Milloin joukon Lebesguen ja Hausdorffin mitat ovat yhtä suuria?

Juha Väätäinen

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2012

Sisältö

Johdanto

Tarkastelemme aluksi hieman kuinka paljon neliö, jonka sivu on 1, täyttyy ympyrästä, jonka halkaisija on 1. Jo yläkoulun geometrian tiedoilla saamme neliölle pinta-alaksi 1 ja ympyrälle $\pi \cdot \frac{1}{4}$ eli ympyrä täyttäisi noin 79% neliöstä. Kun siirrymme tasosta kolmiulotteisiin kappaleisiin ja pidämme kuution sivun ja ympyrän halkaisijan ykkösenä, hämmästyttävästi kuutio täyttyy pallosta vain noin 52%. Matemaattisessa mielessä kuutio ja pallo ovat olemassa korkeammissakin ulottuvuuksissa; kuutiossa on yhtä monta ja yhtä pitkää sivua kuin on akseleita ja pallo on niiden pisteiden joukko, jotka ovat korkeintaan annetun säteen etäisyydellä keskipisteestä. Voimme myös ajatella, että voisimme laskea kuution tilavuuden kaavalla a^n, missä n on ulottuvuus ja a kuution sivun pituus. Mikä on n-ulotteisen pallon tilavuus?

Tässä kirjoitelmassa osoitamme, että origokeskisen R-säteisen n-ulotteisen pallon tilavuus on $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n$, missä Γ on niin sanottu gammafunktio ja R on pallon säde. Käyttämällä kaavaa yksisäteiselle pallolle huomaamme, että pallon tilavuus todellakin riippuu ulottuvuudesta. Onko olemassa myös muita kappaleita, joiden tilavuus riippuu ulottuvuudesta? Olisiko ellipsi tällainen?

Voimme laskea arvion ellipsin tilavuudelle käyttämällä n-ulotteisia kuutioita tai palloja. Siis täyttäisimme esimerkiksi ellipsin kuutioilla ja laskisimme kuutioiden avulla tilavuuden. Ongelmamme on, että tällä tavalla saamme vain arvion, koska kuution kärjet varmasti tulisivat osittain ellipsistä ulos tai kuutiot eivät täysin täyttäisi ellipsiä. Jos käyttäisimme palloja, niin myös pallon ulottuvuudesta riippuva tilavuus asettaa omat vaatimuksensa. Ongelmamme on siis miten mitata mielivaltainen n-ulotteinen kappale.

Tässä työssä tarkastelemme juuri tilavuuden eli mitan mittaamista. Ellipsin tilalla voisi olla mikä tahansa avaruuden $\mathbb{R}^n$ joukko, jonka mitan haluaisimme tietää. Kun käytämme Lebesguen mittaa, peitämme mitattavan joukon pienillä kuutioilla tai suorakulmioilla, jolloin saamme joukon mitan suorakulmioiden mittojen summana. Vastaavasti kun käytämme Hausdorffin mittaa, peitämme mitattavan joukon mielivaltaisilla joukoilla, esimerkiksi palloilla, joiden halkaisijan perusteella saisimme toisen arvion. Yhdistettynä nämä kaksi, tutkittavamme asia on juuri kuinka suuri eroavaisuus tulee Hausdorffin ja Lebesguen mitan välille.

Ennen kuin tiedämme kuinka paljon Hausdorffin mitta eroaa Lebesguen mitasta, joudumme esimerkiksi määrittelemään mitä esimerkiksi ovat mitta, mitallinen joukko tai Hausdorffin mitta. Tarkastelemme yleistä mittateoriaa metrisessä avaruudessa kuitenkin silmällä pitäen Lebesguen ja Hausdorffin mittaa. Tämän jälkeen tutkimme vain avaruutta $\mathbb{R}^n$, sillä Lebesguen mitta on määritelty vain avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Kirjoitelman puolivälin jälkeen todistamme esimerkiksi Vitalin peitelauseen ja Steinerin symmetrisointia koskevia tuloksia. Kuitenkin aluksi määrittelemme gammafunktion ja todistamme tässä johdannossakin mainitun n-ulotteisen pallon tilavuuden kaavan.

LUKU 1

Gammafunktio ja n-pallon tilavuus

1. Gammafunktion määrittelyä ja ominaisuuksia

Gammafunkio esiintyy ajoittain fysikaalisissa ongelmissa kuten Coulombin aaltofunktioiden palautumisessa ja laskettaessa todennäköisyyksiä tilastollisessa mekaniikassa. Se on myös oiva työkalu integraalien laskemisessa ja gammafunktion avulla voimme määritellä kertoman jokaiselle positiiviselle reaaliluvulle ja laskea esimerkiksi (1/2)!, vaikka kertoma on yleensä määritelty vain positiivisille kokonaisluvuille.

Määritelmä 1.1. Määrittelemme *Gammafunktion* Γ asettamalla

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt,\ \ x \geq 1.$$

Huomautus 1.2.

- Gammafunktio on hyvin määritelty, koska integraali suppenee, koska e^t kasvaa riittävän paljon nopeammin kuin t^{x-1}.
- Voimme määritellä gammafunktion kuten Arfken [2]:

$$\Gamma(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3 \dots n}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} n^x.$$

Esimerkki 1.3. Laskemme integraalin $\int_0^\infty 2e^{-x^2}\, dx$ gammafunktion avulla. Sijoitamme $t = x^2$ ja $dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\, dt$, jolloin saamme

$$\int_0^\infty 2e^{-x^2}\, dx = \int_0^\infty 2e^{-t}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}\, dt = \Gamma(1/2).$$

Emme kuitenkaan vielä osaa laskea gammafunktion arvoa $\Gamma(1/2)$, koska integraalin $\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{2}-1}\, dt$ laskeminen on erittäin vaikeaa.

Lause 1.4. *Gammafunktiolle pätee:* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Todistus. Sijoitamme $u = t^x$, $du = xt^{x-1}\, dx$, $v = -e^{-t}$ ja $dv = e^{-t}\, dt$ osittaisintegroinnin kaavaan $\int u\, dv = uv - \int v\, du$, jolloin saamme

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x\, dt \\ &= \lim_{m\to\infty} \Big/_0^m -e^{-t}t^x + \int_0^\infty xe^{-t}t^{x-1}\, dt \\ &= 0 + x\Gamma(x).\end{aligned}$$

$\square$

Huomautus 1.5. Jos olisimme käyttäneet Huomautuksen 1.2. gammafunktion vaihtoehtoista määrittelyä, olisimme saaneet

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)} n^{x+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x+n+1}\cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots(x+n)} n^{x}. \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Voisimme todistaa seuraavan lauseen myös Huomautuksen 1.2 määrittelyn kautta, mutta saamme todistuksen helpommin käyttämällä Määritelmää 1.1.

Lause 1.6. *Jokaiselle luonnolliselle luvulle $n \in \mathbb{N}$ pätee $\Gamma(n+1) = n!$.*

Todistus. Todistamme väitteen induktiolla. Kun $n = 0$, niin

$$\begin{aligned}\Gamma(0+1) &= \int_0^\infty e^{-t} dt \\ &= \lim_{m\to\infty} \Big/_0^m -e^{-t} \\ &= -0-(-1) = 1 = 0!.\end{aligned}$$

Oletetamme, että yhtälö on totta arvolla $n \in \mathbb{N}$ eli $\Gamma(n) = \Gamma((n-1)+1) = (n-1)!$. Todistamme, että yhtälö on totta arvolla $n+1$:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n \underbrace{\Gamma(n)}_{\text{ind. oletus}} \\ &= n(n-1)!. \\ &= n!\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi määrittelemme kertoman positiivisille reaaliluvuille tavalla, joka ei ole ristiriidassa edellisten tulosten kanssa.

Määritelmä 1.7. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Määrittelemme

$$x! := \Gamma(x+1) \text{ kaikilla } x \geq 0.$$

2. n-pallon tilavuus

Edellisessä osiossa tarkastelimme gammafunktiota, jota tarvitsemme n-ulotteisen pallon tilavuuden laskemiseen. n-ulotteiselle pallolle on olemassa ulottuvuudesta riippuva tilavuuden kaava, jonka todistamme tässä osiossa. Aluksi kuitenkin todistamme lauseen, joka on avuksi kaavan käytössä, kun tarkastelemme parittomia ulottuvuuksia.

Lause 1.8. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Todistus. Sijoitamme $t = s^2$, $dt = 2s\ ds$ gammafunktion määritelmään.

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2}\ dt = \int_0^\infty e^{-s^2} s^{-1} 2s\ ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\ ds.$$

Tämän jälkeen kerromme luvun $\Gamma(1/2)$ itsellään ja käytämme pallokoordinaatteja:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1/2)\,\Gamma(1/2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\;ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\;du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}e^{-u^2}\;du\;ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(s^2+u^2\right)}\;du\;ds \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2}r\;dr\;d\theta \\
&= \lim_{m\to\infty} 2\pi \Big/_{0}^{m}(-\frac{1}{2}e^{-r^2}) = \pi.
\end{aligned}$$

Siispä $(\Gamma(1/2))^2 = \pi$, mistä saamme $\Gamma(1/2) = \pm\sqrt{\pi}$. Negatiivinen etumerkki ei käy, koska gammafunktio saa vain positiivisia arvoja määrittelynsä vuoksi. □

Esimerkki 1.9. Edellisen tuloksen, Määritelmän 1.7 ja Lauseen 1.4 avulla voimme laskea kertoman luvuille $\frac{n}{2}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Esimerkiksi

$$(1/2)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Seuraavaksi tarkastelemme n-ulotteisen pallon tilavuutta. Tilavuuden käsitteen samaistamme Riemannin integraaliksi eli esimerkiksi R-säteisen pallon tilanteessa tilavuus on

$$\int_{B(0,R)} 1\;dx.$$

Lause 1.10. *Olkoon $B(0,R) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin*

$$volB(0,R) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}R^n. \tag{1.1}$$

Todistus. Kun $n = 1$, niin tällöin

$$volB(0,R) = \frac{\pi^{1/2}}{(1/2)!}R^1 = 2R.$$

Origokeskinen R-säteinen pallo on jana $(-R, R)$ lukusuoralla, koska pallo on niiden pisteiden joukko, jotka ovat säteen päässä keskipisteestä. Siten kaava toimii, kun $n = 1$.

Kun $n = 2$, niin pallon tilavuus on tasossa olevan ympyrän pinta-ala:

$$volB(0,R) = \frac{\pi^{2/2}}{(2/2)!}R^2 = \pi R^2.$$

Todistamme yhtälön 1.1. induktiolla. Perusaskeleen olemme jo todenneet paikkansapitäväksi. Oletamme, että yhtälö on tosi arvolla $n-2$ ja todistamme, että yhtälö on totta arvolla n. Tarkastelemme parillisia arvoja n, jotta voimme käyttää pallokoordinaatteja.

Origokeskisen, R-säteisen n-ulotteisen pallon yhtälö on $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2 \leq R^2$ ja 2-ulotteisen pallon yhtälö on $r^2 = x_1^2+x_2^2 \leq R^2$. Tarkastelemme s-säteisen $(n-2)$-ulotteista pallopintaa, jolle pätee

$$s^2 = x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_n^2 = R^2 - r^2.$$

Induktio-oletuksen mukaan $(n-2)$-ulotteisen ja s-säteistä pallon tilavuus on

$$\begin{aligned} volB(0,s) &= \frac{\pi^{(n-2)/2}}{((n-2)/2)!}s^{n-2} \\ &= \frac{\pi^{(n-2)/2}}{((n-2)/2)!}\left((R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{n-2} \\ &= \frac{\pi^{(n/2)-1}}{((n/2)-1)!}(R^2-r^2)^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned} volB(0,R) &= \int_{B^2(0,R)} \frac{\pi^{(n/2)-1}}{((n/2)-1)!}\left(R^2 - \|x_1,x_2\|^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\ d\left(x_1,x_2\right) \\ &= \frac{\pi^{(n/2)-1}}{((n/2)-1)!}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{n}{2}-1} r\ dr\ d\theta \\ &= \frac{\pi^{(n/2)-1}}{((n/2)-1)!}\cdot 2\pi \Big/_{0}^{R} -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{\pi^{(n/2)-1}}{((n/2)-1)!}\cdot\pi\cdot\frac{R^n}{(n/2)} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}R^n. \end{aligned}$$

□

Seuraus 1.11. *Määritelmän 1.7 mukaan*

$$volB(0,R) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}R^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n.$$

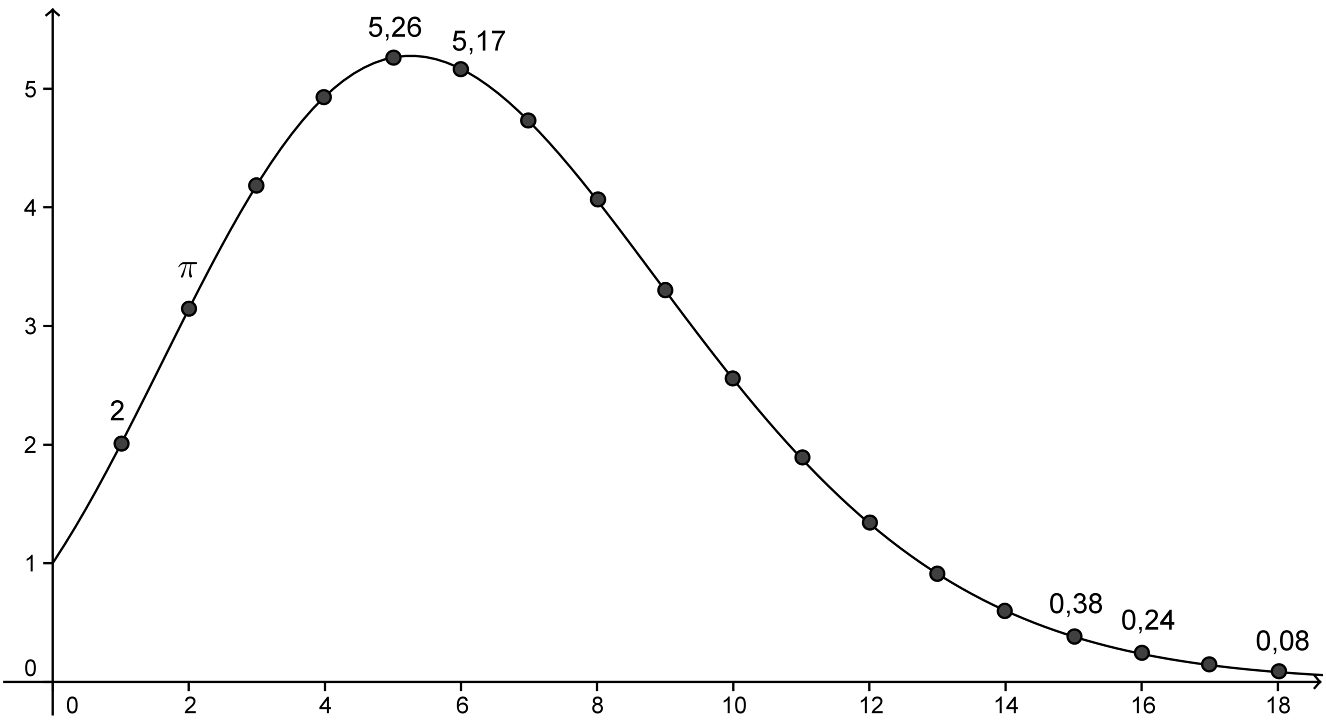
Esimerkki 1.12. Käytämme Lausetta 1.4 ja Seurausta 1.11, jolloin saamme yksikköpallon tilavuuden, kun $n=5$:

$$volB(0,1) = \frac{\pi^{5/2}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}\cdot 1^5 = \frac{\pi^{5/2}}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{5/2}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Laskimme jo Esimerkissä 1.9 arvon $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Siispä

$$volB(0,1) = \frac{8\pi^{5/2}}{15\sqrt{\pi}} = 5,26378\cdots \approx 5,26.$$

Kuvassa 1.1 on yksikköpallon tilavuuksia ja miten tilavuus muuttuu ulottuvuuden myötä. Erikoista on se, että yksikköpallon tilavuus on suurin mahdollinen, kun $n=5$. Todella erikoinen asia on myös se, että tilavuus lähestyy nollaa kun ulottuvuus kasvaa.



Kuva 1.1. Origo-keskisen yksikköpallon tilavuuden muuttuminen ulottuvuuden kasvaessa. Pystyakselilla on yksikköpallon tilavuus ja vaaka-akselilla ulottuvuus.

LUKU 2

Abstraktia mitta- ja integraaliteoriaa

Tässä luvussa määrittelemme mikä on ulkomitta ja tarkastalemme ulkomitan ominaisuuksia. Luvun lopussa käymme lävitse mitalliset ja puolijatkuvat funktiot ja kertaamme Fatoun lemman ja Fubinin lauseen. Tässä luvussa määrittelemme myös Lebesguen ja Hausdorffin mitat. Näiden mittojen suurin ero on se, että Lebesguen mitassa peitämme mitattavan joukon n-ulotteisilla "suorakulmioilla", kun taas Hausdorffin mitassa esimerkiksi palloilla. Todistamme myös Lebesguen ja Hausdorffin mitat Borel-mitoiksi ja tasaisesti jakautuneiksi. Lebesguen ja Hausdorffin mittojen suhteen tarkastelu vaatii, että mitat ovat Borel-mittoja ja tasaisesti jakautuneita.

1. Metrinen avaruus

MÄÄRITELMÄ 2.1. Oletamme, että on olemassa funktio $d\colon X \times X \to [0, \infty[$ siten, että kaikille $x, y, z \in X$ pätee seuraavat kohdat:

i) $d(x, y) \geq 0$
ii) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$
iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrisyys)
iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (kolmioepäyhtälö).

Tällöin kutsumme funktiota d *metriseksi funktioksi* (tai etäisyysfunktioksi) joukossa X ja paria (X, d) *metriseksi avaruudeksi*. Käytämme metriselle avaruudelle myös merkintää X, jos emme tarkastele metristä funktiota.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Metrinen avaruus X on *separoituva*, jos avaruudella on numeroituva joukko $A \subset X$, jolle

$$\overline{A} = X.$$

ESIMERKKI 2.3. Erityisesti Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on metrinen avaruus, jossa etäisyysfunktio on

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Avaruus $\mathbb{R}^n$ on myös separoituva sillä, jos $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$, niin $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

MÄÄRITELMÄ 2.4. Määrittelemme joukkojen $A \subset X$ ja $B \subset X$ välisen etäisyyden seuraavasti:

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid \ x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$

2. Ulkomitta

MÄÄRITELMÄ 2.5. Olkoon X joukko. Tällöin joukon X osajoukkojen kokoelmaa

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\},$$

kutsumme joukon X *potenssijoukoksi.*

MÄÄRITELMÄ 2.6. Olkoon X epätyhjä joukko. Joukkofunktio $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on *ulkomitta joukossa* X, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

i) $\mu(\emptyset) = 0$
ii) $\mu(A) \le \mu(B)$ aina, kun $A \subset B \subset X$ (monotonisuus),
iii) jos $A_1, A_2, \dots \subset X$, niin

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad \text{(subadditiivisuus).}$$

MÄÄRITELMÄ 2.7. Ulkomitta μ metrisessä avaruudessa X on *metrinen ulkomitta* jos

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ aina, kun } d(A,B) > 0.$$

3. Joukkojen mitallisuus ja Borelin joukot

Järkevä ominaisuus joukkojen mittaamiseen olisi additiivisuus. Olemme määritelleet metrisen ulkomitan, mutta emme tiedä mitä pitää ulkomitalta μ vaatia, että additiivisuus pätisi. Saamme selville, että pienet vaatimukset ulkomitalle riittävät additiivisuuteen.

MÄÄRITELMÄ 2.8. Joukko $A \subset X$ on *μ-mitallinen* tai lyhyemmin *mitallinen*, jos

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \text{ kaikilla } E \subset X.$$

Käytämme mitallisille joukoille merkintää:

$$\mathcal{M} := \{A \subset X \mid A \text{ on } \mu\text{-mitallinen}\}.$$

HUOMAUTUS 2.9. Mitan subadditiivisuuden nojalla

$$\mu(E) \le \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \text{ kaikilla } E \subset X.$$

Siispä joukko A on mitallinen, jos ja vain jos

$$\mu(E) \ge \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \text{ kaikilla } E \subset X.$$

LAUSE 2.10. *Mitalliset joukot muodostavat σ-algebran eli*
(1) $\emptyset \in \mathcal{M}$ *ja* $X \in \mathcal{M}$,
(2) *jos* $A \in \mathcal{M}$, *niin joukon* A *komplementti* $A^c = X \setminus A \in \mathcal{M}$ *ja*
(3) *jos* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, *niin* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

TODISTUS.
(1) Olkoon $A = \emptyset$. Tällöin

$$\mu(E) = \mu\underbrace{(E \cap A)}_{=\emptyset} + \mu\underbrace{(E \setminus A)}_{=E} \text{ kaikilla } E \subset X.$$

eli $\emptyset \in \mathcal{M}$. Voimme osoittaa vastaavasti, että $X \in \mathcal{M}$.

(2) Olkoon joukko E mielivaltainen ja joukko $A \in \mathcal{M}$. Käytämme Määritelmää 2.8 kahdesti ja saamme suoraan, että

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \mu\left(E \cap A\right) + \mu(E \setminus A) \\ &= \mu\left(E \cap (A^c)^c\right) + \mu(E \cap A^c) \\ &= \mu(E \setminus A^c) + \mu(E \cap A^c)\end{aligned}$$

eli $A^c \in \mathcal{M}$.

(3) Olkoon $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ ja olkoon joukko $E \in X$ mielivaltainen. Käytämme mitallisuuden määritelmää ja saamme

$$\begin{aligned}\mu(E) =& \mu(E \cap A_1) + \mu(E \setminus A_1) \\ =& \mu(E \cap A_1) + \mu((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu\left(E \setminus (A_1 \cup A_2)\right) \\ =& \dots \\ =& \sum_{j=1}^{k} \mu\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \mu\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j\right).\end{aligned}$$

Täten

$$\mu(E) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \mu\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).$$

Edellinen epäyhtälö pätee kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Käytämme mitan subadditiivisuutta, jolloin saamme

$$\begin{aligned}\mu(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \mu\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &\geq \mu\left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \mu\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right).\end{aligned}$$

Huomautuksen 2.9 mukaan $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ on mitallinen. □

Esimerkki 2.11.

(1) $\{\emptyset, X\}$ on pienin σ-algebra joukossa X.
(2) Borelin joukkoperhe joukossa X on pienin σ -algebra, joka sisältää avaruuden X suljetut joukot. Emme kuitenkaan vielä tiedä muita mitallisia joukkoja kuin $\emptyset$ ja X.

Lause 2.12. *Olkoot joukot $A_1, A_2, A_3 \dots \in \mathcal{M}$ siten, että $A_1 \supset A_2 \supset A_2 \dots$ ja $\mu(A_1) < \infty$. Tällöin*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

Todistus. Friedman [3] s.5, Evans ja Gariepy [5] s.2. □

Lemma 2.13. *Olkoot joukot $A \subset X$ ja $B \subset X$ siten, että $A \subset B$ ja B on avoin. Olkoon μ metrinen ulkomitta, jolle $\mu(A) < \infty$ ja $n \in \mathbb{N}$. Jos*

$$A_n = \left\{ x \in A \mid d(x, B^c) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

niin tällöin

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Todistus. Koska $A_n \subset A_{n+1}$ ja ulkomitta μ on monotoninen, niin jono $\{\mu(A_n)\}$ on kasvava. Myös $\mu(A_n) \leq \mu(A)$ eli väitteen osoittamiseksi osoitamme, että

$$\mu(A) \leq \lim_{n \to \infty} \mu(A_{2n}).$$

Olkoon $y \in A$, jolloin $y \in B$. Koska joukko B on avoin, niin selvästi $d(y, B^c) > \epsilon$, missä $\epsilon > 0$. Tämä osoittaa, että

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Oletimme, että $A_n \subset A$, josta saamme yhtäsuuruuden

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Olkoon $G_n = A_{n+1} \setminus A_n$, kun $n \geq 1$. Mille tahansa luonnolliselle luvulle n pätee

$$A = A_{2n} \cup \left[\bigcup_{k=2n}^{\infty} G_k \right] = A_{2n} \cup \left[\bigcup_{k=n}^{\infty} G_{2k} \right] \cup \left[\bigcup_{k=n}^{\infty} G_{2k+1} \right].$$

Täten,

$$\mu(A) \leq \mu(A_{2n}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_{2k}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_{2k+1}).$$

Antamalla $n \to \infty$ olemme todistaneet väitteen, jos edellisen epäyhtälön sarjat suppenevat kohti nollaa.

Osoitamme sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(G_{2k})$ suppenevuuden, jolloin osasumma $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_{2k})$ myös suppenee ja $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_{2k}) \to 0$, kun $n \to \infty$. Jos $x \in G_{2p},\ y \in G_{2k+2}$, kun $p \leq k$, niin joukkojen A_n määrittelystä saamme

$$d(x, B^c) > \frac{1}{2p+1}$$

ja

$$d(y, B^c) < \frac{1}{2k+2}.$$

Niinpä

$$d\left(G_{2p}, G_{2k+2}\right) \geq \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0.$$

Määritelmän 2.7 avulla saamme

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu\left(G_{2k}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} G_{2k} \right).$$

Määrittelimme joukot G_n siten, että $\bigcup_{k=1}^{n-1} G_{2k} \subset A_{2n}$. Siispä

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mu\left(G_{2k}\right) \leq \mu\left(A_{2n}\right) \leq \mu\left(A\right).$$

Antamalla $n \to \infty$, saamme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(G_{2k}\right) \leq \mu\left(A\right).$$

Koska oletimme, että $\mu\left(A\right) < \infty$, olemme osoittaneet, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(G_{2k}\right)$ suppenee ja $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_{2k}) \to 0$, kun $n \to \infty$. Voimme tehdä saman tapaisen osoituksen sarjalle $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(G_{2k+1})$.

□

LAUSE 2.14. *Jos μ on metrinen ulkomitta, niin silloin jokainen suljettu joukko on mitallinen.*

TODISTUS. Olkoon joukko $F \subset X$ suljettu ja joukko A siten, että $\mu(A) < \infty$. Tällöin F^c on avoin ja $(A \setminus F) \subset F^c$. Määrittelemme joukot E_n siten, että

$$E_n = \left\{x \in (A \setminus F) \mid d(x, F) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Siispä $d(E_n, F) \geq \frac{1}{n}$, jolloin käytämme metrisen ulkomitan määritelmää 2.7 seuraavasti:

$$\mu(A) \geq \mu\left((A \cap F) \cup E_n\right) = \mu(A \cap F) + \mu(E_n).$$

Lemman 2.13 mukaan $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(A \setminus F)$. Siispä antamalla $n \to \infty$ saamme

$$\mu(A) \geq \mu(A \cup F) + \mu(A \setminus F).$$

Jos $\mu(A) = \infty$, niin edellinen epäyhtälö on triviaali. Koska joukko A on mielivaltainen, niin Huomautuksen 2.9 mukaan suljettu joukko F on mitallinen. □

SEURAUS 2.15. *Jos μ on metrinen ulkomitta, niin jokainen Borelin joukko on mitallinen.*

TODISTUS. Jokainen avoin joukko E on muotoa $E = X \setminus F$, missä F on suljettu. Koska kokoelma $\mathcal{M}$ muodostaa σ -algebran, niin $E \in \mathcal{M}$. □

MÄÄRITELMÄ 2.16. Olkoon μ ulkomitta joukossa X. Ulkomitta μ on

(1) *Borel-mitta*, jos kaikki Borelin joukot ovat μ-mitallisia.
(2) *Borel-säännöllinen*, jos ulkomitta μ on Borel-mitta ja jos kaikilla $A \subset X$ on olemassa Borelin joukko $B \subset X$ siten, että $A \subset B$ ja $\mu(A) = \mu(B)$.
(3) *tasaisesti jakautunut*, jos mitta μ on Borel-säännöllinen ja

$$0 < \mu(B(x, r)) = \mu(B(y, r)) < \infty \quad \text{kaikilla } x, y \in X, 0 < r < \infty.$$

MÄÄRITELMÄ 2.17. Olkoon μ ulkomitta joukossa X. Määrittelemme *rajoittumamitan* $\mu|_A$ mitalliselle joukolle $A \subset X$ siten, että

$$\mu|_A(B) = \mu(A \cap B), \quad \text{kaikilla } B \subset X.$$

HUOMAUTUS. Selvästi myös rajoittumamitta $\mu|_A$ on ulkomitta.

LAUSE 2.18.

(1) *Jokainen μ-mitallinen joukko on myös $\mu|_A$-mitallinen.*
(2) *Jos mitta μ on Borel-säännöllinen ja joukko A on μ-mitallinen siten, että $\mu(A) < \infty$, niin rajoittumamitta $\mu|_A$ on Borel-säännöllinen.*

TODISTUS. (1) Olkoon joukko $B \subset X$ μ-mitallinen ja olkoon joukko $E \subset X$ mielivaltaisia. Koska joukko B on μ mitallinen, niin kaikilla $(E \cap A) \subset X$ pätee

$$\mu\left(E \cap A\right) = \mu\left(\left(E \cap A\right) \cap B\right) + \mu\left(\left(E \cap A\right) \setminus B\right).$$

Muokkaamme hieman mitattavia joukkoja ja saamme

$$\mu\left(E \cap A\right) = \mu\left(\left(E \cap B\right) \cap A\right) + \mu\left(\left(E \setminus B\right) \cap A\right).$$

Käytämme yllä olevaan yhtälöön molemmille puolille Määritelmää 2.17, jolloin

$$\mu|_A\left(E\right) = \mu|_A\left(E \cap B\right) + \ \mu|_A\left(E \setminus B\right),$$

kaikilla $E \subset X$. Siispä joukko B on $\mu|_A$-mitallinen.

(2) Koska oletimme, että mitta μ on Borel-säännöllinen, niin Määritelmän 2.16 mukaan on olemassa Borelin joukko $B \subset X$ siten, että $A \subset B$ ja $\mu\left(A\right) = \mu\left(B\right) < \infty$. Tällöin $\mu\left(B \setminus A\right) = 0$, sillä joukko A on μ-mitallinen. Olkoon joukko $C \subset X$ mielivaltainen. Mitan μ Borel-säännöllisyydestä saamme valittua joukon D siten, että joukko D on Borelin joukko, $B \cap C \subset D$ ja $\mu\left(B \cap C\right) = \mu\left(D\right)$. Tällöin $C \subset D \cup (X \setminus B) = E$ ja

$$\mu|_A(E) = \mu(A \cap E) \leq \mu(B \cap E) = \mu(B \cap D) \leq \mu(D).$$

Määrittelimme, että $\mu(B \cap C) = \mu(D)$, siispä

$$\mu|_A(E) \leq \mu(B \cap C) = \mu(A \cap C) = \mu|_A(C).$$

Määrittelimme myös joukon E siten, että $C \subset E$ eli $\mu|_A(E) = \mu|_A(C)$. Väite on siis osoitettu, koska joukko E on Borelin joukkojen yhdisteenä ja erotuksena Borelin joukko. □

4. Lebesguen mitta

Tässä kappaleessa määrittelemme Lebesguen mitan. Todistamme esimerkiksi Lebesguen mitan olevan metrinen ulkomitta, jolloin kaikki Borelin joukot ovat Lebesgue -mitallisia.

MÄÄRITELMÄ 2.19. Kutsumme joukkoa $I \subset R^n$ *n-väliksi*, jos joukko I on muotoa

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n,$$

missä $I_j = \,]a_j, b_j[\, \subset \mathbb{R}$, $b_j \geq a_j$ kaikilla $j = 1, 2, 3, \dots n$. Välin I_j päätepisteiksi hyväksymme myös $\pm\infty$.

Määrittelemme n-välille *geometrisen mitan* $l(I)$ seuraavasti:

$$l(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Asetamme myös

$$l(\emptyset) = 0.$$

MÄÄRITELMÄ 2.20. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja kokoelma $\mathcal{K}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikkien n-välien ja tyhjän joukon muodostama kokoelma. Lukua $\mathcal{L}(A)$ kutsumme joukon A *Lebesguen ulkomitaksi* tai *Lebesguen mitaksi*, minkä saamme seuraavasti:

$$\mathcal{L}(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \mid I_k \in \mathcal{K},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big\}.$$

ESIMERKKI 2.21. Tarkistamme Määritelmän 2.6 ulkomitan ominaisuudet Lebesguen ulkomitalle.

i) Koska $l(\emptyset) = 0$, niin $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$.

ii) Monotonisuus seuraa geometrisen mitan ja infimumin ominaisuuksista.

iii) Olkoot $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$. Jos $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(A_j) = \infty$, niin tapaus on triviaali. Oletamme, että $\mathcal{L}(A_j) < \infty$ kaikilla j. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan avoimet n -välit $I_{k,j} \in \mathcal{K}$ siten, että

$$A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,j}$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{k,j}) \leq \mathcal{L}(A_j) + 2^{-j}\epsilon.$$

Tällöin

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,j} = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_{k,j},$$

mikä on numeroituva yhdiste. Täten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &\leq \sum_{k,j=1}^{\infty} l(I_{k,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{k,j}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \big(\mathcal{L}(A_j) + 2^{-j}\epsilon\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}(A_j) + \epsilon.\end{aligned}$$

Kun $\epsilon \to 0$ niin kohta iii) on tarkistettu.

LAUSE 2.22. *Jokainen väli $I \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen ja $\mathcal{L}(I) = l(I)$.*

TODISTUS. Tämä tulos on selvä jo intuition perusteella. Voimme katsoa tarkan todistuksen esimerkiksi lähteestä Purmonen [4] s.24. Väite seuraa myös seuraavan lauseen kohdasta (1), koska jokainen väli I on Borelin joukko. □

LAUSE 2.23. *Määritelmän 2.16. ominaisuudet pätevät Lebesguen mitalle eli Lebesguen mitta on*

(1) *Borel-mitta,*
(2) *Borel-säännöllinen ja*

(3) *tasaisesti jakautunut.*

TODISTUS. (1) Seurauksen 2.15 mukaan kaikki Borelin joukot ovat metriselle ulkomitalle mitallisia. Todistamme siis, että Lebesguen mitta on metrinen mitta. Mitan subadditiivisuuden vuoksi riittää osoittaa, että $\mathcal{L}(A \cup B) \geq \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$ kaikilla $A, B \subset \mathbb{R}^n$, joille $d(A, B) > 0$.

Olkoot $\epsilon > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ ja $d(A, B) > 0$. Olkoon $I_k \in \mathcal{K}$ siten, että $A \cup B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ja $d(I_k) < \frac{d(A,B)}{2}$. Siis valitsemme välit I_k siten, etteivät ne leikkaa joukkoa A, sekä joukkoa B. Myös valitsemme välit I_k siten, että arvio

$$\mathcal{L}(A \cup B) \geq \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) - \epsilon$$

pätee. Niinpä

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A \cup B) &\geq \sum_{I_k \cap A \neq \emptyset} l(I_k) + \sum_{I_k \cap B \neq \emptyset} l(I_k) - \epsilon \\ &\geq \inf \sum_{I_k \cap A \neq \emptyset} l(I_k) + \inf \sum_{I_k \cap B \neq \emptyset} l(I_k) - \epsilon \\ &= \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) - \epsilon. \end{aligned}$$

Kun $\epsilon \to 0$, niin olemme todistaneet väitteen.

(2) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa n-välit $I_k \in \mathcal{K}$ siten, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \leq \mathcal{L}(A) + \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Olkoon $O_n = \bigcup_k I_k$, missä n-välit on valittu niin, että yllä oleva epäyhtälö pätee. Joukko $O_n \subset A$ on avointen joukkojen yhdisteenä avoin. Käyttämällä Lausetta 2.22 saamme

$$\mathcal{L}(O_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \leq \mathcal{L}(A) + \frac{1}{n}.$$

Olkoon $B = \bigcap_n O_n$. Koska $B \subset O_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen mitan monotonisuuden kautta saamme

$$\mathcal{L}(A) \leq \mathcal{L}(B) \leq \mathcal{L}(O_n) \leq \mathcal{L}(A) + \frac{1}{n} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Täten löydetylle Borelin joukolle B pätee $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ eli Lebesguen mitta on Borel-säännöllinen.

(3) Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Määrittelemme *joukon siirron* seuraavasti:

$$A + x_0 = \{x + x_0 \ : \ x \in A\}.$$

Osoitamme, että $\mathcal{L}\left(A\right) = \mathcal{L}\left(A + x_0\right)$. Peitämme joukon A avoimilla n-väleillä I_k. Tällöin joukon $A + x_0$ peittämiseksi kelpaa n- välit $I_k + x_0$ ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (I_k + x_0).$$

Tällöin

$$\mathcal{L}\left(A\right) = \mathcal{L}\left(A + x_0\right).$$

Olkoon $B\,(x, r) \subset \mathbb{R}^n$, $B\,(y, r) \subset \mathbb{R}^n$ ja $0 < r < \infty$. Pallot ovat suljettuina joukkoina Lebesgue-mitallisia ja valitsemalla $A = B\,(x, r)$ ja $A + x_0 = B\,(y, r)$, jossa $x_0 = y - x$, niin saamme väitteen. $\square$

5. Hausdorffin mitta

Seuraavaksi määrittelemme Hausdorffin mitan, joka on hyvin samankaltainen kuin Lebesguen mitta. Hausdorffin mitta on myös metrinen ulkomitta eli kaikki Borelin joukot ovat Hausdorff-mitallisia.

MÄÄRITELMÄ 2.24. Olkoon X separoituva avaruus, $A \subset X$ ja $0 \leq s < \infty$. Määrittelemme *s-ulotteinen Hausdorffin mitan* seuraavasti:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A), \text{ missä}$$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ d(E_i) \leq \delta\Big\}.$$

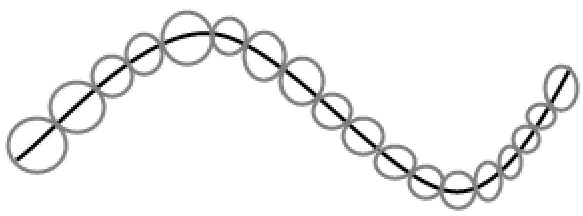
HUOMAUTUS.

- Sovimme, että kaikilla $0 \leq s < \infty$ ja kaikilla $x \in X$ pätee $d(\emptyset)^s = 0$ ja $d(\{x\})^0 = 0^0 = 1$.
- Oletus, että avaruus X on separoituva varmistaa, että on olemassa peitteet E_i siten, että $d(E_i) \leq \delta$.
- Raja-arvo $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ on selvästi olemassa, sillä

$$\mathcal{H}^s_\delta \leq \mathcal{H}^s_\epsilon \text{ aina, kun } 0 < \epsilon < \delta \leq \infty.$$

- Kun $s = 0$, niin Hausdorffin mitta $\mathcal{H}^0$ antaa joukon A pisteiden lukumäärän. Esimerkiksi, jos joukko A koostuu numeroituvasta määrästä pisteitä ja joukolla A ei ole kasautumispisteitä, niin peitämme jokaisen pisteen $x_i \in A$ joukoilla E_i siten, että $E_j \cap E_i = \emptyset$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$. Tällöin $d(E_i)^0 = 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, kun $i \neq j$. Tällöin $\Sigma_i d(E_i)^0$ antaa pisteiden lukumäärän.

  Vastaavasti, kun $s = 1$ ja mitattava joukko on äärellisen pitkä käyrä avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mitta $\mathcal{H}^1$ antaa käyrän pituuden, koska $d(E_i)^1 = d(E_i)$ (ks. Kuva 2.1).



KUVA 2.1. Käyrä on peitetty joukoilla E_i, jotka valitsimme tässä kuvassa palloiksi. Infimumin ottaminen ympyröiden halkaisijoiden summasta antaa käyrän pituuden, kun $\delta \to 0$.

ESIMERKKI 2.25. Hausdorffin mitta on ulkomitta määritelmän 2.6. mukaan.

i) Koska $d(\emptyset)^s = 0$, niin $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$ ja samoin $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

ii) Seuraa suoraan mitan $\mathcal{H}^s_\delta$ ja infimumin ominaisuuksista.

iii) Olkoon $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $A_i \subset X$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\delta > 0$. Oletamme, että $\mathcal{H}^s_\delta(A_i) < \infty$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Valitsemme jokaiselle A_i peitteen $\{E^i_j\}$ siten, että $d(E^i_j) \leq \delta$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja

$$\sum_{j=1}^\infty d(E^i_j)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \epsilon \cdot 2^{-j}.$$

Tällöin $\bigcup_{i,j=1}^\infty E^i_j$ on myös yhdisteen $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ peite. Täten

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) &\leq \sum_{i,j} d(E^i_j)^s \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \left(\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \epsilon \cdot 2^{-i}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \epsilon.\end{aligned}$$

Siispä $\mathcal{H}^s_\delta$ on subadditiivinen. Antamalla $\delta \to 0$, niin $\mathcal{H}^s$ on myös subadditiivinen.

LAUSE 2.26. *Määritelmän 2.16. ominaisuudet pätevät Hausdorffin mitalle eli Hausdorffin mitta on*

(1) *Borel-mitta,*
(2) *Borel-säännöllinen ja*
(3) *tasaisesti jakautunut.*

TODISTUS. (1) Todistamme, että Hausdorffin mitta on metrinen mitta, jolloin Seurauksen 2.15. mukaan kaikki Borel-joukot ovat Hausdorff mitallisia.

Olkoon joukot $A, B \subset X$, joille $d(A,B) > 0$ ja $0 < \delta < \frac{d(A,B)}{2}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Valitsemme joukot $E_i \subset X$ siten, että $d(E_i) < \delta$ ja $A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i$. Nyt joukot E_i ovat valittu niin, etteivät ne leikkaa kumpaakin joukkoa A ja B. Siispä

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) &\geq \sum_{i=1}^\infty d(E_i)^s \\ &\geq \sum_{A \cap E_i \neq \emptyset} d(E_i)^s + \sum_{B \cap E_i \neq \emptyset} d(E_i)^s \\ &\geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)\end{aligned}$$

Mitan $\mathcal{H}^s_\delta$ subadditiivisuuden ja rajankäynnin $\delta \to 0$ myötä saamme yhtäsuuruuden $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$.

(2) Todistamme siis, että jokaiselle joukolle $A \subset X$ on olemassa Borelin joukko B siten, että $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$. Olkoon $A \subset X$. Jos $\mathcal{H}(A) = \infty$, niin voimme valita $B = X$. Koska $d(E_i) = d(\overline{E_i})$, niin

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^\infty d(E_i)^s \mid A \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i, d(E_i) < \delta, E_i \text{ on suljettu}\Big\}.$$

Voimme myös valita joukolle A suljetun peitteen $\{E_i^k\}$ siten, että $d(E_i^k) < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i^k)^s \leq \mathcal{H}^s_{1/k}(A) + \frac{1}{k}.$$

Siis $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Olkoon $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^k$, joka on Borelin joukko. Myös $A \subset B$. Nyt

$$\mathcal{H}^s_{1/k}(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} d(E_i^k)^s \leq \mathcal{H}^s_{1/k}(A) + \frac{1}{k}.$$

Rajankäynnillä $k \to \infty$ saamme $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. Lisäksi $\mathcal{H}^s(B) \geq \mathcal{H}^s(A)$, koska $A \subset B$.

(3)Todistus on hyvin samanlainen kuin Lebesguen mitalle lauseessa 2.23. □

6. Mitalliset funktiot

MÄÄRITELMÄ 2.27. Joukko $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on *laajennettu reaalilukujoukko.* Tässä $-\infty, \infty \notin \mathbb{R}$. Ominaisuuksia:

- Määrittelemme järjestyksen seuraavasti:

$$-\infty < a < \infty \text{ kaikilla } a \in \mathbb{R}.$$

- Algebralliset laskutoimitukset määrittelemme vastaavasti kuin joukossa $\mathbb{R}$, mutta laskutoimituksia

$$\infty - \infty, \infty + (-\infty), -\infty + \infty$$

ja

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ ja } \frac{0}{0}$$

ei ole määritelty.

MÄÄRITELMÄ 2.28. Olkoon joukko $A \in \mathcal{M}$. Funktio $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on *μ-mitallinen* tai lyhyemmin *mitallinen*, jos jokaisella $a \in \mathbb{R}$ alkukuva

$$f^{-1}(]a, \infty]) = \{x \in X \ : \ f(x) > a\}$$

on μ-mitallinen. Funktio f on *Borel-funktio*, jos joukko A on Borelin joukko ja joukot $\{x \in A : f(x) < c\}$ ovat Borelin joukkoja kaikilla $c \in \mathbb{R}$.

LAUSE 2.29. *Olkoon μ Borel-mitta ja joukko $A \subset X$ μ -mitallinen. Tällöin jatkuva funktio $f\colon A \to \mathbb{R}$ on μ-mitallinen.*

TODISTUS. Jatkuvalle funktiolle f avoimen joukon $B \subset A$ alkukuva $f^{-1}(B)$ on avoin ja muotoa

$$f(B) = A \cap U,$$

jollekin avoimelle joukolle $U \subset X$ eli funktio f on mitallinen. □

LAUSE 2.30. *Jos $\{f_n\}$ on jono μ-mitallisia funktioita, niin silloin*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \liminf_{n\to\infty} f_n \text{ ja } \limsup_{n\to\infty} f_n$$

ovat μ-mitallisia.

TODISTUS. Friedman [3] s.33, Purmonen [4] s. 40, Lawrence ja Gariepy [5] s.11, Federer [7] s.84. □

MÄÄRITELMÄ 2.31. Funktio $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ on *ylhäältä puolijatkuva*, jos

$$\limsup_{y\to x} f(y) \le f(x) \quad \text{kaikilla } x \in A$$

ja vastaavasti *alhaalta puolijatkuva*, jos

$$\liminf_{y\to x} f(y) \ge f(x) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Määritelmästä seuraa suoraan, että ylhäältä ja alhaalta puolijatkuva funktio on jatkuva.

LAUSE 2.32. *Olkoon $f\colon X \to \mathbb{R}$. Funktio f on ylhäältä puolijatkuva jos ja vain jos on olemassa vähenevä jono jatkuvia funktioita, jotka suppenee pisteittäin kohti funktiota f.*

TODISTUS. Gordon [10] s.85. □

LAUSE 2.33. *Olkoon μ Borel-mitta. Tällöin ylhäältä puolijatkuvat funktiot ovat mitallisia.*

TODISTUS. Lauseen 2.32 mukaan löydämme vähenevän jonon f_n jatkuvia funktioita, jotka suppenevat kohti ylhäältä puolijatkuvaa funktiota f kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska funktiot f_n ovat jatkuvia, niin Lauseen 2.29 mukaan ne ovat mitallisia. Käyttämällä Lausetta 2.32 saamme

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$$

eli ylhäältä puolijatkuva funktio f on mitallinen. □

MÄÄRITELMÄ 2.34. Olkoon funktio $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, jolle pätee $\varphi(X) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k\}$. Tällöin funktiota φ kutsutaan *yksinkertaiseksi*. Asetamme

$$A_i = \{x \in X \;:\; \varphi(x) = a_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots k,$$

missä joukot A_i ovat pistevieraita ja

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X.$$

Tällöin funktion φ *normaaliesitys* on

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i},$$

missä χ_{A_i} on mitallisen joukon A_i karakteristinen funktio.

MÄÄRITELMÄ 2.35. Olkoon φ yksinkertainen funktio, jolla on normaaliesitys $\varphi = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$. Funktion φ *integraali yli joukon $A \in \mathcal{M}$* mitan μ suhteen on

$$I(\varphi, A) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i \cap A) \;\in [0, \infty].$$

Määritelmä 2.36. Mitallisen funktion $f\colon A \to [0,\infty]$ *integraali yli joukon A (mitan μ suhteen)* on

$$\int_A f\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu(x) = \sup\{I(\varphi, A) : \varphi \text{ on yksinkertainen, } 0 \le \varphi \le f \text{ joukossa } A\}.$$

Lemma 2.37 (Fatou). *Olkoon $f_n\colon X \to [0,\infty]$ jono μ-mitallisia funktioita siten, että $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$. Tällöin*

$$\int_X f\ d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu.$$

Todistus. Purmonen [4] s.53, Evans ja Gariepy [5] s.19. □

Määritelmä 2.38. Olkoon μ mitta avaruudessa X. Kutsumme mittaa μ *lokaalisti äärelliseksi*, jos kaikilla $x \in X$ on olemassa $r > 0$ siten, että $\mu\left(B\left(x, r\right)\right) < \infty$.

Määritelmä 2.39. Olkoon joukot $A_i \subset X$ μ-mitallisia ja joukot $B_i \subset Y$ μ-mitallisia kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Määrittelemme *tulomitan* $\mu \times \nu$ siten, että

$$\left(\mu \times \nu\right)\left(C\right) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i),$$

kaikilla

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i.$$

Huomautus. Selvästi tulomitta $\mu \times \nu$ on Borel-mitta tai tasaisesti jakautuneita jos molemmilla mitoilla μ ja ν on sama ominaisuus.

Lause 2.40 (Fubini). *Oletamme, että X ja Y ovat separoituvia metrisiä avaruuksia ja μ on lokaalisti äärellinen Borel-mitta avaruudessa X ja ν vastaavasti avaruudessa Y. Jos funktio f on ei-negatiivinen Borel-funktio tuloavaruudessa $X \times Y$, niin silloin*

$$\int_Y \int_X f(x,y) d\mu x\ d\nu y = \int_X \int_Y f(x,y) d\nu y\ d\mu x.$$

Myös kuvaus

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\ d\mu x \ \text{ on } \nu\text{-mitallinen.}$$

Erityisesti, kun f on Borelin joukon $A \subset X \times Y$ karakteristinen funktio, niin

$$\left(\mu \times \nu\right)\left(A\right) = \int_Y \mu(\{x \mid (x,y) \in A\})\ d\nu y = \int_X \nu(\{y \mid (x,y) \in A\})\ d\mu x.$$

Todistus. Friedman [3] s.84, Evans ja Gariepy [5] s.22, Federer [7] s.115. □

LUKU 3

Kahden mitan vertailua

1. Borel-säännöllisten ja tasaisesti jakautuneiden mittojen suhde

LEMMA 3.1. *Olkoon μ Borel-mitta avaruudessa X ja $\mu(X) < \infty$. Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma, kaikista avaruuden X osajoukoista A, joille kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa suljettu joukko C ja avoin joukko V siten, että $C \subset A \subset V$ ja*

$$\mu(V \setminus C) < \epsilon.$$

Tällöin kokoelma $\mathcal{A}$ muodostaa σ-algebran avaruudessa X.

TODISTUS.

(1) Valitsemme suljetuksi joukoksi $C = \emptyset$ ja avoimeksi joukoksi $V = \emptyset$. Selvästi $C \subset \emptyset \subset V$ ja

$$\mu(V \setminus C) < \epsilon.$$

Siispä $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) Olkoon $A \in \mathcal{A}$ eli on olemassa suljettu joukko C ja avoin joukko V siten, että $C \subset A \subset V$ ja

$$\mu(V \setminus C) < \epsilon.$$

Joukko $A^c \in \mathcal{A}$, koska

$$\mu(V^c \setminus C^c) = \mu(V \setminus C) < \epsilon,$$

missä $C^c \subset (X \setminus A) \subset V^c$. Myös joukko V^c on suljettu ja joukko C^c avoin.

(3) Olkoot joukot $A_i \in \mathcal{A}$, joille on olemassa suljetut joukot $C_i \subset A_i$ ja avoimet joukot $V_i \subset X$ siten, että $C_i \subset A_i \subset V_i$ ja

$$\mu(V_i \setminus C_i) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

Koska $C_i \subset A_i \subset V_i$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$. Koska oletimme, että $\mu(X) < \infty$, niin käyttämällä Lausetta 2.12 saamme, että

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)\\ &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (V_i \setminus C_i)\right)\\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+1}} = \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Siispä löydämme avoimen joukon $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ ja riittävän suurella $n \in \mathbb{N}$ löydämme suljetun joukon $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$, joille pätee $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ ja

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) < \epsilon.$$

Siispä $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ja kokoelma $\mathcal{A}$ muodostaa σ-algebran avaruudessa X.

□

SEURAUS 3.2. *Olkoon A Borelin joukko, jolle $\mu(A) < 0$. Edelisen lemman kokoelmaan $\mathcal{A}$ sisältyy kaikki avaruuden X Borelin joukot.*

TODISTUS. Olkoon A suljettu. Osoitamme aluksi, että $A \in \mathcal{A}$. Valitaan $C = A$ ja olkoon avoimet joukot

$$A_n = \left\{x \in X \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Kun $n \to \infty$, niin $\mu(A_n) \to \mu(A)$. Siispä riittävän suurella $k \in \mathbb{N}$ ja kaikilla $\epsilon > 0$ pätee

$$\mu(A_k \setminus A) < \epsilon,$$

eli valitsemme avoimeksi joukoksi $V = A_k$. Eli kaikki avaruuden X suljetut joukot sisältyvät kokoelmaan $\mathcal{A}$.

Koska kokoelma $\mathcal{A}$ muodostaa σ-algebran ja kaikki avaruuden suljetut joukot sisältyvät kokoelmaan $\mathcal{A}$, niin mielivaltainen Borelin joukko A kuuluu myös kokoelmaan $\mathcal{A}$. Siis kaikille Borelin joukoille A ja kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa suljettu joukko C ja avoin joukko V siten, että $C \subset A \subset V$ ja $\mu(V \setminus C) < \epsilon$. □

LEMMA 3.3. *Olkoon μ Borel-säännöllinen mitta avaruudessa X, joukko $A \subset X$ μ-mitallinen ja $\epsilon > 0$.*

(1) *Olkoon $\mu(A) < \infty$. Tällöin on olemassa suljettu joukko $C \subset A$ siten, että $\mu(A \setminus C) < \epsilon$.*
(2) *Olkoon avoimet joukot $V_1, V_2, \ldots$ siten, että $\mu(V_i) < \infty$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

Tällöin on olemassa avoin joukko $V \subset X$ siten, että $A \subset V$ ja $\mu(V \setminus A) < \epsilon$.

TODISTUS.

(1) Todistuksessa käytämme Seurausta 3.2, jossa oletimme, että $\mu(X) < \infty$ Borel-mitalle μ. Tarkastelemme rajoittumamittaa $\mu|_A$, jolloin

$$\mu|_A(X) = \mu(X \cap A) = \mu(A) < \infty.$$

Lauseen 2.18 kohdan (2) mukaan $\mu|_A$ on Borel-säännöllinen. Borel-säännöllisyyden määritelmästä 2.16 saamme suoraan, että on olemassa Borelin joukko B siten, että

$$A \subset B \text{ ja } \mu|_A(A) = \mu|_A(B).$$

Tällöin $\mu|_A(B \setminus A) = 0$. Vastaavasti on olemassa Borelin joukko D siten, että $B \setminus A \subset D$, jolle $\mu|_A(D) = 0$ (ks. Kuva 3.1). Valitsemme joukon E siten, että $E = B \setminus D$, joka on Borelin joukko. Myös $E \subset A$ ja $\mu|_A(A \setminus E) = 0$. Seurauksen 3.2 mukaan

$E \in \mathcal{A}$ eli on olemassa suljettu joukko C ja avoin joukko V siten, että $C \subset E \subset V$ ja $\mu|_A(V \setminus C) < \epsilon$. Koska $E \subset V$

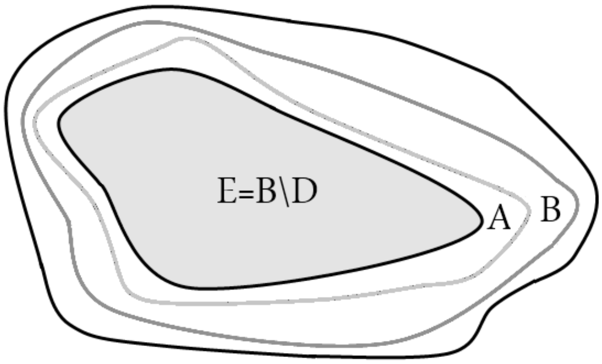
$$\mu|_A(E \setminus C) \leq \mu|_A(V \setminus C) < \epsilon.$$

Koska $\mu|_A(A \setminus E) = 0$ ja $\mu|_A(E \setminus C) < \epsilon$, niin

$$\mu|_A(A \setminus C) < \epsilon.$$

Käytämme rajoittumamitan määritelmää ja saamme

$$\mu(A \setminus C) = \mu\left(A \cap (A \setminus C)\right) = \mu|_A(A \setminus C) < \epsilon.$$



Kuva 3.1. Lemman 3.3 kohdan (1) todistuksen apukuva.

(2) Käytämme kohtaa (1) joukoille $V_i \setminus A$, jolloin löydämme suljetut joukot $C_i \subset V_i \setminus A$ siten, että

$$\mu\left((V_i \setminus A) \setminus C_i\right) < \frac{\epsilon}{2^i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Tällöin $A \subset V = \bigcup_i (V_i \setminus C_i)$, missä joukko V on avoin, jolle $\mu(V \setminus A) < \epsilon$. □

Lause 3.4. *Olkoon μ ja ν tasaisesti jakautuneita Borel-säännöllisiä mittoja separoituvassa metrisessä avaruudessa X. Tällöin on olemassa vakio c siten, että $\mu = c\nu$.*

Todistus. Olkoon g funktio, joka antaa mitan r-säteiselle pallolle mitattaessa mitalla μ ja vastaavasti funktio h mitalle ν:

$$g(r) = \mu(B(x,r)),\ h(r) = \nu(B(x,r)) \text{ kaikilla } x \in X,\ 0 < r < \infty.$$

Olkoon joukko $U \subset X$ epätyhjä rajoitettu avoin joukko. Tarkastelemme raja-arvoa

$$\lim_{r \to 0} \nu(U \cap B(x,r))/h(r).$$

Joukko $U \cap B(x,r)$ on ν-mitallinen, koska oletimme, että ν on Borel-säännöllinen. Olkoon $x \in U$. Koska joukko U on avoin, niin on olemassa r_0 siten, että

$$B(x,r) \subset U, \text{ kaikilla } 0 < r \leq r_0.$$

Siten

$$U \cap B(x,r) = B(x,r) \text{ kaikilla } 0 < r \leq r_0.$$

Siispä

$$\lim_{r \to 0} \frac{\nu\left(U \cap B(x,r)\right)}{h(r)} = \lim_{r \to 0} \frac{\nu(U \cap B(x,r))}{\nu(B(x,r))} = 1 \text{ kaikilla } x \in U. \tag{3.1}$$

Oletamme, että saamme mitan $\mu(U)$ integroimalla. Tällöin
$$\mu(U) = \int_U 1 \; d\mu = \int_U \lim_{r\to 0} h(r)^{-1}\nu(U \cap B(x,r)) \; d\mu x.$$
Käytämme Fatoun lemmaa 2.37, jolloin saamme
$$\mu(U) \le \liminf_{r\to 0} h(r)^{-1} \int_U \nu(U \cap B(x,r)) \; d\mu x.$$
Seuraavaksi käytämme Määritelmää 2.16 eli mitan ν tasaisesti jakautuneisuutta ja Fubinin lausetta 2.40, jolloin saamme
$$\begin{aligned}\mu(U) &\le \liminf_{r\to 0} h(r)^{-1} \int_U \nu\left(U \cap B(y,r)\right) d\mu y\\ &\le \liminf_{r\to 0} h(r)^{-1} \int_U \underbrace{\mu(B(y,r))}_{g(r)} d\nu y\\ &= \left(\liminf_{r\to 0} \frac{g(r)}{h(r)}\right) \nu(U).\end{aligned}$$
Samalla tavoin tarkastelemalla mittaa $\nu(U)$ saamme
$$\nu(U) \le \left(\liminf_{r\to 0} \frac{h(r)}{g(r)}\right) \mu(U).$$
Väite on siis todistettu kaikilla avoimilla joukoilla U, jos vakiomme on hyvin määritelty. Yhdistämällä yllä olevia epäyhtälöitä saamme
$$\mu(U) \le \left(\liminf_{r\to 0} \frac{g(r)}{h(r)}\right) \left(\liminf_{r\to 0} \frac{h(r)}{g(r)}\right) \mu(U).$$
Supistamalla ja jakamalla sopivasti saamme
$$\left(\liminf_{r\to 0} \frac{g(r)}{h(r)}\right)^{-1} \le \liminf_{r\to 0} \frac{h(r)}{g(r)},$$
josta
$$\limsup_{r\to 0} \frac{h(r)}{g(r)} \le \liminf_{r\to 0} \frac{h(r)}{g(r)}.$$
Siispä raja-arvo $\lim_{r\to 0} g(r)/h(r) = c$ olemassa ja $\mu(U) = c\nu(U)$ kaikilla avoimilla U. Käyttämällä Lemman 3.3 kohtaa (2) ja mittojen μ ja ν Borel-säännöllisyyttä saamme, että $\mu = c\nu$.

Tarkistamme vielä, että funktio $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \nu(U \cap B(x,r))$ on mitallinen, jonka oletimme Fatoun lemmaa ja Fubinin lausetta käyttäessä. Tämän osoittamiseksi riittää näyttää, että $x \mapsto \nu(B(x,r))$ on ylhäältä puolijatkuva, koska mitallinen joukko U ei vaikuta mitallisuuteen ja olemme osoittaneet Lauseessa 2.33, että ylhäältä puolijatkuvat funktiot ovat mitallisia Borel-mitoille.

Olkoon $B(y,r) \subset B(x, r + \frac{1}{n})$, jollakin $n \in \mathbb{N}$, kun $x, y \in X$. Mitan subadditiivisuuden nojalla saamme
$$\nu(B(y,r)) \le \nu(B(x, r + \frac{1}{n})).$$
Kun $n \to \infty$, niin lauseen 2.12 nojalla $\nu(B(x, r + \frac{1}{n})) \to \nu(B(x,r))$, josta saamme, että

$$\limsup_{y \to x} \nu(B(y,r)) \leq \nu\left(B(x,r)\right).$$

□

HUOMAUTUS 3.5.

- Lauseesta seuraa suoraan: Jos $\nu(A) = 0$, niin $\mu(A) = 0$.
- Yhtälössä 3.1 ratkaisemme raja-arvon $\lim_{r \to 0} \nu(U \cap B(x,r))/h(r) = 1$. Löydämme raja-arvoa koskevan yleisen todistuksen lähteestä Mattila [6] s. 38.
- Lauseessa 3.4 oletimme, että mitat μ ja ν ovat tasaisesti jakautuneita ja Borel-säännöllisiä mittoja. Aikaisemmin olemme todistaneet nämä ominaisuudet Lebesguen ja Hausdorffin mitoille. Edellinen lause kertoo siis, että $\mathcal{H}^n = c \cdot \mathcal{L}^n$ tai $c \cdot \mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$, missä $\mathcal{L}^n$ tarkoittaa *n-ulotteista Lebesguen mittaa.* Voimme kuitenkin todeta selvästi, että $\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{L}^1(A)$, kun $A \subset \mathbb{R}$, mistä tarkat yksityiskohdat todistuksesta löytyvät lähteestä Evans ja Gariepy [5] s.63. Jatkamme Hausdorffin ja Lebesguen mitan vertailua ja tästä eteenpäin käsittelemme vain avaruutta $\mathbb{R}^n$.

2. Vitalin peitelause

Vitalin peitelauseessa pyrimme peittämään mielivaltaisen joukon numeroituvalla määrällä erillisiä palloja. Tulokseksi saamme, ettei Lebesguen mitta tunnista onko joukko täysin peitetty eli joukon ja pallojen yhdisteiden erotukseksi jää nollamittainen joukko. Pallojen erillisyys on välttämätön, jotta voimme käyttää mitan additiivisuutta edellisen todistamiseksi.

MÄÄRITELMÄ 3.6. Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\mathcal{F}$ kokoelma, joka koostuu avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetuista palloista siten, että

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Kutsumme kokoelmaa $\mathcal{F}$ joukon A *hienojakoiseksi peitteeksi*, jos

$$\inf\{d(B) \mid x \in B,\ B \in \mathcal{F}\} = 0$$

jokaiselle $x \in A$.

LAUSE 3.7 (Peruspeitelause). *Olkoon $\mathcal{F}$ kokoelma suljettuja palloja rajoitetussa joukossa $U \subset \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$\sup\{d(B) \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Tällöin on olemassa numeroituva osakokoelma $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ siten, että

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B,$$

missä kokoelman $\mathcal{G}$ pallot ovat erilliset. Merkintä $5B$ tarkoittaa palloa, jolla on sama keskipiste kuin pallolla B ja jonka säde on viisi kertaa suurempi kuin pallon B.

TODISTUS. Todistamme lauseen konstruktiivisesti ja todistamme aluksi lauseen erikoistapauksen eli oletamme, että

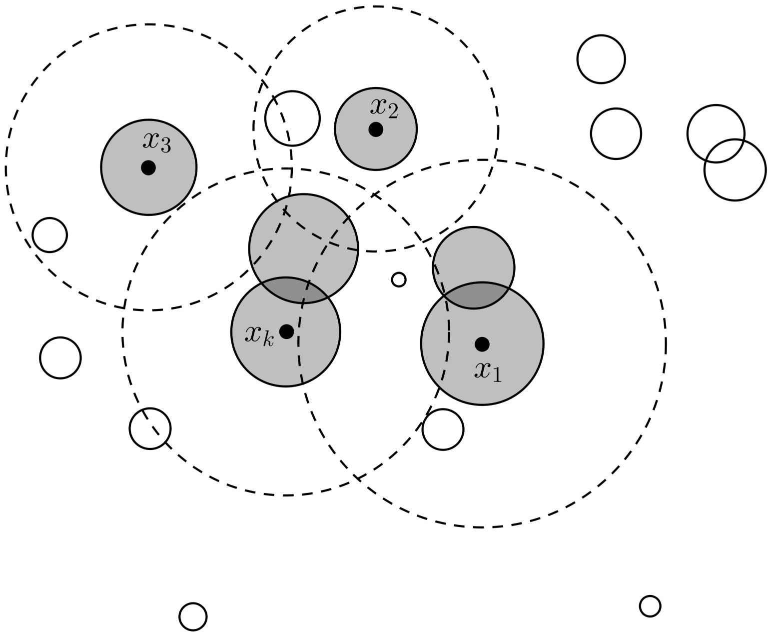
$$\mathcal{F} = \{B(x, r(x)) \mid x \in A\}.$$

Jokainen piste $x \in A$ on siis vain yhden pallon keskipiste. Olkoon

$$D = \sup\{d(B)/2 \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Olkoon joukko $A_1 \subset A$ siten, että

$$A_1 = \Big\{x \in A \mid \frac{3D}{4} < r(x) \le D\Big\}.$$



KUVA 3.2. Tummennetuille palloille pätee $\frac{3D}{4} < r(x) \le D$. Katkoviivalla piirretyt pallot ovat palloja $B(x_i, 3r(x_i))$.

Valitsemme pisteen $x_1 \in A_1$ mielivaltaisesti ja jatkamme pisteiden x_i valintaa induktiivisesti:

$$x_{n+1} \in A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 3r(x_i)).$$

Lopetamme pallojen keskipisteiden valinnan, kun

$$A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 3r(x_i)) = \emptyset.$$

Valitsemme pallot $B(x_i, r(x_i))$ kokoelmaan $\mathcal{G}_1$, joka koostuu erillisistä palloista, joita on n kappaletta. Palloja on varmasti äärellinen määrä, koska emme voi asettaa ääretöntä määrää $\frac{3D}{4}$-säteisiä erillisiä palloja rajoitettuun joukkoon U. Myös

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 3r(x_i)).$$

Koska $r(x) < 2r(x_i)$ kaikilla $x \in A_1$ ja $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, niin

$$\bigcup_{x \in A_1} B(x, r(x)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Olkoon

$$A_2 = \left\{ x \in A \mid \left(\frac{3}{4}\right)^2 D < r(x) \leq \frac{3}{4} D \right\} \text{ ja}$$

$$A_2' = \left\{ x \in A_2 \mid B(x, r(x)) \cap \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r(x_i)) = \emptyset \right\}.$$

Jos $x \in A_2 \setminus A_2'$, niin on olemassa $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ siten, että $B(x, r(x)) \cap B(x_i, r(x_i)) \neq \emptyset$, josta saamme

$$d(x, x_i) \leq r(x) + r(x_i) \leq 2r(x_i).$$

Nyt saamme

$$\bigcup_{x \in A_2 \setminus A_2'} B(x, r(x)) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} 5B.$$

Jatkamme todistusta kuten yllä. Valitsemme pisteen x_{n+1} mielivaltaisesti joukosta A_2' ja seuraavat pisteet induktiivisesti:

$$x_{k+1} \in A_2' \setminus \bigcup_{j=n+1}^{k} B\left(x_j, 3r(x_j)\right).$$

Lopetamme pisteiden valinnan, kun

$$A_2' \setminus \bigcup_{j=n+1}^{k} B(x_j, 3r(x_j)) = \emptyset.$$

Valitsemme pallot $B(x_j, r(x_j))$ kokoelmaan $\mathcal{G}_2$. Kuten yllä, pallot $B(x_j, r(x_j))$ ovat erillisiä kaikilla $j = n + 1, \ldots, k$. Kokoelman $\mathcal{G}_2$ palloja on $k - n$ eli äärellinen määrä ja

$$A_2' \subset \bigcup_{j=n+1}^{k} B(x_j, 3r(x_j)).$$

Edelleen

$$\bigcup_{x \in A_2} B(x, r(x)) \subset \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, 5r(x_j)).$$

Jatkamme kuten yllä numeroituvan monta kertaa, saamme

$$A_p = \left\{ x \in A \mid \left(\frac{3}{4}\right)^p D < r(x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1} D \right\}$$

ja

$$A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p.$$

Kokoelmaksi $\mathcal{G}$ valitaan

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i,$$

joka koostuu suljetuista ja erillisistä palloista.

Oletimme aluksi, että jokainen piste $x \in A$ on vain yhden pallon keskipiste. Esimerkiksi lausekkeessa $x_i \in A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 3r(x_i))$ luvun kolme paikalla olisi voinut olla pienempi luku, esimerkiksi $\frac{8}{3}$. Tämä tarkoittaa sitä, että olisimme valinneet kokoelmiin $\mathcal{G}_i$ enemmän palloja rikkomatta numeroituvuutta. Voimme myös kasvattaa hieman pallojen säteitä eli olisimme voineet todistaa lauseen esimerkiksi palloille $\bigcup_{B \in \mathcal{G}} 6B$, jolloin pallojen peittävyys olisi ollut suurempi ja pisteisiin olisi voinut liittää erisäteisiä palloja. □

Seuraus 3.8 (Vitalin peitelause). *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu. Olkoon kokoelma $\mathcal{F}$ joukon A hienojakoinen peite. Tällöin on olemassa numeroituva kokoelma $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, joka koostuu suljetuista ja erillisistä palloista siten, että*

$$\mathcal{L}^n \left(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0.$$

Todistus. Jos $\mathcal{L}^n(A) = 0$, niin väite triviaali eli oletamme, että $\mathcal{L}^n(A) > 0$. Voimme valita Lemman 3.3 kohdan (2) perusteella joukon $U \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $A \subset U$ ja

$$\mathcal{L}^n (U) \leq \left(1 + 7^{-n}\right) \mathcal{L}^n (A). \tag{3.2}$$

Peruspeitelauseesta 3.7 saamme numeroituvan kokoelman $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}$, joka koostuu suljetuista ja erillisistä palloista, jotka sisältyvät joukkoon U ja siten, että

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} 5B.$$

Täten

$$5^{-n}\mathcal{L}^n(A) \leq 5^{-n} \sum_{B \in \mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(5B_i) = \sum_{B \in \mathcal{G}_1} \mathcal{L}^n(B_i).$$

Edellisestä epäyhtälöstä saamme

$$6^{-n}\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i=1}^{k_1} \mathcal{L}^n(B_i), \tag{3.3}$$

jollakin $k_1 \in \mathbb{N}$ ja $B_1, \ldots, B_{k_1} \in \mathcal{G}_1$. Olkoon joukko

$$A_1 = A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i.$$

Koska joukot B_i ovat erillisiä ja $B_i \subset U$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin

$$\mathcal{L}^n(A_1) \leq \mathcal{L}^n \left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i \right) = \mathcal{L}^n(U) - \sum_{i=1}^{k_1} \mathcal{L}^n(B_i).$$

Yhdistämällä epäyhtälöt 3.2 ja 3.3 saamme

$$\mathcal{L}^n(A_1) \leq (1 + 7^{-n} - 6^{-n})\mathcal{L}^n(A) = u\mathcal{L}^n(A),$$

missä $u = 1 + 7^{-n} - 6^{-n} < 1$.

Jatkamme todistusta kuten yllä. Lemman 3.3 mukaan voimme valita avoimen joukon U_1 siten, että $A_1 \subset U_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1}$ ja

$$\mathcal{L}(U_1) \leq (1 + 7^{-n})\mathcal{L}^n(A_1).$$

Peruspeitelauseen 3.7 mukaan voimme valita numeroituvan kokoelman $\mathcal{G}_2$ erillisiä suljettuja palloja siten, että kokoelman $\mathcal{G}_2$ pallot sisältyvät joukkoon U_1 ja

$$A_1 \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_2} 5B.$$

Kuten yhtälössä 3.3 saamme

$$6^{-n}\mathcal{L}^n(A_1) \leq \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \mathcal{L}^n(B_i)$$

jollakin $k_2 \in \mathbb{N}$ ja $B_k, \ldots, B_{k_2} \in \mathcal{G}_2$. Määrittelemme joukon A_2 siten, että

$$A_2 = A_1 \setminus \bigcup_{i=k+1}^{k_2} B_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_2} B_i,$$

jolle

$$\mathcal{L}^n(A_2) \leq u\mathcal{L}^n(A_1) \leq u^2\mathcal{L}^n(A).$$

Jatkamalla m kertaa, saamme

$$\mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_m} B_i\right) \leq u^m\mathcal{L}^n(A),$$

missä pallot B_i ovat erilliset kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Väite seuraa, koska $u < 1$. □

HUOMAUTUS 3.9. Voisimme todistaa Vitalin peitelauseen rajoittamattomalle avoimelle joukolle A, kun valitsemme joukot A_m seuraavasti:

$$A_m = \{x \in A \mid m < \|x\| < m + 1\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Joukot A_m ovat erillisiä ja avoimia kaikilla $m \geq 0$. Aluksi voimme todeta, että $\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = m\}\right) = 0$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$, jonka jälkeen käytämme yllä olevaa todistusta joukkoihin $A \cap A_m$.

3. Hausdorffin ja Lebesguen mitan yhtäsuuruus

Tämän luvun ensimmäisessä kappaleessa tarkastelimme tulosta $c \cdot \mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$. Tässä kappaleessa osoitamme, että vakio $c = \frac{\alpha(n)}{2^n}$, missä $\alpha(n)$ on kirjoitelman alkupuolella todistettu n-ulotteisen yksikköpallon tilavuus eli

$$\alpha(n) = volB(0, 1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Määrittelemme kuitenkin vielä muun muassa Steinerin symmetrisoinnin ja todistamme symmetrisointia koskevia tuloksia.

LEMMA 3.10. *Olkoon funktio* $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ $\mathcal{L}^n$ *-mitallinen. Tällöin alue, joka jää funktion "graafin alapuolelle" eli joukko*

$$A = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le f(x)\}$$

on $\mathcal{L}^{n+1}$ *-mitallinen.*

TODISTUS. Olkoot joukot

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le f(x) < \infty\}$$

ja

$$C_{j,k} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \frac{j}{k} \le f(x) < \frac{j+1}{k}\Big\},$$

missä $j \in \{0,1,2\dots\}$; $k \in \{1,2,3\dots\}$. Tällöin $\bigcup_{j=0}^{\infty} C_{j,k} = \mathbb{R}^n$ kaikilla $k \in \{1,2,3\dots\}$. Joukot $C_{j,k}$ ovat $\mathcal{L}^n$-mitallisia, koska ne ovat mitallisen funktion puoliavoimen välin alkukuvia. Asetamme myös joukot

$$D_k = \bigcup_{j=0}^{\infty}\left(C_{j,k} \times \left[0,\frac{j}{k}\right]\right),$$

$$E_k = \bigcup_{j=0}^{\infty}\left(C_{j,k} \times \left[0,\frac{j+1}{k}\right]\right).$$

Joukot D_k ja E_k ovat $\mathcal{L}^{n+1}$ -mitallisia, koska ne ovat $\mathcal{L}^n$ ja $\mathcal{L}^1$ -mitallisten joukkojen karteesisien tulojen yhdisteitä (ks. Purmonen [4]). Myös joukot $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ ja $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ovat $\mathcal{L}^{n+1}$ -mitallisia. Määrittelimme joukot myös niin, että $D_k \subset A \subset E_k$ ja $D \subset A \subset E$. Olkoon $R > 0$. Saamme epäyhtälön

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{n+1}\big((E \setminus D) \cap B^{n+1}(0,R)\big) &\le \mathcal{L}^{n+1}\big((E_k \setminus D_k) \cap B^{n+1}(0,R)\big)\\ &\le \frac{1}{k}\mathcal{L}^n\left(B^n(0,R)\right),\end{aligned}$$

missä

$$E_k \setminus D_k = \bigcup_{j=0}^{\infty}\left(C_{j,k} \times \left]\frac{j}{k},\frac{j+1}{k}\right]\right).$$

Kun $k \to \infty$, niin viimeinen termi edellisessä epäyhtälössä lähestyy nollaa. Silloin $\mathcal{L}^{n+1}((E\setminus D)\cap B^{n+1}(0,R)) = 0$ ja samoin $\mathcal{L}^{n+1}(E\setminus D) = 0$. Täten myös $\mathcal{L}^{n+1}(A\setminus D) = 0$ ja siispä joukko A on $\mathcal{L}^{n+1}$ mitallinen. □

MÄÄRITELMÄ 3.11. Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| = 1$. Määrittelemme

$$L_b^a = \{b + ta \mid t \in \mathbb{R}\}$$

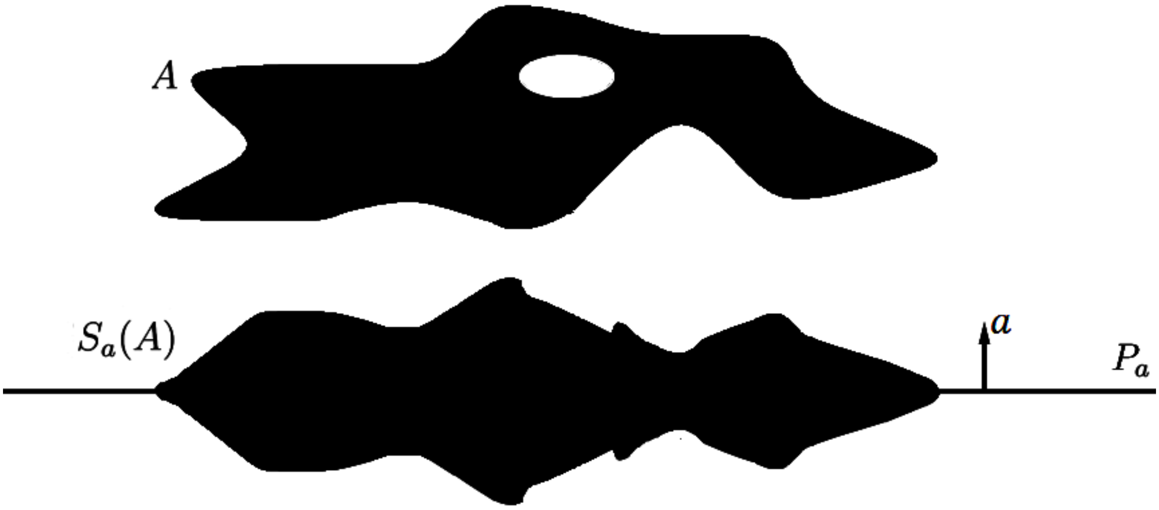
ja

$$P_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = 0\}.$$

Joukko L_b^a on pisteen b kautta kulkeva suora, joka on vektorin a suuntainen ja joukko P_a on vektorin a kohtisuora hypertaso.

MÄÄRITELMÄ 3.12. Olkoon $a \in \mathbb{R}^n$ siten, että $\|a\| = 1$ ja olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Joukon A *Steinerin symmetrisointi* (ks. Kuva 3.3) tasolle P_a on joukko

$$S_a(A) = \Big\{b + at \mid\ b \in P_a,\ A \cap L_b^a \neq \emptyset, |t| \le \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)\Big\}.$$



KUVA 3.3. Joukon A Steinerin symmetrisointi tasolle P_a.

LEMMA 3.13.

(1) *Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Steinerin symmetrisoinnille pätee $d(S_a(A)) \leq d(A)$.*
(2) *Olkoon joukko A rajoitettu. Jos joukko A on $\mathcal{L}^n$-mitallinen, niin tällöin myös $S_a(A)$ on $\mathcal{L}^n$ -mitallinen ja*

$$\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A).$$

TODISTUS.
(1) Jos $d(A) = \infty$, $d(A) = 0$ tai $d(S(A)) = 0$, niin silloin $d(S_a(A)) \leq d(A)$. Oletamme siis, että $d(A) < \infty$ ja $d(S(A)) > 0$. Voimme myös tarkastella joukkoa A suljettuna. Olkoon $\epsilon > 0$ ja valitaan $x, y \in S_a(A)$ siten, että

$$d(S_a(A)) \leq \|x - y\| + \epsilon.$$

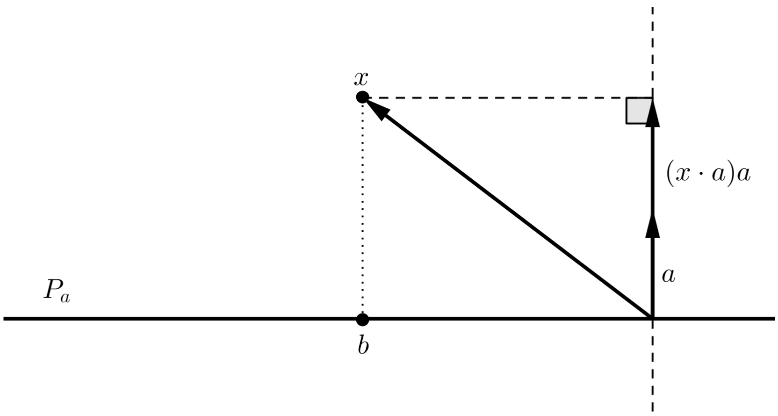
Valitaan $b = x - (x \cdot a)a$ ja $c = y - (y \cdot a)a$, jolloin $b, c \in P_a$. Valitsemalla näin $|(x \cdot a)|$ on pisteen x etäisyys tasosta P_a, $(x \cdot a)a$ on vektorin x projektio vektorin a suuntaiselle origon kautta kulkevalle suoralle ja piste b on pisteen x projektio tasolle P_a (Kuva 3.4).

Valitsemme

$$\begin{aligned} r &= \inf\{t \mid b + ta \in A\} \\ s &= \sup\{t \mid b + ta \in A\} \\ u &= \inf\{t \mid c + ta \in A\} \\ v &= \sup\{t \mid c + ta \in A\}. \end{aligned}$$

Tällöin voimme olettaa, että

$$v - r \geq s - u,$$



KUVA 3.4. Projektioita.

josta kertomalla luvulla $\frac{1}{2}$ ja lisäämällä puolittain $\frac{1}{2}(v-r)$ saamme

$$\begin{aligned} v-r &\geq \frac{1}{2}(v-r)+\frac{1}{2}(s-u) \\ &= \frac{1}{2}(s-r)+\frac{1}{2}(v-u) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_b^a)+\frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_c^a). \end{aligned}$$

Steinerin symmetrisoinnin eli Määritelmän 3.12 perusteella $|x\cdot a|\leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_b^a)$ ja vastaavasti $|y\cdot a|\leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_c^a)$ eli saamme epäyhtälön

$$v-r\geq |x\cdot a|+|y\cdot a|\geq |x\cdot a-y\cdot a|\,.$$

Koska oletimme, että $d\,(A)>0$, niin $d\,(S_a\,(A))>0$ ja voimme valita $\epsilon\in\,]0,d\,(S_a(A))[$. Edellistä epäyhtälöä käyttämällä saamme

$$\begin{aligned} (d(S_a(A))-\epsilon)^2 &\leq \|x-y\|^2 \\ &= \|b-c\|^2+|x\cdot a-y\cdot a|^2 \\ &\leq \|b-c\|^2+(v-r)^2 \\ &= \|(b+ra)-(c+va)\|^2\,. \end{aligned}$$

Koska joukko A on suljettu, niin silloin $b+ra, c+va\in A$. Siispä

$$d(S_a(A))-\epsilon\leq d(A).$$

Antamalla $\epsilon\to 0$, niin olemme todistaneet väitteen.

(2) Jos $n=1$, niin selvästi $S_a\,(A)=A$. Oletamme siis, että $n\geq 2$. Lebesguen mitta on kierrolle invariantti, jonka otamme todistamatta käyttöön. Todistuksen löydämme lähteestä Stroock [8] s.31. Nyt voimme valita vektorin $a=e_n=(0,0,0,...,0,1)$, jolloin $P_a=P_{e_n}=\mathbb{R}^{n-1}$.

Oletuksen mukaan joukko A on $\mathcal{L}^n$-mitallinen tuloavaruudessa $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^{n-1}$ ja selvästi joukko A on $\mathcal{L}^1\times\mathcal{L}^{n-1}$ mitallinen (ks. Purmonen [4] s.86). Huomautuksessa 3.5. totesimme, että $\mathcal{H}^1(A)=\mathcal{L}^1(A)$, kun $A\subset\mathbb{R}$ eli siis joukko A on $\mathcal{H}^1\times\mathcal{L}^{n-1}$ mitallinen.

Täten Fubinin lauseen 2.40 mukaan kuvaus $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \to [0,\infty]$ määriteltynä $f(b) = \mathcal{H}^1\left(A \cap L^a_{(b,0)}\right)$ on $\mathcal{L}^{n-1}$-mitallinen. Myös $\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\, db$. Nyt

$$S_a(A) = \left\{(b,y) \mid \frac{-f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2},\ L^a_{(b,0)} \cap A \neq \emptyset\right\}.$$

Täten Lemman 3.10 mukaan $S_a(A)$ on $\mathcal{L}^n$ -mitallinen ja

$$\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\, db = \mathcal{L}^n(A).$$

□

Lemma 3.14. *Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $d(A) < \infty$. Olkoon $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnolliset kantavektorit ja määritellään $A_1 = S_{e_1}(A), A_2 = S_{e_2}(A_1), A_3 = S_{e_3}(A_2), ..., A_n = S_{e_n}(A_{n-1})$. Merkitään $A^* = A_n$. Tällöin A^* on symmetrinen origon suhteen eli toisin sanoen $A^* = -A^*$.*

Todistus. A_1 on symmetrinen tason P_{e_1} suhteen Steinerin symmetrisoinnin määritelmän perusteella. Oletamme, että A_k on symmetrinen tasojen $P_{e_1}, P_{e_2}, P_{e_3}, ..., P_{e_k}$ suhteen kun $1 \leq k < n$. Myöskin $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$ on symmetrinen tason $P_{e_{k+1}}$ suhteen. Olkoon $j \in \mathbb{N}$ siten, että $1 \leq j \leq k$ ja olkoon $S_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ peilaus tason P_{e_j} suhteen. Olkoon $b \in P_{e_{k+1}}$. Koska $S_j(A_k) = A_k$, niin

$$\{t \mid b + te_{k+1} \in A_{k+1},\ t \in \mathbb{R}\} = \{t \mid S_j(b) + te_{k+1} \in A_{k+1},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Erityisesti

$$\mathcal{H}^1\left(A_k \cap L^{e_{k+1}}_b\right) = \mathcal{H}^1\left(A_k \cap L^{e_{k+1}}_{S_j(b)}\right).$$

Täten $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$. Joukko A_{k+1} on symmetrinen tason P_{e_j} suhteen. Täten saamme induktiivisesti, että joukko $A^* = A_n$ on symmetrinen tasojen $P_{e_1}, P_{e_2}, P_{e_3}, ..., P_{e_n}$ suhteen ja siten symmetrinen origon suhteen. □

Lause 3.15. *Joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\left(\frac{d(A)}{2}\right)^n, \quad \textit{missä}$$

$$\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = vol B(0,1).$$

Todistus. Jos $d(A) = \infty$, niin väite on triviaali. Oletamme, että $d(A) < \infty$. Voimme myös olettaa, että joukko A on suljettu, koska $d(A) = d(\overline{A})$ ja

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n\left(\overline{A}\right), \text{ kaikilla } A \subset \mathbb{R}^n.$$

Määrittelemme joukon A^* samoin kuin Lemmassa 3.14 eli $A^* = A_n$ ja joukot $A_1 = S_{e_1}(A), A_2 = S_{e_2}(A_1), A_3 = S_{e_3}(A_2), ..., A_n = S_{e_n}(A_{n-1})$.

Olkoon $x \in A^*$. Lemman 3.14. mukaan $-x \in A^*$ ja siten $d(A^*) \geq 2|x|$. Täten $A^* \subset B(0, d(A^*)/2)$ ja

$$\mathcal{L}^n(A^*) \leq \mathcal{L}^n\left(B\left(0, \frac{d(A^*)}{2}\right)\right) = \left(\frac{d(A^*)}{2}\right)^n \cdot \mathcal{L}^n(B(0,1)) = \left(\frac{d(A^*)}{2}\right)^n \cdot \alpha(n). \tag{3.4}$$

Käsittelemme yhtälön 3.4 välivaiheita todistuksen jälkeen Huomautuksessa 3.16. Lemmasta 3.13 seuraa suoraan, että

$$\mathcal{L}^n(A^*) = \mathcal{L}^n(A) \quad \text{ja} \quad d(A^*) \leq d(A).$$

Siispä

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &\leq \alpha(n)\left(\frac{d(A^*)}{2}\right)^n \\ &\leq \alpha(n)\left(\frac{d(A)}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

□

Huomautus 3.16. Edellisen todistuksen yhtälössä 3.4 käytimme kahta asiaa joita emme ole tässä kirjoitelmassa osoittaneet:

(1) Olkoon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \ x \mapsto \alpha x$, missä $\alpha \neq 0$. Tällöin on voimassa

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = |\alpha|^n \mathcal{L}^n(A).$$

Tämän väitteen todistuksen löydämme seuraavista lähteistä: Purmonen [4] s.29, Stroock [8] s.31. Yhtälössä 3.4 $\alpha = \frac{d(A^*)}{2}$.

(2) Riemann-integroituva funktio $f\colon [a,b] \to [0,\infty]$ on Lebesgue-mitallinen ja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\mathcal{L},$$

missä $\int_a^b f(x)dx$ on Riemann-integraali ja $\int_{[a,b]} f(x)d\mathcal{L}$ on integraali mitan $\mathcal{L}$-suhteen. Todistuksen voimme tarkastaa lähteistä: Purmonen [4] s.59, Burkill [11] s.28. Edellä mainittu tulos pätee myös Riemann-integroituvalle funktiolle $f\colon A \to [0,\infty]$ joukossa $A \subset \mathbb{R}^n$, koska moniulotteinen palautuu yksiulotteiseen tapaukseen, jos voimme esittää integraalin $\int_A f$ iteroituina integraaleina.

Lauseessa 1.10 laskimme n-ulotteisen pallon tilavuuden juuri iteroituina integraaleina, jossa pallon tilavuus saatiin Riemann-integroituvasta funktiosta $f\colon B(0,R) \to 1$, $f(x) = 1$, missä funktio f on Määritelmän 2.34 mukaan yksinkertainen. Siispä

$$\alpha(n) \cdot R^n = \int_{B(0,R)} f(x)dx = \int_{B(0,R)} f(x)d\mathcal{L} = \mathcal{L}^n(B(0,R)).$$

Yhtälössä 3.4 käytimme tietoa, että yksisäteiselle pallolle pätee

$$\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B(0,1)).$$

Seuraavana todistamme, että $\frac{\alpha(n)}{2^n} \cdot \mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$. Todistus koostuu kahdesta osasta. Ensin todistamme, että $\frac{\alpha(n)}{2^n} \cdot \mathcal{H}^n \geq \mathcal{L}^n$ ja sitten $\frac{\alpha(n)}{2^n} \cdot \mathcal{H}^n \leq \mathcal{L}^n$.

Lause 3.17. *Hausdorffin ja Lebesguen mitoille pätee*

$$\frac{\alpha(n)}{2^n} \cdot \mathcal{H}^n \geq \mathcal{L}^n,$$

missä

$$\alpha(n) = volB(0,1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

TODISTUS. Olkoon $\delta > 0$. Valitsemme joukolle A peitteen siten, että $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ja $d(E_i) \leq \delta$. Lauseen 3.15 avulla saamme epäyhtälön

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n)\left(\frac{d(E_i)}{2}\right)^n = \frac{\alpha(n)}{2^n}\sum_{i=1}^{\infty}\left(d\left(E_i\right)\right)^n.\end{aligned}$$

Ottamalla infimumin puolittain saamme

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}^n_\delta(A),$$

eli kun $\delta \to 0$, niin $\mathcal{L}(A) \leq \frac{\alpha(n)}{2^n}\mathcal{H}^n(A)$. □

LAUSE 3.18. *Hausdorffin ja Lebesguen mitoille pätee*

$$\frac{\alpha(n)}{2^n}\cdot\mathcal{H}^n \leq \mathcal{L}^n.$$

TODISTUS. Olkoon $\delta > 0$ ja $\epsilon > 0$. Peitämme joukon A avoimilla n-väleillä I_k siten, että

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(I_k) \leq \mathcal{L}^n(A) + \epsilon.$$

Jokaiselle joukolle I_k voimme valita hienojakoisen peitteen, jolloin Vitalin peitelauseen 3.8 mukaan jokaiselle joukolle I_k on olemassa numeroituva kokoelma $\{B_{i,k}\}$ suljettuja erillisiä palloja siten, että $0 < d(B_{i,k}) \leq \delta$ ja

$$\mathcal{L}^n\left(I_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{i,k}\right) = 0.$$

Valitsemme pallot B_i siten, että $B_{i,k} \in I_k$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Huomautuksesta 3.5 saamme

$$\mathcal{H}^n_\delta\left(I_k \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{i,k}\right) = 0.$$

Siispä saamme suoraan

$$\mathcal{H}^n_\delta\left(A\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta\left(I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{i,k}\right).$$

Muun muassa pallojen $B_{i,k}$ erillisyyttä käyttämällä saamme

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^n(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^n(B_{i,k}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(d(B_{i,k}))^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^n}{\alpha(n)}\cdot\underbrace{\alpha(n)\left(\frac{d(B_{i,k})}{2}\right)^n}_{vol(B_{i,k})} \\
&= \frac{2^n}{\alpha(n)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(B_{i,k}).
\end{aligned}$$

Käytämme taas pallojen $B_{i,k}$ erillisyyttä, jolloin saamme

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) \leq \frac{2^n}{\alpha(n)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_{i,k}\right)$$

Koska valitsimme pallot $B_{i,k}$ siten, että $B_{i,k}\subset I_k$ kaikilla $i\in\mathbb{N}$ ja $k\in\mathbb{N}$, niin saamme

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^n(A) &\leq \frac{2^n}{\alpha(n)}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{L}^n(I_k) \\
&\leq \frac{2^n}{\alpha(n)}\cdot(\mathcal{L}^n(A)+\epsilon).
\end{aligned}$$

Kun $\epsilon\to 0$ ja $\delta\to 0$, niin sopivasti kertomalla saamme

$$\frac{\alpha(n)}{2^n}\cdot\mathcal{H}^n(A)\leq\mathcal{L}^n(A).$$

□

HUOMAUTUS 3.19.

- Yhdistämme lauseet 3.17 ja 3.18, jolloin saamme

$$\frac{\alpha(n)}{2^n}\cdot\mathcal{H}^n(A)=\mathcal{L}^n(A)$$

- Evans ja Gariepy [5] määrittelevät hieman eri tavalla Hausdorffin mitan. He ottivat mitan määrittelyyn mukaan kertoimen $c=\frac{\alpha(n)}{2^n}$ eli

$$\mathcal{H}_\delta^n(A)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(n)\left(\frac{d(E_i)}{2}\right)^n \;:\; A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ d(E_i)\leq\delta\Big\},$$

jolloin olisimme päätyneet tulokseen:

$$\mathcal{H}^n(A)=\mathcal{L}^n(A),\ \text{kun } A\in\mathbb{R}^n.$$

Esimerkki 3.20. Laskemme aluksi 5-ulotteisen yksikkökuution Lebesguen mitan. Olkoon $A = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Joukon A Lebesguen mitaksi saamme

$$\mathcal{L}^5\,(A) = (1-0) \cdot (1-0) \ldots (1-0) = 1.$$

Huomautuksen 3.19 avulla saamme

$$\mathcal{H}^5(A) = \mathcal{L}^5(A) \cdot \frac{2^5}{\alpha(5)},$$

missä $\alpha(5) = volB(0,1)$, minkä olemme laskeneet Esimerkissä 1.12. Siispä

$$\mathcal{H}^5(A) = 1 \cdot \frac{2^5}{\frac{8\pi^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}} = \frac{2^5 \cdot 15\sqrt{\pi}}{8\pi^{5/2}} = 6,079271 \cdots \approx 6,08.$$

Lähdeluettelo

[1] Frank Morgan: *Real Analysis.* American Mathematical Society, 2005.
[2] George Arfken: *Mathematical Methods for Physicists.* Academic Press Inc, 1969.
[3] Avner Friedman: *Foundations of Modern Analysis.* Dover Publications Inc., New York 1970.
[4] Veikko Purmonen: *Mitta ja integraaliteoria.* Jyväskylän yliopisto, luentomoniste 14, Jyväskylä 1990.
[5] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press Inc., Florida 2000.
[6] Pertti Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and rectifiability.* Cambridge University Press, Cambridge 1995.
[7] Herbert Federer: *Geometric Measure Theory.* Springer, cop., Berlin 1996.
[8] Daniel W. Stroock: *A Concise Introduction to the Theory of Integration.* Second edition, Birkhäuser, Boston 1994.
[9] Edwin Hewitt, Karl Stromberg: *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag, New York, 1975.
[10] Russell A. Gordon: *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* American Mathcematical Society, USA, 1994.
[11] J. C. Burkill: *The Lebesgue Integral.* Cambridge University Press, Cambridge, 1951.