Vuoristosolalause

Eero Ruosteenoja

Pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kevät 2013

Sisältö

Johdanto 1

Luku 1. Vuoristosolalauseen versioita 3
1. Vuoristosolalauseen äärellisulotteinen versio 3
2. Hyppäys ääretönulotteisuuteen 8
2.1. Banachin ja Hilbertin avaruudet 8
2.2. Fréchet-derivaatta 9
2.3. Palais-Smalen ehto 11
2.4. Dualiteetti 12
3. Vuoristosolalause Hilbertin avaruudessa 14
3.1. Cauchyn ongelma 16
3.2. Deformaatiolemma Hilbertin avaruudessa 19
4. Vuoristosolalause Banach-avaruudessa 22
4.1. Ykkösen ositus 23
4.2. Pseudogradientti 24
4.3. Vuoristosolalauseen todistuksen viimeistely 27
4.4. Yhteenvetoa 28

Luku 2. Sovellus 31
1. p-Laplace reuna-arvo-ongelman esittelyä 31
1.1. Sobolev-avaruudet 32
1.2. Heikot ratkaisut 36
1.3. Reuna-arvo-ongelman yhteys vuoristosolalauseeseen 36
2. Funktion I Fréchet-derivoituvuus 37
3. Vuoristosolaehdot funktiolle I 45
3.1. Palais-Smalen ehto funktiolle I 45
3.2. Vuoristosolaehdot (1)$-$(3) 53
3.3. Reuna-arvo-ongelman heikon ratkaisun olemassaolo 56

Kirjallisuutta 59

Johdanto

Vuoristosolalause on variaatiolaskennan piiriin kuuluva olemassaolotulos, jonka mukaan tietyt, melko heikot geometriset ehdot toteuttavalla Banach-avaruuden reaaliarvoisella C^1-funktiolla on kriittinen piste. Lauseen esittivät ja todistivat Ambrosetti ja Rabinowitz vuonna 1973 artikkelissaan [**4**].

Lauseen nimi tulee geometrisesta intuitiosta: tarkasteltavalta funktiolta vaadittavien ominaisuuksien nojalla osa funktion graafista voidaan ajatella kaksi laaksoa erottavaksi vuoristoksi. On luontevaa ajatella, että korkeuden suhteen optimaalinen reitti laaksosta toiseen kulkee vuoristosolan kautta. Vuoristosolasta tulee useimmille mieleen satulapiste, eli kriittinen piste, joka ei ole lokaali ääriarvo. Yksi vuoristosolalauseen erikoispiirteistä onkin, että sen avulla löydetään usein satulapisteitä, joita on epävakaan luonteensa vuoksi vaikeaa löytää numeerisin menetelmin. Tässä tutkielmassa vuoristosolalausetta sovelletaan kuitenkin vain tilanteessa, jossa ei olla kiinnostuneita kriittisen pisteen luonteesta eikä edes siitä, missä kriittinen piste sijaitsee.

Huomionarvoisin vuoristosolauseessa tarkasteltavalta funktiolta vaadituista ehdoista on Palais-Smalen ehto, jonka Palais ja Smale muotoilivat vuonna 1964 artikkelissaan [**16**]. Ääretönulotteisissa avaruuksissa kompaktius on harmillisen harvinainen ilmiö. Palais-Smalen ehto on osoittautunut hyödylliseksi variaatiolaskennassa, koska sen toteutumisesta seuraa, että tietyillä teorian kannalta olennaisilla tarkasteltavan funktion alkukuvilla on riittävästi kompaktiuden kaltainen rakenne.

Tämän tutkielman tavoitteina on tutkia, millainen lause vuoristosolalause on, mitä vaikeuksia sen todistamiseen liittyy, ja mihin sitä voidaan soveltaa. Tutkielma jakautuu kahteen lukuun. Ensimmäisessä luvussa esitetään ja todistetaan kolme vuoristosolalauseen versiota. Ensimmäisessä versiossa tarkasteltavan funktion määrittelyjoukko on avaruus $\mathbb{R}^n$, toisessa Hilbertin avaruus ja kolmannessa Banach-avaruus. Euklidinen versio tarjoaa helppotajuisen johdatuksen lauseeseen, Banach-avaruuden versio on yleisyytensä vuoksi tärkeä sovelluksia ajatellen, ja Hilbertin avaruus on sopiva suodatin konkreettisen ja abstraktin version välissä. Vuoristosolalauseen versioiden todistusten ohella ensimmäisessä luvussa tulee tutkituksi yhtäältä äärellisulotteisten ja ääretönulotteisten normiavaruuksien, toisaalta Hilbertin ja Banachin avaruuksien eroavaisuuksia. Erityisesti seuraavat huomiot vaikuttavat vuoristosolalauseen eri versioiden todistuksiin: Heine-Borelin lause ei päde ääretönulotteisessa normiavaruudessa; reaalikertoiminen Hilbertin avaruus on isometrisesti isomorfinen oman duaaliavaruutensa kanssa, mutta vastaava ei päde yleisesti Banach-avaruuksissa. Etenkin Heine-Borelin lauseen menettäminen ääretönulotteisissa normiavaruuksissa aiheuttaa runsaasti päänvaivaa paitsi vuoristosolalauseita todistettaessa, myös monesti muulloin näitä avaruuksia tutkittaessa.

Toisessa luvussa tutkitaan, miten vuoristosolalausetta voidaan soveltaa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolokysymyksiin. Ambrosetti ja Rabinowitz tutkivat artikkelissaan vuoristosolalauseen sovellusmahdollisuuksia Laplace reuna-arvo-ongelman yhteydessä. Tällöin riittää käyttää vuoristosolauseen Hilbertin avaruuden versiota. Tässä tutkielmassa osoitetaan, että tietyllä p-Laplace reuna-arvo-ongelmalla on epätriviaali heikko ratkaisu. Todistuksessa tarvitaan vuoristosolalauseen yleisintä, eli Banach-avaruuden versiota. Luku pohjautuu Dincan, Jebeleanin ja Mawhinin artikkeleihin [**9**] ja [**10**].

Toinen luku on huomattavasti teknisempi ja analyyttisempi kuin ensimmäinen luku. Esimerkiksi Palais-Smalen ehdon hyödyntäminen on hyvin geometrista, ja siksi vuoristosolalauseiden todistuksia ei ole kovin vaikea hahmottaa. Kun sen sijaan toisessa luvussa halutaan osoittaa, että tarkasteltava funktio toteuttaa Palais-Smalen ehdon ja muut vuoristosolalauseen ehdot, luvassa on analyysin matokuuria.

Tutkielma on kirjallisuustyö, eikä se sisällä uusia merkittäviä matemaattisia ideoita. Esitys on pyritty laatimaan niin, että sitä voi seurata ja ymmärtää melko vähäisin esitiedoin. Vuoristosolalauseen eri versioiden todistukset on laadittu mahdollisimman yhdenmukaisiksi, jotta on helpompi nähdä, miten kulloisenkin määrittelyavaruuden ominaispiirteet vaikuttavat todistuksen rakenteeseen. Tällaista lähestymistapaa en ole nähnyt kirjallisuudessa, jossa esimerkiksi vuoristosolalauseen euklidinen versio todistetaan useimmiten aivan eri tavalla kuin Hilbertin ja Banachin avaruuksien versiot.

LUKU 1

Vuoristosolalauseen versioita

1. Vuoristosolalauseen äärellisulotteinen versio

Kappaleessa tarkastellaan, millä ehdoilla voidaan osoittaa, että reaaliarvoisella funktiolla $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ on kriittisiä pisteitä. Kriittisellä pisteellä tarkoitetaan pistettä $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jolle pätee $\nabla f(x_0) = 0$. Olemme kiinnostuneita nimenomaan kriittisten pisteiden olemassaolosta, emme niiden tarkasta sijainnista.

Jos $f \in C^1(\mathbb{R})$ ja on sellaiset pisteet $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, että $f(a) = f(b)$, funktiolla f on derivaatan nollakohta välillä (a, b). Tämä tulos tunnetaan Rollen lauseena. Lauseella ei ole suoraa yleistystä tapaukseen $n \geq 2$. Esimerkiksi funktiolla $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-x}$, ei ole kriittisiä pisteitä, vaikka $f(x, y_1) = f(x, y_2)$, kun $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Oletetaan nyt, että funktiolla $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ on sellainen ominaisuus, että $A_\alpha := f^{-1}(-\infty, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on epäyhtenäinen. Valitaan pisteet a ja b joukon A_α kahdesta eri komponentista. Ajatellaan funktion f graafi avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileänä vuoristona. Halutaan liikkua vuoristossa pisteestä a pisteeseen b sillä tavalla optimaalisesti, että reitin korkein kohta on mahdollisimman matalalla. Ajatellaan mahdollisiksi reiteiksi kaikki avaruuden $\mathbb{R}^2$ kompaktit ja yhtenäiset osajoukot, jotka sisältävät pisteet a ja b. Olkoon Γ kaikkien tällaisten joukkojen kokoelma. Koska A_α on epäyhtenäinen, $\max_{x \in B} \ f(x) \geq \alpha$ kaikilla $B \in \Gamma$. Voidaan ajatella, että pisteiden a ja b välissä on vuorijono, ja optimaalinen reitti kulkee vuoristosolan kautta. Intuitiivisesti vuoristosola voisi olla funktion f satulapiste ja siten kriittinen piste. Olkoon

$$c := \inf_{B \in \Gamma} \max_{x \in B} \ f(x),$$

jolloin hyvä arvaus olisi, että optimaalisen reitin korkein kohta on korkeudella c, ja funktiolla f on kriittinen piste x_0, jolle $f(x_0) = c$.

Valitettavasti intuitio kuitenkin pettää. Tarkastellaan esimerkiksi $C^\infty(\mathbb{R}^2)$-funktiota $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 5e^{-x} - y^4$. Nyt $g(0, 2) = -11 = g(0, -2)$ ja $g(t, 0) > 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten $g^{-1}(-\infty, 0)$ on epäyhtenäinen. Kuitenkin

$$\nabla g(x, y) = (-5e^{-x}, -4y^3) \neq 0 \text{ kaikilla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

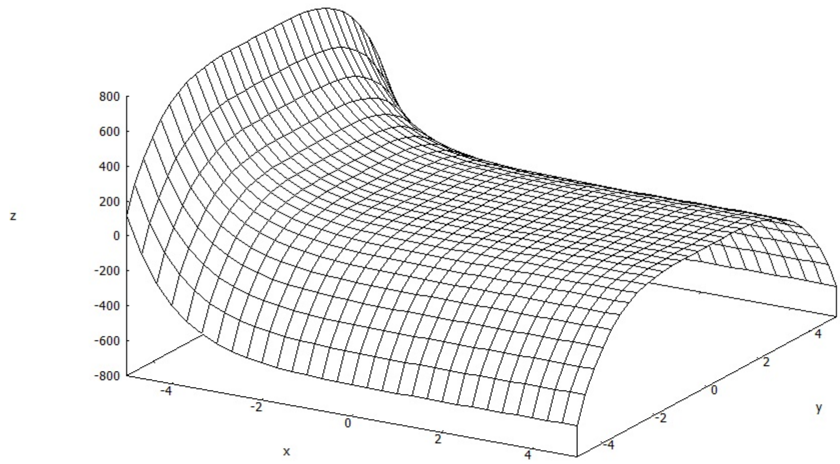
Lisäksi optimaalista reittiä pisteestä $(0, 2)$ pisteeseen $(0, -2)$, siinä mielessä kuin sen edellä määrittelimme, ei ole. Jokainen reitti kulkee x-akselin yli ja käy siten aidosti nollaa suuremmalla korkeudella. Kuitenkin, jos $0 < \epsilon < 1$, on $B_\epsilon \in \Gamma$, jolle $\max_{x \in B} \ g(x) = \epsilon$. Määritellään kaikille $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

$$[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] := \{t(a_1, a_2) + (1-t)(b_1, b_2) \ : \ t \in [0,1]\}$$

ja asetetaan

$$\begin{aligned} B_1 &= [(0,2), (-\log\ (\epsilon/5), 2)], \\ B_2 &= [(-\log\ (\epsilon/5), 2), (-\log\ (\epsilon/5), -2)], \\ B_3 &= [(-\log\ (\epsilon/5), -2), (0,-2)], \end{aligned}$$

jolloin $B_\epsilon = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ on haluamamme joukko. Graafiltaan funktiota g muistuttavan funktion avulla voi nähdä, että edes kahden lokaalin minimin olemassaolo ei takaa muiden kriittisten pisteiden olemassaoloa.



Kuva 1. $g(x,y) = 5e^{-x} - y^4$

Edellä esitelty idea vuoristosolakorkeudesta c on hyödyllinen vain, jos tarkasteltava funktio toteuttaa jonkinlaisen kompaktisuusehdon. Tässä kappaleessa funktiolta vaaditaan ominaisuus, jota sanotaan koersiivisuudeksi.

Määritelmä 1.1. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Funktio f on *koersiivinen*, jos $f(x_j) \to +\infty$ aina kun $(x_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ on jono, jolle pätee $\|x_j\| \to \infty$.

Käsittelemämme funktio $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ei ole koersiivinen, sillä jonolle $((j,0))_{j=1}^\infty$ pätee $\|(j,0)\| \to \infty$ ja $g(j,0) \to 0$. Jos funktio $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ on koersiivinen ja $\alpha < \beta$, joukko $f^{-1}([\alpha,\beta])$ on suljettu koska f on jatkuva, ja rajoitettu koska f on koersiivinen. Heine-Borelin lauseen nojalla joukko $f^{-1}([\alpha,\beta])$ on kompakti. On hyvä huomauttaa jo tässä vaiheessa, että Heine-Borelin lause, jonka mukaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu ja rajoitettu joukko on kompakti, ei päde yleisesti metrisissä avaruuksissa. Tämä on äärimmäisen tärkeää muistaa, kun siirrytään tutkimaan vuoristosolalausetta yleisissä Hilbertin ja Banachin avaruuksissa.

Tavoitteenamme on osoittaa, että jos funktio $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ on koersiivinen ja sillä on kaksi lokaalia minimiä, funktiolla f on myös kolmas kriittinen piste. Tarvitsemme ensin hieman lisää tietoa koersiivisuuden luonteesta.

MÄÄRITELMÄ 1.2. Olkoon $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Merkitään

$$K_c := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) = c \text{ ja } \nabla f(x) = 0\}.$$

Jos $K_c \neq \emptyset$, sanotaan että $c \in \mathbb{R}$ on funktion f *kriittinen taso.*

LEMMA 1.3. *Olkoon $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ koersiivinen. Oletetaan, että $c \in \mathbb{R}$ ei ole funktion f kriittinen taso. Tällöin on sellainen $\alpha > 0$ että*

$$\|\nabla f(x)\| \geq \alpha \text{ aina kun } |f(x) - c| \leq \alpha.$$

TODISTUS. Tehdään vastaoletus, että tällaista lukua α ei ole. Tällöin on jono $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$, jonka alkioille pätee kaikilla $j \in \mathbb{N}$

$$|f(x_j) - c| \leq \frac{1}{j} \text{ ja } \|\nabla f(x_j)\| < \frac{1}{j}.$$

Koska jono (x_j) kuuluu kompaktiin joukkoon $f^{-1}([c-1, c+1])$, sillä on suppeneva osajono $x_{j_k} \to x_0 \in \mathbb{R}^n$. Koska funktio f on jatkuvasti differentioituva, on

$$f(x_0) = c \text{ ja } \nabla f(x_0) = 0,$$

ristiriita. □

Nyt voidaan todistaa tulos, jota tässä tutkielmassa kutsutaan kirjaa [**24**] mukaillen vuoristosolalauseen äärellisulotteiseksi versioksi. Kirjassa [**24**] on esitetty lauseelle todistus, joka on tämän tutkielman tavoitteiden kannalta ongelmallinen – todistus on jossain määrin luonnosmainen, ja siitä on vaikea nähdä yhtymäkohtia yleisen vuoristosolalauseen todistukseen. Nyt esitettävä todistus on pyritty laatimaan tarkasti ja niin, että sitä on helpompi yleistää.

VUORISTOSOLALAUSEEN VERSIO 1. *Olkoon $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ funktio, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

(1) *Funktio f on koersiivinen.*

(2) *Funktiolla f on aidot lokaalit minimit pisteissä x_1 ja x_2, $x_1 \neq x_2$.*

Tällöin funktiolla f on kriittinen piste $x_3 \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, x_2\}$, jolle pätee

$$f(x_3) = \inf_{A \in \Gamma} \max_{x \in A} f(x) =: c,$$

missä

$$\Gamma = \{A \subset \mathbb{R}^n : \text{ A on kompakti ja yhtenäinen, ja } x_1, x_2 \in A\}.$$

Todistus. Tehdään vastaoletus: $K_c = \emptyset$. Koska
$$c > \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$
on sellainen $\epsilon \in (0,1)$ että
$$\epsilon < \frac{1}{2}\operatorname{dist}\{c, \{f(x_1), f(x_2)\}\}.$$
Lemman 1.3 nojalla on $\alpha \in (0,\epsilon)$, jolle pätee
$$\|\nabla f(x)\| \geq \alpha \text{ aina kun } |f(x) - c| \leq \alpha.$$
Asetetaan
$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \notin (c-\epsilon, c+\epsilon)\}, \\ B &:= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \in [c-\alpha, c+\alpha]\}. \end{aligned}$$
Koska joukot A ja B ovat pistevieraita ja lisäksi joukko A on suljettu ja joukko B kompakti, on sellainen $\beta > 0$ että
$$\operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(x,B) \geq \beta \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$
Siten funktio $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$g(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,A)}{\operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(x,B)},$$
on hyvin määritelty. Huomataan, että funktio g on jatkuvien funktioiden osamääränä jatkuva, $0 \leq g(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ kun $x \in A$ ja $g(x) = 1$ kun $x \in B$.

Asetetaan *deformaatiokuvaus* $\eta : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,
$$\eta(t,x) = x - tg(x)\nabla f(x).$$
Ensimmäinen huomio on, että kun $x \in A$, $\eta(t,x) = x$ kaikilla $t \in [0,1]$. Erityisesti $\eta(t,x_1) = x_1$ ja $\eta(t,x_2) = x_2$ kaikilla t. Huomataan myös, että kuvaus η on jatkuva, ja myös osittaisderivoituva muuttujan t suhteen. Koska
$$\partial_t f(\eta(t,x)) = -g(x)\langle \nabla f(\eta(t,x)), \nabla f(x)\rangle,$$
pätee
$$\partial_t f(\eta(t,x))\Big|_{t=0} = -g(x)\|\nabla f(x)\|^2.$$
Koska kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ yhdistetty kuvaus $f(\eta(t,x))$ on jatkuvasti osittaisderivoituva muuttujan t suhteen, kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ on sellainen $t_x > 0$ että
$$\partial_t f(\eta(t,x)) \leq -\frac{2}{3}\, g(x)\|\nabla f(x)\|^2$$
kun $t \in [0,t_x]$. Edelleen jatkuvuudesta seuraa, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ on sellainen $r_x > 0$ että
$$\partial_t f(\eta(t,y)) \leq -\frac{1}{2}\, g(y)\|\nabla f(y)\|^2$$

kun $y \in B(x, r_x)$ ja $t \in [0, t_x]$. Merkitään

$$C := f^{-1}\left\{[c-\epsilon, c+\epsilon]\right\},$$

jolloin joukko C on kompakti. Näin ollen joukon C avoimella peitteellä

$$\{B(x, r_x)\}_{x \in C}$$

on äärellinen osapeite $\left\{B(x_j, r_{x_j})\right\}_{j \in \{1,\ldots,k\}}$. Olkoon

$$t_0 := \min_{j \in \{1,\ldots,k\}} \left\{t_{x_j}\right\} > 0,$$

jolloin $\partial_t f(\eta(t,x)) \leq 0$ kaikilla $(t,x) \in [0, t_0] \times \mathbb{R}^n$. Erityisesti

$$\partial_t f(\eta(t,x)) \leq -\frac{1}{2}\,\alpha^2,$$

kun $(t,x) \in [0, t_0] \times B$.

Valitaan $\delta < \frac{1}{4}\alpha^2 t_0$. Olkoon $x \in f^{-1}\left\{[c-\delta, c+\delta]\right\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(\eta(t_0,x)) &= f(x) + \int_0^{t_0} \partial_t f(\eta(t,x))dt \\ &\leq f(x) - \frac{t_0}{2}\alpha^2 \\ &< c - \delta. \end{aligned}$$

Siis jos $x \in \mathbb{R}^n$ on sellainen että $f(x) \leq c+\delta$, pätee $f\left(\eta\left(t_0, x\right)\right) \leq c-\delta$.

Olkoon $E \in \Gamma$ sellainen joukko, että

$$\max_{x \in E}\ f(x) < c + \delta.$$

Koska η on avaruuden $\mathbb{R}^n$ jatkuva muunnos, joukko $\eta(t_0, E) \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja yhtenäinen. Lisäksi $x_1, x_2 \in \eta(t_0, E)$, joten $\eta(t_0, E) \in \Gamma$. Kuitenkin

$$\max_{x \in \eta(t_0,E)}\ f(x) < c - \delta,$$

mikä on ristiriita sen kanssa, miten c määriteltiin. Siis $K_c \neq \emptyset$. □

Todistuksen avainideana on deformaatiokuvauksen η rakentaminen. Määrittelyjoukolle $\mathbb{R}^n$ halutaan tehdä sellainen jatkuva muunnos, että $f(\eta(x,t)) \leq f(x)$ kaikilla ajanhetkillä $t \in [0, t_0]$, missä $t_0 > 0$. Lisäksi halutaan, että vähenevyys on jotakin positiivista lukuarvoa suurempaa, kun $x \in B$. Luonteva idea on rakentaa deformaatio siten, että määrittelyjoukon pisteet kulkevat funktion f gradienttivirtausta vastakkaiseen suuntaan.

On tärkeää lisätä deformaatiokuvaukseen leikkurifunktio g, joka takaa, että deformaatio liikuttelee vain niitä pisteitä, jotka funktio f kuvaa lähelle arvoa c. Ei tietenkään haluta, että pisteet x_1 ja x_2 liikkuisivat mihinkään – tällöinhän ei olisi mitään varmuutta siitä, että joukko $\eta(t_0, E)$ on joukkoperheen Γ alkio.

Äärellisulotteinen vuoristosolalause ei ole kovin merkittävä lause, mutta todistuksessa käytetyt ideat ovat vahvoja ja yleistettäviä. Kun jatkossa tarkastellaan Banach-avaruudelta määriteltyä C^1-funktiota, koersiivisuusvaatimus on aivan liian rajoittava. Tutkittaessa, mihin koersiivisuutta edellisessä todistuksessa käytettiin, voidaan havaita, että koersiivisuus voidaan korvata heikommalla kompaktisuusehdolla, jota sanotaan Palais-Smalen ehdoksi. Deformaatiokuvauksen rakentaminen ääretönulotteiseen avaruuteen osoittautuu hankalaksi, koska suljetut ja rajoitetut joukot eivät välttämättä olekaan kompakteja. Annetaan lopuksi pientä esimakua, miten ääretönulotteinen deformaatiokuvaus luodaan.

Tehdään aluksi triviaali havainto, että jos kiinnitetään $x_0 \in \mathbb{R}^n$, deformaatiovirtaus $\eta(t, x_0)$ lähtien ajanhetkestä 0 saadaan differentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt}(t) = -g(x_0)\nabla f(x_0) \\ \eta(0) = x_0 \end{cases}$$

ratkaisuna. Ääretönulotteisessa tapauksessa deformaatiokuvaus asetetaan samankaltaisen differentiaaliyhtälön ratkaisuna, mutta $\frac{d\eta}{dt}(t)$ ei olekaan vakio, vaan alkuarvo-ongelma onkin muodossa

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) \\ \eta(0) = u \end{cases}$$

missä V on sopivasti valittu määrittelyavaruuden jatkuva muunnos. Kun ensin osoitetaan, että yllä olevalla alkuarvo-ongelmalla on olemassa ratkaisu, ja päätetään sitten deformaatiokuvaukseksi kyseisen ongelman ratkaisu, saadaan vuoristosolalauseen ääretönulotteiset versiot todistetuiksi.

2. Hyppäys ääretönulotteisuuteen

2.1. Banachin ja Hilbertin avaruudet. Halutaan yleistää vuoristosolalausetta asettamalla tarkasteltavan funktion määritelyjoukoksi täydellinen normiavaruus. Tässä tutkielmassa normiavaruuden skalaarikuntana on aina $\mathbb{R}$. Normiavaruutta sanotaan täydelliseksi, jos sen kaikki Cauchy-jonot suppenevat. Täydelliset normiavaruudet ovat niin keskeisessä asemassa funktionaalianalyysissa, että niille on annettu nimi alan perustajan, Stefan Banachin (1892-1945) mukaan.

MÄÄRITELMÄ 1.4. Täydellistä normiavaruutta sanotaan *Banach-avaruudeksi.*

Kaikki normiavaruudet eivät tietenkään ole Banach-avaruuksia. Esimerkiksi avaruuden $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ aliavaruus, jonka muodostavat kaikki polynomit $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, ei ole täydellinen, kuten voidaan Weierstrassin approksimaatiolauseen avulla havaita.

Banach-avaruuksien teorian kulmakiviä ovat täydellisten metristen avaruuksien rakennetta kuvailevat Bairen kategorialause ja Banachin kiintopistelause. Edellisestä seuraavat tasaisen rajoituksen periaate ja avoimen kuvauksen lause sekä jälkimmäisen teho esimerkiksi integraaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolotarkasteluissa ovat syitä Banach-avaruuksien käyttökelpoisuuteen funktionaalianalyysissa.

Vuoristosolalauseen yleinen versio käsittelee Banach-avaruudessa määriteltyä reaalifunktiota, joka on jatkuvasti Fréchet-derivoituva. Tämän yleistetyn derivaatan määrittely on hyvin luonteva ja se toteutetaan seuraavassa pykälässä. Sen sijaan Banach-avaruuden tapauksessa deformaatiokuvauksen määrittelyssä syntyy vakava ongelma. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ tapauksessa pisteen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ määräämä derivaattakuvaus $Df(x_0)$ voidaan samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioksi $\nabla f(x_0)$. Yleisen Banach-avaruuden tapauksessa näin ei voi menetellä, kuten myöhemmin todetaan.

On kuitenkin erityisen hyvin käyttäytyvä luokka Banach-avaruuksia, joiden tapauksessa derivaattakuvaukset voi ajatella kyseisen avaruuden alkioiksi. Näitä avaruuksia sanotaan Hilbertin avaruuksiksi David Hilbertin (1862-1943) mukaan, ja ne ovat euklidisten avaruuksien lähimpiä ääretönulotteisia sukulaisia.

Määritelmä 1.5. Sisätuloavaruutta,joka on normiavaruutena täydellinen, sanotaan *Hilbertin avaruudeksi.*

Muistetaan, että sisätuloavaruudessa normina on aina

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Vuoristosolalause on helpompaa todistaa Hilbertin kuin Banachin avaruudessa. Tämä johtuu Rieszin esityslauseen eräästä versiosta, jonka mukaan reaalikertoiminen Hilbertin avaruus on isometrisesti isomorfinen oman duaaliavaruutensa kanssa. Koska derivaattakuvaukset osoittautuvat duaaliavaruuden alkioksi, ne voidaan samaistaa Hilbertin avaruuden alkioiksi. Ensin on kuitenkin yleistettävä derivaatan käsite.

2.2. Fréchet-derivaatta. Palautetaan ensin mieleen, miten derivaatta määritellään funktiolle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Tämä funktio on derivoituva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jos on sellainen lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, että

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \|h\|\, \epsilon(h),$$

missä $|\epsilon(h)| \to 0$ kun $\|h\| \to 0$. Tällöin merkitään $Df(x_0) := A$. Pisteessä x_0 derivoituvaa funktiota voidaan siis pisteen x_0 pienessä ympäristössä approksimoida affiinilla kuvauksella $f(x_0)+Df(x_0)h$. Derivaattakuvaus $Df(x_0)$ voidaan samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoriksi $\nabla f(x_0)$, sillä pätee

$$Df(x_0)h = \langle \nabla f(x_0), h\rangle\, .$$

Äärellisulotteisten vektoriavaruuksien väliset lineaarikuvaukset ovat aina Lipschitz-jatkuvia ja kuvaavat rajoitetut joukot rajoitetuiksi. Perustellaan tämä lyhyesti. Olkoot U ja V äärellisulotteisia normiavaruuksia ja $T : U \to V$ lineaarikuvaus. Olkoon lisäksi $(u_j)_{j=1}^n$ avaruuden

U normeerattu kanta, eli lineaarisesti riippumaton joukko, joka virittää avaruuden U ja jolle pätee $\|u_j\| = 1$ kaikilla $j \in \{1, ..., n\}$. Jos lineaarikuvaus T kuvaa avaruuden U yksikköpallon avaruuden V rajoitetuksi joukoksi, lineaarisuudesta seuraa, että kaikki avaruuden U rajoitetut joukot kuvautuvat rajoitetuiksi. Olkoon $x \in \overline{B}_U(0, 1)$, jolloin $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$, missä $|\alpha_j| \leq 1$ kaikilla j. Tällöin

$$\|Tx\| = \left\| T \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n \|Tu_j\| := M < \infty,$$

joten $T(\overline{B}_U(0, 1))$ on avaruuden V rajoitettu joukko. Kaikki avaruuksien U ja V väliset lineaarikuvaukset muodostavat vektoriavaruuden, johon voidaan asettaa standardi operaattorinormi

$$\|T\| := \sup_{x \in \overline{B}_U(0,1)} \|Tx\| < \infty.$$

Selvästi $\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|$ kaikilla $x \in U$, joten

$$\|Tx - Ty\| \leq \|T\| \, \|x - y\| \, ,$$

eli T on Lipschitz.

Yleisten normiavaruuksien väliselle lineaarikuvaukselle T jatkuvuus on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvaus T kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi. Ensinnäkin kuvauksen T jatkuvuudesta yhdessä pisteessä x_0 seuraa, että pieni x_0-keskinen pallo kuvautuu rajoitetuksi joukoksi. Lineaarikuvauksen säännöllisyydestä seuraa, että kaikki pallot ja edelleen kaikki rajoitetut joukot kuvautuvat rajoitetuiksi. Tällöin voidaan asettaa $\|T\|$ kuten edellä, ja pätee $\|T\| < \infty$. Tästä seuraa helposti kuvauksen T Lipschitz-jatkuvuus, kuten aiemmin nähtiin.

Tästä lähtien rajoitettujen lineaarikuvausten normina käytetään aina edellä määriteltyä standardia operaattorinormia.

Ääretönulotteisten normiavaruuksien väliset lineaarikuvaukset eivät aina käyttäydy yhtä hyvin kuin äärellisulotteisten. Tarkastellaan lineaarikuvausta $T : P \to P$, $Tp = p'$, missä P on jo edellä mainittu avaruuden $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$ polynomialiavaruus, ja p' on polynomin p derivaatta. Jos $p_j(x) = x^j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, niin $(p_j)_{j=1}^\infty \subset \overline{B}_P(0, 1)$, mutta $(p_j)_{j=1}^\infty$ kuvautuu rajoittamattomaksi joukoksi.

Olkoon $f : B \to \mathbb{R}$, missä B on Banach-avaruus. Olkoon $x_0 \in B$. Vaikka erotusta $f(x_0 + h) - f(x_0)$ voitaisiin approksimoida linaarikuvauksella kun $\|h\|$ on pieni, ei silti voitaisi olla varmoja edes funktion f jatkuvuudesta, sillä approksimoiva lineaarikuvaus saattaa olla epäjatkuva. Toimiva yleistys derivaatalle kuitenkin saadaan, kun approksimoivalta lineaarikuvaukselta vaaditaan jatkuvuus.

Määritelmä 1.6. Olkoot U ja V Banach-avaruuksia ja $f : U \to V$. Funktio f on *Fréchet-derivoituva* pisteessä $x_0 \in U$, jos on jatkuva lineaarikuvaus $T : U \to V$, jolle pätee

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Th + \|h\|_U \,\epsilon(h),$$

missä funktiolle $\epsilon : U \to \mathbb{R}$ pätee $\epsilon(h) \to 0$ kun $\|h\| \to 0$. Tällöin merkitään $T = Df(x_0)$. Jos funktio f on Fréchet-derivoituva kaikilla $x \in \widetilde{U} \subset U$, missä $\widetilde{U}$ on avoin, sanotaan että funktio f on *Fréchet-derivoituva joukossa* $\widetilde{U}$. Jos funktio f on Fréchet-derivoituva avaruudessa U ja kuvaus $Df : U \to L(U; V)$ on jatkuva, sanotaan että funktio f on *jatkuvasti Fréchet-derivoituva*, ja merkitään $f \in C^1(U; V)$. Jos $V = \mathbb{R}$, merkitään $f \in C^1(U)$.

Fréchet-derivaatan tapauksessa ei ääretönulotteisuuden takia ole mielekästä puhua osittaisderivaatoista, mutta muuten monet vektorianalyysista tutut lauseet pätevät. Tärkeää on tietenkin, että derivaatta on yksikäsitteinen $-$ todistus kuten vektorianalyysissa. Myös hyödyllinen ketjusääntö pätee. Kun vektorianalyysissa todistetaan käänteiskuvauslause ja implisiittifunktiolause, apuna käytetään Banachin kiintopistelausetta, jota varten tarvitaan tietoa, että avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen. Käänteiskuvauslause ja implisiittifunktiolause pätevät myös Fréchet-derivaatan tapauksessa, koska yleistetty derivaatta määriteltiin vain Banach-avaruuksien välisille funktioille.

Kirjassa [**2**] on puhetta Fréchet-derivaatasta, muun muassa edellä mainittujen lauseiden todistukset.

2.3. Palais-Smalen ehto. Kuten äärellisulotteisessa, myös ääretönulotteisissa vuoristosolalauseissa tarkasteltavalle funktiolle tarvitaan jonkinlainen kompaktisuusominaisuus. Sovelluksia ajatellen koersiivisuus on aivan liian rajoittava ehto. Richard Palais ja Stephen Smale keksivät 1960-luvulla yleisemmän kompaktisuusehdon, joka kuitenkin tavoittaa koersiivisuuden olennaiset piirteet.

MÄÄRITELMÄ 1.7. Olkoon B Banach-avaruus ja $f \in C^1(B)$. Tällöin $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ on *Palais-Smale -jono tasolla* $\beta \in \mathbb{R}$, lyhennettynä $(PS)_\beta$-jono, jos seuraavat ehdot pätevät.

(1) $|f(u_j)| \to \beta$.

(2) $\|Df(u_j)\| \to 0$.

Lisäksi sanotaan, että funktio f toteuttaa *$(PS)_\beta$-ehdon*, jos funktion f jokaisella $(PS)_\beta$-jonolla on suppeneva osajono. Jos funktio f toteuttaa $(PS)_\beta$-ehdon kaikilla $\beta \in \mathbb{R}$, sanotaan että funktio f toteuttaa *(PS)-ehdon.*

On helppo nähdä, että tapauksessa $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ Palais-Smalen ehto on koersiivisuuden yleistys $-$ koersiivinen funktio f toteuttaa Palais-Smalen ehdon Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla. Seuraava lemma kertoo, että Palais-Smalen ehto toteuttaa niitä koersiivisuuden antamia ominaisuuksia, joita käytettiin vuoristosolalauseen äärellisulotteisen version todistuksessa. Määritellään sitä ennen käsite kriittinen taso

Banach-avaruuden funktioille samaan tapaan kuin vuoristosolalauseen ensimmäisen version yhteydessä.

MÄÄRITELMÄ 1.8. Olkoon B Banach-avaruus ja $f \in C^1(B)$. Kun $c \in \mathbb{R}$, merkitään

$$K_c := \{u \in B \ : \ f(u) = c \text{ ja } Df(u) = 0\}.$$

Jos $K_c \neq \emptyset$, sanotaan että $c \in \mathbb{R}$ on funktion f *kriittinen taso.*

LEMMA 1.9. *Olkoon B Banach-avaruus, $f \in C^1(B)$ ja $\beta \in \mathbb{R}$. Jos funktio f toteuttaa $(PS)_\beta$-ehdon, pätee:*

(1) *Joukko K_β on kompakti.*

(2) *Jos $K_\beta = \emptyset$, on sellainen $\alpha > 0$ että $\|Df(u)\| \geq \alpha$ kaikilla $u \in B$, joille $|f(u) - \beta| \leq \alpha$.*

TODISTUS. (1) Olkoon $(u_j)_{j=1}^\infty \subset K_\beta$ jono. Tällöin (u_j) on $(PS)_\beta$-jono, joten sillä on suppeneva osajono. Siis joukko K_β on ainakin prekompakti. Koska funktio f on jatkuvasti differentioituva, joukko K_β on suljettu ja siten kompakti.
(2) Tehdään vastaoletus: On sellainen jono $(u_j)_{j=1}^\infty \subset B$ että $f(u_j) \to \beta$ ja $Df(u_j) \to 0$. Tällöin (u_j) on $(PS)_\beta$-jono, joten sillä on osajono (u_{n_k}) joka suppenee kohti vektoria $u \in B$. On oltava $u \in K_\beta$, mikä on ristiriita. □

On tärkeää huomata, että vaikka joukko K_β on kompakti, joukkojen $f^{-1}([\alpha, \beta])$ ei tarvitse olla kompakteja, vaikka funktio f toteuttaisi peräti (PS)-ehdon. Juuri tässä on Palais-Smalen ehdon idea. Olisi liian rajoittavaa sovelluksia ajatellen vaatia, että kaikilla joukon $f^{-1}([\alpha, \beta])$ jonoilla on suppeneva osajono. Mikäli funktio f kuitenkin toteuttaa Palais-Smalen ehdon, kaikilla vuoristosolalauseen kannalta olennaisilla joukon $f^{-1}([\alpha, \beta])$ jonoilla on suppeneva osajono.

2.4. Dualiteetti. Aiemmin jo mainittiin, että Hilbertin avaruuden H tapauksessa lineaarikuvaus $Df(u)$ voidaan samaistaa avaruuden H vektoriksi, mutta vastaava ei yleisesti päde Banachin avaruudessa. Tämän näkemiseksi on ensin määriteltävä duaaliavaruuden käsite.

MÄÄRITELMÄ 1.10. Olkoon A normiavaruus. Määritellään

$$A^* := \{T : A \to \mathbb{R} \ : \ T \text{ on jatkuva lineaarikuvaus}\}$$

ja asetetaan avaruuteen A^* normiksi standardi operaattorinormi, joka määriteltiin pykälässä 2.2. Sanotaan, että avaruus A^* varustettuna operaattorinormilla on avaruuden A *duaaliavaruus.*

Usein avaruuden A rakenteesta voi saada lisätietoa tutkimalla sen duaaliavaruutta. Esimerkiksi duaaliavaruuden A^* separoituvuudesta seuraa avaruuden A separoituvuus. Avaruus ja sen duaali eivät kuitenkaan välttämättä ole topologisesti samanlaisia. Reaalilukujen täydellisyydestä seuraa helposti, että duaaliavaruus A^* on täydellinen riippumatta siitä, onko avaruus A täydellinen.

Banach-avaruudet eivät kovin usein ole isomorfisia duaaliavaruuksiensa kanssa, mutta *refleksiivisyys* on yleisempää. Banach-avaruutta B sanotaan refleksiiviseksi, jos se on isomorfinen kaksinkertaisen duaalinsa $(B^*)^*$ kanssa. Esimerkiksi $L^p(\Omega)$-avaruuden duaali on isomorfinen avaruuden $L^{p'}(\Omega)$ kanssa, missä p ja p' ovat duaalieksponentit. (Katso esimerkiksi [**25**].) Tästä seuraa, että $L^p(\Omega)$-avaruudet ovat refleksiivisiä ja ainoastaan $L^2(\Omega)$-avaruus on isomorfinen oman duaaliavaruutensa kanssa. Avaruus $L^2(\Omega)$ on myös ainoa $L^p(\Omega)$-avaruus, joka on Hilbert. Seuraava lause sanoo, että Hilbertin avaruudet ovat aina isometrisesti isomorfisia duaaliavaruuksiensa kanssa. Lauseen todistus seuraa kirjassa [**25**] olevaa todistusta.

LAUSE 1.11. *Olkoon H Hilbertin avaruus. Jos $v \in H$, asetetaan $\lambda_v : H \to \mathbb{R}$,*

$$\lambda_v(w) = \langle w, v \rangle .$$

Tällöin $\lambda_v \in H^*$ kaikilla $v \in H$ ja kuvaus $\Lambda : H \to H^*, \Lambda(v) = \lambda_v$, on lineaarinen bijektio, jolle pätee $\|v\|_H = \|\lambda_v\|_{H^*}$ kaikilla $v \in H$.

TODISTUS. Sisätulon lineaarisuudesta seuraa, että $\lambda_v \in H^*$. Myös kuvauksen Λ lineaarisuus seuraa sisätulon ominaisuuksista: Olkoot

$$v, \widetilde{v}, w \in H, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Tällöin

$$\lambda_{\alpha v + \beta \widetilde{v}}(w) = \langle w, \alpha v + \beta \widetilde{v} \rangle = \alpha \lambda_v(w) + \beta \lambda_{\widetilde{v}}(w),$$

joten

$$\lambda_{\alpha v + \beta \widetilde{v}} = \alpha \lambda_v + \beta \lambda_{\widetilde{v}},$$

eli

$$\Lambda(\alpha v + \beta \widetilde{v}) = \alpha \Lambda(v) + \beta \Lambda(\widetilde{v}).$$

Todetaan kuvauksen Λ injektiivisyys. Jos $\Lambda(v) = \Lambda(\widetilde{v})$, niin $\Lambda(v - \widetilde{v}) = 0$ eli $\langle w, v - \widetilde{v} \rangle = 0$ kaikilla $w \in H$. Erityisesti

$$\langle v - \widetilde{v}, v - \widetilde{v} \rangle = 0$$

ja injektiivisyys seuraa.

Surjektiivisuuden näyttämiseksi tarvitaan hieman perustietoja Hilbertin avaruuksista, tarvittavat pohjatiedot ovat esimerkiksi kirjassa [**21**]. Olkoon $\lambda \in H^*$. Jos λ on nollakuvaus, $\lambda = \lambda_0$. Oletetaan nyt, että λ ei ole nollakuvaus. Tällöin ydin $V := \{v \in H : \lambda(v) = 0\}$ on avaruuden H aito aliavaruus. Tällöin ytimen V ortogonaalinen komplementti sisältää ainakin yhden nollasta eroavan alkion w, joka voidaan tarvittaessa normeerata niin että $\|w\|_H = 1$. Koska $w \notin V$, on $\lambda(w) \neq 0$.

Huomataan, että $(v - \frac{\lambda(v)}{\lambda(w)}w) \in V$ kaikilla $v \in H$, joten ottamalla sisätulo alkion w kanssa saadaan

$$\langle v, w\rangle - \frac{\lambda(v)}{\lambda(w)} = 0$$

ja edelleen

$$\lambda(v) = \langle v, \lambda(w)w\rangle\,,$$

joten $\lambda = \lambda_{\lambda(w)w}$, ja kuvauksen Λ surjektiivisuus on todettu.

Näytetään vielä, että kuvaus Λ on isometrinen. Olkoon $v \in H \setminus 0$. Tällöin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|\lambda_v(w)| = |\langle w, v\rangle| \leq \|v\|_H \|w\|_H$$

joten $\|\lambda_v\|_{H^*} \leq \|v\|_H$. Toisaalta

$$\|v\|_H^2 = \langle v, v\rangle = |\lambda_v v| \leq \|\lambda_v\|_{H^*} \|v\|_H$$

joten $\|\lambda_v\|_{H^*} \geq \|v\|_H$. Siis $\|\lambda_v\|_{H^*} = \|v\|_H$ kaikilla $v \in H$, joten kuvaus Λ on isometrinen. □

Jos $f \in C^1(B)$, missä B on Banach, niin $Df(u) \in B^*$ kaikilla $u \in B$, joten derivaattakuvaukset ovat samaistettavissa avaruuden B vektoreiksi kun B on Hilbert. Siksi tutkimme ääretönulotteista vuoristosolalausetta ensin Hilbertin avaruudessa ja vasta sitten abstraktimmin Banach-avaruudessa.

3. Vuoristosolalause Hilbertin avaruudessa

Edellinen kappale on antanut terminologiaa ääretönulotteisen vuoristosolalauseen ymmärtämiseksi ja muutaman tuloksen, jotka ovat tarpeellisia lauseen todistuksessa. Tässä kappaleessa tarkastelussa on Hilbertin avaruudelta määritelty reaaliarvoinen funktio $f \in C^{1,1}(H)$. Avaruuteen $C^{1,1}(H)$ kuuluvat kaikki ne avaruudelta H määritellyt reaaliarvoiset funktiot f, jotka ovat derivoituvia ja joille kuvaus $u \mapsto Df(u)$ on lokaalisti Lipschitz-jatkuva.

MÄÄRITELMÄ 1.12. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia ja $g : X \to Y$ kuvaus. Kuvaus g on *lokaalisti Lipschitz-jatkuva*, jos kaikilla $x \in X$ on sellaiset $r_x > 0$ ja $L_x > 0$ että

$$d(g(y), g(z)) \leq L_x d(y, z), \text{ kun } y, z \in B(x, r_x).$$

Siis kuvaus g on lokaalisti Lipschitz-jatkuva, jos sen määrittelyjoukon jokaisella pisteellä on ympäristö, jossa kuvaus on Lipschitz-jatkuva. Selvästi lokaalisti Lipschitz-jatkuva kuvaus on jatkuva, mutta sen ei tarvitse olla Lipschitz-jatkuva. Esimerkiksi reaaliluvuilla määritelty polynomi $p(x) = x^2$ on lokaalisti Lipschitz-jatkuva, sillä se on derivoituva kaikkialla. Polynomi p ei kuitenkaan ole Lipschitz-jatkuva määrittelyjoukossaan.

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ jokaisella pisteellä on ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti. Tästä seuraa, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritelty kuvaus

g on lokaalisti Lipschitz-jatkuva täsmälleen silloin, kun kuvaus g on Lipschitz-jatkuva kompakteissa joukoissa. Heine-Borelin lauseesta puolestaan seuraa, että tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että kuvaus g on Lipschitz-jatkuva rajoitetuissa joukoissa.

Päteekö siis jokaiselle funktiolle $f \in C^{1,1}(H)$, että kuvaus $u \mapsto Df(u)$ on Lipschitz-jatkuva rajoitetuissa joukoissa? Ei missään nimessä! Ensinnäkin Heine-Borelin lause ei päde ääretönulotteisissa normiavaruuksissa, kuten jo aiemmin on todettu. Toiseksi ääretönulotteisessa avaruudessa millään pisteellä ei ole ympäristöä, jonka sulkeuma olisi kompakti. Toki on kirjallisuutta, esimerkiksi Evansin kirja [**11**], jossa vuoristosolalauseen Hilbertin avaruuden versio todistetaan suppeasti vain sellaisille funktioille f, joille kuvaus $u \mapsto Df(u)$ on Lipschitz-jatkuva rajoitetuissa joukoissa. Tässä lähestymistavassa ei ole mitään kritisoitavaa, mikäli lausetta halutaan tutkia vain Hilbertin avaruudessa, kuten on asia juuri kirjassa [**11**]. Tilanne muuttuu kuitenkin ongelmalliseksi siirryttäessä tarkastelemaan vuoristosolalausetta Banach-avaruudessa. Tällöin tarkasteltavien funktioiden gradientit on pakko korvata pseudogradienteilla, jotka ovat lokaalisti Lipschitz-jatkuvia, mutta eivät välttämättä Lipschitz-jatkuvia rajoitetuissa joukoissa. Asiaan palataan tarkemmin seuraavassa kappaleessa.

Esitetään ensin vuoristosolalauseen Hilbertin avaruuden versio ja perehdytään sen jälkeen erääseen differentiaaliyhtälöiden teorian peruslauseeseen, jota tarvitaan Hilbertin avaruuden version todistamiseen.

Vuoristosolalauseen versio 2. *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $f \in C^{1,1}(H)$, jolle pätevät seuraavat ehdot:*

(1) $f(0) = 0$.
(2) *On sellaiset vakiot $r, a > 0$ että $f(u) \geq a$ kun $\|u\| = r$.*
(3) *On sellainen $u_0 \in H$, $\|u_0\| > r$, että $f(u_0) \leq 0$.*

Määritellään

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]; H) \ : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = u_0\}.$$

Tällöin

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t))$$

on funktion f kriittinen taso, jos f toteuttaa $(PS)_c$-ehdon.

On luonnollista verrata tämän lauseen geometrisia ehtoja vuoristosolalauseen ensimmäisen version vastaaviin. Ensimmäisessä versiossa kaikki näyttäisi olevan vahvempaa − Hilbertin avaruuden tilalla on avaruus $\mathbb{R}^n$, pisteiden 0 ja u_0 välisten vuoristoehtojen (1) ja (2) tilalla on vahvempi olettamus, että pisteet ovat lokaaleja minimejä, ja $(PS)_c$-ehdon tilalla on koersiivisuus. Kuitenkin yleistys on melko vaivaton.

Kuten ensimmäisen version todistuksessa, myös nyt tarvitaan deformaatiokuvausta, joka muuntaa jatkuvasti määrittelyavaruutta. Deformaatiokuvauksen konstruointia varten tarvitaan tieto, että eräällä differentiaaliyhtälöllä on olemassa ratkaisu.

3.1. Cauchyn ongelma. Klassinen tavallisten differentiaaliyhtälöiden olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause sanoo, että alkuarvo-ongelmalla

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu jossakin pisteen x_0 ympäristössä, kunhan annettu funktio f ja sen osittaisderivaatta pisteen y suhteen ovat jatkuvia. Tutkittaessa vain olemassaoloa annetun funktion f vaatimuksia voidaan heikentää siten, että funktiolta vaaditaan vain jatkuvuus.

Edellä nähdyn kaltaisia alkuarvo-ongelmia kutsutaan usein Cauchyn ongelmiksi. Tulevassa deformaatiolemmassa todetaan, että Cauchyn ongelman

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) \\ \eta(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

ratkaisu η olisi sopiva deformaatiokuvaus pisteelle u_0, kun annettu kuvaus V on valittu sopivasti. Tässä ongelmassa on annettu $V : B \to B$, missä B on Banach-avaruus. Kuvaukselta V vaaditaan, että se on rajoitettu ja lokaalisti Lipschitz-jatkuva. Halutaan löytää kiinnitetylle $u_0 \in B$ kuvaus $\eta : [0, 1] \to B$, joka toteuttaa ongelman. Jos ratkaisu on olemassa jokaisella alkuarvovalinnalla, voidaan määritellä globaali deformaatiokuvaus $\eta : [0, 1] \times B \to B$. Mutta mistä tiedämme, onko alkuarvo-ongelmalla (1) ratkaisua?

Otetaan käyttöön *Banachin kiintopistelause*. Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $T : X \to X$ kontraktio, eli jollakin $K < 1$ pätee

$$d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y) \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Tällöin Banachin kiintopistelause sanoo, että kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste, eli on täsmälleen yksi $x^* \in X$ jolle pätee $T(x^*) = x^*$. Lauseen todistus on helppo ja intuitiivinen. Selvästi kiintopisteitä on enintään yksi. Toisaalta jos $x \in X$, niin jono $(T^n(x))_{n=1}^{\infty} \subset X$ on Cauchy-jono, joka täydellisyyden nojalla suppenee kohti jotain pistettä $x^* \in X$. Kolmioepäyhtälöllä nähdään, että $d(T(x^*), x^*) = 0$.

Banachin kiintopistelauseella on lukuisia sovelluksia analyysin eri aloilla. Aiemmin jo mainittiin, että kaksi vektorianalyysin perustulosta, implisiittifunktiolause ja käänteiskuvauslause, todistetaan Banachin kiintopistelauseen avulla. Kiintopistelausetta käytetään usein myös funktionaalianalyysissä, jos esimerkiksi halutaan tutkia integraaliyhtälöiden olemassaolokysymyksiä. Yritetään käyttää kiintopistelausetta

Cauchyn ongelman (1) ratkaisemiseksi. Huomataan ensin, että funktio η on ongelman (1) ratkaisu täsmälleen silloin kun

$$\eta(t) = u_0 + \int_0^t V(\eta(s))ds. \tag{2}$$

Yhtälössä (2) siis integroidaan reaalimuuttujan s suhteen funktiota V, jonka arvot ovat Banach-avaruudessa. Voidaan osoittaa, että kaikilla $t \in [0, 1]$ pätee

$$\left\| \int_0^t V(\eta(s))ds \right\| \leq \int_0^t \|V(\eta(s))\| \, ds.$$

(Katso [**11**], s. 733-734.)

Strategiana on muodostaa ratkaisuehdokkaista η avaruus, joka varustettuna sopivalla metriikalla on täydellinen metrinen avaruus X. Jos pystyttäisiin osoittamaan, että kuvaus

$$T(\eta)(t) = u_0 + \int_0^t V(\eta(s))ds$$

on kuvaus avaruudelta X itselleen ja lisäksi kontraktio, tuntuisi että Cauchyn ongelma on ratkaistu. Edellä kuvatulla tavalla voidaan kuitenkin todistaa vain, että Cauchyn ongelmalla on ratkaisu aikavälillä $[0, \epsilon]$, missä ϵ riippuu annetun kuvauksen V ominaisuuksista annetun pisteen u_0 lähistöllä. Pienellä lisäpäättelyllä voidaan kuitenkin nähdä, että jokaisella alkuarvolla ratkaisu on olemassa koko välillä $[0, 1]$. Argumentin kannalta on välttämätöntä, että annettu kuvaus V on globaalisti rajoitettu.

LAUSE 1.13. *Olkoon B Banach-avaruus, $u_0 \in B$, ja $V : B \to B$ jatkuva kuvaus, joka on rajoitettu ja lokaalisti Lipschitz-jatkuva. Tällöin on jatkuvasti derivoituva funktio $\eta : [0, 1] \to B$, joka toteuttaa Cauchyn ongelman* (1) *ja ekvivalentisti yhtälön* (2).

TODISTUS. Koska kuvaus V on rajoitettu, on sellainen $M > 0$ että $\|V(u)\| \leq M$ kaikilla $u \in B$. Kuvaus V on myös lokaalisti Lipschitz-jatkuva, joten on sellaiset $L > 0$ ja $r > 0$ että

$$\|V(u_1) - V(u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|$$

kun $u_1, u_2 \in \overline{B}(u_0, r)$. Olkoon $\epsilon < \min\left\{\frac{r}{M}, \frac{1}{L}\right\}$ ja

$$X := \left\{\varphi : [0, \epsilon] \to \overline{B}(u_0, r) \ : \ \varphi \text{ on jatkuva}\right\}$$

varustettuna metriikalla

$$d(\varphi_1, \varphi_2) := \sup_{t \in [0, \epsilon]} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Jos $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \subset X$ on Cauchy-jono, kyseessä on tasaisesti suppeneva jono jatkuvia funktioita $[0, \epsilon] \to \overline{B}(u_0, r)$, joten rajafunktio kuuluu avaruuteen X. Siis X on täydellinen metrinen avaruus.

Olkoon

$$T(\varphi)(t) = u_0 + \int_0^t V(\varphi(s))ds,\ t \in [0, \epsilon]\,.$$

Pyritään osoittamaan, että $T(X) \subset X$ ja että kuvaus T on kontraktio. Ainakin $T(\varphi)$, $\varphi \in X$, on jatkuva kuvaus väliltä $[0, \epsilon]$ avaruuteen B. Lisäksi

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(t) - u_0\| &= \left\| \int_0^t V(\varphi(s))ds \right\| \le \int_0^t \|V(\varphi(s))\|\, ds \\ &\le M\epsilon < r \end{aligned}$$

kaikilla $t \in [0, \epsilon]$, joten $T(\varphi)$ on kuvaus $[0, \epsilon] \to \overline{B}(u_0, r)$ ja siis $T(X) \subset X$.

Osoitetaan seuraavaksi, että kuvaus T on kontraktio. Olkoot

$$\varphi_1, \varphi_2 \in X.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_1)(t) - T(\varphi_2)(t)\| &= \left\| \int_0^t V(\varphi_1(s)) - V(\varphi_2(s))ds \right\| \\ &\le \int_0^t L\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|\, ds \le L\epsilon\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|\,, \end{aligned}$$

joten $\|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\| \le L\epsilon\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ missä $L\epsilon < 1$. Siis kuvaus T on kontraktio.

Banachin kiintopistelauseen nojalla on yksikäsitteinen $\eta_{u_0} \in X$, jolle pätee

$$\eta_{u_0}(t) = u_0 + \int_0^t V(\eta_{u_0}(s))ds \text{ kaikilla } t \in [0, \epsilon]\,.$$

Nyt on osoitettu, että kaikille $u \in B$ on sellainen $\epsilon = \epsilon(u) > 0$ että Cauchyn ongelmalla alkuarvolla u on ratkaisu välillä $[0, \epsilon(u)]$.

Oletetaan, että on sellainen alkuarvo $u \in B$, että Cauchyn ongelmalla alkuarvolla u on maksimaalinen ratkaisuväli $[0, N]$, $N < 1$. Olkoon $(t_n) \subset [0, N)$ jono, joka suppenee kohti pistettä N. Koska

$$\|\eta_u(t_{n+1}) - \eta_u(t_n)\| = \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(\eta_u(s,))ds \right\| \le M\, |t_{n+1} - t_n|\,,$$

jono $(\eta_u(t_n))_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy, ja siten on sellainen $\widetilde{u} \in B$ että jono $(\eta_u(t_n))$ suppenee kohti alkiota $\widetilde{u}$. Nyt $\eta_u(N) = \widetilde{u}$, joten alkuarvolla u Cauchyn ongelman maksimaalinen ratkaisuväli on vähintään $[0, N + \epsilon(\widetilde{u})]$, ristiriita. Siis kaikilla alkuarvoilla Cauchyn ongelmalla on ratkaisu välillä $[0, 1]$. □

Viimeinkin on tarpeelliset valmistelut tehty, jotta voidaan todistaa vuoristosolalause Hilbertin avaruudessa. Lause on seuraus deformaatiolemmasta, joka sanoo, että mikäli $(PS)_c$-funktiolla ei ole kriittisiä pisteitä tasolla c, määrittelyavaruutta voidaan deformoida tavalla, joka on ristiriidassa vuoristoehtojen kanssa.

3.2. Deformaatiolemma Hilbertin avaruudessa. Muistellaan hieman vuoristosolalauseen ensimmäisen version todistusta. Siinä oletettiin, että $K_c = \emptyset$, ja toteutettiin deformaatiokuvauksen avulla määrittelyavaruuden jatkuva muunnos, joka johti ristiriitaan funktion f ominaisuuksien kanssa. Myös Hilbertin avaruudessa voidaan toteuttaa vastaavanlainen jatkuva muunnos. Kun nyt tunnemme Cauchyn ongelman, muunnos on itse asiassa paljon sulavampi ja elegantimpi kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$ aiemmin toteuttamamme.

Joukkoa, johon kuuluvat kaikki sellaiset määrittelyjoukon alkiot, jotka tarkasteltava funktio f kuvaa korkeintaan arvoon α, nimetään jatkossa joukoksi A_α, siis

$$A_\alpha := \{u \in H \ : \ f(u) \leq \alpha\}.$$

Seuraavan, aivan keskeisen lauseen todistus seuraa kirjan [**11**] todistusta.

Deformaatiolemma 1.14. *Olkoon H Hilbertin avaruus,*

$$f \in C^{1,1}(H)$$

kuvaus joka toteuttaa $(PS)_c$-ehdon, $K_c = \emptyset$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin on deformaatiokuvaus $\eta : [0,1] \times H \to H$, jolle pätee jollakin $\delta \in (0, \epsilon)$:

(1) $\eta(0, u) = u$ kaikilla $u \in H$.

(2) $\eta(1, u) = u$ kun $u \in A_{c-\epsilon}$.

(3) $f(\eta(t, u)) \leq f(u)$ kaikilla $u \in H,\ t \in [0, 1]$.

(4) $\eta(1, u) \in A_{c-\delta}$ kun $u \in A_{c+\delta}$.

Todistus. Lemman 1.9 nojalla on sellainen $\alpha < \min\{\epsilon, 1\}$ että $\|Df(u)\| \geq \alpha$ kun $|f(u) - c| < \alpha$. Olkoon $\delta < \frac{\alpha^2}{2} < \epsilon$. Olkoot

$$A := \{u \in H \ : \ f(u) \notin (c - \epsilon, c + \epsilon)\},$$
$$B := \{u \in H \ : \ f(u) \in [c - \delta, c + \delta]\},$$

ja asetetaan funktio $g : H \to \mathbb{R}$,

$$g(u) = \frac{\mathrm{dist}(u, A)}{\mathrm{dist}(u, A) + \mathrm{dist}(u, B)},$$

jolloin $0 \leq g(u) \leq 1$ kaikilla $u \in H$, $g(u) = 0$ kun $u \in A$ ja $g(u) = 1$ kun $u \in B$. Asetetaan myös funktio $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq t \leq 1 \\ 1/t, & \text{kun } t \geq 1. \end{cases}$$

Tällöin $h(\|Df(u)\|)Df(u)$ normeeraa gradientin $Df(u)$ aina kun $\|Df(u)\| > 1$, eli

$$\|h(\|Df(u)\|)Df(u)\| = 1$$

kun $\|Df(u)\| > 1$. Nyt voidaan asettaa kuvaus $V : H \to H$,

$$V(u) = -g(u)h(\|Df(u)\|)Df(u).$$

Tällöin $\|V(u)\| \leq 1$ kaikilla $u \in H$, joten kuvaus V on globaalisti rajoitettu. Lisäksi kuvaukset g, h ja $Df(u)$ ovat lokaalisti Lipschitz-jatkuvia, joten sama pätee kuvaukseen V. Siten Cauchyn ongelmalla

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) \\ \eta(0) = u \end{cases}$$

on ratkaisu $\eta : [0,1] \to H$ jokaisella u, joten voidaan asettaa globaali deformaatiokuvaus $\eta : [0,1] \times H \to H$, missä $\eta(t,u)$ on Cauchyn ongelman ratkaisu alkuarvolla u ja ajanhetkellä t.

Suoraan nähdään, että $\eta(0,u) = u$ kaikilla $u \in H$. Osoitetaan, että $\eta(1,u') = u'$ kun $u' \notin f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$. Koska funktio f on jatkuva, $D := H \setminus f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ on avoin joukko. Siis on sellainen $\beta > 0$ että $\eta(t,u') \in D$ kun $0 \leq t \leq \beta$. Koska $V = 0$ joukossa D, $\eta(t,u') = u'$ kun $0 \leq t \leq \beta$. Siis $\eta(1,u') = u'$.

Lasketaan seuraavaksi ketjusäännöllä $\frac{d}{dt} f(\eta(t,u))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\eta(t,u)) &= \left\langle Df(\eta(t,u)), \frac{d}{dt}\eta(t,u) \right\rangle = \langle Df(\eta(t,u)), V(\eta(t,u)) \rangle \\ &= -g(\eta(t,u)) h(\|Df(\eta(t,u))\|) \|Df(\eta(t,u))\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Oletetaan nyt että $u \in A_{c+\delta}$, ja osoitetaan että $\eta(1,u) \in A_{c-\delta}$. Jos jollain ajanhetkellä $0 \leq t \leq 1$ on $\eta(t,u) \in A_{c+\delta} \setminus B$, niin epäyhtälöstä $\frac{d}{dt} f(\eta(t,u)) \leq 0$ seuraa, että $\eta(1,u) \in A_{c-\delta}$. Voidaan siis olettaa, että $\eta(t,u) \in B$ kaikilla $t \in [0,1]$. Tällöin $g(\eta(t,u)) = 1$ kaikilla $t \in [0,1]$, joten

$$\frac{d}{dt} f(\eta(t,u)) = -h(\|Df(\eta(t,u))\|) \|Df(\eta(t,u))\|^2.$$

Niillä muuttujan t arvoilla, joilla $\|Df(\eta(t,u))\| \geq 1$, on

$$h(\|Df(\eta(t,u))\|) \|Df(\eta(t,u))\| = 1,$$

joten

$$\frac{d}{dt} f(\eta(t,u)) = -\|Df(\eta(t,u))\| \leq -\alpha.$$

Toisaalta niillä muuttujan t arvoilla, joilla $\|Df(\eta(t,u))\| \leq 1$, on

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\eta(t,u)) &= -g(\eta(t,u)) h(\|Df(\eta(t,u))\|) \|Df(\eta(t,u))\|^2 \\ &= -\|Df(\eta(t,u))\|^2 \leq -\alpha^2. \end{aligned}$$

Siis kaikilla $t \in [0,1]$ on $\frac{d}{dt} f(\eta(t,u)) \leq -\alpha^2$ ja siten

$$f(\eta(1,u)) - f(u) \leq -\alpha^2.$$

Saadaan

$$f(\eta(1,u)) \leq f(u) - \alpha^2 \leq c + \delta - \alpha^2 \leq c - \delta,$$

ja on näytetty, että η toteuttaa halutut ominaisuudet. $\square$

Deformaatiolemman todistuksessa on monia samankaltaisuuksia vuoristosolalauseen ensimmäisen version todistusideoiden kanssa, mutta todistuksilla on myös eroja. Aiemmin deformaatiokuvaus annettiin konkreettisena lausekkeena, mutta nyt nojataankin aiempaan Cauchyn ongelmaa käsittelevään lemmaan, ja deformaatiokuvaukseksi asetetaan tietyn Cauchyn ongelman ratkaisu. Saadaan osoitettua, että deformaatiokuvaus toteuttaa halutut ominaisuudet, mutta sen tarkemmin sitä ei tunneta. Menettely tuntuu abstraktilta ja herää aiheellinen kysymys, miksi ei vain imitoida aiempaa, äärellisulotteisessa avaruudessa toteutettua menettelyä.

Vastaus piilee jo aiemmin mainitussa seikassa $-$ Heine-Borelin lause ei päde ääretönulotteisissa normiavaruuksissa. Siitä, että joukko on suljettu ja rajoitettu, ei voida tehdä johtopäätöstä, että joukko olisi kompakti. Nyt on sopiva hetki perustella lyhyesti, miksi näin on. Tarkastellaan esimerkiksi sup-normilla varustetun jonoavaruuden suljettua yksikköpalloa. Olkoon $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$ ja niin edelleen. Tällöin $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ kuuluu jonoavaruuden suljettuun yksikköpalloon, mutta sillä ei selvästikään ole suppenevaa osajonoa.

Vuoristosolalauseen ensimmäisen version todistuksessa Heine-Borelin lausetta käytettiin osoittamaan, että on pieni aikaväli $[0, t_0]$, jolloin $f(\eta(t, x)) \leq f(u)$. Vastaavaa ei voida päätellä ääretönulotteisessa tapauksessa, sillä joukot $f^{-1}\{[\alpha, \beta]\}$ eivät välttämättä ole kompakteja. Ei siis päästä valitsemaan äärellisestä määrästä positiivisia kellonaikoja pienintä. On kuitenkin perusteltua sanoa, että Hilbertin avaruuden deformaatiolemmassa toteutettu deformaatiokuvauksen konstruointi on vahvempi ja tyylikkäämpi kuin aiempi, konkreettinen konstruktio. Aiemmin jouduttiin näkemään paljon vaivaa, jotta löydettiin edes pieni aikaväli $[0, t_0]$, jolloin $f(\eta(t, x)) \leq f(u)$. Nyt sen sijaan nähtiin hyvin helposti, että $f(\eta(t, x)) \leq f(u)$ kaikilla $t > 0$. Cauchyn ongelman olemassaololause osoittautui hyödylliseksi.

Viimeistellään vuoristosolalauseen toisen version todistus.

Vuoristosolalauseen toisen version todistus. Koska

$$\max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t)) \geq a \text{ kaikilla } \gamma \in \Gamma,$$

on $c \geq a$. Oletetaan, että funktio f toteuttaa $(PS)_c$-ehdon, mutta c ei ole kriittinen taso, eli $K_c = \emptyset$. Tällöin funktio f toteuttaa deformaatiolemman oletukset. Kiinnitetään $\epsilon < \frac{a}{2}$. Deformaatiolemman nojalla on $\delta < \epsilon$ ja deformaatiokuvaus η, joka muuntaa joukon $A_{c+\delta}$ jatkuvasti joukkoon $A_{c-\delta}$ ja pitää ennallaan kaikki pisteet $u \in H$, joille $|f(u) - c| > \epsilon$. Olkoon $\gamma \in \Gamma$ sellainen, että

$$\max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t)) \leq c + \delta.$$

Tällöin $\gamma([0, 1]) \subset A_{c+\delta}$, joten $\eta(1, \gamma([0, 1])) \subset A_{c-\delta}$. Koska jatkuvien kuvausten yhdistetty kuvaus on jatkuva, $\eta(1, \gamma(t)) : [0, 1] \to H$ on jatkuva kuvaus, jolle pätee

$$\max_{t\in[0,1]} \eta\left(1,\gamma\left(t\right)\right) \leq c-\delta.$$

Koska $|\gamma\left(0\right)-c| \geq \epsilon$ ja $|\gamma\left(e\right)-c| \geq \epsilon$, on $\eta\left(1,\gamma\left(0\right)\right) = \gamma\left(0\right) = 0$ ja $\eta\left(1,\gamma\left(e\right)\right) = \gamma\left(e\right) \leq 0$. Siis $\eta\left(1,\gamma\left(t\right)\right) \in \Gamma$, mikä on ristiriita. On näytetty, että c on funktion f kriittinen taso. □

4. Vuoristosolalause Banach-avaruudessa

Kappaleen tavoitteena on todistaa vuoristosolalauseen yleisin versio. Olemme jo nähneet lauseesta kaksi versiota. Ensimmäisen todistuksessa käytettiin avaruuden $\mathbb{R}^n$ ominaispiirteitä, kuten Heine-Borelin lausetta. Toisessa versiossa deformaatiokuvaus konstruoitiin ovelasti asetetun Cauchyn ongelman ratkaisuna. Todistusta helpottivat Hilbertin avaruuden erikoispiirteet ja oletus, että tarkasteltava funktio on $C^{1,1}$.

Seuraavaksi esitettävä yleinen versio muistuttaa toista versiota, mutta Hilbertin avaruuden tilalla on Banach-avaruus, ja tarkasteltavan funktion oletetaan olevan vain C^1.

Vuoristosolalauseen versio 3. *Olkoon B Banach-avaruus ja $f \in C^1(B)$, jolle pätevät seuraavat ehdot:*

(1) $f(0) = 0$.
(2) *On sellaiset vakiot $r, a > 0$ että $f(u) \geq a$ kun $\|u\| = r$.*
(3) *On sellainen $u_0 \in H$, $\|u_0\| > r$, että $f(u_0) \leq 0$.*

Määritellään

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C\left([0,1]\,;B\right)\ :\ \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=u_0\right\}.$$

Tällöin

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\ \max_{t\in[0,1]}\ f(\gamma(t))$$

on funktion f kriittinen taso jos f toteuttaa $(PS)_c$-ehdon.

Pienet muutokset aiheuttavat tässä tapauksessa uuden ongelman: Banach-avaruuksissa derivaattakuvauksia ei voi samaistaa avaruuden alkioiksi, kuten aiemmin on todettu. Kuitenkin haluttaisiin taas muodostaa Cauchyn ongelma, jonka ratkaisu asetettaisiin deformaatiokuvaukseksi. Tehtävä tuntuu hankalalta – miten liittää derivaattakuvaukset, jotka eivät välttämättä lainkaan muistuta Banach-avaruuden vektoreita, kyseisen avaruuden jatkuvaan muunnokseen?

Olkoon B Banach-avaruus, $f \in C^1(B)$ ja $u_0 \in B$. Olisiko mahdollista liittää vektoriin u_0 jokin toinen vektori $v(u_0) \in B$, joka *muistuttaisi* funktion f gradienttia pisteessä u_0? Se ei välttämättä olisi aivan samanlainen kuin gradientit Hilbertin avaruuksissa tai avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mutta sillä olisi vuoristosolalauseen todistusta ajatellen gradientin tarpeelliset ominaisuudet. Vektori $v(u_0)$ olisi ikään kuin derivaattakuvauksen $Df(u_0)$ edustaja Banach-avaruudessa.

Mitä ominaisuuksia kuvaukselta v kannattaa vaatia? Cauchyn ongelman muodostamisen kannalta olisi tärkeää, että v on ainakin lokaalisti Lipschitz-jatkuva. Lisäksi halutaan, että $\|v(u)\|$ on korkeintaan jonkin kiinteän monikerran verran suurempi kuin $\|Df(u)\|$. Tämä on tärkeää, jotta Cauchyn ongelmassa esiintyvä kuvaus V olisi edelleen globaalisti rajoitettu. Viimeiseksi halutaan, että $Df(u)\,[v(u)]$ dominoi arvoa $\|Df(u)\|^2$. Tämäkin vaatimus on luonteva kun katsotaan, miten Hilbertin avaruuden deformaatiolemman todistuksen loppupuolella argumentoidaan.

Kovia vaatimuksia, jotka annetaan vielä myöhemmin määritelmän muodossa. Halutut ominaisuudet toteuttavaa kuvausta v tullaan kutsumaan pseudogradienttikentäksi ja vektoria $v(u)$ vektorin u pseudogradientiksi. Ei ole lainkaan selvää, että tällainen psudogradienttikenttä on olemassa kaikille Banachin avaruuden C^1-funktioille. Kirjassa [**24**] pidetään jopa hämmästyttävänä, että jokaisella Banachin avaruuden C^1-funktiolla todella on pseudogradienttikenttä. Jotta tämä saataisiin näytettyä, on otettava loikka topologiaan. Ideana on, että pseudogradientit liimataan joustavasti toisiinsa pseudogradienttikentäksi. Apuna käytetään konstruktiota, jota kutsutaan ykkösen ositukseksi.

4.1. Ykkösen ositus. Kompaktius on topologian tärkeimpiä käsitteitä. Se on kuitenkin melko rajoittava ominaisuus: vain suljetut ja rajoitetut avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukot ovat kompakteja, ja yleisissä metrisissä avaruuksissa tilanne on vielä huonompi $-$ suljettu ja rajoitettu on välttämätön, mutta ei riittävä ehto kompaktiudelle.

Koska vain harvat ja valitut joukot ovat kompakteja, ei ole ihme, että kompaktiudelle on kehitetty monia yleistyksiä, kuten prekompaktius ja lokaali kompaktius. Pyrittäessä muodostamaan funktiolle $f \in C^1(B)$ pseudogradienttikenttää on tärkeää, että Banach-avaruus B on *parakompakti.*

Olkoon X topologinen avaruus ja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sen avoin peite. Tällöin peite $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ on peitteen $\{U_\alpha\}$ *hienonnus*, jos jokaiselle V_β on sellainen U_α että $V_\beta \subset U_\alpha$.

Avaruuden X peitettä sanotaan *lokaalisti äärelliseksi*, jos kaikilla $x \in X$ on sellainen ympäristö O_x, joka leikkaa vain äärellisen montaa peitejoukkoa. Avaruutta X sanotaan *parakompaktiksi*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on hienonnus, joka on lokaalisti äärellinen.

Parakompaktius on kompaktiuden yleistys; selvästi kompakti avaruus on parakompakti. Tavoitteidemme kannalta on olennaista, että metrinen avaruus on aina parakompakti. Tuloksen todisti ensimmäisenä A.H. Stone artikkelissaan [**23**]. Stonen todistus, ja myös monet sitä seuranneet parannusyritykset ovat melko vaikeaselkoisia, mutta lopulta

M.E. Rudin keksi lyhyen ja selkeän todistuksen, jonka hän esitti artikkelissaan [**20**]. Lause on riippuvainen valinta-aksioomasta, ja Rudinin todistus perustuu ovelaan hyvinjärjestysperiaatteen hyödyntämiseen.

Parakompaktiuden hyöty on siinä, että se mahdollistaa ykkösen osituksen.

MÄÄRITELMÄ 1.15. Olkoon X topologinen avaruus ja $\{U_\alpha\}$ sen avoin peite. Oletetaan, että perhe jatkuvia funktioita $\{f_\alpha\}$ toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $0 \leq f_\alpha \leq 1$ kaikilla α.

(2) $\text{supp}\ (f_\alpha) \subset U_\alpha$ kaikilla α.

(3) Jos $x \in X$, niin $f_\alpha(x) \neq 0$ vain äärellisen monella α.

(4) $\displaystyle\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ kaikilla $x \in X$.

Tällöin funktioperhettä $\{f_\alpha\}$ sanotaan *peitteen* $\{U_\alpha\}$ *alaiseksi ykkösen osituksekseksi avaruudessa* X.

Ykkösen ositus on kätevä aina, kun avaruudesta tiedetään joka paikassa lokaalisti jotain, ja halutaan tämän tiedon valossa suorittaa jokin globaali konstruktio. Erityisen tärkeää tämä on monistojen teoriassa. Ykkösen osituksen avulla voidaan joskus esimerkiksi määrittää monistolla määritellylle funktiolle integraali, tai asettaa Riemannin metriikka monistolle.

Pseudogradienttikentän konstruoimisessa on hieman samoja piirteitä monistojen käsittelyn kanssa. Ykkösen ositus osoittautuukin välttämättömäksi, kun tuonnempana määrittelemme pseudogradienttikentän ja pyrimme todistamaan, että jokaisella Banach-avaruuden C^1-funktiolla on pseudogradienttikenttä.

Kirjassa [**26**] todistetaan, että parakompaktissa Hausdorffin avaruudessa voidaan aina suorittaa ykkösen ositus. Tästä seuraa, että sama onnistuu metrisissä avaruuksissa. Usein ositusfunktioilta vaaditaan enemmän kuin pelkkä jatkuvuus. Esimerkiksi Sobolev-avaruuksien teoriassa avaruuteen $\mathbb{R}^n$ tehdään ykkösen ositus C^∞-funktioilla. Seuraavassa pykälässä todettavan pseudogradienttikentän olemassaololauseen todistuksessa halutaan, että ositusfunktiot ovat Lipschitz-jatkuvia. Hieman tuonnempana konstruoimme Banach-avaruuteen tällaisen ykkösen osituksen.

4.2. Pseudogradientti. Kappaleen alussa haaveilimme kuvauksesta v, joka edustaisi derivaattakuvauksia $Df(u)$ Banach-avaruuksissa. Määritellään nyt tarkasti, mitä tällaiselta pseudogradienttikentäksi nimetyltä kuvaukselta vaaditaan.

MÄÄRITELMÄ 1.16. Olkoon $f \in C^1(B)$. Merkitään

$$\widetilde{B} := \{u \in B \ : \ Df(u) \neq 0\}.$$

Tällöin kuvaus $v : \widetilde{B} \to B$ on kuvauksen f *pseudogradienttikenttä*, jos pätee

(1) v on lokaalisti Lipschitz-jatkuva.

(2) $\|v(u)\| < 2\,\|Df(u)\|$.

(3) $Df(u)\,[v(u)] > \|Df(u)\|^2$.

Sanotaan myös, että jos $u \in \widetilde{B}$, niin $v(u)$ on alkion u *pseudogradientti.*

Kolmannen ehdon vuoksi on selvää, että pseudogradienttia ei voida määritellä kriittisille pisteille eli sellaisille vektoreille u, joille lineaarikuvaus $Df(u)$ on nollakuvaus. Tämä rajoitus ei tietenkään aiheuta mitään ongelmaa, koska vuoristosolalauseen todistuksessa ollaan kiinnostuneita deformoimaan nimenomaan niitä vektoreita, jotka eivät ole kriittisiä pisteitä.

Seuraavan, hyvin tärkeän lauseen todistuksessa on hyödynnetty ideoita kirjoista **[22]** ja **[24]**.

LAUSE 1.17. *Olkoon $f \in C^1(B)$. Tällöin kuvauksella f on pseudogradienttikenttä.*

TODISTUS. Olkoon $u_0 \in \widetilde{B}$. Koska $Df(u_0)$ ei ole nollakuvaus, operaattorinormin määritelmästä seuraa, että on $\overline{w}(u_0) \in B$ jolle pätee $\|\overline{w}(u_0)\| = 1$ ja $Df(u_0)\overline{w}(u_0) > \frac{2}{3}\,\|Df(u_0)\|$. Asetetaan $w(u_0) = \frac{3}{2}\,\|Df(u_0)\|\,\overline{w}(u_0)$, jolloin vektorille $w(u_0)$ pätee

$$\begin{aligned} \|w(u_0)\| &< 2\,\|Df(u_0)\|\,, \\ Df(u_0)w(u_0) &> \|Df(u_0)\|^2\,, \end{aligned}$$

joten $w(u_0)$ on vektorin u_0 pseudogradientti. Koska f on jatkuvasti differentioituva ja edeltävät epäyhtälöt ovat aitoja, vektorilla u_0 on sellainen ympäristö U_{u_0} että pätee

$$\begin{aligned} \|w(u_0)\| &< 2\,\|Df(u)\|\,, \\ Df(u)w(u_0) &> \|Df(u)\|^2 \end{aligned}$$

kaikilla $u \in U_{u_0}$. Siis $w(u_0)$ on kaikkien joukon U_{u_0} vektoreiden pseudogradientti. Vastaavalla tavalla jokaisella $u \in B$ on ympäristö U_u siten että kaikilla tämän ympäristön vektoreilla on yhteinen pseudogradientti. Koska Banach-avaruus B on metrinen avaruus ja $\{U_u\}_{u \in U}$ on avaruuden B avoin peite, peitteellä $\{U_u\}$ on lokaalisti äärellinen hienonnus $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$, missä I on jokin indeksijoukko.

Asetetaan $g_\alpha : B \to \mathbb{R}$,

$$g_\alpha(u) = \operatorname{dist}\left(u, M_\alpha^c\right),$$

ja $\phi_\alpha : B \to \mathbb{R}$,

$$\phi_\alpha(u) = \frac{g_\alpha(u)}{\sum_{\alpha \in I} g_\alpha(u)}.$$

Osoitetaan aluksi, että kuvaus ϕ_α on hyvin määritelty kaikilla $\alpha \in I$. Jos $u \in B$, niin $u \in M_{\alpha_0}$ jollakin $\alpha_0 \in I$. Koska joukko $M_{\alpha_0}^c$ on suljettu ja $u \notin M_{\alpha_0}^c$, on

$$\sum_{\alpha \in I} g_\alpha(u_0) \geq g_{\alpha_0}(u_0) > 0.$$

Toisaalta $u_0 \in M_\alpha$ vain äärellisen monella $\alpha \in I$, joten

$$\sum_{\alpha \in I} g_\alpha(u_0) < \infty.$$

Huomataan seuraavaksi, että funktioperhe ϕ_α on peitteen U_u alainen ykkösen ositus avaruudessa B. Suoraan nähdään, että $0 \leq \phi_\alpha \leq 1$ kaikilla $\alpha \in I$ ja

$$\sum_{\alpha} \phi_\alpha(u) = 1 \text{ kaikilla } u \in B.$$

Koska jokaiselle g_{α_0} on sellainen avoin joukko U_{u_0} että

$$\operatorname{supp}(g_{\alpha_0}) \subset U_{u_0},$$

on myös

$$\operatorname{supp}(\phi_{\alpha_0}) \subset U_{u_0}.$$

Osoitetaan vielä, että funktiot ϕ_α ovat lokaalisti Lipschitz-jatkuvia. Olkoon $u_0 \in B$. Koska peite M_α on lokaalisti äärellinen, on sellainen $r_0 > 0$ että

$$B(u_0, r_0) \cap M_\alpha \neq \emptyset$$

vain äärellisen monella $\alpha \in I$. Selvästi pätee

$$|g_\alpha(u) - g_\alpha(w)| \leq \|u - w\| \text{ kaikilla } u, w \in B,$$

joten funktiot g_α ovat Lipschitz-jatkuvia kaikkialla. Siis kun $\alpha \in I$, funktio ϕ_α,

$$\phi_\alpha(u) = \frac{g_\alpha(u)}{\sum_{\alpha \in I} g_\alpha(u)},$$

on Lipschitz-jatkuva pallossa $B(u_0, r_0)$. Koska sekä vektorin u_0 että indeksin α valinta oli mielivaltainen, on osoitettu, että funktiot ϕ_α ovat lokaalisti Lipschitz-jatkuvia avaruudessa B.

Asetetaan funktio $v : \widetilde{B} \to B$,

$$v(u) = \sum_{\alpha \in I} \phi_\alpha(u) w(u_\alpha),$$

missä $u_\alpha \in M_\alpha$ kaikilla $\alpha \in I$. Osoitetaan, että kuvaus $v : \widetilde{B} \to B$ toteuttaa pseudogradienttikentältä vaadittavat ehdot (1)-(3) (katso määritelmä).

(1) Jokaisella avaruuden B vektorilla u on pieni ympäristö, jossa funktio v on vain äärellinen kombinaatio Lipschitz-jatkuvia funktioita ϕ_α painotettuina luvuilla $w(u_\alpha)$. Siis funktio v on lokaalisti Lipschitz-jatkuva.

Kohtia (2) ja (3) varten kiinnitetään $u \in B$ ja muistetaan, että $\phi_\alpha(u) \neq 0$ vain äärellisen monella indeksillä α_1,...,α_n. Käyttämällä hyväksi tietoa, että luvut $w(u_{\alpha_j})$ ovat pseudogradientteja, kohdat (2) ja (3) pätevät seuraavien laskujen nojalla.

$$\begin{aligned}\|v(u)\| &= \left\|\sum_{\alpha\in I}\phi_\alpha(u)w(u_\alpha)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\phi_{\alpha_j}(u)w(u_{\alpha_j})\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\left|\phi_{\alpha_j}(u)\right|\left\|w(u_{\alpha_j})\right\| < 2\left\|Df(u)\right\|\sum_{j=1}^{n}\left|\phi_{\alpha_j}(u)\right| \\ &= 2\left\|Df(u)\right\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Df(u)v(u) = Df(u)\sum_{\alpha\in I}\phi_\alpha(u)w(u_\alpha) &= \sum_{j=1}^{n}\phi_{\alpha_j}(u)Df(u)w(u_{\alpha_j}) \\ > \left\|Df(u)\right\|^2\sum_{j=1}^{n}\phi_{\alpha_j}(u) &= \left\|Df(u)\right\|^2.\end{aligned}$$

Siis kun on annettu Banach-avaruus B ja funktio $f \in C^1(B)$, on lokaalisti Lipschitz-jatkuva funktio $v : \widetilde{B} \to B$, jolle pätee

$$\|v(u)\| < 2\left\|Df(u)\right\|, \ Df(u)[v(u)] > \left\|Df(u)\right\|^2.$$

Siten kuvaus v on funktion f pseudogradienttikenttä avaruudessa B. $\square$

4.3. Vuoristosolalauseen todistuksen viimeistely. Kuten aiemmin todettiin, uusi vaikeus siirryttäessä Hilbertin avaruuden vuoristosolalauseesta Banachin avaruuden vastaavaan oli, että derivaattakuvauksia $Df(u)$ ei voi samaistaa avaruuden vektoriksi. Ongelmaan haettiin ratkaisua määrittelemällä käsite pseudogradientti ja osoittamalla, että Banachin avaruuden C^1-funktiolla on aina pseudogradienttikenttä. Pseudogradientin avulla voidaan todistaa vuoristosolalauseen kolmas versio matkimalla suoraan deformaatiolemmaa 1.14. Korvataan vain kuvauksessa V esiintyvä Hilbertin avaruuden gradientti $Df(u)$ pseudogradientilla v. Muuten kaikki päättelyvaiheet ovat identtiset, kiitos pseudogradientin määritelmän.

Vuoristosolalauseen kolmannen version todistus. Oletetaan funktion f toteuttavan $(PS)_c$-ehdon, mutta $K_c = \emptyset$. Olkoot luvut ϵ, α ja δ sekä joukot A, B ja funktiot g ja h kuten deformaatiolemmassa 18. Olkoon v funktion f pseudogradienttikenttä. Tällöin kuvaus $V : B \to B$,

$$V(u) = -g(u)h(\|Df(u)\|)v(u),$$

on globaalisti rajoitettu, sillä $\|v(u)\| < 2\|Df(u)\|$. Kuvaus V on myös jatkuva kaikkialla ja Lipschitz-jatkuva rajoitetuissa joukoissa. Olkoon $\eta : [0,1] \times B \to B$ Cauchyn ongelman

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt}(t) = V(\eta(t)) \\ \eta(0) = u \end{cases}$$

globaali ratkaisu. Kuten deformaatiolemmassa 18, nytkin nähdään, että $\eta(0,u) = u$ kaikilla $u \in B$ ja $\eta(1,u') = u'$ kun $u' \notin f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$. Pseudogradientin määritelmän nojalla on

$$Df(u)\,[v(u)] > \|Df(u)\|^2,$$

joten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\eta(t,u)) &= Df(\eta(t,u))\,[V(\eta(t,u))] \\ &= -g(\eta(t,u))h(\|Df(u)\|)Df(\eta(t,u))\,[v(\eta(t,u))] \\ &< -g(\eta(t,u))h(\|Df(\eta(t,u))\|)\,\|Df(\eta(t,u))\|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Aivan vastaavasti kuin deformaatiolemmassa 18, nähdään että vektoreille $u \in A_{c+\delta}$ on

$$\eta(1,u) \in A_{c-\delta}.$$

Olkoon $\gamma \in \Gamma$ sellainen, että

$$\max_{t \in [0,1]} f(\gamma(t)) \leq c + \delta.$$

Koska η on avaruuden B jatkuva muunnos, $\eta(1,\gamma) \in \Gamma$ mutta

$$\max_{t \in [0,1]} f(\eta(1,\gamma(t))) \leq c - \delta,$$

mikä on ristiriita. Siis $K_c \neq \emptyset$. $\square$

4.4. Yhteenvetoa. Luvun päälause, eli vuoristosolalauseen Banach-avaruuden versio on saatu todistettua, ja seuraavassa luvussa nähdään, että tällä lauseella on yllättäviä sovelluksia p-Laplace reuna-arvo-ongelmien olemassaolotarkasteluissa. Kun jatkossa käytetään vain vuoristosolalauseen yleisintä versiota, voi kysyä, oliko välttämätöntä todistaa lainkaan vuoristosolalauseen euklidista ja Hilbertin avaruuden versiota. Tutkielmassa vuoristosolalausetta ei kuitenkaan haluta käsitellä vain hyödyllisenä työkaluna sovelluksia ajatellen, vaan myös itsessään kiinnostavana lauseena, jonka luonnetta halutaan ymmärtää. Heikompien versioiden todistaminen on perusteltua, koska abstraktin yleisen version ymmärtäminen ilman sopivaa johdattelua on työlästä.

Vaikka seuraavassa luvussa tarvitaan vain vuoristosolalauseen Banach-avaruuden versiota, mainitaan luvun lopuksi, että tätäkin versiota voi yleistää monin tavoin. Ehkä tunnetuin yleistys on linkkilause (tekijän suomennos; englanniksi linking theorem). Linkkilauseessa on annettu Banach-avaruuden B suljettu osajoukko C ja alimonisto S, jolla on reuna ∂S. Sanotaan, että joukot C ja ∂S *linkittyvät*, mikäli $C \cap \partial S \neq \emptyset$ ja kaikille kuvauksille $h \in C(B; B)$, joille pätee $h|_{\partial S} = \mathrm{id}$ on $h(S) \cap C \neq \emptyset$. Linkkilause sanoo, että mikäli funktio $I \in C^1(B)$ toteuttaa Palais-Smalen ehdon, joukot C ja ∂S linkittyvät ja pätee

$$\inf_{u \in C} I(u) > \sup_{u \in \partial S} I(u),$$

niin funktiolla I on kriittinen taso β, missä

$$\beta = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in S} I(h(u))$$

ja

$$\Gamma = \{h \in C(B; B) \ : \ h|_{\partial S} = \mathrm{id}\}.$$

Selvästi linkkilause on vuoristosolalauseen yleistys − mikäli vuoristosolalauseen oletukset pätevät, voidaan valita $C = \{u \in B \ : \ \|u\| = \rho\}$ ja $S = [0, e] \subset B$.

Linkkilauseesta voi lukea esimerkiksi kirjoista **[17]** ja **[24]**. Rabinowitzin kirjassa **[17]** on lukuisia muitakin vuoristosolalauseen yleistyksiä, joita voi soveltaa esimerkiksi tutkittaessa, onko Hamiltonin differentiaaliyhtälösysteemillä periodisia ratkaisuja.

LUKU 2

Sovellus

Luvussa tutkitaan seuraavaa ongelmaa: Millaiset ehdot annetulle funktiolle f on asetettava, jotta voidaan osoittaa, että reuna-arvo-ongelmalla

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = f(x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

on epätriviaali heikko ratkaisu?

Osoittautuu, että vuoristosolalausetta voidaan tietyissä tapauksissa käyttää ongelman (3) ratkaisemiseen. Ideana on, että voidaan asettaa Banach-avaruudessa määritelty reaaliarvoinen funktio I, jonka kriittisiä pisteitä ovat täsmälleen ongelman (3) heikot ratkaisut.

Luvun ensimmäisessä kappaleessa selvitetään lähtökohdat: mitä ongelmalla (3) tarkoitetaan ja miksi vuoristosolalause liittyy siihen. Seuraavissa kappaleissa todistetaan, että mikäli reuna-arvo-ongelmassa annettu funktio f toteuttaa tietyt ehdot, funktio I toteuttaa vuoristosolalauseen ehdot. Lopputuloksena saadaan luvun päälause.

1. p-Laplace reuna-arvo-ongelman esittelyä

Ongelma (3) kuuluu osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teoriaan. Osittaisdifferentiaaliyhtälöksi sanotaan sellaista differentiaaliyhtälöä, joka sisältää usean muuttujan funktioiden osittaisderivaattoja. Ongelmassa (3) on annettu funktio $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä joukko $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, rajoitettu ja reunaltaan sileä. Tästä lähtien joukolla Ω on aina nämä ominaisuudet. Ongelmassa halutaan löytää funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa reuna-arvo-ongelman.

MÄÄRITELMÄ 2.1. Olkoon $v \in C^2(\Omega)$. Operaattoria Δ,

$$\Delta v = \operatorname{div}(\nabla v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,,$$

sanotaan *Laplacen operaattoriksi* ja operaattoria Δ_p , $1 < p < \infty$,

$$\Delta_p v = \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\, \nabla v\right),$$

sanotaan *p-Laplacen operaattoriksi.*

Huomataan, että p-Laplacen operaattori on Laplacen operaattorin yleistys: $\Delta v = \Delta_2 v$.

Jotta p-Laplacen operaattoriin saataisiin tuntumaa, lasketaan $\Delta_p v$ hieman toiseen muotoon. Ensinnäkin

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla v|^{p-2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \\ &= (p-2)\,|\nabla v|^{p-4}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j},\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}\Delta_p v &= \operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2}\,\nabla v\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla v|^{p-2}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\ &= |\nabla v|^{p-4}\left(|\nabla v|^2\,\Delta v + (p-2)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right).\end{aligned}$$

Funktio v on ongelman (3) *klassinen ratkaisu*, jos $v \in C^2(\Omega)$ ja funktio v toteuttaa yhtälön (3). 1900-luvun alkupuolella havaittiin, että $C^k(\Omega)$-funktioiden avaruudet varustettuna sopivalla normilla eivät ole tyydyttäviä työympäristöjä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden tutkimiseen. Vaikeuksia tuottaa esimerkiksi se, että L^p-integroituvien C^1-funktioiden avaruus varustettuna $\|\cdot\|_{1,p}$-normilla ei ole Banach-avaruus.

1.1. Sobolev-avaruudet.

Oletetaan Lebesguen mittateorian alkeet tunnetuiksi. Ne on esitetty esimerkiksi kirjassa [**19**].

Määritelmä 2.2. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Asetetaan

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \ : \ f \text{ on mitallinen ja } \int_\Omega |f|^p\,dx < \infty \right\},$$

missä $L^p(\Omega)$-avaruus on varustettu normilla

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Oikeasti L^p-avaruuden alkiot ovat ekvivalenssiluokkia, joihin kuuluvat kaikki funktiot, jotka ovat samoja melkein kaikkialla. Käytännössä L^p-avaruutta kannattaa kuitenkin ajatella funktioavaruutena.

Funktionaalianalyysin keskeisiä lähtökohtia on, että L^p-avaruudet ovat Banach-avaruuksia. Hölderin epäyhtälöstä seuraava Minkowskin epäyhtälö takaa, että $\|\cdot\|_p$ on normi, ja L^p-avaruuden täydellisyys on helpointa todeta osoittamalla, että avaruuden kaikki itseisesti suppenevat sarjat suppenevat. Yksityiskohdat on esitetty kirjassa [**19**].

$L^p(\Omega)$-integroituville C^1-funktioille on usein hyödyllistä määritellä $\|\cdot\|_{1,p}$-normi, joka ottaa huomioon sekä funktion koon että säännöllisyyden. Oletetaan, että funktiolle $f \in C^1(\Omega)$ pätee

$$\|f\|_p < \infty, \ \|\nabla f\|_p < \infty.$$

Asetetaan tällöin

$$\|f\|_{1,p} := \|f\|_p + \|\nabla f\|_p\,.$$

Kirjassa **[11]** näytetään, että $\|\cdot\|_{1,p}$ on normi avaruudessa $C^1(\Omega)$. Normiavaruus $(C^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ ei kuitenkaan ole täydellinen. Jos esimerkiksi $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$, niin funktio $u : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{kun } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{kun } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

kuuluu avaruuden $(C^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,1})$ täydentymään. (Katso esimerkiksi **[11]**, sivu 257.) Hedelmälliseksi osoittautuu tarkastella sileiden funktioiden avaruuden täydentymää.

MÄÄRITELMÄ 2.3. Oletetaan, että $1 \leq p < \infty$. Olkoon $H^{1,p}(\Omega)$ avaruuden

$$\left\{u \in C^1(\Omega) \ : \ \|u\|_{1,p} < \infty\right\}$$

täydentymä normin $\|\cdot\|_{1,p}$ mielessä. Sanotaan, että avaruus $H^{1,p}(\Omega)$ on *Sobolev-avaruus.*

Sobolev-avaruuksia voi lähestyä myös toisesta näkökulmasta, heikkojen derivaattojen avulla. Mainitaan ensin, että avaruuteen $C_0^\infty(\Omega)$ kuuluvat kaikki sellaiset funktiot $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, joilla on kompakti kantaja, eli joukon

$$\{x \in \Omega \ : \ \varphi(x) \neq 0\}$$

sulkeuma on kompakti ja sisältyy joukkoon Ω. Avaruuteen $C_0^\infty(\Omega)$ kuuluvia funktioita sanotaan Sobolev-avaruuksien teoriassa *testifunktioiksi.* Nimi johtuu siitä, että funktioiden $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ avulla voidaan usein testata, toteuttaako jokin vähemmän säännöllinen funktio jonkin ominaisuuden. Esimerkiksi eräs variaatiolaskennan tärkeimmistä alkeistuloksista sanoo, että mikäli funktiolle $f \in L^1(\Omega)$ pätee

$$\int_\Omega f\varphi dx = 0 \text{ kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

niin $f = 0$ Lebesguen mielessä.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Olkoon $f \in L^1(\Omega)$. Sanotaan, että funktio $g_i \in L^1(\Omega)$ on funktion f *heikko derivaatta koordinaatin x_i suhteen avaruudessa* Ω, mikäli pätee

$$\int_\Omega f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega g_i\varphi dx \text{ kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Edellä mainitun variaatiolaskennan tuloksen avulla on helppo nähdä, että heikot derivaatat määräytyvät yksikäsitteisesti melkein kaikkialla. Jos nimittäin sekä g_i että h_i ovat funktion $f \in L^1(\Omega)$ heikkoja derivaattoja koordinaatin x_i suhteen, pätee

$$\int_\Omega (g_i - h_i)\varphi dx = 0 \text{ kaikilla } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Mikäli funktiolle f kaikki heikot osittaisderivaatat g_i, $i \in \{1, ..., n\}$, ovat olemassa, voidaan asettaa

$$\nabla f := (g_1, ..., g_n).$$

Määritelmä 2.5. Avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ koostuu kaikista funktioista $f \in L^p(\Omega)$, joille kaikki heikot osittaisderivaatat ovat olemassa ja kuuluvat avaruuteen $L^p(\Omega)$. Avaruutta $W^{1,p}(\Omega)$ varustettuna $\|\cdot\|_{1,p}$-normilla sanotaan *Sobolev-avaruudeksi.*

Artikkelissa [**15**] todistetaan, että

$$H^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega).$$

Tämä yhtäpitävyys on mieluisa. Määriteltäessä Sobolev-avaruus heikkojen derivaattojen avulla saadaan usein helposti ja konkreettisesti osoitettua, kuuluuko tarkasteltava funktio Sobolev-avaruuteen. Kun taas määritellään Sobolev-avaruus sileiden funktioiden avaruuden täydentymänä, saadaan motivaatiota Sobolev-avaruuksien käytölle − käytössä on Banach-avaruuksia koskevat tulokset, tämän luvun kannalta erityisesti vuoristosolalause!

Määritellään vielä sellaisten Sobolev-funktioiden avaruus, jotka häviävät alueen Ω reunalla. Tämä avaruus on sopiva työympäristö, kun halutaan tutkia reuna-arvo-ongelman heikkoja ratkaisuja.

Määritelmä 2.6. Avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ on joukon $C_0^\infty(\Omega)$ sulkeuma avaruudessa $L^p(\Omega)$ normin $\|\cdot\|_{1,p}$ suhteen.

Sobolev-avaruuden normi voidaan asettaa monella ekvivalentilla tavalla. Poincarén epäyhtälöstä (katso [**11**]) seuraa, että aiemmin määritellyn $\|\cdot\|_{1,p}$-normin kannalta ekvivalentti normi avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$ on

$$\|f\|_{1,p} = \|\nabla f\|_p \,.$$

Jatkossa Sobolev-avaruudessa käytetään tätä normia.

Myöhemmin tässä luvussa tarvitaan tietoa, että avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ uppoaa kompaktisti avaruuteen $L^q(\Omega)$, missä $1 \leq q < p^*$, ja p^* on Sobolev-eksponentti. Lausetta varten tarvitaan käsite heikko suppeneminen. Muistutetaan, että mikäli B on Banach-avaruus, niin avaruus B^* koostuu kaikista rajoitetuista lineaarikuvauksista $B \to \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.7. Olkoon B Banach-avaruus ja $(u_n) \subset B$ jono. Sanotaan, että jono (u_n) suppenee heikosti kohti alkiota $u \in B$, jos

$$Tu_n \to Tu \text{ kaikilla } T \in B^*.$$

Tällöin merkitään $u_n \rightharpoonup u$.

Suppeneminen $Tu_n \to Tu$ on siis reaalilukujen suppenemista. Huomataan, että mikäli $u_n \to u$ avaruudessa B, pätee myös $u_n \rightharpoonup u$, sillä avaruuden B^* alkiot ovat jatkuvia. Suppeneminen on siis vahvempi ominaisuus kuin heikko suppeneminen, mikä ei tule suurena yllätyksenä. Toisaalta ei ole vaikea nähdä, että äärellisulotteisissa Banach-avaruuksissa, esimerkiksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$, suppeneminen ja heikko suppeneminen ovat yksi ja sama asia.

Kuten koko luvussa, seuraavassa lauseessa luku n on joukon Ω sisältävän avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio.

MÄÄRITELMÄ 2.8. Asetetaan

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-p} & \text{kun } p < n \\ \infty & \text{kun } p \geq n \end{cases}$$

ja sanotaan, että p^* on Sobolev-eksponentti.

Sobolev-avaruuksien teoriassa käy useassa yhteydessä ilmi, että avaruuteen $W_0^{1,p}(\Omega)$ kuuluvat funktiot käyttäytyvät säännöllisemmin kun $p \geq n$ verrattuna tilanteeseen, jossa $p < n$. Sobolev-eksponentti ilmentää tätä tilannetta, kuten seuraavassa lauseessa nähdään.

LAUSE 2.9. *Olkoon* (u_n) *avaruuden* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *rajoitettu jono ja* $1 \leq q < p^*$. *Tällöin on sellainen osajono* $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ *ja* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *että* $u_{n_k} \rightharpoonup u$ *avaruudessa* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *ja* $u_{n_k} \to u$ *avaruudessa* $L^q(\Omega)$.

Edeltävää lausetta sanotaan Rellich-Kondrachovin lauseeksi. Miksi sitä sanotaan kompaktiustulokseksi? Havainnollistetaan tilannetta valitsemalla avaruudesta $L^q(\Omega)$ suljettu ja rajoitettu osajoukko A. Koska avaruus $L^q(\Omega)$ on ääretönulotteinen, joukko A ei todennäköisesti ole kompakti. Jos kuitenkin $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ on rajoitettu avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$ ja $(u_n) \subset A$, niin jonolla (u_n) on osajono (u_{n_k}), joka suppenee joukossa A (tietenkin normin $\|\cdot\|_q$ suhteen). Tästä syystä sanotaan, että avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ uppoaa kompaktisti avaruuteen $L^q(\Omega)$. Kun muistetaan, kuinka paljon ongelmia ensimmäisessä luvussa aiheutti kompaktiuden harvinaisuus ääretönulotteisissa normiavaruuksissa, on helppo uskoa, että Rellich-Kondrachovin lause on oiva työkalu.

Rellich-Kondrachovin lauseen pohjana on Arzelá-Ascolin lause, joka on eräänlainen ääretönulotteinen vastine Bolzano-Weierstrassin lauseelle. Arzelá-Ascolin lause sanoo, että mikäli kompaktissa metrisessä avaruudessa on määritelty pisteittäin rajoitettu, yhtäjatkuva, reaaliarvoinen funktiojono, niin tällä funktiojonolla on osajono, joka suppenee tasaisesti koko määrittelyavaruudessa. Lauseen todistus ei ole kovin vaikea – huomataan ensin, että kompakti metrinen avaruus on separoituva, ja konstruoidaan Cantorin diagonaalimenetelmällä funktiojonolle sellainen osajono, joka suppenee pisteittäin määrittelyavaruuden numeroituvassa, tiheässä osajoukossa. Kolmioepäyhtälön avulla voidaan todeta, että tämä osajono suppenee tasaisesti määrittelyavaruudessa. Yksityiskohdat ovat esimerkiksi kirjassa [**21**].

Rellich-Kondrachovin lause seuraa Arzelá-Ascolin lauseesta. Ideana on silottaa funktiot u_j ja osoittaa, että silotettujen funktioiden jono toteuttaa Arzelá-Ascolin lauseen ehtoja. Lauseen todistus on kirjassa [**11**].

1.2. Heikot ratkaisut. Kerrotaan ongelmassa (3) esiintyvä yhtälö

$$-\Delta_p u = f(x, u)$$

puolittain testifunktiolla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ja integroidaan puolittain, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_\Omega -\Delta_p u(x)\ \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x, u(x))\varphi(x) dx.$$

Kun edellisen yhtälön vasen puoli osittaisintegroidaan ja muistetaan, että testifunktio häviää alueen Ω reunalla, saadaan yhtälö

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\, \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = \int_\Omega f(x, u(x)\varphi(x) dx. \tag{4}$$

Edellä merkintä $\nabla u(x) \nabla \varphi(x)$ tarkoittaa tietenkin vektoreiden $\nabla u(x)$ ja $\nabla u(x)$ sisätuloa. Myös myöhemmin tässä luvussa käytetään notaation keventämiseksi vektoreiden $a, b \in \mathbb{R}^n$ sisätulolle merkintää ab.

MÄÄRITELMÄ 2.10. Jos funktio $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ toteuttaa yhtälön (4) kaikilla testifunktioilla $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, sanotaan, että funktio u on ongelman (3) *heikko ratkaisu.*

Ongelmassa (3) on osoitettava, että kyseisellä reuna-arvo-ongelmalla on olemassa heikko ratkaisu, jonka $\|\cdot\|_{1,p}$-normi ei ole nolla. Tällaista heikkoa ratkaisua kutsutaan epätriviaaliksi.

Huomataan, että toisin kuin ongelman (3) klassisen ratkaisun, heikon ratkaisun u ei tarvitse olla C^2-funktio, eikä edes C^1-funktio, vaikka yhtälössä (4) esiintyy termi ∇u. Kyseessä on vain funktion u heikko derivaatta, joka on olemassa, koska vaaditaan, että $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Heikot derivaatat ovat mielekäs yleistys, koska analyysi Banach-avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$ on hedelmällisempää kuin epätäydellisessä normiavaruudessa $C^2(\Omega)$. Tilannetta voi verrata siihen, että yksiulotteista analyysia ei tehdä epätäydellisessä metrisessä avaruudessa $\mathbb{Q}$, vaan sen täydentymässä, avaruudessa $\mathbb{R}$.

1.3. Reuna-arvo-ongelman yhteys vuoristosolalauseeseen. Koska Sobolev-avaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ on Banach-avaruus, vuoristosolalausetta voidaan tietyissä olosuhteissa käyttää reuna-arvo-ongelman (3) ratkaisemiseen. Halutaan osoittaa, että on olemassa funktio $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u\|_{1,p} \neq 0$, joka toteuttaa yhtälön (4) kaikilla testifunktioilla $\varphi \in$

$C_0^\infty(\Omega)$. Jos on funktio $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$, joka toteuttaa vuoristosolalauseen ehdot ja jonka Fréchet-derivaatta pisteessä $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on

$$(5) \quad DI(u)v = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_\Omega f(x, u(x)) v(x) dx$$

kaikilla $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, reuna-arvo-ongelma (3) on vuoristosolalauseen nojalla ratkaistu. Käy ilmi, että jos annettu funktio f toteuttaa neljä myöhemmin annettavaa ehtoa, vuoristosolausetta voidaan käyttää reuna-arvo-ongelman ratkaisemiseen.

2. Funktion I Fréchet-derivoituvuus

Jotta reuna-arvo-ongelma (3) olisi mielekäs, annetulta funktiolta f on vaadittava tietynlaista säännöllisyyttä.

MÄÄRITELMÄ 2.11. Jos funktiolle $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee, että $f(x, t)$ on mitallinen muuttujan x suhteen kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja jatkuva parametrin t suhteen kaikilla $x \in \Omega$, sanotaan että funktio f on *Carathéodory-funktio*.

Vaatimus 1. Reuna-arvo-ongelmassa annettu funktio f on Carathéodory-funktio.

Funktio f saa siis olla melko patologinen muuttujan x suhteen, mutta sen käyttäytyminen muuttujan t suhteen on tiukasti säänneltyä. Jos esimerkiksi $f_1 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in \mathbb{Q}^n \cap \Omega \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

niin funktio f_1 on patologisuudestaan huolimatta Carathéodory-funktio. Sen sijaan säännöllisempi funktio $f_2 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{kun } t \geq 0 \\ 0 & \text{kun } t < 0, \end{cases}$$

ei ole Carathéodory-funktio.

Asetetaan seuraavaksi funktio $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt.$$

Tällöin analyysin peruslauseesta seuraa, että

$$\frac{\partial}{\partial s} F(x, s) = f(x, s) \text{ kaikilla } (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Jotta vuoristosolalauseen reuna-arvo-ongelmaan kytkevä funktio I voitaisiin määritellä, annetulta funktiolta f on vaadittava seuraava kasvuehto.

Vaatimus 2. On sellainen $q \in (1, p^*)$, että

$$|f(x,s)| \leq c(x) + C\,|s|^{q-1}\,, \tag{6}$$

missä $c \in L^{q'}(\Omega)$, ja $C > 0$ on vakio. Tässä, kuten myöhemminkin, luvun q' oletetaan aina olevan luvun q duaalieksponentti $-$ on siis

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Duaalieksponentit esiintyvät esimerkiksi aiemmin mainitussa Hölderin epäyhtälössä, joka sanoo, että jos $u \in L^q(\Omega)$ ja $v \in L^{q'}(\Omega)$, pätee $uv \in L^1(\Omega)$ ja

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_q \, \|v\|_{q'}\,.$$

Hölderin epäyhtälöä käytetään lukuisia kertoja tämän luvun lauseiden todistuksissa.

Kasvuehto (6) toteutuu sitä varmemmin, mitä pienempi funktion koko (L^p-normien mielessä) on muuttujan x suhteen ja mitä hitaammin funktio kasvaa muuttujan s suhteen, erityisesti origon lähellä. Pohditaan hetki, miksi näin on. Koska $L^{p_1}(\Omega)$-avaruus sisältää kaikki avaruudet $L^p(\Omega)$, missä $p \geq p_1$, niin funktion koolle muuttujan x suhteen asetetaan sitä voimakkaampi rajoite, mitä suurempi luku q' on. Luku q' on sitä suurempi, mitä pienempi luku $q > 1$ on. Mikäli funktion kasvu muuttujan s suhteen on nopeaa origon lähellä, luku q on asetettava lähelle ykköstä, jotta $|u|^{q-1}$ kasvaisi riittävän rajusti origon lähellä.

Tietenkään funktion hidas kasvu muuttujan s suhteen origon lähellä ei auta, mikäli funktio kasvaa suuremmilla muuttujan s arvoilla esimerkiksi eksponentiaalisesti.

Havainnollistetaan vaatimusta 2 parilla esimerkillä. Jos $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, niin funktio $f_3 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_3(x,s) = x^{-1/4} + |s|$$

toteuttaa kasvuehdon (6), sillä valitsemalla $q = 2$ pätee

$$|s| = |s|^{q-1}\,, \quad \int_\Omega \left|x^{-1/4}\right|^{q'} dx = 2 < \infty.$$

Jos funktion kasvu muuttujan s suhteen on origon lähellä voimakkaampaa kuin edellä, voi herkästi käydä huonosti. Olkoon $f_4 : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_4(x,s) = x^{-1/4} + |s|^{1/3}\,.$$

Jotta olisi

$$|s|^{1/3} \leq |s|^{q-1} \text{ kaikilla } s \in \mathbb{R},$$

on oltava $q = \frac{4}{3}$. Tällöin $q' = 4$ ja

$$\int_\Omega \left|x^{-1/4}\right|^{q'} dx = \int_\Omega \left|x^{-1}\right| dx = \infty,$$

joten funktio f_4 ei toteuta vaatimusta 2.

Vaatimuksen 2 merkityksen tutkiminen konkreettisissa esimerkkitapauksissa tekee toivottavasti helpommaksi ymmärtää jatkossa esitetttäviä, melko abstrakteja lauseita ja niiden todistuksia. On hieman erikoista, että ainakaan omissa vuoristosolalauseen sovellusta käsittelevissä lähteissäni ei millään tavalla havainnollisteta tai konkretisoida kasvuehtoa (6).

Tehdään sopimus, että aina kun jatkossa esiintyy eksponentti q, sen oletetaan kuuluvan välille $(1, p^*)$ ja olevan sellainen, että funktio f toteuttaa vaatimuksen 2.

Vaatimuksen 2 avulla voidaan osoittaa, että funktiota I varten tarvittava funktio $G : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$G(u) = \int_\Omega F(x, u(x))dx,$$

on hyvin määritelty. Todetaan ensin, että kun $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin funktiolle F pätee

$$\begin{aligned} |F(x, u(x))| &\le \int_0^{|u(x)|} |f(x, s)|\, ds \\ &\le C_1 |u(x)|^q + |u(x)|\, c(x) \\ &= C_1 |u(x)|^q + g(x), \end{aligned} \tag{7}$$

missä $C_1 = C/q > 0$ ja $c \in L^{q'}(\Omega)$. Koska $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin $u \in L^q(\Omega)$. Koska $g = |u|\, c$, niin Hölderin epäyhtälön nojalla pätee $g \in L^1(\Omega)$.

Seuraavan proposition todistus seuraa artikkelin **[8]** todistusta.

Propositio 2.12. *Funktio G on hyvin määritelty.*

Todistus. Käyttämällä kolmioepäyhtälöä ja differentiaalilaskennan väliarvolausetta saadaan

$$\begin{aligned} |F(x, u(x))| &\le |F(x, 0)| + |F(x, u) - F(x, 0)| \\ &\le |F(x, 0)| + \sup_{s \in [0,u]} \left| \frac{\partial}{\partial u} F(x, s) \right| |u| . \end{aligned}$$

Olkoon $c \in L^{q'}(\Omega)$ vaatimukseen 2 liittyvä funktio. Koska

$$\frac{\partial}{\partial u} F(x, s) = f(x, s),$$

vaatimuksen 2 nojalla pätee

$$\begin{aligned} &|F(x, 0)| + \sup_{s \in [0,u]} \left| \frac{\partial}{\partial u} F(x, s) \right| |u| \\ &\le g(x) + (c(x) + C \sup_{s \in [0,u]} |s|^{q-1})\, |u| \\ &\le g(x) + c(x)\, |u| + C\, |u|^q . \end{aligned}$$

Koska $u \in L^q(\Omega)$, Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}|G(u)| &\leq \int_\Omega |F(x,u(x))|\,dx \\ &\leq \|g\|_1 + \|c\|_{q'}\|u\|_q + C_1\|u\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

joten funktio G on hyvin määritelty. □

Viimeinkin voidaan asettaa funktio I, joka liittää vuoristosolalauseen reuna-arvo-ongelmaan. Asetetaan $I : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - G(u).$$

Muistutetaan vielä, että Sobolev-normina on

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

Edellisen proposition nojalla funktio I on hyvin määritelty. Pyritään osoittamaan, että $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ ja

$$DI(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\ dx - \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx$$

kaikilla $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Kiinnitetään seuraavaa lemmaa varten $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja asetetaan lineaarikuvaus $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$Av = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx.$$

Lineaarikuvaus A on hyvin määritelty, sillä kaikilla $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pätee

$$\begin{aligned}|Av| &\leq \|f(x,u)\|_{q'}\|v\|_q \\ &\leq \left(\|c\|_{q'} + C\left\|u^{q-1}\right\|_{q'}\right)\|v\|_p < \infty.\end{aligned}$$

Edellä $\|u^{q-1}\|_{q'} < \infty$, sillä $(q-1)q' = q$. Seuraavan proposition todistuksen alkupuolella on käytetty ideoita artikkelista [**8**].

Propositio 2.13. *Funktiolle G pätee $G \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ ja*

$$DG(u)v = Av \text{ kaikilla } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että funktio G on Fréchet-derivoituva ja $DG(u)v = Av$. On näytettävä, että

$$\lim_{\|h\|_{1,p}\to 0} \frac{|G(u+h) - G(u) - Ah|}{\|h\|_{1,p}} = 0. \tag{8}$$

Jos

$$\lim_{\|h\|_q\to 0} \frac{|G(u+h) - G(u) - Ah|}{\|h\|_q} = 0, \tag{9}$$

niin Poincarén epäyhtälön nojalla yhtälö (8) pätee.

Huomataan, että mikäli jokaisella jonolla $(h_n) \subset L^q(\Omega)$, $\|h_n\|_q \to 0$, on osajono (h_{n_k}), jolle pätee

$$\frac{|G(u+h_{n_k}) - G(u) - Ah_{n_k}|}{\|h_{n_k}\|_q} \to 0,$$

niin yhtälö (9) pätee. Tunnettu tulos L^p-avaruuksien teoriasta sanoo, että mikäli on jono $(h_n) \subset L^q(\Omega)$, jolle pätee $\|h_n\|_q \to 0$, niin on osajono (h_{n_k}) ja funktio $g \in L^q(\Omega)$ siten että

$$|(h_{n_k}(x))| \leq g(x) \text{ melkein kaikkialla joukossa } \Omega.$$

Voidaan esimerkiksi valita sellainen osajono (h_{n_k}), että

$$\|(h_{n_k})\|_q < (1/2)^{-k/q},$$

ja asettaa

$$g(x) = \sum |(h_{n_k}(x))|\,.$$

Osoitetaan yhtälö (9) todeksi käyttämällä funktion f kasvuehtoa (6), tietoa, että funktio F on osittaisderivoituva muuttujan u suhteen, ja Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta. Merkitään selkeyden vuoksi

$$\Theta = \begin{cases} \frac{F(x,u(x)+h_{n_k}(x)) - F(x,u(x)) - \frac{\partial}{\partial u}F(x,u(x))h_{n_k}(x)}{h_{n_k}(x)}, & \text{kun } h_{n_k}(x) \neq 0 \\ 0, & \text{kun } h_{n_k}(x) = 0, \end{cases}$$

jolloin

$$|G(u+h_{n_k}) - G(u) - Ah_{n_k}| \leq \int_\Omega |\Theta|\,|h_{n_k}(x)|\,dx \leq \|\Theta\|_{q'}\,\|h\|_q\,.$$

Koska funktio F on osittaisderivoituva muuttujan u suhteen, pätee

$$\Theta \to 0 \text{ kun } \|h_{n_k}\|_q \to 0.$$

Yhtälö (9) pätee, mikäli on

$$\|\Theta\|_{q'} \to 0 \text{ kun } \|h_{n_k}\|_q \to 0.$$

Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla riittää löytää L^1-funktio, joka dominoi funktiota $|\Theta|^{q'}$. Käyttämällä ensin differentiaalilaskennan väliarvolausetta, sitten kasvuehtoa (6) ja epäyhtälöä

$$(a+b)^p \leq 2^p a^p + 2^p b^p$$

saadaan

$$\begin{aligned} |\Theta| &\leq \left|\frac{\partial}{\partial u}F(x,u(x))\right| + \sup_{\varphi(x)\in\left[u(x),u(x)+h_{n_k}(x)\right]} \left|\frac{\partial}{\partial u}F(x,\varphi(x))\right| \\ &\leq 2c(x) + C_1\left(|u(x)| + |h_{n_k}(x)|\right)^{q-1} + C_1\,|u(x)|^{q-1} \\ &\leq 2c(x) + C_1\left(2^q+1\right)|u(x)|^{q-1} + C_1 2^q g(x)^{q-1}. \end{aligned}$$

Siis

$$|\Theta|^{q'} \leq 3^{q'}(2^{q'}c(x)^{q'} + C_1^{q'}\left(2^q+1\right)^{q'}|u(x)|^q + C_1^{q'}2^{qq'}g(x)^q) =: e(x)$$

ja $e \in L^1(\Omega)$, joten pätee

$$\|\Theta\|_{q'} \to 0 \text{ kun } \|h_{n_k}\|_q \to 0$$

ja siten

$$\lim_{\|h\|_q \to 0} \frac{|G(u+h) - G(u) - Ah|}{\|h\|_q} = 0.$$

Osoitetaan vielä, että funktio G on jatkuvasti derivoituva. Muistetaan, että funktio f on Carathéodory-funktiona jatkuva muuttujan u suhteen. Käyttämällä Hölderin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \|DG(u + h_{n_k}) - DG(u)\| \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \sup_{\|v\|_{1,p} \leq 1} \int_\Omega |f(x, u(x) + h_{n_k}(x)) - f(x, u(x))| \, |v(x)| \, dx \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \left(\int_\Omega |f(x, u(x) + h_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^{q'} \, dx \right)^{\frac{1}{q'}} \cdot D,
\end{aligned}$$

missä $D > 0$ on sellainen luku, että

$$\sup_{\|v\|_{1,p} \leq 1} \|v\|_q \leq D.$$

Osoitetaan dominoidun konvergenssin lauseen avulla, että

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_\Omega |f(x, u(x) + h_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^{q'} \, dx \right)^{\frac{1}{q'}} = 0.$$

Käyttämällä vaatimuksen 2 kasvuehtoa voidaan arvioida, että

$$\begin{aligned}
&|f(x, u(x) + h_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^{q'} \\
&\leq (|f(x, u(x) + h_{n_k}(x))| + |f(x, u(x))|)^{q'} \\
&\leq 2^{q'} \left| c(x) + C \, |u(x) + h_{n_k}(x)|^{q-1} \right|^{q'} + 2^{q'} \left| c(x) + C \, |u(x)|^{q-1} \right|^{q'} \\
&\leq 2^{q'} (2^{q'} \, |c(x)|^{q'} + 2^{q'} C^{q'} \, |u(x) + h_{n_k}(x)|^q + 2^{q'} \, |c(x)|^{q'} + C^{q'} \, |u(x)|^q) \\
&\leq \alpha(x),
\end{aligned}$$

missä $\alpha \in L^1(\Omega)$. Tällainen funktio α on olemassa, sillä

$$|u(x) + h_{n_k}(x)|^q \leq 2^q (|u(x)|^q + |h_{n_k}(x)|^q),$$

ja aiemmin on todettu, että funktio $g \in L^q(\Omega)$ dominoi funktioita h_{n_k}.

Nyt dominoidun konvergenssin lauseen nojalla pätee

$$\lim_{k\to\infty} \left(\int_\Omega |f(x, u(x) + h_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^{q'} \, dx \right)^{\frac{1}{q'}} = 0,$$

joten

$$\limsup_{k\to\infty} \|DG(u + h_{n_k}) - DG(u)\| = 0.$$

On siis oltava myös

$$\liminf_{k\to\infty} \|DG(u+h_{n_k}) - DG(u)\| = 0$$

ja siten

$$\lim_{k\to\infty} \|DG(u+h_{n_k}) - DG(u)\| = 0. \tag{10}$$

Siis mielivaltaisella jonolla $(h_n) \subset L^q(\Omega)$, $\|h_n\|_q \to 0$, on osajono (h_{n_k}), jolle yhtälö (10) pätee. Siis on

$$\lim_{\|h\|_q\to 0} \|DG(u+h) - DG(u)\| = 0,$$

joten Poincarén epäyhtälön nojalla

$$\lim_{\|h\|_{1,p}\to 0} \|DG(u+h) - DG(u)\| = 0,$$

ja siten funktio G on jatkuvasti derivoituva. $\square$

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $E : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$E(u) = \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p.$$

Pyritään osoittamaan, että $E \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ ja

$$DE(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \text{ kaikilla } u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{11}$$

Yllättäen kahden edellisen proposition todistusideoista on hyötyä tämän näyttämisessä. Osoitettiin, että funktio $G : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$G(u) = \int_\Omega F(x, u(x))dx,$$

on jatkuvasti derivoituva ja

$$DG(u)v = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial u} F(x, u(x))v(x)dx.$$

Mitä ominaisuuksia funktiolta $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vaadittiin, jotta edelliset tulokset oli mahdollista todistaa? Tietenkin piti olla varma, että funktio F todella on osittaisderivoituva muuttujan u suhteen, ja lisäksi tarvittiin funktiota F koskeva kasvuehto (7). Todistusten kannalta ei kuitenkaan ollut välttämätöntä, että funktion F määrittelyjoukko on juuri $\Omega \times \mathbb{R}$ – yhtä hyvin määrittelyjoukkona olisi voinut olla $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Lisäksi edellinen todistus olisi ollut hyvin samanlainen, jos funktion G määrittelyjoukko olisi avaruuden $W_0^{1,p}(\Omega)$ sijaan ollut avaruus $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Oltaisiin siis voitu yhtä hyvin olettaa, että funktion G määrittelyjoukko koostuu $L^p(\Omega)$-integroituvista funktioista $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ja funktion F määrittelyjoukko on $\Omega \times \mathbb{R}^n$, ja osoittaa, että funktio G on hyvin määritelty ja $C^1(L^p(\Omega; \mathbb{R}^n))$-funktio.

Edeltävä pohdinta mahdollistaa ketjusäännön hyödyntämisen osoitettaessa, että $E \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$. Funktio E voidaan ajatella yhdistettynä kuvauksena

$$W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto \nabla u \mapsto \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p .$$

On tärkeää muistaa, että Sobolev-avaruuden määritelmän mukaan heikot derivaatat ovat paitsi olemassa, myös $L^p(\Omega)$-funktioita. Siis

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

ja siten ketjukuvaus on ainakin määritelty.

Seuraavan proposition todistuksessa on käytetty ideoita artikkelista [**8**].

PROPOSITIO 2.14. *Funktiolle E on $E \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ ja lisäksi yhtälö* (11) *pätee.*

TODISTUS. Asetetaan funktio $e : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$e(x, u) = \frac{1}{p} |u|^p .$$

Koska $p > 1$, funktio $\frac{\partial}{\partial u} e(x, u)$ on määritelty kaikilla $(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, $\frac{\partial}{\partial u} e(x, u)v = |u|^{p-2} uv$, ja $\left|\frac{\partial}{\partial u} e(x, u)\right| = |u|^{p-1}$. Toistamalla kahden edellisen proposition päättelyä voidaan nähdä, että funktio $E_1 : L^p(\Omega; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$,

$$E_1(u) = \int_\Omega e(x, u(x))dx$$

on hyvin määritelty, $E_1 \in C^1(L^p(\Omega; \mathbb{R}^n))$ ja

$$DE_1(u)v = \int_\Omega |u|^{p-2} uv \text{ kaikilla } u, v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Huomataan, että funktio E voidaan esittää yhdistettynä funktiona $E_1 \circ E_2$, missä $E_2 : (W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $E_2(u) = \nabla u$. Koska funktio E_2 on lineaarikuvaus, se on tietenkin jatkuvasti derivoituva ja pätee

$$DE_2(u)v = \nabla v \text{ kaikilla } u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Kuten ensimmäisen luvun pykälässä 2.2 todettiin, ketjusääntö pätee Fréchet-derivaatalle. Siten $E \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ ja pätee

$$\begin{aligned} DE(u)v &= DE_1(E_2(u))DE_2(u)v \\ &= DE_1(\nabla u)\nabla v \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \text{ kaikilla } u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

□

Kokoamalla tulokset yhteen voidaan ottaa ensimmäinen askel kohti luvun päälausetta, joka yhdistää vuoristosolauseen p-Laplace reuna-arvo-ongelmaan.

LEMMA 2.15. *Funktiolle I pätee $I \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ ja*

$$DI(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx$$

kaikilla $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

TODISTUS. Lemma seuraa kolmesta edellisestä propositioista. □

Seuraavassa kappaleessa tavoitteena on osoittaa, että funktio I toteuttaa vuoristosolalauseen ehdot. Olisi toivottavaa, että reuna-arvo-ongelmassa annettavalta funktiolta f edellytettävät vaatimukset 1 ja 2 riittäisivät, mutta valitettavasti funktiolle f on asetettava vielä kaksi lisäehtoa, joista toisen merkitys on melko hankala hahmottaa. Tähän asti on totuttu vain käyttämään Palais-Smalen ehtoa ja muita vuoristosolalauseessa vaadittavia ehtoja. On mielenkiintoista siirtyä tutkimaan, millaista on osoittaa, että jokin funktio toteuttaa nämä ehdot. Käy ilmi, että tämä on huomattavasti teknisempää ja analyyttisempää kuin vuoristosolaehtojen käyttö, joka on luonteeltaan vahvan geometrista.

3. Vuoristosolaehdot funktiolle I

3.1. Palais-Smalen ehto funktiolle I. Todistettaessa, että funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon, tarvitaan Rellich-Kondrachovin lausetta sekä kohta esitettävää propositiota 2.16, joka on usein käyttökelpoinen tutkittaessa p-Laplace operaattoria. Proposition 2.16 todistusta varten tarvitaan seuraavia epäyhtälöitä, jotka on esitetty artikkelissa **[13]**. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}^n$. Pätee

$$\left(|b|^{p-2} b - |a|^{p-2} a\right)(b-a) \geq 2^{2-p} |b-a|^p \tag{12}$$

kun $p \geq 2$, ja

$$\left(|b|^{p-2} b - |a|^{p-2} a\right)(b-a) \geq (p-1)\frac{|b-a|^2}{(1+|a|^2+|b|^2)^{(2-p)/2}} \tag{13}$$

kun $1 \leq p \leq 2$.

Seuraavan proposition todistuksessa ei ole käytetty muita kirjallisuustietoja kuin epäyhtälöitä (12) ja (13).

PROPOSITIO 2.16. *Mikäli on jono $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ ja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ siten että $u_n \rightharpoonup u$, ja pätee*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla (u_n - u) \to 0$$

kun $n \to \infty$, niin $u_n \to u$ avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$.

TODISTUS. Huomataan, että kun alkio $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on kiinnitetty, niin kuvaus $T : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$T(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v,$$

on lineaarikuvaus. Lisäksi se on jatkuva, sillä

$$\begin{aligned}
|Tv| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u| \, |\nabla v| \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p'(p-1)} \right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \right)^{1/p} \\
&= \|u\|^{p/p'} \|v\| < \infty.
\end{aligned}$$

Siis lineaarikuvaus T kuuluu Sobolev-avaruuden $W_0^{1,p}(\Omega)$ duaaliavaruuteen, ja koska $u_n \rightharpoonup u$, on

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla (u_n - u) \to 0.$$

Kun otetaan huomioon myös oletus, saadaan

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \nabla (u_n - u) \to 0.$$

Oletetaan ensin, että $p \geq 2$. Tällöin epäyhtälön (12) nojalla pätee

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_n|^p \\
&\leq 2^{p-2} \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n) \nabla (u_n - u) \to 0,
\end{aligned}$$

joten

$$\|u - u_n\|_{1,p} \to 0.$$

Oletetaan seuraavaksi, että $1 \leq p \leq 2$. Tällöin luvut $2/p$ ja $2/(2-p)$ ovat duaalieksponentteja, joten käyttämllä Hölderin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla u - \nabla u_n|^p \\
&= \int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla u_n|^p}{(1 + |\nabla u|^2 + |\nabla u_n|^2)^{\frac{2-p}{2}\frac{p}{2}}} (1 + |\nabla u|^2 + |\nabla u_n|^2)^{\frac{2-p}{2}\frac{p}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u - \nabla u_n|^2}{(1 + |\nabla u|^2 + |\nabla u_n|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (1 + |\nabla u|^2 + |\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2-p}{2}}.
\end{aligned}$$

Koska epäyhtälön (13) nojalla on

$$(p-1)\frac{|\nabla u-\nabla u_n|^2}{(1+|\nabla u|^2+|\nabla u_n|^2)^{\frac{2-p}{2}}} \leq (|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)\nabla(u_n-u),$$

pätee

$$\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u-\nabla u_n|^2}{(1+|\nabla u|^2+|\nabla u_n|^2)^{\frac{2-p}{2}}}\right)^{\frac{p}{2}} \to 0 \text{ kun } n\to\infty.$$

Jos siis pätee

$$\left(\int_\Omega (1+|\nabla u|^2+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2-p}{2}} < \infty,$$

niin $\|u-u_n\|_{1,p}\to 0$. Huomataan, että jos $a,b\geq 0$ ja $p\in\mathbb{R}$, niin

$$(a+b)^p \leq (2\max(a,b))^p = 2^p\max(a,b)^p \leq 2^p(a^p+b^p).$$

On siis

$$\begin{aligned}(1+|\nabla u|^2+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}} &\leq 2^{\frac{p}{2}}(1+|\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}}+2^{\frac{p}{2}}|\nabla u_n|^p\\ &\leq 2^p+2^p|\nabla u|^p+2^{\frac{p}{2}}|\nabla u_n|^p.\end{aligned}$$

Siis

$$\left(\int_\Omega (1+|\nabla u|^2+|\nabla u_n|^2)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2-p}{2}} < \infty,$$

joten $\|u-u_n\|_{1,p}\to 0$ kun $1\leq p\leq 2$.

On osoitettu, että $\|u-u_n\|_{1,p}\to 0$ kun $p\geq 1$. Siis $u_n\to u$ avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Seuraava propositio ei suoraan kerro, että funktio I toteuttaisi Palais-Smalen ehdon, mutta kun annetulle funktiolle f kohta asetetaan yksi lisävaatimus, propositio auttaa toteamaan Palais-Smalen ehdon toteutumisen.

PROPOSITIO 2.17. *Jos jokaisella jonolla $(u_n)\subset W_0^{1,p}(\Omega)$, jolle $(I(u_n))\subset\mathbb{R}$ on rajoitettu ja $DI(u_n)\to 0$ operaattorinormin mielessä, on rajoitettu osajono, niin funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon.*

TODISTUS. Olkoon $(u_n)\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ jono, jolle $(I(u_n))\subset\mathbb{R}$ on rajoitettu ja $DI(u_n)\to 0$. Osoitetaan, että jos jonolla on rajoitettu osajono, sillä on suppeneva osajono. Muutetaan heti indeksointia siten, että tarkasteltava jono (u_n) itse on rajoitettu jono.

Rellich-Kondrachovin lauseen nojalla on sellainen $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja osajono $(u_{n_k})\subset(u_n)$, että $u_{n_k}\rightharpoonup u$ avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$ ja $u_{n_k}\to u$ avaruudessa $L^p(\Omega)$. Proposition oletuksista seuraa, että derivaattakuvauksen operaattorinormille pätee

$$\|DI(u_{n_k})\|\to 0.$$

Operaattorinormin määritelmän nojalla pätee

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u) - \int_\Omega f(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u)\right|$$
$$\leq \|DI(u_{n_k})\| \, \|u_{n_k} - u\|_{1,p}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tiedetään, että

$$\|DI(u_{n_k})\| \, \|u_{n_k} - u\|_{1,p} \to 0 \text{ kun } k \to \infty.$$

Toisaalta reuna-arvo-ongelmassa annetusta funktiosta f tiedetään vaatimuksen 2 nojalla, että jos $v \in L^p(\Omega)$, niin pätee

$$\|f(x, u(x))\|_{p'} \leq C \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{1/p'} + \|c\|_{p'}$$

missä C on jokin funktiosta u riippumaton vakio ja myös funktio $c \in L^{p'}(\Omega)$ on funktiosta u riippumaton. Koska jono (u_{n_k}) on rajoitettu, pätee

$$\left|\int_\Omega f(x, u_{n_k})(u_{n_k} - u)\right| \leq \|f(x, u_{n_k}(x))\|_{p'} \, \|u_{n_k} - u\|_p \to 0$$

kun $k \to \infty$, ja näin ollen

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla(u_{n_k} - u) \to 0$$

kun $k \to \infty$. Tästä seuraa proposition 2.16 nojalla, että $u_{n_k} \to u$ avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$. Siten funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon. $\square$

Oletetaan, että $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ on jono, jolle $(I(u_n)) \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu ja $DI(u_n) \to 0$. Jos pystytään osoittamaan, että jono (u_n) on rajoitettu, edellisestä propositiosta seuraa, että funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon. Koska jono $(I(u_n))$ on rajoitettu, on sellainen vakio $R \in \mathbb{R}$ että

$$I(u_n) = \frac{1}{p} \|u_n\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x, u_n(x))dx \leq R.$$

Edellisen kappaleen epäyhtälössä (7) todettiin, että

$$|F(x, u(x))| \leq C_1 |u(x)|^q + g(x),$$

missä C_1 on vakio ja $g \in L^1(\Omega)$. Jos $a > 0$ ja joukko Ω ositetaan jokaisella $n \in \mathbb{R}$ siten että

$$\Omega_n = \{x \in \Omega \ : \ |u_n(x)| \geq a\}, \ \Omega'_n = \Omega \setminus \Omega_n,$$

epäyhtälöstä (7) seuraa, että on sellainen luvusta n riippumaton vakio N että

$$\int_{\Omega'_n} F(x, u_n(x))dx \leq N \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Ongelmana on, että integraalia

$$\int_{\Omega_n} F(x, u_n(x))dx$$

on vaikea kontrolloida – Sobolev-funktioiden u_n ei tarvitse olla oleellisesti rajoitettuja. Helpoin ratkaisu olisi asettaa reuna-arvo-ongelmassa annetulle funktiolle f sellainen lisäehto, että myös tätä viimeisintä integraalia voitaisiin arvioida ylöspäin luvusta n riippumattomalla vakiolla. Näin ei kuitenkaan haluta menetellä, koska tällöin vuoristosolalauseen avulla voitaisiin tutkia vain harvoja p-Laplace reuna-arvo-ongelmia.

Tehdään ovela havainto: koska kaikille $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on

$$DI(u)v = \int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_\Omega f(x, u(x)v(x)dx,$$

erityisesti pätee

$$\begin{aligned}
&DI(u_n)u_n \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p-2} \nabla u_n(x) \cdot \nabla u_n(x) dx - \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^{p-2} |\nabla u_n(x)|^2 dx - \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^p dx - \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)dx \\
&= \|u_n\|_{1,p}^p - \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)dx.
\end{aligned}$$

Koska toisaalta operaattorinormin määritelmän nojalla pätee

$$|DI(u_n)u_n| \le \|u_n\|_{1,p} \|DI(u_n)\|,$$

saadaan epäyhtälö

$$\left| \|u_n\|_{1,p}^p - \int_\Omega f(x, u_n(x))u_n(x)dx \right| \le \|u_n\|_{1,p} \|DI(u_n)\| \tag{14}$$

Tämä oivallus on yksi keskeisistä lähtökohdista asetettaessa annetulle funktiolle kolmas vaatimus.

Vaatimus 3. On sellaiset luvut $\theta > p$ ja $s_0 > 0$ että

$$0 < \theta F(x, s) \le s f(x, s) \text{ kaikilla } x \in \Omega, \text{ jos } |s| \ge s_0.$$

Pyritään ensin saamaan hieman lisävalaistusta kolmannen vaatimuksen luonteesta palaamalla hetkeksi esimerkkifunktioiden pariin. Aikaisemmin todettiin, että esimerkkifunktio $f_3(x, s) = x^{-1/4} + |s|$ toteuttaa vaatimuksen 2. Tutkitaan nyt, toteuttaako se vaatimuksen 3. Olkoon $s > 0$. Pätee

$$F_3(x, s) = \int_0^s x^{-1/4} + t dt = s x^{-1/4} + \frac{1}{2} s^2.$$

Jos $\theta > p$ ja $s > 0$, on

$$\theta F_3(x,s) = \theta(sx^{-1/4} + \frac{1}{2}s^2),\ \ sf_3(x,s) = sx^{-1/4} + s^2.$$

Jos on kiinnitetty mitkä hyvänsä $\theta > 1$ ja $s_0 > 0$, niin on sellainen $\epsilon(\theta, s_0) > 0$ että

$$\theta F_3(x,s_0) > s_0 f(x,s_0) \text{ kun } x < \epsilon(\theta, s_0).$$

Siis funktio f_3 ei toteuta vaatimusta 3. Mikä kiikastaa? Ongelmana tuntuisi nyt olevan, että funktio f_3 kasvaa liian hitaasti muuttujan s suhteen!

Muistutetaan mieleen, että vaatimuksessa 2 edellytetään, että on $q \in (1, p^*)$ ja $c \in L^{q'}(\Omega)$ siten että

$$|f(x,s)| \leq c(x) + C\,|s|^{q-1}\,.$$

Uusi esimerkkifunktio $f_5 : (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,s) = x^{-1/2q'} + 5\,|s|^{q-1}$, $q \in (p, p^*)$, toteuttaa vaatimuksen 2, ja näyttää lupaavalta myös vaatimuksen 3 suhteen. Jos nimittäin $\theta > p$ ja $s > 0$, on

$$\theta F_5(x,s) = \theta(sx^{-1/2p'} + \frac{5}{q}s^q),\ \ sf_5(x,s) = sx^{-1/2p'} + 5s^q.$$

Jos siis $\theta \in (p,q)$ ja s_0 on suuri, niin erotus

$$5s_0^q - \frac{5\theta}{q}s_0^q$$

on suuri. Funktio f_5 ei tästä huolimatta aivan toteuta kolmatta vaatimusta, sillä kun x lähestyy nollaa, erotus

$$(\theta - 1)sx^{-1/2q'}$$

kasvaa rajatta. Tämän ongelman voisi korjata esimerkiksi siten, että jollekin $M \in \mathbb{N}$ olisi $c : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$c(x) = \max(M, x^{-1/2q'})$$

ja $f_6(x,s) = c(x) + 5s^{q-1}$, jolloin funktio f_6 toteuttaa vaatimukset 2 ja 3.

Näiden esimerkkien pohjalta voi tehdä johtopäätöksen, että vaatimus 3 toteutuu, mikäli annettu funktio kasvaa riittävän nopeasti muuttujan s suhteen eikä ole liian singulaarinen muuttujan x suhteen. Siis muuttujan s suhteen vaatimus 3 vetää eri suuntaan kuin vaatimus 2, mutta muuttujan x suhteen vaatimukset ovat samansuuntaisia.

Tästä lähtien oletetaan, että annettu funktio f toteuttaa vaatimusten 1 ja 2 lisäksi myös vaatimuksen 3. Aina kun jatkossa mainitaan luvut θ ja s_0, niiden oletetaan olevan sellaiset, että vaatimus 3 pätee funktiolle f.

Ei ole helppoa nähdä suoraan, mitä tekemistä vaatimuksella 3 on Palais-Smalen ehdon kanssa. Ideana on, että integraalia

$$\int_\Omega F(x, u_n(x))dx$$

on pystyttävä kontrolloimaan juuri sen verran, että jonon $(I(u_n))$ rajoittuneisuudesta ja ehdosta $DI(u_n) \to 0$ seuraa, että jono (u_n) on rajoitettu.

Seuraavan lemman todistuksessa on käytetty ideoita artikkeleista [**9**] ja [**10**].

LEMMA 2.18. *Funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon.*

TODISTUS. Olkoon $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ jono, jolle $(I(u_n)) \subset \mathbb{R}$ on rajoitettu ja $DI(u_n) \to 0$. Osoitetaan, että jono (u_n) on rajoitettu, jolloin propositiosta 2.17 seuraa, että funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon. Asetetaan jokaiselle $n \in \mathbb{N}$

$$\Omega_n := \{x \in \Omega \ : \ |u_n(x)| \geq s_0\}, \ \Omega_n' := \Omega \setminus \Omega_n.$$

Koska jono $(I(u_n))$ on rajoitettu, on sellainen $R \in \mathbb{N}$ että

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{p} \|u_n\|_{1,p}^p - \left(\int_{\Omega_n'} F(x, u_n(x))dx + \int_{\Omega_n} F(x, u_n(x))dx \right) \\ &\leq R \end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Arvioidaan erikseen edellisessä epäyhtälössä esiintyneitä integraaleja. Edellisen kappaleen epäyhtälössä (7) todettiin, että

$$|F(x, u(x))| \leq C_1 |u(x)|^q + g(x),$$

missä C_1 on vakio ja $g \in L^1(\Omega)$. Tästä ja joukon Ω_n' määritelmästä seuraa, että

$$\int_{\Omega_n'} F(x, u_n) \leq |C_1 s_0^q \text{ vol } (\Omega)| + \int_\Omega |g(x)| \, dx =: K_1,$$

missä vakio $K_1 \in \mathbb{R}$ ei riipu luvusta n. Joukossa Ω_n pätee $|u_n(x)| \geq s_0$, joten vaatimuksesta 3 seuraa, että

$$\int_{\Omega_n} F(x, u_n) \leq \frac{1}{\theta} \int_{\Omega_n} u_n f(x, u_n).$$

Toisaalta vaatimus 2 sanoo, että on vakio $C \in \mathbb{R}$ ja funktio $c \in L^{q'}(\Omega)$ siten että

$$|f(x, u)| \leq c(x) + C |u|^{q-1}.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_n'} u_n f(x,u_n)\right| &\leq |Cs_0^q \text{ vol } (\Omega_n')| + s_0 \left|\int_{\Omega_n'} c(x)dx\right| \\ &\leq |Cs_0^q \text{ vol } (\Omega_n')| + s_0 \int_\Omega |c(x)|\, dx \\ &:= K_2 < \infty,\end{aligned}$$

sillä joukko Ω on äärellismittainen ja $c \in L^{q'}(\Omega)$.

Nyt voidaan päätellä, että

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_n} u_n f(x,u_n) &= \int_\Omega u_n f(x,u_n(x))dx - \int_{\Omega_n'} u_n f(x,u_n(x))dx \\ &\leq \int_\Omega u_n f(x,u_n(x))dx + K_2,\end{aligned}$$

ja edelleen saadaan

$$\int_{\Omega_n} F(x,u_n) \leq \frac{1}{\theta}\left(\int_\Omega u_n f(x,u_n) + K_2\right).$$

Asetetaan $K := K_1 + K_2/\theta$, jolloin

$$\frac{1}{p}\left\|u_n\right\|_{1,p}^p - K - \frac{1}{\theta}\int_\Omega u_n f(x,u_n) \leq I(u_n) \leq R. \tag{15}$$

Koska $\|DI(u_n)\| \to 0$, on sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$ että $\|DI(u_n)\| \leq 1$ kun $n \geq n_0$. Kuten aiemmin pääteltiin, on

$$\left|\left\|u_n\right\|_{1,p}^p - \int_\Omega u_n f(x,u_n)\right| = |DI(u_n)u_n| \leq \left\|u_n\right\|_{1,p}$$

kaikilla $n \geq n_0$. Tästä seuraa, että

$$\int_\Omega u_n(x) f(x,u_n(x))dx \leq \left\|u_n\right\|_{1,p}^p + \left\|u_n\right\|_{1,p}$$

eli erityisesti

$$-\frac{1}{\theta}\left\|u_n\right\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\left\|u_n\right\|_{1,p} + \frac{1}{\theta}\int_\Omega u_n f(x,u_n) \leq 0. \tag{16}$$

Epäyhtälöistä (15) ja (16) saadaan lopulta, että

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\left\|u_n\right\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\left\|u_n\right\|_{1,p} \leq R + K.$$

kun $n \geq n_0$. Tiedetään, että $p > 1$ ja

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta} > 0.$$

Jos jono $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ olisi rajoittamaton, pätisi

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\left\|u_n\right\|_{1,p}^p - \frac{1}{\theta}\left\|u_n\right\|_{1,p} \to \infty,$$

mikä ei ole totta. Siis jono (u_n) on rajoitettu ja siten funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon. $\square$

3.2. Vuoristosolaehdot (1)–(3). Pyritään osoittamaan, että funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon lisäksi muutkin vuoristosolalauseen ehdot. On siis osoitettava, että

(1) $I(0) = 0$.

(2) On sellaiset vakiot $r, a > 0$ että $I(u) \geq a$ kun $\|u\| = r$.

(3) On sellainen $u_0 \in H$, $\|u_0\| > r$, että $I(u_0) \leq 0$.

On helppo todeta, että funktio I toteuttaa ehdon (1): koska

$$F(x, 0) = \int_0^0 f(x, s)ds = 0,$$

on

$$I(0) = \frac{1}{p}\|0\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x, 0)dx = 0.$$

Keskitytään seuraavaksi ehtoon (3). Osoitetaan, että funktio I on alhaalta rajoittamaton, jolloin ehto (3) toteutuu. Tätä tulosta varten tarvitaan tieto, että on olemassa sellainen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, että joukko

$$\{x \in \Omega \ : \ u(x) \geq s_1\}$$

on positiivimittainen. Tämän voi näyttää esimerkiksi siten, että valitaan joukosta Ω jokin pallo, asetetaan funktio, joka saa arvon 1 tässä pallossa ja arvon 0 muualla, ja silotetaan tämä funktio. Silotusprosessi on esitelty kirjassa [**11**]. Käy ilmi, että kun funktio u on valittu siten, että edellä mainittu joukko on positiivimittainen ja funktio u on oleellisesti rajoitettu, pätee

$$I(\lambda u) \to -\infty \text{ kun } \lambda \to \infty.$$

Seuraavan lemman todistus seuraa artikkelin [**9**] todistusta.

Lemma 2.19. *Funktio I on alhaalta rajoittamaton.*

Todistus. Kun $x \in \Omega$ ja $t \geq s_1$, pätee

$$\frac{\theta}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)}.$$

Kun edellinen epäyhtälö integroidaan puolittain arvosta s_1 arvoon s, $s > s_1$, saadaan

$$\log\left(\frac{s}{s_1}\right)^\theta \leq \log F(x, s) - \log F(x, s_1).$$

Tästä seuraa epäyhtälö

$$F(x, s) \geq \gamma(x)s^\theta, \tag{17}$$

missä

$$\gamma(x) := \frac{F(x, s_1)}{s_1^\theta} > 0 \text{ kaikilla } x \in \Omega.$$

Kun $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $w > 0$ ja $\lambda \geq 1$, määritellään

$$M_\lambda(w) := \{x \in \Omega \ : \ \lambda w(x) \geq s_1\}.$$

Aiemmin todettiin, että voidaan valita sellainen oleellisesti rajoitettu funktio $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u \geq 0$, että vol $(M_1(u)) > 0$. Kaikilla $\lambda \geq 1$ pätee $M_1(u) \subset M_\lambda(u)$, joten pätee

$$\text{vol}\ (M_1(u)) \leq \text{vol}\ (M_\lambda(u)).$$

Osoitetaan, että $I(\lambda u) \to -\infty$ kun $\lambda \to \infty$. Olkoon $\lambda \geq 1$. Epäyhtälöstä (17) seuraa, että

$$\begin{aligned}\int_{M_\lambda(u)} F(x, \lambda u) &\geq \int_{M_1(u)} \gamma(x)(\lambda u(x))^\theta dx \\ &= \lambda^\theta \int_{M_1(u)} \gamma(x) u(x)^\theta dx \\ &= \lambda^\theta K(u),\end{aligned}$$

missä siis

$$K(u) = \int_{M_1(u)} \gamma(x) u(x)^\theta dx.$$

Nimitystä $K(u)$ käytetään korostaaksemme sitä tärkeää seikkaa, että integraali $K(u)$ riippuu funktiosta u, *mutta ei luvusta* λ. Koska $F(x, s_0) > 0$ kaikilla $x \in \Omega$, on

$$K(u) > 0 \text{ kaikilla } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Kun jälleen muistetaan, että

$$|F(x, u(x))| \leq C_1 |u(x)|^q + g(x),$$

missä C_1 on vakio ja $g \in L^1(\Omega)$, saadaan

$$\int_{\Omega \setminus M_\lambda(u)} F(x, \lambda u) \geq -\left(C_1 s_0^q \text{ vol } (\Omega) + \int_\Omega g(x) dx\right) := K,$$

missä vakio K ei riipu luvusta λ.

Nyt saadaan arvio

$$I(\lambda u) \leq \frac{\lambda^p}{p} \|u\|_{1,p}^p - \lambda^\theta K(u) - K.$$

Koska $\theta > p$, edellisestä arviosta seuraa, että $I(\lambda u) \to -\infty$ kun $\lambda \to \infty$. Siis funktio I on alhaalta rajoittamaton. □

On todistettu, että jos annettu funktio f toteuttaa vaatimukset 1-3, funktio I on jatkuvasti Frechét-derivoituva; on selvitetty derivaattakuvauksen lauseke; lisäksi on osoitettu, että funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon ja on alhaalta rajoittamaton. Nämä ominaisuudet ovat välttämättömiä kun halutaan soveltaa funktioon I vuoristosolalausetta, mutta ominaisuudet ovat myös yleisesti ottaen kiinnostavia: derivoituvuus, Palais-Smalen ehto ja alhaalta rajoittamattomuus kertovat kaikki funktion I geometrisesta rakenteesta.

Vuoristosolalauseen ehto (2) erottuu muista ehdoista, koska se on pelkästään vuoristosolalausetta varten räätälöity, vailla yleisempää mielenkiintoa. Siksi tämän ehdon toteutumista ei käsitellä yhtä perusteellisesti kuin muiden vuoristosolalauseessa vaadittavien ehtojen toteutumista on tässä luvussa käsitelty.

Jotta funktio I toteuttaisi vuoristosolalauseen ehdon (2), funktiolle f on asetettava vielä hankalasti hahmotettava neljäs vaatimus, ja lisäksi vaatimusta 2 on hieman terävöitettävä.

Vaatimus 4. Asetetaan

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\|v\|_{1,p}^p}{\|v\|_p^p} \ : \ v \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}. \tag{18}$$

ja vaaditaan, että annetulle funktiolle f pätee

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}\, s} < \lambda_1 \text{ tasaisesti kaikilla } x \in \Omega.$$

Artikkelissa [**5**] osoitetaan, että luku λ_1 on operaattorin $-\Delta_p$ ensimmäinen ominaisarvo avaruudessa $W_0^{1,p}(\Omega)$. Aihepiirin tarkempi käsittely sivuutetaan, koska se ei liity luvun tavoitteisiin.

Aiemmin annetulle funktiolle f on asetettu vaatimus 2, joka sanoi, että jos $c \in L^{q'}(\Omega)$ jollakin $q \in (1, p^*)$ ja $C > 0$, pätee

$$|f(x,u)| \leq c(x) + C\,|u|^{q-1}.$$

Seuraavaa, viimeistä lemmaa varten tätä vaatimusta on vahvistettava.

Vahvistettu vaatimus 2. On sellainen $C \geq 0$ ja $q \in (1, p^*)$, että pätee

$$|f(x,s)| \leq C\left(|s|^{q-1} + 1\right) \text{ kaikilla } x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Voi kysyä, miksi tätä ehtoa ei alun perin otettu vaatimukseksi 2. Tällöin moni edellisistä todistuksista olisi helpottunut, mutta samalla olisi jäänyt esittelemättä hyödyllistä tekniikkaa esimerkiksi Hölderin epäyhtälöön liittyen. Seuraavan lemman todistusideat ovat artikkeleista [**9**] ja [**10**].

LEMMA 2.20. *Oletetaan, että reuna-arvo-ongelmassa annettu funktio f toteuttaa vaatimukset $1-4$, missä ehto 2 on vahvistetussa muodossa. Tällöin on sellaiset vakiot $\rho, \alpha > 0$ että $I(u) \geq \alpha$ kun $\|u\|_{1,p} = \rho$.*

TODISTUS. Vaatimuksesta 4 seuraa, että voidaan valita $\mu \in (0, \lambda_1)$ ja sitten $\delta_\mu > 0$ siten että

$$\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}\, s} \leq \mu \text{ kun } x \in \Omega,\ 0 < |s| < \delta_\mu. \tag{19}$$

Vaatimuksesta 4 seuraa myös, että $f(x,0)=0$ kaikilla $x \in \Omega$. Tästä, epäyhtälöstä (19) ja funktion F määritelmästä seuraa, että

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{p}|s|^p \text{ kaikilla } x \in \Omega, \text{ kun } |s| < \delta_\mu. \tag{20}$$

Olkoon $q \in (1, p^*)$ sellainen, että vahvistettu vaatimus 2 pätee. Valitaan $q_1 \in (\max(p,q), p^*)$. Vahvistetusta vaatimuksesta 2 seuraa, että

$$|F(x,s)| \leq \frac{C}{q}|s|^q + Cs,$$

joten on sellainen vakio K että

$$|F(x,s)| \leq K(1+|s|^q) \text{ kun } x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R}.$$

Tästä seuraa, että on sellainen vakio K_1 että

$$|F(x,s)| \leq K_1|s|^{q_1} \text{ kaikilla } x \in \Omega, \text{ kun } |s| \geq \delta_\mu. \tag{21}$$

Epäyhtälöistä (20) ja (21) saadaan

$$F(x,s) \leq \frac{\mu}{p}|s|^p + K_1|s|^{q_1} \text{ kun } x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Käyttämällä epäyhtälöä (22) ja Poincarén epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \int_\Omega F(x,u) \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\mu}{p}\int_\Omega |u|^p - K_1\int_\Omega |u|^{q_1} \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p - \frac{\mu}{p}\|u\|_p^p - K_2\|u\|_{1,p}^{q_1} \\
&= \|u\|_{1,p}^p\left[\frac{1}{p}\left(1-\mu\frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_{1,p}^p}\right) - K_2\|u\|_{1,p}^{q_1-p}\right] \\
&\geq \|u\|_{1,p}^p\left[\frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{\lambda_1}\right) - K_2\|u\|_{1,p}^{q_1-p}\right] \geq \alpha > 0,
\end{aligned}$$

olettaen että $\|u\|_{1,p} = \rho$ on valittu niin pieneksi, että

$$\frac{1}{p}\left(1-\frac{\mu}{\lambda_1}\right) - K_3\rho^{q_1-p} > 0.$$

□

3.3. Reuna-arvo-ongelman heikon ratkaisun olemassaolo. Nyt voidaan osoittaa luvun päätulos.

Lause 2.21. *Olkoon $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Carathéodory-funktio ja $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\tau)d\tau.$$

Oletetaan, että seuraavat ehdot pätevät.

(1)
$$\limsup_{s\to 0}\frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s}<\lambda_1 \text{ tasaisesti kaikilla } x\in\Omega,$$
missä λ_1 *on operaattorin* $-\Delta_p$ *ensimmäinen ominaisarvo avaruudessa* $W_0^{1,p}(\Omega)$.
(2) *On vakio* $C\geq 0$ *ja* $q\in(1,p^*)$ *siten että pätee*
$$|f(x,s)|\leq C\left(|s|^q+1\right) \text{ kaikilla } x\in\Omega,\ s\in\mathbb{R}.$$
(3) *On sellaiset* $\theta>p$ *ja* $s_0>0$ *että*
$$0<\theta F(x,s)\leq sf(x,s) \text{ kaikilla } x\in\Omega,\ \text{jos } |s|\geq s_0.$$
Tällöin reuna-arvo-ongelmalla
$$\begin{cases}-\Delta_p u=f\left(x,u\right), & x\in\Omega\\ u=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$
on epätriviaali heikko ratkaisu.

TODISTUS. Lemmassa 2.15 todettiin, että funktiolle $I: W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$,
$$I(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx-\int_\Omega F(x,u(x))dx,$$
pätee $I\in C^1(W_0^{1,p}(\Omega))$ ja
$$DI(u)v=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\nabla v\ dx-\int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx$$
kaikilla $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Aiemmin huomattiin, että $I(0)=0$. Lemmasta 2.20 seuraa, että on sellaiset vakiot $\rho,\alpha>0$ että $I(u)\geq\alpha$ kun $\|u\|_{1,p}=\rho$. Lisäksi lemmasta 2.19 seuraa, että funktio I on alhaalta rajoittamaton, jolloin erityisesti on sellainen $e\in W_0^{1,p}(\Omega)$ että $\|e\|_{1,p}>\rho$ ja $I(e)\leq 0$. Lemman 2.18 nojalla funktio I toteuttaa Palais-Smalen ehdon. Vuoristosolalauseen nojalla on sellainen $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u_0\|_{1,p}\neq 0$, että
$$DI(u_0)v=\int_\Omega|\nabla u_0|^{p-2}\,\nabla u_0\nabla v\ dx-\int_\Omega f(x,u_0(x))v(x)dx=0$$
kaikilla $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, joten u_0 on reuna-arvo-ongelman epätriviaali heikko ratkaisu. $\square$

Kirjallisuutta

[1] R.A. Adams: Sobolev spaces. Academic Press, 1975.

[2] A. Ambrosetti, D. Arcoya: An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems. Birkhäuser, 2011.

[3] A. Ambrosetti, A. Malchiodi: Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems. Cambridge University Press, 2007.

[4] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz: Dual variational methods in critical points theory and applications. Journal of Functional Analysis **14** (1973), 349-381.

[5] A. Anane: Simplicité et isolation de la premieré valeur propre du p-laplacien avec poids. C. R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 725-728.

[6] M.S. Berger: Nonlinearity and Functional Analysis. Academic Press, 1977.

[7] H. Brezis: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 2011.

[8] R. Chill, E. Fasangova: Gradient Systems. 13th International Internet Seminar. http://www.math.ist.utl.pt/ czaja/ISEM/internetseminar200910.pdf. 14.1.2013.

[9] G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin: A Result of Ambrosetti-Rabinowitz type for p-Laplacian. (Julkaistu kirjassa: Qualitative Problems for Differential Equations and Control theory (C. Corduneanu, Ed.). World Scientific, Singapore, 1995.)

[10] G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin: Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian. Portugaliae Mathematica **58** (2001), 339-378.

[11] L. Evans: Partial Differential Equations, 2. edition. American Mathematical Society, 2009.

[12] D.G. Figueiredo: Lectures on Ekeland Variational Principle with Applications and Detours. Springer-Verlag, 1989.

[13] P. Lindqvist: Notes on the p-Laplace equation. University of Jyväskylä, Department of mathematics and statistic **102**, 2006.

[14] J. Mawhin: Leray-Schauder degree: A half century of extensions and applications. Topological Methods in Nonlinear Analysis **14** (1999), 195-228.

[15] N. Meyers, J. Serrin: $H = W$. Proc. Nat. Acad. Sci. Usa **51** (1964), 1055-1056.

[16] R.S. Palais, S. Smale: A generalized Morse theory. Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 165-172.

[17] P.H. Rabinowitz: Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations. American Mathematical Society, 1986.

[18] M. Renardy, M.C. Rogers: An introduction to partial differential equations. Springer-Verlag, 2004.

[19] H. Royden: Real analysis, 2. edition. Prentice Hall, 1968.

[20] M.E. Rudin: A new proof that metric spaces are paracompact. Proceedings of the American Mathematical Society **20**(2) (1969), 603

[21] W. Rudin: Real and Complex Analysis, 3. edition. McGraw-Hill, 1988.

[22] M Schechter: An Introduction to Nonlinear Analysis. Cambridge University Press, 2004.

[23] A.H. Stone: Paracompactness and product spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977-982.

[24] M. Struwe: Variational Methods. Springer-Verlag, 1990.

[25] T. Tao: An Epsilon of Room, 1: Real Analysis. American Mathematical Society, 2010.

[26] S. Willard: General topology. Addison-Wesley, 1970.

[27] K. Yosida: Functional analysis, 3. edition. Springer-Verlag, 1971.