

# Sfärisk geometri och kartprojektion

Pernilla Tunis

Matematisk pro gradu

Jyväskylä universitet

Institutionen för matematik och statistik

Hösten 2012

SAMMANFATTNING: Pernilla Tunis, *Sfärisk geometri och kartprojektion*, (fi. Pallogeometria ja karttaprojektio, eng. Spherical Geometry and Map Projection), matematisk pro gradu-avhandling, 49 s., Jyväskylä universitet, Institutionen för matematik och statistik, hösten 2012.

Denna pro gradu-avhandling behandlar sfärisk geometri och kartprojektioner. Första kapitlet ger en introduktion till den icke-euklidiska geometrin sfärisk geometri. Avstånd och vinklar på en sfär definieras och det bevisas bl.a att den kortaste vägen mellan två punkter på en sfär alltid är en storcirkelbåge.

Harriot-Girards sats som säger att man kan räkna ut en triangels area med hjälp av sfärens radie och triangelns vinklar bevisas med hjälp av månskärar. Med hjälp av denna sats fås också en regel med vars hjälp man kan räkna ut vinkelsumman i en triangel. Denna regel ger bl.a. att vinkelsumman i en sfärisk triangel alltid är större än  $180^\circ$ .

Fyra trigonometriska formler för rätvinkliga sfäriska trianglar bevisas med hjälp av trigonometriska regler för trianglar i planet. En av dessa formler kallas för Pythagoras sats för sfäriska trianglar, eftersom man med denna formel kan räkna ut en sidas längd i en triangel om man vet de andra två sidornas längder. Inom trigonometrin i planet är sinus- och cosinussatsen centrala. Samma regler som används i planet kan inte användas för att räkna ut vinklar och sidor i sfäriska trianglar, men i stället bevisas sinus- och cosinussatsen för sfäriska trianglar. Med hjälp av cosinussatsen beräknas bl.a. avståndet mellan Jyväskylä och New York.

Andra kapitlet behandlar kartprojektioner. Med hjälp av kartprojektioner kan jorden avbildas på ett plan. Att avbildningen inte kan ske utan formförändring bevisas. Skillnaderna mellan olika kartprojektioner beskrivs och tre kartprojektioner härleds. En av de äldsta kartprojektionerna är den azimutala kartprojektionens stereografisk projektion. Denna kartprojektion härleds geometriskt med hjälp av rätvinkliga trianglar. Det bevisas också med hjälp av rätvinkliga trianglar att den stereografiska projektionen är konform.

Mercators projektion är en konform och cylindrisk kartprojektion, som inte kan härledas geometriskt. Denna projektion härleds på två olika sätt. Först härleds projektionen med hjälp av logaritmfunktionen och den stereografiska projektionen. Därefter härleds projektionen med hjälp av villkoret att projektionen är konform. En stor fördel med en karta gjord med hjälp av Mercator projektion är att varje linje representerar en loxodrom på sfären. En loxodrom är en kurva på sfären som skär alla meridianer och paralleller med konstant vinkel. Om man hela tiden följer samma kurs färdas man således efter en loxodrom, alltså efter en rak linje på en karta gjord med hjälp av Mercators projektion. På grund av denna egenskap används Mercators projektion ofta när man ritar sjökort. På en stereografisk projektion utgörs loxodromen av en logaritmisk spiral. Detta bevisas med hjälp av exponentialfunktionen. I exemplena beräknas bl.a. avstånd längs loxodromen och avstånd längs storcirkelbågen.

Den sista kartprojektion som behandlas är Albers projektion. Albers projektion skiljer sig mycket från Mercators projektion, eftersom Albers projektion inte är konform. Albers projektion är i stället ytriaktig och konisk. Med hjälp av dessa villkor härleds projektionen.

## Innehåll

Kapitel 1. Sferisk geometri	5
1.1. Avstånd	6
1.2. Vinklar	8
1.3. Triangelns area och vinkelsumma	11
1.4. Trigonometriska formler för en rätvinklig triangel	14
1.5. Cosinussatsen och sinussatsen	17
Kapitel 2. Kartprojektion	25
2.1. Stereografisk projektion	27
2.2. Mercators projektion	32
2.3. Albers ytriiktiga koniska projektion	43
Litteraturförteckning	49



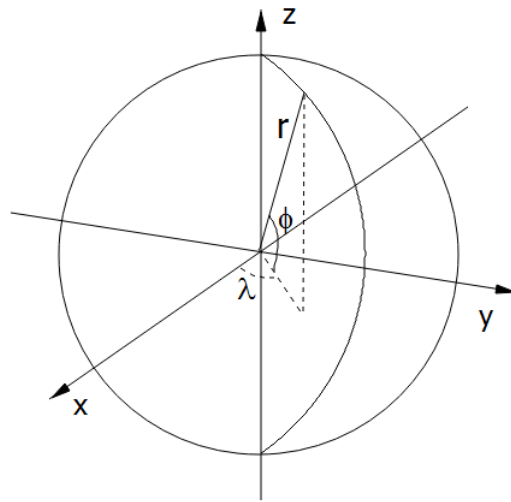
## KAPITEL 1

### Sfärisk geometri

Sfärisk geometri behandlar geometrin på en sfär. Den sfäriska geometrin är en icke-euklidisk geometri, eftersom det inte finns parallella linjer på sfären. För att mäta avstånd och vinklar på jorden approximerar vi ofta jordytan med en sfär. Sfärisk geometri är därför användbar. Målet med detta kapitel är bl.a. att lära oss att räkna ut avstånd mellan två punkter, men för att kunna göra detta måste vi först lära oss grunderna inom sfärisk geometri.

När vi räknar med sfärisk geometri är det lättast att tänka oss att sfärens medelpunkt  $O$  finns i origo i ett tredimensionellt rätvinkligt kartesiskt koordinatsystem. En punkt  $P$  på sfären beskrivs enklast med hjälp av så kallade sfäriska koordinater  $(r, \phi, \lambda)$ , där  $r$  är avståndet från punkten till sfärens medelpunkt,  $\phi$  är latituden och  $\lambda$  är longituden. Longituden  $\lambda$  är vinkeln mellan den positiva  $x$ -axeln och projektionen av  $\vec{OP}$  på  $x,y$ -planet. Latituden  $\phi$  är vinkeln mellan projektionen och radien. Med hjälp av trigonometri får vi sambandet mellan koordinaterna  $(x, y, z)$  och de sfäriska koordinaterna :

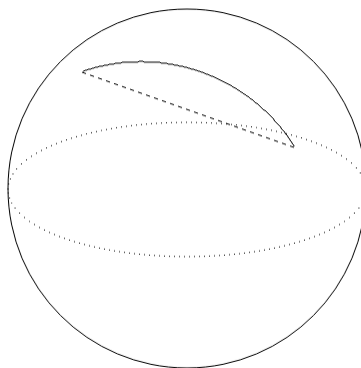
$$\begin{cases} x = r \cos \lambda \cos \phi \\ y = r \sin \lambda \cos \phi \\ z = r \sin \phi \end{cases}$$



FIGUR 1.0.1. Sfär

### 1.1. Avstånd

Avståndet mellan två punkter definieras som den kortaste vägen mellan två punkter. I planet är det enkelt att räkna ut den kortaste vägen. Om vi har två punkter  $(x_1, y_1)$  och  $(x_2, y_2)$  kan vi räkna ut avståndet med hjälp av Pythagoras sats. Vi får att avståndet är  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ . På samma sätt får vi att avståndet mellan två punkter i rymden  $(x_1, y_1, z_1)$  och  $(x_2, y_2, z_2)$  är  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ . För att ta reda på avståndet mellan två punkter på sfären måste vi först definiera vad som är den kortaste vägen mellan två punkter. Vi använder oss ofta av sfärisk geometri för att beräkna sträckor på jorden och därför är det inte meningsfullt att definiera avståndet på samma sätt som vi definierar avståndet mellan två punkter i rymden. Vi skulle bli tvungna att gräva en tunnel för att kunna färdas rakt mellan två punkter. I stället definierar vi avståndet att vara den kortaste vägen mellan två punkter längs en kurva på sfären. Denna bäge kallas allmänt för en geodetisk bäge. För att vi ska kunna ta reda på sfärens geodetiska linje måste vi definiera några begrepp. I detta kapitel används [4] som källa.



FIGUR 1.1.1. Avstånd på sfären

DEFINITION 1.1. *Storcirkeln* är snittet mellan sfären och ett plan som går genom sfärens medelpunkt.

Låt  $A$  och  $B$  vara två punkter på sfären och  $O$  sfärens medelpunkt. Låt bågen  $AB$  vara motstående båge till medelpunktsvinkeln  $\angle AOB$ . Bågen  $AB$  är därmed en *storcirkelbåge*.

Längden av bågen  $AB$  är  $d(A, B) = r(\angle AOB)$ , var  $r$  är sfärens radie och vinkeln mäts i radianer.

TEOREM 1.2. *Om  $A$ ,  $B$  och  $C$  är punkter på sfären så gäller följande*

- i)  $d(A, B) \geq 0$
- ii)  $d(A, B) = 0$  om och endast om  $A = B$
- iii)  $d(A, B) = d(B, A)$
- iv)  $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$  (*triangelolikheten*)

BEVIS. *i*) och *ii*)  $d(A, B) = r(\angle AOB) \geq 0$  eftersom  $r > 0$  och  $\angle AOB > 0$  om  $A \neq B$  och  $\angle AOB = 0$  om och endast om  $A = B$ .

*iii*)

$$d(A, B) = r(\angle AOB) = r(\angle BOA) = d(B, A)$$

*iv*) Vi bevisar detta i kapitel 1.5. □

Följande sats hjälper oss att bestämma avståndet mellan två punkter på sfären.

TEOREM 1.3. *Den kortaste vägen mellan två punkter på en sfär är alltid en storcirkelbåge.*

BEVIS. Vi antar att  $\sigma : [a, b] \rightarrow S^2$  är en parametriserad kurva på sfären där  $\sigma(a) = A$  och  $\sigma(b) = B$  och

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Vi får kurvans längd med hjälp av ekvationen

$$d(\sigma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Vi ersätter de kvadratiska koordinaterna med de sfäriska koordinaterna

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \lambda(t) \cos \phi(t) \\ y(t) = r \sin \lambda(t) \cos \phi(t) \\ z(t) = r \sin \phi(t). \end{cases}$$

Vi deriverar först koordinaterna och får

$$\begin{cases} x'(t) = r \cos \lambda(t) (-\sin \phi(t)) \phi'(t) + r (-\sin \lambda(t)) \cos \phi(t) \lambda'(t) \\ y'(t) = r \sin \lambda(t) (-\sin \phi(t)) \phi'(t) + r \cos \lambda(t) \cos \phi(t) \lambda'(t) \\ z'(t) = r \cos \phi(t) \phi'(t). \end{cases}$$

Avståndet är därför

$$\begin{aligned} d(\sigma) &= \int_a^b ((r \cos \lambda(t) (-\sin \phi(t)) \phi'(t) + r (-\sin \lambda(t)) \cos \phi(t) \lambda'(t))^2 \\ &\quad + (r \sin \lambda(t) (-\sin \phi(t)) \phi'(t) + r \cos \lambda(t) \cos \phi(t) \lambda'(t))^2 + (r \cos \phi(t) \phi'(t))^2)^{1/2} dt \\ &= \int_a^b ((r \cos \lambda(t) \sin \phi(t) \phi'(t))^2 + 2r^2 \cos \lambda(t) \sin \phi(t) \phi'(t) \sin \lambda(t) \cos \phi(t) \lambda'(t) \\ &\quad + (r \sin \lambda(t) \cos \phi(t) \lambda'(t))^2 + (r \sin \lambda(t) \sin \phi(t) \phi'(t))^2 \\ &\quad - 2r \sin \lambda(t) \sin \phi(t) \phi'(t) \cos \lambda(t) \cos \phi(t) \lambda'(t) + (r \cos \lambda(t) \cos \phi(t) \lambda'(t))^2 \\ &\quad + (r \cos \phi(t) \phi'(t))^2)^{1/2} dt \\ &= \int_a^b r [\phi'(t)^2 \sin^2 \phi(t) (\sin^2 \lambda(t) + \cos^2 \lambda(t)) \\ &\quad + \lambda'(t)^2 \cos^2 \phi(t) (\cos^2 \lambda(t) + \sin^2 \lambda(t)) + \cos^2 \phi(t) \phi'(t)^2]^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Vi förenklar uttrycket med hjälp av trigonometrins grundformel

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b r \sqrt{\phi^2(t)^2(\sin^2 \phi(t) + \cos^2 \phi(t)) + \lambda'(t)^2 \cos^2 \phi(t)} \\
&= \int_a^b r \sqrt{\phi'(t)^2 + \lambda'(t)^2 \cos^2 \phi(t)} \\
&\geq \int_b^a r \phi'(t) = r(\phi(b) - \phi(a)) = r(\sphericalangle BOA) = d(A, B).
\end{aligned}$$

Vi får alltså att

$$d(\sigma) \geq d(A, B).$$

□

Vi kan beskriva storcirkelbågen  $l$  som går genom  $A$  med hjälp av en parametriserad kurva  $j : [0, 2\pi] \rightarrow S^2$  var  $j(t) = A \cos t + u \sin t$ ,  $u \perp A$  och  $\|u\| = 1$ . Vi antar här att sfären har radien ett. Storcirkelbågen är således  $l = \{j(t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ , se [11, s. 91]. För kurvan gäller att  $\|j(t)\| = 1$  för alla  $t \in [0, 2\pi]$ , eftersom

$$\begin{aligned}
\|j(t)\| &= \sqrt{\|A\|^2 \cos^2 t + A \cdot u \cos t \sin t + u^2 \sin^2 t} \\
&= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1
\end{aligned}$$

eftersom  $\|A\|^2 = 1$ ,  $u^2 = 1$  och  $A \cdot u = 0$ , då  $u \perp A$ . Det gäller också att  $j(0) = A$ , eftersom

$$j(0) = A \cos 0 + u \sin 0 = A.$$

Om vi väljer  $u$  på ett sådant sätt att  $u$  finns på storcirkelbågen som går genom punkterna  $A$  och  $B$ , så får vi att  $j(\sphericalangle AOB) = B$ . Med hjälp av denna kurva kan vi också bevisa teorem 1.3:

$$\begin{aligned}
d(j(t)) &= \int_0^{\sphericalangle AOB} \sqrt{(j'(t))^2} dt \\
&= \int_0^{\sphericalangle AOB} \sqrt{(-A \sin t + u \cos t)^2} dt \\
&= \int_0^{\sphericalangle AOB} 1 dt \\
&= \sphericalangle AOB = d(A, B)
\end{aligned}$$

då  $r = 1$ .

## 1.2. Vinklar

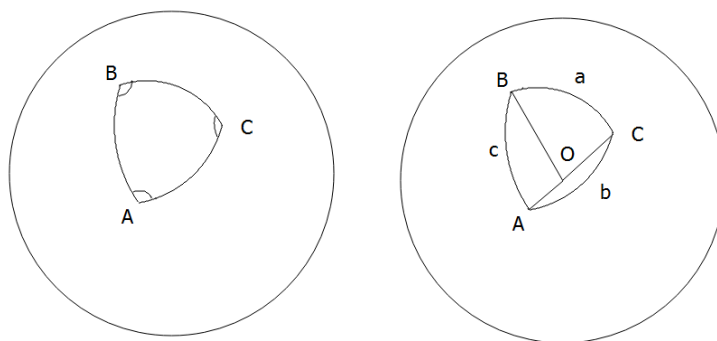
En triangel i planet har som vi vet tre vinklar. En sfärisk triangel däremot kan vi säga att har sex vinklar, se [4, s.49]. En sfärisk triangel  $\triangle ABC$  har tre hörnvinklar  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle B$  och  $\sphericalangle C$  och eftersom sidan i en triangel alltid utgörs av den kortaste kurvan mellan två av hörnen utgörs sidan av en storcirkelbåge. Vi kan tänka oss att denna båge också är en vinkel, eftersom längden av bågen är sfärens radie multiplicerat med motstående medelpunktsvinkel. Vi antar därför att bågen har samma vinkel som mittpunktsvinkeln. På engelska pratar man om "arc angle".



På svenska kan vi inte använda oss av ordet bågvinkel i detta sammanhang, eftersom bågvinkeln definieras som en vinkel med spetsen på en given kurva (se [5, s.194]). Vi betecknar motstående båge till hörnet  $A$  med  $\angle a$ , motstående båge till hörnet  $B$  med  $\angle b$  och motstående båge till hörnet  $C$  med  $\angle c$ .

Med hjälp av Ortsvektorerna  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  och  $\vec{OC}$  får vi att  $\angle a = \angle BOC = \angle(\vec{OB}, \vec{OC})$ ,  $\angle b = \angle AOC = \angle(\vec{OA}, \vec{OC})$  och  $\angle c = \angle AOB = \angle(\vec{OA}, \vec{OB})$ . Vi betecknar Ortsvektorerna  $\vec{OA} = \vec{A}$ ,  $\vec{OB} = \vec{B}$  och  $\vec{OC} = \vec{C}$ .

Vi kan definiera vinkeln  $\angle A$  som vinkeln mellan bågarne  $AB$  och  $AC$  i punkten  $A$ . Denna vinkel är samtidigt vinkeln mellan vektorerna  $\vec{V}$  och  $\vec{W}$ , då  $\vec{V}$  är tangentvektor till bågen  $AB$  i  $A$  och  $\vec{W}$  är tangentvektor till bågen  $AC$  i  $A$ . Vinkeln  $\angle A$  kan också beskrivas som vinkeln mellan planen  $ABO$  och  $ACO$ .

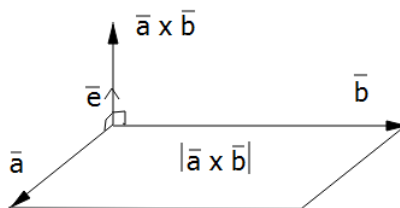


FIGUR 1.2.1. Vinklar

För att kunna bevisa nästa lemma måste vi repetera definitionen på vektorernas kryssprodukt.

DEFINITION 1.4. Anta att  $\vec{a}$  och  $\vec{b}$  är vektorer och att  $\vec{e}$  är en enhetsvektor som är vinkelrät till både vektor  $\vec{a}$  och vektor  $\vec{b}$  och vars riktning fås med hjälp av högerhandsregeln. Vi betecknar vinkeln mellan  $\vec{a}$  och  $\vec{b}$  med  $\alpha$ . Då är vektorernas *kryssprodukt*

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \vec{e}.$$



FIGUR 1.2.2. Kryssprodukt

LEMMA 1.5. *I en sfärisk triangel  $\triangle ABC$  är vinklarna*

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}) \\ \angle B &= \angle(\vec{B} \times \vec{C}, \vec{B} \times \vec{A}) \\ \angle C &= \angle(\vec{C} \times \vec{A}, \vec{C} \times \vec{B}).\end{aligned}$$

BEVIS. Vi antar att  $\vec{V}$  är en tangentvektor till bågen  $AB$  i  $A$  och att  $\vec{W}$  är en tangentvektor till bågen  $AC$  i  $A$ . Vinkeln  $\angle A$  är definierad som

$$\angle A = \angle(\vec{V}, \vec{W}).$$

Vektorerna  $\vec{V}$  och  $\vec{W}$  är vinkelräta till vektorn  $\vec{A}$ , som är Ortsvektor till  $A$ . Med hjälp av kryssproduktens definition får vi att vektorn  $\vec{A} \times \vec{V}$  är vinkelrät till  $\vec{A}$  och  $\vec{V}$  och riktningen får vi genom att rotera  $\vec{V}$   $90^\circ$  till höger runt  $\vec{A}$ , se figur 1.2.3. På samma sätt får vi riktningen för  $\vec{A} \times \vec{W}$  genom att rotera  $\vec{W}$   $90^\circ$  till höger runt  $\vec{A}$ . Rotationer ändrar inte vinklars storlek, så

$$\angle(\vec{V}, \vec{W}) = \angle(\vec{A} \times \vec{V}, \vec{A} \times \vec{W}).$$

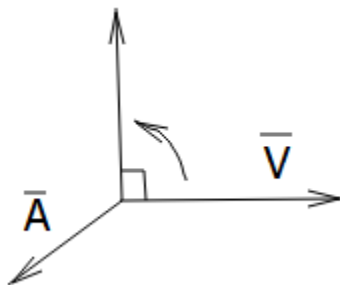
Med hjälp av högerhandsregeln får vi att  $\vec{A} \times \vec{V}$  pekar i samma riktning som  $\vec{A} \times \vec{B}$ , eftersom vektorerna  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  och  $\vec{V}$  alla ligger i samma plan. På samma sätt får vi att vektorerna  $\vec{A} \times \vec{W}$  och  $\vec{A} \times \vec{C}$  har samma riktning, eftersom vektorerna  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  och  $\vec{W}$  alla ligger i samma plan. Därför är

$$\angle(\vec{A} \times \vec{V}, \vec{A} \times \vec{W}) = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}).$$

Med hjälp av ekvationerna får vi

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle(\vec{V}, \vec{W}) \\ &= \angle(\vec{A} \times \vec{V}, \vec{A} \times \vec{W}) \\ &= \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}).\end{aligned}$$

Med samma metod får vi att  $\angle B = \angle(\vec{B} \times \vec{C}, \vec{B} \times \vec{A})$  och  $\angle C = \angle(\vec{C} \times \vec{A}, \vec{C} \times \vec{B})$ .  $\square$



FIGUR 1.2.3. Riktningen för vektorn  $\vec{A} \times \vec{V}$

### 1.3. Triangelns area och vinkelsumma

Med hjälp av vinklarna kan vi räkna ut triangelns area.

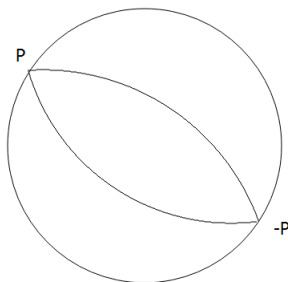
TEOREM 1.6. (*Harriot-Girards sats*) I en sfärisk triangel  $\triangle ABC$  är arean

$$\text{area}(\triangle ABC) = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

där  $R$  är sfärens radie och vinklarna är uttryckta i radianer.

Före vi kan bevisa satsen måste vi definiera tre begrepp som används i beviset.

DEFINITION 1.7. Anta att  $P$  är en punkt på sfären. En *antipod* är den punkt som finns på samma diameter som  $P$ , men i motsatt ända av diametern. Denna punkt betecknas  $-P$ . En *månskära* är det område på sfären som avgränsas av två storcirkelbågar som går från  $P$  till  $-P$ . Vinkeln  $\angle P = \angle(-P)$  mellan storcirkelbågarna bestämmer månskärans storlek. En *hemisfär* är en halv sfär.



FIGUR 1.3.1. Månskära

BEVIS. (Harriot-Girards sats). Vi antar att  $\triangle ABC$  är en triangel. Vi bildar en månskära på så sätt att  $A$ -månskära är en månskära med ena hörnet i  $A$  och andra hörnet i  $-A$  och månskärans sidor utgörs av förlängningar till bågarna  $AB$  och  $AC$ . På motsvarande sätt bildar vi  $B$ -månskära och  $C$ -månskära. Vi antar att  $H_c$  är den hemisfär som innehåller  $C$  och begränsas av storcirkeln som går genom punkterna  $A$  och  $B$ . Vi bildar nu uttryck för areorna med hjälp av trianglar:

$$\text{area}(H_c) = \text{area}(\triangle ABC) + \text{area}(\triangle(-A)BC) + \text{area}(\triangle A(-B)C) + \text{area}(\triangle(-A)(-B)C)$$

$$\text{area}(A\text{-månskära}) = \text{area}(\triangle ABC) + \text{area}(\triangle(-A)BC)$$

$$\text{area}(B\text{-månskära}) = \text{area}(\triangle ABC) + \text{area}(\triangle A(-B)C)$$

$$\text{area}(C\text{-månskära}) = \text{area}(\triangle ABC) + \text{area}(\triangle AB(-C)).$$

Förhållandet mellan en månskärans area och sfärens area är samma som förhållandet mellan månskärans vinkel  $\theta$  och  $2\pi$ . Alltså

$$\frac{\text{area}(\text{månskära})}{\text{area}(\text{sfär})} = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Sfärens area är  $4\pi R^2$ , så vi får

$$\text{area(månskära)} = \frac{\theta \cdot \text{area(sfär)}}{2\pi} = \frac{\theta 4\pi R^2}{2\pi} = 2R^2\theta.$$

Vi får således att

$$\begin{aligned} \text{area}(A - \text{månskära}) &= 2R^2\angle A \\ \text{area}(B - \text{månskära}) &= 2R^2\angle B \\ \text{area}(C - \text{månskära}) &= 2R^2\angle C \\ \text{area}(H_c) &= 2R^2\pi. \end{aligned}$$

Med hjälp av detta och uttrycken för areorna får vi

$$\begin{aligned} 2R^2\angle A + 2R^2\angle B + 2R^2\angle C &= \text{area}(A - \text{månskära}) + \text{area}(B - \text{månskära}) + \text{area}(C - \text{månskära}) \\ &= \text{area}(\triangle ABC) + \text{area}(\triangle(-A)BC) + \text{area}(\triangle ABC) + \text{area}(\triangle A(-B)C) \\ &\quad + \text{area}(\triangle ABC) + \text{area}(\triangle AB(-C)). \end{aligned}$$

Detta uttryck kan förenklas om vi använder oss av att  $\text{area}(\triangle AB(-C)) = \text{area}(\triangle(-A)(-B)C)$ .

Vi får detta eftersom en reflektion genom sfärens medelpunkt är en isometri  $f$  som tar varje punkt  $P$  på sfären till antipoden  $-P$ . Funktionsuttrycket är alltså  $f(\triangle AB(-C)) = \triangle(-A)(-B)C$ . Vid isometri bibehålls areorna.

Vi får att ekvationen blir

$$= \text{area}(H_c) + 2\text{area}(\triangle ABC).$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} 2\text{area}(\triangle ABC) &= 2R^2\angle A + 2R^2\angle B + 2R^2\angle C - \text{area}(H_c) \\ \text{area}(\triangle ABC) &= 2R\angle A + R^2\angle B + R^2\angle C - 2R^2\pi/2 \\ &= R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi). \end{aligned}$$

□

Vinkelsumman i en triangel i planet är som bekant  $180^\circ$  eller  $\pi$  om vi uttrycker vinkelns storlek i radianer. Följande sats visar att vinkelsumman i en sfärisk triangel alltid är större än  $\pi$ .

**THEOREM 1.8.** *I en sfärisk triangel  $\triangle ABC$  är vinkelsumman för triangelns vinklar*

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \frac{\text{area}(\triangle ABC)}{R^2}$$

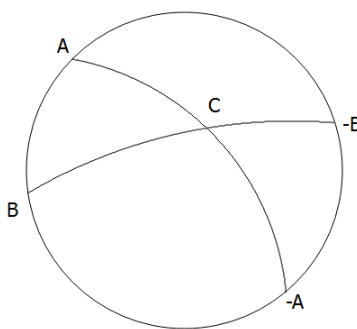
där  $R$  är sfärens radie och vinkeln är uttryckt i radianer.

**BEVIS.** Harriot-Girrards sats ger att arean för en sfärisk triangel  $\triangle ABC$  är

$$\text{area}(\triangle ABC) = R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)$$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned}\pi + \frac{\text{area}(\triangle ABC)}{R^2} &= \pi + \frac{R^2(\angle A + \angle B + \angle C - \pi)}{R^2} \\ &= \angle A + \angle B + \angle C.\end{aligned}$$

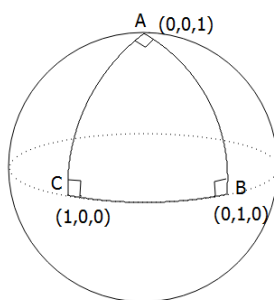


FIGUR 1.3.2. Triangelns area

□

EXEMPEL 1.9. Vi kan konstruera en triangel med tre räta vinklar. Vi kan t.ex. tänka oss att vi har punkten  $A$  på nordpolen och två punkter  $B$  och  $C$  på ekvatorn. Om vi nu konstruerar triangeln så att vinkel  $\angle A$  är rät har vi fått en triangel med tre räta vinklar. Vinkelsumman är alltså  $\frac{3}{2}\pi$ . Vi får också vinkelsumman med hjälp av teorem 1.8, då vi vet att triangelns area är  $1/8$  av hela sfärens area:

$$\begin{aligned}\angle A + \angle B + \angle C &= \pi + \frac{\text{area}(\triangle ABC)}{R^2} \\ &= \pi + \frac{\frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2}{R^2} = \pi + \frac{1}{2}\pi \\ &= \frac{3}{2}\pi = 270^\circ.\end{aligned}$$

FIGUR 1.3.3. Triangel  $\triangle ABC$  med tre räta vinklar

### 1.4. Trigonometriska formler för en rätvinklig triangel

En rätvinklig triangel på sfären har precis som en rätvinklig triangel i planet en vinkel som är rät. För en rätvinklig triangel på sfären gäller dock inte samma trigonometriska regler som för en triangel i planet. Men med hjälp av de trigonometriska reglerna för en triangel i planet kan vi härleda regler som gäller för rätvinkliga sfäriska trianglar (se. [8]).

TEOREM 1.10. *Anta att  $\triangle ABC$  är en sfärisk triangel och att vinkel  $C$  är rät. Bågarna  $a$ ,  $b$  och  $c$  är motstående sidor till hörnen  $A, B$  och  $C$ . Då gäller följande*

$$(1) \quad \cos \angle c = \cos \angle a \cos \angle b$$

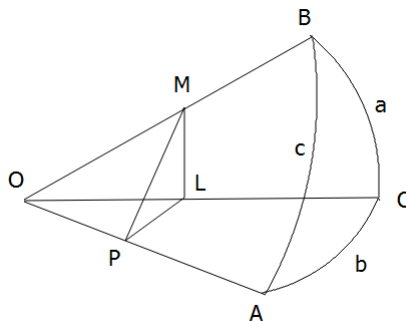
$$(2) \quad \cos \angle A = \frac{\tan \angle b}{\tan \angle c}$$

$$(3) \quad \sin \angle A = \frac{\sin \angle a}{\sin \angle c}$$

$$(4) \quad \tan \angle A = \frac{\tan \angle a}{\sin \angle b}$$

ANMÄRKNING 1.11. Regeln  $\cos \angle c = \cos \angle a \cos \angle b$  kallas ibland för Pythagoras sats för sfäriska trianglar.

BEVIS. (Teorem 1.10) Vi antar först att både  $a$  och  $b$  är mindre än  $\frac{\pi}{2}$ . Vi antar att  $O$  är sfärens medelpunkt. Vi konstruerar en rätvinklig triangel  $\triangle PML$  på så sätt att punkten  $M$  finns på linjen  $OB$ ,  $L$  finns på linjen  $OC$  och  $P$  finns på linjen  $OA$ . Vi placerar punkterna på linjerna på ett sådant sätt att  $PL \perp OA$  och  $PM \perp OA$ . På grund av detta är  $OA \perp LPM$  och därmed är  $OAC \perp LPM$ . Planen är vinkelräta, eftersom vi får plan  $OAC$  om vi roterar plan  $LPM$   $\frac{\pi}{2}$ . Eftersom  $C$  är en rät vinkel är  $OBC \perp OAC$  och således får vi att  $OBC \perp LPM$ . Vi får alltså att vinklarna  $\angle OLM$  och  $\angle MLP$  är räta. Trianglarna  $\triangle OML$  och  $\triangle MLP$  är därmed rätvinkliga. Triangel  $\triangle OPM$  är också rätvinklig, eftersom  $PM \perp OA$ . Vi bevisar först punkt 1.



FIGUR 1.4.1. Rätvinkliga trianglar

Med hjälp av definitionen av cosinus i en rätvinklig triangel i planet får vi

$$\cos \angle POM = \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{OL} \cdot \frac{OL}{OM}.$$

Eftersom  $\frac{OP}{OL} = \cos \angle POL$  och  $\frac{OL}{OM} = \cos \angle LOM$  får vi

$$\cos \angle POM = \cos \angle POL \cos \angle LOM.$$

Vinkeln  $\angle POM = \angle AOB = \angle c$ , vinkeln  $\angle POL = \angle AOC = \angle b$  och  $\angle LOM = \angle COB = \angle a$  och därmed får vi

$$\cos \angle c = \cos \angle a \cos \angle b.$$

2. Med hjälp av definitionen av cosinus får vi också

$$\cos \angle LPM = \frac{PL}{PM} = \frac{PL}{OP} \cdot \frac{OP}{PM} = \frac{\tan \angle POL}{\tan \angle POM}.$$

Vinkeln  $\angle LPM = \angle CAB = \angle A$  och vinkeln  $\angle POM = \angle AOB = \angle c$  och således får vi

$$\cos \angle A = \frac{\tan \angle b}{\tan \angle c}.$$

3. Med hjälp av definitionen av sinus i en rätvinklig triangel i planet får vi

$$\sin \angle LPM = \frac{LM}{PM} = \frac{LM}{OM} \cdot \frac{OM}{PM} = \frac{\sin \angle LOM}{\sin \angle POM}.$$

och eftersom  $\angle LPM = \angle A$ ,  $\angle LOM = \angle a$  och  $\angle POM = \angle c$  är

$$\sin \angle A = \frac{\sin \angle a}{\sin \angle c}.$$

4. Med hjälp av definitionen av tangens i en rätvinklig triangel i planet får vi

$$\tan \angle LPM = \frac{LM}{PL} = \frac{LM}{OL} \cdot \frac{OL}{PL} = \frac{\tan \angle LOM}{\tan \angle POL}$$

$$\tan \angle A = \frac{\tan \angle a}{\tan \angle b}.$$

Vi antar nu att både  $a$  och  $b$  är större än  $\frac{\pi}{2}$ . Vi bildar  $C$ -månskära genom att förlänga storcirkelbågarna  $a$  och  $b$  och låta dem mötas i punktens  $C$  antipod  $-C$ . Detta gör att vi får en rätvinklig triangel med sidorna  $B(-C)$  och  $A(-C)$ , vilka båda är mindre än  $\frac{\pi}{2}$ . Vi kan nu använda formlerna vi redan härlett och vi får

$$\begin{aligned} \cos \angle c &= \cos \angle B(-C) \cos \angle A(-C) = \cos(\pi - \angle a) \cos(\pi - \angle b) \\ &= \cos \angle a \cos \angle b \end{aligned}$$

och

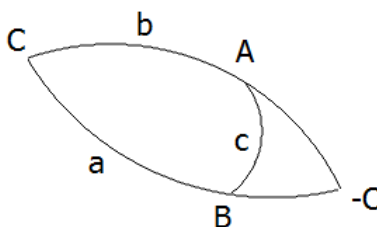
$$\begin{aligned} \cos \angle BA(-C) &= \frac{\tan \angle A(-C)}{\tan \angle AB} \\ \cos(\pi - \angle BAC) &= \frac{\tan(\pi - \angle AC)}{\tan \angle AB} \\ \cos \angle A &= \frac{\tan \angle b}{\tan \angle c}. \end{aligned}$$

På samma sätt får vi

$$\begin{aligned}\sin \angle BA(-C) &= \frac{\sin \angle B(-C)}{\sin \angle AB} \\ \sin(\pi - \angle BAC) &= \frac{\sin(\pi - \angle BC)}{\sin \angle AB} \\ \sin \angle A &= \frac{\sin \angle a}{\sin \angle c}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\tan \angle BA(-C) &= \frac{\tan \angle B(-C)}{\sin \angle A(-C)} \\ \tan(\pi - \angle BAC) &= \frac{\tan(\pi - \angle BC)}{\sin(\pi - \angle AC)} \\ \tan \angle A &= \frac{\tan \angle a}{\sin \angle b}.\end{aligned}$$



FIGUR 1.4.2. C-månskära

Vi antar till sist att  $a > \frac{\pi}{2}$  och  $b < \frac{\pi}{2}$ . Vi bildar en månskära med hörnen  $B$  och  $-B$  på så sätt att vi förlänger storcirkelbågarna  $c$  och  $a$  så att de skär varandra i  $-B$ . På så sätt bildas den rätvinkliga triangeln  $\triangle A(-B)C$ , med sidorna  $b$  och  $(-B)C$ , vilka är mindre än  $\frac{\pi}{2}$ . Vi använder oss igen av samma formler. Vi får

$$\begin{aligned}\cos \angle A(-B) &= \cos \angle b \cos \angle (-B)C \\ \cos(\pi - \angle c) &= \cos \angle b \cos(\pi - \angle a) \\ \cos \angle c &= \cos \angle a \cos \angle b\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\cos \angle (-B)AC &= \frac{\tan \angle b}{\tan \angle A(-B)} \\ \cos(\pi - \angle BAC) &= \frac{\tan \angle b}{\tan \angle (\pi - AB)} \\ \cos \angle A &= \frac{\tan \angle b}{\tan \angle c}.\end{aligned}$$

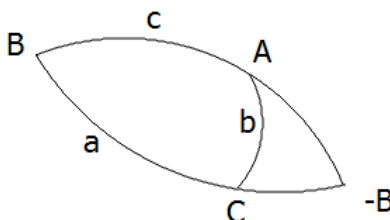


Vi får också att

$$\begin{aligned}\sin \angle(-B)AC &= \frac{\sin \angle(-B)C}{\sin \angle A(-B)} \\ \sin(180^\circ - \angle BAC) &= \frac{\sin(\pi - \angle BC)}{\sin(\pi - \angle AB)} \\ \sin \angle A &= \frac{\sin \angle a}{\sin \angle c}\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}\tan \angle(-B)AC &= \frac{\tan \angle(-B)C}{\sin \angle b} \\ \tan(\pi - \angle BAC) &= \frac{\tan(\pi - \angle BC)}{\sin \angle b} \\ \tan \angle A &= \frac{\tan \angle a}{\sin \angle b}.\end{aligned}$$



FIGUR 1.4.3. B-månskära

□

### 1.5. Cosinussatsen och sinussatsen

TEOREM 1.12. (*Cosinussatsen*) Anta att  $\triangle ABC$  är sfärisk triangel och att bågarna  $a$ ,  $b$  och  $c$  är motstående sidor till hörnen  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Då gäller

$$\cos \angle a = \cos \angle b \cos \angle c + \sin \angle b \sin \angle c \cos \angle A.$$

BEVIS. Definitionen av skalärprodukten är att  $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$ . Vi använder oss nu av Lemma 5 som ger att  $\angle A = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$  och definitionen av den skalära produkten och får

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = |\vec{A} \times \vec{B}| |\vec{A} \times \vec{C}| \cos \angle A.$$

Eftersom  $\angle(\vec{A}, \vec{B}) = \angle c$  och  $\angle(\vec{A}, \vec{C}) = \angle b$  får vi med hjälp av definitionen för kryssprodukten att

$$\begin{aligned}|\vec{A} \times \vec{B}| &= |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \angle c \\ |\vec{A} \times \vec{C}| &= |\vec{A}| |\vec{C}| \sin \angle b.\end{aligned}$$

Längden för Ortsvektorerna  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  och  $\vec{C}$  är lika med radien  $R$  för sfären. Vi får därför genom att sätta in uttrycken för kryssprodukten i uttrycket för skalärprodukten

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) &= |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \angle c |\vec{A}| |\vec{C}| \sin \angle b \cos \angle A \\ &= R^4 \sin \angle b \sin \angle c \cos \angle A.\end{aligned}$$

Vi ska nu förenkla vänstra sidan av uttrycket med hjälp av Binet-Cauchy satsen (se [7, s. 114]) som säger att

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Vi får med hjälp av denna regel att

$$\begin{aligned}(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{A}) \\ &= |\vec{A}|^2 |\vec{B}| |\vec{C}| \cos \angle a - (|\vec{A}| |\vec{C}| \cos \angle b) (|\vec{B}| |\vec{A}| \cos \angle c) \\ &= R^4 \cos \angle a - R^4 \cos \angle b \cos \angle c.\end{aligned}$$

Genom att först kombinera uttrycken och sedan förenkla det uttryck vi fått får vi att

$$\cos \angle a = \cos \angle b \cos \angle c + \sin \angle b \sin \angle c \cos \angle A.$$

□

ANMÄRKNING 1.13. Om triangeln är rätvinklig får vi

$$\begin{aligned}\cos \angle a &= \cos \angle b \cos \angle c + \sin \angle b \sin \angle c \cos \angle A \\ &= \cos \angle b \cos \angle c.\end{aligned}$$

Vi märker att detta är samma uttryck som vi fick i teorem 1.10 1.

Vi kan nu bevisa triangelolikheten i teorem 1.2 (se [1, s.17]).

BEVIS. (Teorem 1.2 iv) Vi antar att  $A$ ,  $B$  och  $C$  är hörn i triangeln  $\triangle ABC$  och att bågarna  $a$ ,  $b$  och  $c$  är motstående sidor till hörnen  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Vi antar att  $0 \leq \angle B \leq \pi$ . Cosinusfunktionen är strängt avtagande i intervallet  $[0, \pi]$  och därför är också funktionen  $\angle B \mapsto f(\angle B) = \cos \angle a \cos \angle c + \sin \angle a \sin \angle c \cos \angle B$  strängt avtagande i intervallet  $[0, \pi]$ . Funktionen minsta värde i intervallet är därför

$$f(\pi) = \cos \angle a \cos \angle c - \sin \angle a \sin \angle c = \cos(\angle a + \angle c)$$

och funktionens största värde är

$$f(0) = \cos \angle a \cos \angle c + \sin \angle a \sin \angle c = \cos(\angle a - \angle c).$$

Enligt cosinussatsen är

$$\cos \angle b = \cos \angle a \cos \angle c + \sin \angle a \sin \angle c \cos \angle B.$$

Vi får således att

$$\cos \angle b = f(\angle B) \geq \cos(\angle a + \angle c)$$

och därför är

$$\angle b \leq \angle a + \angle c.$$

Vi får med hjälp av detta att

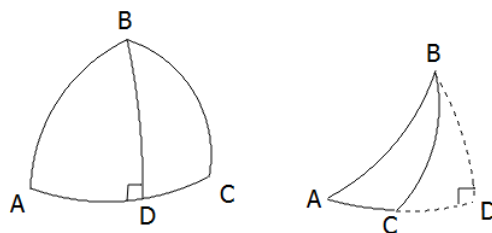
$$\begin{aligned} d(A, B) + d(B, C) &= r(\angle AOB) + r(\angle BOC) \\ &= r(\angle C + \angle a) \\ &\geq r\angle b = r(\angle AOC) \\ &= d(A, C). \end{aligned}$$

□

TEOREM 1.14. (*Sinussatsen*) Anta att  $\triangle ABC$  är sfärisk triangel och att bågarna  $a$ ,  $b$  och  $c$  är motstående sidor till hörnen  $\angle A$ ,  $\angle B$  och  $\angle C$ . Då gäller

$$\frac{\sin \angle a}{\sin \angle A} = \frac{\sin \angle b}{\sin \angle B} = \frac{\sin \angle c}{\sin \angle C}.$$

BEVIS. Vi konstruerar två rätvinkliga trianglar på så sätt att vi ritar ut en båge  $BD$  från hörnet  $B$  så att  $BD$  är vinkelrät med  $AC$ , eller förlängningen till bågen  $AC$ , i  $D$ . Trianglarna  $\triangle ABD$  och  $\triangle BCD$  är nu vinkelräta och vi kan använda oss av teorem 1.10.



FIGUR 1.5.1. Trianglarna  $\triangle ABD$  och  $\triangle BCD$

Vi får

$$\sin \angle A = \frac{\sin \angle BD}{\sin \angle c}$$

och

$$\sin \angle C = \frac{\sin \angle BD}{\sin \angle a}.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} \sin \angle BD &= \sin \angle c \sin \angle A \\ \sin \angle BD &= \sin \angle a \sin \angle C. \end{aligned}$$

Vi får

$$\sin \angle c \sin \angle A = \sin \angle a \sin \angle C$$

och därmed är

$$\frac{\sin \angle a}{\sin \angle A} = \frac{\sin \angle c}{\sin \angle C}.$$

Genom att rita en båge  $CD$  från  $C$  i en rät vinkel till  $AB$  eller förlängningen till bågen  $AB$  får vi att

$$\sin \angle CD = \sin \angle b \sin \angle A$$

$$\sin \angle CD = \sin \angle a \sin \angle B$$

och därmed är

$$\frac{\sin \angle a}{\sin \angle A} = \frac{\sin \angle b}{\sin \angle B}.$$

□

Vi kan också bevisa sinussatsen med hjälp av cosinussatsen.

BEVIS. (sinussatsen) Med hjälp av cosinussatsen får vi

$$\cos \angle A = \frac{\cos \angle a - \cos \angle b \cos \angle c}{\sin \angle b \sin \angle c}.$$

Med hjälp av detta och trigonometrins grundformeln får vi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin \angle a}{\sin \angle A} \right)^2 &= \frac{\sin^2 \angle a}{1 - \cos^2 \angle A} = \frac{\sin^2 \angle a}{1 - \left( \frac{\cos \angle a - \cos \angle b \cos \angle c}{\sin \angle b \sin \angle c} \right)^2} \\ &= \frac{\sin^2 \angle a \sin^2 \angle b \sin^2 \angle c}{\sin^2 \angle b \sin^2 \angle c - (\cos \angle a - \cos \angle b \cos \angle c)^2} \\ &= \frac{\sin^2 \angle a \sin^2 \angle b \sin^2 \angle c}{(1 - \cos^2 \angle b)(1 - \cos^2 \angle c) - \cos^2 \angle a + \cos \angle a \cos \angle b \cos \angle c - \cos^2 \angle b \cos^2 \angle c} \\ &= \frac{\sin^2 \angle a \sin^2 \angle b \sin^2 \angle c}{1 - \cos^2 \angle c - \cos^2 \angle b + \cos^2 \angle b \cos^2 \angle c - \cos^2 \angle a + \cos \angle a \cos \angle b \cos \angle c - \cos^2 \angle b \cos^2 \angle c} \\ &= \frac{\sin^2 \angle a \sin^2 \angle b \sin^2 \angle c}{1 - \cos^2 \angle a - \cos^2 \angle b - \cos^2 \angle c + \cos \angle a \cos \angle b \cos \angle c}. \end{aligned}$$

Detta är ett symmetrisk uttryck av  $a$ ,  $b$  och  $c$ . Vi får därför att

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle a}{\sin \angle A} &= \frac{\sin \angle b}{\sin \angle B} = \frac{\sin \angle c}{\sin \angle C} \\ &= \frac{\sin \angle a \sin \angle b \sin \angle c}{\sqrt{1 - \cos^2 \angle a - \cos^2 \angle b - \cos^2 \angle c + \cos \angle a \cos \angle b \cos \angle c}}. \end{aligned}$$

□

Vi har redan bevisat cosinussatsen för sidor, men det finns också en cosinussats för vinklar.

TEOREM 1.15. (*Cosinussatsen för vinklar*) Anta att  $\triangle ABC$  är sfärisk triangel och att bågarna  $a$ ,  $b$  och  $c$  är motstående sidor till hörnen  $\angle A$ ,  $\angle B$  och  $\angle C$ . Då gäller

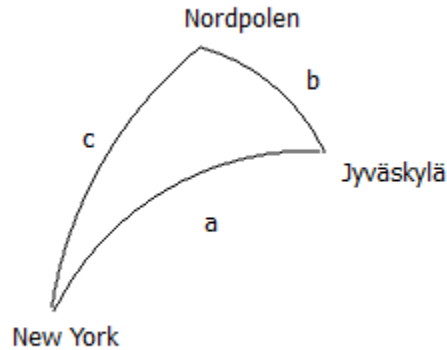
$$\cos \angle A = -\cos \angle B \cos \angle C + \sin \angle B \sin \angle C \cos \angle a$$

BEVIS. Denna sats kan bevisas med hjälp av dualitet, se [4, s. 59]. Satsen kan också bevisas med hjälp av cosinussatsen för sidor på liknande sätt som sinussatsen.

□

Vi kan nu med hjälp av cosinusatsen lätt räkna ut avstånd på sfären. Om vi approximerar jorden med en sfär kan vi också räkna ut avstånd på jorden med hjälp av cosinussatsen

- EXEMPEL 1.16. a) Bestäm avståndet mellan Jväsckylä och New York.  
 b) Beräkna kursen man ska hålla då man startar från Jväsckylä om man vill flyga den kortaste vägen till New York.  
 c) Var på storcirkelbågen mellan orterna finns den nordligaste punkten? Ange dess koordinater.



FIGUR 1.5.2. Avståndet från Jväsckylä till New York

Lösning. a) För att räkna ut avståndet använder vi oss av en triangel som har hörnen i Jväsckylä, i New York och på nordpolen. Jväsckylä har latituden  $62^\circ$  nord och longituden  $26^\circ$  öst. New York har latituden  $41^\circ$  nord och longituden  $74^\circ$  väst. Vi betecknar bågen mellan Jväsckylä och New York med  $a$ , bågen mellan Jväsckylä och nordpolen med  $b$  och bågen mellan New York och nordpolen med  $c$ . Vi står nu att

$$\begin{aligned}\angle b &= 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ \\ \angle c &= 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ \\ \angle(b, c) &= \angle A = 26^\circ - (-74^\circ) = 100^\circ.\end{aligned}$$

Med hjälp av cosinusatsen kan vi nu ta reda på  $\angle a$

$$\begin{aligned}\cos \angle a &= \cos \angle b \cos \angle c + \sin \angle b \sin \angle c \cos \angle A \\ &= \cos 28^\circ \cos 49^\circ + \sin 28^\circ \sin 49^\circ \cos 100^\circ \\ &\approx 0,51773964 \\ \angle a &\approx 1,02659 \\ &\approx 58,81927^\circ.\end{aligned}$$

Avståndet mellan New York och Jväsckylä får vi nu genom att multiplicera  $\angle a$  med jordens radie.

$$d(\text{New York, Jväsckylä}) = 1,02659 \cdot 6360\text{km} = 6529\text{km} \approx 6500\text{km}.$$

b) Vi beräknar nu vinkeln  $\angle J$  vid Jyväskylä med hjälp av cosinussatsen.

$$\cos \angle c = \cos \angle a \cos \angle b + \sin \angle a \sin \angle b \cos \angle J$$

$$\begin{aligned} \cos \angle J &= \frac{\cos \angle c - \cos \angle a \cos \angle b}{\sin \angle a \sin \angle b} \\ &= \frac{\cos 49^\circ - \cos 58,8^\circ \cos 28^\circ}{\sin 49^\circ \sin 28^\circ} \\ &\approx 0,5681599 \\ \angle J &\approx 55,38^\circ \approx 55^\circ. \end{aligned}$$

Därmed är kursen vid resans start  $360^\circ - 55^\circ = 305^\circ$ .

c) Vi ritlar nu ut en storcirkelbåge från Nordpolen till den nordligaste punkten  $P$  på storcirkelbågen mellan Jyväskylä och New York. Storcirkelbågen mellan Jyväskylä och New York tangerar en parallellcirkel i punkten  $P$ . Vi får därför två rätvinkliga sfäriska trianglar. Vi betecknar bågen mellan Jyväskylä och  $P$  med  $d$  och bågen mellan Nordpolen och  $P$  med  $e$ . Vi kan nu beräkna  $\angle e$  med hjälp av sinussatsen

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle b}{\sin 90^\circ} &= \frac{\sin \angle e}{\sin \angle J} \\ \sin \angle e &= \sin \angle b \sin \angle J \\ &= \sin 28^\circ \sin 55,38^\circ \\ &\approx 0,386346 \\ \angle e &\approx 22,73^\circ. \end{aligned}$$

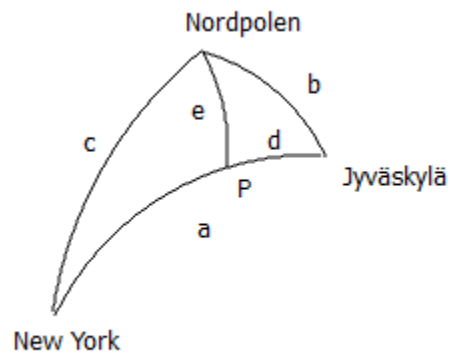
Med hjälp av sats 9 kan vi räkna ut  $\angle d$  eftersom vinkeln vid  $P$  är rät. Vi får

$$\begin{aligned} \cos \angle d &= \cos \angle e \cos \angle b \\ &= \cos 22,73^\circ \cos 28^\circ \\ &\approx 0,8143743 \\ \angle d &\approx 35,47^\circ. \end{aligned}$$

Vi behöver ännu räkna ut vinkeln  $\angle D$  mellan bågen  $b$  och bågen  $d$  vid nordpolen. Vi kan räkna ut denna med hjälp av att igen använda oss av sinussatsen:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle b}{\sin 90^\circ} &= \frac{\sin \angle d}{\sin \angle D} \\ \sin \angle D &= \frac{\sin \angle d}{\sin \angle b} \\ &= \frac{\sin 35,47^\circ}{\sin 28^\circ} \\ &\approx 0,272423 \\ \angle D &\approx 15,81^\circ. \end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna koordinaterna för  $P$ . Latituden beräknar vi med hjälp av  $\angle e \approx 22,73^\circ$ . Vi får att latituden är  $90^\circ - 22,73^\circ = 67,27^\circ \approx 67^\circ$  nord. Longituden beräknar vi med hjälp av  $\angle D$  och longituden för Jyväskylä. Longituden är  $26^\circ - 15,81^\circ = 10,19^\circ \approx 10^\circ$  öst.



FIGUR 1.5.3. Den nordligaste punkten på storcirkelbågen

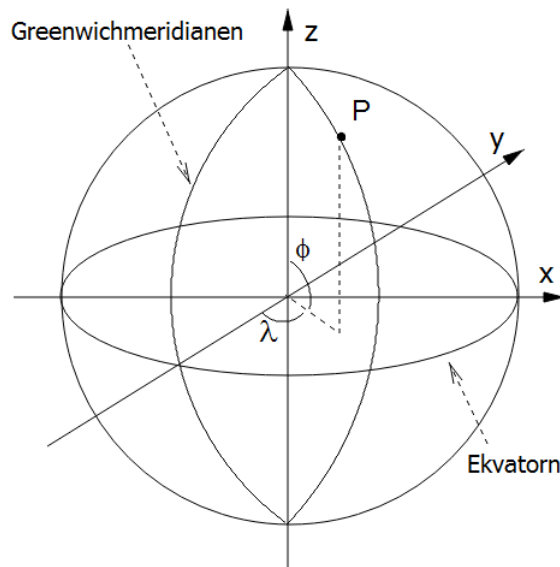




## KAPITEL 2

### Kartprojektion

Jordens form kan bäst beskrivas med hjälp av en rotationsellipsoid. Om vi tänker oss att jordens mitt finns i origo i ett rätvinkligt kartesiskt koordinatsystem får vi alltså en approximation av jordens form genom att rotera en ellips runt  $z$ -axeln. Jordens radie vid ekvatorn är 6378,140 km, medan radien vid polerna är 6356,55 km. För att förenkla beräkningarna approximerar vi i detta kapitel jordens form med hjälp av en sfär, som har mittpunkten i origo. Vi placerar jorden på ett sådant sätt att ekvatorn ligger i  $x,y$ -planet och Greenwichmeridianen skär den negativa  $y$ -axeln. Läget för en punkt  $P$  på jorden definierar vi på liknande sätt som i kapitel 1, alltså med hjälp av de sfäriska koordinater  $(R, \phi, \lambda)$ , där  $R$  är avståndet från punkten till jordens medelpunkt,  $\phi$  är latituden och  $\lambda$  är longituden. Longituden  $\lambda$  definierar vi nu som är vinkeln mellan Greenwichmeridianen och projektionen av  $\overrightarrow{OP}$  på  $x,y$ -planet. Latituden  $\phi$  är vinkeln mellan projektionen och radien.



FIGUR 2.0.1. Jorden

Med hjälp av kartprojektioner avbildar vi jorden på ett plan. Problemet är att det inte är möjligt att avbilda jorden på ett plan utan formförändring. Följande sats bevisar detta.

TEOREM 2.1. *Det finns ingen isometri mellan ett område på sfären och ett område i planet, så länge området på sfären innehåller minst en triangel.*

BEVIS. Vi tänker oss att vi har en isometri mellan en triangel på sfären och en triangel i planet. En isometri bevarar avstånd på så sätt att den avbildar den kortaste kurvan till den kortaste kurvan. Detta innebär att en triangel på sfären avbildas som en triangel i planet. Vi antar att en likbent triangel  $\triangle ABC$  avbildas i planet som triangeln  $\triangle EFG$ . Eftersom isometrin bevarar avstånd är båda triangelarna sidlängderna  $b, c$  och  $c$ . Vi beräknar nu höjden  $d$  i triangel  $\triangle ABC$ . Vi kan beräkna denna med hjälp av Pythagoras sats, eftersom höjden är vinkelrät till basen  $b$ . Höjden delar basen i två lika stora delar, eftersom triangeln är likbent. Vi får

$$d = \sqrt{c^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Vi beräknar därefter höjden  $e$  i triangeln  $\triangle EFG$ . Vi använder oss nu av Pythagoras sats för en sfärisk triangel. Vi får

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos \frac{b}{2} \cos e \\ \cos e &= \frac{\cos c}{\cos \frac{b}{2}} \\ e &= \cos^{-1} \left( \frac{\cos c}{\cos \frac{b}{2}} \right). \end{aligned}$$

Vi märker att  $d \neq e$ . Detta är en motsägelse eftersom en isometri bevarar avstånd.  $\square$

ANMÄRKNING 2.2. Om vi approximerar cosinusfunktionen med hjälp Taylors polynom av andra graden och antar att  $b$  och  $c$  är korta får vi

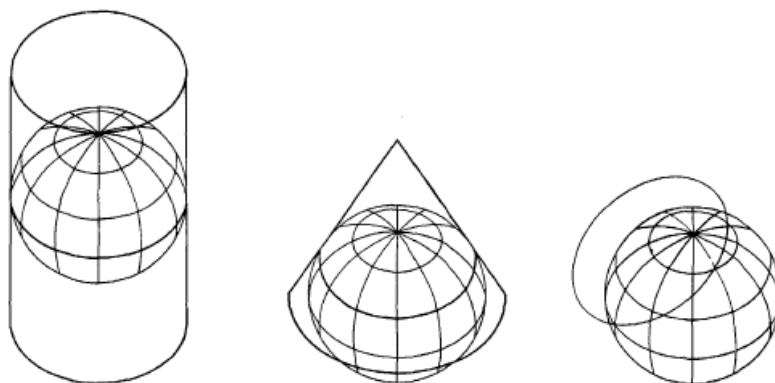
$$\begin{aligned} \cos e &= \frac{\cos c}{\cos \frac{b}{2}} \\ 1 + \frac{e^2}{2} &\sim \frac{1 + \frac{c^2}{2}}{1 + \frac{b^2}{8}} \\ &\sim \left(1 + \frac{c^2}{2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{8}\right) \\ &= 1 + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{8} - \frac{b^2 c^2}{16} \\ &\sim 1 + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{8} \\ \frac{e^2}{2} &\sim \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{8} \\ e^2 &\sim c^2 - \frac{b^2}{4} \\ e &\sim \sqrt{c^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Om  $b$  och  $c$  är korta är alltså  $e$  och  $d$  nästan lika långa.

Eftersom det inte är möjligt att konstruera en projektion som avbildar jorden korrekt finns det inte heller en projektion som kan klassas som den bästa projektionen i alla lägen. I stället försöker man hitta den bästa projektionen utgående från vad kartan ska användas till. Detta har lett till att det finns över hundra olika publicerade kartprojektioner. De flesta kartprojektioner kan dessutom varieras genom att välja olika projektionscentrum.

De flesta projektioner är antingen ytriaktiga projektioner eller konforma projektioner. En ytriaktig projektion är en projektion där t.ex. ett mynt täcker ett lika stort område på jorden oberoende var på kartan man placerar myntet. En konform projektion är en projektion där vinklar och former bibehålls lokalt. Meridianer och paralleller är vinkelräta på konforma kartprojektioner. En projektion kan inte vara både konform och ytriaktig, enligt teorem Egregium, se [6, s.148].

Kartprojektionerna kan också indelas i cylindriska, koniska och azimutala projektioner beroende på hurudan yta jorden avbildas på. Vid en cylindrisk projektion avbildas jordytan på en cylinder som tangerar jorden. Vid en konisk projektion avbildas jordytan på en kon som tangerar jordytan. Efter dessa projektionerna öppnas cylindern och konen till ett plan. Vid azimutala projektioner avbildas jordytan direkt på ett plan som antingen tangerar eller skär jordytan.



FIGUR 2.0.2. Cylindrisk, konisk och azimutal kartprojektion [13, s. 6]

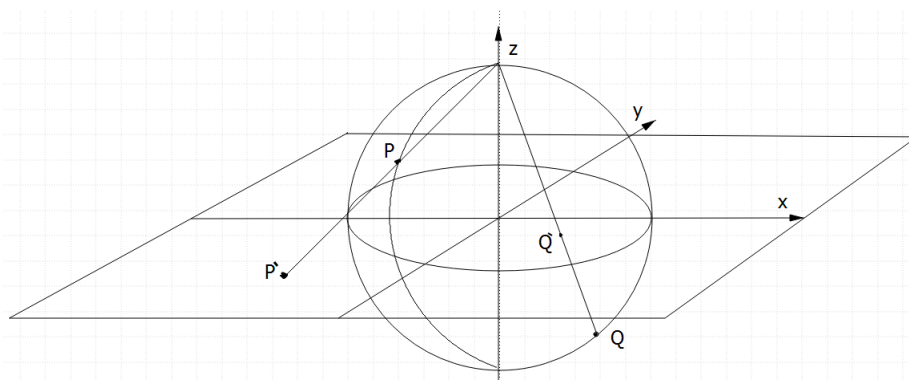
Ett tredje sätt att dela in kartprojektionerna i är om kartprojektionen kan göras rent geometriskt eller inte. Projektionerna beskrivs i båda fallen med hjälp av matematiska funktioner.

### 2.1. Stereografisk projektion

Den stereografiska projektionen är en av de äldsta kartprojektionerna. Greken Hipparchus som levde på 100-talet f.k. anses av en del som den som konstruerade projektionen, medan andra menar att projektionen redan tidigare användes av egyptierna. Projektionen användes fram till ungefär 1500-talet endast för stjärnkartor. Under 1500-talet började man använda projektionen för att rita världskartor (se [13, s. 154]).

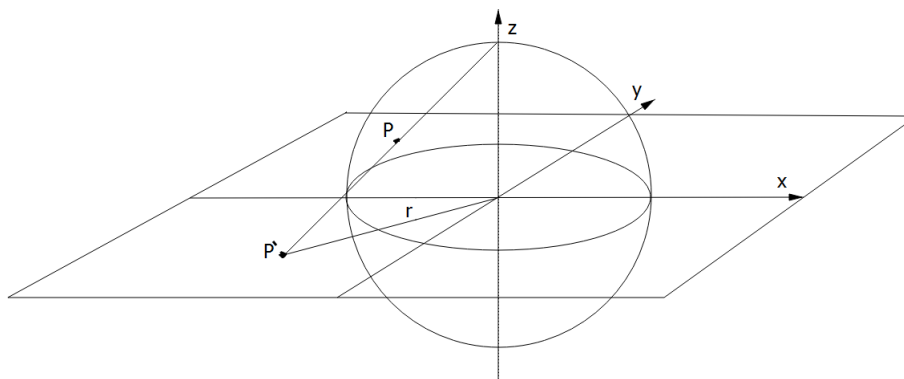
Den stereografiska projektionen är konform och azimutal. Vid stereografisk projektion kan projektionsplanet tangera jorden eller skära jorden. Projektionen kan

görs rent geometriskt. Projektionsstrålar utgår från projektionscentrum genom de punkter som avbildas och skär projektionsytan i punkternas avbilder. Som projektionscentrum används tangeringspunktens antipod om planet tangerar jorden. I detta kapitel kommer vi att studera en stereografisk projektion där projektionscentrum finns på nordpolen och projektionsplanet skär jorden vid ekvatorn. Projektionsplanet finns nu alltså i  $x,y$ -planet och nordpolen på  $z$ -axeln. Om vi vill projicera en punkt  $P$  på norra halvklotet tänker vi oss att en stråle utgår från nordpolen genom punkten  $P$  och träffar planet i punkten  $P'$ . Punkten  $P'$  är nu  $P$ 's projektion eller avbild. När vi projicerar en punkt  $Q$  på södra halvklotet tänker vi oss att en stråle utgår från nordpolen i riktning mot punkten  $Q$ . Före strålen träffar  $Q$  skär den planet i en punkt  $Q'$ . Punkten  $Q'$  är  $Q$ 's projektion.



FIGUR 2.1.1. Stereografisk projektion

Vi härleder projektionen geometriskt med hjälp av rätvinkliga trianglar. Vi börjar med att räkna ut avståndet  $r$  från den projicerade punkten till origo. Vi kan räkna ut detta avstånd med hjälp av rätvinkliga trianglar. Vi räknar först ut  $r$  då punkten  $P$  finns på norra halvklotet.



FIGUR 2.1.2. Stereografisk projektion av  $P$

Vi studerar planet med punkten  $P$ , linjen  $r$  och  $z$ -axeln. Vi ritat ut strålen från projiceringscentrum  $M$  genom  $P$  till  $P'$ . Vi ritat också ut en linje från punkten  $P$

till en punkt  $T$  på linjen  $OP'$  på så sätt att  $r \perp PT$ . Med hjälp av denna linje får vi två rätvinkliga likformiga trianglar  $\triangle OMP'$  och  $\triangle TPP'$ . Trianglarna är likformiga enligt satsen vinkel vinkel, eftersom trianglarna har en gemensam vinkel och båda har en rät vinkel. Längden på sidan  $OM = OP = R$  som är lika stor som sfärens radie. Längden på  $PT$  får vi med hjälp av den rätvinkliga triangeln  $\triangle OPT$  och definitionen av sinus:

$$PT = R \sin \phi.$$

Längden på  $TP'$  får vi genom att först räkna ut  $OT$ . Längden på  $OT$  får vi med hjälp av den rätvinkliga triangeln  $\triangle OPT$  och definitionen av cosinus:

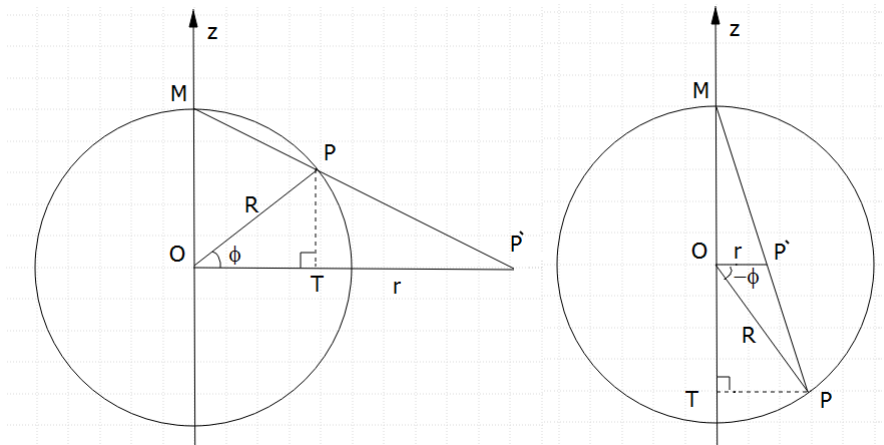
$$OT = R \cos \phi.$$

Förhållandet mellan motsvarande sidor i likformiga trianglar är konstant och vi får därför

$$\begin{aligned} \frac{PT}{TP'} &= \frac{MO}{OP'} \\ \frac{R \sin \phi}{r - OT} &= \frac{R}{r} \\ \frac{R \sin \phi}{r - R \cos \phi} &= \frac{R}{r}. \end{aligned}$$

Vi förenklar nu uttrycket och löser ut  $r$ :

$$\begin{aligned} rR \sin \phi &= rR - R^2 \cos \phi \\ rR - rR \sin \phi &= R^2 \cos \phi \\ r(R - R \sin \phi) &= R^2 \cos \phi \\ r &= \frac{R^2 \cos \phi}{R - R \sin \phi} = R \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}. \end{aligned}$$



FIGUR 2.1.3. Längden av  $r$

På samma sätt kan vi räkna ut ett uttryck för  $r$  om  $P$  finns på södra halvklotet. Vi ritlar nu ut en punkt  $T$  på  $z$ -axeln på så sätt att  $TP \perp OT$ . Vi får nu att  $\triangle MPT \sim \triangle MOP'$  enligt satsen vinkel vinkel.

Vi får först att

$$\begin{aligned} OT &= R \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\phi)\right) \\ PT &= R \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\phi)\right). \end{aligned}$$

Vi räknar nu ut  $r$  med hjälp av förhållandet mellan sidorna:

$$\begin{aligned} \frac{MO}{OP'} &= \frac{PT}{MT} \\ \frac{r}{R} &= \frac{R \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{R \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + R} \\ r &= R \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}. \end{aligned}$$

Vi kan nu ange kartkoordinaterna med hjälp av polära koordinater  $(r, \theta)$ . Eftersom vi definierat vinkeln  $\lambda$ , som vinkeln mellan den negativa  $y$ -axeln och linjens  $OP$  projektion i  $x, y$ -planet får vi att  $\theta = \lambda - \frac{\pi}{2}$ . Koordinaterna är nu alltså

$$(r, \theta) = \left( R \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}, \lambda - \frac{\pi}{2} \right).$$

Sambandet mellan de polära koordinaterna och de rätvinkliga kartesiska koordinaterna  $(x, y)$  är

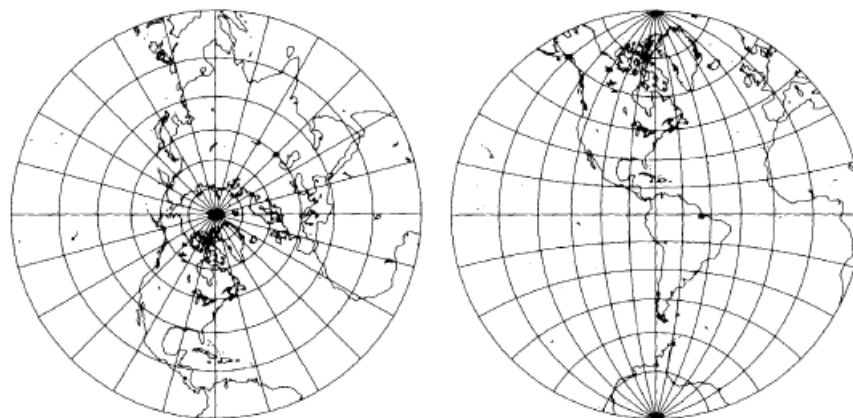
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Vi får nu

$$\begin{aligned} x &= R \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right) = R \frac{\cos \phi \sin \lambda}{1 - \sin \phi} \\ y &= R \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \sin\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right) = -R \frac{\cos \phi \cos \lambda}{1 - \sin \phi}. \end{aligned}$$

Med hjälp av denna projektion kan alla punkter på jorden förutom nordpolen projiceras. Sydpolen projiceras mitt på kartan och de nordligaste delarna projiceras i kartans utkanter. Formförändringen är som minst vid ekvatorn och nära ekvatorn, medan formförändringen är som störst nära nordpolen.

Allmänt gäller att vi med hjälp av en stereografisk projektion kan projicera alla punkter förutom projektionscentrum. Om vi vill projicera ett mindre område på jorden väljer vi tangeringspunkten på så sätt att den finns mitt på det område vi vill projicera. Om vi t.ex vill rita en karta över området nära nordpolen väljer vi nordpolen som tangeringspunkt. Projektionscentrum finns då på sydpolen. I figur 2.1.4 ser vi två olika stereografiska projektioner. Kartan till vänster har tangeringspunkten på nordpolen och kartan till höger har tangeringspunkten i Sydamerika vid ekvatorn.



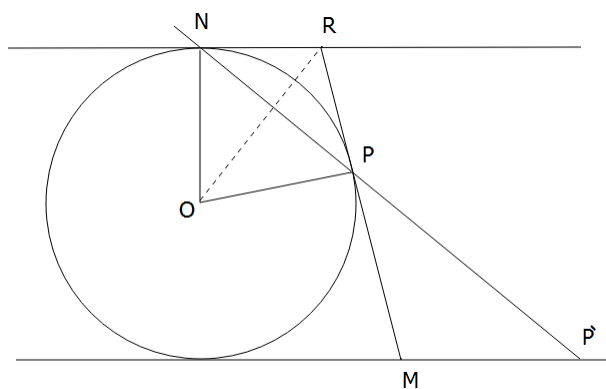
FIGUR 2.1.4. Stereografiska kartprojektioner [13, s. 156]

En av den stereografiska projektionens viktigaste egenskaper är att den är konform. Nästa teorem bevisar detta.

TEOREM 2.3. *Stereografisk projektion är konform*

BEVIS. Vi låter sfären stå på ett plan  $p'$ . Vi projicerar nu planet från tangeringspunktens antipod  $N$ . Tangentplanet till  $N$  betecknar vi med  $n$ . Vi projicerar en punkt  $P$  till punkten  $P'$ . Tangentplanet till  $P$  betecknar vi med  $p$ . Skärningspunkten mellan en tangent till  $P$  betecknar vi med  $R$  och skärningspunkten med samma tangent och  $p'$  betecknar vi med  $M$ . Vi visar först att  $MP = MP'$ .

Triangel  $\triangle ONR$  är kongruent med triangel  $\triangle ORP$  enligt satsen sida sida vinkel, eftersom  $ON = OP =$  radien,  $\angle ONR = \angle OPR = \frac{\pi}{2}$  och  $OR$  är gemensam sida. Således får vi att  $\triangle NRP$  är likbent och därför är  $\angle PNR = \angle NPR$ . Vinkeln  $\angle MPP' = \angle NPR$ , eftersom vinklarna är vertikalkvinklar. Vinkeln  $\angle MP'P$  är lika stor som vinkeln  $\angle PNR$ , eftersom  $p'$  och  $n$  är parallella och  $\angle MP'P$  är likbelägen med vinklens  $\angle PNR$  vertikalkvinkel. Triangeln  $\triangle MPP'$  har alltså två lika stora vinklar och är således likbent. Detta gör att  $MP = MP'$ .

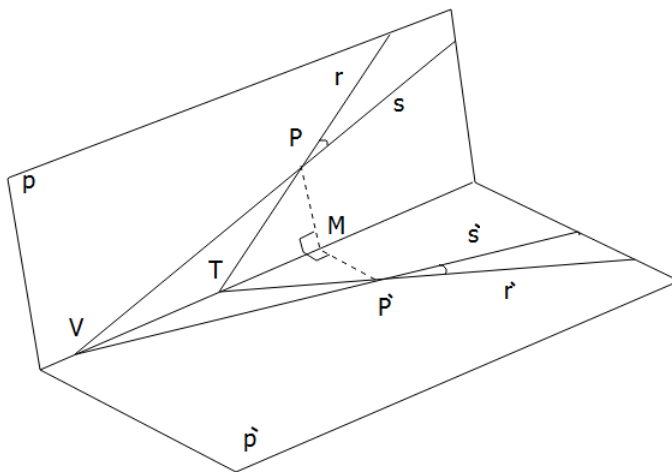
FIGUR 2.1.5. Bild till bevis att  $MP = MP'$ .

En bisektor till punkterna  $P$  och  $P'$  är ett plan

$$b = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - P| = |x - P'|\}.$$

Vi betecknar speglingen i  $P$  och  $P'$ :s bisektor med  $g$ . För funktionen  $g$  gäller att  $g(P) = P'$  och  $g(P') = P$ . Eftersom  $MP = MP'$  och snittet mellan planen  $p'$  och  $p$  är vinkelrätt till linjen  $PP'$  tillhör snittet mellan  $p'$  och  $p$  bisektorn. Vi betecknar en tangent till punkten  $P$  med  $r$  och dess projektion med  $r'$ . Vi får att  $g(r) = r'$  och  $g(r') = r$ . Detta gör att tangenterna skär varandra i en punkt  $T$  på snittet mellan planen  $p'$  och  $p$  och att avståndet mellan punkten  $T$  och punkten  $P$  och är lika som avståndet mellan  $P'$  och  $T$ , se figur 2.1.6. På samma sätt får vi att en annan tangent  $s$  och dess projektion  $s'$  skär varandra i punkten  $V$ , som finns på snittet mellan planen  $p'$  och  $p$  och att  $VP = VP'$ . Vi visar nu att vinkeln mellan  $r$  och  $s$  är lika stor som vinkeln mellan  $r'$  och  $s'$ :

Vi får nu att  $\triangle MPT$  och  $\triangle MP'T$  är kongruenta, eftersom alla sidor är lika långa. I trianglarna  $\triangle MP'V$  och  $\triangle MPV$  är också alla sidor lika stora och de är därmed kongruenta. Vinkeln mellan  $r$  och  $s$  är lika stor som differensen mellan  $\angle VPM$  och  $\angle TPM$ . Vinkeln mellan  $r'$  och  $s'$  är lika stor som differensen mellan  $\angle VP'M$  och  $\angle TP'M$ . Eftersom trianglarna är kongruenta är vinklarna i trianglarna lika stora och därmed är också vinkeln mellan  $r$  och  $s$  lika stor som vinkeln mellan  $r'$  och  $s'$ . Således är alltså den stereografiska projektionen konform.



FIGUR 2.1.6. Vinkeln mellan  $r$  och  $s$  lika stor som vinkeln mellan  $r'$  och  $s'$ .

□

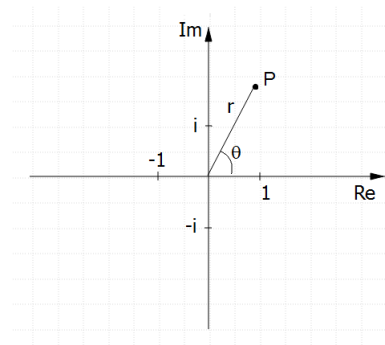
## 2.2. Mercators projektion

Varje punkt i planet kan uttryckas med hjälp av ett komplext tal  $z = x + iy$  eller om talet är uttryckt med hjälp av polära koordinater kan man skriva talet som  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ . Vi kan nu skriva de polära koordinaterna för den stereografiska projektionen som ett komplext tal. Vi antar att sfärens radie  $R = 1$ .



Vi får att

$$z = \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} e^{i(\lambda - \frac{\pi}{2})}$$



FIGUR 2.2.1. Polärt koordinatsystem

Vi betecknar vinkeln  $(\lambda - \frac{\pi}{2}) =: \beta$ . Vi kan nu logaritmera det komplexa talet  $z$  med hjälp av logaritmens principalvärdesfunktion

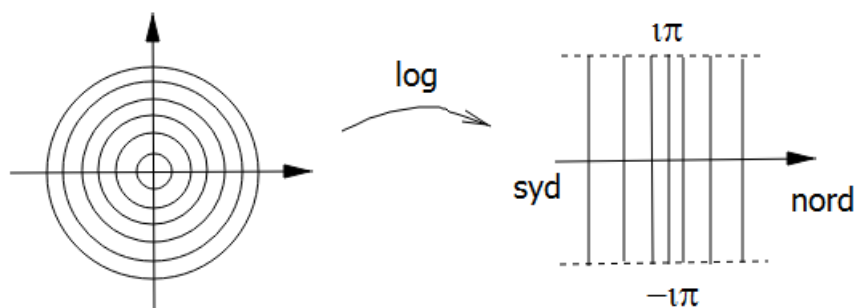
$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z) = \ln |z| + i\theta, \quad \theta \in ]-\pi, \pi]$$

Vi får

$$\log z = \ln \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} + i\beta, \quad \beta \in ]-\pi, \pi]$$

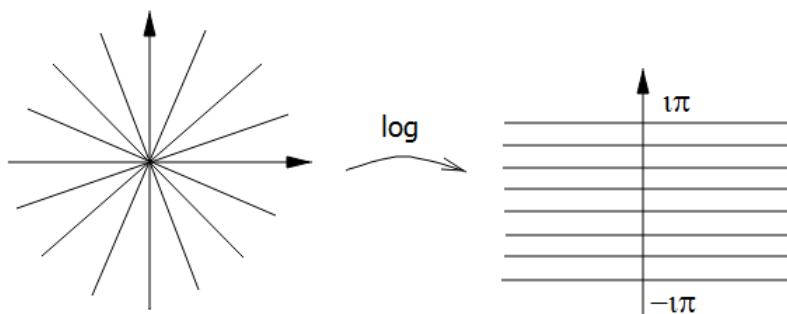
Vi undersöker nu hurudan karta som uppstår med hjälp av denna projektion. Det första vi kan konstatera är att kartan fortfarande är konform, eftersom den stereografiska projektionen är konform och logaritmfunktionen bibehåller vinklarna oförändrade. Logaritmfunktionen bibehåller vinklarna oförändrade eftersom den är analytisk och funktionens derivata aldrig är noll (se [12, s. 41]). Vi undersöker nu vad som händer med jordens meridianer och paralleller.

Jordens paralleller är avbildade som cirklar med medelpunkten i origo i den stereografiska projektionen. Om vi studerar en cirkels punkter märker vi att längden av det komplexa talet  $z$  är konstant, eftersom radien är konstant. Uttrycket  $\ln \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$  är alltså konstant. Det som ändras är endast  $i\beta$ , som går från  $-i\pi$  till  $i\pi$  då vinkeln  $\beta$  går från  $-\pi$  till  $\pi$ . Vi får alltså att sfärens paralleller avbildas som raka linjer som går från  $-i\pi$  till  $i\pi$ . Värdet på uttrycket  $\ln \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$  avgör var dessa linjer skär  $x$ -axeln. Logaritmens principalvärdesfunktion är en strängt växande funktion och radien för de avbildade parallellerna är mindre ju närmare sydpolen parallellerna finns på kartan. Detta gör att den sydligaste parallellen finns längst till vänster och den nordligaste parallellen finns längst till höger.



FIGUR 2.2.2. Paralleller

Jordens meridianer avbildas vid stereografisk projektion som raka linjer som startar i origo. Om vi studerar en sådan här linje märker vi att vinkeln hela tiden är konstant. Vi får alltså att uttrycket  $i\beta$  hela tiden är konstant, men att värdet på uttrycket  $\ln \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$  varierar. Detta gör att meridianerna bildar linjer som är parallella med  $x$ -axeln. Värdet på  $i\beta$  avgör var linjen skär  $y$ -axeln.



FIGUR 2.2.3. Meridianer

När vi logaritererar den stereografiska projektionen bildas alltså ett rutsystem med söder till vänster och norr till höger. För att få en karta med norr uppåt och söder nedåt måste vi rotera kartan  $\frac{\pi}{2}$ . En rotation med en vinkel  $\varphi$  i  $x, y$ -planet fås med hjälp av funktionen

$$R_\varphi(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi).$$

Om vi skriver detta som komplex funktion får vi

$$g(z) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi) + i(x \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

var vinkeln  $\varphi$  är rotationen och  $z = x + iy$ . Nu är vinkeln  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  och funktionen är således

$$g(z) = -y + ix.$$

Vi får alltså

$$g(\log z) = -\beta + i \ln \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}.$$

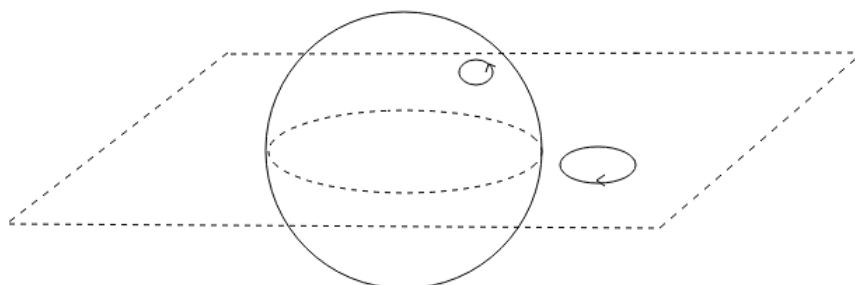
Vi får därför koordinaterna

$$\begin{aligned}x &= -\beta \\y &= \ln \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}.\end{aligned}$$

Då vi studerar figur 2.2.2 märker vi att då vi roterar bilden  $\frac{\pi}{2}$  får vi en bild som avgränsas av  $\pi$  till vänster och  $-\pi$  till höger. Vi måste alltså ännu rotera bilden  $\pi$  runt  $y$ -axeln. Vi får nu koordinaterna

$$\begin{aligned}x &= \beta \\y &= \ln \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}\end{aligned}$$

Att vi först får en bild med negativa  $x$ -koordinater till höger om  $x$ -axeln och positiva till vänster beror på att vi vid den stereografiska projektionen “vecklar ut” sfären på så sätt att bilden hamnar upp och ner. Om vi t.ex. har en cirkel på sfären som är riktad moturs är cirkelns riktning på projektions ytan medurs.



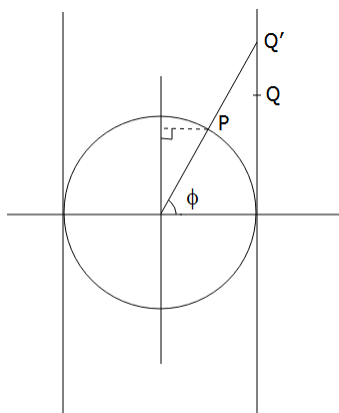
FIGUR 2.2.4. Stereografisk projektion

Det vi nu fått är Mercators projektion. Mercators projektion är en cylindrisk projektion där cylindern tangerar ekvatorn. Projektionen är konform och som vi märkte är parallellerna och meridianerna raka linjer. Projektionen kan inte härledas grafiskt utan man härleder en matematisk formel, oftast med hjälp av villkoret att projektionen ska vara konform. Nordpolen och sydpolen kan inte projiceras med hjälp av Mercators projektion och det är inte heller meningsfullt att projicera områden nära polerna, eftersom formförändringen är stor nära polerna.

Projektionen har fått namn efter Gerardus Mercator som på 1500-talet utvecklade projektionen och använde projektionen till att rita en stor världskarta som han publicerade 1569 [13, s. 38]. Man är inte säker på hur Mercator gjorde när han ritade kartan, eftersom matematiken för att härleda den matematiska formel som används vid projektionen inte var utvecklad ännu i mitten av 1500-talet. Användningen av Mercators projektion är fortfarande vanlig på sjökort och världskartor. Problemet med att använda Mercators projektion vid världskartor är att formförändringarna är så stora. Grönland är t.ex. på kartan större än Sydamerika, även om ytan i verkligheten endast är en åttondel av Sydamerikas yta.

Till näst ska vi härleda Mercators projektion men hjälp av villkoret att projektionen är konform (se. [10, s.537]).

Vi placerar nu sfären med radien ett inne i en rak cylinder som tangerar ekvatorn. Vi tänker oss att strålar går från sfärens medelpunkt och projicerar varje punkt  $P$  på sfären till en punkt  $Q'$  på cylindern. Vi vecklar därefter ut cylindern så att den bildar ett plan. Punkterna i planet bestäms av kartesiska koordinater. Ekvatorn går längs  $x$ -axeln och  $y$ -axeln placerar vi så att den går längs Greenwich-meridianen. Problemet är att den projektion vi nu fått inte är konform. För att få en konform projektion måste vi flytta punkten  $Q'$  rakt nedåt till en punkt på  $Q$ . Koordinaten  $x = \lambda$  hålls alltså oförändrad. Koordinaten  $y$  för denna punkt ska vi nu ta reda på.



FIGUR 2.2.5. Mercators projektion

När vi projicerar en parallell cirkel tänjs den ut. Cirkeln tänjs ut olika mycket beroende på latituden  $\phi$ . Hur mycket cirkeln tänjs ut får vi med hjälp av förhållandet mellan längden på ekvatorn och längden på de parallella cirklarna  $C_\phi$ . De parallella cirklarnas radie får vi med hjälp av en rätvinklig triangel och definitionen av cosinus. Denna radie är sfärens radie multiplicerat med  $\cos \phi$ , men eftersom vi har antagit att sfärens radie är lika med ett får vi att de parallella cirklarnas radie är lika med  $\cos \phi$ . Vi får nu att förhållandet mellan längden på ekvatorn och längden på de parallella cirklarna  $C_\phi$  är

$$\frac{\text{längden på ekvatorn}}{\text{längden på } C_\phi} = \frac{1}{\cos \phi}.$$

För att få en konform projektion måste detta förhållande också gälla lokalt i längs  $y$ -axeln :

$$\frac{y(\phi + \Delta\phi) - y(\phi)}{\Delta\phi} = \frac{1}{\cos \phi}.$$

Det måste således gälla att

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\phi} &= \frac{1}{\cos \phi} \\ dy &= \frac{1}{\cos \phi} d\phi. \end{aligned}$$

Vi får nu ett uttryck för koordinaten  $y$  genom att integrera uttrycket. Vi integrerar uttrycket med hjälp av substitutionsmetoden:

$$\begin{aligned}
 \int dy &= \int \frac{1}{\cos \phi} d\phi = \int \sec \phi d\phi \\
 &= \int \sec \phi \frac{\sec \phi + \tan \phi}{\sec \phi + \tan \phi} d\phi \\
 &= \int \frac{\sec^2 \phi + \sec \phi \tan \phi}{\sec \phi + \tan \phi} d\phi \\
 &= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \\
 &= \ln |\sec \phi + \tan \phi| + C \\
 &= \ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} \right| + C.
 \end{aligned}$$

Eftersom ekvatorn är projicerad på  $x$ -axeln får vi villkoret  $y(0) = 0$  och därmed

$$y = \ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} \right|.$$

Vi ser att detta uttryck är samma som det uttryck vi fick tidigare genom att skriva om uttrycket med hjälp av trigonometrins grundformel

$$\frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} = \frac{1 - \sin^2 \phi}{\cos \phi (1 - \sin \phi)} = \frac{\cos^2 \phi}{\cos \phi (1 - \sin \phi)} = \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}.$$

Med hjälp av trigonometriska formler kan vi också visa att

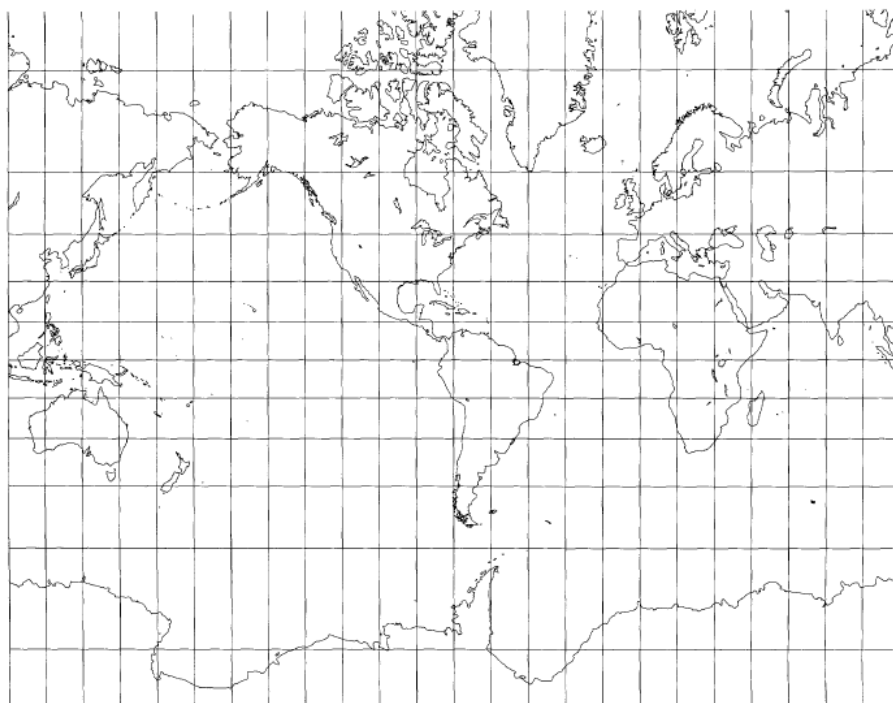
$$\frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right).$$

Mercators projektion ges oftast i formen

$$\begin{aligned}
 x &= \lambda \\
 y &= \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right).
 \end{aligned}$$

När vi gjort beräkningarna har vi antagit att sfärens radie  $R = 1$ . Normalt sätt när vi räknar ut koordinaterna måste vi både ta i beaktande sfärens radie  $R$  och kartskalan  $S$ . Mercators projektion blir därför

$$\begin{aligned}
 x &= RS\beta \\
 y &= RS \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right).
 \end{aligned}$$



FIGUR 2.2.6. Mercators projektion [13, s.40]

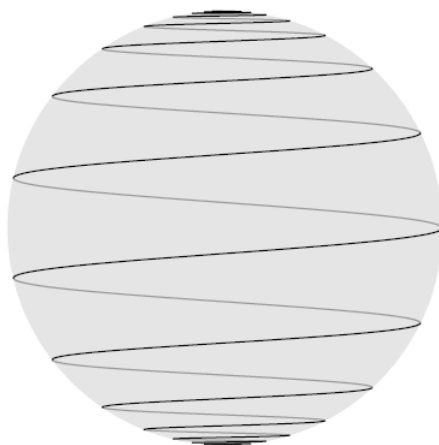
Om vi vet koordinaterna vid Mercators projektion och vill veta koordinaterna på jorden använder vi oss en invers omvandling. Vi räknar nu ut  $\phi$  och  $\lambda$  från Mercators projektion:

$$\begin{aligned}
 y &= RS \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\
 \frac{y}{RS} &= \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\
 e^{\frac{y}{RS}} &= \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\
 \tan^{-1} e^{\frac{y}{RS}} &= \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\
 \frac{\phi}{2} &= \tan^{-1} e^{\frac{y}{RS}} - \frac{\pi}{4} \\
 \phi &= 2 \tan^{-1} e^{\frac{y}{RS}} - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

och

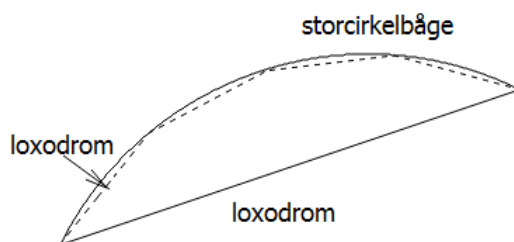
$$\begin{aligned}
 x &= RS\lambda \\
 \lambda &= \frac{x}{RS}.
 \end{aligned}$$

**2.2.1. Loxodrom.** På en karta gjord med hjälp av Mercators projektion representerar varje linje en kurva på sfären som skär alla meridianer och paralleller med konstant vinkel. Denna kurva kallas för en loxodrom.



FIGUR 2.2.7. En loxodrom på sfären [3].

Loxodromen motsvarar alltså den kurva på sfären där man håller konstant kurs. En stor fördel med kartor gjorda med hjälp av Mercators projektion är alltså att det är lätt att följa loxodromen. Man följer helt enkelt hela tiden samma kurs. Problemet är att den kortaste vägen mellan två punkter på sfären inte går längs loxodromen utan längs en storcirkelbåge. En storcirkelbåge är dock svår att följa eftersom riktningen hela tiden måste ändras. För att minimera resans längd approximeras i stället storcirkelbågen med en serie loxodromer.



FIGUR 2.2.8. Loxodrom och storcirkelbåge vid Mercators projektion.

Vi kan beräkna avståndet mellan två punkter  $P_1, P_2$  på sfären längs loxodromen med hjälp av följande ekvation:

$$d_{lox} = R |\phi_2 - \phi_1| |\sec \mu|$$

var  $\phi_1$  och  $\phi_2$  är latituderna för punkterna  $P_1$  och  $P_2$  och  $\mu$  är vinkeln mellan linjen  $P_1P_2$  och en meridian. Vi kan härleda formeln med hjälp av differential geometri,

se [3, s. 354]. Vinkeln  $\mu$  kan vi räkna ut med hjälp av punkternas koordinater vid Mercator projektionen och tangens för en rätvinklig triangel i planet. Vi får

$$\begin{aligned}\tan \mu &= \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \\ \mu &= \tan^{-1} \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.\end{aligned}$$

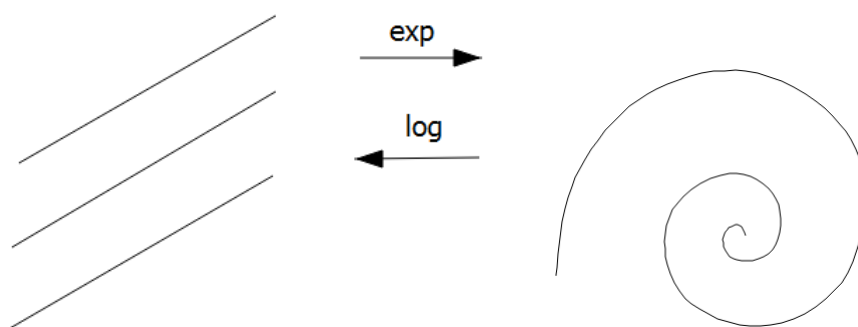
Loxodromen avbildas alltså som raka linjer på Mercators projektion, men hur ser loxodromen ut på en karta gjord med hjälp av stereografisk projektion? Vi ska till näst ta reda på detta. Med hjälp av logaritmfunktionen får vi reda på Mercator projektionens koordinater utgående från den stereografiska projektionens koordinater. Logaritmfunktionens inversa funktion är exponentialfunktionen och med hjälp av denna kan vi alltså ta reda på den stereografiska projektionens koordinater då vi vet Mercator projektionens koordinater. Till att börja med måste vi rotera loxodromen omvänt till vad vi gjorde då vi härledde Mercators projektion. Linjer bibehålls som linjer vid rotation och därför är loxodromen fortfarande en linje. En linje  $l$  i  $x, y$ -planet kan vi allmänt skriva som  $l = \{(x, y) : y = ax + b, x \in \mathbb{R}\}$ . Om vi uttrycker linjen i det komplexa talplanet får vi  $z = x + i(ax + b)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Vi får således

$$\begin{aligned}w &= e^z = e^{x+i(ax+b)} = e^x e^{i(ax+b)} \\ &= e^x (\cos(ax + b) + i \sin(ax + b)).\end{aligned}$$

Om  $a \neq 0$  är funktionens graf en logaritmisk spiral, se figur 2.2.8. Loxodromen på en stereografisk projektion är alltså en logaritmisk spiral. Om  $a = 0$  får vi att  $z = x + ib$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Detta är en linje som går parallellt med den reella axeln. Loxodromen är i alltså i detta fall en meridian efter att vi roterat bilden. Vi får att

$$w = e^x e^{ib} = e^x (\cos b + i \sin b).$$

Loxodromen är alltså i detta fall en stråle som utgår från origo (0 är inte med).



FIGUR 2.2.9. Loxodrom på Mercators projektion och på stereografisk projektion

EXEMPEL 2.4. Beräkna avståndet mellan punkt  $A$  ( $\phi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$ ) och punkt  $B$  ( $\phi = 30^\circ N$ ,  $\lambda = 45^\circ E$ )

a) längs storcirkelbågen



b) längs loxodromen

c) längs loxodromen på en karta gjord med hjälp av Mercators projektion.

Kartan har skalan  $S = 1 : 10\,000\,000$  längs ekvatorn.

Lösning:

a) Vi kan använda oss av cosinussatsen  $\cos \angle c = \cos \angle a \cos \angle b + \sin \angle a \sin \angle b \cos \angle C$  på samma sätt som vi gjorde i exempel 1.15 a. Vi använder oss alltså av en triangel som har hörnen i punkterna  $A$ ,  $B$  och på nordpolen  $C$ . Bågarna  $a$ ,  $b$  och  $c$  är motstående sidor till hörnen  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Vi får nu att

$$\begin{aligned}\angle a &= 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \\ \angle b &= 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ \\ \angle C &= 45^\circ - 0^\circ = 45^\circ.\end{aligned}$$

Med hjälp av cosinussatsen kan vi nu ta reda på  $\angle c$

$$\begin{aligned}\cos \angle c &= \cos \angle a \cos \angle b + \sin \angle a \sin \angle b \cos \angle C \\ &= \cos 60^\circ \cos 90^\circ + \sin 60^\circ \sin 90^\circ \cos 45^\circ \\ &= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle c &\approx 52,2387\dots^\circ \\ &\approx 0,911738\dots\end{aligned}$$

Avståndet mellan  $A$  och  $B$  får vi genom att multiplicera  $\angle c$  med jordens radie:

$$AB = 0,911738\dots \cdot 6378 \text{ km} = 5815 \text{ km}.$$

b) För att räkna ut avståndet mellan  $A$  och  $B$  längs loxodromen använder vi oss av formeln  $d_{lox} = R |\phi_2 - \phi_1| |\sec \mu|$ . Vi börjar med att räkna ut koordinaterna för punkterna  $A$  och  $B$  vid Mercators projektion för att kunna räkna ut  $\mu$ . Eftersom vi nu vill ta reda på hur långt det är mellan punkterna längs loxodromen är skalan  $S = 1 : 1$ . Vi får

$$\begin{aligned}x_1 &= R \cdot 0^\circ = 0 \\ y_1 &= R \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{0^\circ}{2} \right) = 0\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}x_2 &= R \cdot 45^\circ = R \cdot 0,785398\dots \\ y_2 &= R \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{30^\circ}{2} \right) = R \cdot 0,549306\dots\end{aligned}$$

Vi beräknar nu

$$\begin{aligned}\mu &= \tan^{-1} \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \\ &= \tan^{-1} \frac{R \cdot 0,785398\dots}{R \cdot 0,549306\dots} \\ &= 55,031\dots^\circ\end{aligned}$$

Längden på loxodromen blir därför

$$\begin{aligned} d_{lox} &= R |\phi_2 - \phi_1| |\sec \mu| \\ &= 6378 \text{ km} \cdot \frac{(30^\circ - 0^\circ) \cdot \pi}{180^\circ} \cdot |\sec 55,031\dots^\circ| \\ &= 5826,766 \text{ km} \approx 5827 \text{ km}. \end{aligned}$$

c) Eftersom kartan finns i ett plan kan vi använda oss av Pythagoras sats för att räkna ut avståndet mellan punkterna på kartan. Koordinaterna för punkterna är nu

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} x_2 &= RS \cdot 45^\circ = RS \cdot 0,785398\dots \\ y_2 &= RS \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{30^\circ}{2} \right) = RS \cdot 0,549306\dots \end{aligned}$$

Vi får att avståndet är

$$\begin{aligned} d_{merc} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(RS \cdot 0,785398\dots)^2 + (RS \cdot 0,549306\dots)^2} \\ &= RS \sqrt{(0,785398\dots)^2 + (0,549306\dots)^2} \\ &= \frac{6378000 \text{ m}}{10000000} \sqrt{(0,785398\dots)^2 + (0,549306\dots)^2} \\ &= 0,611286\dots \text{ m} \approx 61,13 \text{ cm}. \end{aligned}$$

För att kunna jämföra resultatet med resultaten i a och b fallen beräknar vi ännu avståndet då skalan är  $S = 1 : 1$

$$\begin{aligned} d_{merc2} &= 6378 \text{ km} \sqrt{(0,785398\dots)^2 + (0,549306\dots)^2} \\ &= 6112,86\dots \text{ km} \approx 6113 \text{ km}. \end{aligned}$$

Vi märker att i detta exempel är det inte så stor skillnad mellan avståndet längs loxodromen och storcirkelbågen, medan avståndet beräknat med hjälp av Mercators projektion skiljer sig ganska mycket även om punkterna är relativt nära ekvatorn. I nästa exempel ska vi ta reda på ungefär hur stor formförändringen är i Finland och hur mycket större formförändringen är i norra Finland jämfört med i södra Finland.

EXEMPEL 2.5. a) Hur långt är avståndet mellan Åbo ( $60^\circ 27' N, 22^\circ 14' E$ ) och Sibbo ( $60^\circ 22' N, 25^\circ 15' E$ )? Beräkna avståndet mellan Enontekiö ( $68^\circ 23' N, 23^\circ 38' E$ ) och Ivalo ( $68^\circ 39' N, 27^\circ 32' E$ ).

b) Hur långt är avståndet mellan Åbo och Sibbo och mellan Enontekiö och Ivalo på en karta gjord med hjälp av Mercators projektion. För att direkt kunna jämföra resultat med a-fallet tänker vi oss att  $S = 1 : 1$ .

Lösning:

a) Vi använder oss av cosinussatsen och en triangel som har hörnen i punkterna  $A := \text{Åbo}$ ,  $B := \text{Sibbo}$  och  $C := \text{nordpolen}$ . Bågarna  $a$ ,  $b$  och  $c$  är motstående sidor till hörnen  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Vi får nu att

$$\begin{aligned}\angle a &= 29,6333\dots^\circ \\ \angle b &= 29,55^\circ \\ \angle C &= 3,0167\dots^\circ\end{aligned}$$

Med hjälp av cosinussatsen kan vi nu ta reda på  $\angle c$ :

$$\begin{aligned}\cos \angle c &= \cos \angle a \cos \angle b + \sin \angle a \sin \angle b \cos \angle C \\ &= 0,999661\dots \\ \angle c &= 0,026038\dots\end{aligned}$$

Avståndet mellan Åbo och Sibbo får vi genom att multiplicera  $\angle c$  med jordens radie (6371 km).

$$d_{\dot{A}S} \approx 165,89 \text{ km.}$$

På samma sätt räknar vi ut avståndet mellan Ivalo och Enontekiö. Vi får

$$d_{IE} \approx 161,54 \text{ km.}$$

b) Vi räknar först ut koordinaterna för Åbo och Sibbo

$$\begin{aligned}x_A &= RS \cdot 22^\circ 14' = R \cdot 0,38804487\dots \\ y_A &= RS \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{60^\circ 27'}{2} \right) = R \cdot 1,3327738\dots\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}x_B &= RS \cdot 25^\circ 15' = R \cdot 0,4406956\dots \\ y_B &= RS \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{60^\circ 22'}{2} \right) = R \cdot 1,3298284\dots\end{aligned}$$

Vi får att avståndet är

$$\begin{aligned}d_{\dot{A}S_{merc}} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &\approx 335,96 \text{ km} \approx 336 \text{ km.}\end{aligned}$$

På samma sätt får vi att avståndet mellan Ivalo och Enontekiö är

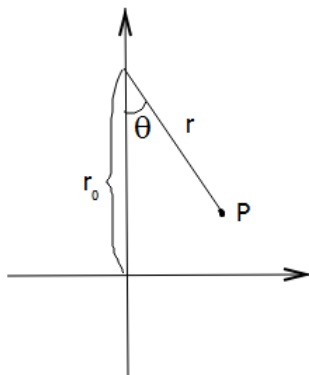
$$d_{IE_{merc}} \approx 441,15 \text{ km} \approx 441 \text{ km.}$$

Vi märker att formförändringen är väldigt stor i Finland om vi jämför med platser som finns närmare ekvatorn (se exempel 2.4). Vi märker också att på en karta gjord med hjälp av Mercators projektion ser avstånd, som i verkligheten är nästan lika långa, mycket längre ut i norra Finland än i södra Finland.

### 2.3. Albers ytriktiga koniska projektion

Albers projektion är konisk och ytriktig. Parallellerna är bågar av koncentriska cirklar och meridianerna är rätta linjer som skär parallellerna med rät vinkel. Projektionen presenterades för första gången år 1805 av tysken Heinrich Christian Albers. Projektionen är lämplig att användas om man vill kartlägga ett stort område i östlig västlig riktning med en ytriktig projektion. Oftast används Albers projektion med två standard paralleller. Vi kommer i detta kapitel att studera Albers projektion med en standard parallell. Vi använder [9] och [13] som källor.

Albers projektion kan inte härledas geometriskt utan vi härleder projektionen med hjälp av villkoret att projektionen ska vara ytriiktig. Vi vill alltså konstruera en projektion där ett område på kartan har samma area som motsvarande område på sfären. Albers projektion är också konisk, vilket innebär att jordytan avbildas på en kon som tangerar sfären vid standard parallellen. Vi börjar med att räkna ut de polära koordinaterna  $(r, \theta)$ . Avståndet från konens topp till den projicerade punkten  $P$  betecknar vi med  $r$ . Vinkeln  $\theta$  är vinkeln mellan  $y$ -axeln och linjen som skär konens topp och punkten  $P$ .



FIGUR 2.3.1. Polära koordinater vid Albers projektion

Vinkel  $\theta$  får vi genom att först räkna ut toppvinkeln  $\theta_T$ , som bildas när vi vecklar ut konen. Vi börjar med att bilda ett uttryck för sidolängden  $r_0$  för konen. Sidolängden  $r_0$  är avståndet från toppen av konen till standard parallellen. Detta avstånd får vi med hjälp av de likformiga trianglar  $\triangle ABC$  och  $\triangle BCD$ , se figur 2.3.2. Trianglarna är likformiga enligt sats vinkel vinkel, eftersom  $\angle ABC = \angle CBD = \frac{\pi}{2}$  och  $\angle BAC = \angle BCD = \phi_0$ . Vinkeln  $\angle BAC = \angle BCD$ , eftersom tangenten till en cirkel är vinkelrät med radien. Förhållandet mellan motsvarande sidor i likformiga trianglar är konstant. Vi får därför att

$$\frac{R}{BD} = \frac{r_0}{BC}.$$

Längden  $BD$  får vi med hjälp av definitionen av sinus i en rätvinklig triangel:

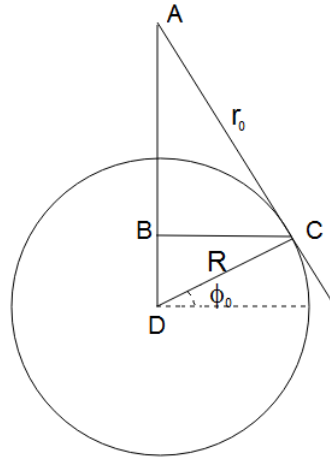
$$\sin \phi_0 = \sin \angle BCD = \frac{BD}{R}.$$

Längden  $BC$  får vi med hjälp av definitionen av cosinus i en rätvinklig triangel:

$$\cos \phi_0 = \cos \angle BCD = \frac{BC}{R}.$$

Vi får således att

$$\frac{R}{R \sin \phi_0} = \frac{r_0}{R \cos \phi_0}.$$



FIGUR 2.3.2. Likformiga trianglar

Konens sidlängd är således

$$r_0 = \frac{R \cos \phi_0}{\sin \phi_0}$$

Omkretsen för standardparallellen med latituden  $\phi_0$  är

$$\begin{aligned} d &= 2\pi BC \\ &= 2\pi R \cos \phi_0 \end{aligned}$$

Vi får därför att toppvinkeln är

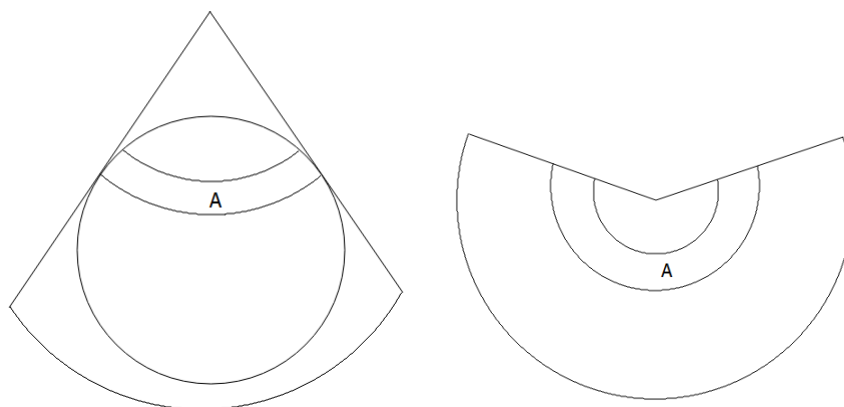
$$\begin{aligned} \theta_T &= \frac{d}{r_0} = \frac{2\pi R \cos \phi_0}{\frac{R \cos \phi_0}{\sin \phi_0}} \\ &= 2\pi \sin \phi_0 \end{aligned}$$

Vinkeln  $\theta$  är således

$$\theta = \Delta\lambda \sin \phi_0$$

var  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ . Longituden  $\lambda_0$  är longituden för den meridian som väljer att gå längs  $y$ -axeln.

Ett uttryck för  $r$  får vi med hjälp av villkoret att ytan på ett segment på konen ska vara lika stort som motsvarande segment på sfären, se figur 2.3.3.



FIGUR 2.3.3. Sfär och kon

Vi börjar med att räkna ut arean på segmentet på konen. Mantelytans area för konen med sidlängden  $r_0$  är

$$A_{kon_0} = \frac{dr_0}{2} = \frac{2\pi R \cos \phi_0 r_0}{2} = \pi R \cos \phi_0 r_0.$$

Med hjälp av definitionen för sinus och de likformiga trianglarna i figur 2.3.2 får vi att

$$\sin \phi_0 = \frac{R \cos \phi_0}{r_0}.$$

Radien  $R$  är därför

$$R = \frac{r_0 \sin \phi_0}{\cos \phi_0}.$$

Vi får således att

$$\begin{aligned} A_{kon_0} &= \pi R \cos \phi_0 r_0 \\ &= \pi \frac{r_0 \sin \phi_0}{\cos \phi_0} \cos \phi_0 r_0 \\ &= \pi r_0^2 \sin \phi_0. \end{aligned}$$

Mantelytans area för en kon med sidlängden  $r$  är  $A_{kon} = \pi r^2 \sin \phi_0$ . Arean för segmentet på konen är således

$$\begin{aligned} A_{konsegment} &= \pi r_0^2 \sin \phi_0 - \pi r^2 \sin \phi_0 \\ &= \pi (r_0^2 - r^2) \sin \phi_0. \end{aligned}$$

Arean på motsvarande segment på sfären är

$$A_{sfärsegment} = 2\pi R h = 2\pi R^2 (\sin \phi - \sin \phi_0).$$

Eftersom projektionen är ytriktig får vi

$$\begin{aligned}
A_{\text{kongsegment}} &= A_{\text{sfärsegment}} \\
\pi (r_0^2 - r^2) \sin \phi_0 &= 2\pi R^2 (\sin \phi - \sin \phi_0) \\
(r_0^2 - r^2) \sin \phi_0 &= 2R^2 (\sin \phi - \sin \phi_0) \\
r_0^2 - r^2 &= \frac{2R^2 (\sin \phi - \sin \phi_0)}{\sin \phi_0} \\
r^2 &= r_0^2 - \frac{2R^2 (\sin \phi - \sin \phi_0)}{\sin \phi_0} \\
&= \left( \frac{R \cos \phi_0}{\sin \phi_0} \right)^2 - \frac{2R^2 \sin \phi}{\sin \phi_0} + 2R^2 \\
&= \frac{R^2}{\sin^2 \phi_0} (\cos^2 \phi_0 - 2 \sin \phi \sin \phi_0 + 2 \sin^2 \phi_0) \\
&= \frac{R^2}{\sin^2 \phi_0} (1 - \sin^2 \phi_0 - 2 \sin \phi \sin \phi_0 + 2 \sin^2 \phi_0) \\
&= \frac{R^2}{\sin^2 \phi_0} (1 + \sin^2 \phi_0 - 2 \sin \phi \sin \phi_0) \\
r &= \frac{R}{\sin \phi_0} \sqrt{1 + \sin^2 \phi_0 - 2 \sin \phi \sin \phi_0}.
\end{aligned}$$

Med hjälp av trigonometri och de polära koordinaterna (se figur 2.3.2) får vi de kartesiska koordinaterna:

$$\begin{aligned}
x &= r \sin \theta = r \sin (\Delta \lambda \sin \phi_0) \\
y &= r_0 - r \cos \theta = R \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} - r \cos (\Delta \lambda \sin \phi_0).
\end{aligned}$$

Vi måste ännu ta i beaktande skalan  $S$ , vilket gör att den slutliga projektionen är

$$\begin{aligned}
x &= Sr \sin (\Delta \lambda \sin \phi_0) \\
y &= S \left( R \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} - r \cos (\Delta \lambda \sin \phi_0) \right)
\end{aligned}$$

var  $r = \frac{R}{\sin \phi_0} \sqrt{1 + \sin^2 \phi_0 - 2 \sin \phi \sin \phi_0}$  och  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ . Vid denna projek-tion går standard parallellen längs  $x$ -axeln och  $y$ -axeln går längs meridianen med longituden  $\lambda_0$ .



FIGUR 2.3.4. Albers projektion med två standard paralleller [13, s. 99].



## Litteraturförteckning

- [1] Bridson, Martin R., Haefliger, Andre, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, 1999
- [2] Hilbert, David & Cohn-Vossen, Stefan, Geometry and the Imagination. Chelsea, New York, 1952
- [3] James, Alexander Loxodromes: A Rhumb Way to Go, Mathematics Magazine, Vol 77 (2004), no.5, s. 349-356
- [4] Jennings, George A. Modern geometry with applications. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994
- [5] Kiselman, Christer Matematiktermer för skolan. Nationellt Centrum för Matematikutbildning, Göteborg, 2009
- [6] McCleary, John, Geometry from a Differentiable Viewpoint, Cambridge University Press, New York 1994
- [7] Morse, P. M. & Feshbach, H. Methods of Theoretical Physics, Part I. New York, McGraw-Hill, 1953
- [8] Murray, D. A. Spherical Trigonometry. Longmans, Green and CO, New York, 1908
- [9] Pearson, Frederick, Map Projections: Theory and Applications. CRC Press, Florida, 1990
- [10] Pijls, Wim Some properties related to Mercator projection. Amer. Math. Monthly 108 (2001), no. 6, s. 537-543
- [11] Ryan, Patrick Euclidean and non-Euclidean Geometry, Cambridge University Press, New York 1986
- [12] Sarason, Donald, Complex Function Theory, AMS, Rhode Island, 2007
- [13] Snyder, John P. Map Projections - A Working Manual. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, Washington, 1987