

# Trilineaariset koordinaatit

Perttu Koivulahti

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Syksy 2012

**Tiivistelmä:** Perttu Koivulahti, *Trilineaariset koordinaatit* (eng. *Trilinear coordinates*), matematiikan pro gradu -tutkielma, 52 s., Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, syksy 2012.

Tämän tutkielman tarkoituksena on johdatella lukija trilineaaristen koordinaattien pariin ja esitellä, minkälainen koordinaattijärjestelmä trilineaariset koordinaatit ovat, miten siinä muodostetaan geometrian peruselementtejä, kuten suoraa, ja mitä hyötyä tällaisen koordinaattijärjestelmän olemassaolosta on. Tämän tutkielman luetuun lukija on myös tutustunut muutamaan kolmion merkilliseen pisteeseen ja on saanut käsityksen siitä, mikä oikeastaan on merkillinen piste.

Trilineaariset koordinaatit kehitti Julius Plücker 1800-luvun alkupuolella. Trilineaariset koordinaatit ovat kolmioon pohjautuva tapa esittää tason pisteitä. Pisteiden trilineaariset koordinaatit muodostuvat pisteen suhteellisista kohtisuorista etäisyyksistä kolmion jokaiseen sivuun. Suhteellisuuden nojalla trilineaariset koordinaatit ovat homogeenisia koordinaatteja, joissa pisteen kaikki koordinaatit kerrottaessa samalla vakiolla kyseessä oleva piste ei muutu eri pisteeksi. Trilineaarilla koordinaateilla on kätevä ilmaista sellaisia pisteitä, jotka ovat liitoksissa jollain tapaa kolmioon. Vaikka trilineaariset koordinaatit pohjautuvat kolmioon, niin taustalla olevasta kolmiosta ei yleensä tarvitse olettaa mitään.

Kolmion neljä klassista merkillistä pistettä tunnettiin jo antiikin aikana. Viides merkillinen piste löytyi vasta 1600-luvun puolivälissä ja sen jälkeen niitä on löytynyt paljon lisää. Trilineaariset koordinaatit voidaan mieltää kolmion sivujen tai kulmien funktioiksi. Tämä ajattelutapa mahdollisti sen, että klassista geometriaa voitiin alkaa merkitsemään algebrallisesti. 1980-luvulla havaittiin, että merkillisillä pisteillä on joitain yhtäläisiä ominaisuuksia. Trilineaaristen koordinaattien muodostamilla funktioilla voitiinkin nyt määritellä tarkasti nämä ominaisuudet: substituutio, symmetria ja homogeenisuus, jotka vaaditaan siihen, että voidaan puhua *merkillisestä* pisteestä.

Vaikka trilineaariset koordinaatit pohjautuvat kolmioon, pystytään niillä myös tekemään samoja asioita kuin perinteisessä karteesisessa koordinaatistossa. Se ei ole välttämättä aina kovin yksinkertaista eikä myöskään yksiselitteistä. Trilineaarilla koordinaateilla pystytään muodostamaan yhtälöt muun muassa kolmion pinta-alalle ja suoralle. Suoran ja pinta-alan yhtälöiden avulla saadaan muodostettua kaavat myös erisuuntaisten suorien leikkauspisteelle, kahden pisteen väliselle etäisyydelle sekä pisteen etäisyydelle suorasta. Näitä tuloksia voidaan taas hyödyntää, kun johdetaan hieman monimutkaisempien merkillisten pisteiden trilineaarista koordinaatteja tai esimerkiksi koordinaattimuutoslause, jonka avulla pisteelle voidaan muodostaa trilineaariset koordinaatit jossain toisessa tunnetussa kolmiossa. Jokin merkillinen piste saattaa olla jokin toinen merkillinen piste toisessa, alkuperäiseen kolmioon oleellisesti liittyvässä kolmiossa. Koordinaattimuutoslauseen avulla voidaan todistaa tällaisia yhteyksiä.

Kouluopetukseen trilineaariset koordinaatit olisi melko haastava aihe. Geometrista ja trigonometrasta koneistoa tarvitaan sen verran, että oikeastaan ainoa paikka, missä sen opetusta koulussa voisi harkita, on pitkän matematiikan geometrian kurssit. Opetussuunitelmiin trilineaarista koordinaatteja ei ehkä kannata ottaa, mutta esimerkiksi kolmion klassisten pisteiden trilineaaristen koordinaattien määrittäminen voisi olla sopiva lisätehtävä lahjakkaimmille oppilaille.

## Sisältö

Johdanto	1
Kiitokset	2
Luku 1. Esitietoja	3
1.1. Merkinnot ja kaavat	3
1.1.1. Vakiintuneet merkinnot ja trigonometriset funktiot	3
1.1.2. Kirjoitelmassa käytössä olevat merkinnot	4
1.2. Trilineaariset koordinaatit	5
1.3. Barysentriset koordinaatit	5
Luku 2. Kolmion klassiset merkilliset pisteet	7
2.1. Kulmanpuolittajien leikkauspiste	7
2.2. Keskiyanojen leikkauspiste	7
2.3. Keskinormaalien leikkauspiste	8
2.4. Korkeusyanojen leikkauspiste	9
Luku 3. Merkillinen piste	12
Luku 4. Erityisiä kolmioita	14
4.1. Keskinen kolmio	14
4.2. Antikomplementtinen kolmio	15
4.3. Ulkokeskuskolmio	15
4.4. Pedaalinen kolmio	17
4.5. Isogonaalinen konjugaatti	18
Luku 5. Todelliset trilineaariset etäisyydet	19
5.1. Kolmion pinta-ala	19
5.2. Todelliset trilineaariset etäisyydet	21
Luku 6. Suorat trilineaarilla koordinaateilla	22
6.1. Suoran yhtälö	22
6.2. Eulerin suora	24
6.2.1. Eulerin suoran yhtälö painopisteen ja ortokeskuksen kautta	24
6.2.2. Eulerin suoran yhtälö ortokeskuksen ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen mukaan	25
6.2.3. Eulerin suoran yhtälö painopisteen ja ympäri piirretyn ympyrän mukaan	26
6.3. Suorien leikkauspiste	26
6.4. Pisteiden etäisyys toisesta pisteestä sekä suorasta	28
Luku 7. Mielenkiintoisia merkillisiä pisteitä	32

7.1. Napoleonin pisteet	32
7.1.1. 1. Napoleonin piste	33
7.1.2. 2. Napoleonin piste	37
7.2. Mittenpunkt	38
7.3. Fermat'n pisteet (isogoniset pisteet)	39
7.4. Isodynaamiset pisteet	41
7.5. Symmediaaninen piste (Lemoinen piste)	41
7.6. Schifflerin piste	41
Luku 8. Koordinaattimuunnokset	43
Luku 9. Koordinaattimuutoslauseen sovelluksia	46
9.1. Kollineaarisuusongelma	46
9.2. Yhdenmuotoisuusongelma	48
Luku 10. Trilineaariset koordinaatit kouluopetuksessa	50
Kirjallisuutta	52

## Johdanto

*Trilineaariset koordinaatit* ovat tasogeometriaan liittyvä tapa ilmaista tason pisteitä. Pisteiden trilineaariset koordinaatit muodostuvat pisteen suhteellisista etäisyyksistä kolmion jokaiseen sivuun. Tämän kirjoitelman tarkoituksena on esitellä, mitä ovat trilineaariset koordinaatit ja miten trilineaarisia koordinaatteja voidaan soveltaa geometriassa.

Trilineaaristen koordinaattien historia ulottuu 1800-luvun alkupuolelle [2] (s.240-249). Tuolloin muutamat itsenäisesti työskennelleet matemaatikot esittelivät lähes samaan aikaan kehittelemiään koordinaattijärjestelmiä, jotka olivat keskenään hyvin samankaltaisia. Yhteinen nimittäjä näille kehitelmille oli koordinaattien homogeenisuus, jonka nojalla pisteen koordinaatteja voidaan kertoa vakiolla ilman, että piste muuttuu eri pisteeksi. Ensimmäisenä julkaisemaan ehti ranskalainen Etienne Bobillier (1797-1832), joka esitteli julkaisussa *Annales de mathématiques*, XVIII (1827-1828), miten tasossa olevat suorat voidaan ilmaista suhteessa kolmion sivuihin. Vaikka Bobillierin esityksessä ei tarkkaan ottaen ollut kyse koordinaateista, voidaan katsoa hänen olleen ensimmäinen, joka tutki suoria ja kartioleikkauksia liittäen ne kolmioon. Saksalainen August Ferdinand Möbius (1790-1860) julkaisi barysentriset koordinaatit kirjassaan *Barycentrische Calcul* myös vuonna 1827. Bobillierin tavoin Möbiuskin tutki kuvioita suhteessa kolmioon, mutta hänen kehittämänsä koordinaatit eivät olleet suorien vaan pisteiden koordinaatteja. Barysentriset koordinaatit ilmaisevat pisteen sijainnin suhteessa kolmioon ja kyseiset koordinaatit muodostuvat niiden kolmen kolmion suhteellisista pinta-aloista, jotka tarkasteltava piste muodostaa kolmion kärkien kanssa. Koska barysentrisillä koordinaateilla merkittiin kaksiulotteisen tason pisteitä kolmella koordinaatilla, niin Möbiuksen työ oli tuolloin hieman hätkähdyttävä.

Barysentrisistä koordinaateista oli enää lyhyt matka trilineaarisiin koordinaatteihin. Saksalainen Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) julkaisi myös vuonna 1827 teoksen *Grundriss zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide*, jossa hän teki kolmessa ulottuvuudessa pitkälti samoja asioita kuin mitä Möbius teki tasossa. Trilineaaristen koordinaattien varsinainen kehittäjä on kuitenkin saksalainen Julius Plücker (1801-1868). Hän kirjoitti vuonna 1829 artikkelin *Über ein neues Coordinatensystem*, jossa hän esitteli homogeeniset koordinaatit, jotka eivät siis olleetkaan niin uusi (*neues*) kuin hän artikkelin otsikon perusteella oletti. Koordinaattijärjestelmä, jonka Plücker ensin esitteli, oli *kolmikulmaiset koordinaatit*. Sen runkoina olivat kolme erisuuntaista suoraa, jossa pisteen koordinaatit muodostuivat janojen pituudesta. Nämä janat konstruointiin pisteestä kullekin suoralle siten, että jana ja suora muodostivat annetun kulman. Tätä muotoa Plücker kehitti eteenpäin määritellen käytettäväksi janaaksi pisteen kohtisuoran etäisyyden runkona olevasta suorasta. Tämä oli lopulta se muoto, joka nykyään tunnetaan trilineaarisisina koordinaatteina. Weissteinin mukaan [13] Plücker esitteli (homogeeniset) trilineaariset koordinaatit vuonna 1835. Samoin

kuin barysentriset koordinaatit, myös trilineaariset koordinaatit ilmaisevat siis pisteen sijainnin suhteessa kolmioon, mutta pisteestä muodostuvien pinta-alojen sijaan trilineaariset koordinaatit muodostuvat pisteen suhteellisista etäisyyksistä kolmion kuhunkin sivuun. Näin ollen trilineaariset koordinaatit ovat hieman yksinkertaistempimpi muoto barysentrisistä koordinaateista.

Nykyään kolmioon liittyvä koordinaattijärjestelmä on käytössä, koska kolmio on tasogeometrian tärkein kuvio [1] (s. 25). Vaikka käytännön elämässä trilineaariset koordinaatit eivät vedä vertoja perinteiselle karteesiselle  $xy$ -tasokoordinaatistolle, ovat trilineaariset koordinaatit kuitenkin hyödyllinen ja kätevä tapa esittää sellaisia pisteitä, jotka ovat liitoksissa jollakin tapaa kolmioon. Trilineaariset koordinaatit voidaan esittää myös kolmioon pohjautuvina funktioina, jolloin niitä voidaan merkitä algebrallisesti. 1980-luvulla havaittiin Kimberlingin [6] mukaan, että useilla kolmiosta muodostetuilla pisteillä on yhtäläisiä ominaisuuksia. Trilineaaristen koordinaattien funktioesityksen avulla voitiin määrittellä tarkasti nämä ominaisuudet, jotka pisteen täytyy toteuttaa ollakseen merkillinen piste. Suurimman tutkimustyön kolmion merkillisten pisteiden parissa on tehnyt amerikkalainen Clark Kimberling (1942-), jonka kirjoittamiin artikkeleihin tässä kirjoituksessa useasti viitataan. Lokakuuhun 2012 mennessä on määritetty yli 5000 merkillisen pisteen trilineaariset koordinaatit, jotka Kimberling on koonnut kotisivuilleen [4].

Tässä kirjoitelmassa määritellään luvussa 1 pisteen trilineaariset koordinaatit ja kirjoitelmassa käytettävät merkinnät. Luvussa 2 tutustutaan tarkemmin kolmion neljään klassiseen merkilliseen pisteeseen ja muodostetaan niiden trilineaariset koordinaatit. Kolmion klassiset merkilliset pisteet toimivat johdantona luvulle 3, jossa johdetaan yleinen määritelmä merkilliselle pisteelle. Merkillisen pisteen määritelmä on kirjoitelman alkuosan pääkohta. Luvussa 4 esitellään muutama erityinen kolmio, joihin viitataan muualla tässä kirjoitelmassa. Luvussa 5 johdetaan kolmion pinta-alan lauseke pohjautuen pisteen etäisyyksiin kolmion sivuihin. Suorien yhtälöt trilineaaristen koordinaattien mukaan määritellään luvussa 6. Samassa luvussa johdetaan myös lausekkeet erisuuntaisten suorien leikkauspisteelle sekä kahden pisteen ja pisteen ja suoran välisen etäisyyden määrittämiseksi. Luvussa 7 esitellään merkillisiä pisteitä, jotka ovat hieman monimutkaisempia. Luvussa 8 perehdytään siihen, miten pisteen trilineaarisia koordinaatteja voidaan muuttaa kolmiosta toiseen koordinaattimuutoslauseen avulla, joka on kirjoitelman loppuosan pääkohta. Koordinaattimuutoslauseetta sovelletaan luvussa 9. Viimeisessä luvussa 10 pohditaan hieman sitä, voisiko trilineaarisia koordinaatteja opettaa kouluissa.

Trilineaarisista koordinaateista ei ole olemassa juurikaan suomenkielistä kirjallisuutta, joten muutamat käsitteet olen suomentanut itse (mm. luvun 4 kolmioiden nimet). Kirjoituksessa esiintyvät kuvat on tehty geogebra-ohjelmalla.

### Kiitokset

Kiitos Emilia Rahkoselle, tulevalle vaimolleni, joka oli tukenani tätä työtä aherttaessani ja kannusti minua tämän työn loppuun saattamisessa. Ilman häntä tämä työ olisi ikuisesti ”viimeistelyvaiheessa”.

Kiitos ohjaajalleni Juha Lehrbäckille monista keskusteluista työn parissa ja koko kirjoitusprosessin ajan saadusta asiantuntevasta ohjauksesta. Kiitos myös Jouni Parkkoselle työtä koskevista kehitysideoista.

## LUKU 1

### Esitietoja

Tässä luvussa käydään läpi kirjoitelmassa käytettäviä merkintöjä, geometrisia määritelmiä ja lauseita. Sen lisäksi luvussa määritellään tarkemmin mitä ovat tri-lineariset ja barysentriset koordinaatit. Tässä luvussa on lähteenä käytetty kirjallisuusuutteita [5] ja [13].

#### 1.1. Merkinnät ja kaavat

**1.1.1. Vakiintuneet merkinnät ja trigonometriset funktiot.** Seuraavat vakiintuneet geometriset merkinnät ovat voimassa tässä kirjoitelmassa:

Pisteiden  $A$  ja  $B$  välistä suoraa merkitään  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Pisteiden  $A$  ja  $B$  välistä janaa merkitään  $AB$ .

Janan  $AB$  pituutta merkitään  $\overline{AB}$ .

Kulmien  $\angle A$  ja  $\angle B$  yhtenevyyttä merkitään  $\angle A \cong \angle B$ .

Kolmioiden  $\triangle ABC$  ja  $\triangle DEF$  yhdenmuotoisuutta merkitään  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Kun pisteet  $A$  ja  $B$  ovat eri puolilla suoraa  $\overleftrightarrow{CD}$ , merkitään  $\overleftrightarrow{ACDB}$ , ja kun pisteet ovat samalla puolella kyseistä suoraa, merkitään  $\overleftrightarrow{ABCD}$ .

Suora  $\overleftrightarrow{AB}$  on suoran  $\overleftrightarrow{CD}$  normaali, mikäli näiden suorien välinen kulma on suora.

Tässä kirjoitelmassa oleellisessa osassa ovat myös kolmioon liittyvät trigonometriset funktiot *sini* ja *kosini*. Suorakulmaisessa kolmiossa, missä kulman  $\angle A \neq 90^\circ$  vastainen kateetti on  $a$ , viereinen kateetti  $b$  ja hypotenuusa  $c$ , määritellään seuraavasti:

kulman  $\angle A$  sini

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

ja kulman  $\angle A$  kosini

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

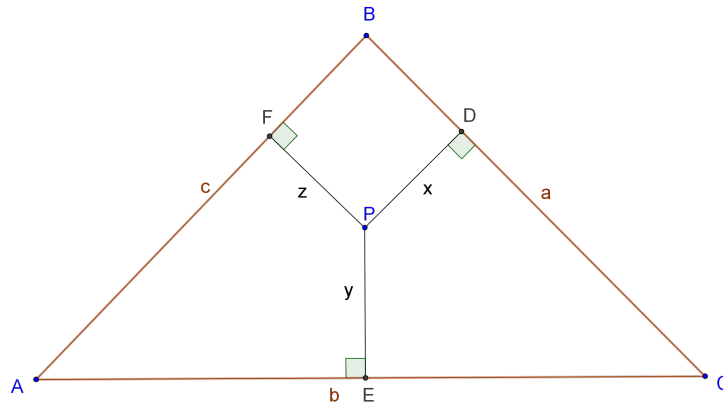
Kun  $\angle A = 90^\circ$ , niin  $\sin A = 1$  ja  $\cos A = 0$ .

Sini ja kosini ovat olemassa myös muualla kuin suorakulmaisessa kolmiossa. Suoraa kulmaa suuremmissa kulmissa sini ja kosini määritellään vieruskulmansa kautta siten, että

$$\sin x = \sin(180^\circ - x) \text{ ja } \cos x = -\cos(180^\circ - x).$$

Tässä kirjoitelmassa käytetään myös harvemmin käytettyjä trigonometrisia funktioita *sekanttia* ja *kosekanttia*. Nämä funktiot määritellään seuraavasti: sekantti on kosinin käänteisluku eli

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{c}{a}$$



KUVA 1.1.1. Trilineaariset koordinaatit

ja kosekanti on sinin käänteisluku eli

$$\operatorname{csc} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{c}{b}.$$

Tässä kirjoitelmassa käytetään myös kahta trigonometrian keskeisintä lausetta, sini- ja kosinilauseita, jotka esitellään seuraavaksi.

**LAUSE 1.1. Sinilause.** *Olkoot kolmion  $\triangle ABC$  sivut  $a$ ,  $b$  ja  $c$  siten, että sivu  $a$  on kärjen  $A$  vastainen sivu ja sivut  $b$  ja  $c$  vastaavasti. Tällöin*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r,$$

missä  $r$  on kolmion  $\triangle ABC$  ympäri piiretyn ympyrän säde.

**LAUSE 1.2. Kosinilause.** *Olkoot kolmion  $\triangle ABC$  sivut kuten sinilauseessa. Tällöin*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Näiden lauseiden todistukset löytyvät viitteestä [8] (s.95-97).

**1.1.2. Kirjoitelmassa käytössä olevat merkinnät.** Tässä kirjoituksessa, ellei erikseen toisin mainita, käytetään jokaisessa erillisessä tarkastelussa samoja merkintöjä (ks. kuva 1.1.1). Kolmion kärkiä ovat pisteet  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ja niitä vastaavat kulmat myös  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Kolmion sivuja ovat  $a$ ,  $b$  ja  $c$  määriteltynä siten, että kulmaa  $A$  vastassa oleva sivu eli jana  $BC$  on  $a$ , kulmaa  $B$  vastassa oleva sivu on  $b$  ja kulmaa  $C$  vastassa oleva sivu on  $c$ . Tarkasteltava piste tai keskus, josta trilineaarisiä koordinaatteja määritetään, on piste  $P$ . Pisteestä  $P$  kulkevien normaalien leikkauspisteet kolmion sivuilla tai sivuja vastaavilla suorilla ovat piste  $D$  suoralla  $\overleftrightarrow{BC}$ , piste  $E$  suoralla  $\overleftrightarrow{AC}$  ja piste  $F$  suoralla  $\overleftrightarrow{AB}$ . Pisteestä  $P$  etäisyydet kolmion kuhunkin sivuun tai sivun jatkeeseen ovat  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , missä  $x = \overline{PD}$ ,  $y = \overline{PE}$  sekä  $z = \overline{PF}$ . Kolmion pinta-ala merkitään isolla  $A$ -kirjaimella, jonka alaindeksinä on tarkasteltava kolmio, ts. kolmion  $\triangle ABC$  pinta-alaa merkitään  $A_{\triangle ABC}$ .



## 1.2. Trilineaariset koordinaatit

Pisteen  $P$  trilineaariset koordinaatit (lyh. *trilineaarit*) ovat pisteen suhteelliset kohtisuorat etäisyydet sen kolmion kuhunkin sivuun tai sivun jatkeeseen, jonka suhteen trilineaarit ovat muodostettu. Pisteellä on näin ollen kolme, janojen  $x$ ,  $y$  ja  $z$  pituudesta muodostuvaa, koordinaattia. Etäisyyksien suhteellisuus tarkoittaa sitä, että janojen pituudet voidaan kertoa vakiolla ilman, että se muuttaa tarkastelussa olevaa pistettä. Trilineaariset koordinaatit ovat siis homogeenisia koordinaatteja. Pisteen kolmea trilineaarista koordinaattia merkitään kreikkalaisilla kirjaimilla  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ , missä  $\alpha$  on koordinaatti sivulle  $a$ ,  $\beta$  koordinaatti sivulle  $b$  ja  $\gamma$  koordinaatti sivulle  $c$ . Tällöin trilineaarien homogeenisuuden nojalla on voimassa  $\alpha = kx$ ,  $\beta = ky$  ja  $\gamma = kz$ , missä  $k \in \mathbb{R}/\{0\}$ . Pisteen trilineaareja merkittäessä ne erotellaan toisistaan kaksoispisteillä  $\alpha : \beta : \gamma$ .

Kun jokin piste sijaitsee kolmion sivulla tai sivun jatkeella, on sen etäisyys kyseiseen sivuun nolla. Tällöin myös sen koordinaatti kyseiseen sivuun nähden on nolla. Kolmion kärjessä leikkaavat kaksi kolmion sivua, jolloin kolmion kärkipiste sijaitsee näillä molemmilla sivuilla. Näin ollen kärkipisteen koordinaateista kaksi ovat nollia ja etäisyys kolmanteen, kyseistä kärkeä vastassa olevaan sivuun, on homogeenisuuden nojalla yksi. Näin ollen kolmion  $\triangle ABC$  kärkipisteiden trilineaarit ovat

$$A = 1 : 0 : 0, B = 0 : 1 : 0, C = 0 : 0 : 1.$$

Mikäli piste sijaitsee kolmion sisällä, ovat kaikki sen koordinaatit positiivisia. Jos taas piste sijaitsee kolmion ulkopuolella, on sen jokin tai jotkut kaksi koordinaattia negatiiviset. Piste määritellään olevan kolmion ulkopuolella, mikäli se on eri puolella kulman vastassa olevaa sivua kuin kyseinen kulma. Esimerkiksi piste  $P$  on kolmion ulkopuolella kärkeen  $A$  nähden, kun  $\overrightarrow{PBCA}$ , jolloin pisteen  $P$   $\alpha$ -koordinaatti on negatiivinen. Jokin piste voi olla kolmion ulkopuolella yhtä aikaa vain kahteen kärkeen nähden. Näin ollen, mikäli pisteen  $P$  kaikki trilineaarit ovat negatiivisia, on piste homogeenisuuden nojalla kolmion sisällä.

## 1.3. Barysentriset koordinaatit

Kuten johdannosta käy ilmi, trilineaaristen koordinaattien taustalla ovat Barysentriset koordinaatit (eng. *Barycentric coordinates*). Barysentriset, kuten myös trilineaariset koordinaatit ovat homogeenisia koordinaatteja, jolloin pisteen kaikki koordinaatit voidaan kertoa samalla vakiolla ja kyseessä on edelleen sama piste. Barysentrisissä koordinaateissa pisteelle tulee kolme koordinaattia sen mukaan, miten se sijoittuu suhteessa kolmioon. Pisteen  $P$  barysentriset koordinaatit ovat Boyerin [2] (s. 242) mukaan ne suhteelliset luvut niistä massoista, jotka sijoitettuna kolmion kärkiin antaa tämän systeemin painopisteeksi pisteen  $P$ . Barysentristen koordinaattien nimi tulee Botteman [1] (s. 27) mukaan sanasta *Barycenter*, joka tarkoittaa painopistettä. Barysentriset koordinaatit ovat myös pinta-alojen suhteellinen koko kolmesta kolmiosta, joiden kärkinä ovat tarkasteltava piste ja kolmion kaksi kärkeä. Barysentrisissä koordinaateissa yksi koordinaatti on siis tarkasteltavan pisteen etäisyys kolmion yhteen sivuun kerrottuna kyseisen sivun pituudella. Kahdella jako voidaan homogeenisuuden nojalla jättää tekemättä. Trilineaarisisä koordinaateissa otetaan huomioon

vain tarkasteltavan pisteen etäisyys kolmion sivuihin, joten esitys on hieman yksinkertaisempi kuin barysentrisillä koordinaateilla. Esimerkiksi kolmion keskijanojen leikkauspisteen (kolmion painopiste) barysentriset koordinaatit ovat  $1 : 1 : 1$ , sillä keskijanojen leikkauspiste muodostaa kolmion kärkien kanssa kolme pinta-alaltaan yhtä suurta kolmiota. Pisteen  $P$  trilineaariset koordinaatit voidaan muuttaa barysentrisiksi koordinaateiksi yksinkertaisella muunnoskaavalla [13]. Jos pisteen  $P$  trilineaarit kolmiossa  $\triangle ABC$  ovat  $\alpha : \beta : \gamma$ , niin barysentriset koordinaatit pisteelle  $P$  samassa kolmiossa ovat  $a\alpha : b\beta : c\gamma$ , missä  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ovat kolmion  $\triangle ABC$  sivujen pituudet.

## Kolmion klassiset merkilliset pisteet

Tässä luvussa perehdytään tunnettuihin kolmiosta löytyviin klassisiin merkillisiin pisteisiin sekä niiden trilineaarisiin koordinaatteihin. Luvussa esitellään, miten kukin merkillinen piste muodostuu sekä johdetaan näiden pisteiden trilineaariset koordinaatit, jotka esitellään sekä suhteessa kolmion sivuihin että kulmiin. Merkillisten pisteiden trilineaarit on poimittu Kimberlingiltä [5], mutta niiden johtamisen olen tehnyt itse. Barysentriset koordinaatit löytyvät mm. merkillisten pisteiden ensyklopediasta [4].

### 2.1. Kulmanpuolittajien leikkauspiste

Kulmalla on kaksi suoraa, joita sanotaan kulmanpuolittajiksi. Kulman sisäinen (kolmioiden tapauksessa kolmion sisäinen) kulmanpuolittaja kulkee kulman kärjen kautta ja kahden sivun välistä jakaen kyseessä olevan kulman kahteen yhtä suureen osaan, ts. puoleen alkuperäisestä. Sisäinen kulmanpuolittaja on suora, joka kulman ”takana” jakaa kahteen yhtä suureen osaan kulman sivujen jatkeiden välisen kulman. Kulman ulkoinen kulmanpuolittaja kulkee kulman kärjen kautta jakaen sivun ja toisen sivun jatkeen välisen kulman kahteen yhtä suureen osaan. Sisäisellä kulmanpuolittajalla sijaitsevat pisteet ovat yhtä kaukana molemmista puolittamansa kulman sivuista. Ulkoisella kulmanpuolittajalla sijaitsevat pisteet ovat yhtä kaukana kulman toisesta sivusta ja toisen sivun jatkeesta. Tässä kappaleessa tarkastellaan vain kulman sisäisiä kulmanpuolittajia. Ulkoisia kulmanpuolittajia tarkastellaan kohdassa 4.3.

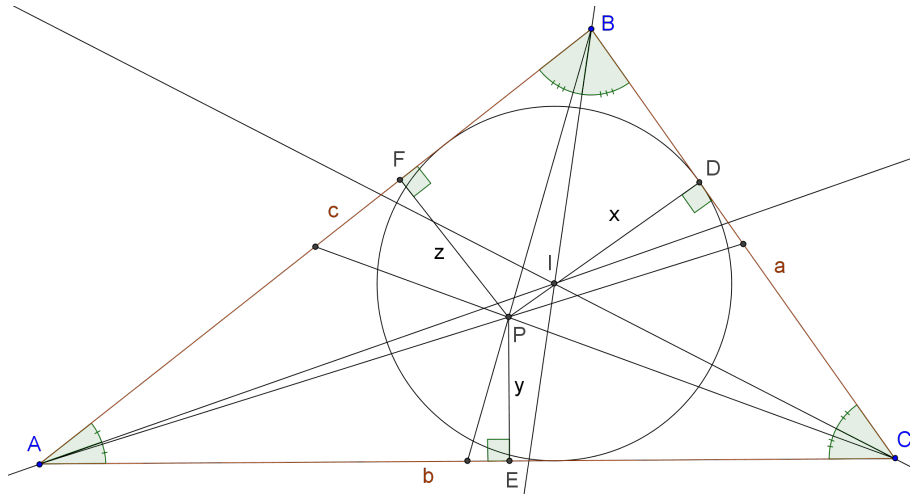
LEMMA 2.1. *Kolmion sisäisten kulmanpuolittajien leikkauspisteen trilineaarit ovat  $1 : 1 : 1$ .*

TODISTUS. Koska kulmanpuolittajalla sijaitsevat pisteet ovat yhtä kaukana puolittamansa kulman sivuista, ovat ne kolmion tapauksessa yhtä kaukana kahdesta kolmion sivusta. Kolmion kahden kulmanpuolittajan leikkauspiste sijaitsee yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista, jolloin myös kolmas kulmanpuolittaja kulkee saman pisteen kautta. Koska kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste sijaitsee yhtä kaukana kolmion kaikista sivuista, on se tällöin myös sen ympyrän keskipiste, jonka tangentteja ovat kaikki kolmion sivut, ts. kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste (eng. *incenter*) (ks. kuva 2.2.1). Koska etäisyys kulman puolittajien leikkauspisteestä kolmion jokaiseen sivuun on sama, niin tämän pisteen trilineaarit ovat  $1 : 1 : 1$ .  $\square$

Kulmanpuolittajien leikkauspisteen barysentriset koordinaatit ovat  $a : b : c$ .

### 2.2. Keskijanojen leikkauspiste

Kolmiossa keskijana kulkee kolmion yhdestä kärjestä sen vastakkaisen sivun keskipisteeseen. Näin ollen kolmiolla on kolme keskijanaa, jotka kaikki leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Keskijanojen leikkauspisteen olemassaolo voidaan todistaa



KUVA 2.2.1. Kolmion  $\triangle ABC$  painopiste  $P$  ja kulman puolittajien leikkauspiste  $I$

mm. Cevan lauseen avulla (ks. [8] s.105-107). Keskijanojen leikkauspistettä kutsutaan myös kolmion painopisteeksi (eng. *centroid*).

LAUSE 2.2. Kolmion  $\triangle ABC$  painopisteen trilineaarit ovat

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}.$$

TODISTUS. Olkoon piste  $P$  kolmion  $\triangle ABC$  keskijanojen leikkauspiste ja  $x$ ,  $y$  ja  $z$  pisteen etäisyydet kolmion sivuihin kuten kuvassa 2.2.1. Tällöin kolmioiden  $\triangle ABP$ ,  $\triangle BCP$  sekä  $\triangle CAP$  pinta-alat ovat yhtä suuret ja keskijanojen leikkauspiste jakaa keskijanan suhteessa 2:1 [8] (s. 107-108). Tällöin on siis myös  $\frac{ax}{2} = \frac{by}{2} = \frac{cz}{2}$ . Tästä saadaan

$$\begin{cases} x = \frac{by}{a} = \frac{cz}{a} \\ y = \frac{ax}{b} = \frac{cz}{b} \\ z = \frac{ax}{c} = \frac{by}{c}, \end{cases}$$

jolloin siis  $\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ . Sinilauseesta saadaan  $a = (\sin A)2r$ , missä  $r$  on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Koska vastaavasti muille sivuille saadaan  $b = (\sin B)2r$  ja  $c = (\sin C)2r$ , voidaan koordinaattien yhteinen jakaja  $2r$  supistaa pois, jolloin saadaan

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C} = \csc A : \csc B : \csc C.$$

□

Keskijanojen leikkauspisteen barysentriset koordinaatit ovat 1 : 1 : 1.

### 2.3. Keskinormaalien leikkauspiste

Kolmiossa sivun keskinormaali kulkee kolmion sivun keskipisteen kautta leikaten sivua suorassa kulmassa. Keskinormaalin kaikki pisteet ovat yhtä kaukana kolmion kahdesta kärjestä, joten kahden keskinormaalin leikkauspisteen täytyy kuulua myös

kolmannelle keskinormaalille. Näin ollen kaikki kolme keskinormaalialle leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Koska keskinormaalien leikkauspiste on yhtä kaukana kolmion jokaisesta kärjestä, on tämä piste samalla myös kolmion jokaisen kärjen kautta kulkevan ympyrän eli kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste (eng. *circumcenter*).

LAUSE 2.3. *Kolmion  $\triangle ABC$  ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen trilineaarit ovat*

$$\cos A : \cos B : \cos C = a(b^2 + c^2 - a^2) : b(c^2 + a^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2).$$

TODISTUS. Olkoon piste  $P$  kolmion  $\triangle ABC$  keskinormaalien leikkauspiste ja olkoot  $x, y, z$  pisteen  $P$  etäisyydet kolmion sivuihin, kuten kuvassa 2.4.1. Koska piste  $P$  on myös kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste, on kulma  $\angle BPC$  keskuskulma kulmalle  $\angle BAC$ , jolloin  $\angle BPC = 2\angle BAC$ . Jana  $PD$  kuuluu selvästi janan  $BC$  keskinormaalille. Jana  $PD$  on myös selvästi kulman  $\angle BPC$  puolittaja, jolloin  $\angle BPD = \angle DPC = \angle BAC = \angle A$ . Tällöin on  $x = \overline{CP} \cos A$ . Samoin saadaan  $y = \overline{AP} \cos B$  ja  $z = \overline{BP} \cos C$ . Koska janat  $\overline{CP}$ ,  $\overline{AP}$  ja  $\overline{BP}$  ovat kolmion  $\triangle ABC$  ympäri piirretyn ympyrän säteitä, niin  $\overline{CP} = \overline{BP} = \overline{AP}$ , jolloin ne voidaan supistaa pois ja saadaan

$$\alpha : \beta : \gamma = \cos A : \cos B : \cos C.$$

Kosinilauseen avulla trilineaarit saadaan muokattua riippuviksi sivujen pituuksista, jolloin

$$\alpha : \beta : \gamma = \cos A : \cos B : \cos C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} : \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Kun vielä kerrotaan kaikki koordinaatit kaikkien sivujen pituuksien tulolla  $abc$ , niin trilineaarit saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= \cos A : \cos B : \cos C \\ &= abc \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : abc \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} : abc \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= a(b^2 + c^2 - a^2) : b(c^2 + a^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2), \end{aligned}$$

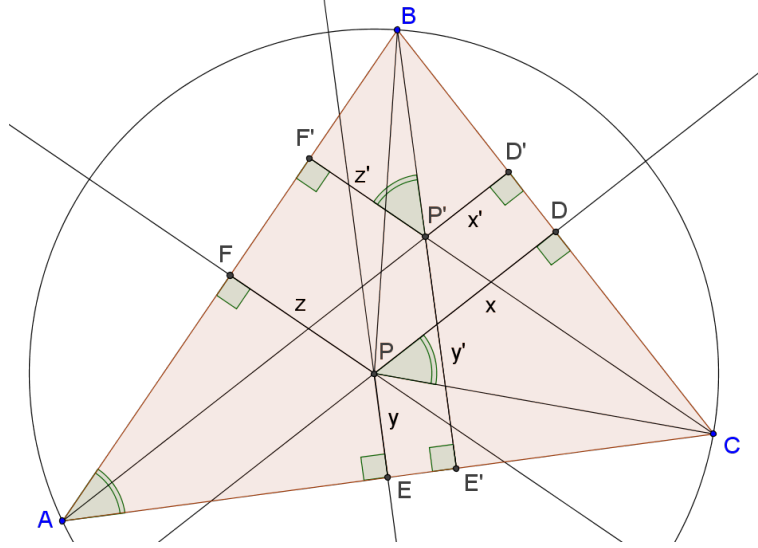
kun myös yhteinen jakaja 2 voidaan supistaa kaikista pois.  $\square$

Keskinormaalien leikkauspisteen barysentriset koordinaatit ovat

$$\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C.$$

## 2.4. Korkeusjanojen leikkauspiste

Kolmion korkeusjana kulkee kolmion kärjestä vastakkaiselle sivulle (tai sen jatkeelle) leikaten tätä suoraa suorassa kulmassa. Kolmion kaikkia korkeusjanoja vastaavat suorat kulkevat saman pisteen kautta. Tätä leikkauspistettä kutsutaan ortokeskukseksi. Teräväkulmaisessa kolmiossa ortokeskus on kolmion sisällä, suorakulmaisessa kolmiossa suoran kulman kärjessä ja tylppäkulmaisessa kolmiossa kolmion ulkopuolella. Kaikkien korkeusjanoja vastaavien suorien leikkauspisteen olemassaolo voidaan osoittaa kolmion ja sen antikomplementtisen kolmion (ks. kohta 4.2) avulla. Nämä kolmiot ovat yhdenmuotoiset ja niiden vastinsivut yhdensuuntaiset. Tällöin alkuperäisen kolmion korkeusjanat sijaitsevat sen antikomplementtisen kolmion keskinormaaleilla.



KUVA 2.4.1. Kolmion  $\triangle ABC$  keskinormaalien leikkauspiste  $P$  ja ortokeskus  $P'$

Kohdan 2.3 nojalla keskinormaalien leikkauspiste on olemassa, joten myös korkeusjanat (tai niiden jatkeet) leikkaavat toisensa myös yhdessä pisteessä, ortokeskuksessa (eng. *orthocenter*).

LAUSE 2.4. Kolmion  $\triangle ABC$  ortokeskuksen trilineaarit ovat

$$\sec A : \sec B : \sec C = \frac{1}{a(b^2 + c^2 - a^2)} : \frac{1}{b(c^2 + a^2 - b^2)} : \frac{1}{c(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

TODISTUS. Olkoon piste  $P'$  kolmion  $\triangle ABC$  ortokeskus ja olkoot  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  pisteen  $P'$  etäisyydet kolmion sivuihin, kuten kuvassa 2.4.1. Kulmat  $\angle BP'F'$  ja  $\angle CP'E'$ ,  $\angle AP'F'$  ja  $\angle CP'D'$  sekä  $\angle AP'E'$  ja  $\angle BP'D'$  ovat yhtenevät ristikulmina. Nyt suorakulmaisissa kolmioissa  $\triangle BP'F'$  ja  $\triangle CP'E'$  on kaksi yhtenevää kulmaa, joten myös kolmansien kulmien täytyy olla yhtenevät eli  $\angle F'BP' \cong \angle E'CP'$ . Samoin pätee  $\angle F'AP' \cong \angle D'CP'$  sekä  $\angle D'BP' \cong \angle E'AP'$ . Tarkastelemalla edelleen kolmiota  $\triangle BE'A$  sekä  $\triangle CE'P'$  huomataan niiden yhdenmuotoisuus, jolloin  $\angle F'P'B \cong \angle E'P'C \cong \angle A$ . Samoin pätee  $\angle F'P'A \cong \angle D'P'C \cong \angle B$  sekä  $\angle D'P'B \cong \angle E'P'A \cong \angle C$ . Tarkastelemalla kulmia pisteessä  $P'$  saadaan

$$(2.1) \quad \begin{cases} \cos A &= \frac{y'}{P'C} = \frac{z'}{P'B} \\ \cos B &= \frac{x'}{P'C} = \frac{z'}{P'A} \\ \cos C &= \frac{x'}{P'B} = \frac{y'}{P'A}. \end{cases}$$

Tästä saadaan edelleen

$$\begin{cases} \frac{\cos AP'C}{\cos C} = \frac{y'}{\cos C} = \frac{P'A}{\cos B} = \frac{z'}{\cos B} = \frac{\cos AP'B}{\cos B} \\ \frac{\cos BP'C}{\cos C} = \frac{x'}{\cos C} = \frac{P'B}{\cos A} = \frac{z'}{\cos A} = \frac{\cos BP'A}{\cos A} \\ \frac{\cos CP'A}{\cos A} = \frac{y'}{\cos C} = \frac{P'C}{\cos B} = \frac{x'}{\cos B} = \frac{\cos CP'B}{\cos B}, \end{cases}$$

jolloin  $\overline{P'A} : \overline{P'B} : \overline{P'C} = \cos A : \cos B : \cos C$ . Yhtälöryhmästä (2.1) saadaan myös  $x' = \frac{y'P'B}{P'A} = \frac{z'P'C}{P'A}$  ja edelleen  $x'P'A = y'P'B = z'P'C = k$ , missä  $k \in \mathbb{R}$ . Tällöin

pätee  $x' : y' : z' = \frac{k}{P'A} : \frac{k}{P'B} : \frac{k}{P'C}$ , jolloin

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C} = \sec A : \sec B : \sec C.$$

Ortokeskuksen trilineaarit sivujen funktioina saadaan kosinilauseesta samaan tapaan kuin keskinormaalien leikkauspisteen tapauksessa, jolloin

$$\alpha : \beta : \gamma = \sec A : \sec B : \sec C = \frac{1}{a(b^2 + c^2 - a^2)} : \frac{1}{b(c^2 + a^2 - b^2)} : \frac{1}{c(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

□

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen ja ortokeskuksen trilineaarit ovat siis toistensa suhteellisia käänteislukuja. Tällöin ne ovat toistensa isogonaaliset konjugaatit (ks. kohta 4.5). Kolmion ortokeskuksen barysentriset koordinaatit ovat

$$\tan A : \tan B : \tan C.$$

## Merkkillinen piste

Edellisessä luvussa esiteltiin jo antiikin aikana tunnetut merkilliset pisteet. Onko olemassa muita merkillisiä pisteitä? Edellä esiteltyjen pisteiden trilineaareja tarkastelemalla havaitaan nopeasti, että näiden pisteiden kaikki kolme koordinaattia vaikuttavat keskenään samankaltaisilta. Onko niillä myös jotain muuta yhteistä? Kimberling esittää artikkeleissaan [5] ja [7], miten trilineaaristen koordinaattien avulla voidaan täsmällisesti määrittellä, mitä ominaisuuksia vaaditaan pisteeltä, että sitä voidaan kutsua merkilliseksi pisteeksi. Tämä luku perustuu kokonaisuudessaan edellä mainittuihin artikkeleihin.

Esitetään kolmion pisteet trilineaaristen koordinaattien avulla kolmion sivujen funktioina. Olkoon  $\mathbf{T}$  joukko kaikista kolmikoista  $(a, b, c)$ , missä  $a, b$  ja  $c$  ovat reaali-lukuisia kolmion sivujen pituuksia, ts. kolmioepäyhtälön nojalla

$$\mathbf{T} = \{(a, b, c) : 0 < a < b + c, 0 < b < c + a, 0 < c < a + b\}.$$

Piste  $P$  on ekvivalenssiluokka järjestetystä kolmikosta  $(f_1, f_2, f_3)$ , funktioista  $f_i : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , joista ainakin yksi on ei-nollafunktio. Funktio  $f_1$  tarkoittaa pisteen  $P$  etäisyyttä kolmion sivusta  $a$ , funktio  $f_2$  pisteen  $P$  etäisyyttä sivusta  $b$  ja funktio  $f_3$  pisteen  $P$  etäisyyttä sivusta  $c$ . Kaksi kolmikkoa  $(f_1, f_2, f_3)$  ja  $(g_1, g_2, g_3)$  ovat ekvivalentit, mikäli

- (i)  $g_i = 0$ , jos ja vain jos  $f_i = 0$ , missä  $i = 1, 2, 3$  ja
- (ii)  $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3}$ , kun  $g_1, g_2$  ja  $g_3$  eivät ole nollia.

Tason pisteet voidaan tämän esityksen myötä mieltää kolmioon pohjautuviksi funktioiksi, ei vain ainoastaan pisteiksi tasolla. Vaikka määrittelyssä on taustalla geometria ja tutkittavat tapaukset ovat usein geometrisia, antaa pisteiden määrittely funktioiksi mahdollisuuden käsitellä tapauksia algebrallisesti. Tämän esityksen avulla voidaan antaa määritelmä merkilliselle pisteelle, jolloin voidaan määrittellä, millainen piste on riittävän merkillinen ollakseen merkillinen piste.

Merkitään jotakin tutkittavaa pistettä seuraavasti

$$P = \alpha : \beta : \gamma = f(a, b, c) : g(a, b, c) : h(a, b, c).$$

Piste  $\hat{f}(a, b, c) : \hat{g}(a, b, c) : \hat{h}(a, b, c)$  on *merkillinen piste* (eng. *triangle center*), jos on olemassa funktio  $(f_1, f_2, f_3)$  seuraavin ehdoin:

$$(F1) \hat{f}(a, b, c) : \hat{g}(a, b, c) : \hat{h}(a, b, c) = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b);$$

$$(F2) f(a, b, c) = f(a, c, b);$$

$$(F3) f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c), \text{ jollekin } n \in \mathbb{N} \text{ kaikilla } t > 0.$$

Nämä ehdot ovat nimeltään substituutio(F1), symmetria(F2) ja homogeenisuus(F3). Tarkennetaan seuraavaksi vielä hieman sitä, mitä nämä ehdot todella tarkoittavat.

Substituutio vaatii saman asian tekemistä samalla tavalla toisessa paikassa. Merkillisen pisteen määrittävien funktioiden täytyy olla samat kolmion jokaiselta sivulta.



Esimerkiksi painopistettä määrittäessä tämä funktio on jana yhden sivun keskipisteestä kyseisen sivun vastakkaiseen kulmaan, joka toistuu jokaisen sivun kohdalla.

Symmetria  $f(a, b, c) = f(a, c, b)$   $b$ :n ja  $c$ :n suhteen tarkoittaa, että kärkien  $B$  ja  $C$  tai janojen  $a$  ja  $b$  ”roolit” ovat vaihdettavissa. Yksinkertaistettuna tämä tarkoittaa esimerkiksi sitä, että keskijanan konstruktio kärjestä  $A$  sivuun  $BC$  on sama kuin keskijanan konstruktio kärjestä  $A$  sivuun  $CB$ .

Homogeenisuus takaa sen, että yhdenmuotoisilla kolmioilla on samat merkilliset pisteet. Olkoon kolmio  $\triangle B = B_1B_2B_3$  yhdenmuotoinen kolmion  $\triangle A = A_1A_2A_3$  kanssa siten, että jollekin  $t > 0$   $B$ :n sivun pituudet ovat  $ta_1$ ,  $ta_2$  ja  $ta_3$ . Mikäli funktio  $f$  muodostaa jonkin kolmion  $\triangle A$  merkillisen pisteen  $P$ , niin kolmiossa  $\triangle A$ ,  $P = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$ , jolloin kolmiossa  $\triangle B$ ,  $P = f(ta, tb, tc) : f(tb, tc, ta) : f(tc, ta, tb)$ , jonka homogeenisuus muuttaa muotoon  $P = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$ . Täten merkillisen pisteen  $P$  etäisyydet kolmion sivuihin ovat samassa suhteessa.

Ehto symmetriasta vaikuttaa itsestään selvältä, mutta esimerkiksi Brocardin pisteet toteuttavat substituution ja homogeenisuuden, mutta eivät yleisesti toteuta symmetriaehtoa. Kimberlingin [5] mukaan Brocardin pisteet ovat ainoat tällaiset tunnetut pisteet. Piste  $P$ , jolle on voimassa  $\angle ABP \cong \angle BCP \cong \angle CAP$  tai  $\angle BAP \cong \angle CBP \cong \angle ACP$ , on Brocardin piste. Yhteinen kulma, nimeltään Brocardin kulma, on  $\delta$ , jolle  $\cot \delta = \cot A + \cot B + \cot C$ . Brocardin pisteiden trilineaarit ovat  $\frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$  ja  $\frac{b}{c} : \frac{c}{a} : \frac{a}{b}$ . Mikäli symmetria toteutuisi Brocardin pisteen tapauksessa, täytyisi olla  $\angle CBP \cong \angle BCP$ , jolloin olisi  $\angle CBP \cong \angle ABP$  ja  $\angle BCP \cong \angle ACP$  eli  $\angle B \cong \angle C$  ja edelleen  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ . Brocardin pisteet toteuttavat symmetrian siis ainoastaan, kun kolmio on tasasivuinen, mutta silloin Brocardin piste on myös kaikki klassiset merkilliset pisteet.

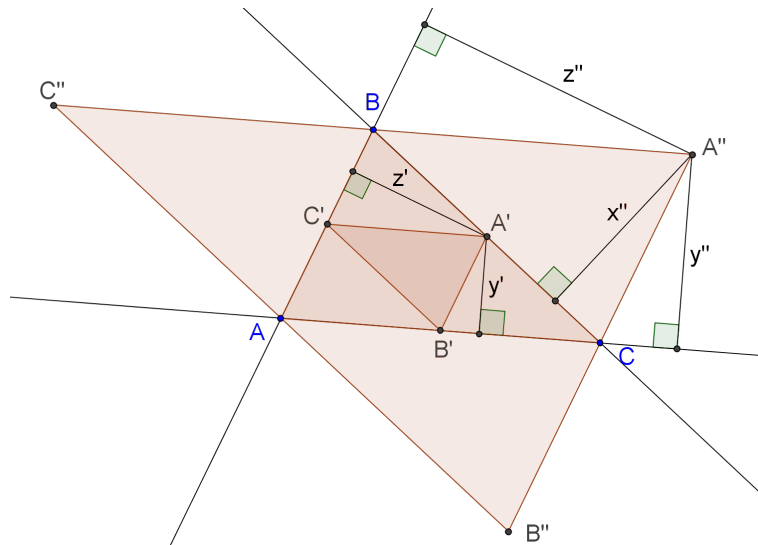
## Erityisiä kolmioita

Tässä luvussa esitellään muutama erityinen kolmio, joilla on alkuperäiseen kolmioon  $\triangle ABC$  perustuva vakiintunut nimi ja joihin viitataan myöhemmin tässä kirjoittelussa. Kunkin kolmion kohdalla myös esitellään sekä johdetaan näiden kolmioiden kärkipisteiden trilineaariset koordinaatit suhteessa alkuperäiseen kolmioon. Kolmioiden nimet ja niiden kärkipisteiden trilineaarit ovat peräisin Kimberlingiltä [5]. Omaa työtäni on kärkipisteiden trilineaarien johtaminen ja ulkokeskuskolmion sivujen laskeminen sekä nimien suomentaminen.

### 4.1. Keskinen kolmio

Kolmio  $\triangle A'B'C'$  on kolmion  $\triangle ABC$  *keskinen kolmio* (eng. *medial triangle*), kun sen kärjet  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$  ovat sivujen  $BC$ ,  $AC$  ja  $AB$  keskipisteet (ks. kuva 4.1.1). Keskinen kolmio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kolmion kanssa ja näiden kolmioiden vastinsivut ovat yhdensuuntaiset. Tällöin alkuperäisen kolmion sisälle muodostuvat neljä pienempää ja keskenään yhtä suurta kolmiota  $\triangle AB'C'$ ,  $\triangle BA'C'$ ,  $\triangle CA'B'$  sekä keskinen kolmio  $\triangle A'B'C'$ , ovat yhdenmuotoiset alkuperäisen kolmion kanssa ja niiden pinta-ala on neljäsosa alkuperäisen kolmion pinta-alasta.

LEMMA 4.1. *Keskisen kolmion kärkien trilineaarit ovat  $A' = 0 : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ ,  $B' = \frac{1}{a} : 0 : \frac{1}{c}$  ja  $C' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : 0$ .*



KUVA 4.1.1. Kolmion  $\triangle ABC$  keskinen kolmio  $\triangle A'B'C'$  ja anti-komplementtinen kolmio  $\triangle A''B''C''$

TODISTUS. Pisteiden  $A'$  ensimmäinen koordinaatti on luonnollisesti 0, sillä se sijaitsee sivulla  $a$ . Pisteiden  $A'$  etäisyys  $y'$  sivuun  $b$  on kolmion  $\triangle A'B'C'$  korkeus, jolloin saadaan

$$\frac{1}{2}by' = \frac{1}{2}A_{\triangle ABC} \Leftrightarrow y' = \frac{A_{\triangle ABC}}{b}. \text{ Samoin etäisyydeksi } z' \text{ sivuun } c \text{ saadaan}$$

$$\frac{1}{2}cz' = \frac{1}{2}A_{\triangle ABC} \Leftrightarrow z' = \frac{A_{\triangle ABC}}{c}.$$

Jakamalla yhteinen tekijä  $A_{\triangle ABC}$  pois saadaan pisteiden  $A'$  trilineaareiksi  $0 : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ . Samaan tapaan saadaan muut keskisen kolmion kärkipisteiden trilineaarit, jolloin

$$(4.1) \quad A' = 0 : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}, \quad B' = \frac{1}{a} : 0 : \frac{1}{c}, \quad C' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : 0.$$

Mikäli pisteiden  $A'$  trilineaarit kerrotaan termillä  $bc$ , saadaan trilineaarit hieman yksinkertaisempaan muotoon  $A' = 0 : c : b$ . Samoin saadaan  $B' = c : 0 : a$  ja  $C' = b : a : 0$ . Käytössä ovat kuitenkin kohdan (4.1) muodot, sillä siinä koordinaatti sivuun  $a$  saadaan riippuvaksi sivusta  $a$  ja samoin muille sivuille.  $\square$

## 4.2. Antikomplementtinen kolmio

Kolmio  $\triangle A''B''C''$  on kolmion  $\triangle ABC$  *antikomplementtinen kolmio* (eng. *anticomplementary triangle*), kun kolmio  $\triangle ABC$  on kolmion  $\triangle A''B''C''$  keskinen kolmio (ks. kuva 4.1.1). Keskisen ja antikomplementtisen kolmion keskijanat leikkaavat samassa pisteessä kuin alkuperäisen kolmion keskijanat.

LEMMA 4.2. *Antikomplementtisen kolmion kärkien trilineaarit ovat  $A'' = -\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ ,  $B'' = \frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : \frac{1}{c}$  ja  $C'' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : -\frac{1}{c}$ .*

TODISTUS. Todistus menee vastaavaan tapaan kuin keskisen kolmion tapauksessa. Kärjen  $A''$  trilineaareja määritettäessä huomataan, että sen etäisyydet  $x''$ ,  $y''$  ja  $z''$  sivuja  $BC$ ,  $AC$  ja  $AB$  vastaavista suorista ovat kolmion  $\triangle A''BC$  korkeusjanoja, jolloin nämä etäisyydet voidaan ilmaista kolmion  $\triangle A''BC$  pinta-alan avulla, kuten keskisen kolmion kohdalla. Koska piste  $A''$  on kärkeen  $A$  nähden kolmion ulkopuolella ja koska  $\triangle A''BC \sim \triangle ABC$ , niin saadaan  $A'' = -\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ . Vastaavasti saadaan kärjet  $B''$  ja  $C''$ , joten

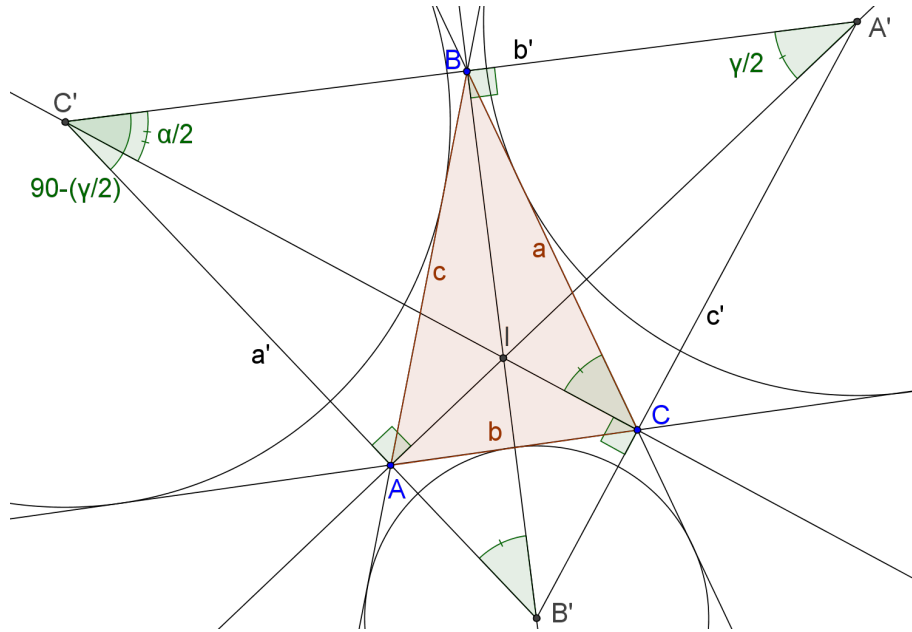
$$A'' = -\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}, \quad B'' = \frac{1}{a} : -\frac{1}{b} : \frac{1}{c}, \quad C'' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : -\frac{1}{c}.$$

$\square$

## 4.3. Ulkokeskuskolmio

Kolmio  $\triangle A'B'C'$  on kolmion  $\triangle ABC$  *ulkokeskuskolmio* (eng. *excentral triangle*), kun sen kärjet  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$  ovat kolmion  $\triangle ABC$  ulkokeskuksia (ks. kuva 4.3.1). Kolmiota  $\triangle A'B'C'$  kutsutaan myös kolmion  $\triangle ABC$  *kolmitangenttiseksi kolmioksi* (eng. *tritanget triangle*). Ulkokeskus (eng. *excenter*) on kolmion ulkopuolella olevan ympyrän keskipiste, jonka tangentteja ovat kolmion yksi sivu ja kahden muun sivun jatkeet. Olkoon  $A'$  se ulkokeskus, joka on kolmion ulkopuolella kärkeen  $A$  nähden. Ulkokeskukset  $B'$  ja  $C'$  määritellään vastaavasti.

LEMMA 4.3. *Ulkokeskuskolmion trilineaarit ovat  $A' = -1 : 1 : 1$ ,  $B' = 1 : -1 : 1$  ja  $C' = 1 : 1 : -1$ .*



KUVA 4.3.1. Kolmion  $\triangle ABC$  ulkokeskuskolmio  $\triangle A'B'C'$

TODISTUS. Koska ympyrät, joiden keskipisteitä ulkokeskuksuet ovat, sivuavat kolmion yhtä sivua ja kahden sivun jatketta, on ulkokeskus yhtä kaukana kolmion jokaisesta sivusta vastaavasta suorasta. Koska ulkokeskus on kolmion yhden sivun ulkopuolella, on yksi koordinaatti negatiivinen.

$$A' = -1 : 1 : 1, \quad B' = 1 : -1 : 1, \quad C' = 1 : 1 : -1.$$

□

Kolmion ulkokeskuksessa leikkaavat yhden kulman kolmion sisäinen kulmanpuolittaja sekä kahden muun kulman kolmion ulkoiset kulmanpuolittajat. Esimerkiksi ulkokeskus  $A'$ , joka sijaitsee kolmion ulkopuolella kärkeen  $A$  nähden, on yhtä kaukana sivujen  $b$  sekä  $c$  jatkeista eli se sijaitsee kärjen  $A$  kautta kulkevalla kolmion sisäisellä kulmapuolittajalla. Kärjen  $C$  kautta kulkevan kolmion ulkoisen kulmanpuolittajan pisteet sijaitsevat yhtä kaukana kolmion sivusta  $a$  ja sivun  $b$  jatkeesta sekä vastavasti sivusta  $b$  ja sivun  $a$  jatkeesta. Koska myös ulkokeskus  $A'$  sijaitsee yhtä kaukana sivusta  $a$  sekä sivun  $b$  jatkeesta, sijaitsee se myös kärjen  $C$  kautta kulkevalla kolmion ulkoisella kulmanpuolittajalla. Sama päättely voidaan toistaa kärjen  $B$  kanssa, joten ulkokeskuksuet sijaitsevat kolmion yhden sisäisen kulmanpuolittajan ja kahden ulkoisen kulmanpuolittajan leikkauspisteessä. Koska kaksi ulkoista kulmanpuolittajaa leikkaavat yhdessä pisteessä, kulkee yksi ulkoinen kulmanpuolittaja kahden ulkokeskuksen kautta. Täten kolmion ulkoiset kulmanpuolittajat muodostavat kolmion ulkokeskuskolmion sivut.

Johdetaan seuraavaksi, miten ulkokeskuskolmion sivuja  $a'$ ,  $b'$  ja  $c'$  voidaan merkitä alkuperäisen kolmion sivujen ja kulmien funktioina. Kolmion sisäinen ja ulkoinen kulmanpuolittaja ovat toistensa normaaleja. Jos sisäinen kulmanpuolittaja puolittaa kulman  $A$ , niin ulkoinen kulmanpuolittaja puolittaa kulman  $180^\circ - A$ . Tällöin

näiden kahden kulmanpuolittajan väliin jäävä kulma on suuruudeltaan näiden kahden puolikkaan kulman summa, ts.  $\frac{A}{2} + (90^\circ - \frac{A}{2}) = 90^\circ$ . Kolmiossa  $\triangle ABC'$  kulman  $\angle BAC'$  suuruus on tällöin  $90^\circ - \frac{A}{2}$  ja samaten  $\angle ABC' = 90^\circ - \frac{B}{2}$ . Tällöin  $\angle AC'B = 180^\circ - (90^\circ - \frac{A}{2}) - (90^\circ - \frac{B}{2}) = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$ . Koska  $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$ , niin  $\angle AC'B = 90^\circ - \frac{C}{2}$ . Samoin saadaan  $\angle BA'C = 90^\circ - \frac{A}{2}$  ja  $\angle AB'C = 90^\circ - \frac{B}{2}$ . Suorakulmaisesta kolmiosta  $\triangle C'AA'$  saadaan  $\angle C'A'A = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \frac{C}{2}) = \frac{C}{2}$ . Samoin saadaan  $\angle C'B'B = \frac{C}{2}$  ja  $\angle CC'A = \frac{A}{2}$ . Kolmiosta  $\triangle C'CB$  saadaan sinilauseen perusteella  $\frac{a}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{C'B}{\sin \frac{C}{2}}$  ja kolmiosta  $\triangle BB'C'$  samoin sinilauseen perusteella  $\frac{C'B}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{a'}{\sin 90^\circ} = a'$ , jolloin saadaan ulkokeskuskolmion sivun pituudeksi  $a' = \frac{C'B}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{a}{\sin \frac{A}{2}}$ . Samoin sivujen  $b'$  ja  $c'$  pituudeksi saadaan  $b' = \frac{b}{\sin \frac{B}{2}}$  ja  $c' = \frac{c}{\sin \frac{C}{2}}$ .

#### 4.4. Pedaalinen kolmio

Pisteen  $P$  *pedaaliseksi kolmioksi* (eng. *pedal triangle*) sanotaan sellaista kolmiota  $\triangle A'B'C'$ , jonka kärkipisteitä ovat kolmion  $\triangle ABC$  sivuilla pisteen  $P$  koordinaattipisteet (ks. kuva 4.5.1).

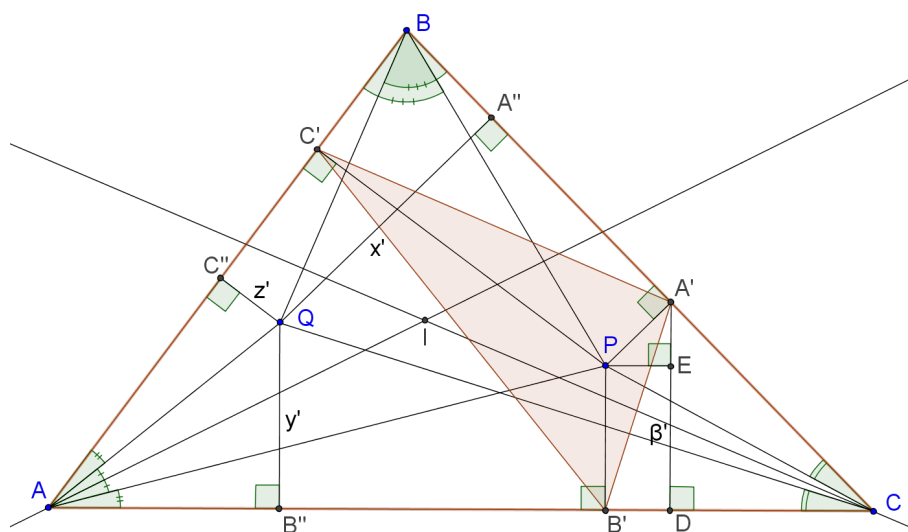
LEMMA 4.4. *Oletetaan, että pisteen  $P$  trilineaarit ovat  $\alpha : \beta : \gamma$ . Tällöin pisteen  $P$  pedaalisen kolmion kärkipisteiden trilineaarit ovat*

$$(4.2) \quad \begin{aligned} A' &= 0 : \beta + \alpha \cos C : \gamma + \alpha \cos B, \\ B' &= \alpha + \beta \cos C : 0 : \gamma + \beta \cos A \quad \text{ja} \\ C' &= \alpha + \gamma \cos B : \beta + \gamma \cos A : 0. \end{aligned}$$

TODISTUS. Oletetaan aluksi, että piste  $P$  sijaitsee kolmion sisällä. Merkitään  $A' = \alpha' : \beta' : \gamma'$ . Piste  $A'$  sijaitsee sivulla  $BC$ , joten  $\alpha' = 0$ . Koska piste  $P$  on kolmion sisällä, niin  $\beta' > \beta$ . Olkoon piste  $D$  pisteen  $A'$  koordinaattipiste sivulla  $AC$  ja olkoon piste  $E$  janalla  $DA'$  siten, että kulma  $\angle PEA'$  on suora. Koska  $\beta' \parallel \beta$ , niin  $\beta' = \beta + \overline{EA'}$ . Koska  $\overrightarrow{DA'}$  on sivun  $AC$  normaali ja vastaavasti  $\overrightarrow{A'P}$  on sivun  $BC$  normaali, niin näiden suorien välinen kulma on yhtenevä kulman  $\angle ACB$  kanssa, ts.  $\angle ACB \cong \angle EA'P$ . Tällöin  $\overline{EA'} = \alpha \cos C$ , jolloin  $\beta' = \beta + \alpha \cos C$ . Vastaavasti saadaan  $\gamma' = \gamma + \alpha \cos B$  ja samaten pisteiden  $B'$  ja  $C'$  trilineaarit, jolloin pedaalisen kolmion kärkipisteiden trilineaareiksi saadaan kuten on yhtälössä (4.2):

$$\begin{aligned} A' &= 0 : \beta + \alpha \cos C : \gamma + \alpha \cos B, \\ B' &= \alpha + \beta \cos C : 0 : \gamma + \beta \cos A \quad \text{ja} \\ C' &= \alpha + \gamma \cos B : \beta + \gamma \cos A : 0. \end{aligned}$$

Mikäli piste  $P$  sijaitsee kolmion ulkopuolella kärkeen  $B$  nähden, on  $\beta > \beta'$ , jolloin pisteen  $A'$  toiseksi koordinaatiksi tulee  $\beta - |\alpha| \cos C = \beta + \alpha \cos C$ , sillä nyt  $|\alpha| = -\alpha$ . Mikäli pisteet  $B'$  ja  $C'$  ovat eri puolilla suoraa  $\overline{BC}$  kuin piste  $P$ , niin pisteen  $B'$  etäisyys suorasta, joka kulkee pisteen  $P$  kautta ja on yhdensuuntainen suoran  $\overline{BC}$  kanssa, on  $\beta \cos C$ . Pisteen  $B'$  etäisyys suorasta  $\overline{BC}$  on nyt  $\beta \cos C - \alpha$ . Koska  $\alpha$  on negatiivinen, niin pisteen  $B'$  ensimmäiseksi koordinaatiksi saadaan edelleen  $\beta + \alpha \cos C$  ja vastaavasti pisteelle  $C'$ .  $\square$



KUVA 4.5.1. Pisteen  $P$  isogonaalinen konjugaatti  $Q$  sekä pedaalinen kolmio  $\triangle A'B'C'$

#### 4.5. Isogonaalinen konjugaatti

Pisteellä  $P$  on kolmiossa  $\triangle ABC$  isogonaalinen konjugaatti, silloin kun piste  $P$  ei sijaitse jollakin kolmion sivuista. Isogonaalinen konjugaatti muodostuu siten, että suorat  $\overleftrightarrow{AP}$ ,  $\overleftrightarrow{BP}$  ja  $\overleftrightarrow{CP}$  peilataan sen kärjen sisäiseen kulmanpuolittajaan nähden, jonka kautta ne kulkevat. Nämä kolme peilattua suoraa leikkaavat toisensa pisteen  $P$  isogonaalisessa konjugaatissa  $P^{-1}$  (ks. kuva 4.5.1). Isogonaalisen konjugaatin merkitseminen pisteinä  $P^{-1}$  on seurausta isogonaalisen konjugaatin trilineaareista.

LAUSE 4.5. Jos pisteen  $P$  trilineaarit ovat  $P = \alpha : \beta : \gamma$ , niin sen isogonaalisen konjugaatin  $P^{-1}$  trilineaarit ovat  $P^{-1} = \alpha^{-1} : \beta^{-1} : \gamma^{-1}$ .

TODISTUS. Olkoon piste  $Q = x' : y' : z'$  pisteen  $P$  isogonaalinen konjugaatti ja olkoon piste  $I$  kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Määritelmästä seuraa, että  $\angle PAI \cong \angle IAQ$  ja samoin on kolmion muiden kärkien kohdalla. Koska  $\angle IAB \cong \angle IAC$ , niin on myös  $\angle PAB \cong \angle QAC$ . Samoin saadaan  $\angle PBA \cong \angle QBC$  ja  $\angle PCB \cong \angle QCA$ . Olkoot  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$  pisteen  $P$  koordinaattipisteet suorilla  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  ja  $\overleftrightarrow{AB}$  ja olkoot  $A''$ ,  $B''$  ja  $C''$  vastaavilla suorilla koordinaattipisteet pisteelle  $Q$ . Tällöin kolmiot  $\triangle QAC''$  ja  $\triangle PAB'$  ovat yhdenmuotoiset. Samoin on  $\triangle QBC'' \sim \triangle PBA'$  ja  $\triangle QCB'' \sim \triangle PCA'$ . Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan sivujen suhteiksi

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{y'} = \frac{CP}{CQ} = \frac{\beta}{x'} \\ \frac{\alpha}{z'} = \frac{BP}{BQ} = \frac{\gamma}{x'} \\ \frac{\beta}{z'} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\gamma}{y'}, \end{cases}$$

jolloin saadaan

$$(4.3) \quad \alpha x' = \beta y' = \gamma z' = k.$$

missä  $k \in \mathbb{R}$ . Tästä saadaan  $x' : y' : z' = \frac{k}{\alpha} : \frac{k}{\beta} : \frac{k}{\gamma}$ , josta voidaan yhteinen tekijä  $k$  supistaa pois, jolloin saadaan  $Q = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma} = \alpha^{-1} : \beta^{-1} : \gamma^{-1}$  eli  $Q = P^{-1}$ .  $\square$

## Todelliset trilineaariset etäisyydet

Trilineaariset koordinaatit ilmaisevat suhteellisen etäisyyden pisteestä kolmion joihinkin sivuun. Toisinaan on kuitenkin tarpeellista tietää, mikä on pisteen absoluuttinen etäisyys kolmion sivuihin. Tässä luvussa esitellään, miten tähän etäisyyteen päästään käsiksi, jos pisteen trilineaarit tiedetään. Pisteen absoluuttisia etäisyyksiä kolmion sivuihin kutsutaan *todellisiksi trilineaariksi etäisyyksiksi* (eng. *actual trilinear distances*). Luvun molemmat alakohdat 5.1 ja 5.2 perustuvat kokonaisuudessaan Whitworthin kirjaan [14] (s. 6-14).

### 5.1. Kolmion pinta-ala

i) Määritetään kolmion pinta-alan lauseke trilineaaristen koordinaattien mukaan. Oletetaan aluksi, että piste  $P$  sijaitsee kolmion  $\triangle ABC$  sisällä. Tällöin  $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle PBC} + A_{\triangle APC} + A_{\triangle ABP}$  ja  $\overline{BC} \cdot \overline{PA'} = ax' = 2A_{\triangle PBC}$ , jolloin  $ax' + by' + cz' = 2A_{\triangle ABC} \equiv 2\Omega$ . Muuttamalla etäisyydet  $x'$ ,  $y'$  ja  $z'$  trilineaariksi koordinaateiksi saadaan

$$(5.1) \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Omega.$$

ii) Oletetaan seuraavaksi, että piste  $P$  sijaitsee kolmion ulkopuolella siten, että yksi koordinaatti on negatiivinen ja olkoon se koordinaatti  $\alpha$ . Tällöin  $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ABP} + A_{\triangle APC} - A_{\triangle PBC}$ . Koska  $\alpha$  on negatiivinen, niin  $2A_{\triangle PBC} = -a\alpha$ , jolloin myöskin  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Omega$ .

iii) Oletetaan nyt, että piste  $P$  sijaitsee kolmion ulkopuolella siten, että kaksi koordinaattia ovat negatiivisia ja olkoot ne koordinaatit  $\alpha$  ja  $\beta$ . Tässä tapauksessa  $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ABP} - A_{\triangle APC} - A_{\triangle PBC}$ . Koska nyt  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat negatiivisia, niin  $2A_{\triangle PBC} = -a\alpha$  ja  $2A_{\triangle APC} = -b\beta$ , jolloin edelleen saadaan  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Omega$ .

Näin ollen, olivatpa  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  minkä pisteen koordinaatteja tahansa, on pinta-alan yhtälö  $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Omega$  voimassa. Sinilauseen avulla pinta-alan yhtälö saadaan muotoon

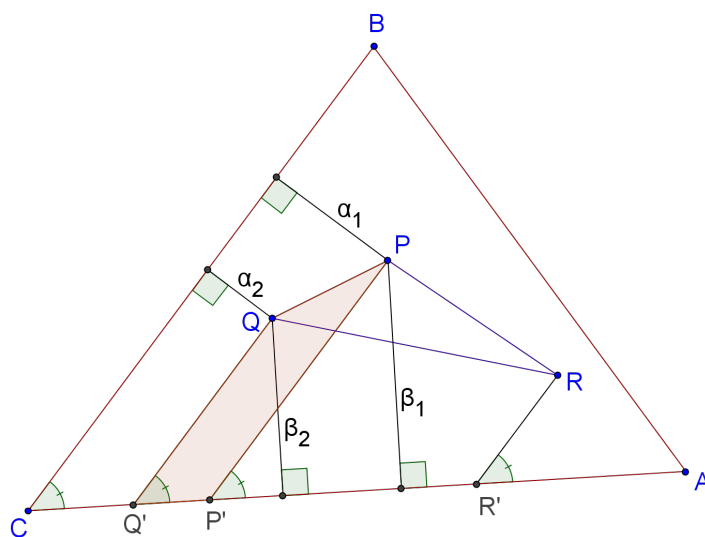
$$(5.2) \quad \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = \frac{\Omega}{r} \equiv S,$$

missä  $r$  on kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde. Tällöin saadaan  $r = \frac{\Omega}{S}$ , jolloin sinilauseesta saadaan edelleen

$$(5.3) \quad Sa = 2\Omega \sin A.$$

Tätä tulosta käytetään myöhemmin lauseen 6.5 todistuksessa.

Määritetään seuraavaksi kolmion  $\triangle PQR$  pinta-alan lauseke, kun kolmion kärkien trilineaariset koordinaatit ovat annettu. Olkoot  $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $Q = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  ja  $R = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$  kolmion kärkien trilineaarit ja olkoon  $A$  kolmion  $\triangle PQR$  pinta-ala.



KUVA 5.1.1. Kolmion pinta-ala

Tarkastellaan kolmiota  $\triangle PQR$  suhteessa siihen kolmioon, josta sen kärkien trilineaarit ovat muodostettu. Olkoon tämä kolmio  $\triangle ABC$ . Tällöin  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  ja  $\alpha_3$  ovat kärkipisteiden koordinaatteja suoralla  $\overleftrightarrow{BC}$  sekä  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  ja  $\beta_3$  suoralla  $\overleftrightarrow{AC}$ . Määritetään suoralla  $\overleftrightarrow{AC}$  pisteet  $P'$ ,  $Q'$  ja  $R'$  siten, että janat  $PP'$ ,  $QQ'$  ja  $RR'$  ovat yhdensuuntaisia sivun  $BC$  kanssa. Olkoon lisäksi kolmio  $\triangle PQR$  määritelty siten, että pisteet  $Q'$ ,  $P'$  ja  $R'$  ovat tässä järjestyksessä suoralla  $\overleftrightarrow{CA}$ . Tällöin kolmion  $\triangle PQR$  pinta-ala voidaan muodostaa lausekkeesta

$$A_{\triangle PQR} = A_{\square PQQ'P'} + A_{\square PRR'P'} - A_{\square QRR'Q'},$$

missä kaikki nelikulmiot ovat puolisuunnikkaita. Nelikulmion  $\square PQQ'P'$  sivu  $Q'P'$  sijaitsee siis suoralla  $\overleftrightarrow{AC}$  ja sen pituudeksi saadaan janojen  $Q'Q$  ja  $P'P$  välisen etäisyyden  $(\alpha_1 - \alpha_2)$  ja yhtenevyyden  $\angle P'Q'Q \cong \angle C$  avulla  $P'Q' = (\alpha_1 - \alpha_2) \csc C$ . Puolisuunnikkaan  $\square PQQ'P'$  keskikorkeudeksi saadaan  $\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$ , jolloin

$$A_{\square PQQ'P'} = \frac{1}{2} \csc C (\alpha_1 - \alpha_2) (\beta_1 + \beta_2). \text{ Samoin saadaan}$$

$$A_{\square PRR'P'} = \frac{1}{2} \csc C (\alpha_3 - \alpha_1) (\beta_3 + \beta_1) \text{ ja}$$

$$A_{\square QRR'Q'} = \frac{1}{2} \csc C (\alpha_3 - \alpha_2) (\beta_2 + \beta_3).$$

Mikäli jana  $PQ$  on yhdensuuntainen sivun  $BC$  kanssa, muodostuu nelikulmiosta  $\square PQQ'P'$  jana, jolloin sen pinta-ala on 0. Kolmion  $\triangle PQR$  pinta-ala muodostuu kuitenkin edelleen yhtälöstä  $\triangle PQR = \square PQQ'P' + \square PRR'P' - \square QRR'Q'$ . Samoin on silloin, jos jana  $PR$  on yhdensuuntainen janan  $BC$  kanssa. Mikäli jana  $QR$  on yhdensuuntainen sivun  $BC$  kanssa, niin vaihtamalla merkintöjä  $P \leftrightarrow R$  voidaan kolmion  $\triangle PQR$  pinta-ala edelleen laskea yhtälöstä  $\triangle PQR = \square PQQ'P' + \square PRR'P' - \square QRR'Q'$ .

Nyt voidaan laskea kolmion  $\triangle PQR$  pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\triangle PQR} &= \frac{1}{2} \csc C \{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_3 - \alpha_1)(\beta_3 + \beta_1) - (\alpha_3 - \alpha_2)(\beta_2 + \beta_3)\} \\ &= \frac{1}{2} \csc C \{\alpha_1(\beta_2 + \beta_3) + \alpha_2(\beta_3 + \beta_1) + \alpha_3(\beta_1 + \beta_2)\}, \end{aligned}$$



joka voidaan merkitä myös determinanttina muodossa

$$\frac{1}{2} \csc C \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Tämä muoto on riippuvainen vain jokaisen pisteen kahdesta ensimmäisestä koordinaatista. Tämän muodon avulla voidaan kuitenkin kehittää lauseke, joka on riippuvainen jokaisen pisteen kaikista koordinaateista.

$$\frac{1}{2} \csc C \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\csc C}{2S} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ S & S & S \end{vmatrix}.$$

Koska

$$S = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C,$$

niin kertomalla äskeisestä determinantista ensimmäinen rivi termillä  $\sin A$  ja toinen rivi termillä  $\sin B$  ja vähentämällä nämä kolmannelta rivistä, saadaan pinta-alan yhtälö muotoon

(5.4)

$$A = \frac{\csc C}{2S} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 \sin C & \gamma_2 \sin C & \gamma_3 \sin C \end{vmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

## 5.2. Todelliset trilineaariset etäisyydet

Edellä esitetty pinta-alan yhtälö (5.1) on tärkeä osa trilineaarisia koordinaatteja. Muokkaamalla yhtälö muotoon

$$(5.5) \quad \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{2\Omega} = 1,$$

saadaan sen avulla muokattua jokainen koordinaatit  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  sisältävä yhtälö homogeeniseksi korottamalla yhtälön jokainen termi samanasteiseksi kuin yhtälön korkein termi. Koska pinta-alan lausekkeen muodostuksessa oli kyseessä pisteen todellinen etäisyys kolmion sivuun, on yhtälö (5.5) voimassa ainoastaan, kun  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  ovat pisteen todelliset etäisyydet kolmion sivuista.

Pinta-alan yhtälön avulla voidaan myös määrittää pisteen  $P$  todelliset etäisyydet kolmion sivuista. Pisteen  $X = \alpha : \beta : \gamma$  todellisia etäisyyksiä vastaavista kolmion sivuista kutsutaan todellisiksi trilineaariksi etäisyyksiksi. Nämä etäisyydet ovat  $x = k\alpha$ ,  $y = k\beta$  sekä  $z = k\gamma$ , missä  $k = \frac{2\Omega}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ . Näin ollen, mikäli  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  ovat todelliset etäisyydet,  $k = 1$ , jolloin luonnollisesti on esim.  $x' = \alpha$ . Todellisia trilineaarisia etäisyyksiä käytetään myöhemmin mm. koordinaattimuunnosten yhteydessä luvussa 8.

## Suorat trilineaarilla koordinaateilla

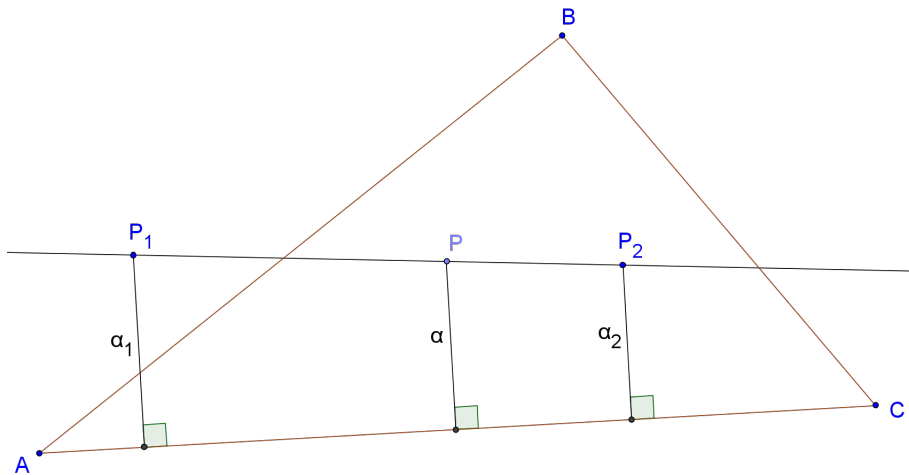
Trilineaaristen koordinaattien mukaan voidaan muodostaa myös suoria. Suorien yhtälöt eivät ole yksikäsitteisiä ja samalle suoralle voidaan määrittää useita erilaisia yhtälöitä, mikä johtuu pisteiden suhteellisesta esitystavasta. Suorien yhtälöiden muodostuminen perustuu lineaariseen algebraan ja geometriaan. Samalla voidaan tarkastella myös suorien yhdensuuntaisuutta ja leikkaavuuksia sekä kahden pisteen etäisyyttä ja pisteen etäisyyttä suorasta. Suoran yhtälö on poimittu Kimberlingiltä [5] ja sen johtamisessa on käytetty apuna Botteman julkaisua [1]. Ensimmäinen Eulerin suoran yhtälö on myös Kimberlingiltä [5], mutta sekä sen johtaminen, että kaksi muuta Eulerin suoran yhtälöä ovat itse tehtyjä. Suorien leikkauspisteet ja pisteen etäisyys toisesta pisteestä sekä suorasta perustuvat todistuksineen Whitworthin julkaisuun [14]. Muutamia välivaiheita olen viimeksi mainituista todistuksista laskenut itse auki.

### 6.1. Suoran yhtälö

Olkoon piste  $P$  pisteiden  $P_1$  ja  $P_2$  kautta kulkevalla suoralla  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$  ja olkoot näiden pisteiden trilineaarit suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$  siten, että

$$P = \alpha : \beta : \gamma, P_1 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 \text{ ja } P_2 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2.$$

1°: Oletetaan aluksi, että piste  $P$  on pisteiden  $P_1$  ja  $P_2$  välissä ja merkitään  $\frac{P_1P}{P_1P_2} = \lambda$ . Tällöin koordinaatin  $\alpha$  arvoksi saadaan  $\alpha = (1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2$ . Samaten muodostuu



KUVA 6.1.1. Suoran yhtälö

muut koordinaatit, jolloin pisteen  $P$  trilineaareiksi saadaan

$$\alpha : \beta : \gamma = [(1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2] : [(1 - \lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2] : [(1 - \lambda)\gamma_1 + \lambda\gamma_2].$$

Trilineaaristen koordinaattien homogeenisuuden nojalla on olemassa jokin  $k \neq 0$  siten, että

$$(6.1) \quad \begin{cases} k\alpha = (1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2 \\ k\beta = (1 - \lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2 \\ k\gamma = (1 - \lambda)\gamma_1 + \lambda\gamma_2. \end{cases}$$

Eliminoidaan yhtälöryhmästä  $\lambda$ .

$$\begin{cases} k\alpha = (1 - \lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2 & \parallel \cdot \beta_2\gamma_2 \\ k\beta = (1 - \lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2 & \parallel \cdot \alpha_2\gamma_2 \\ k\gamma = (1 - \lambda)\gamma_1 + \lambda\gamma_2 & \parallel \cdot \alpha_2\beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\alpha\beta_2\gamma_2 = (1 - \lambda)\alpha_1\beta_2\gamma_2 + \lambda\alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ k\beta\alpha_2\gamma_2 = (1 - \lambda)\beta_1\alpha_2\gamma_2 + \lambda\beta_2\alpha_2\gamma_2 \\ k\gamma\alpha_2\beta_2 = (1 - \lambda)\gamma_1\alpha_2\beta_2 + \lambda\gamma_2\alpha_2\beta_2 \end{cases}$$

Vähennetään ensimmäisen rivin yhtälö sekä toisen, että kolmannen rivin yhtälöstä. Näin viimeiset termit supistuvat pois.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} k\beta\alpha_2\gamma_2 - k\alpha\beta_2\gamma_2 = (1 - \lambda)(\beta_1\alpha_2\gamma_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2) \parallel \cdot (\gamma_1\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2) \\ k\gamma\alpha_2\beta_2 - k\alpha\beta_2\gamma_2 = (1 - \lambda)(\gamma_1\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2) \parallel \cdot -(\beta_1\alpha_2\gamma_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & (k\beta\alpha_2\gamma_2 - k\alpha\beta_2\gamma_2)(\gamma_1\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2) - (k\gamma\alpha_2\beta_2 - k\alpha\beta_2\gamma_2)(\beta_1\alpha_2\gamma_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_2) = 0 \\ \Leftrightarrow & k\beta\alpha_2\gamma_2\gamma_1\alpha_2\beta_2 - k\beta\alpha_2\gamma_2\alpha_1\beta_2\gamma_2 - k\alpha\beta_2\gamma_2\gamma_1\alpha_2\beta_2 + k\alpha\beta_2\gamma_2\alpha_1\beta_2\gamma_2 \\ & - k\gamma\alpha_2\beta_2\beta_1\alpha_2\gamma_2 + k\gamma\alpha_2\beta_2\alpha_1\beta_2\gamma_2 + k\alpha\beta_2\gamma_2\beta_1\alpha_2\gamma_2 - k\alpha\beta_2\gamma_2\alpha_1\beta_2\gamma_2 = 0 \\ \Leftrightarrow & k\alpha_2\beta_2\gamma_2[\alpha(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + \beta(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + \gamma(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)] = 0 \parallel \cdot \frac{1}{k\alpha_2\beta_2\gamma_2} \\ \Leftrightarrow & \alpha(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) - \beta(\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2) + \gamma(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) = 0, \end{aligned}$$

joka vastaa determinanttia

$$(6.2) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2°: Mikäli piste  $P_1$  on pisteiden  $P$  ja  $P_2$  välissä, saadaan  $\alpha$ -koordinaatin arvo lausekkeesta  $\alpha = \lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2$ , missä nyt  $\lambda = \frac{PP_2}{P_1P_2}$ . Vastaavasti saadaan muut koordinaatit, jolloin

$$\alpha : \beta : \gamma = [\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2] : [\lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2] : [\lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2].$$

Muodostamalla yhtälöryhmä kuten kohdassa (6.1) ja eliminoimalla siitä  $\lambda$  saadaan

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta_2\gamma_1 - \gamma_2\beta_1) - \beta(\alpha_2\gamma_1 - \gamma_2\alpha_1) + \gamma(\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1) = 0 \parallel \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow & \alpha(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) - \beta(\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2) + \gamma(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) = 0, \end{aligned}$$

joka siis vastaa kohdan (6.2) determinanttia. Kolmas tapaus, kun piste  $P_2$  on pisteiden  $P$  ja  $P_1$  välissä, saadaan johdettua vastaavaan tapaan merkintöjä vaihtamalla.

Suorien yhtälöitä merkitään jatkossa muodossa  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ , missä  $l$ ,  $m$  ja  $n$  vastaavat alideterminantteja

$$l = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, m = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}, n = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Suoran yhtälö voidaan määrittää myös kohdassa 5.1 määritetyn kolmion pinta-alan lausekkeen (5.4) kautta. Kolme pistettä osuvat samalle suoralle täsmälleen silloin, kun näiden pisteiden muodostaman kolmion pinta-ala on nolla. Tällöin pisteet  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  ja  $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$  ovat samalla suoralla, jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

## 6.2. Eulerin suora

Eulerin suora on tulos, joka osoittaa, että kolmion painopiste, ortokeskus ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste osuvat jokaisessa kolmiossa samalle suoralle. Kyseisten pisteiden kautta kulkevaa suoraa nimitetään Eulerin suoraksi. Koska suorien yhtälöt eivät ole yksikäsitteisiä, niin muodostetaan Eulerin suoran yhtälöt jokaisen näistä kolmesta pisteestä muodostetun pisteparin kautta. Ensimmäisessä kohdassa osoitetaan myös, että kolmas piste sijaitsee samalla suoralla.

**6.2.1. Eulerin suoran yhtälö painopisteen ja ortokeskuksen kautta.** Painopisteen trilineaarit ovat

$\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C} = \sin B \sin C : \sin A \sin C : \sin A \sin B$  ja ortokeskuksen  $\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C} = \cos B \cos C : \cos A \cos C : \cos A \cos B$ , jolloin Eulerin suoran yhtälö saadaan ratkaistua, kun ratkaistaan determinantti

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \sin B \sin C & \sin A \sin C & \sin A \sin B \\ \cos B \cos C & \cos A \cos C & \cos A \cos B \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \begin{vmatrix} \sin A \sin C & \sin A \sin B \\ \cos A \cos C & \cos A \cos B \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \sin B \sin C & \sin A \sin B \\ \cos B \cos C & \cos A \cos B \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \sin B \sin C & \sin A \sin C \\ \cos B \cos C & \cos A \cos C \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\sin A \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos A \cos C) - \beta(\sin B \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos B \cos C) + \gamma(\sin B \sin C \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos B \cos C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \sin A \cos A (\sin C \cos B - \sin B \cos C) - \beta \sin B \cos B (\sin C \cos A - \sin A \cos C) + \gamma \sin C \cos C (\sin B \cos A - \sin A \cos B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \frac{1}{2} \sin 2A \sin(C - B) - \beta \frac{1}{2} \sin 2B \sin(C - A) + \gamma \frac{1}{2} \sin 2C \sin(B - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \sin 2A \sin(B - C) + \beta \sin 2B \sin(C - A) + \gamma \sin 2C \sin(A - B) = 0.$$

Ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen trilineaarit ovat  $\cos A : \cos B : \cos C$ . Osoitetaan, että tämä piste kuuluu suoralle

$$\alpha \sin 2A \sin(B - C) + \beta \sin 2B \sin(C - A) + \gamma \sin 2C \sin(A - B) = 0.$$

Nyt siis  $\alpha : \beta : \gamma = \cos A : \cos B : \cos C$  eli osoitetaan, että yhtälö

$$\cos A \sin 2A \sin(B - C) + \cos B \sin 2B \sin(C - A) + \cos C \sin 2C \sin(A - B) = 0$$

toteutuu. Käytetään hyväksi tietoa  $A + B + C = 180^\circ$ , jolloin

$$\cos A = \cos(180^\circ - B - C) = -\cos(B + C)$$

ja

$$\begin{aligned} \cos A \sin 2A \sin(B - C) &= -\cos(B + C) \sin 2A \sin(B - C) \\ &= (-\cos B \cos C + \sin B \sin C) \sin 2A (\sin B \cos C - \cos B \sin C) \\ &= \sin 2A (-\cos^2 C \cos B \sin B + \cos^2 B \cos C \sin C \\ &\quad + \sin^2 B \sin C \cos C - \sin^2 C \sin B \cos B) \\ &= \sin 2A (-\sin B \cos B \underbrace{[\cos^2 C + \sin^2 C]}_{=1} \\ &\quad + \cos C \sin C \underbrace{[\cos^2 B + \sin^2 B]}_{=1}) \\ &= \sin 2A \left( \frac{1}{2} [\sin 2C - \sin 2B] \right). \end{aligned}$$

Samaten saadaan

$$\cos B \sin 2B \sin(C - A) = \sin 2B \left( \frac{1}{2} [\sin 2A - \sin 2C] \right)$$

ja

$$\cos C \sin 2C \sin(A - B) = \sin 2C \left( \frac{1}{2} [\sin 2B - \sin 2A] \right),$$

joten

$$\begin{aligned} &\cos A \sin 2A \sin(B - C) + \cos B \sin 2B \sin(C - A) + \cos C \sin 2C \sin(A - B) \\ &= \sin 2A \left( \frac{1}{2} [\sin 2C - \sin 2B] \right) + \sin 2B \left( \frac{1}{2} [\sin 2A - \sin 2C] \right) + \sin 2C \left( \frac{1}{2} [\sin 2B - \sin 2A] \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2A \sin 2C - \frac{1}{2} \sin 2A \sin 2B + \frac{1}{2} \sin 2B \sin 2A \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin 2B \sin 2C + \frac{1}{2} \sin 2C \sin 2B - \frac{1}{2} \sin 2C \sin 2A \\ &= 0. \end{aligned}$$

Näin saatiin osoitetuksi, että kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste sijaitsee painopisteen ja ortokeskuksen kautta kulkevalla suoralla.

Yllä oleva Eulerin suoran yhtälö, joka on määritetty painopisteen ja ortokeskuksen kautta, on Eulerin suoran yhtälöistä se, joka esiintyy kirjallisuudessa. Eulerin suoralle voidaan määrittää yhtälö myös muiden pisteiden kautta.

**6.2.2. Eulerin suoran yhtälö ortokeskuksen ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen mukaan.**

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \frac{1}{\cos A} & \frac{1}{\cos B} & \frac{1}{\cos C} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \alpha(\cos^2 B \cos A - \cos^2 C \cos A) - \beta(\cos^2 A \cos B - \cos^2 C \cos B) \\
&\quad + \gamma(\cos^2 A \cos C - \cos^2 B \cos C) = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \cos A(\cos^2 B - \cos^2 C) - \beta \cos B(\cos^2 A - \cos^2 C) \\
&\quad + \gamma \cos C(\cos^2 A - \cos^2 B) = 0.
\end{aligned}$$

**6.2.3. Eulerin suoran yhtälö painopisteen ja ympäri piirretyn ympyrän mukaan.** Määritetään Eulerin suora yhtälö myös sivujen pituuksien funktioina.

$$\begin{aligned}
&\left| \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ a(b^2 + c^2 - a^2) & b(c^2 + a^2 - b^2) & c(a^2 + b^2 - c^2) \end{array} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \left[ \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{b} - \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{c} \right] - \beta \left[ \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{a} - \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{c} \right] \\
&\quad + \gamma \left[ \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{a} - \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{b} \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha \frac{c^2(a^2 - c^2) - b^2(a^2 + b^2)}{bc} + \beta \frac{a^2(b^2 + a^2) - c^2(b^2 - c^2)}{ac} \\
&\quad + \gamma \frac{b^2(c^2 - b^2) - a^2(c^2 + a^2)}{ab} = 0.
\end{aligned}$$

### 6.3. Suorien leikkauspiste

Johdetaan seuraavaksi sen pisteen trilineaarit, joka on kahden annetun suoran leikkauspiste.

LAUSE 6.1. *Olkoot*

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0 \quad \text{ja} \quad l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0$$

*sellaisten suorien yhtälöt, jotka eivät ole yhdensuuntaiset. Tällöin näiden suorien leikkauspisteen trilineaarit ovat*

$$\alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

TODISTUS. Suorien leikkauspisteen täytyy sijaita molemmilla suorilla, joten leikkauspisteen trilineaarit toteuttavat yhtälöryhmän

$$(6.3) \quad \begin{cases} l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0 \\ l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0. \end{cases}$$

Kerrotaan  $n_2$  ylempään yhtälöön ja  $n_1$  alempaan ja eliminoidaan  $\gamma$ . Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
&\alpha(l_1n_2 - l_2n_1) = \beta(m_1n_2 - m_2n_1) \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha}{m_1n_2 - n_1m_2} = \frac{\beta}{n_1l_2 - l_1n_2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}}.
\end{aligned}$$

Eliminoimalla yhtälöryhmästä (6.3) vuorollaan myös  $\alpha$  ja  $\beta$ , saadaan

$$(6.4) \quad \frac{\alpha}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}} = \frac{\gamma}{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}},$$

josta seuraa

$$(6.5) \quad \alpha : \beta : \gamma = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

□

Muodosta (6.5) voidaan johtaa myös ehto milloin kaksi suoraa ovat yhdensuuntaiset. Koska

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{a\alpha}{a \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{b\beta}{b \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}} = \frac{c\gamma}{c \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}},$$

niin summaamalla kolmesta viimeisimmästä nimittäjästä ja osoittajista keskenään saadaan

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}},$$

jolloin saadaan

$$(6.6) \quad \alpha = \frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma) \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}.$$

Vastaavasti saadaan muille koordinaateille. Yhtälön (6.6) muodossa leikkauspisteen trilineaareja ei ole määritelty, kun koordinaattien yhteinen nimittäjä on nolla.

SEURAUUS 6.2. *Suorat*

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0 \quad \text{ja} \quad l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0$$

ovat yhdensuuntaiset, kun

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(m_1n_2 - n_1m_2) + b(n_1l_2 - l_1n_2) + c(l_1m_2 - m_1l_2) = 0,$$

kun  $(a, b, c) \in \mathbf{T}$ .

LAUSE 6.3. *Kolme eri suuntaista suoraa*

$$l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0, \quad l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0, \quad \text{ja} \quad l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma = 0$$

leikkaavat toisensa samassa pisteessä, jos ja vain jos

$$(6.7) \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

TODISTUS. 1°: Oletetaan ensin, että lauseessa mainitut kolme suoraa leikkaavat toisensa. Tällöin löytyy piste, joka toteuttaa jokaisen suoran yhtälön. Olkoon tämä piste  $P' = \alpha' : \beta' : \gamma'$ . Tällöin yhtälöryhmän

$$(6.8) \quad \begin{cases} l_1\alpha' + m_1\beta' + n_1\gamma' = 0 \\ l_2\alpha' + m_2\beta' + n_2\gamma' = 0 \\ l_3\alpha' + m_3\beta' + n_3\gamma' = 0 \end{cases}$$

ratkaisu antaa vastauksen. Kun eliminoidaan yhtälöryhmästä piste  $\alpha' : \beta' : \gamma'$ , saadaan ratkaisuksi

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2°: Oletetaan sitten, että yhtälö (6.7) toteutuu. Lineaarialgebran perusteella yhtälöryhmällä (6.8) on tällöin epätriviaali ratkaisu  $(\alpha' : \beta' : \gamma')$ , jolloin siis piste  $\alpha' : \beta' : \gamma'$  toteuttaa jokaisen yhtälöryhmän (6.8) suoran. Tällöin piste  $P'$  sijaitsee kaikilla näillä suorilla ja koska suorat olivat eri suoria, leikkaavat kyseiset suorat pisteessä  $P'$ .  $\square$

#### 6.4. Pisteiden etäisyys toisesta pisteestä sekä suorasta

Johdetaan seuraavaksi lausekkeet kahden pisteen välisen etäisyyden ja pisteen etäisyyden suorasta määrittämiseksi trilineaaristen koordinaattien avulla. Sitä varten tarvitaan ensin yksi aputulokset.

LAUSE 6.4. *Olkoot  $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  ja  $Q = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  pisteitä. Merkitään lisäksi*

$$L = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad N = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Tällöin saadaan

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\begin{vmatrix} b & c \\ M & N \end{vmatrix}} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\begin{vmatrix} c & a \\ N & L \end{vmatrix}} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\begin{vmatrix} a & b \\ L & M \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\Omega}.$$

TODISTUS.

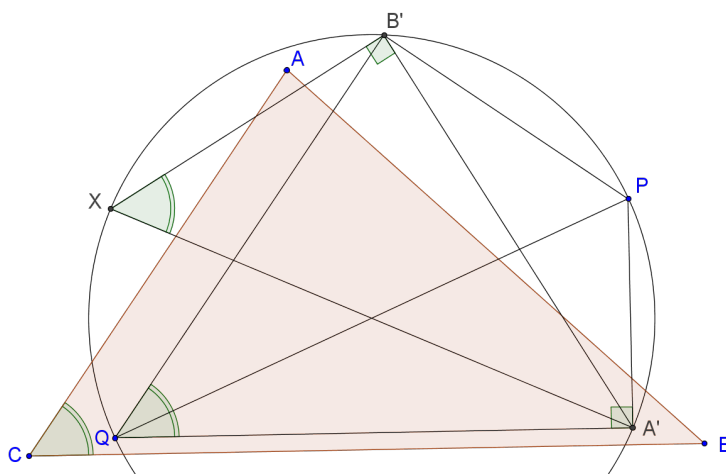
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c & a \\ N & L \end{vmatrix} &= c(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + a(\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2) \\ &= \beta_1(\alpha_2a + \gamma_2c) - \beta_2(\alpha_1a + \gamma_1c) + \beta_1b\beta_2 - \beta_2b\beta_1 \\ &= \beta_1(a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2) - \beta_2(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) \\ &= 2\Omega(\beta_1 - \beta_2), \end{aligned}$$

jolloin

$$\frac{1}{2\Omega} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\begin{vmatrix} c & a \\ N & L \end{vmatrix}}$$

$\square$





KUVA 6.4.1. Kahden pisteen välinen etäisyys

LAUSE 6.5. Kahden pisteen,  $P = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  ja  $Q = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  välinen etäisyys on

$$\frac{1}{S} \sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2LM \cos C},$$

missä  $S$  on määritelty kuten yhtälössä (5.2) ja  $L$ ,  $M$  ja  $N$  on määritelty kuten lauseessa 6.4.

TODISTUS. Olkoon pisteiden  $P$  ja  $Q$  välinen etäisyys  $\rho$  ja olkoon se myös ympyrän halkaisija. Olkoot janat  $QA'$  ja  $QB'$  ympyrän jänteet siten, että  $QA' \parallel CB$  ja  $QB' \parallel CA$ . määritetään lisäksi ympyrän kehältä piste  $X$  siten, että  $A'X$  on ympyrän halkaisija. Määritetään vielä jana  $XB'$ . Tällöin saadaan kosinilauseen nojalla

$$(6.9) \quad \overline{A'B'}^2 = \overline{PA'}^2 + \overline{PB'}^2 - 2\overline{PA'}\overline{PB'} \underbrace{\cos \angle A'PB'}_{=\cos(180-C)=-\cos C}.$$

Kulmat  $\angle A'QB'$  ja  $\angle A'XB'$  ovat yhtenevät, jolloin myös  $\angle A'XB' \cong \angle C$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &= \overline{A'X} \sin C \\ &= \overline{PQ} \sin C \\ &= \rho \sin C. \end{aligned}$$

Saadaan myös

$$\begin{aligned} \overline{PA'} &= \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{ja} \\ \overline{PB'} &= \beta_1 - \beta_2. \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä arvot yhtälöön (6.9), jolloin se saadaan muotoon

$$\rho^2 \sin^2 C = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \cos C.$$

Samoin saadaan

$$\rho^2 \sin^2 A = (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + 2(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \cos A \text{ ja}$$

$$\rho^2 \sin^2 B = (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + 2(\gamma_1 - \gamma_2)(\alpha_1 - \alpha_2) \cos B.$$

Lauseen 6.4 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
4\Omega^2\rho^2\sin^2 A &= \begin{vmatrix} c & a \\ N & L \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ L & M \end{vmatrix}^2 + 2\begin{vmatrix} c & a \\ N & L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ L & M \end{vmatrix} \cos A \\
&= (cL - aN)^2 + (aM - bL)^2 + 2(cL - aN)(aM - bL) \cos A \\
&= (cL)^2 - 2cLaN + (aN)^2 + (aM)^2 - 2aMbL + (bL)^2 \\
&\quad + 2(cLaM - cLbL - aNaM + aNbL) \cos A \\
&= a^2(N^2 + M^2 - 2NM \cos A) + \underbrace{(cL)^2 + (bL)^2 - 2(\cos A)cbL^2}_{=L^2(c^2+b^2-2cb\cos A)=L^2a^2} \\
&\quad - 2cLaN - 2aMbL + 2(cLaM + aNbL) \cos A \\
&= a^2(L^2 + N^2 + M^2 - 2NM \cos A) \\
&\quad + 2aNL \underbrace{(b \cos A - c)}_{=-a \cos B \text{ *)}} + 2aML \underbrace{(c \cos A - b)}_{=-a \cos C \text{ *)}} \\
&= a^2(L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2LM \cos C).
\end{aligned}$$

Kohdassa \*) sievennetään siten, että

$$\begin{aligned}
b \cos A - c &= -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c} - c = \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{2c} = -a \cos B \\
c \cos A - b &= -a \cos C.
\end{aligned}$$

Yhtälön (5.3)  $Sa = 2\Omega \sin A$  avulla, saadaan edellinen yhtälö muotoon

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \frac{1}{S^2}(L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2LM \cos C) \\
\rho &= \frac{1}{S}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2LM \cos C}
\end{aligned}$$

□

LAUSE 6.6. Pisteiden  $P' = \alpha' : \beta' : \gamma'$  etäisyys suorasta  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  on

$$p = \frac{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos A - 2nl \cos B - 2lm \cos C}}.$$

TODISTUS. i) Muodostetaan ensin kohtisuora etäisyys pisteestä  $P = \alpha : \beta : \gamma$  pisteiden  $Q = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  ja  $R = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$  kautta kulkevalle suoralle. Olkoon  $p$  etäisyys pisteestä  $P$  suoralle  $\overleftrightarrow{QR}$  ja  $\rho$  pisteiden  $Q$  ja  $R$  välinen etäisyys. Tällöin  $p\rho = 2A_{\Delta PQR}$  ja edelleen  $p = \frac{2A_{\Delta PQR}}{\rho}$ . Yhtälön (5.4) ja lauseen 6.5 nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
p &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\frac{1}{S}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2LM \cos C}} \\
&= \frac{L\alpha + M\beta + N\gamma}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2LM \cos C}}
\end{aligned}$$

ii) Tämän tuloksen nojalla voidaan määrittää yhtälö pisteen  $P' = \alpha' : \beta' : \gamma'$  etäisyydestä suoraan, jonka yhtälö on  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ . Olkoot  $Q$  ja  $R$  pisteitä annetulta suoralta ja olkoot  $L$ ,  $M$  ja  $N$  määritelty kuten lauseessa 6.4. Edellisen kohdan nojalla kysytty etäisyys on

$$p = \frac{L\alpha' + M\beta' + N\gamma'}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2 - 2MN \cos A - 2NL \cos B - 2LM \cos C}}.$$

Pisteiden  $Q$  ja  $R$  kautta kulkevan suoran yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa  $L\alpha + M\beta + N\gamma = 0$  ja sen täytyy olla identtinen yhtälön  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  kanssa. Tällöin on oltava  $\frac{L}{l} = \frac{M}{m} = \frac{N}{n}$ , jonka myötä pisteen  $P'$  etäisyydeksi suorasta  $\overleftrightarrow{QR}$  saadaan

$$p = \frac{l\alpha' + m\beta' + n\gamma'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos A - 2nl \cos B - 2lm \cos C}}.$$

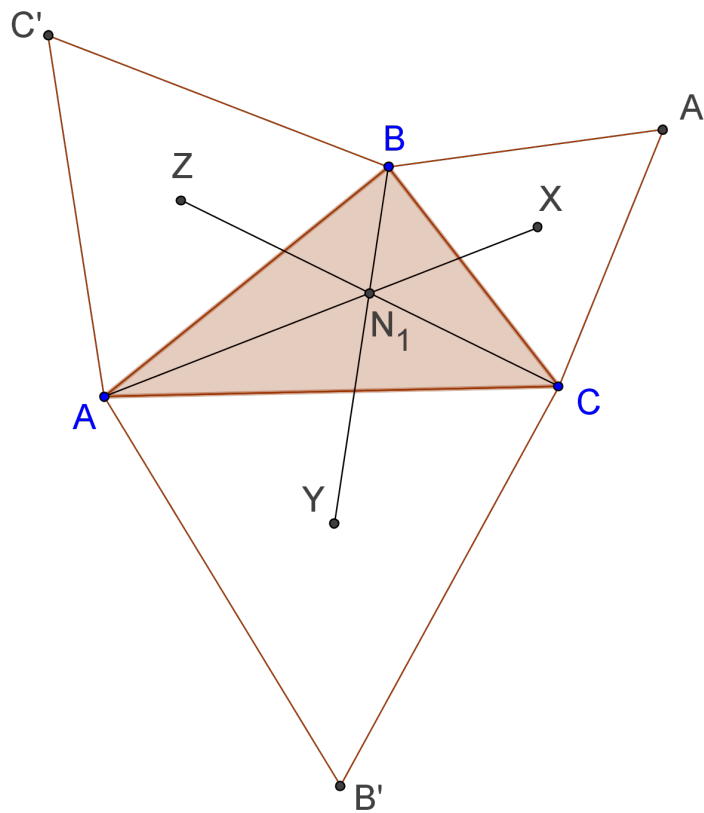
□

## Mielenkiintoisia merkittäviä pisteitä

Tässä luvussa paneudutaan tarkemmin kolmion muutamisiin hieman monimutkaisempiin merkittäviin pisteisiin ja esitellään niiden trilineaariset koordinaatit. Luvun merkittävien pisteiden trilineaarit ovat peräisin Kimberlingiltä [5], mutta 1. Napoleonin pisteen ja Mittenpisteen trilineaarit johtaminen on omaa työtä.

### 7.1. Napoleonin pisteet

Muodostetaan kolmion  $\triangle ABC$  ympärille kolme tasasivuista kolmiota siten, että kolmion  $\triangle ABC$  jokaista sivua vasten on yksi kolmio. Olkoot nämä kolmiot  $\triangle A'BC$ ,  $\triangle B'CA$  sekä  $\triangle C'AB$ . Nyt on siis  $\overrightarrow{ABC}A'$ ,  $\overrightarrow{BAC}B'$  ja  $\overrightarrow{CAB}C'$ . Olkoot lisäksi  $X$  kolmion  $\triangle A'BC$  keskus ja samoin  $Y$  kolmion  $\triangle B'CA$  ja  $Z$  kolmion  $\triangle C'AB$  keskus. Osoittautuu, että janat  $AX$ ,  $BY$  ja  $CZ$  kulkevat kaikki saman pisteen kautta. Tätä leikkauspistettä nimitetään 1. Napoleonin pisteeksi (eng. *The 1st. Napoleon point*).



KUVA 7.1.1. 1. Napoleonin piste

1. Napoleonin pisteen nimi seuraa Napoleonin lauseesta, johon se liittyy keskeisesti. Napoleonin lauseen mukaan kolmio  $\triangle XYZ$  on tasasivuinen. Tämä lause on nimetty Napoleon Bonaparten mukaan, vaikkakin Coxeterin ja Greitzerin mukaan [3] on hienan kyseenalaista, onko Napoleon itse voinut osata todistaa lauseen. 2. Napoleonin piste on vastaava kuin 1. Napoleonin piste sillä erotuksella, että tasasivuiset kolmiot  $\triangle A'BC$ ,  $\triangle B'CA$  ja  $\triangle C'AB$  muodostetaan kolmion  $\triangle ABC$  sisäpuolelle eli tällöin on esimerkiksi  $\overrightarrow{AA'}\overrightarrow{BC}$ .

### 7.1.1. 1. Napoleonin piste.

LAUSE 7.1. Yllä olevin merkinnöin suorat  $\overrightarrow{AX}$ ,  $\overrightarrow{BY}$  ja  $\overrightarrow{CZ}$  leikkaavat samassa pisteessä, jota nimitetään Napoleonin pisteeksi. Napoleonin pisteen trilineaariset koordinaatit ovat  $\frac{1}{\sin(A+\frac{\pi}{6})} : \frac{1}{\sin(B+\frac{\pi}{6})} : \frac{1}{\sin(C+\frac{\pi}{6})}$ .

Ennen kuin lause 7.1 voidaan todistaa, täytyy määrittää ensin pisteiden  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  trilineaarit, jotta saadaan muodostettua suorien  $\overrightarrow{AX}$ ,  $\overrightarrow{BY}$  ja  $\overrightarrow{CZ}$  yhtälöt. Riittää, kun määritetään näistä yhden pisteen trilineaarit, sillä muut saadaan vastaavalla tavalla. Määritetään siis pisteen  $X$  trilineaarit. Piste  $X$  on tasasivuisen kolmion  $\triangle A'BC$  (missä sivun pituus on  $a$ ) keskus, mikä tasasivuisen kolmion tapauksessa tarkoittaa, että piste  $X$  on kolmion  $\triangle A'BC$  painopiste, ortokeskus sekä ympäripiirretyn ympyrän keskipiste. Tasasivuisen kolmion, jossa sivun pituus on  $a$ , korkeus  $h$  saadaan yhtälöstä  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Koska painopiste jakaa kolmion keskijanan (joka tasasivuisessa kolmiossa on myös korkeusjana) suhteessa  $1 : 2$ , niin pisteen  $X$  etäisyys sivuun  $a$ , on kolmasosa kolmion  $\triangle A'BC$  korkeudesta. Näin ollen pisteen  $X$  etäisyydeksi janasta  $BC$  saadaan  $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$  ja koska piste  $X$  sijaitsee selvästi kolmion  $\triangle ABC$  ulkopuolella, on koordinaatti negatiivinen, jolloin se on siis  $-\frac{a}{2\sqrt{3}}$ . Pisteen  $X$  kaksi muuta koordinaattia johdetaan kulmien  $\angle CBA$  ja  $\angle BCA$  kautta. Nämä ovat identtiset tapaukset keskenään, joten riittää, kun johtaa näistä vain toisen koordinaatin. Valitaan tarkasteluun kulma  $\angle CBA$ , jota tästä eteenpäin merkitään kulmaksi  $\angle B$ . Tarkastelussa on käytävä läpi seitsemän erillistä tapausta, jotka riippuvat kulman  $\angle B$  suuruudesta.

Määritetään seuraavat pisteet:

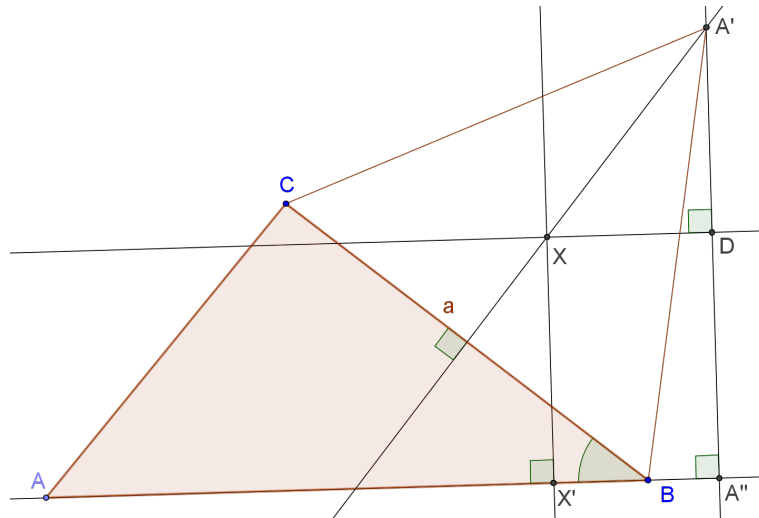
Olkoon piste  $A''$  suoralla  $\overrightarrow{AB}$  siten, että kulma  $\angle A'A''B$  on suora.

Olkoon piste  $X'$  suoralla  $\overrightarrow{AB}$  siten, että kulma  $\angle XX'B$  on suora.

Olkoon piste  $D$  suoralla  $\overrightarrow{A'A''}$  siten, että kulma  $\angle A'DX$  on suora.

i) Kulman  $\angle B$  suuruus on välillä  $0^\circ < \angle B < 30^\circ$ .

Kulman  $\angle ABA'$  suuruus on  $\angle B + 60^\circ$ . Suorakulmaisesta kolmiosta  $\triangle BA'A''$  saadaan  $\sin(B + 60^\circ) = \frac{\overline{A'A''}}{a} \Leftrightarrow \overline{A'A''} = \sin(B + 60^\circ)a$ . Kulman  $\angle BA'A''$  suuruudeksi saadaan  $180^\circ - 90^\circ - (\angle B + 60^\circ) = 30^\circ - \angle B$ , jolloin kulman  $\angle A''A'X$  suuruudeksi saadaan  $30^\circ - (30^\circ - \angle B) = \angle B$ . Janat  $A'A''$  ja  $XX'$  ovat selvästi yhdensuuntaiset ja koska jana  $A'A''$  on selvästi näistä pidempi, saadaan janan  $XX'$  pituus vähentämällä janan  $A'A''$  pituudesta janan  $A'D$  pituus. Janan  $A'X$  pituus on  $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Tästä saadaan  $\cos B = \frac{\overline{A'D}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{A'D} = (\cos B) \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Näin ollen pisteen  $X$  etäisyydeksi suorasta  $\overrightarrow{AB}$



KUVA 7.1.2. Kulman  $\angle B$  suuruus välillä  $30^\circ < \angle B \leq 90^\circ$

saadaan  $\sin(B + 60^\circ)a - (\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Lauseke voidaan vielä muokata muotoon

$$\begin{aligned} \sin(B + 60^\circ)a - (\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3} &= a[\cos(90 - (B + 60^\circ)) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B] \\ &= a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B). \end{aligned}$$

ii) Tapaus  $\angle B = 30^\circ$ :

$$\overline{XX'} = \overline{A''D} = \frac{1}{2}a = a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B).$$

iii) Kulman  $\angle B$  suuruus on välillä  $30^\circ < \angle B \leq 90^\circ$  (ks. kuva 7.1.2). Nyt kulman  $\angle A'BA''$  suuruus on  $180^\circ - 60^\circ - \angle B = 120^\circ - \angle B$ . Tällöin janan  $A'A''$  pituudeksi saadaan  $\sin(120^\circ - B) = \frac{\overline{A'A''}}{a} \Leftrightarrow \overline{A'A''} = \sin(120^\circ - B)a$ . Janan  $XX'$  pituus saadaan edelleen yhtälöstä  $\overline{XX'} = \overline{A'A''} - \overline{A'D}$ . Janan  $A'X$  pituus on edelleen  $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Kulman  $\angle A''A'X$  suuruus on nyt  $30^\circ + [180^\circ - 90^\circ - (120^\circ - \angle B)] = \angle B$ , jolloin janan  $A'D$  pituudeksi saadaan sama kuin edellä eli  $\overline{A'D} = (\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Tällöin siis

$$\begin{aligned} \overline{XX'} &= \sin(120^\circ - B)a - (\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3} \\ &= a[\sin(180 - (120^\circ - B)) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B] \\ &= a(\sin(B + 60^\circ) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) \\ &= a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B). \end{aligned}$$

iv) Kulman  $\angle B$  suuruus on välillä  $90^\circ < \angle B < 120^\circ$ .

Nyt kulman  $\angle A'BA''$  suuruus on edelleen  $180^\circ - 60^\circ - \angle B = 120^\circ - \angle B$  ja janan  $A'A''$  pituus siis myös  $\sin(120^\circ - B)a$ . Nyt jana  $XX'$  on pidempi kuin jana  $A'A''$ , jolloin janan  $XX'$  pituus saadaan yhtälöstä  $\overline{XX'} = \overline{A'A''} + \overline{A'D}$ . Nyt kulman  $\angle DA'X$  suuruus saadaan yhtälöstä  $\angle DA'X = \angle DA'A'' - \angle XA'B - \angle BA'A'' = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - 90^\circ - (120^\circ - \angle B)) = 180^\circ - \angle B$ .

Tällöin janan  $A'D$  pituus saadaan yhtälöstä

$$\cos(180^\circ - B) = \frac{\overline{A'D}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{A'D} = \cos(180^\circ - B)\frac{a\sqrt{3}}{3} = -(\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

ja janan  $XX'$  pituudeksi saadaan

$$\overline{XX'} = \overline{A'A''} + \overline{A'D} = \sin(120^\circ - B)a - (\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3} = a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B).$$

v) Kulman  $\angle B$  suuruus on välillä  $120^\circ \leq \angle B < 150^\circ$

Pisteet  $A'$  ja  $A''$  ovat nyt eri puolilla suoraa  $\overleftrightarrow{AB}$ , jolloin jana  $A'D$  on pidempi kuin jana  $A'A''$ . Tällöin janan  $XX'$  pituus saadaan yhtälöstä  $\overline{XX'} = \overline{A'D} - \overline{A'A''}$ . Kulman  $\angle CBA''$  suuruus on  $180^\circ - \angle B$ , jolloin kulman  $\angle A'BA''$  suuruus on  $60^\circ - (180^\circ - \angle B) = -120^\circ + \angle B$ . Näin ollen janan  $A'A''$  pituus saadaan yhtälöstä

$\sin(-120^\circ + B) = \frac{\overline{A'A''}}{a} \Leftrightarrow \overline{A'A''} = \sin(-120^\circ + B)a$ . Kulman  $\angle BA'A''$  suuruudeksi saadaan  $180^\circ - 90^\circ - (-120^\circ + \angle B) = 210^\circ - \angle B$ . Tästä saadaan kulman  $\angle A''A'X = \angle DA'X$  suuruus vähentämällä edellisestä  $30^\circ$ , jolloin  $\angle DA'X = 180^\circ - \angle B$ . Tällöin janan  $A'D$  pituus saadaan yhtälöstä  $\cos(180^\circ - B) = \frac{\overline{A'D}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{A'D} = \cos(180^\circ - B)\frac{a\sqrt{3}}{3}$

ja janan  $XX'$  pituudeksi saadaan

$$\begin{aligned} \overline{XX'} &= \overline{A'D} - \overline{A'A''} \\ &= \cos(180^\circ - B)\frac{a\sqrt{3}}{3} - \sin(-120^\circ + B)a \\ &= -(\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3} + \sin(120^\circ - B)a \\ &= a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B). \end{aligned}$$

vi) Tapaus  $\angle B = 150^\circ$ : piste  $X$  sijaitsee suoralla  $\overleftrightarrow{AB}$ , joten sen koordinaatti on 0.

$$0 = a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B)$$

vii) Kulman  $\angle B$  suuruus on välillä  $150^\circ < \angle B < 180^\circ$ .

Nyt piste  $X$  (myös piste  $A'$ ) on eri puolella suoraan  $\overleftrightarrow{AB}$  nähden kuin kulma  $C$ , jolloin koordinaatista tulee negatiivinen. Janan  $XX'$  pituus saadaan nyt yhtälöstä  $\overline{XX'} = \overline{A'A''} - \overline{A'D}$ . Kulman  $\angle X'BA'$  suuruus saadaan yhtälöstä  $60^\circ - \angle CBX' = 60^\circ - (180^\circ - \angle B) = -120^\circ + \angle B$ . Tällöin janan  $A'A''$  pituudeksi saadaan

$$\sin(-120^\circ + B) = \frac{\overline{A'A''}}{a} \Leftrightarrow \overline{A'A''} = \sin(-120^\circ + B)a = -\sin(120^\circ - B)a.$$

Kulman  $\angle XA'D$  suuruudeksi saadaan

$$\angle BA'A'' - 30^\circ = 180^\circ - 90^\circ - (-120^\circ + \angle B) - 30^\circ = 180 - \angle B.$$

Tällöin janan  $A'D$  pituus saadaan yhtälöstä

$\cos(180^\circ - B) = \frac{\overline{A'D}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{A'D} = \cos(180^\circ - B)\frac{a\sqrt{3}}{3}$ , jolloin janan  $XX'$  pituus on

$$\begin{aligned} \overline{XX'} &= \overline{A'A''} - \overline{A'D} \\ &= -\sin(120^\circ - B)a - \cos(180^\circ - B)\frac{a\sqrt{3}}{3} \\ &= -\sin(120^\circ + B)a + (\cos B)\frac{a\sqrt{3}}{3} \\ &= -a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B). \end{aligned}$$

Näin ollen, olipa kulman  $\angle B$  suuruus mitä tahansa välillä  $0^\circ < \angle B < 150^\circ$ , on pisteen etäisyys suorasta  $\overleftrightarrow{AB}$   $a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B)$  ja välillä  $150^\circ < \angle B < 180^\circ$  vastaava negatiivisena. Etäisyys suorasta  $\overleftrightarrow{AC}$  saadaan vastaavaan tapaan kulman  $\angle C$

kautta, jolloin täksi etäisyydeksi saadaan  $a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B)$  ja kulman  $\angle C$  ollessa yli  $150^\circ$  astetta etäisyys on  $-a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B)$ .

Näin ollen pisteen  $X$  trilineaareiksi saadaan

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{2\sqrt{3}} : a(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) : a(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) \\ & = -\frac{1}{2\sqrt{3}} : (\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) : (\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B), \end{aligned}$$

jossa jompikumpi kahdesta jälkimmäisestä voi siis olla myös negatiivisena, mutta ne eivät voi olla sitä yhtä aikaa. Kun pisteen  $X$  trilineaarit ovat tiedossa, voidaan niiden avulla helposti muodostaa myös pisteiden  $Y$  ja  $Z$  trilineaarit. Näin saadaan:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} : (\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) : (\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} : (\cos(\frac{\pi}{6} - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) : (\cos(\frac{\pi}{6} - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) \\ Y &= (\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) : -\frac{1}{2\sqrt{3}} : (\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) \\ &= (\cos(\frac{\pi}{6} - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) : -\frac{1}{2\sqrt{3}} : (\frac{\pi}{6} - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) \\ Z &= (\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) : (\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) : -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ &= (\cos(\frac{\pi}{6} - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) : (\cos(\frac{\pi}{6} - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) : -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Mikäli jokin kulma on yli  $150^\circ$  astetta, on siitä kulmasta muodostettu koordinaatti negatiivinen. Näiden trilineaarien avulla voidaan muodostaa yhtälöt suorille  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  sekä  $\overleftrightarrow{CZ}$ .

$$\overleftrightarrow{AX} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & (\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) & (\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\beta(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) + \gamma(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) = 0.$$

Samoin saadaan suorille  $\overleftrightarrow{BY}$  ja  $\overleftrightarrow{CZ}$  yhtälöt

$$\overleftrightarrow{BY} : \alpha(\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) - \gamma(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) = 0$$

$$\overleftrightarrow{CZ} : -\alpha(\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) + \beta(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) = 0$$

Mikäli jokin kulma on yli  $150^\circ$  astetta, tulee siitä kulmasta muodostuva tekijä vastalukuna ylläoleviin yhtälöihin nähden. Tällöin suorat  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  ja  $\overleftrightarrow{CZ}$  kulkevat saman pisteen kautta, jos ja vain jos

$$\begin{vmatrix} 0 & -(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) & (\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) \\ (\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) & 0 & -(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) \\ -(\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) & (\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantti on tässä seuraavanlaista muotoa:

$$(7.1) \begin{vmatrix} 0 & -U & V \\ T & 0 & -V \\ -T & U & 0 \end{vmatrix} = -(-U)(0 - (-V)(-T)) + V(TU - 0) = -UTV + VTU = 0,$$

mikä osoittaa sen, että suorat  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  ja  $\overleftrightarrow{CZ}$  leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Mikäli jokin kulma on yli  $150^\circ$  astetta, on sitä kulmaa vastaavat kaksi tekijää vastalukuja yhtälön (7.1) determinantissa, jolloin determinantin arvo ei muutu.



Nyt voidaan johtaa 1. Napoleonin pisteen trilineaarit eli todistaa lause 7.1.

TODISTUS. Koska 1. Napoleonin piste sijaitsee suorilla  $\overleftrightarrow{AX}$ ,  $\overleftrightarrow{BY}$  ja  $\overleftrightarrow{CZ}$ , niin 1. Napoleonin pisteen trilineaareiksi saadaan  $\alpha : \beta : \gamma$ , jotka toteuttavat seuraavan yhtälöryhmän:

$$\begin{cases} -\beta(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) + \gamma(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) = 0 \\ \alpha(\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) - \gamma(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) = 0 \\ -\alpha(\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) + \beta(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B) = \gamma(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) \\ \alpha(\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) = \gamma(\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C) \\ \alpha(\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A) = \beta(\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B), \end{cases}$$

jolloin ratkaisuksi saadaan ainakin

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{\cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A} : \frac{1}{\cos(30^\circ - B) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos B} : \frac{1}{\cos(30^\circ - C) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C}.$$

Nämä lausekkeet voidaan vielä muokata muotoon:

$$\begin{aligned} \cos(30^\circ - A) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A &= \cos 30^\circ \cos A + \sin 30^\circ \sin A - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos A \\ &= \frac{3}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A - \cos A \\ &= \frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \\ &= \sin 30^\circ \cos A + \cos 30^\circ \sin A \\ &= \sin(30 + A), \end{aligned}$$

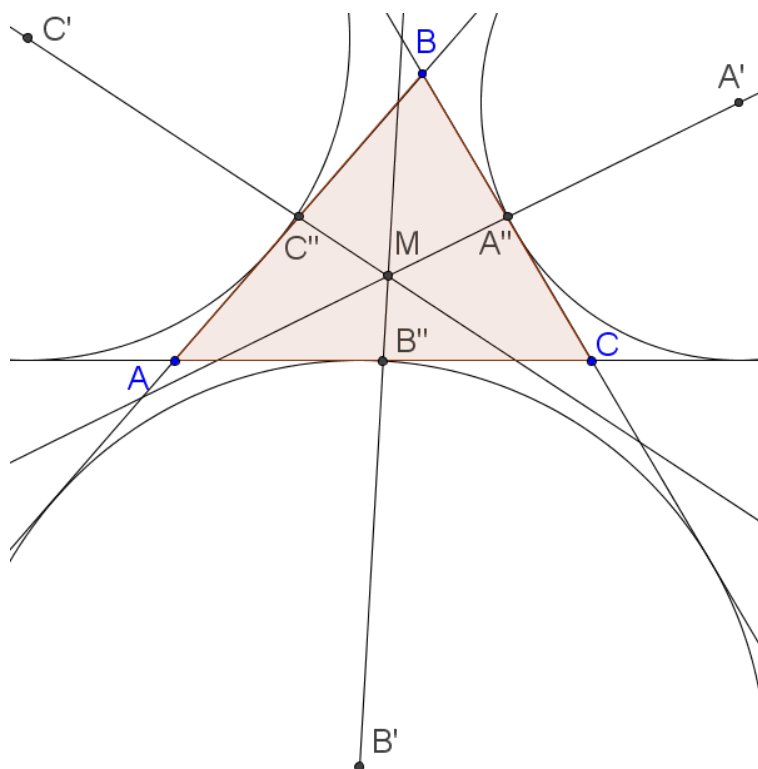
jolloin siis

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= \frac{1}{\sin(30^\circ + A)} : \frac{1}{\sin(30^\circ + B)} : \frac{1}{\sin(30^\circ + C)} \\ &= \frac{1}{\sin(A + \frac{\pi}{6})} : \frac{1}{\sin(B + \frac{\pi}{6})} : \frac{1}{\sin(C + \frac{\pi}{6})}. \end{aligned}$$

□

**7.1.2. 2. Napoleonin piste.** 2. Napoleonin pisteessä tasasivuiset kolmiot  $\triangle A'BC$ ,  $\triangle B'CA$  sekä  $\triangle C'AB$  muodostetaan siis kolmion  $\triangle ABC$  sisäpuolelle. Todistus etenee vastaavaan tapaan kuin 1. Napoleonin pisteessä ja 2. Napoleonin pisteen trilineaareiksi saadaankin

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{\sin(A - \frac{\pi}{6})} : \frac{1}{\sin(B - \frac{\pi}{6})} : \frac{1}{\sin(C - \frac{\pi}{6})}.$$



KUVA 7.2.1. Mittenpunkt

## 7.2. Mittenpunkt

Muodostetaan suora, joka kulkee kolmion yhden ulkokeskuksen ja sen kolmion sivun keskipisteen kautta, jonka ulkopuolella kolmioon nähden ulkokeskus sijaitsee. Muodostetaan vastaavat suorat myös muille kolmion ulkokeskuksille ja sivuille. Nämä kolme suoraa leikkaavat toisensa pisteessä, jota kutsutaan nimellä *Mittenpunkt* (suom. keskipiste). Koska pelkkä sana 'keskipiste' on suomenkielessä turhan yleinen eikä pisteelle Mittenpunkt ole olemassa suomenkielessä mitään vastinetta, käytän ja taivutan sana Mittenpunkt tästä eteenpäin suomalaisittain.

Todistetaan seuraavaksi suorien leikkaavuus ja johdetaan Mittenpunktin trilineaariset koordinaatit. Luvussa 4 johdettiin ulkokeskusten  $(-1 : 1 : 1$  jne.) ja sivujen keskipisteiden  $(0 : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$  jne.) trilineaarit. Näin ollen voidaan muodostaa suorat, jotka kulkevat näiden pisteiden kautta. Olkoon  $A'$  kärkeen  $A$  nähden kolmion ulkopuolella sijaitseva ulkokeskus ja olkoon  $A''$  kolmion kärkeä  $A$  vastassa olevan sivun keskipiste. Määritellään vastaavasti pisteet  $B', B'', C'$  ja  $C''$  kärjille  $B$  ja  $C$  kuten kuvassa 7.2.1.

Tällöin

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{A'A''} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\alpha + \frac{1}{c}\beta - \frac{1}{b}\gamma = 0 \\ \overleftrightarrow{B'B''} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{c}\alpha + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\beta + \frac{1}{a}\gamma = 0 \\ \overleftrightarrow{C'C''} : \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{b}\alpha - \frac{1}{a}\beta + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\gamma = 0. \end{aligned}$$

Määritetään suorien  $\overleftrightarrow{A'A''}$  ja  $\overleftrightarrow{B'B''}$  leikkauspiste. Lauseen 6.1 perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \alpha &= \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{c} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{array} \right| \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{ca} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{ba} \\ \Leftrightarrow \alpha &= b + c - a. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan koordinaatit  $\beta = a + c - b$  ja  $\gamma = a + b - c$ , jolloin suorien  $\overleftrightarrow{A'A''}$  ja  $\overleftrightarrow{B'B''}$  leikkauspisteeksi saadaan

$$\alpha : \beta : \gamma = b + c - a : a + c - b : a + b - c.$$

Määritetään myös suorien  $\overleftrightarrow{A'A''}$  ja  $\overleftrightarrow{C'C''}$  leikkauspiste. Edelleen lauseen 6.1 perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \alpha &= \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{c} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \end{array} \right| \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{cb} - \frac{1}{ca} - \frac{1}{ba} \\ \Leftrightarrow \alpha &= a - b - c \\ \Leftrightarrow \alpha &= b + c - a. \end{aligned}$$

Taas koordinaatit  $\beta$  ja  $\gamma$  saadaan vastaavasti, joten suorien  $\overleftrightarrow{A'A''}$  ja  $\overleftrightarrow{C'C''}$  leikkauspisteeksi saadaan

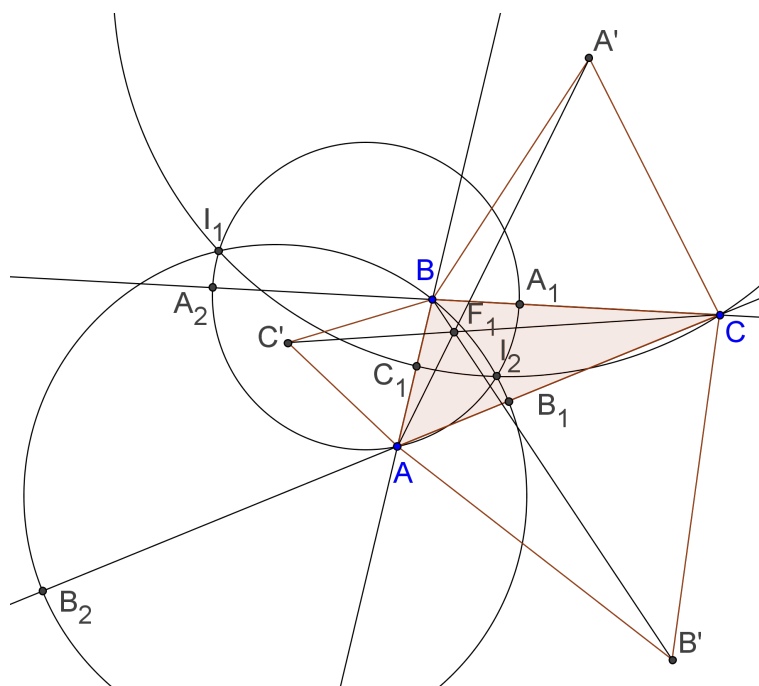
$$\alpha : \beta : \gamma = b + c - a : a + c - b : a + b - c.$$

Näin ollen sekä suorat  $\overleftrightarrow{A'A''}$  ja  $\overleftrightarrow{B'B''}$  että suorat  $\overleftrightarrow{A'A''}$  ja  $\overleftrightarrow{C'C''}$  leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joten saatiin osoitetuksi, että kaikki kolme suoraa leikkaavat toisensa samassa pisteessä, Mittenpunktissa, jonka trilineaarit ovat siis

$$\alpha : \beta : \gamma = b + c - a : a + c - b : a + b - c.$$

### 7.3. Fermat'n pisteet (isogoniset pisteet)

Fermat'n piste muodostuu, kun tasasivuiset kolmiot  $\triangle A'BC$ ,  $\triangle B'CA$  ja  $\triangle C'AB$  muodostetaan samaan tapaan kuin 1. Napoleonin pisteessä. Nyt leikkaavat suorat



KUVA 7.3.1. Isodynaamiset pisteet  $I_1$  ja  $I_2$  sekä 1. Fermat'n piste  $F_1$

ovat  $AA'$ ,  $BB'$  ja  $CC'$  kuten kuvassa 7.3.1. Näiden suorien yhteistä leikkauspistettä sanotaan Fermat'n pisteeksi, jonka trilineaareiksi saadaan

$$F_1 = \csc\left(A + \frac{\pi}{3}\right) : \csc\left(B + \frac{\pi}{3}\right) : \csc\left(C + \frac{\pi}{3}\right).$$

Fermat'n pisteen nimi on peräisin ranskalaiselta matemaatikolta Pierre Fermat'lta. Fermat'n alkuperäisessä ongelmassa, jonka hän esitti Weissteinin mukaan Evangelista Torricellille [12], pohdittiin mille pisteelle  $P$  summa  $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$  on pienin. Fermat'n piste osoittautui ratkaisuksi, kunhan kolmion  $\triangle ABC$  kaikki kulmat ovat suuruudeltaan vähemmän kuin  $120^\circ$  astetta. Ratkaisun esitti Torricellin oppilas Viviani vuonna 1659. Clark Kimberling kertoo kotisivuillaan [6] Fermat'n pisteen olevan ensimmäinen merkillinen piste, joka löydettiin antiikin ajan jälkeen. Kolmion neljä klassista merkillistä pistettä, jotka esiteltiin luvussa 2, tunnettiin jo antiikin Kreikassa ja onkin mielenkiintoista, että kesti niin kauan ennen kuin seuraava merkillinen piste löytyi. Fermat'n piste tunnetaan myös 1. isogonisena pisteenä, sillä kulmat  $\angle APB$ ,  $\angle BPC$  ja  $\angle APC$  ovat yhtenevät. Sanat *iso* ja *gon* tarkoittavat samanarvoista kulmaa.

2. isogoninen piste muodostetaan samaan tapaan kuin 1. isogoninen piste, mutta se on 2. Napoleonin pisteen tapaan muodostettu siten, että tasasivuiset kolmiot  $\triangle A'BC$ ,  $\triangle B'CA$  sekä  $\triangle C'AB$  muodostetaan kolmion sisäpuolelle. 2. isogonisen pisteen trilineaarit ovat

$$F_2 = \csc\left(A - \frac{\pi}{3}\right) : \csc\left(B - \frac{\pi}{3}\right) : \csc\left(C - \frac{\pi}{3}\right).$$

### 7.4. Isodynaamiset pisteet

Isodynaamisia pisteitä on myös kaksi. Ne muodostuvat kun määritetään kulman  $\angle A$  sekä sisäisen että ulkoisen kulman puolittajan leikkauspiste suoran  $\overleftrightarrow{BC}$  kanssa. Olkoot nämä leikkauspisteet  $A_1$  ja  $A_2$ . Ympyrää, jonka halkaisija on jana  $A_1A_2$ , kutsutaan *A-Apollonia-ympyräksi*. B- ja C-Apollonia-ympyrät määritetään samaan tapaan kulmista  $\angle B$  ja  $\angle C$ . Sen lisäksi, että nämä kolme ympyrää kulkevat ”oman” kärkensä kautta, kaikki kolme ympyrää leikkaavat toisensa kahdessa pisteessä ja näitä pisteitä kutsutaan 1. ja 2. isodynaamiseksi pisteiksi (ks. kuva 7.3.1).

1. isodynaamisen pisteen trilineaarit ovat

$$I_1 = \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right),$$

ja 2. isodynaamisen pisteen trilineaarit ovat

$$I_2 = \sin\left(A - \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) : \sin\left(C - \frac{\pi}{3}\right).$$

Ei ole yllättävää, että 1. ja 2. Napoleonin pisteen trilineaarit ovat lähellä 1. ja 2. Fermat'n pisteen trilineaareja, sillä molemmat perustuvat kolmion sivuista kehitettyihin tasasivuisiin kolmioihin. Sen sijaan on mielenkiintoinen havainto, että 1. ja 2. Fermat'n pisteen trilineaarit ovat 1. ja 2. isodynaamisen pisteen trilineaarien suhteellisia käänteislukuja eli ne ovat toistensa isogonaaliset konjugaatit, vaikka isodynaamiset pisteet ovat muodostuvat melko eri tavalla kuin Fermat'n pisteet.

### 7.5. Symmediaaninen piste (Lemoinen piste)

Symmediaaninen piste on kolmen symmediaanin leikkauspiste. Symmediaani muodostuu siten, että kärjestä lähtevä mediaani eli keskijana peilataan saman kärjen sisäiseen kulman puolittajaan nähden sen toiselle puolelle (ks. kuva 4.5.1). Symmediaanin ja kulman puolittajan välinen kulma on siis yhtenevä mediaanin ja kulman puolittajan välisen kulman kanssa. Myös symmediaanit siis leikkaavat toisensa samassa pisteessä, symmediaanisessa pisteessä, ja tämän pisteen trilineaarit ovat

$$a : b : c.$$

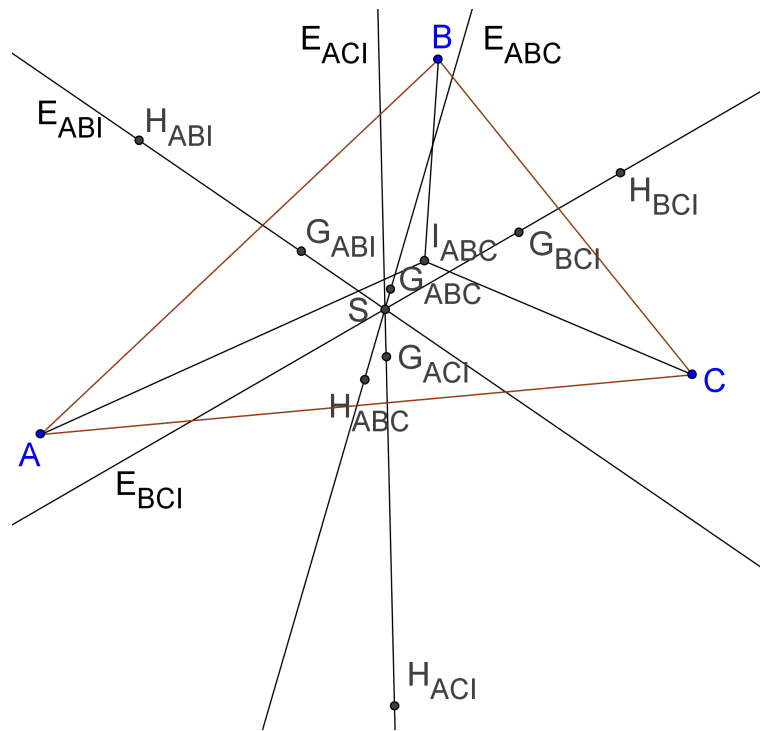
Etäisyydet symmediaanisesta pisteestä kolmion kuhunkin sivuun ovat siis samassa suhteessa kuin mitä ovat kolmion sivujen pituudet. Symmediaaninen piste on suoraan määritelmänsä perusteella painopisteen isogonaalinen konjugaatti.

### 7.6. Schifflerin piste

Schifflerin piste on varsin mielenkiintoinen piste jo sen takia, että se todella on olemassa jokaisessa kolmiossa. Schifflerin pisteessä leikkaavat neljä Eulerin suoraa, jotka muodostuvat kolmiosta  $\triangle ABC$ ,  $\triangle IBC$ ,  $\triangle ICA$  ja  $\triangle IAB$  missä piste  $I$  on kolmion  $\triangle ABC$  kulmanpuolittajien leikkauspiste (ks. kuva 7.6.1). Näiden kaikkien neljän kolmion Eulerin suorat siis kulkevat saman pisteen kautta ja tätä leikkauspistettä nimitetään Schifflerin pisteeksi  $S$ .

Schifflerin pisteen trilineaarit ovat

$$S = \frac{1}{\cos B + \cos C} : \frac{1}{\cos A + \cos C} : \frac{1}{\cos A + \cos B}$$



KUVA 7.6.1. Kolmion  $\triangle ABC$  Schifflerin piste  $S$

## Koordinaattimuunnokset

Jonkin tietyn nimetyn pisteen trilineaarit eivät riipu siitä millaisen kolmion mukaan ne on kehitetty. Esimerkiksi 1. Napoleonin pisteen trilineaarit ovat  $\csc(A + \frac{\pi}{6}) : \csc(B + \frac{\pi}{6}) : \csc(C + \frac{\pi}{6})$ , riippumatta siitä, minkälainen on kolmio  $\triangle ABC$ , jonka suhteessa trilineaarit ovat muodostettu. Sen sijaan, mikäli tarkasteltavana on jokin kiinteä tason piste, sen trilineaarit luonnollisesti riippuvat kolmiosta, jonka suhteen ne halutaan muodostaa. Tässä luvussa perehdytään koordinaattimuutoslauseeseen, jonka avulla pisteen  $P$  trilineaarit voidaan muuttaa kolmion  $\triangle ABC$  suhteesta kolmion  $\triangle DEF$  suhteeseen, mikäli pisteen  $P$  trilineaarien lisäksi tiedetään kolmion  $\triangle ABC$  kärkipisteiden trilineaarit suhteessa kolmioon  $\triangle DEF$  tai kolmion  $\triangle DEF$  kärkipisteiden trilineaarit suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$ . Tämä luku perustuu Kimberlingin julkaisuun [7], lukuunottamatta luvun lopussa olevaa esimerkkiä, jonka olen tehnyt itse.

Jotkin kolmion  $\triangle ABC$  merkilliset pisteet ovat jokin toinen merkillinen piste esimerkiksi suhteessa kolmion  $\triangle ABC$  keskiseen kolmioon, ulkokeskuskolmioon tai Napoleonin kolmioon. Esimerkiksi kolmion keskinormaalien leikkauspiste on sen keski-  
sen kolmion ortokeskus ja vastaavasti kolmion ortokeskus on sen antikomplementtisen kolmion keskinormaalien leikkauspiste, kuten kohdassa 2.4 jo todettiin. Koordinaattimuutoslause antaa mahdollisuuden tutkia tämän tyyppisiä vastaavuuksia eri pisteillä.

Tarkastellaan kolmea pistettä  $P_i = f_i(a_1, a_2, a_3) : g_i(a_1, a_2, a_3) : h_i(a_1, a_2, a_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , jotka muodostavat kolmion kärkinään  $P_1, P_2$  ja  $P_3$ . Kolmio voidaan esittää matriisina:

$$(8.1) \quad M = \begin{pmatrix} f_1(a_1, a_2, a_3) & g_1(a_1, a_2, a_3) & h_1(a_1, a_2, a_3) \\ f_2(a_1, a_2, a_3) & g_2(a_1, a_2, a_3) & h_2(a_1, a_2, a_3) \\ f_3(a_1, a_2, a_3) & g_3(a_1, a_2, a_3) & h_3(a_1, a_2, a_3) \end{pmatrix}.$$

Olkoot  $F_i, G_i$  ja  $H_i$  funktioita joille pätee:

$$(8.2) \quad M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} F_1(a_1, a_2, a_3) & G_1(a_1, a_2, a_3) & H_1(a_1, a_2, a_3) \\ F_2(a_1, a_2, a_3) & G_2(a_1, a_2, a_3) & H_2(a_1, a_2, a_3) \\ F_3(a_1, a_2, a_3) & G_3(a_1, a_2, a_3) & H_3(a_1, a_2, a_3) \end{pmatrix}.$$

### LAUSE 8.1. *Koordinaattimuutoslause.*

Olkoot  $M$  ja  $M^{-1}$  matriiseja kuten kohdassa (8.1) ja (8.2) ja olkoot  $\alpha : \beta : \gamma$  pisteen  $P$  todelliset trilineaariset etäisyydet suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$ . Olkoot  $\alpha' : \beta' : \gamma'$  pisteen  $P$  todelliset trilineaariset etäisyydet suhteessa kolmioon  $M$ . Tällöin

$$(\alpha : \beta : \gamma) = (\alpha' : \beta' : \gamma') \frac{DM}{|M|},$$

missä

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix},$$

missä

$$\begin{aligned} D_1 &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3 \cos A - 2F_3F_1 \cos B - 2F_1F_2 \cos C} \\ D_2 &= \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - 2G_2G_3 \cos A - 2G_3G_1 \cos B - 2G_1G_2 \cos C} \\ D_3 &= \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 2H_2H_3 \cos A - 2H_3H_1 \cos B - 2H_1H_2 \cos C} \end{aligned}$$

TODISTUS. Merkitään satunnaista pistettä trilineaarein  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ . Yhtälö suoralle  $BC$  on tällöin

$$\begin{vmatrix} g_2 & h_2 \\ g_3 & h_3 \end{vmatrix} \alpha_1 + \begin{vmatrix} h_2 & f_2 \\ h_3 & f_3 \end{vmatrix} \beta_1 + \begin{vmatrix} f_2 & g_2 \\ f_3 & g_3 \end{vmatrix} \gamma_1 = F_1 \alpha_1 + F_2 \beta_1 + F_3 \gamma_1 = 0.$$

Tämän suoran etäisyys pisteestä  $X$  on lauseen 6.6 mukaan tällöin

$$\alpha' = \frac{F_1 \alpha + F_2 \beta + F_3 \gamma}{D_1}$$

ja samaten koordinaateille  $\beta'$  ja  $\gamma'$ . Tällöin siis

$$\begin{aligned} (\alpha' : \beta' : \gamma') &= (\alpha : \beta : \gamma) \begin{pmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_3} \end{pmatrix} \\ (8.3) \quad &= (\alpha : \beta : \gamma) |M| M^{-1} D^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad &(\alpha : \beta : \gamma) = (\alpha' : \beta' : \gamma') \frac{DM}{|M|}. \end{aligned}$$

□

SEURAUUS 8.2. Olkoon  $M$  matriisi kuten kohdassa (8.1) ja olkoot  $\alpha : \beta : \gamma$  pisteen  $P$  trilineaariset koordinaatit suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$ . Olkoot  $\alpha' : \beta' : \gamma'$  pisteen  $P$  trilineaariset koordinaatit suhteessa kolmioon  $M$ . Tällöin

$$\alpha : \beta : \gamma = (\alpha' : \beta' : \gamma') DM.$$

TODISTUS. Trilineaaristen koordinaattien suhteellisuuden nojalla yhtälöstä (8.3) voidaan kertoa jokaisen koordinaatin yhteinen nimittäjä  $|M|$  pois. □

ESIMERKKI 8.3. Kohdassa 7.2 esiteltiin mittenpunkt. Sen trilineaareiksi suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$  saatiin

$$\alpha : \beta : \gamma = b + c - a : a + c - b : a + b - c.$$

Mittenpunkt liittyy oleellisesti kolmion  $\triangle ABC$  ulkokeskuksiin  $A'$ ,  $B'$  ja  $C'$ . Koordinaattimuutoslauseen avulla voidaan määrittää mittenpunctin trilineaarit suhteessa



kolmion  $\triangle ABC$  ulkokeskuskolmioon eli kolmioon  $\triangle A'B'C'$ . Olkoot  $\alpha' : \beta' : \gamma'$  mitteripunktin trilineaarit suhteessa kolmioon  $\triangle A'B'C'$ . Koordinaattilauseen nojalla nyt pätee

$$(b+c-a : a+c-b : a+b-c) = (\alpha' : \beta' : \gamma')DM$$

$$\Leftrightarrow (\alpha' : \beta' : \gamma') = (b+c-a : a+c-b : a+b-c)M^{-1}D^{-1}$$

Nyt  $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ , jolloin  $|M| = 4$  ja

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{pmatrix}.$$

Tällöin yhtälön (8.2) perusteella saadaan

$$D_1 = \sqrt{2^2 + 2^2 - 8 \cos A} = \sqrt{16 \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos A)} = 4 \sin \frac{A}{2}$$

$$D_2 = \sqrt{2^2 + 2^2 - 8 \cos B} = 4 \sin \frac{B}{2}$$

$$D_3 = \sqrt{2^2 + 2^2 - 8 \cos C} = 4 \sin \frac{C}{2}.$$

Nyt on siis

$$(\alpha' : \beta' : \gamma') = (b+c-a : a+c-b : a+b-c) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2D_2} & \frac{1}{2D_3} \\ \frac{1}{2D_1} & 0 & \frac{1}{2D_3} \\ \frac{1}{2D_1} & \frac{1}{2D_2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a+c-b}{2D_1} + \frac{a+b-c}{2D_1} : \frac{b+c-a}{2D_2} + \frac{a+b-c}{2D_2} : \frac{b+c-a}{2D_3} + \frac{a+c-b}{2D_3}$$

$$= \frac{a}{\sin \frac{A}{2}} : \frac{b}{\sin \frac{B}{2}} : \frac{c}{\sin \frac{C}{2}}$$

Näin saatiin esitettyä mitteripunktin trilineaarit suhteessa ulkokeskuskolmioon. Tässä muodossa kuitenkin janat  $a$ ,  $b$  ja  $c$  sekä kulmat  $A$ ,  $B$  ja  $C$  ovat kolmion  $\triangle ABC$  sivuja ja kulmia. Kohdassa 4.3 ratkaistiin ulkokeskuskolmion sivut alkuperäisen kolmion sivuista ja kulmista. Ratkaisuksi saatiin

$$a' = \frac{a}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$b' = \frac{b}{\sin \frac{B}{2}}$$

$$c' = \frac{c}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Näin ollen mitteripunktin trilineaareiksi suhteessa ulkokeskuskolmioon saadaan  $a' : b' : c'$ . Mitteripunkt on siis ulkokeskuskolmion symmetriaaninen piste.

## Koordinaattimuutoslauseen sovelluksia

Tässä luvussa sovelletaan edellisessä luvussa esiteltyä koordinaattimuutoslauseetta kahden ongelman kautta, joissa merkillinen piste muodostaa uuden kolmion alkuperäisen kolmion kahden kärkipisteen kanssa ja tästä kolmiosta määritetään sama merkillinen piste. Mitä vaaditaan siihen, että alkuperäisen kolmion yksi kärki on samalla suoralla kahden näin muodostetun merkillisen pisteen kanssa? Entä voiko kolme edellä mainitulla tavalla muodostettua merkillistä pistettä muodostaa yhdenmuotoisen kolmion alkuperäisen kolmion kanssa? Luvussa esitellyt ongelmat olen nimennyt itse, mutta muuten luku perustuu kokonaisuudessaan Kimberlingin julkaisuun [7].

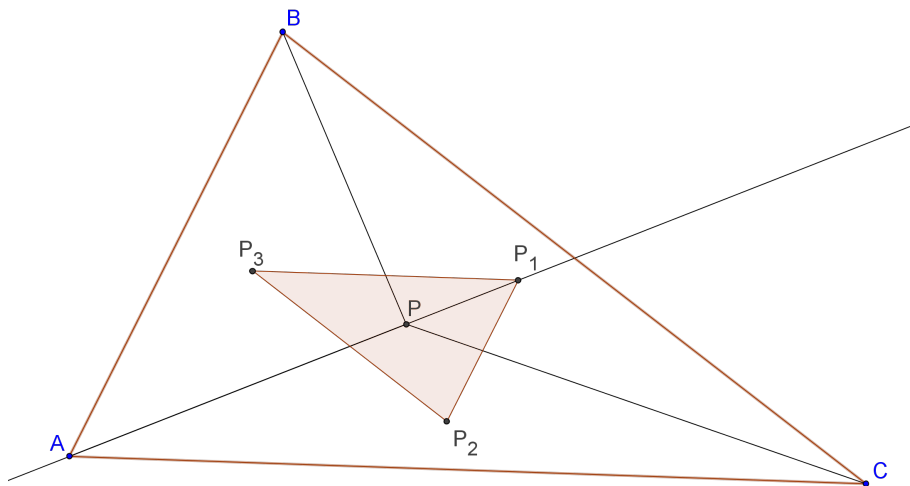
### 9.1. Kollineaarisuusongelma

Olkoon  $\tilde{P}$  satunnainen merkillinen piste kolmiossa. Olkoon pisteellä  $P$  pisteen  $\tilde{P}$ :n arvo kolmiossa  $\triangle ABC$  ja olkoon pisteellä  $P_1$  pisteen  $\tilde{P}$ :n arvo kolmiossa  $\triangle PBC$ . Miten piste  $\tilde{P}$  tulisi valita, että pisteet  $A$ ,  $P$  ja  $P_1$  ovat kollineaariset eli sijaitsevat samalla suoralla kuten kuvassa 9.1.1? Tähän ongelmaan voidaan paneutua koordinaattimuutoslauseen avulla.

Johdetaan pisteen  $P_1$  trilineaarit suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$ .

Olkoot  $P = \alpha : \beta : \gamma = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$  ja olkoot  $P_1 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$  suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$  ja

$P_1 = \tilde{\alpha}_1 : \tilde{\beta}_1 : \tilde{\gamma}_1 = f(r_1, r_2, r_3) : f(r_2, r_3, r_1) : f(r_3, r_1, r_2)$  suhteessa kolmioon  $\triangle PBC$ , missä  $r_1 = \overline{BC}$ ,  $r_2 = \overline{CP}$  ja  $r_3 = \overline{PB}$ .



KUVA 9.1.1. Milloin pisteet  $A$ ,  $P$  ja  $P_1$  osuvat samalle suoralle? Entä milloin  $\triangle ABC \sim \triangle P_1P_2P_3$ ?

Koordinaattimuutoslauseen avulla saadaan  $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = (\tilde{\alpha}_1 : \tilde{\beta}_1 : \tilde{\gamma}_1) \frac{DM}{|M|}$ . Nyt matriisi  $M$  muodostuu kolmion  $\triangle PBC$  kärkipisteiden trilineaareista suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$ , jolloin

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \frac{2A}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2A}{c} \end{pmatrix},$$

missä  $A = A_{\triangle ABC}$ . Tällöin on siis myös  $|M| = \frac{4A^2\alpha}{bc}$  ja

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{b\beta}{2A\alpha} & -\frac{c\gamma}{2A\alpha} \\ 0 & \frac{b}{2A} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{2A} \end{pmatrix} = \frac{bc}{4A^2\alpha} \begin{pmatrix} \frac{4A^2}{bc} & -\frac{2A\beta}{c} & -\frac{2A\gamma}{b} \\ 0 & \frac{2A\alpha}{c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2A\alpha}{b} \end{pmatrix} \equiv \frac{bc}{4A^2\alpha} \begin{pmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{pmatrix}.$$

Pisteen  $P_1$  trilineaarit suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$  saadaan nyt yhtälöstä

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = (\tilde{\alpha}_1 : \tilde{\beta}_1 : \tilde{\gamma}_1) \begin{pmatrix} \alpha D_1 & \beta D_1 & \gamma D_1 \\ 0 & \frac{D_2 2A}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_3 2A}{c} \end{pmatrix} \cdot \frac{bc}{4A^2\alpha},$$

missä  $D_1$ ,  $D_2$  ja  $D_3$  ovat kuten koordinaattimuunnoslauseessa. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \tilde{\alpha}_1 \frac{4A^2}{bc} \frac{bc}{4A^2\alpha} = \tilde{\alpha}_1 \\ \beta_1 &= \left( \beta \tilde{\alpha}_1 \frac{4A^2}{bc} + \tilde{\beta}_1 \sqrt{\left(-\frac{2A\beta}{c}\right)^2 + \left(\frac{2A\alpha}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{2A\beta}{c}\right)\left(\frac{2A\alpha}{c}\right) \cos C} \cdot \frac{2A}{b} \right) \frac{bc}{4A^2\alpha} \\ \gamma_1 &= \left( \gamma \tilde{\alpha}_1 \frac{4A^2}{bc} + \tilde{\gamma}_1 \sqrt{\left(-\frac{2A\gamma}{b}\right)^2 + \left(\frac{2A\alpha}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{2A\gamma}{b}\right)\left(\frac{2A\alpha}{b}\right) \cos B} \cdot \frac{2A}{c} \right) \frac{bc}{4A^2\alpha}. \end{aligned}$$

Edelleen saadaan

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left( \beta \tilde{\alpha}_1 \frac{4A^2}{bc} + \tilde{\beta}_1 \sqrt{\left(\frac{2A}{c}\right)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C)} \cdot \frac{2A}{b} \right) \frac{bc}{4A^2\alpha} \\ &= \left( \beta \tilde{\alpha}_1 \frac{4A^2}{bc} + \tilde{\beta}_1 \frac{4A^2}{bc} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C} \right) \frac{bc}{4A^2\alpha} \\ &= \frac{\beta \tilde{\alpha}_1}{\alpha} + \tilde{\beta}_1 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C}}{\alpha}. \end{aligned}$$

Samaten saadaan myös

$$\gamma_1 = \frac{\gamma \tilde{\alpha}_1}{\alpha} + \tilde{\gamma}_1 \frac{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma\alpha \cos B}}{\alpha},$$

jolloin kertomalla kaikki trilineaarit  $\alpha$ :llä saadaan

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha \tilde{\alpha}_1 : \beta \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\beta}_1 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C} : \gamma \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_1 \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma\alpha \cos B}.$$

Merkitään

$$(9.1) \quad \begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos A} \\ s_2 &= \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + 2\gamma\alpha \cos B} \\ s_3 &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos C}, \end{aligned}$$

jolloin

$$(9.2) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha \widetilde{\alpha}_1 : \beta \widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\beta}_1 s_3 : \gamma \widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\gamma}_1 s_2.$$

Yhtälössä (9.1) määritellyt  $s_1$ ,  $s_2$  ja  $s_3$  ovat pisteen  $P$  pedaalisen kolmion sivujen pituudet suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$  [7] (s.1280).

LAUSE 9.1. *Piste  $\widetilde{P}$  ratkaisee alussa esitetyn kollineaarisuusongelman jos ja vain jos se toteuttaa yhtälön*

$$(9.3) \quad s_2 \beta \widetilde{\gamma}_1 = s_3 \gamma \widetilde{\beta}_1.$$

TODISTUS. Pisteiden  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $P = (\alpha : \beta : \gamma)$  ja  $P_1 = (\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1)$  osuminen samalle suoralle on yhtäpitävää yhtälön

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta \gamma_1 = \gamma \beta_1$$

kanssa. Sijoitetaan saatuun yhtälöön yhtälössä (9.2) saadut koordinaattien  $\gamma_1$  ja  $\beta_1$  arvot. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \beta(\gamma \widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\gamma}_1 s_2) &= \gamma(\beta \widetilde{\alpha}_1 + \widetilde{\beta}_1 s_3) \\ \Leftrightarrow \beta \widetilde{\gamma}_1 s_2 &= \gamma \widetilde{\beta}_1 s_3. \end{aligned}$$

□

ESIMERKKI 9.2. Helposti nähdään, että kollineaarisuusongelman ratkaisuja ovat ainakin painopiste ja ortokeskus. Pisteiden  $P$  ja  $A$  kautta kulkevat kolmion  $\triangle ABC$  keskijana ja korkeusjanat ovat myös kolmion  $\triangle PBC$  keskijana ja korkeusjana, joten piste  $P_1$  sijaitsee suoralla  $\overleftrightarrow{AP}$ , kun piste  $P$  on painopiste tai ortokeskus. Kolmatta merkillistä pistettä, joka toteuttaisi ehdon (9.3) kaikissa kolmioissa, ei ole Kimberlingin [7] (s.1281) mukaan löydetty.

## 9.2. Yhdenmuotoisuusongelma

Olkoon  $\widetilde{P}$  satunnainen piste kolmioissa. Olkoot pisteet  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  ja  $P_3$  pisteen  $\widetilde{P}$  arvoja kolmioissa  $\triangle ABC$ ,  $\triangle PBC$ ,  $\triangle APC$  ja  $\triangle ABP$ . Miten piste  $\widetilde{P}$  tulisi valita, että kolmiot  $\triangle ABC$  ja  $\triangle P_1 P_2 P_3$  olisivat yhdenmuotoiset kuten kuvassa 9.1.1? Tähän ongelmaan vastaus löytyy samaan tapaan kuin kollineaarisuusongelmassa.

LAUSE 9.3. *Kuten edellä, merkitään  $\widetilde{P} = \alpha : \beta : \gamma = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$  sekä*

$$P_1 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$$

$$P_2 = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$$

$$P_3 = \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$$

suhteessa kolmioon  $\triangle ABC$  ja

$$P_1 = \widetilde{\alpha}_1 : \widetilde{\beta}_1 : \widetilde{\gamma}_1$$

$$P_2 = \widetilde{\alpha}_2 : \widetilde{\beta}_2 : \widetilde{\gamma}_2$$

$$P_3 = \widetilde{\alpha}_3 : \widetilde{\beta}_3 : \widetilde{\gamma}_3$$

suhteessa kolmioihin  $\triangle PBC$ ,  $\triangle APC$  ja  $\triangle ABP$ .

Olkoot lisäksi  $s_1$ ,  $s_2$  ja  $s_3$  kuten kohdassa (9.1).

Tällöin  $\tilde{P}$  ratkaisee yhdenmuotoisuusongelman jos ja vain jos

$$(9.4) \quad \begin{aligned} & s_1 \alpha \tilde{\alpha}_1 (\gamma \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 - \beta \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3) + s_2 \beta \tilde{\beta}_2 (\alpha \tilde{\gamma}_3 \tilde{\gamma}_1 - \gamma \tilde{\alpha}_3 \tilde{\alpha}_1) + s_3 \gamma \tilde{\gamma}_3 (\beta \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 - \alpha \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2) \\ & + s_2 s_3 (\beta \alpha_2 \tilde{\gamma}_3 \tilde{\gamma}_1 - \gamma \alpha_3 \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_2) + s_3 s_1 (\gamma \beta_3 \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 - \alpha \beta_1 \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3) \\ & + s_1 s_2 (\alpha \gamma_1 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 - \beta \gamma_2 \tilde{\alpha}_3 \tilde{\alpha}_1) + s_1 s_2 s_3 (\tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_3 \tilde{\gamma}_1 - \tilde{\alpha}_3 \tilde{\beta}_1 \tilde{\gamma}_2) = 0. \end{aligned}$$

TODISTUS. Kuten kollineaarisuusongelman todistuksessa, saadaan nyt

$$(9.5) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha \tilde{\alpha}_1 : \beta \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\beta}_1 s_3 : \gamma \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\gamma}_1 s_2$$

$$(9.6) \quad \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \alpha \tilde{\beta}_2 + \tilde{\alpha}_2 s_3 : \beta \tilde{\beta}_2 : \gamma \tilde{\beta}_2 + \tilde{\gamma}_2 s_1$$

$$(9.7) \quad \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \alpha \tilde{\gamma}_3 + \tilde{\alpha}_3 s_2 : \beta \tilde{\gamma}_3 + \tilde{\beta}_3 s_1 : \gamma \tilde{\gamma}_3$$

Kolmiot  $\triangle P_1 P_2 P_3$  ja  $\triangle ABC$  ovat Kimberlingin mukaan [7] (s. 1282) yhdenmuotoiset jos ja vain jos suorat

$$\overleftrightarrow{AP}_1 = \{\beta \gamma_1 - \gamma \beta_1 = 0\}$$

$$\overleftrightarrow{BP}_2 = \{\alpha \gamma_2 - \gamma \alpha_2 = 0\}$$

$$\overleftrightarrow{CP}_3 = \{\alpha \beta_3 - \beta \alpha_3 = 0\}$$

leikkaavat kaikki toisensa samassa pisteessä. Tämä toteutuu täsmälleen, kun

$$\begin{vmatrix} 0 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & 0 & \alpha_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(9.8) \quad \Leftrightarrow \gamma_1 \alpha_2 \beta_3 = \beta_1 \gamma_2 \alpha_3.$$

Yhtälö (9.4) saadaan, kun sijoitetaan yhtälöt (9.5), (9.6) ja (9.7) yhtälöön (9.8) ja sievennetään.  $\square$

ESIMERKKI 9.4. Yhdenmuotoisuusongelman ratkaisuja ovat Kimberlingin [7] mukaan ainakin kolmion ympäröidyt ympyrän keskipiste, painopiste, ortokeskus ja kolmion yhdeksän pisteen ympyrän keskipiste. Näiden todistaminen on hankalaa, sillä kyseisessä viitteessä todetaan myös, että laskujen supistaminen on parasta tehdä tietokoneella.

## Trilineaariset koordinaatit kouluopetuksessa

Opettajalinjalta valmistuvana pohdin tässä kappaleessa vielä trilineaaristen koordinaattien soveltuvuutta kouluopetukseen. Tässä luvussa opetuksen sisällöt, tehtävät ja tavoitteet ovat opetussuunnitelmista [9] ja [10]. Muut asiat ovat omaa pohdintaa.

Opetussuunnitelman perusteissa vuodelta 2004 perusopetuksen vuosiluokille 6-9 keskeisiä sisältöjä, jotka liittyvät geometriaan, analyttiseen geometriaan sekä oleellisesti trilineaarisiiin koordinaatteihin, ovat lukuparin esittäminen koordinaatistossa, kolmioihin ja nelikulmioihin liittyvät käsitteet, kolmion ja ympyrän väliset yhteydet, trigonometria ja suorakulmaisen kolmion ratkaiseminen, yhdenmuotoisuus ja yhtenevyys, geometrinen konstruointi sekä ympyrä ja siihen liittyvät käsitteet. Peruskoulussa opetellaan yksinkertainen tasokoordinaatisto sekä geometrisiin kuvioihin ja trigonometriaan liittyvät peruskäsitteet. Mielestäni on tärkeämpää osata nämä asiat kunnona kuin syventää tietoa muunlaisista tasokoordinaatistoista, joten trilineaaristen koordinaattien syvempi esille ottaminen peruskoulussa lienee turhan monimutkaista eikä siihen välttämättä ole aikaakaan. Aihetta on kylläkin mahdollista sivuta opettaessa yksinkertaista  $xy$ -koordinaatistoa, painottamalla ettei se suinkaan ole ainoa mahdollinen tasokoordinaatisto jota voidaan hyödyntää, vaikka se monessa asiassa on yksinkertaisin ja luontevin tapa esittää tasoa. Mielestäni perusopetuksen tärkein anti trilineaaristen koordinaattien kannalta on siis opetella hahmottamaan normaali tasokoordinaatisto ja sen käyttäminen, kolmioihin ja ympyröihin liittyvien peruskäsitteiden ja suorakulmaisen kolmion trigonometrian tunteminen ja käyttö kulmia ratkaistaessa sekä yhdenmuotoisten ja yhtenevien kulmien ja kuvioden soveltaminen kolmioiden ja nelikulmioiden ominaisuuksia tutkittaessa.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa vuodelta 2003 lukiokoulutuksessa geometrialle on varattu sekä lyhyessä että pitkässä matematiikassa yksi kurssi sekä analyttiselle geometrialle pitkässä matematiikassa yksi kurssi. Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tehtävänä yleisesti on tarjota valmiuksia hankkimaan, käsittelemään ja ymmärtämään matemaattista tietoa ja käyttämään matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa. Geometrian kurssin tavoitteena on, että opiskelija harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista, vahvistaa tasokuvioden ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan sekä osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen. Keskeisiä sisältöjä ovat mm. suorakulmaisen kolmion trigonometria sekä geometrian menetelmien käyttö koordinaatistossa. Lyhyen matematiikan tarkoituksena on siis kerrata ja hieman syventää perusopetuksessa opittuja geometrian taitoja sekä keskittyä arkielämän kannalta oleellisiin asioihin. Näin ollen trilineaaristen koordinaattien käyttö lyhyen matematiikan opetuksessa ei ehkä ole kovin järkevää. Samaan tapaan kuin perusopetuksessa, on lyhyessäkin matematiikassa hyvä painottaa sitä, että se tasokoordinaatisto, jota kouluopetuksessa ja yleisesti elämässä normaalisti käytetään,

ei suinkaan ole ainoa mahdollinen tapaa esittää tasoa. Lyhyessä matematiikassakin on siis syytä painottaa perusasioiden hallitsemista ja niiden soveltamista.

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tehtävänä yleisesti on antaa opiskelijalle matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa ja korkeakouluopinnoissa. Pitkän matematiikan opinnoissa opiskelijalla on tilaisuus omaksua matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä sekä oppia ymmärtämään matemaattisen tiedon luonnetta. Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa. Pitkän matematiikan geometrian kurssin tavoitteena on muun muassa, että oppilas ratkaisee geometrisia ongelmia käyttäen hyväksi kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia, yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa. Keskeisenä sisältönä kyseisellä kurssilla ovat mm. sini- ja kosinilause sekä ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria. Analyyttisen geometrian kurssilla tavoitteena on muun muassa, että opiskelija ymmärtää kuinka analyttinen geometria luo yhteyksiä geometrinen ja algebrallisten käsitteiden välille. Keskeisiä sisältöjä ovat mm. suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt, yhtälöryhmän ratkaiseminen sekä pisteen etäisyys suorasta.

Opetussuunnitelmassa matematiikan kohdalla mainitaan myös, että kurssikuvausten väljyyttä voidaan käyttää resurssien salliessa keskeisten sisältöjen syventämiseen ja eheyttävien kokonaisuuksien muodostamiseen. Näin ollen pitkä matematiikka on se, missä trilineaarisia koordinaatteja voi hyvinkin ottaa esille. Ehdoin tahdoin niitä ei pitkäänkään matematiikkaan kannata sisällyttää, vaan ne voivat toimia esimerkiksi lisätehtävinä lahjakkaimmille oppilaille. Koko ryhmälle trilineaarisia koordinaatteja ei välttämättä kannata opettaa edes pitkässä matematiikassa ellei kyseessä ole kokonaisuudessa erittäin tasokas ja lahjakas ryhmä. Monessa koulussa on esimerkiksi käytössä matematiikassa ja luonnontieteissä lahjakkaille ja niistä aineista kiinnostuneille suunnattu ns. MaLu-ryhmä. Pitkässäkin matematiikassa kaikkien on syytä osata ja hallita opetussuunnitelmissa mainitut perusasiat sekä niiden yksinkertaiset sovellukset. Pitkässä matematiikassa parhaat oppilaat ovat niin lahjakkaita, että trilineaaristen koordinaattien opettaminen heille on hyvinkin mahdollista. He voisivat myös itse ottaa aiheesta selvää. Sen jälkeen kun heillä on käsitys siitä, mitä trilineaarit ovat, niin sopivia tehtäviä aiheen syventämiseen voisivat olla esimerkiksi kolmioiden klassisten merkillisten pisteiden trilineaarinen johtaminen sekä kolmion pinta-alan esittäminen trilineaaristen avulla. Pitkässä matematiikassa on myös mahdollista järjestää soveltavia kursseja, joilla trilineaarisia kuten myös muita homogeenisiä koordinaatteja voidaan käsitellä vielä syvemmin.

## Kirjallisuutta

- [1] BOTTEMA, O. *Topics in Elementary Geometry, second edition* Springer Science+Business media, New York, NY 2008
- [2] BOYER, CARL B.: *History of analytic Geometry* Dover Publications, Mineola, NY 2004
- [3] COXETER, H.S.M. GREITZER, S.L. *Geometry revisited* The Mathematical Association of America, 1967
- [4] KIMBERLING, CLARK *Encyclopedia of Triangle Centers*  
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [5] KIMBERLING, CLARK: *Central Points and Central Lines in the Plane of a triangle*, Mathematics Magazine, 67/1994, (s.163-187)
- [6] KIMBERLING, CLARK *Triangle centers* <http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/index.html>
- [7] KIMBERLING, CLARK: *Triangles Centers As Function*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 23/1993, (s.1269-1286)
- [8] KURITTU, LASSI; HOKKANEN, VELI-MATTI; KAHANPÄÄ LAURI *Geometria* Jyväskylän yliopisto, 2008
- [9] OPETUSHALLITUS *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003* Opetushallitus, 2003
- [10] OPETUSHALLITUS *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004* Opetushallitus, 2004
- [11] WEISSTEIN, ERIC W. *Barycentric coordinates* MathWorld—A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html>
- [12] WEISSTEIN, ERIC W. *Fermat points* MathWorld—A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/FermatPoints.html>
- [13] WEISSTEIN, ERIC W. *Trilinear Coordinates* MathWorld—A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/TrilinearCoordinates.html>
- [14] WHITWORTH, WILLIAM ALLAN *Trilinear coordinates and other methods of modern analytical geometry of two dimension: an elementary treatise* Cambridge: Deighton, Bell, and co. London: Bell and Daldy, 1866  
<http://ia600501.us.archive.org/22/items/trilinearcoordin00whit/trilinearcoordin00whit.pdf>