdään tämä mukaillen Spivakin teosta *Calculus* ([**6**], s. 315-317). Osoitetaan, että funktio $\log(x)$ on bijektio. Tähän tarvitaan Lemman 6.2 tuloksia.

LEMMA 6.2. *Jos* $x, y > 0$, *niin*

$$\log(xy) = \log x + \log y. \tag{6.1}$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ *ja* $x > 0$. *Tällöin*

$$\log(x^n) = n \log x. \tag{6.2}$$

Jos $x, y > 0$, *niin*

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y. \tag{6.3}$$

TODISTUS. (6.1): Analyysin peruslauseesta saadaan $\log' x = \frac{1}{x}$. Olkoon $f(x) = \log(xy)$. Tällöin

$$f'(x) = \log'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Siis $f' = \log' x$. Näin ollen on oltava luku c siten, että kaikille $x > 0$ pätee

$$f(x) = \log(x) + c$$

toisin sanoen

$$\log(xy) = \log(x) + c.$$

Määritetään luku c asettamalla $x = 1$. Tällöin määritelmästä saadaan $\log(1) = 0$ ja

$$\log(1 \cdot y) = \log 1 + c = c.$$

Tällöin siis kaikille $x, y > 0$ pätee

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(6.2): Todistetaan väite induktiolla.
Jos $n = 1$, niin $\log(x^1) = 1 \cdot \log x$. Olkoon $n = k$, jolloin induktio-oletus on, että

$$\log(x^k) = k \log x.$$

Nyt jos $n = k + 1$, niin yhtälön (6.1) ja induktio-oletuksen avulla saadaan

$$\log(x^{k+1}) = \log(x^k \cdot x) = \log(x^k) \cdot \log x = k \log x \cdot \log x = (k+1) \log x.$$

(6.3): Yhtälön (6.1) ja tiedon $\log 1 = 0$ avulla saadaan

$$0 = \log 1 = \log(y \cdot \frac{1}{y}) = \log y + \log \frac{1}{y},$$

josta edelleen saadaan $\log \frac{1}{y} = -\log y$. Uudelleen yhtälöä (6.1) käyttämällä saadaan

$$\log(\frac{x}{y}) = \log(x \cdot \frac{1}{y}) = \log(x) + \log(\frac{1}{y}) = \log(x) - \log(y).$$

□

Lemma 6.3. *Funktio*

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

on bijektio.

Todistus. Funktio on aidosti kasvava, sillä analyysin peruslauseen nojalla $\log' x = \frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{x} > 0$ kaikilla $x > 0$. Näin ollen funktio $\log x$ on myös injektio. Yhtälöiden 6.2 ja 6.3 avulla voidaan osoittaa, että funktio ei ole ylhäältä tai alhaalta rajoitettu. Näytetään tämä. Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Koska $\log 2 > 0$, niin

$$\log(2^n) = n \log 2$$

on ylhäältä rajoittamaton kaikille $n \in \mathbb{N}$. Saadaan myös, että

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 1 - \log 2^n = -n \log 2,$$

joten $\log x$ ei ole rajoitettu alhaalta välillä $]0, 1[$. Koska $\log x$ on Analyysin peruslauseen nojalla derivoituva ja näin ollen jatkuva, se saa Bolzanon lauseen (Lemma 2.10) nojalla kaikki reaaliakselin arvot. Funktio $\log(x)$ on siis surjektio. Näin ollen se on bijektio ja voidaan määritellä käänteisfunktio $\log^{-1} x$, joka on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

□

Määritellään eksponenttifunktio exp funktion $\log x$ käänteisfunktiona.

Määritelmä 6.4. Olkoon $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$,

$$\exp(x) = \log^{-1}(x).$$

1. Derivaatta ja jatkuvuus

Käänteisfunktion derivoituvuudelle on olemassa seuraava lause.

LEMMA 6.5. *Olkoon f derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja olkoon $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]a, b[$. Tällöin funktion f käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja*

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

TODISTUS. Todistus sivuutetaan. Katso [**7**], s. 174-175. □

LAUSE 6.6. *Funktio* $\exp(x) = \log^{-1} x$ *on derivoituva, ja* $\exp'(x) = \exp(x)$, *kun* $x \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Funktio $\log x$ on Analyysin peruslauseen nojalla derivoituva ja $\log' x = \frac{1}{x} > 0$ avoimella välillä $]0, \infty[$. Nyt Lemman 6.5 nojalla $\exp(x)$ on derivoituva pisteessä $y = f(x) \in \mathbb{R}$, kun $x \in]0, \infty[$. Funktion $\exp(y)$ derivaataksi saadaan

$$\exp'(y) = (\log^{-1})'(y) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\log^{-1}(y)}} = \log^{-1}(y) = \exp(y).$$

□

Koska funktio $\exp(x)$ on derivoituva, kun $x \in \mathbb{R}$, niin se on myös jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

2. Monotonisuus

Seuraava lause sanoo, että aidosti kasvavan funktion käänteisfunktio on aidosti kasvava.

LEMMA 6.7. *Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ aidosti kasvava. Tällöin käänteisfunktio $f^{-1} : f(A) \to A$ on aidosti kasvava.*

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että f on injektio. Näin on, sillä valitaan $x_1 \neq x_2$, niin joko $x_1 < x_2$, jolloin $f(x_1) < f(x_2)$ tai $x_1 > x_2$, jolloin $f(x_1) > f(x_2)$, joten $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funktio f on siis injektio.

Nyt voidaan osoittaa, että f^{-1} on aidosti kasvava. Jos f^{-1} ei olisi aidosti kasvava, niin löydetään $y_1, y_2 \in f(A)$ siten, että $y_1 < y_2$ ja $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Nyt f oli aidosti kasvava, joten

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$$

ja siis

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2.$$

Tämä on selvästi ristiriita, sillä oli $y_1 < y_2$. Siis f^{-1} on aidosti kasvava. □

LAUSE 6.8. $\exp(x) = \log^{-1}(x)$ *on aidosti kasvava.*

TODISTUS. Koska $\log(x)$ on aidosti kasvava, niin Lemman 6.7 perusteella myös funktio $\exp(x)$ on aidosti kasvava. □

3. Käänteisfunktio

Eksponenttifunktio on määritelty logaritmin $\log x$ käänteisfunktiona, toisin sanoen $\exp(x) = \log^{-1}(x)$. Tällöin eksponenttifunktion käänteisfunktio saadaan suoraan

$$\exp^{-1}(x) = \log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

4. Additiivisuus

Osoitetaan funktiolle $\exp(x)$ additiivisuusominaisuus.

LAUSE 6.9. *Kaikille $a, b \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b).$$

TODISTUS. Todistetaan tämä funktion $\log x$ ominaisuuksien, erityisesti yhtälön (6.1) avulla. Olkoon $x' = \exp(x)$ ja $y' = \exp(y)$, jolloin

$$x = \log x'$$
$$y = \log y'.$$

Siis yhtälön (6.1) nojalla

$$x + y = \log x' + \log y' = \log(x'y'),$$

joten

$$\exp(x + y) = x'y' = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

([**6**], s. 317.) □

LUKU 7

Kaikki määritelmät johtavat samaan funktioon

Eksponenttifunktio voidaan siis määritellä ainakin viidellä eri tavalla. Seuraavaksi osoitetaan, että kaikki nämä viisi edellä määriteltyä tapaa johtavat samaan funktioon $\exp(x)$. Esitellyt määritelmät ovat siis

1. Neperin luku e korotettuna potenssiin x,
2. potenssisarjaesitys $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,
3. yksikäsitteinen differentiaaliyhtälön $f' = f$, $f(0) = 1$ ratkaisu,
4. raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$,
5. logaritmin $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ käänteisfunktio.

Määritelmien yhtäpitävyyden osoitus seuraa Strichartzin kirjan *The Way of Analysis* ([**7**], s. 323-327) ideaa. Valitaan määritelmäksi Määritelmä 2. Osoitetaan, että tämä määritelmä toteuttaa Määritelmän 3 ehdot. Määritelmästä 2 saatavien ominaisuuksien perusteella voidaan näyttää Määritelmän 1 olevan myös ekvivalentti Määritelmän 2 kanssa. Edelleen voidaan osoittaa Määritelmän 2 mukaisella funktiolla $\exp(x)$ olevan käänteisfunktio, minkä avulla päästään Määritelmään 5. Eksponenttifunktion käänteisfunktion avulla voidaan osoittaa, että Määritelmän 4 ehto toteutuu. Näin voidaan todeta kaikkien määritelmien johtavan samaan funktioon.

MÄÄRITELMÄ 7.1. Eksponenttifunktio on $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

Luvussa 3 on käsitelty tätä määritelmää tarkemmin. Määritelmän mukaiselle eksponenttifunktiolle $\exp(x)$ on osoitettu additiivisuus $\exp(x + y) = \exp x \exp y$ kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ (Lemma 3.6) ja positiivisuus $\exp(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (Lemma 3.7). Määritelmän 7.1 eksponenttifunktiolle voidaan todistaa seuraava lause.

LAUSE 7.2. *Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Eksponenttifunktio $\exp(x)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $f' = f$, kun $f(0) = 1$.*

TODISTUS. Derivoidaan sarjaa $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ termeittäin. Näin voidaan tehdä välillä $]-\infty, \infty[$, sillä sarjan suppenemissäde on ∞.

$$\exp'(x) = D\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Lisäksi

$$\exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0^2}{2!} + ... + \frac{0^n}{n!} + ... = 1.$$

Nyt siis $f'(x) = f(x)$ ja $f(0) = 1$. $\square$

Osoitetaan seuraavaksi, että $\exp(x)$ on ainoa funktio, joka toteuttaa edellisen Lauseen 7.2.

LAUSE 7.3. $\exp(x)$ *on ainoa yhtälön* $f' = f$ *ratkaisu, kun* $f(0) = 1$.

TODISTUS. Edellisessä lauseessa osoitettiin differentiaaliyhtälön ratkaisun olemassaolo. Tarkastellaan funktiota $g(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$, missä f on mikä tahansa funktio, jolle $f' = f$ ja $f(0) = 1$. Koska $\exp(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, on $g(x)$ hyvin määritelty ja g on derivoituva. Kun kirjoitetaan $f' = f$, funktion f täytyy olla derivoituva: tämä sisältää funktion f jatkuvuuden. Siis f on jatkuva ja derivoituva, jolloin $f' = f$. Lasketaan

$$g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{(\exp x)^2}.$$

Käyttämällä tietoja $\exp'(x) = \exp(x)$ ja $f' = f$, saadaan $g'(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktio g on siis vakio. Nyt $f(x) = g(x)\exp(x)$ ja

$$f(0) = g(0)\exp(0) = 1,$$

joten on oltava $g(0) = 1$, sillä $\exp(0) = 1$. Funktio g oli vakio, joten $g(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Saadaan siis, että $f(x) = \exp(x)$. $\square$

Näin on osoitettu, että Määritelmät 2 ja 3 ovat ekvivalentit. Ensimmäistä määritelmää varten voidaan määritellä $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e$.

LAUSE 7.4. *Kun* $\frac{p}{q}$ *on rationaalinen (p ja q kokonaislukuja,* $q > 0$*), on* $\exp(\frac{p}{q}) = (e^p)^{1/q}$. *Reaaliselle x ja kohti lukua x suppenevalle Cauchy-jonolle* $x_k = \frac{p_k}{q_k}$ *on*

$$\exp(x) = \lim_{k\to\infty} \exp(x_k) = \lim_{k\to\infty} (e^{p_k})^{1/q_k}.$$

TODISTUS. Additiivisuus antaa $\exp(2) = \exp(1 + 1) = \exp(1)\exp(1) = e^2$ ja induktiolla edelleen $\exp(k) = e^k$ kaikille ei-negatiivisille k. Kun $e = \exp(1/2 + 1/2) = \exp(1/2)^2$, saadaan $\exp(1/2) = e^{1/2}$. Samoin saadaan $\exp(1/n) = e^{1/n}$ ja $\exp(p/q) = (e^p)^{1/q}$ kaikille rationaalisille p/q. Koska exp on jatkuva, pätee $\exp(x) = \lim_{k\to\infty} \exp(x_k)$, missä $x_k = \frac{p_k}{q_k}$ on jokin rationaalisten lukujen Cauchy-jono, joka suppenee kohti lukua x, joten $\exp(x) = \lim_{k\to\infty}(e^{p_k})^{1/q_k}$. $\square$

Näin ollen raja-arvo on olemassa ja voidaan kirjoittaa $\exp(x) = e^x$ myös, kun $x \in \mathbb{R}$.

Seuraavaksi tarkastellaan käänteisfunktion kautta muodostettua määritelmää. Luvussa 3.3 potenssisarjan $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ yhteydessä on osoitettu eksponenttifunktion bijektiivisyys Lauseena 3.9. Tiedetään siis, että eksponenttifunktio $\exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ on bijektio ja sillä on käänteisfunktio. Seuraavaksi osoitetaan, että eksponenttifunktion $\exp(x)$ käänteisfunktio on $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

LAUSE 7.5. $\exp^{-1}(x) = \log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

TODISTUS. Käänteisfunktiona $g(x) = \log x$ on derivoituva silloin, kun $\frac{d}{dx}\exp(x) \neq 0$ ja muistetaan, että $\frac{d}{dx}\exp x = \exp x > 0$. Olkoon $\exp(y_0) = x_0$. Funktion $g(x) = \log x$ derivaatta pisteessä $x = x_0$ on siis

$$g'(x_0) = \frac{d}{dx}\log x_0 = \frac{1}{\frac{d}{dx}\exp y_0} = \frac{1}{\exp y_0} = \frac{1}{x_0},$$

joten $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$. Analyysin peruslauseen nojalla saadaan

$$g(x) = g(x_0) + \int_{x_o}^{x} g'(t)dt = g(x_0) + \int_{x_o}^{x} \frac{1}{t}dt.$$

Valitaan nyt $x_0 = 1$, jolloin $g(1) = \log 1 = 0$. Tällöin funktion $\exp(x)$ käänteisfunktioksi saadaan

$$g(x) = \log(x) = \int_{1}^{x} g'(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}dt.$$

□

On siis osoitettu, että eksponenttifunktio määritelmä $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ johtaa käänteisfunktioon $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$. Tämän avulla päästään eksponenttifunktion viidenteen määritelmään raja-arvona.

LAUSE 7.6. $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *kaikille* $n \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Aloitetaan kirjoittamalla

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

koska exp on jatkuva. Tällöin riittää osoittaa, että $\lim_{n\to\infty} \log(1 + \frac{x}{n})^n = x$. Lemman 6.2 yhtälöä (6.2) käyttämällä huomataan, että

$$\log\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x\left(\frac{\log(1 + \frac{x}{n}) - \log 1}{\frac{x}{n}}\right),$$

koska $\log 1 = 0$. Jos $x \neq 0$, $\frac{x}{n}$ lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$. Tällöin $\frac{\log(1+\frac{x}{n})-\log 1}{\frac{x}{n}}$ suppenee kohti funktion $\log x$ derivaattaa pisteessä $x = 1$. Siis

$$\frac{\log(1 + \frac{x}{n}) - \log 1}{\frac{x}{n}} \to 1, \text{ kun } n \to \infty.$$

Näin on, koska $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$ eli derivaatan arvo pisteessä 1 on 1. Tällöin siis $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = x$, kuten väitettiin.

Jos $x = 0$, niin $\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 0$ ja väite pätee. □

Näin on saatu kaikkien määritelmien välille yhteydet. Kaikki määritelmät johtavat siis samaan funktioon $\exp x$. ([**7**], s. 323-328.)

Lähdeluettelo

[1] Richard Courant, Fritz John: *Introdunction to Calculus and Analysis 1.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[2] Roger Godement: *Analysis I. Convergence, Elementary functions.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[3] I. N. Herstein: *Topics in Algebra.* Xerox college publishing, Waltham, Massachusetts, Toronto, 1964.

[4] Eli Maor: *e: The Story of a Number.* Princeton University Press, 2009.

[5] O. Martio, J. Sarvas: *Tavalliset differentiaaliyhtälöt.* Gaudeamus, 1982.

[6] Michael Spivak: *Calculus.* Publish or Perish, Inc. Second edition, 1980.

[7] Robert S. Strichartz: *The Way of Analysis.* Jones and Bartlett Publishers, 1995.

[8] Karl. R. Stromberg: *An Introduction to classical real analysis.* Wadsworth. Belmont, California 94002, 1981.