Neutriinojen ja kvarkkien sekoitusmatriisien välinen yhteys

Henri Jukkala

Pro gradu -tutkielma
Jyväskylän yliopisto
Fysiikan laitos
14.6.2012

Ohjaaja: prof. Jukka Maalampi

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tarkastellaan neutriinojen sekoitusmatriisin ja kvarkkien sekoitusmatriisin välisiä yhteyksiä. Tarkastelussa keskitytään kahteen yksinkertaiseen tapaukseen. Ensimmäisessä tapauksessa varattujen leptonien ja alas-kvarkkien massamatriisien diagonalisointiin käytetyt, kenttien vasenkätisiin kiraalikomponentteihin liittyvät matriisit oletetaan samoiksi. Toisessa tapauksessa samaan tapaan neutriinojen ja ylös-kvarkkien vastaavat diagonalisointimatriisit oletetaan samoiksi.

Aluksi esitellään kvarkkien sekoittumiseen ja erityisesti neutriinojen sekoittumiseen liittyvät teoreettiset käsitteet, kuten fermionien massojen generointi Standardimallissa, neutriinojen massoihin liittyvät Majoranan massatermit ja ns. seesaw-mekanismi. Mittaustuloksien yhteydessä esitellään myös neutriinojen massoihin ja sekoittumiseen liittyvä neutriino-oskillaatio. Tämän jälkeen esitellään kvarkkien ja leptonien välistä yhteyttä motivoivia teoreettisia ja kokeellisia huomioita ja tuloksia. Näitä ovat esimerkiksi suurista yhtenäisteorioista saatavat kvarkkien ja leptonien väliset massamatriisirelaatiot ja mittaustuloksista havaittu ns. kvarkki–leptoni-komplementaarisuus, jonka mukaan kvarkkien ja neutriinojen sekoituskulmat saattavat riippua toisistaan.

Kvarkkien ja leptonien sekoitusmatriisien välisten yksinkertaisten relaatioiden avulla saadaan ratkaistua neutriinojen sekoitusparametrit kvarkkien sekoitusparametrien funktioina. Mielenkiintoisimmat ja kokeiden kanssa yhteensopivat tulokset saadaan, kun näissä relaatioissa käytetään tuntemattomille matriiseille ns. bi-maksimaalista eli kahdesta maksimaalisesta rotaatiosta koostuvaa yritettä. Nykyinen mittausdata suosii tapausta, jossa neutriinojen sekoittuminen muodostuu bi-maksimaalisesta matriisista ja kvarkkien sekoitusmatriisista. Lisäksi neutriinojen ns. Diracin vaiheelle δ saadaan tulos $\delta \simeq \pi$.

Abstract

In this thesis relations between neutrino mixing matrix and quark mixing matrix are studied. The focus of the analysis is on two simple cases. In the first case it is assumed that the left matrix that diagonalizes the mass matrix of charged leptons and the corresponding matrix of down quarks are equal. In the second case it is likewise assumed that the corresponding diagonalizing matrices of neutrinos and up quarks are equal.

First, theoretical concepts related to the mixing of quarks and especially to the mixing of neutrinos are presented. These are e.g. fermion mass generation in the Standard Model, Majorana masses of neutrinos and the so-called seesaw mechanism. Regarding experiments, neutrino oscillations are also briefly discussed. After this, theoretical and empirical observations supporting a connection between quark and lepton sectors are presented. These include the mass matrix relations between quarks and leptons that emerge from grand unified theories and the experimentally observed so-called quark–lepton complementarity that relates quark and lepton mixing angles.

Using the simple relations between quark and lepton mixing matrices, the standard parameters of neutrino mixing are solved as functions of quark mixing parameters. The most interesting results are obtained using a bimaximal ansatz for the unknown matrices in the problem. According to the results, the current observed neutrino data agrees with a case where neutrino mixing is formed from two maximal rotations (bimaximal mixing) and quark mixing. The result for the so-called neutrino Dirac phase is $\delta \simeq \pi$ in these simple cases.

Kiitokset

Kiitän ohjaajaani Jukka Maalampea hyvästä ja itsenäistä pohdintaa herättävästä ohjauksesta. Kiitokset kuuluvat myös muulle fysiikan laitoksen väelle ja erityisesti toimistohenkilökunnalle mukavasta työympäristöstä ja ilmapiiristä. Kiitän myös Jyväskylän yliopistoa rahallisesta tuesta.

Lisäksi kiitän vaimoani Johannaa kannustamisesta ja henkisestä tuesta.

Sisältö

Johdanto

Hiukkasfysiikan Standardimalli [1–4] kehittyi 1960- ja 1970-luvulla teoreettisen hiukkasfysiikan suurten edistysaskelten myötä. Näitä olivat mm. kvanttikromodynamiikka sekä Glashow'n, Weinbergin ja Salamin moderni sähköheikko teoria [4]. Tätä ennen jo vuonna 1957 Bruno Pontecorvo ehdotti ilmiötä [5, 6], joka tunnetaan nykyisin neutriino-oskillaationa [1]. Pontecorvon kuvailema ilmiö oli neutriino–antineutriino-oskillaatio, jossa neutriino propagoidessaan muuntautuu toistuvasti antihiukkasekseen ja takaisin. Vuonna 1962 Maki, Nakagawa ja Sakata esittivät neutriinojen oskillaatiota elektronin ja myonin neutriinojen välillä [7], eli eri neutriinomakujen välillä, ja Pontecorvo jatkoi tätä koskevan teorian kehittelyä vuonna 1967 [8]. Nykyisin neutriino-oskillaatio ja neutriinofysiikka ovat yksi suurimmista fenomenologisista perusteista tutkia Standardimallin ulkopuolista fysiikkaa [9].

Wolfgang Pauli postuloi ensimmäisenä heikosti vuorovaikuttavan, kevyen ja neutraalin hiukkasen neutriinon olemassaolon vuonna 1930 selittääkseen sen avulla beetahajoamisessa syntyvien elektronien jatkuvan energiaspektrin [4]. Standardimallin muotoutuessa nykyiseen muotoonsa 1970-luvulla ei ollut vielä todisteita neutriino-oskillaation ja neutriinojen massojen olemassaolosta. Ensimmäiset neutriino-oskillaation seuraukset oli kuitenkin jo havaittu vuonna 1968 Raymond Davisin Homestake-kokeessa [10] vajeena Auringosta saapuvien elektronin neutriinojen vuossa.

Ensimmäiset vahvat kokeelliset todisteet neutriinojen oskillaatio-ilmiöstä ja sen kautta myös neutriinojen massoista saatiin vuonna 1998 Super-Kamiokande-kokeesta, jossa mitattiin ilmakehässä kosmisten säteiden vaikutuksesta syntyviä neutriinoja [11]. Vuonna 2002 Sudburyn neutriino-observatoriossa tehty koe varmisti, että Auringosta saapuvien neutriinojen kokonaisvuo on oikea, mutta että osa elektronin neutriinoista muuntautuu myonin ja taun neutriinoiksi matkalla Maahan [12].

Neutriinojen oskillaatio-ilmiössä neutriinot vaihtavat makuaan propagoidessaan tyhjiössä tai väliaineessa kuten Auringossa. Tällaisen makua vaihtavan oskillaation havaitseminen osoittaa, että ainakin osalla neutriinoista on massa ja että neutriinot sekoittuvat [1]. Neutriinojen sekoittuminen on analoginen kvarkkien sekoittumisen kanssa, ja neutriinoilla on oma sekoitusmatriisinsa vastaten kvarkkien Cabibbon–Kobayashin–Maskawan (CKM) matriisia [13, 14]. Kvarkkien sekoittumisesta poiketen neutriinojen mahdolliset Majoranan massatermit tosin tekevät neutriinojen sekoittumisesta erilaisen ja hyvin mielenkiintoisen ilmiön [15, 16]. Lisäksi neutriinojen sekoittuminen on huomattavasti voimakkaampaa kuin kvarkkien, ja mitattujen sekoitusparametrien arvojen selittämiseksi on tutkittu erilaisia leptoniperheiden (diskreettejä) symmetrioita [15, 17].

Neutriinojen mahdolliset Majoranan massatermit ja niihin liittyvä kokonaisleptoniluvun eli L-symmetrian rikkoutuminen tarjoavat muihin fermioneihin nähden uusia tapoja massojen generoimiseksi kuten ns. seesaw-mekanismin. Neutriinot saattavat näin tarjota keinon saada tietoa korkean energiaskaalan fysiikasta, kuten esimerkiksi suuresta yhtenäisteoriasta [9, 16]. Suuret yhtenäisteoriat, mittaustulokset sekä kvarkkien ja leptonien samankaltaiset sähköheikot ominaisuudet motivoivat myös tutkimaan kvarkkien ja leptonien välistä symmetrisyyttä. Tämä symmetrisyys voi ilmetä esimerkiksi kvarkkien ja leptonien massa- tai sekoitusmatriisien välisinä yhteyksinä sekä ns. kvarkki–leptoni-komplementaarisuutena [9].

Tämän tutkielman päätavoite on tutkia neutriinojen ja kvarkkien sekoitusmatriisien välisiä yksinkertaisia yhteyksiä ja verrata niistä saatuja numeerisia tuloksia koetuloksiin. Ensimmäisessä luvussa tarkastellaan fermionien massojen generoimista Standardimallin laajennuksessa, jossa neutriinot saavat massan Majoranan massatermien kautta. Toisessa luvussa johdetaan fermionien sekoittuminen massamatriisien diagonalisoinnista, esitetään sekoitusmatriisien parametrisaatiot ja esitellään neutriinojen sekoittumiseen liittyviä diskreettejä symmetrioita. Kolmannessa luvussa esitellään lyhyesti neutriino-oskillaatio sekä neutriinojen ja kvarkkien sekoitusparametrien mittaustulokset. Neljännessä luvussa esitetään kvarkkien ja leptonien sekoittumisten väliseen yhteyteen viittaavia teoreettisia ja kokeellisia havaintoja, ja viidennessä luvussa tutkitaan kvarkkien ja leptonien sekoitusmatriisien välisiä yhteyksiä.

Tutkielmassa käytetään luonnollista yksikköjärjestelmää, jossa $\hbar = c = 1$.

Luku 1

Fermionien massamekanismit

1.1 Fermionikenttien massatermit

1.1.1 Weylin spinorit

Standardimallin fermioneita kuvaillaan matemaattisesti Diracin spinoreilla, jotka koostuvat kahdesta kiraalisesta kaksikomponenttisesta Weylin spinorista: vasenkätisestä spinorista η ja oikeakätisestä spinorista χ [1, 2]. Oikeakätistä neutriinoa tosin ei Standardimallissa ole, koska sillä ei olisi mallin mukaan mitään vuorovaikutuksia. Weylin spinorit ovat kvanttikenttäteorian fundamentaalisia fermionisia rakennuspalikoita, ja ne muuntuvat Lorentzin ryhmän vasen- ja oikeakätisissä spinoriesityksissä seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\eta &\longrightarrow \Lambda_L \eta, \\
\chi &\longrightarrow \Lambda_R \chi,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

jossa Lorentz-muunnoksen spinoriesitykset ovat [18]

$$
\begin{aligned}
\Lambda_L &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\theta}-\mathrm{i}\,\vec{\omega}\right)\right], \\
\Lambda_R &= \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{\theta}+\mathrm{i}\,\vec{\omega}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Tässä Paulin matriisit σ_i on esitetty kolmikkona $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, ja reaalilukukolmikot $\vec{\theta} \equiv (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ sekä $\vec{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ovat vastaavasti Lorentz-muunnoksen rotaatio- ja puskuparametrit.

Fermionien mahdolliset massatermit saadaan rakentamalla Lorentz-invariantteja termejä kahdesta kiraalisesta Weylin spinorista. Voidaan näyttää, että näitä on olennaisesti neljänlaisia: jos η_1, η_2 ja η ovat vasenkätisiä sekä χ_1, χ_2 ja χ

oikeakätisiä Weylin spinoreita, niin Lorentz-invariantit bilineaarit ovat

$$\eta_1^T \,\mathrm{i}\sigma_2\, \eta_2, \tag{1.3}$$

$$\chi_1^T \,\mathrm{i}\sigma_2\, \chi_2, \tag{1.4}$$

$$\eta^\dagger \chi, \tag{1.5}$$

$$\chi^\dagger \eta. \tag{1.6}$$

Näistä (1.5) ja (1.6) tosin ovat toistensa Hermiten konjugaatteja, ja niiden invarianssi seuraa bilineaarien (1.3) ja (1.4) invarianssista sekä siitä, että vasenkätisestä spinorista η rakennettu spinori $\mathrm{i}\sigma_2\eta^*$ on Lorentzin muunnosten suhteen oikeakätinen ja vastaavasti oikeakätisestä spinorista χ rakennettu $\mathrm{i}\sigma_2\chi^*$ on vasenkätinen.

1.1.2 Diracin massatermi

Fermionien massatermit voidaan muodostaa käyttäen Weylin bilineaareja (1.3)–(1.6). Gammamatriisien kiraalisessa eli Weylin kannassa [2] Diracin spinori voidaan kirjoittaa blokkimuodossa Weylin spinoreiden avulla:

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Tästä nähdään, että vasen- ja oikeakätisille kiraalisille projektioille

$$\psi_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi, \qquad \psi_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}\,\psi \tag{1.8}$$

pätee $\psi_L = (\eta, 0)$ ja $\psi_R = (0, \chi)$. Kiraalisia kenttiä ψ_L ja ψ_R kutsutaan kentän ψ vasen- ja oikeakätisiksi (kiraalisiksi) komponenteiksi. Komponenttien avulla nähdään, että Diracin massatermi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathrm{D} &= -m_\mathrm{D}\,\overline{\psi}\psi = -m_\mathrm{D}\left(\overline{\psi_L}\psi_R + \overline{\psi_R}\psi_L\right) \\ &= -m_\mathrm{D}\left(\eta^\dagger\chi + \chi^\dagger\eta\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

on invariantti vastaten bilineaareja (1.5) ja (1.6), ja että se muodostuu kahdesta riippumattomasta kiraalisesta komponentista. Tässä m_D on kentän $\psi = \psi_L + \psi_R$ massa.

1.1.3 Majoranan massatermit

Muut Lorentz-invariantit massatermit ovat Majoranan massatermejä, ja niitä on kahdenlaisia [1, 19]: vasenkätisen komponentin massatermi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mathrm{L} &= -\frac{m_\mathrm{L}}{2}\,\overline{\psi_L{}^c}\psi_L + \text{h.c.} = -\frac{m_\mathrm{L}}{2}\,\psi_L{}^T C^*\psi_L + \text{h.c.} \\ &= -\frac{m_\mathrm{L}}{2}\,\eta^T\,\mathrm{i}\sigma_2\,\eta + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{1.10}$$

ja oikeakätisen komponentin massatermi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{R}} &= -\frac{m_{\mathrm{R}}}{2}\,\overline{\psi_R{}^c}\psi_R + \text{h.c.} = -\frac{m_{\mathrm{R}}}{2}\,\psi_R{}^T C^* \psi_R + \text{h.c.} \\ &= +\frac{m_{\mathrm{R}}}{2}\,\chi^T\,\mathrm{i}\sigma_2\,\chi + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{1.11}$$

Näitä kutsutaan myöhemmin lyhyemmin vasen- ja oikeakätisiksi (Majoranan) massatermeiksi. Nämä massatermit muodostuvat kumpikin ainoastaan yhdestä kiraalisesta komponentista ja vastaavat bilineaareja (1.3) ja (1.4). Yhtälöissä (1.10) ja (1.11) on käytetty identiteettiä $\overline{\psi^c} = \psi^T C^*$, joka seuraa määritelmistä ja varauskonjugaatiomatriisin C antisymmetrisyydestä. Parametrit m_{L} ja m_{R} ovat vastaavasti Majoranan kenttien $\Psi_{\mathrm{L}} \equiv \psi_L + \psi_L{}^c$ ja $\Psi_{\mathrm{R}} \equiv \psi_R + \psi_R{}^c$ massat. Massatermien tekijät 1/2 selitetään Majoranan kentän yhteydessä osassa 1.2.

1.1.4 Yhdistetty massatermi

Määritelmiä ja fermionioperaattorien antikommutatiivisuutta käyttäen voidaan näyttää, että fermionikenttäoperaattoreille ψ_1 ja ψ_2 pätee $\overline{\psi_1^c}\psi_2^c = \overline{\psi_2}\psi_1$. Tällöin erityisesti $\overline{\psi_R}\psi_L = \overline{\psi_L{}^c}\psi_R{}^c$, ja Diracin massatermi (1.9) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}} = -m_{\mathrm{D}}\,\overline{\psi_R}\psi_L + \text{h.c.} = -\frac{m_{\mathrm{D}}}{2}\left(\overline{\psi_R}\psi_L + \overline{\psi_L{}^c}\psi_R{}^c\right) + \text{h.c.} \tag{1.12}$$

Kaikki massatermit (1.9), (1.10) ja (1.11) voidaan kirjoittaa yhdistettyyn matriisimuotoon [1]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= -m_{\mathrm{D}}\,\overline{\psi_R}\psi_L - \frac{m_{\mathrm{L}}}{2}\,\overline{\psi_L{}^c}\psi_L - \frac{m_{\mathrm{R}}}{2}\,\overline{\psi_R}\psi_R{}^c + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{\psi_L{}^c} & \overline{\psi_R}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{\mathrm{L}} & m_{\mathrm{D}} \\ m_{\mathrm{D}} & m_{\mathrm{R}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_L \\ \psi_R{}^c\end{pmatrix} + \text{h.c.},\end{aligned} \tag{1.13}$$

jossa fysikaalisten hiukkasten massat saadaan keskellä olevan massamatriisin singulaariarvoista. Tässä tapauksessa täytyy myös ottaa huomioon, että vain kaksi massaparametreista m_{D}, m_{L} ja m_{R} voidaan valita reaalisiksi absorboimalla massaparametrin vaihe fermionikenttään [1]. Tämä voidaan näyttää muunnoksien (1.16) avulla.

Tulos (1.13) voidaan yleistää myös tapaukseen, jossa vasen- ja oikeakätisiä fermionikenttiä on useita. Tällöin massaparametrit m_{D}, m_{L} ja m_{R} korvataan matriiseilla ja esimerkiksi spinori ψ_L tulkitaan kokoelmaksi spinoreita $(\psi_{1L}, \ldots, \psi_{NL})$, jossa N on fermionisukupolvien määrä. Esimerkiksi termi $m_{\mathrm{D}}\,\overline{\psi_R}\psi_L$ korvataan tällöin bilineaarilla $\sum_{ij}\overline{\psi_{iR}}(m_{\mathrm{D}})_{ij}\psi_{jL}$, jossa indeksit i ja j merkitsevät fermionimakuja ja $(m_{\mathrm{D}})_{ij}$ on matriisin m_{D} alkio. Yhtälön (1.13) lopullinen muoto pätee tällöin blokkimatriisimuodossa, kun massamatriisissa esiintyvä alempi blokkimatriisi m_{D} korvataan sen transpoosilla $m_{\mathrm{D}}{}^T$.

1.2 Majoranan kenttä

Edellä kohdassa 1.1.3 esiintyneet kentät Ψ_L ja Ψ_R ovat esimerkkejä Majoranan kentästä ψ_M [1], jonka määrittelee Majoranan ehto

$$\psi_\mathrm{M}{}^c = \lambda\psi_\mathrm{M}, \tag{1.14}$$

jossa λ on vaihetekijä (usein $\lambda = 1$). Ehto (1.14) tarkoittaa, että Majoranan kenttää vastaava hiukkanen on oma antihiukkasensa. Aina kun fermionikentällä on Majoranan massatermejä, voidaan näyttää, että massamatriisin diagonalisoiva fysikaalinen kenttä on Majoranan kenttä, jolle pätee yhtälö (1.14).

Ehdosta (1.14) seuraa, että Majoranan kentällä on vain kaksi vapausastetta eli sen nelikomponenttisella spinorilla on vain kaksi riippumatonta komponenttia [1]. Kiraalisessa kannassa tämä tarkoittaa, että Majoranan spinori muodostuu vain yhdestä Weylin spinorista: esimerkiksi aiemmin $\Psi_\mathrm{L} = (\eta, -\mathrm{i}\sigma_2\eta^*)$ ja $\Psi_\mathrm{R} = (\mathrm{i}\sigma_2\chi^*, \chi)$. Lisäksi, koska Majoranan kentällä on vain puolet Diracin kentän vapausasteista, on massatermeissä (1.10) ja (1.11) oltava tekijä 1/2, jotta vastaavassa Diracin yhtälössä massaparametri ei ole kaksinkertainen [1].

Majoranan massatermit ovat mahdollisia ainoastaan sähkömagneettisesti neutraaleille fermioneille, sillä varatut fermionit eivät voi varauksen säilymisen takia olla omia antihiukkasiaan. Tämä ilmenee siitä, että Majoranan massatermit (1.10) ja (1.11) eivät ole invariantteja vaihemuunnoksessa

$$\psi \longrightarrow e^{\mathrm{i}\alpha}\psi, \tag{1.15}$$

jossa $\alpha \neq 0$, sillä tässä muunnoksessa

$$\begin{aligned} \overline{\psi^c}\psi &= \psi^T C^* \psi \longrightarrow e^{2\mathrm{i}\alpha}\overline{\psi^c}\psi, \\ \overline{\psi}\psi^c &= \psi^\dagger C^T \psi^* \longrightarrow e^{-2\mathrm{i}\alpha}\overline{\psi}\psi^c. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Vaihemuunnos (1.15) liittyy sähkömagneettisen varauksen Q lisäksi myös kaikkiin muihin additiivisiin kvanttilukuihin kuten kokonaisleptonilukuun L, ja muunnoksista (1.16) nähdään, että Majoranan massatermit rikkovat näitä kvanttilukuja kahdella yksiköllä. Sähkömagneettisesta varauksesta poiketen tosin esimerkiksi kokonaisleptoniluvun säilymistä ei ennusta mikään laajalti hyväksytty teoria, ja kokonaisleptonilukua rikkovia neutriinojen Majoranan massatermejä pidetäänkin toistaiseksi hyvin mahdollisina ellei jopa todennäköisinä [1].

1.3 Standardimallin Yukawan kytkennät

Fermionien massatermit eivät ole sellaisenaan mittainvariantteja Standardimallissa. Tämän takia fermionien massat lisätään Standardimalliin Higgsin mekanismin avulla käyttäen Higgsin kentän ja fermionikenttien välisiä Yukawan kytkentöjä [1–4]. Esimerkiksi varattujen leptonien massatermit saadaan Yukawan kytkennästä

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}_\ell} = -\sum_{i,j=1}^{3} Y_{ij}^{\ell}\,(\overline{L_i}\,\Phi)\ell_{jR} + \text{h.c.}, \tag{1.17}$$

jossa Y_{ij}^{ℓ} on Yukawan kytkinmatriisi, $L_i = (\nu_{iL}, \ell_{iL})$ on vasenkätinen fermionidupletti, $\Phi = (\phi^+, \phi^0)$ on Higgsin skalaaridupletti ja ℓ_{jR} on oikeakätinen varattu leptonikenttä. Alaindeksit i ja j merkitsevät fermionimakuja, jotka Yukawan matriisi kytkee toisiinsa.

Higgsin mekanismissa Higgsin kentän Φ neutraalilla komponentilla on nollasta eroava vakuumiodotusarvo, $\langle\Phi\rangle = (0, v/\sqrt{2})$, joka rikkoo teorian perustilan sähköheikon symmetrian. Tämän seurauksena kytkennästä (1.17) saadaan yleistetty Diracin massatermi

$$\mathcal{L}_{M_\ell} = -\sum_{i,j=1}^{3} \overline{\ell_{iL}} M_{ij}^{\ell} \ell_{jR} + \text{h.c.}, \tag{1.18}$$

jossa M_{ij}^{ℓ} on varattujen leptonien massamatriisi, ja tässä tapauksessa $M_{ij}^{\ell} = (v/\sqrt{2})Y_{ij}^{\ell}$. Standardimallissa ei ole symmetriaa, joka määräisi Yukawan kytkinmatriisien tai massamatriisien muodon, joten fermionien massamatriisit ovat yleisessä tapauksessa kompleksisia ja ei-diagonaalisia.

Alas-kvarkkien massatermit saadaan muodostettua analogisesti varattujen leptonien massatermien kanssa korvaamalla Yukawan kytkennässä (1.17) leptonikentät vastaavilla kvarkkikentillä. Ylös-kvarkkien tapauksessa täytyy hypervarauksen säilymisen takia käyttää tavallisen Higgsin dupletin Φ sijaan konjugoitua $\mathrm{SU}(2)_L$-duplettia $\tilde{\Phi} \equiv \mathrm{i}\sigma_2\Phi^* = (\phi^{0*}, -\phi^{+*})$, jolla on vastakkainen hypervaraus. Yukawan kytkentä on tällöin

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Y}_u} = -\sum_{i,j=1}^{3} Y_{ij}^{u}\,(\overline{Q_i}\,\tilde{\Phi})u_{jR} + \text{h.c.}, \tag{1.19}$$

jossa $Q_i = (u_{iL}, d_{iL})$ on vasenkätinen kvarkkidupletti ja u_{jR} on oikeakätisen ylöskvarkin kenttä. Kummassakin tapauksessa kvarkeille saadaan samanlaiset Diracin massatermit (1.18) kuin varatuille leptoneille.

1.4 Neutriinojen massamekanismit

1.4.1 Diracin massatermi

Jos oikeakätiset neutriinot lisättäisiin Standardimalliin, voitaisiin neutriinoille muodostaa Diracin massatermi samanlaisesta Yukawan kytkennästä kuin ylöskvarkeilla (1.19) [1]. Tämä ei kuitenkaan selittäisi neutriinojen massojen pienuutta luonnollisesti eli ilman vapaiden parametrien hienosäätöä: neutriinojen Yukawan kytkinvakiot täytyisi säätää hyvin pieniksi, jotta neutriinojen massat olisivat paljon pienempiä kuin varattujen fermionien massat, jotka saavat massansa samasta Higgsin kentän vakuumiodotusarvosta v. Täytyisi siis olla $Y^\nu v \ll Y^\ell v$.

1.4.2 Vasenkätinen Majoranan massatermi

Varatuista fermioneista poiketen Majoranan massatermit ovat neutriinoille mahdollisia. Standardimallin vasenkätiselle neutriinolle voitaisiin lisätä termi, josta saataisiin vasenkätisen kiraalisen komponentin massatermi (1.10). Tämä ei kuitenkaan ole mahdollista käyttäen ainoastaan Standardimallin kenttiä mikäli vaaditaan myös, että massatermi on renormalisoituva. Tämä tarkoittaa käytännössä, että termin kytkinvakion massadimensio ei saa olla negatiivinen.

Koska vasenkätinen neutriino on osa $\mathrm{SU}(2)_L$-duplettia $L = (\nu_L, \ell_L)$, kuuluu kahden neutriinokentän tulo joko singlettiin tai triplettiin.[1] Singletti saadaan kahden dupletin L_i ja L_j kombinaatiosta $L_i^T \mathrm{i}\sigma_2 L_j$. Se ei kuitenkaan kelpaa neutriinojen Majoranan massatermin lähteeksi, sillä se ei kytke neutriinokenttiä keskenään:

$$\overline{L_i^c}\, \mathrm{i}\sigma_2\, L_j \equiv L_i^T\, C^* \mathrm{i}\sigma_2\, L_j = \nu_{iL}^T\, C^* \ell_{jL} - \ell_{iL}^T\, C^* \nu_{jL}. \tag{1.20}$$

Lisäksi kombinaatio (1.20) on antisymmetrinen duplettien vaihdossa:

$$\begin{aligned} L_i^T\, C^* \mathrm{i}\sigma_2\, L_j &= -L_j^T\, (C^* \mathrm{i}\sigma_2)^T\, L_i \\ &= -L_j^T\, C^* \mathrm{i}\sigma_2\, L_i, \end{aligned} \tag{1.21}$$

joten se häviää, kun dupletit ovat samat eli $i = j$. Tässä on käytetty fermioniope-raattorien antikommutatiivisuutta sekä varauskonjugaatiomatriisin C ja Paulin matriisin σ_2 antisymmetrisyyttä.

Leptonidupletien triplettikombinaatio

$$\overline{L_i^c}\, \mathrm{i}\sigma_2 \vec{\sigma}\, L_j \equiv L_i^T\, C^* \mathrm{i}\sigma_2 \vec{\sigma}\, L_j \tag{1.22}$$

sen sijaan kytkee neutriinokentät keskenään ja on lisäksi symmetrinen duplettien vaihdossa, joten se ei häviä, kun $i = j$. Tripletti (1.22) täytyy kuitenkin kytkeä johonkin uuteen Standardimallin ulkopuoliseen kenttään, sillä Standardimallissa ei ole $\mathrm{SU}(2)_L$-triplettejä [1]. Eräs mahdollisuus on skalaaritripletti $\vec{\xi} \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, joka voidaan kytkeä invariantisti triplettiin (1.22):

$$\overline{L_i^c}\, \mathrm{i}\sigma_2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{\xi}) L_j. \tag{1.23}$$

1. Ryhmän SU(2) esityksille $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$.

Tästä saadaan haluttu kytkentä neutriinon ja skalaaritripletin neutraalin komponentin välille, josta saadaan Higgsin mekanismin avulla vasenkätiselle neutriinolle Majoranan massatermi. Joissakin malleissa tämä mekanismi tosin johtaa kevyen skalaarihiukkasen, Majoronin, olemassaoloon, joka on ristiriidassa kokeiden kanssa. Majoron-ongelmaa ei kuitenkaan ole, jos Higgsin potentiaalissa sallitaan kokonaisleptonilukua rikkovat termit, ja tällöin saadaan myös luonnollinen selitys neutriinon pienelle massalle [20].

1.4.3 Oikeakätinen Majoranan massatermi

Mikäli Standardimalliin lisättäisiin oikeakätinen neutriinokenttä, olisi sen oltava mittamuunnoksien suhteen singletti, sillä sen vuorovaikutuksia ei ole havaittu kokeissa. Tällaista neutriinoa sanotaan steriiliksi, koska se ei vuorovaikuta Standardimallin muiden hiukkasten kanssa [1, 21]. Steriilille neutriinolle N_R voidaan suoraan lisätä Standardimalliin invariantti oikeakätinen Majoranan massatermi (1.11)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{R}} = -\frac{m_{\mathrm{R}}}{2}\, \overline{N_R{}^c} N_R + \text{h.c.} \tag{1.24}$$

Sähköheikko symmetriarikko ei rajoita massan m_{R} arvoa vaan se on Standardimallin kannalta vapaa parametri [1].

1.4.4 Efektiivinen Majoranan massatermi

Neutriinojen vasenkätinen Majoranan massatermi on muodostettava leptonidupletien triplettikombinaation (1.22) avulla, mikäli halutaan invariantti ja *renormalisoituva* massatermi. Koska Standardimallia on lopulta pidettävä jonkin korkeamman energiaskaalan (yhtenäis)teorian matalan energian efektiivisenä teoriana, on luonnollista tarkastella myös termejä, jotka eivät ole renormalisoituvia [1].

Standardimallin kentistä rakennettu alimman massadimension termi, josta saadaan vasenkätisen neutriinon Majoranan massatermi, on renormalisoitumaton Weinbergin operaattori, jonka massadimensio on viisi [1, 9, 15]:

$$\mathcal{O}_5 = -\frac{\lambda}{\Lambda}(L^T\, \mathrm{i}\sigma_2\, \Phi)\, C^*(\Phi^T\, \mathrm{i}\sigma_2\, L). \tag{1.25}$$

Tässä λ on dimensioton kytkinvakio ja Λ on jokin korkea energiaskaala. Sähköheikon symmetriarikon jälkeen tästä saadaan neutriinolle massaksi $m = \lambda v^2/\Lambda$, jonka pienuus selittyy ilman hienosäätöä suuren skaalan Λ avulla. Tästä saadaan myös arvio skaalan Λ suurudelle: mikäli $m \simeq 1$ eV, $\lambda \simeq 1$ ja $v \simeq 245$ GeV, saadaan arvioitua $\Lambda \simeq 10^{13}$ GeV.

Efektiivinen massaoperaattori $\mathcal{O}_5$ (1.25) liittyy olennaisesti ns. seesaw-mekanismeihin, jotka ovat renormalisoituvia. Niissä käytetään Standardimallin ulkopuolisia raskaita kenttiä, joiden massat ovat suuruusluokkaa Λ. Kun seesaw-mekanismeista muodostetaan efektiivinen teoria integroimalla raskaat kentät pois, saadaan tulokseksi juuri kyseinen efektiivinen operaattori (1.25) [15, 20]. Näin ollen Standardimallissa kaikki neutriinojen Majoranan massat ovat olennaisesti seesaw-tyyppisiä [20] ja niiden matalan energian käyttäytymistä voidaan tutkia yhtenäisesti efektiivisen termin (1.25) avulla [20]. Tämän takia energiaskaalaa Λ kutsutaan usein ns. seesaw-skaalaksi.

1.4.5 Seesaw-mekanismit

Massaoperaattori (1.25) voidaan toteuttaa puutasolla kolmella eri tavalla, joita kutsutaan seesaw-mekanismeiksi I, II ja III [9, 20]. Seesaw-mekanismeja I ja II voidaan tarkastella vasenkätisen neutriinon ν ja oikeakätisen steriilin neutriinon N massatermin (1.13)

$$\mathcal{L}_{\text{seesaw}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{\nu^c} & \overline{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{\text{L}} & m_{\text{D}}\\ m_{\text{D}} & m_{\text{R}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ N^c\end{pmatrix} + \text{h.c.} \tag{1.26}$$

avulla. Tässä m_{L} on vasenkätisen neutriinon ν Majoranan massa, m_{D} on kummankin neutriinon yhteinen Diracin massa ja m_{R} on oikeakätisen neutriinon N Majoranan massa. Usean neutriinon tapauksessa massat m_{L}, m_{D} ja m_{R} korvataan matriiseilla, kuten kohdassa 1.1.4.

Ensimmäisen lajin seesaw-mekanismissa käytetään oikeakätistä neutriinoa N, jolle annetaan suuri Majoranan massa m_{R}. Vasenkätisen neutriinon ν massatermiä ei ole, koska se ei ole sallittu ilman muita uusia Standardimallin ulkopuolisia hiukkasia, joten $m_{\text{L}} = 0$. Lisäksi oletetaan $m_{\text{D}} \ll m_{\text{R}}$, jolloin massamatriisin ominaisarvot ovat likimain $-m_{\text{D}}^2/m_{\text{R}}$ ja m_{R}. Fysikaaliset hiukkaset ovat siis kevyt neutriino, jonka massa on $m \simeq m_{\text{D}}^2/m_{\text{R}}$ ja raskas neutriino, jonka massa on $M \simeq m_{\text{R}}$.[2] Kevyen neutriinon massa on luonnollisesti pieni, sillä Diracin massa m_{D} saa syntynsä sähköheikossa symmetriarikossa, mutta raskaan steriilin neutriinon massan m_{R} suuruusluokka eli seesaw-skaala on luonnostaan suuri, esimerkiksi GUT-skaala [1, 9, 15]. Yhteys operaattoriin (1.25) on $m_{\text{D}}^2 = \lambda v^2$ ja $m_{\text{R}} = \Lambda$.

Toisen lajin seesaw-mekanismi perustuu skalaaritripletin ja kahden leptonidupletin kytkentään (1.23). Oikeakätistä neutriinoa N ei tarvita, joten $m_{\text{R}} = 0 = m_{\text{D}}$. Mekanismi perustuu siihen, että skalaaritripletillä on kokonaisleptonilukua rikkova kytkentä neutriinoihin ja myös Higgsin duplettiin, jolloin neutriinon massa

2. Käytännöllisesti katsoen kevyen neutriinon vuorovaikutukset ovat samat kuin vasenkätisen neutriinon ν vuorovaikutukset ja raskaan neutriinon samat kuin oikeakätisen neutriinon N vuorovaikutukset.

selittyy ilman hienosäätöä. Kolmannen lajin seesaw-mekanismi taas on samantapainen ensimmäisen kanssa: siinä neutraali singletti N korvataan fermionitripletillä, joka on kytketty vasenkätiseen leptonidupletiin ja Higgsin duplettiin. [9, 15, 20]

Näiden puutason seesaw-mekanismien lisäksi neutriinojen massat voidaan generoida radiatiivisesti häiriöteorian korkeamman kertaluvun korjausten kautta. Eksplisiittisiä malleja esitellään luennoissa [20].

Luku 2

Fermionien sekoittuminen

2.1 Massamatriisien diagonalisointi

Olkoon M_f fermionien f massamatriisi, jossa $f = \nu, \ell, u, d$ ja ν tarkoittaa neutriinoja, ℓ varattuja leptoneita, u ylös-tyyppisiä kvarkkeja ja d alas-tyyppisiä kvarkkeja. Massamatriisi M_f on yleisesti kompleksinen n-ulotteinen neliömatriisi, joka voidaan diagonalisoida singulaariarvohajotelmalla[3] [1, 22]

$$U_f{}^{\dagger} M_f V_f = \mathrm{diag}(m_{f_1}, \ldots, m_{f_n}) \equiv m_f. \tag{2.1}$$

Tässä U_f ja V_f ovat unitaarisia matriiseja ja vastaavat vasen- ja oikeakätisten fermionien muunnoksia (2.5) eri fermionimakujen muodostamassa avaruudessa. Fermionien massat m_{f_i} ovat matriisin M_f singulaariarvoja, jotka ovat ei-negatiivisia reaalilukuja. Matriisit U_f ja V_f diagonalisoivat seuraavat matriisin M_f kombinaatiot:

$$U_f{}^{\dagger}(M_f M_f{}^{\dagger})U_f = m_f{}^2 = V_f{}^{\dagger}(M_f{}^{\dagger} M_f)V_f, \tag{2.2}$$

mikä seuraa ominaisarvohajotelmasta.

Kun fermionien massatermit ovat muodossa, jossa teorian mittavuorovaikutukset on annettu, sanotaan, että kentät ja massatermit ovat ns. symmetriakannassa [9, 23]. Tällöin mahdolliset massamatriisien symmetriat ovat suoraan näkyvissä, eikä massamatriisi ole yleensä diagonaalinen. Merkitään tätä jatkossa lisäämällä symmetriakannassa fermionikenttiin yläindeksi S. Esimerkiksi Standardimallissa perhesymmetrioita ei ole lainkaan, joten massamatriiseille ei ole mitään rajoitteita. Tällä merkintätavalla esimerkiksi varattujen fermionien Diracin massatermi (1.18) kirjoitetaan

$$\mathcal{L}_{M_f} = -\overline{f^S_{iL}}(M_f)_{ij} f^S_{jR} + \mathrm{h.c.} \tag{2.3}$$

3. Tästä käytetään myös nimitystä bi-unitaarimuunnos.

Tässä ja tästä eteenpäin suoritetaan summaus toistuvien indeksien yli ilman, että kirjoitetaan summausmerkintä näkyviin. Majoranan neutriinojen tapauksessa määritellään massamatriisi M_ν termistä

$$\mathcal{L}_{M_\nu} = -\overline{\nu_{iL}^S}(M_\nu)_{ij}(\nu_{jL}^S)^c + \text{h.c.}, \tag{2.4}$$

jossa on käytetty esimerkkinä neutriinon vasenkätisen kiraalisen komponentin massatermiä.

Fermionien f massatermin diagonalisointi tapahtuu määrittelemällä uudet kentät massamatriisin singulaariarvohajotelman (2.1) avulla:

$$\begin{aligned} f_{iL}^m &\equiv (U_f{}^\dagger)_{ij} f_{jL}^S \\ f_{iR}^m &\equiv (V_f{}^\dagger)_{ij} f_{jR}^S, \end{aligned} \tag{2.5}$$

jossa yläindeksi m tarkoittaa, että kentät diagonalisoivat massamatriisin M_f ja näin ollen vastaavat fysikaalisia hiukkasia. Kentistä f^m käytetään tämän takia myös nimitystä *massan ominaiskenttä*. Majoranan neutriinojen tapauksessa massamatriisi on symmetrinen, mikä seuraa fermionioperaattorien antikommutatiivisuudesta ja varauskonjugaatiomatriisin C antisymmetrisyydestä. Tällöin singulaariarvohajotelmassa (2.1) sekä yhtälöissä (2.5) $V_\nu = U_\nu^*$.

2.2 Heikko varattu virta ja sekoitusmatriisit

Leptonien ja kvarkkien massamatriisien diagonalisoinnilla (2.5) on Standardimallissa vaikutusta ainoastaan heikon varatun virran vuorovaikutustermeissä. Kun symmetriakannan kentät f^S kirjoitetaan massan ominaiskenttien f^m avulla, kaikissa muissa termeissä diagonalisointimatriisit U_f ja V_f kumoutuvat unitaarisuuden takia. Ainoastaan heikon varatun virran termeissä fermionidupletin kentät kytkevät toisiinsa ja diagonalisointimatriisit jäävät näkyviin. Esimerkiksi leptonien varatun virran vuorovaikutuksia kuvaava Lagrangen tiheys on [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CC}} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \, \overline{\ell_{iL}^S} \, \gamma^\mu \, \nu_{iL}^S + \text{h.c.} \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \, \overline{\ell_{iL}^m} \, \gamma^\mu \, (U_\ell{}^\dagger U_\nu)_{ij} \nu_{jL}^m + \text{h.c.} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Varatut massan ominaiskentät ℓ_1^m, ℓ_2^m ja ℓ_3^m voidaan samaistaa elektronin, myonin ja taun kanssa:

$$\begin{pmatrix} \ell_e \\ \ell_\mu \\ \ell_\tau \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \ell_1^m \\ \ell_2^m \\ \ell_3^m \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

eli $\ell_\alpha \equiv \ell_i^m$, jossa indeksiä $\alpha = e, \mu, \tau$ kutsutaan mauksi. Neutriinon maku sen sijaan voidaan kiinnittää ainoastaan sen perusteella, minkä makuisen varatun leptonin kanssa sen nähdään vuorovaikuttavan. Yhtälöstä (2.6) nähdään, että kombinaatio $({U_\ell}^\dagger U_\nu)_{ij}\nu_{jL}^m$ vuorovaikuttaa sellaisenaan W-bosonin ja varatun leptonin ℓ_α kanssa. Tätä niin sanottua heikon vuorovaikutuksen ominaiskenttää merkitään $\nu_{\alpha L} \equiv ({U_\ell}^\dagger U_\nu)_{\alpha i}\nu_{iL}^m$, ja juuri nämä kentät vastaavat tietyn makuisia neutriinoja eli elektronin, myonin ja taun neutriinoja. Elektronin, myonin ja taun neutriinot eivät siis ole varsinaisesti hiukkasia vaan neutriinohiukkasten eli neutriinon massan ominaiskenttien (tai -tilojen) superpositioita.

Neutriinojen ja varattujen leptonien massamatriisien diagonalisoinnin ainoa fysikaalinen seuraus Standardimallissa on siis neutriinojen massan ja vuorovaikutuksen ominaiskenttien sekoittumista kuvaava yhtälö

$$\nu_{\alpha L} = ({U_\ell}^\dagger U_\nu)_{\alpha i}\, \nu_{iL}^m, \tag{2.8}$$

jossa neutriinojen (tai leptonien) sekoitusmatriisi on [1]

$$U_{\mathrm{PMNS}} \equiv {U_\ell}^\dagger U_\nu, \tag{2.9}$$

jota kutsutaan Pontecorvon–Makin–Nakagawan–Sakatan matriisiksi eli PMNS-matriisiksi. Sen alkioita merkitään kolmen neutriinon tapauksessa seuraavasti:

$$U_{\mathrm{PMNS}} \equiv \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Symmetriakannan lisäksi usein käytetään kantaa, jossa varattujen leptonien massamatriisi on diagonaalinen (merkitään pilkulla $'$) [9], jolloin $U'_\ell = V'_\ell = \mathbb{1}$ ja $U_{\mathrm{PMNS}} = U'_\nu$. Fysikaalisesti eri kannoilla ei ole eroa, ja symmetriakannasta päästään varattujen leptonien diagonaaliseen kantaan korvaamalla neutriinojen massamatriisi M_ν matriisilla $M'_\nu = {U_\ell}^\dagger M_\nu {U_\ell}^*$ [24]. Tällöin $U'_\nu = {U_\ell}^\dagger U_\nu$ ja fysikaalinen neutriinojen sekoitusmatriisi pysyy muuttumattomana.

Ylös- ja alas-kvarkkien massamatriisien diagonalisoinnista seuraa kvarkkien sekoittuminen samaan tapaan kuin leptonien tapauksessa. Kvarkkien tapauksessa sekoitusmatriisi tosin sijoitetaan varatun virran termeissä tavallisesti alas-kvarkkien eteen, jolloin sekoitusmatriisi kuvaa kevyempien alas-kvarkkien ja niiden massan ominaiskenttien sekoittumista [1]. Ylös-kvarkit ovat tällöin automaattisesti massan ominaiskenttiä. Kvarkkien sekoitusmatriisia [1]

$$U_{\mathrm{CKM}} \equiv {U_u}^\dagger U_d, \tag{2.11}$$

kutsutaan Cabibbon–Kobayashin–Maskawan matrisiiksi [13, 14] eli CKM-matriisiksi. Sen alkioita merkitään tavallisesti seuraavin indeksein:

$$U_{\text{CKM}} \equiv \begin{pmatrix} U_{ud} & U_{us} & U_{ub} \\ U_{cd} & U_{cs} & U_{cb} \\ U_{td} & U_{ts} & U_{tb} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

2.3 Sekoitusmatriisien parametrisointi

2.3.1 Standardiparametrisaatio

Sekoitusmatriisit (2.9) ja (2.11) ovat kahden unitaarisen matriisin tulona unitaarisia. Ilman Standardimallin ulkopuolisia symmetrioita muita rajotteita ei ole. Keskitytään tästä eteenpäin tapaukseen, jossa fermioniperheitä on kolme, jolloin massa- ja sekoitusmatriisit ovat 3×3 -matriiseja.

Mielivaltainen unitaarinen 3×3 -matriisi U voidaan parametrisoida yhdeksällä reaalisella parametrilla, joista kolme on kulmia ja loput kuusi vaiheita. Eri parametrisointeja on olennaisesti 9 erilaista [22, 25], joista Particle Data Groupin [21, 26] käyttämää sekoitusmatriisin standardiparametrisaatiota vastaa

$$\begin{aligned} U &= P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\, R_{23}\, P(-\delta, 0, 0)\, R_{13}\, P(\delta, 0, 0)\, R_{12}\, P(\alpha_4, \alpha_5, 0) \\ &= \operatorname{diag}(e^{\mathrm{i}\alpha_1}, e^{\mathrm{i}\alpha_2}, e^{\mathrm{i}\alpha_3}) \\ &\times \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-\mathrm{i}\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{\mathrm{i}\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \\ &\times \operatorname{diag}(e^{\mathrm{i}\alpha_4}, e^{\mathrm{i}\alpha_5}, 1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tämän esittivät ensimmäisinä Maiani [27], Chau ja Keung [28]. Tässä $s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij}$, $c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$, $P(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \operatorname{diag}(e^{\mathrm{i}\alpha}, e^{\mathrm{i}\beta}, e^{\mathrm{i}\gamma})$ on diagonaalinen vaihematriisi ja $R_{ij} = R_{ij}(\theta_{ij})$ tarkoittaa tason i–j reaalista rotaatiomatriisia:

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, \quad R_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, \quad R_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Näille pätee $R_{ij}(\theta)R_{ij}(\phi) = R_{ij}(\theta + \phi)$ ja $R_{ij}(\theta)^{-1} = R_{ij}(\theta)^T = R_{ij}(-\theta)$. Lisäksi vaiheiden α_i paikkaa matriisien $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ja $P(\alpha_4, \alpha_5, 0)$ diagonaaleilla voidaan vapaasti vaihtaa uudelleenmäärittelyiden avulla, kunhan vaiheita on yhteensä 5 kappaletta [22, 25].

Kaikki unitaarisen matriisin (2.13) vaiheet α_i eivät esiinny sekoitusmatriiseissa (2.9) ja (2.11), sillä osa niistä voidaan eliminoida siirtämällä ne fermionikenttien vaiheiksi varatun virran termeissä (2.6). Tämä on mahdollista, koska Diracin fermionien vaiheet eivät ole fysikaalisia havaintosuureita $U(1)$-symmetrian (1.15) perusteella. Näin ollen CKM-matriisista (2.11) voidaan eliminoida kaikki vaiheet α_i, ja sen standardiparametrisaatio on

$$K \equiv R_{23}\, P(-\delta, 0, 0)\, R_{13}\, P(\delta, 0, 0)\, R_{12}\,, \tag{2.15}$$

joka vastaa yhtälössä (2.13) viimeisen vaiheen keskimmäistä matriisia. CKM-matriisissa on siis neljä reaalista parametria: kolme kulmaa θ_{12}, θ_{23} ja θ_{13} sekä CP-symmetriaa rikkova ns. Diracin vaihe δ. Kvarkkien tapauksessa kulmaa θ_{12} kutsutaan myös usein Cabibbon kulmaksi θ_{C}.

Neutriinojen sekoitusmatriisin (2.9) standardiparametrisaatio on vastaavasti

$$K \times P_{\mathrm{Maj}}, \tag{2.16}$$

josta on eliminoitu varattuja leptonia vastaavat vaiheet α_1, α_2 ja α_3. Neutriinojen parametrisaatiossa on kvarkkien tapauksesta poiketen lisäksi diagonaalinen vaihematriisi P_{Maj}, joka sisältää kaksi fysikaalista CP-symmetriaa rikkovaa Majoranan vaihetta [21]. Diracin neutriinojen tapauksessa nämä vaiheet eivät ole fysikaalisia havaintosuureita, jolloin $P_{\mathrm{Maj}} = \mathbb{1}$.

Mikäli unitaarinen 3×3 -matriisi U on annettu, voidaan sen alkioista ratkaista standardiparametrit esimerkiksi seuraavien yhtälöiden avulla:

$$s_{12} = \frac{|U_{12}|}{\sqrt{|U_{11}|^2 + |U_{12}|^2}}, \quad s_{23} = \frac{|U_{23}|}{\sqrt{|U_{23}|^2 + |U_{33}|^2}}, \quad s_{13} = |U_{13}|, \tag{2.17}$$

$$\delta = -\mathrm{Arg}\left(\frac{U_{11}^* U_{13} U_{31} U_{33}^*}{c_{12} c_{13}^2 c_{23} s_{13}} + c_{12} c_{23} s_{13}\right). \tag{2.18}$$

Tässä on oletettu, että kulmat ovat välillä $[0, \pi/2]$, jolloin kulmien sinit ja kosinit ovat positiivisia. Näin voidaan tehdä tarkastelun yleisyyttä menettämättä, sillä kyseinen tilanne voidaan aina saavuttaa määrittelemällä osa vaiheista α_i ja δ uudelleen vähentämällä niiden alkuperäisistä arvoista π. Vaiheiden vaihteluväli on tällöin $[0, 2\pi]$. Vaiheet α_i saadaan parametrisaatiossa (2.13) seuraavasti:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \mathrm{Arg}(U_{13}\, e^{\mathrm{i}\delta}), \quad \alpha_2 = \mathrm{Arg}(U_{23}), \quad \alpha_3 = \mathrm{Arg}(U_{33}), \\ &\alpha_4 = \mathrm{Arg}(U_{11}\, e^{-\mathrm{i}\alpha_1}), \quad \alpha_5 = \mathrm{Arg}(U_{12}\, e^{-\mathrm{i}\alpha_1}). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Mikäli esimerkiksi $U_{13} = 0$, ei vaiheen α_1 ratkaisemiseen voida käyttää yhtälöitä (2.19), joten tällaiset tapaukset täytyy tarkastella erikseen.

Yhtälö (2.18) saadaan identiteetistä

$$U_{11}^* U_{13} U_{31} U_{33}^* = c_{12} c_{13}^2 c_{23} s_{13} \left(e^{-\mathrm{i}\delta} s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} \right), \tag{2.20}$$

jonka avulla voidaan laskea myös standardiparametrisaation Jarlskogin invariantti [1, 29]

$$\begin{aligned} |J_{\mathrm{CP}}| \equiv |\mathrm{Im}\,(U_{11}^* U_{12} U_{21} U_{22}^*)| &= |\mathrm{Im}\,(U_{22}^* U_{23} U_{32} U_{33}^*)| \\ = |\mathrm{Im}\,(U_{11}^* U_{13} U_{31} U_{33}^*)| &= \left| c_{12} c_{23} c_{13}^2 s_{12} s_{23} s_{13} \sin\delta \right|. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Tämä invariantti liittyy unitaarisen matriisin ns. unitaarisuuskolmioihin ja se kertoo sekoitusmatriisin CP-symmetrian rikkoutumisesta. Tästä nähdään erityisesti, että CP-symmetrian rikkoutuminen ($J_{\mathrm{CP}} \neq 0$) vaatii kaikkien sekoituskulmien eroamista nollasta.

2.3.2 Wolfensteinin parametrisaatio

Kokeiden perusteella tiedetään, että kvarkkien sekoittuminen ei ole kovin voimakasta, ja niinpä kvarkkien sekoitusmatriisi (2.11) ei eroa paljon identiteettimatriisista. Kvarkkien sekoitusparametreilla on lisäksi havaittu olevan hierarkia [21] $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$. Tähän perustuen CKM-matriisille käytetään usein standardiparametrisaation (2.15) sijaan Wolfensteinin parametrisaatiota, joka määritellään yhtälöillä [21]

$$\begin{aligned} s_{12} = \lambda = \frac{|U_{us}|}{\sqrt{|U_{ud}|^2 + |U_{us}|^2}}, \qquad s_{23} = A\lambda^2 = \lambda \left| \frac{U_{cb}}{U_{us}} \right|, \\ s_{13}\, e^{\mathrm{i}\delta} = U_{ub}{}^* = A\lambda^3(\rho + \mathrm{i}\eta) = \frac{A\lambda^3(\bar\rho + \mathrm{i}\bar\eta)\sqrt{1 - A^2\lambda^4}}{\sqrt{1-\lambda^2}[1 - A^2\lambda^4(\bar\rho + \mathrm{i}\bar\eta)]}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

jossa parametreina ovat reaaliluvut λ, A, $\bar\rho$ ja $\bar\eta$. Parametreille $\bar\rho$ ja $\bar\eta$ pätee $\bar\rho + \mathrm{i}\bar\eta = -U_{ud}U_{ub}{}^*/(U_{cd}U_{cb}{}^*)$, eikä tämä yhdistelmä riipu vaihekonventiosta. Lisäksi CKM-matriisi on näiden parametrien avulla kirjoitettuna unitaarinen parametrin λ jokaisessa kertaluvussa [21]. Parametrien ρ ja η avulla CKM-matriisille voidaan kirjoittaa usein käytetty approksimaatio

$$U_{\mathrm{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - \mathrm{i}\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - \mathrm{i}\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{2.23}$$

kolmanteen kertalukuun parametrin λ suhteen. Lisäksi parametreille pätee

$$s_{13} = A\lambda^3|\rho + \mathrm{i}\eta|, \tag{2.24}$$

$$\delta = \mathrm{Arg}(\rho + \mathrm{i}\eta), \tag{2.25}$$

$$\sin\delta = \frac{\eta}{\sqrt{\rho^2+\eta^2}}, \quad \cos\delta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\eta^2}} \tag{2.26}$$

sekä

$$\bar\rho + i\bar\eta = (\rho + i\eta)\left[1 - \lambda^2/2 + \mathcal{O}(\lambda^4)\right]. \tag{2.27}$$

2.4 Neutriinojen sekoitusmatriisin approksimaatiot

Mittaustuloksiin perustuen neutriinojen sekoitusmatriisille on ehdotettu erilaisia approksimaatioita. Tulosten mukaan neutriinojen sekoituskulmat θ_{12} ja θ_{23} ovat suuria, mutta kulma θ_{13} on pieni. Kulman θ_{13} mittaukset olivat pitkään yhteensopivia jopa arvon nolla kanssa, ja kulman θ_{23} virherajat sisältävät edelleen maksimaalisen arvon $\pi/4$. Tämän vuoksi suuri osa neutriinojen sekoitusmatriisin approksimaatioista on ollut muotoa [30]

$$U_{\mathrm{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12}/\sqrt{2} & c_{12}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ s_{12}/\sqrt{2} & -c_{12}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times P_{\mathrm{Maj}}, \tag{2.28}$$

jossa $\sin^2\theta_{23} = 1/2$ ja $\sin\theta_{13} = 0$. Tällöin sekoitusmatriisilla on maksimaalinen μ–τ-symmetria. Eräs esimerkki tällaisesta sekoitusmatriisista on ns. bi-maksimaalinen matriisi

$$U_{\mathrm{BM}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.29}$$

jossa myös kulma θ_{12} on maksimaalinen eli $\sin^2\theta_{12} = 1/2$. Tämä approksimaatio ei ole kuitenkaan enää sopusoinnussa mittausten kanssa. Bi-maksimaalinen matriisi on kuitenkin teoreettisesti mielenkiintoinen, sillä se muodostuu kahdesta maksimaalisesta rotaatiosta: $U_{\mathrm{BM}} = R_{23}(\pi/4)R_{12}(\pi/4)$. Tämän hyödyllisyys selviää kvarkki–leptoni-komplementaarisuuden yhteydessä osassa 4.3.

2.4.1 Tribi-maksimaalinen sekoittuminen

Nykyisin suosituin approksimaatio neutriinojen sekoitusmatriisille on ns. tribimaksimaalinen muoto [31, 32], jossa standardiparametreille pätee $\sin^2\theta_{12} = 1/3$, $\sin^2\theta_{23} = 1/2$ ja $\sin\theta_{13} = 0$. Valitsemalla kulmat positiivisiksi saadaan sekoitusmatriisi muotoon

$$U_{\mathrm{PMNS}} = U_{\mathrm{TBM}} \times P_{\mathrm{Maj}}, \tag{2.30}$$

jossa $U_{\rm TBM}$ on tribi-maksimaalinen matriisi

$$U_{\rm TBM} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Tästä esiintyy kirjallisuudessa useita eri merkkikonventioita, joissa on käytetty eri Majoranan ja varattujen leptonien vaiheita.

Tribi-maksimaalinen sekoitusmatriisi $U_{\rm TBM}$ (2.31) voidaan muodostaa symmetriakannassa esimerkiksi Cabibbon tri-maksimaalisen matriisin

$$U_{\rm C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

jossa $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, ja maksimaalisen matriisin

$$R_{13}^m \equiv R_{13}(\pi/4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

avulla [33]: jos $U_\ell = U_{\rm C}$ ja $U_\nu = R_{13}^{m\,T}$, niin

$$U_{\rm PMNS} = U_\ell{}^\dagger U_\nu = U_{\rm C}{}^\dagger R_{13}^{m\,T} = P(0,0,\pi)\, U_{\rm TBM}\, P_{\rm Maj}. \tag{2.34}$$

Tässä on käytettävä matriisin R_{13}^m transpoosia, jotta tulokseksi saadaan tribi-maksimaalinen matriisi. Matriisit $U_{\rm C}$ ja $R_{13}^{m\,T}$ esiintyvät näissä rooleissa esimerkiksi joissakin ryhmään A_4 pohjautuvissa malleissa. (Ryhmästä A_4 ja muista diskreeteistä symmetrioista kerrotaan lisää osassa 2.5.)

Uusimpien mittaustulosten valossa tribi-maksimaalinen skenaario ei ole enää niin houkutteleva kuin aiemmin, sillä mittaukset osoittavat, että kulma θ_{13} on nollasta poikkeava. Muutenkin eksaktia tribi-maksimaalista sekoitusmatriisia (2.31) olisi pidettävä lähinnä nollannen asteen approksimaatioina käytetyn mallin parametrien suhteen.

2.4.2 Kultainen leikkaus

Tribi-maksimaalisen sekoittumisen kanssa kilpailee nykyisin myös toinen μ–τ-symmetrinen malli, jossa neutriinojen sekoituskulmalla θ_{12} on yhteys kultaiseen leikkaukseen [34, 35]

$$\phi \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2.35}$$

Kultainen leikkaus eli kultainen suhde on kuuluisa luonnossakin esiintyvä matemaattinen vakio, joka on yhtälön

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{2.36}$$

positiivinen ratkaisu.

Kultaiseen leikkaukseen liittyviä approksimaatioita on esitetty kaksi eri versiota [34, 35]:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \cot\theta_{12} = \phi, \\ &\text{(b)} \quad \cos\theta_{12} = \phi/2. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Muille kulmille pätee $\sin^2\theta_{23} = 1/2$ ja $\sin\theta_{13} = 0$ kuten bi- ja tribi-maksimaalisissa tapauksissa. Tapauksessa (a)

$$\sin^2\theta_{12} = \frac{1}{2+\phi} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \simeq 0.276, \tag{2.38}$$

ja tapauksessa (b)

$$\sin^2\theta_{12} = \frac{3-\phi}{4} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \simeq 0.345. \tag{2.39}$$

Lisäksi tapaus (b) perustuu identiteettiin $\phi = 2\cos(\pi/5)$, josta saadaan kulmalle yksinkertainen muoto $\theta_{12} = \pi/5$.

2.5 Diskreetit symmetriat

Jos oletetaan, että neutriinojen sekoitusmatriisin approksimaatiot, kuten tribimaksimaalinen sekoittuminen (2.31) tai kultaisen leikkauksen approksimaatiot (2.37), eivät ole vain numeerista sattumaa, voidaan tarkastella malleja, jotka johtavat luonnollisesti näihin sekoitusmatriiseihin. Luonteva keino tähän ovat leptoniperheiden kesken vallitsevat symmetriat eli makusymmetriat [17]. Ne rajoittavat massamatriisien muotoa ja johtavat näin tietynlaiseen sekoitusmatriisin muotoon.

Diskreetit ei-abeliset symmetriat sopivat hyvin tällaisiksi makusymmetrioiksi. Tribi-maksimaalisen sekoittumisen tapauksessa erityisen hyvin soveltuva ja suosituin ryhmä on alternoiva ryhmä A_4 [15, 17, 36, 37], joka muodostuu neljän objektin parillisista permutaatiosta. Ryhmänä se on isomorfinen tetraedriryhmän eli säännöllisen tetraedrin rotaatioryhmän T kanssa. Tämä diskreetti ryhmä on pienin, jolla on kolmiulotteinen redusoitumaton esitys, ja näin se soveltuu kolmen leptoniperheen tapaukseen. Monesti näissä malleissa käytetään useita Higgsin kenttiä. Tällöin esimerkiksi varatuille leptoneille saadaan yleistetty Yukawan kytkentä

$$-Y^{\ell}_{ijk}(\overline{L_i}\,\Phi_j)\ell_{kR}, \tag{2.40}$$

jonka mahdolliset ijk-yhdistelmät symmetriaryhmä määrää. Tällä tavalla ryhmän A_4 avulla saadaan rakennettua eksakti tribi-maksimaalinen neutriinojen sekoitusmatriisi.

Ryhmä A_4 ei ole ainoa vaihtoehto tribi-maksimaalisen sekoittumisen symmetriaryhmäksi. Muita käytettyjä ryhmiä [17] ovat mm. tetraedriryhmän T kaksinkertainen peiteryhmä T' [38, 39], joka tunnetaan myös kaksinkertaisena tai binäärisenä tetraedriryhmänä (muita merkintätapoja mm. $2T$ tai ${}^{(d)}T$), symmetrinen ryhmä S_4 [40, 41], joka koostuu kaikista 4 objektin permutaatioista ja on isomorfinen säännöllisen tetraedrin koko symmetriaryhmän kanssa sekä ryhmä $\Delta(27)$ [42], joka on isomorfinen puolisuoran tulon $Z_3 \ltimes Z_3'$ kanssa. Tässä Z_3' tarkoittaa tuloryhmää $Z_3 \times Z_3$ ja puolisuora tulo tarkoittaa käytännössä, että ryhmien Z_3 ja Z_3' generaattorit eivät kommutoi [43].

Kultaisen leikkauksen approksimaatioihin (2.37) johtavia diskreettejä symmetriaryhmiä ovat esimerkiksi (a) alternoiva ryhmä A_5 ja (b) dihedraalinen ryhmä D_{10} [34, 35]. Ryhmä A_5 on isomorfinen säännöllisen ikosaedrin rotaatioryhmän kanssa, ja sen yhteys kultaiseen leikkaukseen seuraa ikosaedrin geometrisista ominaisuuksista. Tapauksessa (b) dihedraalinen ryhmä D_{10} eli säännöllisen 10-kulmion symmetriaryhmä on luonnollinen valinta symmetriaryhmäksi, sillä säännöllisen 10-kulmion ulkokulma on $\pi/5$. Lisäksi D_{10} antaa yksinkertaisemman vakuumirakenteen verrattuna muuten samalla tavalla sopivaan dihedraaliseen ryhmään D_5.

On myös tutkittu muita diskreettejä makusymmetrioita, jotka eivät välttämättä liity suoranaisesti eksaktiin tribi-maksimaaliseen tai muihin μ–τ-symmetrisiin tapauksiin. Esimerkiksi hiljattain esitetyssä ryhmän SU(3) aliryhmään $\Delta(54)$ perustuvassa supersymmetrisessä mallissa [44] saadaan luonnollisesti likimain tribi-maksimaaliset kulmat θ_{12} ja θ_{23} sekä mittaustuloksia vastaava suurehko θ_{13}. Kyseissä mallissa kulman θ_{13} suuruus ja kulman θ_{23} poikkeama maksimaalisesta arvosta ovat korreloituneet. Malli selittää myös kvarkkien sekoittumisen ja kaikkien fermionien massat ja hierarkioiden erot. Lisäksi hiukkaset on asetettu ryhmän $\Delta(54)$ esityksiin yhteensopivasti ryhmään SO(10) perustuvan suuren yhtenäisteorian [9, 30, 45] kanssa.

Luku 3

Neutriino-oskillaatio ja mittaukset

3.1 Neutriino-oskillaatio

Neutriinojen oskillaatioilmiöllä [1, 21] tarkoitetaan neutriinon maun säännöllistä vaihtumista toisiksi mauiksi neutriinon propagoinnin aikana. Oskillaatio on seurausta neutriinojen massan ja vuorovaikutuksen (eli maun) ominaiskenttien sekoittumisesesta (2.8)

$$\nu_{\alpha L} = \sum_i U_{\alpha i}\, \nu_{iL}^m. \tag{3.1}$$

Tässä neutriinojen sekoitusmatriisia U_{PMNS} (2.9) on merkitty lyhyemmin U:lla.

Tarkemmin sanottuna neutriinojen oskillaatio ja sen havaitseminen ovat mahdollisia, koska sekoittumisen lisäksi neutriinojen massat ja erityisesti massojen neliöiden erot ovat pieniä. Neutriinot syntyvät heikon varatun virran prosesseissa tällöin koherentisti, ja massatilojen koherenssi säilyy neutriinojen havaitsemiseen asti [46]. Vaikka heikon varatun virran vuorovaikutus (2.6) onkin symmetrinen neutriinojen ja varattujen leptonien suhteen, vastaavaa massatilojen superpositioiden oskillaatiota ei havaita varatuilla leptoneilla, koska niiden massaerot ovat suuria.

Johdetaan seuraavaksi neutriino-oskillaation todennäköisyys kvanttimekaniikan avulla käyttäen yksinkertaistettua tasoaaltomenetelmää. Huomattavasti monimutkaisempi tarkempi johto vaatisi aaltopakettimenetelmän tai kvanttikenttäteorian käyttöä [21], mutta tasoaaltoapproksimaatiolla saadaan kuitenkin oikea tulos. Näitä eri lähestymistapoja ja niissä tarvittavia oletuksia on tarkasteltu esimerkiksi viitteissä [1] ja [21].

Yhtälö (3.1) kuvaa Standardimallin rakentamiseen käytettyjen kvanttikenttäoperaattorien sekoittumista. Kvanttimekaaninen vastine yhtälölle (3.1) on neutriinojen *tilavektorien* sekoittumista kuvaava yhtälö. Koska operaattori $\overline{\nu_{iL}^m}$ luo tilan

$|\nu_i^m\rangle$ ja koska yhtälöstä (3.1) saadaan $\overline{\nu_{\alpha L}} = \sum_i U_{\alpha i}^* \overline{\nu_{iL}^m}$, on neutriinon massan ja maun ominaistilojen sekoittumista kuvaava yhtälö

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* \, |\nu_i^m\rangle. \tag{3.2}$$

Neutriinon massan ominaistila $|\nu_i^m\rangle$ on myös Hamiltonin operaattorin ominaistila, olkoon sen energia E_i. Schrödingerin yhtälöstä voidaan tällöin ratkaista ominaistilan aikakehitys [1]:

$$|\nu_i^m(t)\rangle = e^{-\mathrm{i}E_i t} \, |\nu_i^m\rangle, \tag{3.3}$$

joka on yksinkertainen tasoaalto. Hetkellä $t = 0$ syntyvän maun ominaistilan $|\nu_\alpha\rangle$ aikakehitys saadaan nyt yhtälöistä (3.2) ja (3.3):

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* \, e^{-\mathrm{i}E_i t} \, |\nu_i^m\rangle. \tag{3.4}$$

Konjugoimalla yhtälö (3.2) ja käyttämällä yhtälöä (3.4) saadaan edelleen neutriinojen makujen α ja β välisen oskillaation todennäköisyys hetkellä t neutriinon ν_α syntymisen ($t = 0$) jälkeen:

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta, t) \equiv |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t)\rangle|^2 = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \, e^{-\mathrm{i}(E_i - E_j)t}. \tag{3.5}$$

Nykyisissä ja suunnitelluissa oskillaatiokokeissa neutriinot ovat ultrarelativistisia [21]. Tällöin dispersiorelaatiota $E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2}$ voidaan approksimoida $E_i \simeq p + m_i^2/(2p)$, jossa $p \equiv |\vec{p}|$. Jos oletetaan lisäksi, että oskillaatiossa kaikilla neutriinojen massan ominaistiloilla on sama liikemäärä p, saadaan $E_i - E_j \simeq \Delta m_{ij}^2/(2p)$, jossa $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$. Ultrarelativistisille neutriinoille $p \simeq E$, jolloin oskillaatiotodennäköisyydeksi saadaan [1]

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta, L) = \sum_{i,j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \, \exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E}\right), \tag{3.6}$$

jossa E on neutriinojen energia ja ultrarelativististen neutriinojen lentoaikaa on approksimoitu $t \simeq L$, jossa L on neutriinolähteen ja detektorin välimatka.

3.2 Oskillaatiokokeet

Koejärjestelyissä parametrit L ja E ovat tunnettuja, joten oskillaatiokokeissa voidaan määrittää erotuksia Δm_{ij}^2 ja sekoitusmatriisin U_{PMNS} elementtejä mittaamalla oskillaatiotodennäköisyyksiä (3.6). Mahdolliset sekoitusmatriisin Majoranan vaiheet eivät vaikuta oskillaatiotodennäköisyyteen, joten niistä ei saada tietoa oskillaatiokokeissa.

Neutriinojen oskillaatiokokeissa on havaittu kaksi riippumatonta oskillaatiotaajuutta eli neutriinojen massojen neliöiden erotusta: $\Delta m^2_{\rm sol}$ ja $\Delta m^2_{\rm atm}$ [1, 15]. Näistä $\Delta m^2_{\rm sol}$ havaittiin ensin Auringossa syntyvien elektronin neutriinojen oskillaatiosta ja $\Delta m^2_{\rm atm}$ ilmakehässä kosmisien säteiden vuorovaikutuksista syntyvien myonin ja elektronin neutriinojen oskillaatiosta. Auringon neutriinoja on mitattu mm. kokeissa [21] Homestake [10], SAGE [47], GALLEX [48], GNO [49], Kamiokande [50], Super-Kamiokande [51, 52], SNO [12, 53] ja Borexino [54]. Ilmakehän neutriinoja on mitattu Super-Kamiokande-kokeessa [11]. Aurinko- ja ilmakehäneutriinokokeissa on oskillaatiotaajuuksien lisäksi saatu mitattua neutriinojen sekoituskulmat $\theta_{\rm sol} \equiv \theta_{12}$ ja $\theta_{\rm atm} \equiv \theta_{23}$ [55].

Auringon ja ilmakehän neutriinojen oskillaatiotaajuudet on varmistettu maanpäällisissä reaktori- ja kiihdytinneutriinokokeissa. Pitkän kantaman reaktorineutriinokoe KamLAND [56] mittasi oskillaatiotaajuuden $\Delta m^2_{\rm sol}$ ja kulman θ_{12}, taajuus $\Delta m^2_{\rm atm}$ ja kulma θ_{23} on vahvistettu pitkän kantaman kiihdytinneutriinokokeissa K2K [57] ja MINOS [58]. Pitkän kantaman kiihdytinneutriinokoe OPERA sen sijaan mittaa oskillaatiota $\nu_\mu \to \nu_\tau$, josta on jo tehty yksi havainto [59]. Lisäksi neutriinojen sekoituskulmaa θ_{13} on mitattu mm. lyhyen kantaman reaktorineutriinokokeisssa CHOOZ [60], DOUBLE-CHOOZ [61], Daya Bay [62] ja RENO [63] sekä pitkän kantaman kiihdytinneutriinokokeissa T2K [64] ja MINOS [65]. CP-symmetriaa rikkovasta Diracin vaiheesta δ ei ole saatu vielä tarkkaa mittaustietoa. Viimeisimmissä kokeissa havaittu suurehko kulman θ_{13} arvo kuitenkin tarkoittaa, että vaihe δ pystytään määrittämään seuraavan sukupolven oskillaatiokokeissa, kuten esimerkiksi LAGUNA-LBNO.

Kaksi riippumatonta oskillaatiotaajuutta ($\Delta m^2_{\rm sol}$ ja $\Delta m^2_{\rm atm}$) voidaan yksinkertaisimmillaan toteuttaa kolmen neutriinon tapauksessa, sillä siinä vain kaksi massojen neliöiden erotuksista

$$\Delta m^2_{21} \equiv m^2_2 - m^2_1, \quad \Delta m^2_{31} \equiv m^2_3 - m^2_1, \quad \Delta m^2_{32} \equiv m^2_3 - m^2_2 \tag{3.7}$$

on riippumattomia. Mittauksista tiedetään, että $\Delta m^2_{\rm sol} > 0$ ja $\Delta m^2_{\rm sol} \ll |\Delta m^2_{\rm atm}|$ [1, 21]. Tämän vuoksi neutriinojen numerointi valitaan yleensä niin, että $\Delta m^2_{\rm sol} = \Delta m^2_{21} > 0$ ja $\Delta m^2_{21} < |\Delta m^2_{31}|$. Tällöin on kaksi mahdollisuutta [21]: neutriinojen massat ovat joko ns. normaalissa järjestyksessä (normaali hierarkia, NH)

$$m_1 < m_2 < m_3, \quad \Delta m^2_{\rm atm} = \Delta m^2_{32}, \tag{3.8}$$

tai ns. käänteisessä järjestyksessä (käänteinen hierarkia, IH)

$$m_3 < m_1 < m_2, \quad \Delta m^2_{\rm atm} = \Delta m^2_{31}. \tag{3.9}$$

Hierarkian $\Delta m^2_{\rm sol} \ll |\Delta m^2_{\rm atm}|$ takia on joka tapauksessa $\Delta m^2_{31} \simeq \Delta m^2_{32}$.

Suurin ja vakuuttavin osa mittaustuloksista voidaan selittää olettamalla vain kolme tavallista aktiivista neutriinoa [21] kuten edellä. Mahdollisia viitteitä kolmannesta oskillaatiotaajuudesta on kuitenkin saatu LSND- [66] ja MiniBooNE-kokeista [67]. Näiden tulosten vahvistuminen tarkoittaisi ainakin yhden steriilin neutriinon olemassaoloa, sillä tällöin riippumattomia massaeroja täytyisi olla vähintään kolme [15]. Tässä tutkielmassa keskitytään kuitenkin tavalliseen kolmen neutriinon tapaukseen.

3.2.1 Mittaustulokset

Neutriinojen oskillaatiokokeiden viimeisin tulos on ollut hypoteesin $\theta_{13} \neq 0$ vahvistuminen noin viiden standardipoikkeaman (5σ) varmuudella ja kyseisen kulman arvon tarkempi määritys. Aiemmissa kokeissa ja globaaleissa neutriinodata-analyyseissä [55, 68, 69] kulman θ_{13} arvo vaihteli huomattavasti, mikä johtui ainakin osittain reaktorineutriinojen vuon suuruuden arvioimisesta [55, 68]. Uudemmat Daya Bayn [62] ja RENO:n [63] tulokset eivät sen sijaan juurikaan riipu neutriinovuon normalisaatiosta, sillä kyseisissä kokeissa käytetään kauempana sijaitsevan detektorin lisäksi lähidetektoria ja verrataan niiden saamia vuoarvoja toisiinsa [70].

Viimeisimmässä globaalissa neutriinodata-analyysissä [70] määritetyt neutriinojen sekoitusparametrit on annettu taulukossa 3.1. Kulmaparametrit ovat standardiparametrisoinnin (2.13) mukaiset, mutta neutriinojen massojen neliöiden erotukselle Δm^2_{atm} on käytetty määritelmää $\Delta m^2_{\text{atm}} \equiv m_3^2 - (m_2^2 + m_1^2)/2$.

Taulukko 3.1: Globaalin neutriinodata-analyysin [70] tulokset neutriinojen sekoitusparametreille ja massojen neliöiden erotuksille kolmen neutriinon tapauksessa. Parhaiden arvojen lisäksi on listattu 1σ:n ja 3σ:n luottamusvälit. Kyseisessä analyysissä on käytetty määritelmiä $\Delta m^2_{\text{sol}} \equiv \Delta m^2_{21}$ ja $\Delta m^2_{\text{atm}} \equiv m_3^2 - (m_2^2 + m_1^2)/2$. Taulukon tuloksissa on oletettu neutrinoille normaali järjestys (NH). Erot käänteisen järjestyksen (IH) tuloksiin ovat noin prosentin suuruusluokkaa.

parametri	paras arvo	1σ:n väli	3σ:n väli
Δm^2_{sol} [10^{-5} eV^2]	7.54	7.32–7.80	6.99–8.18
Δm^2_{atm} [10^{-3} eV^2]	2.43	2.34–2.50	2.15–2.66
$\sin^2\theta_{12}$	0.307	0.291–0.325	0.259–0.359
$\sin^2\theta_{23}$	0.398	0.372–0.428	0.330–0.638
$\sin^2\theta_{13}$	0.0245	0.0214–0.0279	0.0149–0.0344
δ [π]	0.89	0.45–1.18	–

Normaalissa järjestyksessä massaerojen Δm^2_{21} ja $\Delta m^2_{31} \simeq \Delta m^2_{\text{atm}}$ suhteesta

$$r \equiv \frac{\Delta m^2_{21}}{\Delta m_{31}} \gtrsim 0.026 \tag{3.10}$$

saadaan mielenkiintoista tietoa neutriinojen massojen hierarkian voimakkuudesta [9]. Normaalissa järjestyksessä pätee

$$\frac{\Delta m^2_{21}}{m^2_2} < \frac{\Delta m^2_{31}}{m^2_3}, \tag{3.11}$$

josta saadaan neutriinojen 2 ja 3 massojen suhteelle alaraja

$$\frac{m_2}{m_3} > \sqrt{r} \gtrsim 0.16. \tag{3.12}$$

Neutriinojen massahierarkia ei ainakaan normaalissa järjestyksessä ole siis kovin voimakas.

3.3 Kvarkkien sekoitusparametrien mittaustulokset

Kvarkkien sekoitusmatriisin eli CKM-matriisin (2.11) elementtien absoluuttiset arvot on mitattu kokeellisesti neutraalien mesonien oskillaatioista sekä niiden ja raskaiden kvarkkien hajoamisleveyksistä [21]. Kokeellisten tulosten tilastollisessa analyysissä [71] CKM-matriisin elementtien absoluuttisiksi arvoiksi 3σ:n luottamusvälillä on saatu

$$\begin{aligned} |U_{\text{CKM}}| &\equiv \begin{pmatrix} |U_{ud}| & |U_{us}| & |U_{ub}| \\ |U_{cd}| & |U_{cs}| & |U_{cb}| \\ |U_{td}| & |U_{ts}| & |U_{tb}| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.97426^{+0.00063}_{-0.00032} & 0.2254^{+0.0014}_{-0.0027} & 0.00350^{+0.00046}_{-0.00022} \\ 0.2253^{+0.0014}_{-0.0027} & 0.97345^{+0.00063}_{-0.00035} & 0.0407^{+0.0019}_{-0.0013} \\ 0.00846^{+0.00078}_{-0.00038} & 0.0400^{+0.0019}_{-0.0013} & 0.999165^{+0.000051}_{-0.000081} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Näistä määritetyt Wolfensteinin parametrien (2.22) arvot ja niiden 3σ:n luottamusvälit ovat [71]

$$A = 0.801^{+0.046}_{-0.029}, \quad \lambda = 0.2254^{+0.0014}_{-0.0027}, \quad \bar{\rho} = 0.144^{+0.048}_{-0.057}, \quad \bar{\eta} = 0.343^{+0.045}_{-0.033}. \tag{3.14}$$

Tuloksista (3.14) voidaan laskea yhtälöiden (2.22), (2.24) ja (2.25) avulla kvarkkien standardien sekoituskulmien ja vaiheen δ kokeelliset arvot ja virherajat. Nämä on koottu yhdessä neutriinojen vastaavien parametrien kanssa taulukkoon 3.2. Lisäksi yhtälöiden (2.22) avulla saadaan klassisille Wolfensteinin parametreille

$$\rho = 0.148^{+0.049}_{-0.059}, \qquad \eta = 0.352^{+0.047}_{-0.034}. \tag{3.15}$$

Taulukko 3.2: Neutriinojen ja kvarkkien kokeellisista tuloksista [taulukko 3.1 ja yhtälöt (3.14)] lasketut standardisekoitusparametrit. Virherajat vastaavat taulukon 3.1 ja tuloksien (3.14) 3σ:n luottamusvälejä.

parametri	neutriinot	kvarkit
θ_{12} [rad]	$0.587^{+0.055}_{-0.053}$	$0.2274^{+0.0014}_{-0.0028}$
θ_{23} [rad]	$0.683^{+0.243}_{-0.071}$	$0.041^{+0.003}_{-0.003}$
θ_{13} [rad]	$0.157^{+0.029}_{-0.035}$	$0.0035^{+0.0009}_{-0.0007}$
δ [rad]	–	$1.174^{+0.178}_{-0.158}$

Luku 4

Symmetrisyys kvarkkien ja leptonien välillä

4.1 Vihjeitä symmetrisyydestä

Standardimallissa kvarkeilla ja leptoneilla on samankaltaiset peruspiirteet sähköheikon vuorovaikutuksen suhteen. Jokaista vasenkätistä kvarkkia vastaa vasenkätinen leptoni, jolla on sama heikko isospin, sillä leptonit ja kvarkit on järjestetty sukupolvittain vasenkätisiin $\mathrm{SU}(2)_L$-dupletteihin

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \ell_{eL} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \ell_{\mu L} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \ell_{\tau L} \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tämän seurauksena kvarkkien ja leptonien heikon varatun virran vuorovaikutukset ovat identtiset. Symmetria rajoittuu tässä vain vasenkätisiin kenttiin, mutta se voidaan myös laajentaa oikeakätisiin kenttiin esimerkiksi LR-symmetrisissä $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R \times \mathrm{U}(1)$-malleissa [9, 30]. Tämä kvarkkien ja leptonien samankaltaisuus saattaa kertoa taustalla olevasta symmetriasta, joka liittää ne toisiinsa.

Suuret yhtenäisteoriat (GUT) [9, 30, 45] ovat kvarkkien ja leptonien välisen yhteyden tarkastelemisen ehkäpä tärkein peruste. Niissä Standardimallin kaikki vuorovaikutukset on yhdistetty suurilla energioilla (eli pienillä etäisyyksillä) ja kaikki materiakentät eli kvarkit ja leptonit kuuluvat symmetriaryhmän samaan multiplettiin. Symmetrian kannalta mielenkiintoisin GUT-luokka on ryhmään SO(10) perustuvat mallit. Niissä mittabosonit kuuluvat ryhmän SO(10) 45-ulotteiseen liittoesitykseen (**45**), ja yhden sukupolven kaikki kvarkit ja leptonit sopivat täydellisesti yhteen fundamentaaliseen 16-ulotteiseen spinoriesitykseen (**16**). Spinoriesitykseen **16** sisältyy myös oikeakätinen neutriino, mikä tekee teorian hiukkassisällöstä leptonien ja kvarkkien suhteen symmetrisen. Oikeakätisen neutriinon olemassaolon takia nämä mallit ovat mielenkiintoisia myös seesaw-mekanismin kannalta.

Kvarkkien ja leptonien sekoituskulmien numeroarvoille on myös havaittu mielenkiintoinen empiirinen yhteys [9]

$$\theta_{12}^{\nu} + \theta_{12}^{q} \simeq \frac{\pi}{4}, \tag{4.2}$$

jossa Auringon neutriinojen oskillaatioon liittyvä kulma θ_{12}^{ν} ja kvarkkien Cabibbon kulma θ_{12}^{q} summautuvat maksimaaliseksi kulmaksi $\pi/4$. Samoin myös 23-kulmille on havaittu pätevän

$$\theta_{23}^{\nu} + \theta_{23}^{q} \simeq \frac{\pi}{4}. \tag{4.3}$$

Näitä sekoituskulmien välisiä relaatioita kutsutaan kvarkki–leptoni-komplementaarisuudeksi (QLC) [9, 23]. Yhtälöiden (4.2) ja (4.3) ei oleteta pätevän eksaktisti, ja QLC:n realisoivissa malleissa niihin tulee yleensä pieniä korjauksia. QLC-relaatioita (4.2) ja (4.3) voidaankin pitää eräänlaisina ohjenuorina, joiden avulla voidaan mahdollisesti paljastaa kvarkkien ja leptonien välinen syvällisempi yhteys. Toisaalta on myös täysin mahdollista, että nämä relaatiot ovat vain numeerista sattumaa.

Näistä kvarkkien ja leptonien väliseen yhteyteen viittaavista seikoista huolimatta kvarkkien ja leptonien välillä on myös ilmeisiä eroja. Kuten edellä todettiin kvarkkien väliset ja leptonien väliset sekoittumiset poikkeavat merkittävällä tavalla toisistaan. Kvarkkien sekoittuminen on varsin vähäistä eikä erityisesti viittaa mihinkään diskreettiin symmetriaan, kun taas neutriinojen sekoittuminen on voimakasta ja viittaa selkeämmin taustalla mahdollisesti vallitsevaan symmetriaan. Myös kvarkkien ja leptonien massojen hierarkiassa on selvä ero. Tämä ilmenee esimerkiksi 2. ja 3. sukupolven hiukkasten massasuhteista: kvarkeille ja varatuille leptoneille ne ovat varsin pieniä, [9, 21]

$$\frac{m_\mu}{m_\tau} \simeq 0.06, \quad \frac{m_s}{m_b} \simeq 0.01\text{–}0.04, \quad \frac{m_c}{m_t} \simeq 0.006\text{–}0.008. \tag{4.4}$$

Neutriinojen massojen suhde (normaalissa järjestyksessä (3.8)) sen sijaan on suuri:

$$\frac{m_2}{m_3} \gtrsim 0.16 \tag{4.5}$$

(ks. yhtälö (3.12)). Neutriinojen massahierarkia on siis huomattavasti heikompi, jos merkittävää hierarkiaa on edes olemassa [9]. Kvarkkeja ja leptoneita yhdistävän teorian suurimpia haasteita onkin rikkoa mahdollinen kvarkkien ja leptonien välinen matemaattinen symmetria sopivalla tavalla.

4.2 Massamatriisien väliset relaatiot

Suuret yhtenäisteoriat [9, 30, 45] johtavat luonnollisella tavalla fermionien massamatriisien välisiin yhteyksiin ilman erillisiä makusymmetrioita, sillä kvarkit ja leptonit kuuluvat samaan multiplettiin. Esimerkiksi ryhmään SO(10) perustuvissa malleissa kaikki fermionit kuuluvat fundamentaaliseen spinoriesitykseen **16** ja ryhmään SU(5) perustuvissa malleissa esitykseen $\overline{\mathbf{5}} \oplus \mathbf{10}$.

Minimaalinen Georgin–Glashow'n SU(5)-GUT antaa kvarkkien ja varattujen leptonien Yukawan kytkinmatriiseille ja siten myös massamatriiseille relaatiot

$$M_d = {M_\ell}^T, \tag{4.6}$$

$$M_u = {M_u}^T, \tag{4.7}$$

jotka ovat voimassa teorian korkeassa energiaskaalassa. Neutriinot ovat massattomia, koska malli ei sisällä oikeakätisiä neutriinoja, ja vasenkätisten neutriinojen Majoranan massat ovat kiellettyjä globaalin $B - L$ -symmetrian vuoksi [45].

Relaatio (4.6) ennustaa, että GUT-skaalassa alas-kvarkkien ja vastaavien varattujen leptonien massat ovat samat [30]:

$$m_d = m_e, \quad m_s = m_\mu, \quad m_b = m_\tau. \tag{4.8}$$

Relaatioiden (4.6) ja (4.8) tiedetään olevan paikkansa pitämättömiä matalassa energiaskaalassa, jossa nykyiset mittaukset tapahtuvat. Vertailu GUT-skaalan ja matalan skaalan välillä onnistuu laskemalla renormalisaatioteorian avulla säteilykorjausten vaikutukset massoihin siirryttäessä korkeasta energiaskaalasta matalaan energiaskaalaan. Tulosten mukaan GUT-skaalassa yhtälö $m_b = m_\tau$ on ristiriidaton, mutta yhtälöt $m_d = m_e$ ja $m_s = m_\mu$ ovat ristiriidassa matalalla energialla mitattujen massojen kanssa [45]. Tämä nähdään myös siitä, että yhtälöistä (4.8) seuraa $m_s/m_d = m_\mu/m_e$, ja nämä suhteet ovat riippumattomia kytkinvakioiden juoksemisesta. Mittauksista kuitenkin tiedetään, että [21] $m_s/m_d \simeq 20$ ja $m_\mu/m_e \simeq 200$, joten minimaalisen teorian relaatio (4.6) ei voi pitää sellaisenaan paikkaansa.

Laajennetuista (ei-minimaalisista) teorioista voidaan saada monimutkaisempia massamatriisirelaatioita. Esimerkiksi SO(10)-teorioissa fermioneilla on Yukawan kytkentöjä useiden Higgsin kenttien kanssa. Supersymmetrisessä ja renormalisoituvassa mallissa, jossa on Higgsin kenttiä esityksessä **126**, esimerkiksi alaskvarkkien ja varattujen leptonien massamatriisit koostuvat yleisesti seuraavista Higgsin kenttien vakuumiodotusarvoista v ja Yukawan matriiseista Y [45]:

$$\begin{aligned} M_d &= Y_{10} v_{10} + Y_{126} v_{126} + Y_{120}(v_{120_1} + v_{120_{15}}), \\ M_\ell &= Y_{10} v_{10} - 3\, Y_{126} v_{126} + Y_{120}(v_{120_1} - 3\, v_{120_{15}}), \end{aligned} \tag{4.9}$$

jossa alaindeksit viittaavat eri esityksiin kuuluviin Higgsin kenttiin. Alaindeksit 120_1 ja 120_{15} viittaavat Higgsin kenttiin, jotka kuuluvat ryhmän SO(10) esitykseen **120** ja aliryhmän SU(4) esityksiin **1** ja **15** [45]. Näissä teorioissa myös neutriinoilla on massat, ja niin Diracin kuin Majoranankin massatermit ovat mahdollisia.

Yksinkertaisemmassa supersymmetrisessä SO(10)-teoriassa, jossa on vain 10 ja 126 -ulotteiset Higgsin kenttien esitykset, on Yukawan sektorissa vain 13 vapaata parametria. Kun nämä parametrit kiinnitetään kvarkkien massoilla (6), sekoitusparametreilla (4) ja varattujen leptonien massoilla (3), teoria ennustaa loput Yukawan sektorin parametrit eli neutriinojen massat ja sekoituskulmat [9, 45]. Tässä tapauksessa toisen lajin seesaw-mekanismi on erityisen mielenkiintoinen, sillä se selittää neutriinojen sekoituskulmien suuruuden b-kvarkin ja τ-leptonin massojen yhtenäistymisellä GUT-skaalassa (4.8).

Minimaalisessa ei-supersymmetrisessä SO(10)-teoriassa taas on mahdollista saada ylös-kvarkkien ja neutriinojen Diracin massamatriisille yksinkertainen relaatio [45, 72]

$$M_u = M_{\nu \mathrm{D}}. \tag{4.10}$$

Yhtälöstä (4.10) saadaan ensimmäisen lajin seesaw-mekanismilla neutriinojen massamatriisiksi

$$M_\nu \propto M_u (M_d - M_\ell)^{-1} M_u \, \beta, \tag{4.11}$$

koska oikeakätisen neutriinon massamatriisi on verrannollinen matriisien erotukseen $M_d - M_\ell$. Tässä β on likimain sähköheikon energiaskaalan suhde oikeakätisen raskaan neutriinon skaalaan. Kolmen neutriinon tapauksessa tämä tulos on myös yhteensopiva havaintojen kanssa [45]. Lisäksi on myös malleja, joissa minimaaliset SU(5)-relaatiot (4.6), (4.7) ja SO(10)-relaatio (4.10) ovat voimassa samanaikaisesti [72].

4.3 Kvarkki–leptoni-komplementaarisuus (QLC)

Kvarkkien ja leptonien sekoituskulmien numeroarvoille havaittuja empiirisiä yhtälöitä

$$\theta_{12}^\nu + \theta_{12}^q = \frac{\pi}{4}, \tag{4.12}$$

$$\theta_{23}^\nu + \theta_{23}^q = \frac{\pi}{4} \tag{4.13}$$

kutsutaan kvarkki–leptoni-komplementaarisuudeksi (QLC) tai QLC-relaatioiksi. Jos yhtälöt (4.12) ja (4.13) eivät ole vain numeerista sattumaa, ne selittävät neutriinojen sekoituskulmien poikkeaman maksimaalisesta arvosta kvarkkien vastaavien kulmien pienuudella.

Yhtälöt (4.12) ja (4.13) mahtuvat vielä nykyisten mittaustulosten 3σ:n virherajoihin. Käyttämällä taulukon 3.2 arvoja saadaan (vrt. $\pi/4 \simeq 0.785$)

$$\theta_{12}^{\nu} + \theta_{12}^{q} = 0.814^{+0.056}_{-0.056}, \tag{4.14}$$

$$\theta_{23}^{\nu} + \theta_{23}^{q} = 0.724^{+0.246}_{-0.074}, \tag{4.15}$$

joten kvarkki–leptoni-komplementaarisuus ei siis ole kokeellisesti poissuljettu. Yhtälöiden (4.12) ja (4.13) täsmällinen toteutuminen ei ole välttämätöntä, sillä käytännöllisissä malleissa niiden voi olettaa joka tapauksessa saavan korjauksia.

QLC-relaatiot (4.12) ja (4.13) ovat mielenkiintoisia, koska ne vihjaavat neutriinojen sekoittumisen olevan muotoa [23] ”BM−CKM”. Tämä tarkoittaa, että neutriinojen sekoittuminen saadaan neutriinojen bi-maksimaalisesta (BM) sekoittumisesta ja kvarkkien sekoittumisesta (CKM). Tämä antaa aiheen etsiä neutriinoille erilaisia kahden maksimaalisen rotaation ja CKM-matriisin yhdistäviä skenaarioita, jotka ovat ennustusvoimaisia ja helposti testattavia [23].

Jotta QLC-relaatiot (4.12) ja (4.13) toteutuisivat täsmällisesti, täytyisi neutriinojen sekoitusmatriisin rotaatioiden järjestyksen olla muotoa

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{PMNS}} &= (R_{23}^{q})^{\dagger} R_{23}^{m}\, R_{13}\, (R_{12}^{q})^{\dagger} R_{12}^{m} \\ &= R_{23}(-\theta_{23}^{q} + \pi/4)\, R_{13}(\theta_{13})\, R_{12}(-\theta_{12}^{q} + \pi/4), \end{aligned} \tag{4.16}$$

jossa yläindeksi m tarkoittaa maksimaalista rotaatiota $R_{ij}^{m} \equiv R_{ij}(\pi/4)$ ja yläindeksi q kvarkkien rotaatiota. Matriisista (4.16) saadaan triviaalisti yhtälöt (4.12), (4.13) ja $\theta_{13}^{\nu} = \theta_{13}$. QLC-relaation toteutumiseksi maksimaalisen rotaation ja vastaavan kvarkkien rotaation täytyy siis olla kytkettyinä toisiinsa, ja lisäksi rotaatioiden on oltava standardiparametrisoinnin mukaisessa järjestyksessä $R_{23}R_{13}R_{12}$. Mikäli halutaan vain, että ensimmäinen QLC-relaatio (4.12) on voimassa, riittää yksi maksimaalinen rotaatio R_{12}^{m}. Viitteissä [9, 23] on esitetty täsmälliselle QLC-relaatiolle (4.12) lievempi ehto:

$$U_{\mathrm{PMNS}} = \cdots R_{23}^{m} \cdots (R_{12}^{q})^{\dagger} R_{12}^{m}, \tag{4.17}$$

jossa kvarkkien rotaatiot R_{23}^{q} ja R_{13}^{q} saavat sijaita missä vain pisteiden $\cdots$ kohdalla. Tästä ei kuitenkaan *täsmällisesti* seuraa yhtälö (4.12), mikäli rotaatiot eivät ole standardiparametrisoinnin mukaisessa järjestyksessä $R_{23}R_{13}R_{12}$. Ero eksaktiin relaatioon on kuitenkin todellisuudessa pieni, sillä kvarkkien sekoituskulmat θ_{23}^{q} ja θ_{13}^{q} ovat hyvin pieniä. Lisäksi kompleksisten vaihematriisien lisääminen rotaatioiden väliin voi mahdollistaa muita rotaatioiden järjestyksiä.

Käytännössä yhtälön (4.16) tai (4.17) rakenne on epäluonnollinen tai vaikea toteuttaa, ja yleensä rotaatiot ovatkin eri järjestyksessä. Tällöin eksaktit QLC-relaatiot (4.12) ja (4.13) saavat korjauksia [9, 23], joiden tarkka muoto ja suuruus riippuvat rotaatioiden järjestyksestä ja kompleksisten vaiheiden sijainnista.

Eräs keino QLC-relaatioiden toteuttamiseksi on kvarkkien ja leptonien sekoitusmatriisien yhteys. Esimerkiksi tapauksessa [23] $U_\nu = U_u = U_{\mathrm{CKM}}{}^\dagger$ neutriinojen sekoitusmatriisille pätee $U_{\mathrm{PMNS}} = U_\ell^\dagger\, U_{\mathrm{CKM}}{}^\dagger$ ja tapauksessa $U_\ell = U_d = U_{\mathrm{CKM}}$ sille pätee $U_{\mathrm{PMNS}} = U_{\mathrm{CKM}}{}^\dagger\, U_\nu$. Tällöin eksaktin QLC-relaation ehto (4.16) ei kuitenkaan toteudu, sillä rotaatiot ovat väärässä järjestyksessä, ja QLC-relaatiot saavat (pieniä) korjauksia. Esimerkiksi, jos $U_\ell = U_{\mathrm{CKM}}$ ja $U_\nu = R_{23}^m R_{12}^m$, saadaan $U_{\mathrm{PMNS}} = U_{\mathrm{CKM}}{}^\dagger R_{23}^m R_{12}^m$, ja tuloksena on [23, 73]

$$\theta_{12}^\nu = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{12}^q}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}({\theta_{12}^q}^2). \tag{4.18}$$

QLC-relaatioiden toteuttamisen haasteena on kvarkkien rotaation ja maksimaalisen rotaation yhdistäminen neutriinojen sekoitusmatriisissa eli kuinka saada kvarkkien sekoittuminen välitettyä leptoneille [23]. Tämä voidaan mahdollisesti selittää massamatriisien välisillä relaatioilla, joita seuraa esimerkiksi suurista yhtenäisteorioista (ks. 4.2). Oikeanlainen massamatriisirelaatio on kuitenkin käytännössä vaikea muodostaa, sillä esimerkiksi tapauksessa $U_\ell = U_d$ on silti oltava $M_\ell \neq M_d$, jotta hiukkasten massat olisivat erisuuret. Tässä tapauksessa massamatriisien diagonalisointi ei siis saa riippua massamatriisien ominaisarvoista. Lisäksi pienempänä haasteena on kuhunkin QLC-relaatioon liittyvän maksimaalisen rotaation selittäminen.

QLC:tä on kritisoitu esimerkiksi siitä, että yhtälöiden (4.12) ja (4.13) sekoitusparametrit ovat täysin riippuvaisia käytetyistä sekoitusmatriisien parametrisaatioista, jotka voidaan valita mielivaltaisesti [74].[4] Lisäksi parametrisaation valinnan jälkeenkään ei ole yksiselitteistä, ovatko sekoituskulmat negatiivisia vai positiivisia. Tämän vuoksi QLC:tä tarkasteltaessa on tärkeää muistaa, että relaatioiden (4.12) ja (4.13) parametreilla ei ole fundamentaalista merkitystä ja on parempi ottaa lähtökohdaksi parametrisaatiosta riippumaton versio kuten esimerkiksi edellä esitelty tapaus $U_{\mathrm{PMNS}} = U_{\mathrm{CKM}}{}^\dagger R_{23}^m R_{12}^m$ tai (4.17).

4.4 Kvarkkien ja leptonien yhteys ja renormalisaatio

Leptonien ja kvarkkien sekoittumisparametrit ja massat riippuvat niiden havaitsemisessa käytetystä energiasta. Tämä on renormalisaation seuraus, ja parametrien energiariippuvuus voidaan ilmaista renormalisaatioyhtälöiden (RG-yhtälöiden) avulla.

4. QLC:tä on tutkittu myös eri parametrisoinneissa ja lisäksi on määritetty parametrisoinnista riippumattomia invariantteja muotoja [75–77].

Kvarkki- ja leptonisektorit toisiinsa kytkevät relaatiot, jotka koskevat massa- ja sekoitusmatriiseja, pätevät sellaisinaan vain suuressa energiaskaalassa, jossa niiden taustalla oleva Standardimallia yleisempi teoria on voimassa [9]. Kun näitä relaatioita halutaan verrata alhaisemmilla energiaskaaloilla saatuihin tuloksiin, pitää huomioida teorian parametrien riippuminen energiasta. RG-yhtälöt antavat tämän energiariippuvuuden.

Neutriinojen massamatriisin renormalisaatiota voidaan tutkia yleisesti riippumatta käytetystä mallista. Jos neutriinot ovat Majoranan hiukkasia, niiden massoja voidaan kuvailla yhtenäisesti efektiivisellä viisiulotteisella operaattorilla (1.25).[5] Seesaw-skaalan Λ alapuolella neutriinojen massamatriisin RG-yhtälö on häiriöteorian alimmassa epätriviaalissa kertaluvussa [9, 24, 30]

$$16\pi^2 \frac{\mathrm{d}M_\nu}{\mathrm{d}t} = C(Y_\ell{}^\dagger Y_\ell)^T M_\nu + C M_\nu (Y_\ell{}^\dagger Y_\ell) + \alpha M_\nu, \tag{4.19}$$

jossa $t = \ln(\mu/\mu_0)$, μ on renormalisaatioskaala ja $C = -3/2$ Standardimallissa ja $C = 1$ minimaalisessa supersymmetrisesssä Standardimallissa. Luku α on mausta riippumaton ja sisältää mm. mittakenttien kytkinvakioiden renormalisaation. Renormalisaation vaikutus neutriinojen massamatriisin rakenteeseen ja sen yksittäisiin alkioihin on Standardimallissa pieni, mutta minimaalisessa supersymmetrisessä Standardimallissa vaikutus on verrannollinen parametriin $\tan\beta \equiv v_u/v_d$, joka on mallissa olevan kahden Higgsin dupletin vakuumiodotusarvojen suhde. Yleisesti voidaan siis sanoa, että renormalisaation vaikutus massamatriisin muotoon ei ole merkittävä, paitsi kun $\tan\beta$ on suuri [9].

Massamatriisista poiketen renormalisaation vaikutus siitä johdettuihin havaintosuureisiin eli massaeroihin ja sekoituskulmiin voi olla suuri riippuen teoriasta. Efektiivisen massamatriisin RG-yhtälöstä (4.19) johdetut analyyttiset approksimaatiot neutriinojen sekoituskulmien RG-yhtälöille ovat [9, 24]

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{12}}{\mathrm{d}t} = -\frac{C y_\tau^2}{32\pi^2} \sin(2\theta_{12}) s_{23}^2 \frac{\left|m_1 e^{\phi_1} + m_2 e^{\phi_2}\right|^2}{\Delta m_{\mathrm{sol}}^2} + \mathcal{O}(\theta_{13}), \tag{4.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{23}}{\mathrm{d}t} = -\frac{C y_\tau^2}{32\pi^2} \sin(2\theta_{23}) \frac{1}{\Delta m_{\mathrm{atm}}^2} \left(s_{12}^2 \frac{\left|m_1 e^{\phi_1} + m_3\right|^2}{1+r} + c_{12}^2 \left|m_2 e^{\phi_2} + m_3\right|^2 \right) + \mathcal{O}(\theta_{13}), \tag{4.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{13}}{\mathrm{d}t} = \frac{C y_\tau^2}{32\pi^2} \sin(2\theta_{12}) \sin(2\theta_{23}) \frac{m_3}{\Delta m_{\mathrm{atm}}^2 (1+r)} \times \times \left[m_1 \cos(\phi_1 - \delta) - (1+r) m_2 \cos(\phi_2 - \delta) - r\, m_3 \cos\delta\right] + \mathcal{O}(\theta_{13}), \tag{4.22}$$

5. Diracin neutriinojen RG-yhtälöitä on tutkittu viitteessä [78].

jossa y_τ on τ-leptonin Yukawan kytkinvakio, m_1, m_2 ja m_3 ovat neutriinojen massat, ϕ_1 ja ϕ_2 ovat Majoranan vaiheet ja $r \equiv \Delta m^2_{\mathrm{sol}}/\Delta m^2_{\mathrm{atm}}$. Approksimaatioiden (4.20)–(4.22) perusteella RG-yhtälöiden vaikutus neutriinojen sekoituskulmiin on yleensä pieni. Vaikutus voi kuitenkin olla merkittävä, jos esimerkiksi neutriinojen massaspektri on lähes degeneroitunut eli massojen neliöiden erotukset Δm^2 ovat pieniä tai jos neutriinojen massajärjestys on käänteinen [9, 24, 30]. Näissä skenaarioissa RG-yhtälöiden avulla on mahdollista jopa selittää neutriinojen sekoituskulmien suuruus [9].

Luku 5

Kvarkkien ja leptonien sekoitusmatriisien yhteys

Edellisessä luvussa tarkasteltu kvarkkien ja leptonien välinen symmetrisyys ja erityisesti kvarkki–leptoni-komplementaarisuus antavat perusteen tutkia yhtälön (2.1) mukaisten kvarkkien ja neutriinojen diagonalisointimatriisien U_f välisiä relaatioita. Tässä luvussa keskitytään kahteen yksinkertaisimpaan tapaukseen: varattujen leptonien ja alas-kvarkkien väliseen relaatioon $U_\ell = U_d$ sekä neutriinojen ja ylös-kvarkkien väliseen relaatioon $U_\nu = U_u$.

5.1 Varattujen leptonien ja alas-kvarkkien yhteys

Tutkitaan ensin varattujen leptonien ja alas-kvarkkien diagonalisointimatriisien välistä yhteyttä. Oletetaan, että symmetriakannassa (ks. osa 2.1) pätee relaatio

$$U_\ell = U_d, \tag{5.1}$$

jossa matriisit U_f ovat fermionien f massamatriisien vasemmanpuoleiset diagonalisointimatriisit (2.1). Tällöin neutriinojen sekoitusmatriisi saadaan määritelmien (2.9) ja (2.11) avulla muotoon

$$U_{\mathrm{PMNS}} = {U_{\mathrm{CKM}}}^\dagger \, {U_u}^\dagger U_\nu, \tag{5.2}$$

jossa U_{CKM} on kvarkkien sekoitusmatriisi eli CKM-matriisi. Tästä voidaan ratkaista neutriinojen sekoitusparametrit kvarkkien parametrien funktiona, mikäli matriisit U_u ja U_ν tunnetaan tai jos niille käytetään jotakin yritettä. Yhtälöä (5.2) voidaan täten pitää eräänlaisena yleisenä komplementaarisuusrelaationa.

Yhtälö (5.2) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$U_u = U_\nu \, {U_{\mathrm{PMNS}}}^\dagger \, {U_{\mathrm{CKM}}}^\dagger. \tag{5.3}$$

Tästä voidaan saada numeerista tietoa tuntemattomasta ylös-kvarkkien diagonalisointimatriisista U_u, kun käytetään neutriinojen ja kvarkkien sekoitusmatriisien mitattuja arvoja ja matriisille U_ν käytetään jotain yritettä. Seuraavassa tarkastellaan kahta eri yritettä matriisille U_ν.

Yrite 1: $U_\nu = R_{13}^{m\,T}$. Kokeillaan neutriinojen diagonalisointimatriisille U_ν ensin tribi-maksimaalisen sekoittumisen motivoimana yritettä (2.33),

$$U_\nu = R_{13}^{m\,T}. \tag{5.4}$$

Lasketaan yhtälöstä (5.3) matriisin U_u numeerinen muoto käyttäen PMNS- ja CKM-matriisien parametreille taulukon 3.2 kokeellisia arvoja ja vastaavasti parametrisointeja (2.16) ja (2.15). Jätetään neutriinojen Majoranan vaiheet huomioimatta yksinkertaisuuden vuoksi, ja lasketaan tulos neutriinojen Diracin vaiheen δ arvoilla 0, $\pi/2$ ja π. Tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} U_u\big|_{\delta=0} &\simeq \begin{pmatrix} 0.28 & -0.90 & -0.33 \\ 0.67 & 0.43 & -0.61 \\ 0.69 & -0.05 & 0.72 \end{pmatrix}, \quad U_u\big|_{\delta=\pi} \simeq \begin{pmatrix} 0.52 & -0.83 & -0.19 \\ 0.69 & 0.54 & -0.48 \\ 0.50 & 0.12 & 0.86 \end{pmatrix}, \\ U_u\big|_{\delta=\pi/2} &\simeq \begin{pmatrix} 0.40-0.10\,\mathrm{i} & -0.87+0.08\,\mathrm{i} & -0.26+0.07\,\mathrm{i} \\ 0.68+0.01\,\mathrm{i} & 0.48+0.06\,\mathrm{i} & -0.55+0.07\,\mathrm{i} \\ 0.60+0.12\,\mathrm{i} & 0.04+0.04\,\mathrm{i} & 0.79+0.07\,\mathrm{i} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Tästä huomataan, että neutriinojen Diracin vaihe δ, jonka arvoa ei tunneta, aiheuttaa merkittävää vaihtelua tuloksiin.

Lasketaan seuraavaksi esimerkin vuoksi neutriinojen sekoitusparametrit yhtälöstä (5.2) käyttämättä edeltävää analyysiä matriisille U_u. Tämä vaatii yritteen (5.4) lisäksi yritteen matriisille U_u. Sopivan teoreettisen yritteen puuttuessa tehdään lasku esimerkin vuoksi tapauksessa $U_u = 1$ (tulokset eivät tällöin tietenkään tule olemaan sopusoinnussa kokeellisten tulosten kanssa). Tällöin $U_{\mathrm{CKM}} = U_d$, ja yhtälöstä (5.2) saadaan

$$U_{\mathrm{PMNS}} = U_{\mathrm{CKM}}{}^{\dagger} R_{13}^{m\,T}. \tag{5.6}$$

Kvarkkien Wolfensteinin parametrisaation (2.22) ja yhtälöiden (2.17) avulla saadaan tulokseksi

$$s_{12}^\nu = \sqrt{2}\left[\lambda - \frac{\lambda^3}{2} + A(\rho-1)\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^5)\right], \tag{5.7}$$

$$s_{23}^\nu = \lambda + A\,\lambda^2 - \frac{\lambda^3}{2} + 2A(\rho-1)\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^5), \tag{5.8}$$

$$s_{13}^\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2} + A(\rho-1)\lambda^3 - \frac{\lambda^4}{8} + \mathcal{O}(\lambda^5)\right] \tag{5.9}$$

neljänteen kertalukuun asti Wolfensteinin parametrin $\lambda = \sin(\theta^q_{12})$ suhteen. (Eksaktit yhtälöt ovat liian pitkiä tässä esitettäväksi.) Nämä tulokset ovat selvästi vääriä verrattaessa mittaustuloksiin, sillä θ^ν_{13} on lähellä maksimaalista arvoa ja muut kaksi kulmaa ovat ensimmäisessä kertaluvussa suoraan verrannollisia kvarkkien Cabibbon kulmaan θ^q_{12}. Kulman θ^ν_{13} suuruus ja muiden kulmien pienuus voidaan päätellä myös suoraan yhtälöstä (5.6), sillä siinä ainoa suuri rotaatio on tason 1–3 rotaatio. Täydellisyyden vuoksi ilmoitetaan myös neutriinojen Diracin vaiheen tulos:

$$\delta^\nu = \pi - 2A^3\eta\,\lambda^7 + \mathcal{O}(\lambda^9), \tag{5.10}$$

jonka eksaktista yhtälöstä saatu numeerinen arvo on $\delta^\nu \simeq \pi - 9.3 \cdot 10^{-5}$.

Yrite 2: $U_\nu = U_{BM}$. Kokeillaan seuraavaksi neutriinojen diagonalisointimatriisille U_ν kvarkki–leptoni-komplementaarisuudessa (ks. osa 4.3) käytettyä bi-maksimaalista matriisia (2.29)

$$U_\nu = U_{\mathrm{BM}} \equiv R^m_{23} R^m_{12}. \tag{5.11}$$

Lasketaan yhtälöstä (5.3) matriisin U_u numeerinen muoto kuten edellä. Tulokseksi saadaan

$$\begin{gathered} U_u\big|_{\delta=0} \simeq \begin{pmatrix} 0.96 & -0.17 & -0.24 \\ 0.20 & 0.98 & 0.08 \\ 0.22 & -0.12 & 0.97 \end{pmatrix}, \; U_u\big|_{\delta=\pi} \simeq \begin{pmatrix} 1.00 & 0.03 & -0.01 \\ -0.02 & 1.00 & 0.05 \\ 0.01 & -0.05 & 1.00 \end{pmatrix}, \\ U_u\big|_{\delta=\pi/2} \simeq \begin{pmatrix} 0.98 + 0.02\,\mathrm{i} & -0.07 + 0.10\,\mathrm{i} & -0.12 + 0.12\,\mathrm{i} \\ 0.09 + 0.10\,\mathrm{i} & 0.99 - 0.04\,\mathrm{i} & 0.06 - 0.02\,\mathrm{i} \\ 0.11 + 0.11\,\mathrm{i} & -0.09 - 0.01\,\mathrm{i} & 0.98 + 0.02\,\mathrm{i} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5.12}$$

On mielenkiintoista, että erityisesti tapauksessa $\delta = \pi$ matriisi U_u on hyvin lähellä identiteettimatriisia. Yhtälön (5.3) avulla tästä voidaan päätellä, että kokeellisesti pätee $U_{\mathrm{CKM}}\, U_{\mathrm{PMNS}} \simeq U_{\mathrm{BM}}$.

Käytetään neutriinojen sekoitusparametrien laskemiseksi yhtälössä (5.2) tulosten (5.12) perusteella yritettä $U_u = 1$, jolloin saadaan QLC-relaatio [23]

$$U_{\mathrm{PMNS}} = {U_{\mathrm{CKM}}}^\dagger R^m_{23} R^m_{12}. \tag{5.13}$$

Tästä saadaan seuraavat analyyttiset approksimaatiot neutriinojen sekoitusparametreille kvarkkien Wolfensteinin parametrien funktiona:

$$s_{12}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4\sqrt{2}} + \frac{4A(\rho-1)-1}{8}\,\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4), \tag{5.14}$$

$$s_{23}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{4A+1}{4}\,\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^4)\right], \tag{5.15}$$

$$s_{13}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lambda + A(\rho-1)\,\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^5)\right], \tag{5.16}$$

$$\delta^{\nu} = \pi + A\eta\,\lambda^2 - \frac{A\eta}{\sqrt{2}}\,\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4). \tag{5.17}$$

Cabibbon kulman johtavassa kertaluvussa sekoituskulmien QLC-relaatiot ovat

$$\theta_{12}^{\nu} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{12}^{q}}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}({\theta_{12}^{q}}^{3}), \tag{5.18}$$

$$\theta_{23}^{\nu} = \frac{\pi}{4} - \left(1 + \frac{1}{4A}\right)\theta_{23}^{q} + \mathcal{O}({\theta_{12}^{q}}^{4}). \tag{5.19}$$

Kokeellisesti $1 + 1/(4A) \simeq 1.312$. Lisäksi sekoituskulmalle θ_{13}^{ν} saadaan relaatio

$$\theta_{13}^{\nu} = \frac{\theta_{12}^{q}}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}({\theta_{12}^{q}}^{3}). \tag{5.20}$$

Näistä tuloksista nähdään, että neutriinojen 12- ja 13-kulmat ovat toiseen kertalukuun saakka komplementaariset: $\theta_{12}^{\nu} + \theta_{13}^{\nu} = \pi/4 + \mathcal{O}({\theta_{12}^{q}}^{3})$. Koska ensimmäisessä kertaluvussa $\theta_{23}^{\nu} = \pi/4 + \mathcal{O}({\theta_{12}^{q}}^{2})$, pätee neutriinojen sekoituskulmille myös komplementaarisuusrelaatio $\theta_{12}^{\nu} + \theta_{13}^{\nu} = \theta_{23}^{\nu} + \mathcal{O}({\theta_{12}^{q}}^{2})$.

Eksakteista yhtälöistä saadut numeeriset tulokset ovat $\theta_{12}^{\nu} \simeq 0.6177$, $\theta_{23}^{\nu} \simeq 0.7313$, $\theta_{13}^{\nu} \simeq 0.1543$ ja $\delta^{\nu} \simeq 3.1567$. Nämä tulokset sopivat erittäin hyvin kulmien mitattujen arvojen tämän hetkisiin 3σ:n virherajoihin (taulukko 3.2). Tämä myös vahvistaa sen, että relaatio (5.13) eli yhtälö

$$U_{\mathrm{CKM}}\,U_{\mathrm{PMNS}} = U_{\mathrm{BM}} \tag{5.21}$$

on yhteensopiva mittausten kanssa, kun neutriinojen Diracin vaihe on $\delta \simeq \pi$.

5.2 Neutriinojen ja ylös-kvarkkien yhteys

Tutkitaan seuraavaksi neutriinojen ja ylös-kvarkkien diagonalisointimatriisien välistä yhteyttä. Toimitaan samoin kuten varattujen leptonien ja alas-kvarkkien tapauksessa edellä. Oletetaan, että symmetriakannassa

$$U_{\nu} = U_{u}. \tag{5.22}$$

Tämä relaatio on teoreettisesti vaikeammin perusteltavissa kuin relaatio (5.1), sillä neutriinot saattavat kvarkeista poiketen olla Majoranan hiukkasia ja neutriinoilla ja kvarkeilla on hyvin erilaiset massamekanismit. Relaatio (5.22) on kuitenkin mahdollista saada voimaan esimerkiksi SO(10)-relaation (4.10) kautta [23].

Yhtälöstä (5.22) saadaan määritelmien (2.9) ja (2.11) avulla yleinen komplementaarisuusrelaatio

$$U_{\mathrm{PMNS}} = {U_\ell}^\dagger U_d \, {U_{\mathrm{CKM}}}^\dagger. \tag{5.23}$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$U_d = U_\ell \, U_{\mathrm{PMNS}} \, U_{\mathrm{CKM}}. \tag{5.24}$$

Kun käytetään neutriinojen ja kvarkkien sekoitusmatriisien U_{PMNS} ja U_{CKM} mitattuja arvoja ja jotain yritettä matriisille U_ℓ, saadaan tästä alas-kvarkkien diagonalisointimatriisille U_d numeerinen lauseke.

Yrite 1: $U_\ell = U_C$. Asetetaan varattujen leptonien diagonalisointimatriisille U_ℓ aluksi tribi-maksimaalisen sekoittumisen motivoimana yrite (2.32),

$$U_\ell = U_{\mathrm{C}}. \tag{5.25}$$

Taulukon 3.2 kokeellisia arvoja käyttäen saadaan yhtälöstä (5.24) nyt tulokseksi

$$\begin{aligned}
U_d\big|_{\delta=0} &\simeq \begin{pmatrix} 0.46+0.51\,\mathrm{i} & 0.44-0.49\,\mathrm{i} & -0.30+0.05\,\mathrm{i} \\ 0.25 & 0.34 & 0.91 \\ 0.46-0.50\,\mathrm{i} & 0.44+0.49\,\mathrm{i} & -0.30-0.05\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \\
U_d\big|_{\delta=\pi/2} &\simeq \begin{pmatrix} 0.43+0.56\,\mathrm{i} & 0.41-0.44\,\mathrm{i} & -0.39-0.04\,\mathrm{i} \\ 0.34-0.09\,\mathrm{i} & 0.44-0.09\,\mathrm{i} & 0.82-0.10\,\mathrm{i} \\ 0.41-0.47\,\mathrm{i} & 0.39+0.54\,\mathrm{i} & -0.39-0.14\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \\
U_d\big|_{\delta=\pi} &\simeq \begin{pmatrix} 0.37+0.52\,\mathrm{i} & 0.36-0.48\,\mathrm{i} & -0.48+0.05\,\mathrm{i} \\ 0.42 & 0.54 & 0.73 \\ 0.37-0.52\,\mathrm{i} & 0.36+0.48\,\mathrm{i} & -0.48-0.05\,\mathrm{i} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.26}$$

jossa δ on neutriinojen Diracin vaihe. Vaihe δ aiheuttaa merkittävää vaihtelua tuloksiin, eikä matriisi U_d ole lähellä identiteettimatriisia.

Tulosten (5.26) perusteella yrite $U_d = \mathbb{1}$ ei yhdessä yritteen $U_\ell = U_{\mathrm{C}}$ kanssa tuota kokeiden kanssa yhteensopivia tuloksia yhtälöstä (5.23). Tällöin saataisiin

$$U_{\mathrm{PMNS}} = {U_{\mathrm{C}}}^\dagger \, {U_{\mathrm{CKM}}}^\dagger, \tag{5.27}$$

josta saadaan liian suuri arvo neutriinojen sekoituskulmalle θ_{13}^ν: johtavassa kertaluvussa $s_{13}^\nu \simeq 1/\sqrt{3} - s_{23}^q/\sqrt{3}$. Tämä johtuu siitä, että Cabibbon matriisin U_{C} R_{13}-rotaatio on suuri; $s_{13} = 1/\sqrt{3}$.

Yrite 2: $U_\ell = U_{\mathrm{BM}}{}^T$. Toisena vaihtoehtona asetetaan matriisille U_ℓ bi-maksimaalinen yrite

$$U_\ell = U_{\mathrm{BM}}{}^T. \tag{5.28}$$

Transpoosi on tässä tarpeellinen, jotta rotaatiot olisivat yhtälössä (5.23) oikeassa standardiparametrisaation mukaisessa järjestyksessä. Yhtälöstä (5.24) saadaan

$$\begin{gathered}
U_d\big|_{\delta=0} \simeq \begin{pmatrix} 0.98 & 0.01 & 0.17 \\ -0.02 & 1.00 & 0.08 \\ -0.17 & -0.08 & 0.98 \end{pmatrix}, \; U_d\big|_{\delta=\pi} \simeq \begin{pmatrix} 1.00 & 0.04 & -0.05 \\ -0.04 & 0.99 & -0.14 \\ 0.04 & 0.14 & 0.99 \end{pmatrix}, \\
U_d\big|_{\delta=\pi/2} \simeq \begin{pmatrix} 0.99 - 0.01\,\mathrm{i} & 0.02 & 0.06 - 0.11\,\mathrm{i} \\ -0.03 & 0.99 + 0.01\,\mathrm{i} & -0.03 - 0.11\,\mathrm{i} \\ -0.07 - 0.11\,\mathrm{i} & 0.03 - 0.11\,\mathrm{i} & 0.98 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{5.29}$$

Matriisi U_d on tässä tapauksessa lähellä identiteettimatriisia, mutta ei aivan yhtä lähellä kuin matriisi U_u tapauksessa (5.11).

Käytetään nyt alas-kvarkkien diagonalisointimatriisille yritettä $U_d = \mathbb{1}$, jolloin yhtälö (5.23) saadaan yritteen (5.28) kanssa muotoon

$$U_{\mathrm{PMNS}} = R^m_{23} R^m_{12}\, U_{\mathrm{CKM}}{}^\dagger. \tag{5.30}$$

Tästä yhtälöstä saadaan seuraavat analyyttiset approksimaatiot neutriinojen sekoitusparametreille:

$$s^\nu_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \mathcal{O}(\lambda^4)\right], \tag{5.31}$$

$$s^\nu_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{A\,\lambda^2}{2} + \frac{A(\rho-1)}{2}\,\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4), \tag{5.32}$$

$$s^\nu_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[A\,\lambda^2 + A(\rho-1)\,\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4)\right], \tag{5.33}$$

$$\delta^\nu = \pi + \eta\,\lambda - (\rho\eta - 2\eta)\,\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{5.34}$$

Tässä tapauksessa QLC-relaatiot toteutuvat hyvin suurella tarkkuudella:

$$\theta^\nu_{12} = \frac{\pi}{4} - \theta^q_{12} + \mathcal{O}(\theta^q_{12}{}^4), \tag{5.35}$$

$$\theta^\nu_{23} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta^q_{23}}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\theta^q_{12}{}^3). \tag{5.36}$$

Neutriinon sekoituskulman ja Cabibbon kulman välinen relaatio on tässä tapauksessa

$$\theta^\nu_{13} = \frac{A\,\theta^q_{12}{}^2}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}(\theta^q_{12}{}^3). \tag{5.37}$$

Eksakteista yhtälöistä lasketut numeeriset tulokset ovat $\theta_{12}^{\nu} \simeq 0.5576$, $\theta_{23}^{\nu} \simeq 0.7513$, $\theta_{13}^{\nu} \simeq 0.0230$ ja $\delta^{\nu} \simeq 3.2609$. Vaikka tässä tapauksessa QLC-relaatiot saatiin toteutumaan varsin tarkasti, neutriinojen sekoituskulman θ_{13}^{ν} arvo ei ole sopusoinnussa mittausten kanssa, sillä kokeellinen 3σ:n tulos on $\theta_{13}^{\nu} = 0.16^{+0.03}_{-0.04}$.

Luku 6

Päätelmät

Tässä tutkielmassa tarkasteltiin kvarkkien sekoitusmatriisin $U_{\mathrm{CKM}} \equiv U_u{}^{\dagger} U_d$ ja neutriinojen sekoitusmatriisin $U_{\mathrm{PMNS}} \equiv U_\ell{}^{\dagger} U_\nu$ välisiä yhteyksiä. Tarkastelussa keskityttiin kahteen yksinkertaiseen tapaukseen: (5.1), $U_\ell = U_d$, jossa varattujen leptonien ja alas-kvarkkien massamatriisien diagonalisointimatriisit ovat samat ja (5.22), $U_\nu = U_u$, jossa neutriinojen ja ylös-kvarkkien diagonalisointimatriisit ovat samat. Tarkastelu rajoitettiin näihin kahteen tapaukseen, koska ne olivat helposti käsiteltäviä ja ennustusvoimaisia.

Jos relaatio $U_\ell = U_d$ on voimassa, saadaan ylös-kvarkkien diagonalisointimatriisi U_u ratkaistua numeerisesti mittaustulosten avulla, mikäli neutriinojen matriisi U_ν tunnettaan. Vastaavasti relaation $U_\nu = U_u$ ja matriisin U_ℓ avulla saadaan numeerinen lauseke alas-kvarkkien matriisille U_d. Tässä tutkielmassa matriiseille U_ν ja U_ℓ käytettiin erilaisia teoreettisia yritteitä, joista mielenkiintoisimmaksi osoittautui bi-maksimaalinen matriisi U_{BM}, joka koostuu maksimaalisista 23- ja 12-rotaatioista.

Luvun 5 tuloksista nähdään, että nykyinen mittausdata suosii relaatiota (5.21), $U_{\mathrm{CKM}}\, U_{\mathrm{PMNS}} = U_{\mathrm{BM}}$, joka saatiin tapauksessa $U_\ell = U_d$ käyttäen bi-maksimaalista yritettä. Relaatio pätee erityisen hyvin, kun tuntematon neutriinojen Diracin vaihe on $\delta \simeq \pi$. Tapauksessa $U_\nu = U_u$ saatu relaatio $U_{\mathrm{PMNS}}\, U_{\mathrm{CKM}} = U_{\mathrm{BM}}$, (5.30), sen sijaan ennustaa liian pienen arvon neutriinojen sekoituskulmalle θ_{13}, kun neutriinojen sekoitusparametrit ratkaistaan kvarkkien parametrien funktiona. Tapaukset $U_\ell = U_d$ ja $U_\nu = U_u$ liittyvät myös läheisesti kvarkki–leptoni-komplementaarisuuteen (QLC), ja yhtälöt (5.21) ja (5.30) ovat oleellisesti eräitä kirjallisuudessa esitettyjä QLC:n muotoja.

On mielenkiintoista huomata, että kaikissa tuloksissa neutriinojen Diracin vaihe on $\delta \simeq \pi$ ja että relaatio (5.21) pitää tällöin myös kokeellisesti hyvin paikkansa. Mittauksista on nimittäin myös saatu hyvin heikko signaali, jonka mukaan neutriinojen vaiheen δ arvo saattaisi olla lähellä piitä [68–70]. Tähän liittyen on mielenkiintoista, että koska standardiparametrisaatiossa vaihe δ esiintyy aina kulman θ_{13} kanssa kombinaatiossa $s_{13}\, e^{\mathrm{i}\delta}$ (tai $s_{13}\, e^{-\mathrm{i}\delta}$), on muutos $\delta \longrightarrow \delta - \pi$ ekvivalentti muutoksen $\theta_{13} \longrightarrow -\theta_{13}$ kanssa. Tulos $\delta \simeq \pi$ siis saattaisi tarkoittaa, että kulmalle θ_{13} olisi luonnollisempaa käyttää negatiivista arvoa kuten viitteessä [69] on spekuloitu.

Luvun 5 tarkasteluissa ei ole otettu huomioon RG-yhtälöiden vaikutusta sekoitusparametreihin, vaikka relaatioiden $U_\ell = U_d$ ja $U_\nu = U_u$ alkuperä on todennäköisesti jokin korkean energiaskaalan teoria kuten suuri yhtenäisteoria (GUT). Koska renormalisaation vaikutus kvarkkien Cabibbon kulmaan on pieni [23] ja neutriinojen sekoitusparametrien renormalisaatio voidaan yleensä jättää huomioimatta, ei tämän pitäisi olla ongelma. Tietyissä tapauksissa, esimerkiksi jos neutriinojen massat ovat lähes degeneroituneet, renormalisaatiolla voi olla kuitenkin merkittävä vaikutus ja se pitää ottaa huomioon.

Relaatioita $U_\ell = U_d$ ja $U_\nu = U_u$ on vaikea perustella teoreettisesti, koska ne ovat erittäin yksinkertaistettuja. Ne voidaan mahdollisesti toteuttaa minimaalisten GUT-relaatioiden kuten (4.6) ja (4.10) avulla [23]. Minimaalisissa GUT-malleissa on kuitenkin ristiriitoja koetulosten kanssa, joten mahdollisen suuren yhtenäisteorian täytyy olla käytännössä ei-minimaalinen. Tällöin kvarkkien ja leptonien massamatriisien välinen relaatio on monimutkaisempi, ja tämän seurauksena myös sekoitusmatriisien välinen relaatio on todennäköisesti monimutkaisempi kuin esimerkiksi $U_\ell = U_d$.

Luvun 5 tarkastelua voitaisiin kehittää myös käyttämällä hienostuneempia yritteitä matriiseille U_ν ja U_u tapauksessa (5.1) ja matriiseille U_ℓ ja U_d tapauksessa (5.22). Yritteissä voisi olla esimerkiksi vapaita parametreja, ja niihin voitaisiin lisätä myös kompleksisia vaiheita kuten viitteessä [23]. Tällöin neutriinojen Diracin vaihe δ saataisiin myös tarvittaessa poikkeamaan kauemmas arvosta π. Lisäksi tässä tutkielmassa on tarkasteltu ainoastaan kolmen tavallisen neutriinon tapausta. Yhden tai useamman steriilin neutriinon lisääminen vaikuttaisi esimerkiksi PMNS-matriisin unitaarisuuteen [79], johon esimerkiksi yhtälön (5.2) johtaminen perustuu.

Kirjallisuutta

[1] C. Giunti ja C. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 2007.

[2] M. Peskin ja D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.

[3] S. Martin, "*Phenomenology of Particle Physics*". Luentomuistiinpanot http://zippy.physics.niu.edu/spring2011/ppp.pdf (28.1.2012).

[4] S. Novaes, "*Standard Model: An Introduction*", arXiv:hep-ph/0001283 [hep-ph].

[5] B. Pontecorvo, "*Mesonium and antimesonium*", Sov. Phys. JETP **6**:429 (1957).

[6] B. Pontecorvo, "*Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*", Sov. Phys. JETP **7**:172–173 (1958).

[7] Z. Maki, M. Nakagawa, ja S. Sakata, "*Remarks on the Unified Model of Elementary Particles*", Prog. Theor. Phys. **28**:870–880 (1962).

[8] B. Pontecorvo, "*Neutrino experiments and the question of leptonic-charge conservation*", Sov. Phys. JETP **26**:984–988 (1968).

[9] R. Mohapatra ja A. Smirnov, "*Neutrino Mass and New Physics*", Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **56**:569–628 (2006), arXiv:hep-ph/0603118 [hep-ph].

[10] J. Davis, Raymond, D. S. Harmer, ja K. C. Hoffman, "*Search for neutrinos from the sun*", Phys. Rev. Lett. **20**:1205–1209 (1968).

[11] Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, "*Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*", Phys. Rev. Lett. **81**:1562–1567 (1998), arXiv:hep-ex/9807003 [hep-ex].

[12] SNO Collaboration, Q. Ahmad *et al.*, "*Measurement of the rate of $\nu_e + d \to p+p+e^-$ interactions produced by ^8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory*", Phys. Rev. Lett. **87**:071301 (2001), arXiv:nucl-ex/0106015 [nucl-ex].

[13] N. Cabibbo, "*Unitary Symmetry and Leptonic Decays*", Phys. Rev. Lett. **10**:531–533 (1963).

[14] M. Kobayashi ja T. Maskawa, "*CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*", Prog. Theor. Phys. **49**:652–657 (1973).

[15] G. Altarelli, "*The Mystery of Neutrino Mixings*", arXiv:1111.6421 [hep-ph].

[16] G. Altarelli ja F. Feruglio, "*Models of neutrino masses and mixings*", New J. Phys. **6**:106 (2004), arXiv:hep-ph/0405048 [hep-ph].

[17] G. Altarelli ja F. Feruglio, "*Discrete Flavor Symmetries and Models of Neutrino Mixing*", Rev. Mod. Phys. **82**:2701–2729 (2010), arXiv:1002.0211 [hep-ph].

[18] C. Sämann, "*Introduction to Supersymmetry*". Luentomuistiinpanot http://www.christiansaemann.de/files/LecturesOnSUSY.pdf (28.1.2012).

[19] B. Kayser, "*Neutrino Mass, Mixing, and Flavor Change*", arXiv:hep-ph/0211134 [hep-ph].

[20] E. Ma, "*Neutrino Mass: Mechanisms and Models*", arXiv:0905.0221 [hep-ph].

[21] Particle Data Group, K. Nakamura *et al.*, "*Review of Particle Physics*", J. Phys. G **37**:075021 (2010).

[22] A. Rašin, "*Diagonalization of Quark Mass Matrices and the Cabibbo–Kobayashi–Maskawa Matrix*", arXiv:hep-ph/9708216.

[23] H. Minakata ja A. Y. Smirnov, "*Neutrino mixing and quark-lepton complementarity*", Phys. Rev. D **70**:073009 (2004), arXiv:hep-ph/0405088 [hep-ph].

[24] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, ja M. Ratz, "*Running Neutrino Masses, Mixings and CP Phases: Analytical Results and Phenomenological Consequences*", Nucl. Phys. B **674**:401–433 (2003), arXiv:hep-ph/0305273 [hep-ph].

[25] H. Fritzsch ja Z.-z. Xing, "*Parametrization of flavor mixing in the standard model*", Phys. Rev. D **57**:594–597 (1998), arXiv:hep-ph/9708366.

[26] Particle Data Group, R. M. Barnett *et al.*, "*Review of Particle Physics*", Phys. Rev. D **54**:1–708 (1996).

[27] L. Maiani, "*CP violation in purely lefthanded weak interactions*", Phys. Lett. B **62**:183–186 (1976).

[28] L.-L. Chau ja W.-Y. Keung, "*Comments on the Parametrization of the Kobayashi–Maskawa Matrix*", Phys. Rev. Lett. **53**:1802–1805 (1984).

[29] C. Jarlskog, "*Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation*", Phys. Rev. Lett. **55**:1039 (1985).

[30] L. Merlo, "*Phenomenology of Discrete Flavour Symmetries*", arXiv:1004.2211 [hep-ph]. Väitöskirja (Ohjaaja: Ferrucio Feruglio).

[31] P. F. Harrison, D. H. Perkins, ja W. G. Scott, "*Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data*", Phys. Lett. B **530**:167–173 (2002), arXiv:hep-ph/0202074.

[32] P. F. Harrison ja W. G. Scott, "*Symmetries and generalisations of tri-bimaximal neutrino mixing*", Phys. Lett. B **535**:163–169 (2002), arXiv:hep-ph/0203209.

[33] Y. H. Ahn, H.-Y. Cheng, ja S. Oh, "*An extension of tribimaximal lepton mixing*", arXiv:1107.4549 [hep-ph].

[34] A. Adulpravitchai, A. Blum, ja W. Rodejohann, "*Golden Ratio Prediction for Solar Neutrino Mixing*", New J. Phys. **11**:063026 (2009), arXiv:0903.0531 [hep-ph].

[35] F. Feruglio ja A. Paris, "*The Golden Ratio Prediction for the Solar Angle from a Natural Model with A_5 Flavour Symmetry*", JHEP **1103**:101 (2011), arXiv:1101.0393 [hep-ph].

[36] E. Ma, "*A(4) symmetry and neutrinos with very different masses*", Phys. Rev. D **70**:031901 (2004), arXiv:hep-ph/0404199 [hep-ph].

[37] S. Antusch, S. F. King, ja M. Spinrath, "*Measurable Neutrino Mass Scale in $A_4\times$ SU(5)*", Phys. Rev. D **83**:013005 (2011), arXiv:1005.0708 [hep-ph].

[38] P. Frampton ja T. Kephart, "*Simple Non-Abelian Finite Flavor Groups and Fermion Masses*", Int. J. Mod. Phys. A **10**:4689–4704 (1995), arXiv:hep-ph/9409330 [hep-ph].

[39] F. Feruglio, C. Hagedorn, Y. Lin, ja L. Merlo, "*Tri-bimaximal Neutrino Mixing and Quark Masses from a Discrete Flavour Symmetry*", Nucl. Phys. B **775**:120–142 (2007), arXiv:hep-ph/0702194 [hep-ph].

[40] R. Mohapatra, M. Parida, ja G. Rajasekaran, "*High scale mixing unification and large neutrino mixing angles*", Phys. Rev. D **69**:053007 (2004), arXiv:hep-ph/0301234 [hep-ph].

[41] H. Ishimori, K. Saga, Y. Shimizu, ja M. Tanimoto, "*Tri-bimaximal Mixing and Cabibbo Angle in S_4 Flavor Model with SUSY*", Phys. Rev. D **81**:115009 (2010), arXiv:1004.5004 [hep-ph].

[42] I. de Medeiros Varzielas, S. King, ja G. Ross, "*Neutrino tri-bi-maximal mixing from a non-Abelian discrete family symmetry*", Phys. Lett. B **648**:201–206 (2007), arXiv:hep-ph/0607045 [hep-ph].

[43] C. Luhn, S. Nasri, ja P. Ramond, "*The Flavor group $\Delta(3n^2)$*", J. Math. Phys. **48**:073501 (2007), arXiv:hep-th/0701188 [hep-th].

[44] I. d. M. Varzielas ja G. G. Ross, "*Discrete family symmetry, Higgs mediators and θ_{13}*", arXiv:1203.6636 [hep-ph].

[45] L. Di Luzio, "*Aspects of symmetry breaking in Grand Unified Theories*", arXiv:1110.3210 [hep-ph]. Väitöskirja (Ohjaaja: Stefano Bertolini).

[46] E. K. Akhmedov, "*Do charged leptons oscillate?*", JHEP **0709**:116 (2007), arXiv:0706.1216 [hep-ph].

[47] SAGE Collaboration, J. Abdurashitov *et al.*, "*Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. III: Results for the 2002–2007 data-taking period*", Phys. Rev. C **80**:015807 (2009), arXiv:0901.2200 [nucl-ex].

[48] GALLEX Collaboration, W. Hampel *et al.*, "*GALLEX solar neutrino observations: Results for GALLEX IV*", Phys. Lett. B **447**:127–133 (1999).

[49] GNO COLLABORATION, M. Altmann *et al.*, "*Complete results for five years of GNO solar neutrino observations*", Phys. Lett. B **616**:174–190 (2005), arXiv:hep-ex/0504037 [hep-ex].

[50] Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, ”*Solar neutrino data covering solar cycle 22*”, Phys. Rev. Lett. **77**:1683–1686 (1996).

[51] Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, ”*Measurements of the solar neutrino flux from Super-Kamiokande's first 300 days*”, Phys. Rev. Lett. **81**:1158–1162 (1998), arXiv:hep-ex/9805021 [hep-ex].

[52] Super-Kamiokande Collaboration, J. Hosaka *et al.*, ”*Solar neutrino measurements in super-Kamiokande-I*”, Phys. Rev. D **73**:112001 (2006), arXiv:hep-ex/0508053 [hep-ex].

[53] SNO Collaboration, B. Aharmim *et al.*, ”*Low Energy Threshold Analysis of the Phase I and Phase II Data Sets of the Sudbury Neutrino Observatory*”, Phys. Rev. C **81**:055504 (2010), arXiv:0910.2984 [nucl-ex].

[54] Borexino Collaboration, C. Arpesella *et al.*, ”*First real time detection of Be-7 solar neutrinos by Borexino*”, Phys. Lett. B **658**:101–108 (2008), arXiv:0708.2251 [astro-ph].

[55] G. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, A. Palazzo, ja A. Rotunno, ”*Evidence of $\theta_{13} > 0$ from global neutrino data analysis*”, Phys. Rev. D **84**:053007 (2011), arXiv:1106.6028 [hep-ph].

[56] KamLAND Collaboration, S. Abe *et al.*, ”*Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND*”, Phys. Rev. Lett. **100**:221803 (2008), arXiv:0801.4589 [hep-ex].

[57] K2K Collaboration, M. Ahn *et al.*, ”*Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment*”, Phys. Rev. D **74**:072003 (2006), arXiv:hep-ex/0606032 [hep-ex].

[58] MINOS Collaboration, P. Adamson *et al.*, ”*Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS Detectors in the NuMI Beam*”, Phys. Rev. Lett. **101**:131802 (2008), arXiv:0806.2237 [hep-ex].

[59] OPERA Collaboration, N. Agafonova *et al.*, ”*Observation of a first ν_τ candidate in the OPERA experiment in the CNGS beam*”, Phys. Lett. B **691**:138–145 (2010), arXiv:1006.1623 [hep-ex].

[60] CHOOZ Collaboration, M. Apollonio *et al.*, ”*Search for neutrino oscillations on a long baseline at the CHOOZ nuclear power station*”, Eur. Phys. J. C **27**:331–374 (2003), arXiv:hep-ex/0301017 [hep-ex].

[61] DOUBLE-CHOOZ Collaboration, Y. Abe *et al.*, ”*Indication for the disappearance of reactor electron antineutrinos in the Double Chooz experiment*”, arXiv:1112.6353 [hep-ex]. Long author list - awaiting processing.

[62] Daya Bay collaboration, F. An *et al.*, ”*Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay*”, arXiv:1203.1669 [hep-ex].

[63] RENO collaboration, J. Ahn *et al.*, ”*Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment*”, arXiv:1204.0626 [hep-ex].

[64] T2K Collaboration, K. Abe *et al.*, "*Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-produced Off-axis Muon Neutrino Beam*", Phys. Rev. Lett. **107**:041801 (2011), arXiv:1106.2822 [hep-ex].

[65] MINOS Collaboration, P. Adamson *et al.*, "*Improved search for muon-neutrino to electron-neutrino oscillations in MINOS*", Phys. Rev. Lett. **107**:181802 (2011), arXiv:1108.0015 [hep-ex].

[66] LSND Collaboration, A. Aguilar-Arevalo *et al.*, "*Evidence for neutrino oscillations from the observation of anti-neutrino(electron) appearance in a anti-neutrino(muon) beam*", Phys. Rev. D **64**:112007 (2001), arXiv:hep-ex/0104049 [hep-ex].

[67] The MiniBooNE Collaboration, A. Aguilar-Arevalo *et al.*, "*Event Excess in the MiniBooNE Search for $\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e$ Oscillations*", Phys. Rev. Lett. **105**:181801 (2010), arXiv:1007.1150 [hep-ex].

[68] T. Schwetz, M. Tortola, ja J. Valle, "*Where we are on θ_{13}: addendum to 'Global neutrino data and recent reactor fluxes: status of three-flavour oscillation parameters'*", New J. Phys. **13**:109401 (2011), arXiv:1108.1376 [hep-ph].

[69] M. Huang, S. Reitzner, W.-C. Tsai, ja H. Tu, "*Global Neutrino Data Analysis and the Quest to Pin Down $\sin\theta_{13}$ in Different Mixing Matrix Parametrizations*", arXiv:1111.3175 [hep-ph].

[70] G. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, D. Montanino, A. Palazzo, *et al.*, "*Global analysis of neutrino masses, mixings and phases: entering the era of leptonic CP violation searches*", arXiv:1205.5254 [hep-ph].

[71] CKMfitter Group, J. Charles *et al.*, "*CP violation and the CKM matrix: assessing the impact of the asymmetric B factories*", Eur. Phys. J. C **41**:1–131 (2005), arXiv:hep-ph/0406184. Päivitetyt tulokset osoitteesta `http://ckmfitter.in2p3.fr/` (12.3.2012).

[72] A. S. Joshipura ja A. Smirnov, "*Quark-lepton universality and large leptonic mixing*", Nucl. Phys. B **750**:28–44 (2006), arXiv:hep-ph/0512024 [hep-ph].

[73] A. Dighe, S. Goswami, ja P. Roy, "*Quark-lepton complementarity with quasi-degenerate Majorana neutrinos*", Phys. Rev. D **73**:071301 (2006), arXiv:hep-ph/0602062 [hep-ph].

[74] C. Jarlskog, "*Ambiguities pertaining to quark-lepton complementarity*", Phys. Lett. B **625**:63–66 (2005), arXiv:hep-ph/0507212 [hep-ph].

[75] Y.-j. Zheng, "*Dependence of the Quark-Lepton Complementarity on Parametrizations of the CKM and PMNS Matrices*", Phys. Rev. D **81**:073009 (2010), arXiv:1002.0919 [hep-ph].

[76] G.-N. Li, H.-H. Lin, ja X.-G. He, "*Comment on Reparametrization Invariance of Quark-Lepton Complementarity*", Phys. Lett. B **711**:57–61 (2012), arXiv:1112.2371 [hep-ph].

[77] X. Zhang, Y.-j. Zheng, ja B.-Q. Ma, "*Quark-lepton complementarity revisited*", arXiv:1203.1563 [hep-ph].

[78] M. Lindner, M. Ratz, ja M. A. Schmidt, "*Renormalization group evolution of Dirac neutrino masses*", JHEP **0509**:081 (2005), arXiv:hep-ph/0506280 [hep-ph].

[79] Z.-z. Xing, "*A full parametrization of the* 6×6 *flavor mixing matrix in the presence of three light or heavy sterile neutrinos*", Phys. Rev. D **85**:013008 (2012), arXiv:1110.0083 [hep-ph].