LUKIOLAISTEN MATEMAATTINEN PÄÄTTELY GEOGEBRA-AVUSTEISESSA TUTKIVASSA MATEMATIIKASSA

Marjo Yli-Tokola

Pro gradu -tutkielma

Jyväskylän yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tiivistelmä

Yli-Tokola, Marjo. 2012. Lukiolaisten matemaattinen päättely GeoGebra-avusteisessa tutkivassa matematiikassa. Matematiikan pro gradu –työ, 90 s. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos.

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on muodostaa aiempien tutkimusten (mm. Harel & Sowder, 2007; Marrades & Gutiérrez, 2000) pohjalta matemaattisen päättelyn muotojen luokittelu sekä saada aineiston pohjalta kuvailevaa tietoa siitä, millaisia päättelyn muotoja opiskelijat käyttävät *tutkivan matematiikan* (Hähkiöniemi, 2011) oppitunneilla. Tutkiva matematiikka korostaa oppilaslähtöisyyttä ja vuorovaikutusta perinteisen opettajajohtoisen matematiikan opetuksen sijaan. Käytännössä oppitunneilla opiskelijat ratkaisevat tehtäviä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä ja rakentavat sitä kautta itse matemaattista tietoa. Matemaattinen päättely luokitellaan tutkivan matematiikan oppitunneilla neljään pääluokkaan: ulkopuoliseen lähteeseen vetoavaan, empiiriseen, geneeriseen sekä deduktiiviseen päättelyyn. Opiskelijoiden matemaattista päättelyä tutkittaessa on havaittu opiskelijoiden perustelevan väitteitään yleisimmin empiirisesti eli perustamalla päättelynsä havaintoon. Tässä tutkimuksessa käytetään tutkivan oppimisen tukena dynaamista matematiikkaohjelmaa, GeoGebraa, joka mahdollistaa mm. kuvaajien sekä geometristen kuvioiden piirtämisen ja niiden liikuttelun sekä kuvion alojen laskemisen.

Tutkimuksessa seurataan lukio-opiskelijoiden matemaattista päättelyä kuuden tutkivan matematiikan oppitunnin aikana, joilla opiskelijat käyttävät tehtävien ratkaisussa apuna GeoGebraa. Päättelyiden analysointi perustuu suurimmaksi osin videotallenteisiin, joissa on kuvattu yhden, satunnaisesti valitun, opiskelijaparin toimintaa heidän ratkaistessaan tutkivan matematiikan tehtäviä.

Tutkivan matematiikan oppitunneilla esiintyi eniten empiiristä päättelyä, jota oli kaikista päättelyistä 55,1 %. Toiseksi eniten esiintyi ulkopuoliseen lähteeseen vetoavaa sekä geneeristä päättelyä, kumpaakin 19,1 %. Vähiten opiskelijat käyttivät oppitunneilla deduktiivista päättelyä, 6,7 %. Dynaamisen geometriaohjelman käyttö tekee esimerkkien käytön päättelyn apuna helpoksi, mikä lisää empiiristä ja geneeristä päättelyä. GeoGebralla onkin erittäin helppo tutkia annetun kuvion ominaisuuksia esimerkiksi raahaamalla pisteitä ja katsomalla kuvasta tehtävän ratkaisu. Opiskelijat saivat kuitenkin viidellä tunnilla kuudesta aikaiseksi teoriaan pohjautuvia geneerisiä tai deduktiivisia päättelyitä. Määrää voidaan pitää hyvänä, sillä usein opiskelijat hahmottivat tilannetta empiirisesti ennen deduktiivista päättelyä ja käyttivät siten useita eri päättelyn muotoja saman tehtävän sisällä. Lisäksi opiskelijat saattoivat testata geneerisesti tai deduktiivisesti konstruoimaansa väitettä empiirisesti vakuuttuakseen väitteensä paikkansa pitävyydestä. Nämä seikat lisäävät empiiristen päättelyiden osuutta kaikista päättelyistä.

Opettajan tulisi painottaa opiskelijoille perustelun tärkeyttä ja motivoida opiskelijoita perustelemaan väitteensä teoriaan nojaten. Tutkimuksessa havaittiinkin opettajan ohjauksen positiivinen vaikutus opiskelijan muodostamiin päättelyihin. Useissa tapauksissa opettaja sai opiskelijoiden kanssa keskustelemalla heidät pohtimaan uudelleen päättelyään ja yleensä myös parantamaan sitä pätevämmäksi.

Asiasanat: Matemaattinen päättely, tutkiva matematiikka, GeoGebra

Sisällysluettelo

JOHDANTO

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2003) matematiikan osalta korostetaan opiskelijan rohkaisemista kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen ja niiden kriittiseen arviointiin. Matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkijat ovatkin jo pitkään pitäneet tehokkaina oppilaslähtöisiä, vuorovaikutusta korostavia työskentelytapoja perinteisen matematiikan opetuksen sijaan. Tällaisilla *tutkivan matematiikan* (Hähkiöniemi, 2011) oppitunneilla opiskelijat ratkaisevat tehtäviä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä. Battistan (2002) mukaan opiskelijoiden ratkaistessa ongelmia tutkivan matematiikan avulla heidän oppimansa tiedot ovat pysyviä perinteisen matematiikan opetuksen pintapuolisen oppimisen ja asioiden nopean unohtamisen sijaan. Lisäksi Goos (2004) ja Keranto (1997) ovat havainneet opiskelijoiden oppivan muiden kanssa keskustellessaan käyttämään matemaattisia käsitteitä oikein sekä perustelemaan väitteitään.

Opetussuunnitelmassa on asetettu tavoitteeksi myös lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen. Lukio-opiskelijoiden oletetaan lisäksi harjaantuvan tekemään otaksumia sekä tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja. Opiskelijoiden matemaattista päättelyä tutkittaessa (mm. Cañadas & Castro, 2007; Jones, 2000; Choi-Koh, 1999; Schoenfeld, 1986) on huomattu opiskelijoiden perustelevan väitteitä yleisimmin empiirisesti eli perustamalla päättelynsä havaintoon.

Tieto- ja viestintätekniikka on koko ajan kehittyvä osa koulujen arkipäivää. Tietotekniikka tarjoaakin lukuisia uusia välineitä ja työtapoja käytettäväksi oppitunneilla. Myös lukion opetussuunnitelman perusteissa esitetään lisäksi tavoite opiskelijoiden teknisten apuvälineiden käytön osaamisesta. Tässä tutkimuksessa käytetään tutkivan oppimisen tukena dynaamista matematiikkaohjelmaa, GeoGebraa, joka mahdollistaa mm. kuvaajien sekä geometristen kuvioiden piirtämisen ja niiden liikuttelun, kulman mittaamisen ja kuvioiden alojen laskemisen. Useat tutkijat (mm. McCoy, 1991; Gordon 1990) ovat saaneet rohkaisevia tuloksia geometriaohjelmistojen käytöstä matematiikan opetuksessa. Ohjelmistoa oppimisen apuna käyttäneet opiskelijat mm. muistivat oppimansa paremmin sekä pärjäsivät vertailuryhmää paremmin geometrian kokeissa (McCoy, 1991).

Tämän tutkimuksen tavoitteena on luoda aiempien tutkimusten (mm. Harel & Sowder, 2007; Marrades & Gutiérrez, 2000) pohjalta matemaattisen päättelyn muotojen luokittelu, joka sopii myös työskentelyn vaiheeseen, jossa opiskelijat etsivät ratkaisua annettuun tehtävään eikä ainoastaan väitteiden perusteluun. Lisäksi tavoitteena on saada kuvailevaa tietoa siitä, millaisia päättelyn muotoja opiskelijat käyttävät tutkivan matematiikan oppitunneilla ja mitä päättelyn muodoilla tarkoitetaan. Tutkimuksessa pyritään ennen kaikkea lisäämään ymmärrystä päättelyiden muodoista ja siitä, kuinka opiskelijoiden päättelyt käytännössä rakentuvat tutkivan matematiikan oppitunneilla.

Aiemmissa tutkimuksissa (mm. Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Choi-Koh, 1999) on huomattu opettajan ohjauksella olevan merkitystä opiskelijoiden työskentelyyn ja heidän käyttämäänsä päättelyyn tutkivan matematiikan oppitunneilla. Siten tutkimuksessa kiinnitetään huomiota myös opettajan ohjaukseen ja siihen, miten se vaikuttaa opiskelijoiden päättelyihin.

Tutkimus on luonteeltaan laadullinen tutkimus, jossa seurataan lukio-opiskelijoiden matemaattista päättelyä tutkivan matematiikan oppituntien aikana. Tutkimuksessa analysoidaan kuutta lukiossa pidettyä oppituntia, joilla kaikilla opiskelijat käyttivät GeoGebraa. Päättelyiden analysointi perustuu suurimmaksi osin videotallenteisiin, joissa on kuvattu oppitunnilta satunnaisesti valitun opiskelijaparin toimintaa heidän ratkaistessaan tutkivan matematiikan tehtäviä.

1 TUTKIVA MATEMATIIKKA

” For the things we have to learn before we can do them, we learn by doing them.”
Aristoteles

Perinteinen matematiikan tunti koostuu kolmesta vaiheesta. Aluksi tarkistetaan edellisellä tunnilla annetut kotitehtävät ja kerrataan mahdollisesti aiemmin opetettua asiaa, jonka jälkeen opettaja opettaa opiskelijoille uuden asian käymällä läpi teoriaa ja aiheeseen liittyviä esimerkkejä. Tässä vaiheessa opiskelijat ovat yleensä melko passiivisia kuunnellessaan opettajaa ja pyrkiessään omaksumaan tietoa. Opetusosiota seuraa vaihe, jossa opiskelijat ratkaisevat itse tehtäviä ja pyrkivät niissä soveltamaan opettajan edellä esittelemää ratkaisumallia tunnilla käydyn esimerkin kaltaisiin tehtäviin. Goosin (2004) mukaan matematiikan tunneilla, joilla käytetään perinteistä, kirjaan nojaavaa lähestymistapaa, opiskelijoiden menestyksekäs osallistuminen tunnin kulkuun edellyttää heiltä opettajan opetuksen seuraamista ja sen jälkeen kirjan tehtävien ratkaisemista opettajan esittelemän ratkaisumallin avulla. Hänen mukaansa tunneilla myös korostetaan ulkoa opettelua ja opettajan esimerkkien kopiointia. Myös Battista (2002) yhtyy hänen ajatuksiinsa ulkoa opettelun suuresta roolista perinteisillä matematiikan oppitunneilla. Vaikka perinteinen opetus Battistan mielestä yrittääkin edistää ymmärtämistä, opiskelijat eivät ymmärrä käsitteitä ja ideoita, koska ne ovat heille liian abstrakteja ja formaaleja.

Tutkijat ovatkin jo pitkään olleet sitä mieltä, että perinteinen opettajalähtöinen matematiikan opetus ei ole tehokkainta matematiikan oppimisen kannalta. Keranto (1997) esittää, että perinteisen matematiikan opetuksen puitteissa opiskelijoilta viedään mahdollisuus kysellä ja keskustella asioista sekä epäillä ja haastaa muiden opiskelijoiden ajattelua. Oppitunteja tulisi hänen mielestään muuttaa niin, että keskustelu ja argumentointi nostettaisiin opetus-oppimisprosessin keskeiseksi metodiksi. Lisäksi Kerannon mukaan oppitunnilla esitettävien kysymysten tulisi vaatia autonomista ajattelua, jotta opiskelijat saataisiin ohjattua kriittiseen ajatteluun.

Tutkijat ovat vastanneet tarpeeseen kehittämällä oppilaslähtöisiä, vuorovaikutusta korostavia oppimismenetelmiä. Näistä käytetään muun muassa nimityksiä tutkiva matematiikka (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992), tutkiva oppiminen (Goos, 2004), avoin lähestymistapa (Pehkonen, 1997) sekä elämyksellinen matematiikan opetus (Portaankorva-Koivisto, 2010).

1.1 Mitä tutkiva matematiikka on?

Tutkivassa matematiikassa oppiminen tapahtuu ongelmanratkaisua vaativien tehtävien, niihin liittyvien kysymysten sekä kriittisen ajattelun kautta (10 Tips for Inquiry-Based Learning). Hähkiöniemen (2011) mukaan oppitunneilla opiskelijat tutkivat jotakin matematiikan ilmiötä tehtävissä, joihin heillä ei ole valmiita ratkaisumenetelmiä. Inoue ja Buczynski (2011) kuvaavat tutkivan oppimisen keskeiseksi ajatukseksi sen, että opiskelijat kehittävät ja reflektoivat ongelmanratkaisutaitojaan päästäkseen oikeaan vastaukseen, jonka he todella ymmärtävät, sen sijaan, että he hyväksyisivät opettajan kertoman oikean vastauksen sisäistämättä sitä.

Battistan (2002) mukaan tutkivan matematiikan hengessä opiskelijat rohkaistuvat keksimään, testaamaan ja jalostamaan omia ideoitaan sen sijaan, että kopioisivat kyseenalaistamatta muiden antamia esimerkkejä. Hähkiöniemi (2011) tarkentaa, että opiskelijat voivat käyttää päättelyssään omia epästandardeja merkintöjä ja heidän keksimänsä idea saattaa olla puutteellinen, mutta tärkeintä tutkivassa oppimisessa on se, että opiskelijat ovat itse pohtineet opettajan antamaa ongelmaa ja kehittäneet idean sen ratkaisemiseksi. Opettajan rooli tutkivassa oppimisessa onkin rohkaista opiskelijoita tuomaan esille omia ideoitaan ja auttaa opiskelijoita kehittämään keksimäänsä teoriaa. Hähkiöniemi korostaa, että tunnin lopuksi opettajan on tärkeää yhdistää opiskelijoiden tulokset ja merkinnät standardeihin merkintöihin ja huolehtia, ettei opiskelijoille jää harhakäsityksiä tunnilla käsitellystä aiheesta.

Franciscon ja Maherin (2005) mielestä tutkivan matematiikan oppitunneilla tulisi pyrkiä siihen, että opiskelijalle kehittyy matematiikan omistajuus. Tällä tarkoitetaan sitä, että opiskelijoiden matemaattisia ideoita, väitteitä ja todistuksia painotetaan opettajan mallien sijaan. Pitkittäistutkimuksissa (mm. Francisco & Maher, 2005) onkin huomattu, että matematiikan omistajuus on keskeinen ongelmanratkaisua edistävä tekijä. Battistan (2002) mukaan ongelmakeskeisessä opetuksessa opiskelijoille muodostuu yhtenäinen ja pitkäkestoinen matemaattinen tietous, kun taas perinteissä matematiikan opetuksessa opiskelijat oppivat asiat vain pintapuolisesti ja siten unohtavat ne, jolloin asiat vaativat jatkuvaa uudelleen opettamista.

Goosin (2004) mukaan tutkivassa matematiikassa arvostetaan keskustelua ja yhteistoiminnallisuutta, joiden avulla pyritään luomaan oppitunneille älyllisesti haastava ilmapiiri. Hänen mukaansa tunneilla ei luoteta opettajan kyseenalaistamattomaan auktoriteettiin vaan opiskelijoita rohkaistaan ehdottamaan ja perustelemaan matemaattisia ideoita ja väitteitä. Myös Keranto (1997) painottaa, että matematiikan opiskelusta voidaan ja siitä tulisi saada keskustelevampaa. Opiskelijat oppivat keskustellessaan käyttämään matemaattisia käsitteitä oikein sekä perustelemaan väitteitään. Samalla opettaja voi tarkkailla sitä, ovatko opiskelijat oikeasti ymmärtäneet juuri opetetun asian. Jos opiskelija osaa selittää asian luokkatovereilleen omin sanoin, hän on luultavasti sisäistänyt käsitteen. Goosin (2004) mukaan tutkivan matematiikan tunneilla opiskelijat oppivatkin puhumaan ja toimimaan matemaattisesti osallistuessaan matemaattiseen keskusteluun ja ratkaistessaan ennalta tuntemattomia ongelmia.

1.2 Tutkivan matematiikan tunnin rakenne

Tutkivan matematiikan tunti muodostuu alustus-, tutkimus- ja koontivaiheesta (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Tarkastellaan seuraavassa tunnin vaiheita sekä opiskelijan että opettajan näkökulmasta. Opettajan toiminnan kuvaus oppitunnin eri vaiheissa perustuu Hähkiöniemen (2011) ohjeisiin opettajan toiminnasta tutkivan matematiikan tunneilla.

1.2.1 Alustusvaihe

Alustusvaiheessa opettaja esittelee tunnilla käsiteltävän matemaattisen ongelman opiskelijoille. Ongelma on valittu siten, että se voidaan ratkaista usealla eri tavalla. Alustusvaiheessa opettaja myös esittelee opiskelijoille heidän käytössään olevat välineet, mutta ei kuitenkaan anna opiskelijoille valmiita ratkaisumenetelmiä ongelman ratkaisemiseksi. Motivoinnin kannalta alustusvaiheen ongelman esittely on tärkeää. Inouen ja Buczynskin (2011) mukaan ongelman tulisi liittyä opiskelijoiden arkipäivään tai heidän kiinnostuksen kohteisiinsa, jos vain mahdollista. Alustusvaiheessa opettajan on motivoinnin lisäksi tärkeää rohkaista oppilaita kokeilemaan tunnin aikana luovasti erilaisia ratkaisumenetelmiä ja keskustelemaan keskenään.

1.2.2 Tutkimusvaihe

Tutkivan matematiikan oppitunnin toisessa vaiheessa opiskelijat työskentelevät ongelman parissa pareittain tai pienissä ryhmissä. Opettaja kiertelee luokassa ohjaten opiskelijoiden toimintaa ja rohkaisten heitä kehittämään omia ratkaisujaan annettuun ongelmaan.

Inoue & Buczynski (2011) huomauttavat, että kysymysten, joihin opiskelijat etsivät vastauksia, tulisi olla avoimia, jotta opiskelijoilla on mahdollisuus yhdistää uutta tietoa heidän ennalta tuntemaansa matemaattiseen tietoon. Avoimilla kysymyksillä tarkoitetaan kysymyksiä, joihin ei ole yksiselitteistä vastausta ja joihin ei voi vastata pelkästään kyllä tai ei. Inouen ym. mukaan avoimet kysymykset myös antavat opiskelijoille mahdollisuuden ajatella luovasti, kun perinteisillä oppitunneilla opettajan kysymykset ovat usein lähinnä suljettuja ja vaativat opiskelijoilta yhtä ainoaa oikeaa vastausta.

Tutkimusvaiheessa opettajan on tärkeintä kannustaa ja rohkaista opiskelijoita, sekä olla aidosti kiinnostunut opiskelijoiden ajattelusta ja kuunnella heitä. Kannustamisen ja rohkaisun tarkoituksena on motivoida opiskelijoita tutkivaan työskentelyyn, joten kannustuksen tulisi keskittyä oikeiden vastausten sijaan ennemminkin opiskelijoiden päättelyyn, yrittämiseen ja työskentelyyn. Samalla opettaja luo luokkaan kulttuuria, jossa oikeiden vastausten sijaan keskitytään perusteluihin ja matemaattiseen päättelyyn. Opettajan tulisikin muistuttaa opiskelijoita siitä, että tutkivan matematiikan oppitunneilla oikea vastaus ei ole pääasia, ja sen sijaan korostaa ajattelun ja päättelyn merkitystä. Tämä onnistuu esimerkiksi kysymällä opiskelijoilta, miten he ovat päätyneet saamaansa ratkaisuun. Erityisesti opiskelijoiden kysyessä vastauksensa oikeellisuutta, opettajan on tarkoituksenmukaista olla vastaamatta ja tiedustella sen sijaan sitä, millaisella päättelyllä opiskelijat päätyivät kyseiseen tulokseen.

1.2.3 Koontivaihe

Tunti päättyy koontivaiheeseen, jossa käydään läpi luokan kanssa useita erilaisia ratkaisuja opiskelijoiden työstämään ongelmaan. Opiskelijat esittelevät itse ratkaisujaan ja perustelevat lähestymistapojaan muulle luokalle. Opettajan roolina on johtaa luokan yhteistä keskustelua sekä nostaa oppilaiden ratkaisuista oleelliset asiat esiin luokan keskusteltavaksi.

Opettajan on tärkeää tehdä tunnin lopuksi yhteenveto tunnilla opituista asioista sekä korostaa, mitä tunnilla on opittu. Opettajan tulee myös opiskelijoiden ratkaisujen pohjalta esitellä standardit merkinnät tutkittuun aiheeseen liittyen, jottei opiskelijoille jää harhakäsityksiä. Kun opettaja kirjoituttaa tunnin lopuksi opiskelijoilla vihkoon vielä virallisen määritelmän käsitellylle asialle, oppilaat varmistuvat tutkimustensa ja luokan yhteisen keskustelun oikeellisuudesta ja tutkimalla saavutetusta tiedosta tulee virallista matemaattista tietoa.

1.3 GeoGebran käyttö tutkivassa matematiikassa

Dynaamisten geometriaohjelmien käytöstä matematiikan opetuksessa on saatu rohkaisevia tuloksia. McCoy (1991) tutki geometriaohjelman käytön vaikutusta lukio-opiskelijoiden geometrian osaamiseen. Tutkimuksessa seurattiin vuoden ajan kahta ryhmää, joista toinen käytti opiskelussaan jaksoittain dynaamista geometriaohjelmaa. Loppukokeessa tutkimusryhmä pärjäsi huomattavasti paremmin kuin ilman tietokoneavusteista opetusta opiskellut vertailuryhmä. McCoy päätteli täten geometriaohjelmaa oppimisen apuna käyttäneen ryhmän muodostaneen syvemmän ymmärryksen geometriasta. Myös Gordon (1990) on havainnut, että dynaamista geometriaohjelmaa opiskelussaan hyödyntäneet opiskelijat menestyvät hyvin geometrian kokeissa ja muodostavat intuitiivisemman ymmärryksen aiheesta. Näyttäisi siis siltä, että opiskelijat oppivat, ja muistavat paremmin oppimansa, kun he pääsevät itse käytännössä tutkimaan geometrian ilmiöitä.

Tässä tutkimuksessa käytetään dynaamisena geometriaohjelmana GeoGebraa, joka perustuu avoimeen lähdekoodiin ja on siten täysin ilmainen käyttää. Ohjelmaa voidaan käyttää joko verkon yli tai se voidaan ladata omalle koneelle. GeoGebran keskeinen idea on se, että opiskelija voi tarkastella samanaikaisesti yhdessä näkymässä sekä algebrallista että geometrista esitystä ja manipuloida niitä. Tämä mahdollistaa eri objektien välisten riippuvuuksien tarkastelun muuttamalla objektia algebraikkunassa ja tarkastelemalla muutosta geometriaikkunassa tai päinvastoin.

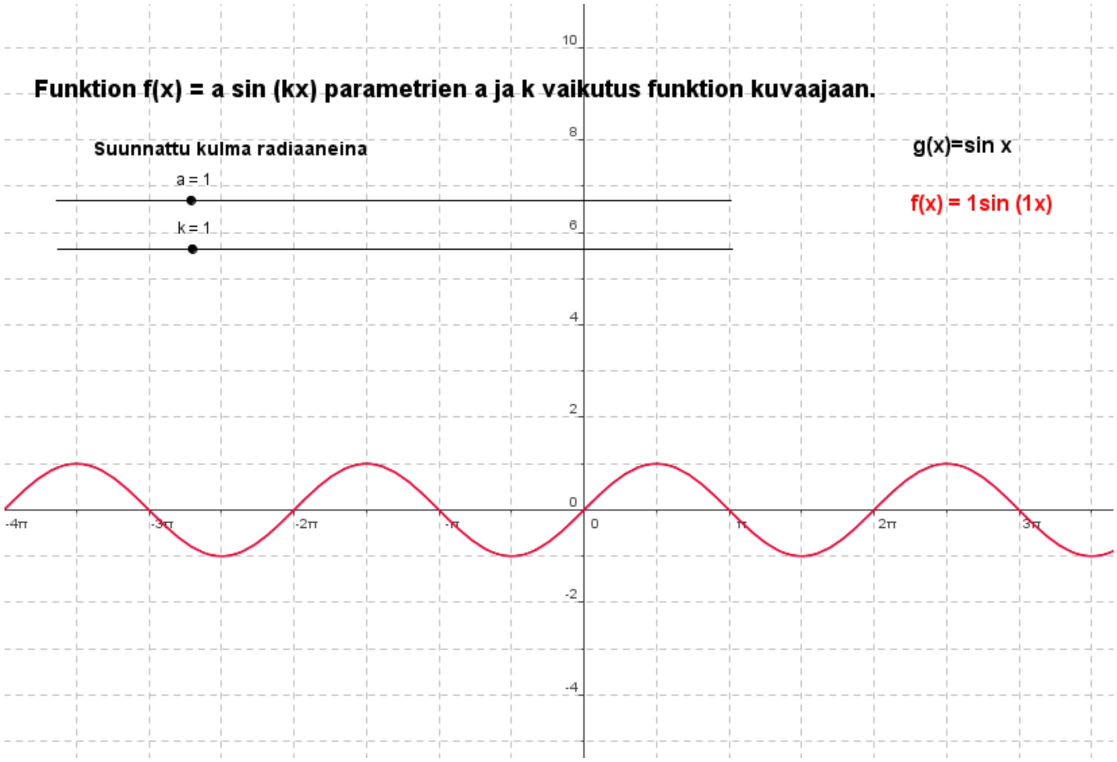
GeoGebra mahdollistaa muun muassa kuvaajien sekä geometristen kuvioiden piirtämisen ja niiden liikuttelun, kulman mittaamisen ja kuvioiden alojen laskemisen. Opiskelija voi esimerkiksi muuttaa jotakin pistettä tai parametria ja tutkailla sen vaikutusta kuvioon. Ohjelman käyttö on helppo oppia kokeilemalla, joten GeoGebraa voidaan käyttää tunneilla ilman, että opiskelijoiden tarvitsisi ennen varsinaista oppimista käyttää tunteja ohjelman käytön opetteluun.

Opettaja voi laatia tutkivan matematiikan oppitunneille etukäteen opiskelijoiden käyttöön GeoGebra-tiedoston, johon on esimerkiksi tehty valmiiksi muutettavat parametrit. Tällöin opiskelijoiden ei tarvitse tehtävän suorittamiseksi hallita kaikkia GeoGebran toimintoja, vaan he pääsevät heti ratkaisemaan ongelmaa. Hähkiöniemen ja Leppäahon (2010) mukaan GeoGebra antaakin opiskelijoille mahdollisuuden kokeilla erilaisia ideoita nopeasti ja vaivattomasti, kun samaan tehtävään kuluisi pelkällä kynällä ja paperilla huomattavasti enemmän aikaa. Myös Korhonen (2007) on samaa mieltä Hähkiöniemen ym. kanssa siinä, että opiskelija voi saada tuloksia aikaan käsin piirtämistä huomattavasti vähemmällä työllä. Lisäksi hän huomauttaa, että myös heikommat piirtäjät voivat saada aikaan hienoja piirroksia ilman useita yrityksiä ja pyyhkimistä sekä uudelleen piirtämistä.

Valmiita tiedostoja löytyy runsaasti GeoGebra –tubesta (http://www.geogebratube.org) ja GeoGebra –wikistä (http://www.geogebra.org/en/wiki). Mateariaaleja on saatavilla useilla eri kielillä, myös suomeksi. Sivustoille voi lisätä omia tuotoksiaan ja sinne lisättyjä tiedostoja voi käyttää apuna omassa opetuksessaan. Tämä helpottaa opettajan tunnin valmistelua, kun hänen ei tarvitse välttämättä tehdä kaikkia oppitunnilla tutkittavia tehtäviä alusta asti itse. Sivustolta voi myös löytää vinkkejä omaan opetukseen ja saada ideoita siitä, mitä aiheita olisi mahdollista käsitellä GeoGebran avulla.

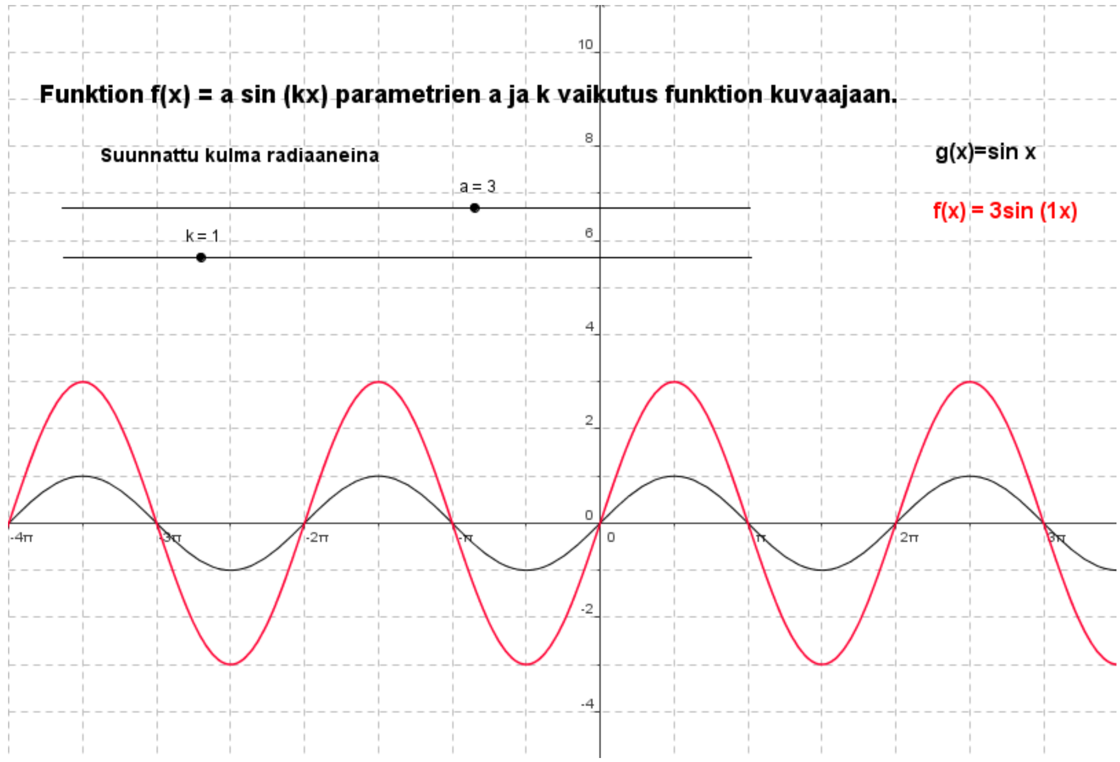
GeoGebra soveltuu käytettäväksi sekä yläkoulun että lukion oppisisältöihin. Yläkoulussa aiheet liittyvät luontevimmin geometriaan, esimerkiksi kulmien yhtenevyyksiin, ympyrään liittyviin lauseisiin tai pisteiden peilaukseen. Geometria ei kuitenkaan ole ainut matematiikan osa-alue, jonka opiskelussa GeoGebraa voidaan hyödyntää, vaan sillä voidaan tutkia monimutkaisempiakin matemaattisia ilmiöitä. GeoGebran avulla voidaan esimerkiksi havainnollistaa erotusosamäärän raja-arvoa, Riemannin integraalin määrittelyä porrasfunktioiden avulla sekä numeerista derivointia ja integrointia. Tarkastellaan seuraavassa tutkivan matematiikan tehtävää, joka voitaisiin antaa esimerkiksi lukion pitkän matematiikan Trigonometriset funktiot ja lukujonot -kurssin opiskelijoiden suoritettavaksi.

Seuraavassa opiskelijoiden tehtävänä on tarkastella funktion $f(x) = a \sin (kx)$ parametrien a ja k vaikutusta funktion kuvaajaan. Opiskelijoilla on käytössään valmis GeoGebra-tiedosto (Kuva 1, Luoma-aho, 2008), jossa on kaksi funktiota, muutettavissa oleva funktio $f(x) = a \sin (kx)$ sekä funktio $g(x) = \sin x$, jonka avulla opiskelija voi päätellä tekemiensä muutosten vaikutusta kuvaajaan. Opiskelija voi muuttaa funktion f parametreja a ja k helposti liukujen avulla ja seurata, miten niiden muuttaminen vaikuttaa funktion kuvaajan muotoon.



Kuva 1: Funktion *f(x) = a sin (kx)* parametrien *a* ja *k* vaikutuksen tutkiminen valmiin GeoGebra-tiedoston avulla. Alkutilanteessa molemmat funktiot ovat samat ja näkyvät siten päällekkäin kuvassa.

Opiskelijan tutkiessa parametrin *a* vaikutusta, hän voi muuttaa parametrin *a* arvoa liu´usta ja huomata funktion ”korkeuden” muuttuvan. Kun alkutilanteessa parametri *a* saa arvon *1*, funktio saa arvoja väliltä *[-1,1]*. Kun parametrin *a* arvoa kasvatetaan, funktion vaihteluväli suurenee. Esimerkiksi kun *a=3* (Kuva 2), funktio saa arvoja väliltä *[-3,3]*. Tästä opiskelija voi päätellä, että parametri *a* määrää funktion maksimi- ja minimiarvon ja siten funktion arvojen vaihteluvälin.



Kuva 2: Funktion *f(x) = a sin (kx)* kuvaaja, kun *a=3* ja *k=1*. Vertailufunktiona *g(x) = sinx*.

Kun opiskelija on havainnut empiirisesti parametrin *a* vaikutuksen funktion muotoon, hän voi tutkia ilmiötä myös teoreettisesti. Koska funktio *g(x) = sinx* saa arvoja väliltä *[-1,1]* eli

$$-1 \leq \sin x \ \leq 1,$$

saadaan haluttu funktio *f(x) = a sinx* kertomalla kaksoisepäyhtälöä luvulla *a > 0*, jolloin

$$-a \leq a \sin x \ \leq a.$$

Negatiivisille luvuille *a* pätee

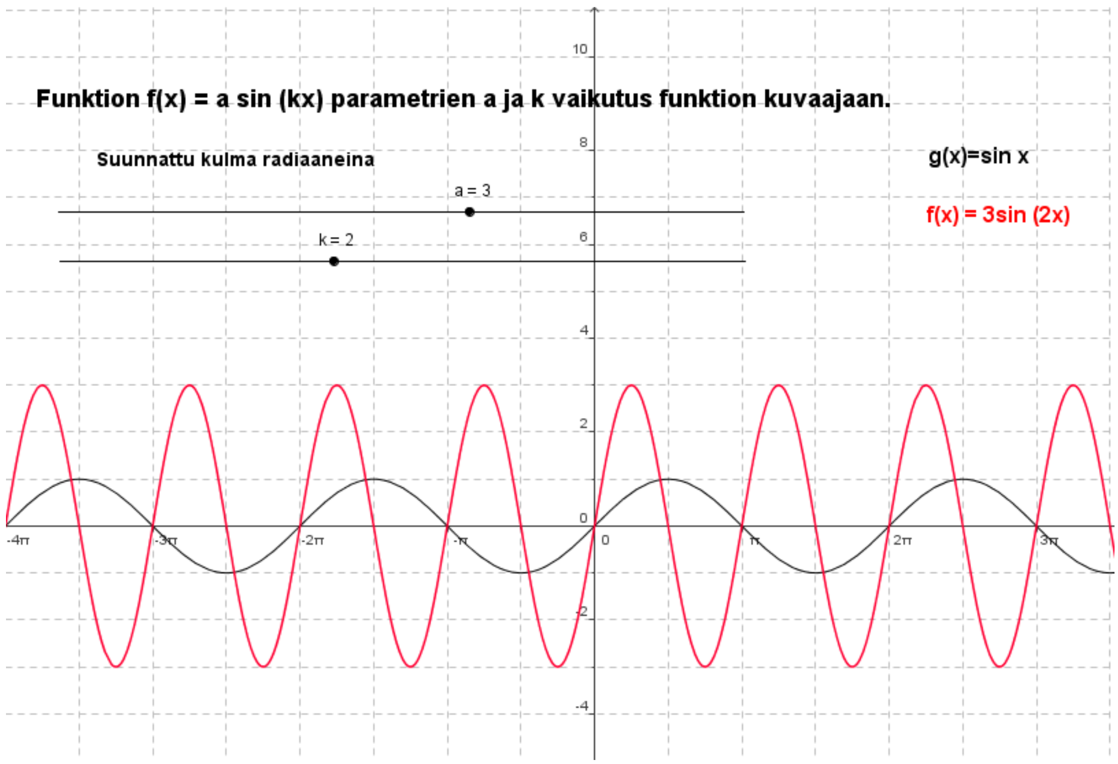
$$a \leq a \sin x \ \leq -a.$$

Siis esimerkiksi opiskelijan tutkimassa tilanteessa *a = 3*, funktion arvot ovat välillä

$$-3 \leq 3 \sin x \ \leq 3.$$

Tällöin opiskelija on osoittanut GeoGebralla tekemänsä havainnon myös teoriaan pohjautuen ja lisäksi päättely on tehty yleisessä tilanteessa esimerkin hyödyntämisen sijaan.

Tutkiessaan parametrin k vaikutusta sinifunktion muotoon, opiskelija voi muuttaa liu´un avulla parametrin k arvoa ja huomata funktion ”tihentyvän”. Alkutilanteessa funktio leikkaa x-akselin π:n välein, mutta kun parametrin k arvoa kasvatetaan kaksinkertaiseksi (Kuva 3), funktio leikkaakin x-akselin $\frac{\pi}{2}$:n välein. Parametrin k muuttaminen vaikuttaa siis funktion jakson pituuteen.



Kuva 3: Funktion *f(x) = a sin (kx)* kuvaaja, kun *a=3* ja *k=2*. Vertailufunktiona *g(x)* = $sinx$.

Parametrin k vaikutusta voidaan tutkia teoreettisesti lähtemällä liikkeelle sinifunktion nollakohdista. Kuten opiskelija havaitsi, funktio *g(x) = sinx* leikkaa x-akselin π:n välein. Siis

$$sinx = 0, kun\ x = n\pi, n \epsilon \mathbb{Z}.$$

Tarkasteltaessa funktiota *f(x) = sin(kx)* saadaan edellisen nojalla

$$\sin(kx) = 0, kun\ kx = n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Ehto kulmalle *x* voidaan sieventää muotoon $x = \frac{n\pi}{k}, n \in \mathbb{Z}$, jolloin

$$\sin(kx) = 0, kun\ x = \frac{n\pi}{k}, n \in \mathbb{Z}.$$

Opiskelijan GeoGebralla tarkastelemalle funktiolle *f(x) = 3sin(2x)* saadaan siten edellisen nojalla

$$3\sin(2x) = 0, kun\ x = n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Saman huomattiin myös GeoGebran avulla, sillä kuvasta nähtiin, että funktio leikkaa x-akselin $\frac{\pi}{2}$:n välein eli funktion nollakohdat ovat muotoa $x = n \cdot \frac{\pi}{2}$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

Opiskelijat voisivat tutkia samaa ilmiötä myös laskimen avulla piirtämällä sinifunktion kuvaajia laskimeen useilla parametrien *a* ja *k* arvoilla. GeoGebra kuitenkin nopeuttaa ja helpottaa tehtävän ratkaisemista, kun suurin osa oppitunnin ajasta ei kulu funktioiden piirtämiseen. Kun opiskelija näkee jatkuvan muutoksen funktion kuvaajassa muuttaessaan parametrin arvoa liu´usta, hänen on helpompi havaita parametrin vaikutus funktion kuvaajaan.

Arzarellon, Oliveron, Paolan ja Robuttin (2002) mukaan opettajalla on tärkeä rooli dynaamisen geometriaohjelman tuomiseksi osaksi luokan kulttuuria. Ei siis riitä, että teknologiaa on saatavilla, vaan opettajan täytyy aktiivisesti ohjata opiskelijoita hyödyntämään sen mahdollisuuksia, jotta oppilaat tottuisivat käyttämään teknologiaa opiskelun apuna. Arzarellon ym. tutkimuksessa kävi ilmi, että opiskelijalle riittää, että hän huomaa väitteen pitävän paikkansa geometriaohjelmalla testattuna. Jos opettaja ei motivoi opiskelijoita selittämään, miksi väite on tosi, he tyytyvät empiiriseen perusteluun. Siksi opettajan on tärkeää korostaa opiskelijoille perusteluiden tärkeyttä päättelyissä.

Tässä tutkimuksessa kiinnitetään huomiota erityisesti siihen, miten opiskelijat etsivät ja perustelevat ratkaisujaan matemaattisiin ongelmiin. Erityisesti ratkaisun etsimisvaiheessa GeoGebra on erittäin hyödyllinen apuväline opiskelijoille. He voivat ohjelman avulla nopeasti testata erilaisia olettamuksia ja etsiä ratkaisua annettuun kysymykseen. Kun opiskelijat ovat löytäneet jonkin uuden säännönmukaisuuden annetusta tehtävästä, heidän on mielekkäämpää ryhtyä etsimään syytä siihen, mistä löydetty säännönmukaisuus johtuu, kun he ovat aluksi vakuuttuneet väitteen paikkansapitävyydestä GeoGebran avulla (Hähkiöniemi & Leppäaho, 2010). Opiskelijat voivat esimerkiksi huomata GeoGebran avulla kahden kulman olevan kuviossa yhtä suuret ja lähteä sitten pohtimaan matemaattista perustelua kulmien yhtäsuuruudelle.

2 MATEMAATTINEN PÄÄTTELY

Tutkivan matematiikan tunneilla tehtävät ovat pääsääntöisesti kahta eri tyyppiä. Opiskelijoiden täytyy joko muodostaa yleinen väite ja perustella se, esimerkiksi kuvan avulla määrittää ympyrän kehäkulman ja keskuskulman suhde, tai pelkästään ratkaista yksittäinen tehtävä, esimerkiksi tietyn kulman suuruus annetusta kuviosta.

Opiskelijoiden työskentely tutkivan matematiikan tunneilla voidaan Hähkiöniemen, Leppäahon ja Franciscon (lähetetty) mukaan jakaa viiteen vaiheeseen: ongelman rajaaminen, ratkaisun etsiminen, konjektuurin muodostaminen, konjektuurin tutkiminen ja perusteleminen. Muokataan luokittelua hieman ja sisällytetään ongelman rajaaminen ratkaisun etsimisvaiheeseen sekä yhdistetään konjektuurin tutkiminen ja perusteleminen yhdeksi vaiheeksi. Ensimmäiseen vaiheeseen kuuluu lisäksi tehtävänannon ymmärtäminen. Työskentelyn vaiheet ovat siis seuraavat:

1. Tehtävänannon ymmärtäminen ja ratkaisun etsiminen
2. Konjektuurin muodostaminen
3. Perusteleminen

Ensimmäisessä vaiheessa opiskelijat lukevat tehtävänannon ja pohtivat, mitä heidän tulee tehdä sekä alkavat etsiä ongelmaan ratkaisua. Jos opiskelijoiden tehtävänä on yleisen väitteen perusteleminen, he muodostavat toisessa vaiheessa konjektuurin eli matemaattisen väitteen, jonka he arvelevat pitävän paikkansa. Kolmannessa ja viimeisessä vaiheessa opiskelijat pyrkivät perustelemaan edellä muodostamansa väitteen.

Mikäli tavoitteena on yksittäisen ongelman ratkaiseminen, opiskelijat etsivät ensimmäisessä vaiheessa vastausta kysymykseen samalla perustellen ja kirjaavat toisessa vaiheessa vastauksen annettuun ongelmaan. Usein kolmannen vaiheen perustelua ei enää esiinny, sillä oppilaat ovat perustelleet ratkaisunsa jo ratkaisun etsintävaiheessa.

Opiskelijoiden perustelemisen muodoista on tehty useita luokitteluja (esim. Harel & Sowder, 2007; Marrades & Gutiérrez, 2000, Sowder & Harel, 1998). Seuraavassa muodostamme näiden pohjalta luokittelun, joka sopii perustelemisen lisäksi myös ratkaisun etsimisvaiheeseen.

2.1 Ulkopuoliseen lähteeseen vetoaminen

Ulkopuoliseen lähteeseen vetoavassa päättelyssä opiskelijat etsivät ja perustelevat ratkaisuaan jonkin ennalta oikeaksi tunnetun tiedon perusteella. Lähde voi olla esimerkiksi kirja tai opettaja, jolloin opiskelija vetoaa auktoriteettiin, tai päättely voi koostua merkityksettömästä symbolien käsittelystä, jolloin kyseessä on manipulatiivinen päättely. (Sowder & Harel, 1998.)

2.1.1 Auktoriteettiin vetoaminen

Auktoriteettiin vetoavassa päättelyssä opiskelijat uskovat Sowderin ja Harelin (1998) mukaan siihen, että he voivat luottaa oppikirjaan, opettajaan tai perustella väitteensä asioista perillä olevan luokkakaverin sanan perusteella. Lisäksi ratkaisun perusteleminen laskimen tai GeoGebran toiminnon avulla on auktoriteettiin vetoavaa päättelyä. Opiskelija voi esimerkiksi mitata jonkin kulman tai laskea kuvion alan GeoGebran toiminnon avulla pohtimatta sen tarkemmin mitä tekee. Tällöin opiskelija luottaa sokeasti GeoGebran antamaan vastaukseen eli vetoaa auktoriteettiin. Auktoriteettiin vetoaminen ei ole yksinomaan huono asia, kunhan opiskelijalla on käytössään myös muita päättelyn keinoja, eikä päättely ole vain valmiin tiedon etsimistä kirjasta.

2.1.2 Manipulatiivinen päättely

Manipulatiivista päättelyä käytetään usein algebrassa, kun pyritään osoittamaan kahden lausekkeen *yhtäpitävyys* (Reid & Knipping, 2010). Sowderin ja Harelin (1998) mukaan päättely on manipulatiivista silloin, kun opiskelija manipuloi lausekkeita ajattelematta symboleiden merkitystä ja riippuvuuksia muihin symboleihin nähden. Opiskelija voi muokata lausekkeita esimerkiksi käyttämällä tuntemiaan matemaattisia sääntöjä tai kaavoja.

Manipulatiivista päättelyä voidaan käyttää esimerkiksi osoitettaessa summan ja erotuksen tulon muistikaavaa $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$. Todistuksessa manipuloidaan vasemmanpuoleista lauseketta ja osoitetaan siten sen yhtäpitävyys oikeanpuoleisen lausekkeen kanssa.

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

(Reid & Knipping, 2010.)

Luokittelemme tutkivan matematiikan tunneilla manipulatiiviseksi päättelyksi myös pisteiden syöttämisen GeoGebraan sekä arvojen sijoittamisen lausekkeeseen. Jos tehtävänä on esimerkiksi piirtää ympyrä GeoGebraan, kun sen yhtälö on annettu, ei opiskelijalta vaadita kuin manipulatiivista päättelyä.

2.2 Empiirinen päättely

Empiirisessä päättelyssä opiskelija etsii ja perustelee väitteitä esimerkkien avulla. Perusteluissa käytettävät esimerkit edustavat vain kyseessä olevaa tapausta, eivät yleistä tilannetta. Tästä johtuen esimerkeissä käytettävää päättelyä ei voida yleistää koskemaan yleistä tilannetta ja sitä kautta muita samantapaisia tehtäviä. Empiirinen päättely voidaan jakaa kahteen alaluokkaan sen mukaan, miten esimerkki valitaan.

Havainnollistetaan alaluokkien eroa yleisen väitteen perustelemisen yhteydessä esimerkillä, jossa opiskelijan tulee osoittaa, että kahden parittoman luvun summa on parillinen. Yksittäisen tehtävän ratkaisemisen yhteydessä tarkastellaan esimerkkiä, jossa opiskelijan on ratkaistava ympyrän säteen ja tangentin välinen kulma, kun ympyrän keskuskulman ja tangenttikulman suuruudet tiedetään. Opiskelija voi käyttää tehtävän ratkaisussa apuna GeoGebraa, joka mahdollistaa esimerkiksi kulmien suuruuden muutoksen seuraamisen pisteitä liikuteltaessa.

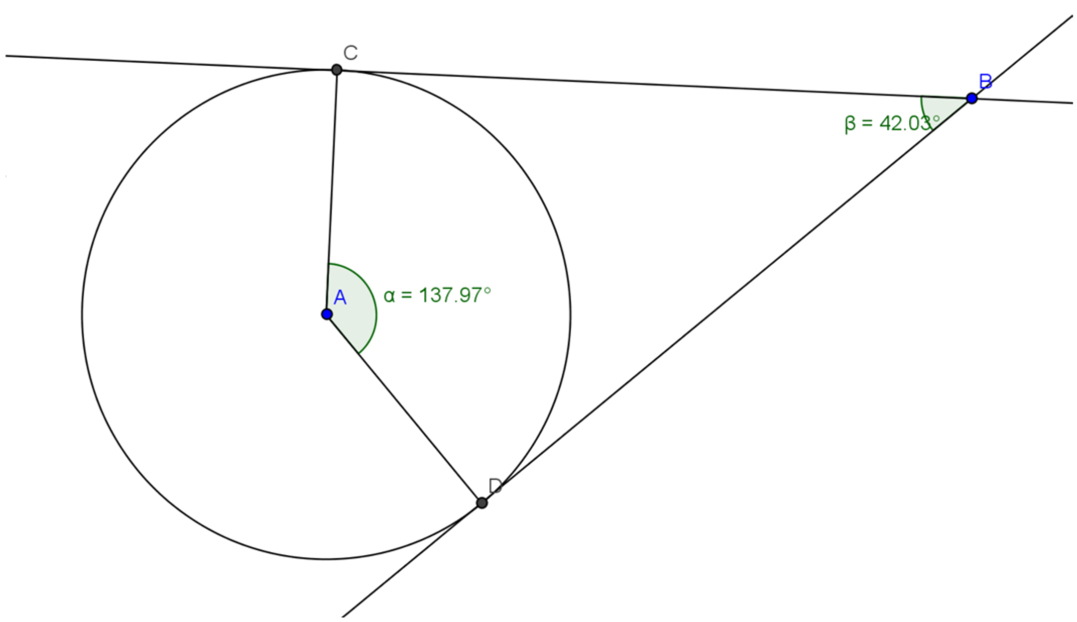
2.2.1 Havainto yksittäisestä/satunnaisesta esimerkistä

Tässä päättelyn muodossa opiskelija osoittaa väitteen todenmukaisuuden yhden tai muutaman satunnaisesti valitun esimerkin avulla. Opiskelija siis valitsee perusteluna käyttämänsä esimerkin satunnaisesti ja yleistää sitten tuloksen koskemaan kaikkia samanlaisia tapauksia (Reid & Knipping, 2010). Marradesin ja Gutiérrezin (2000) mukaan esimerkkien tarkastelu voi perustua pelkästään näköhavaintoihin tai opiskelija voi käyttää perustelussaan myös esimerkeistä löytyneitä lainalaisuuksia. Tästä empiirisestä päättelystä käytetään nimityksiä ”naive empiricism” (Balacheff, 1988) ja ”simple enumereation” (Reid & Knipping, 2010).

Opiskelijan osoittaessa kahden parittoman luvun summan olevan aina parillinen, hän laskee yhteen useita eri parittomia lukuja ja huomaa väitteen pätevän kaikilla lukupareilla.

> *”Summasin yhteen useita eri parittomia lukuja ja summa oli aina parillinen: 7 + 9 = 16, 15 + 21 = 36, 25 + 27 = 52. Siten kahden parittoman luvun summa on aina parillinen.”* (Sylianides, 2009.)

Jos opiskelijan tehtävänä on ratkaista yksittäinen tehtävä, hän tekee empiirisen havainnon ongelmasta piirretystä yksittäisestä kuviosta tarkastelematta muita mahdollisia tilanteita. Esimerkkitilanteessa opiskelija ei muuta valmista tehtävässä annettua mallikuvaa (Kuva 4), vaan päättelee vastauksen katsomalla kuviota ja havaitsemalla, että tangentin ja janan *AC* välinen kulma näyttäisi olevan suora.



Kuva 4: Ympyrän säteen ja tangentin välisen kulman ratkaiseminen.

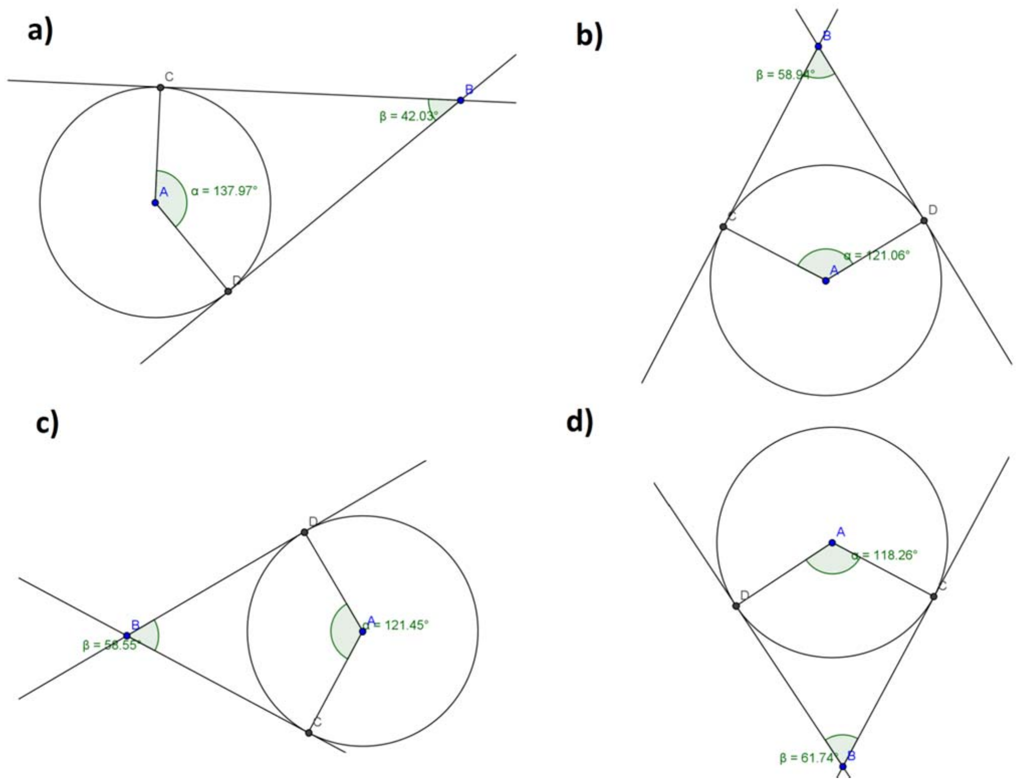
2.2.2 Yleistys tarkoin valitusta esimerkistä

Tarkoin valittuun esimerkkiin perustuvassa empiirisessä päättelyssä opiskelija osoittaa väitteen pitävän paikkansa tietyn, huolellisesti valitun esimerkin tai esimerkkien avulla. Marradesin ja Gutiérrezin (2000) mukaan esimerkit pyritään valitsemaan siten, että päättelyssä käytäisiin läpi mahdollisimman kattavasti kyseiseen ongelmaan liittyvät tapaukset. Jos väite pitää paikkansa kaikilla käsitellyillä tapauksilla, tulos voidaan yleistää. Esimerkit valitaan siis siten, että ne edustavat mahdollisimman hyvin kyseessä olevaa ongelmaa, mutta ratkaisussa käytettyä päättelyä ei voi kuitenkaan yleistää koskemaan muita samantapaisia ongelmia. Tästä päättelystä Marrades ja Gutiérrez käyttävät nimitystä ”crucial experiment”.

Toisin kuin edellä, tällä kertaa opiskelija valitsee päättelyssään käyttämänsä esimerkit tarkasti, jotta niiden avulla käytäisiin kattavasti läpi mahdolliset tapaukset.

> *”Summasin yhteen erilaisia parittomia lukupareja: pieniä lukuja 1 + 9 = 10, suuria lukuja 213 + 399 = 612, samoja lukuja 25 +25 = 50 ja alkulukuja 17 + 31 = 48. Koska mikään näistä ei antanut vastaesimerkkiä väitteelle, kahden parittoman luvun summan täytyy olla aina parillinen.”* (Sylianides, 2009.)

Yksittäisen tehtävän ratkaisun tapauksessa opiskelija tekee kuvasta empiirisen havainnon kuten edellä, mutta tällä kertaa hän testaa, voiko havainnon tehdä muissakin tilanteissa. Esimerkin valitseminen tarkoin voi tarkoittaa esimerkiksi tilanteen muokkaamista ja havainnon testaamista eri tilanteissa. Esimerkkitilanteessa opiskelija muokkaa valmista kuvaa siirtämällä pistettä B ja tarkastelemalla, päteekö hänen väitteensä kaikissa tilanteissa. Opiskelija pyrkii testaamaan kaikki mahdolliset tilanteet ja siirtää pistettä B lähemmäs ja kauemmas ympyrän kehästä (Kuva 5a) ja tarkkailee samalla ympyrän säteen ja tangentin välistä kulmaa, joka näyttäisi olevan tilanteesta riippumatta suora kulma. Opiskelija siirtää pistettä B myös eri puolille ympyrää, sen yläpuolelle (Kuva 5b), vasemmalle puolelle (Kuva 5c) ja alapuolelle (Kuva 5d), ja huomaa kulman pysyvän koko ajan samansuuruisena. Opiskelija päättelee siten ympyrän säteen ja tangentin välisen kulman olevan suora kulma.



Kuva 5: Ympyrän säteen ja tangentin välisen kulman ratkaiseminen empiirisesti yleistämällä tarkoin valituista esimerkeistä.

2.3 Geneerinen päättely

Geneerinen päättely perustuu yleistettävissä olevien esimerkkien käyttöön. Reidin ja Knippingin (2010) mukaan perusteluissa käytettävät esimerkit valitaan siten, että ne edustavat yleistä tilannetta. Marrades ja Gutiérrez (2000) muistuttavat, että vaikka päättelyssä voidaan viitata luokan yleisiin ominaisuuksiin, päättely perustuu kuitenkin selvästi esimerkkiin. Erona empiiriseen päättelyyn on kuitenkin se, että täysin sama päättely voidaan tehdä myös yleisessä tilanteessa. Siis geneerisessä päättelyssä väitteen todistamiseen käytettävä päättely on siirrettävissä yleiseen tilanteeseen. Myös geneerisestä päättelystä voidaan erottaa alaluokkia sen mukaan, miten esimerkkiä käytetään päättelyssä.

2.3.1 Esimerkin ominaisuuksiin perustuva päättely

Tässä päättelyn muodossa käytetään Marradesin ja Gutiérrezin (2000) mukaan empiirisesti havaittavia esimerkin ominaisuuksia. Opiskelija hyödyntää siis kyseessä olevaa tilannetta tai esimerkkiä, mutta siten, että samanlainen päättely on tehtävissä yleisessä tilanteessa.

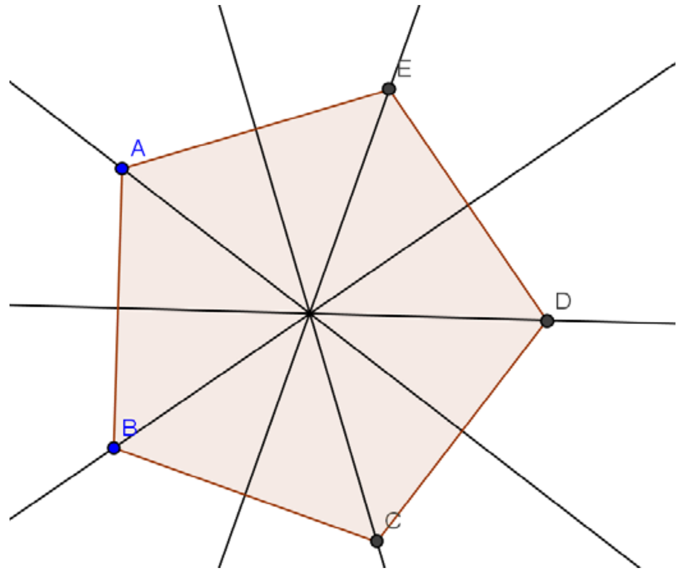
Opiskelijan lähtiessä osoittamaan kahden parittoman luvun summan olevan parillinen, hän tarkastelee esimerkeiksi valitsemiensa lukujen ominaisuuksia. Esimerkiksi luku 7 voidaan esittää parillisen luvun 6 ja luvun 1 summana ja luku 9 parillisen luvun 8 ja luvun 1 summana.

$$\begin{aligned} 7 + 9 &= (6 + 1) + (8 + 1) \\ &= 6 + 8 + 2 \end{aligned}$$

Koska opiskelija saa muokattua parittomien lukujen yhteenlaskun tilanteeksi, jossa lasketaan yhteen parillisia lukuja, hän päättelee, että summan on oltava parillinen. Täysin samanlainen päättely voidaan tämän jälkeen tehdä myös kaikille muille parittomille luvuille, joten tehtävän ratkaisu ei päde ainoastaan esimerkkinä oleville luvuille, vaan se on yleistettävissä kaikille parittomille luvuille.

Edellä tarkasteltua tehtävää ympyrän säteen ja tangentin välisen kulman ratkaisemisesta ei ole mahdollista ratkaista geneerisesti ainoastaan esimerkin ominaisuuksien perusteella. Tarkastellaan sen sijaan esimerkkiä, jossa opiskelijan tulee etsiä säännöllisen viisikulmion piste, joka on yhtä kaukana kaikista viisikulmion sivuista. Opiskelija keksii piirtää GeoGebran avulla jokaiselle sivulle keskinormaalin ja huomaa suorien leikkaavan samassa pisteessä viisikulmion keskellä (Kuva 6). Opiskelija toteaa keskinormaalien leikkauspisteen olevan viisikulmion keskipiste.

Päättely on geneerinen, sillä opiskelija voi käyttää samanlaista päättelyä myös muiden säännöllisten monikulmioiden yhteydessä. Esimerkiksi säännöllisestä kuusikulmiosta löydetään kaikista sivuista yhtä kaukana oleva piste täsmälleen samalla tavalla. Opiskelijan päättely perustuu kuitenkin vielä esimerkkiin eikä hän perustele pisteen löytymistä teoriatiedon avulla, joten kyseessä on geneerinen, esimerkin ominaisuuksiin perustuva päättely.



Kuva 6: Yhtä kaukana kaikista viisikulmion sivuista olevan pisteen etsiminen piirtämällä viisikulmion sivujanoille keskinormaalit.

2.3.2 Osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuva päättely

Geneerisessä päättelyssä esimerkin ominaisuuksien lisäksi voidaan hyödyntää myös tunnettua teoriatietoa. Marrades ja Gutiérrez (2000) kuvaavat toisen geneerisen päättelyn luokan siten, että päättelyssä ratkaisun etsintä ja perustelu pohjautuvat osin empiirisesti havaittuihin esimerkin ominaisuuksiin, mutta päättelyssä käytetään pääasiassa esimerkin taustalla olevaa tunnettua teoriatietoa. Päättely on siis jo osaksi siirretty yleiseen tilanteeseen, mutta päättelyssä käytetään edelleen apuna esimerkin ominaisuuksia.

Opiskelijan osoittaessa kahden parittoman luvun summan olevan parillinen, hän lähtee liikkeelle samalla lailla kuten edellä, mutta vie lukujen ominaisuuksiin perustuvan päättelyn vielä pidemmälle kuin edellä sekä perustelee muunnokset teoriaan nojaten. Hän voi esimerkiksi mainita, että jokainen pariton luku voidaan esittää parillisen luvun ja luvun 1 summana sekä parilliset luvut luvun 2 ja jonkin toisen kokonaisluvun tulona.

$$\begin{aligned} 7 + 9 &= (6 + 1) + (8 + 1) \\ &= (2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 4 + 1) \end{aligned}$$

$= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1$

$= 2 \cdot (3 + 4 + 1)$

Opiskelija päätyy tulokseen, jossa parittomien lukujen summa voidaan esittää muodossa, jossa jokin luku kerrotaan kahdella. Siten opiskelija päättelee, että lukujen summan täytyy olla parillinen. Opiskelija myös huomaa, että samaa päättelyä voidaan käyttää minkä tahansa samanlaisen esimerkin kohdalla. Siis luvut voidaan aina hajottaa samalla tavalla, olivatpa kyseessä mitkä luvut tahansa. Juuri tämä huomio on oleellinen siirryttäessä kohti esimerkeistä riippumatonta päättelyä.

Tarkastellaan jälleen tehtävää, jossa opiskelijan tulee osoittaa ympyrän säteen ja tangentin välisen kulman olevan suora kulma. Tehtävää ratkaistessaan opiskelija hyödyntää kuvan lisäksi myös tuntemaansa teoriatietoa nelikulmion kulmien summasta. Opiskelija havaitsee aluksi kuvasta katsomalla, että kulmat α ja β ovat yhteensä $180°$. Opiskelija muistaa, että nelikulmion kulmien summa on $360°$, joten kulmien ACB ja ADB summan on oltava $360° - 180° = 180°$. Opiskelija päättelee tästä, että molempien kulmien suuruuden on oltava $90°$. Siis ympyrän säteen ja tangentin välinen kulma on suora kulma. Opiskelijan geneerinen perustelu nojaa vielä vahvasti esimerkkiin, koska hän olettaa kuvan perusteella kulmien ACB ja ADB olevan yhtä suuria. Tämä tulisi kuitenkin osoittaa täsmällisesti, jolloin törmättäisiin kehäpäätelmään. Siispä deduktiiviseen päättelyyn siirryttäessä on kehitettävä jokin muu tapa perustella annettu väite.

2.4 Deduktiivinen päättely

Toisin kuin edellä esittelyt päättelyn muodot, deduktiivinen päättely on riippumatonta esimerkeistä. Marradesin ja Gutiérrezin (2000) mukaan päättely perustuu mentaalisiin operaatioihin sekä loogisiin päätelmiin. Jos esimerkkejä kuitenkin hyödynnetään, niitä käytetään vain päättelyn askelten järjestelyyn eikä esimerkkien ominaisuuksia käsitellä ongelman ratkaisussa.

2.4.1 Ajatuskoe

Deduktiivisessa päättelyssä on kyse ajatuskokeesta, kun tarkoin valittua esimerkkiä käytetään jäsentämään todistusta. Esimerkkien rooli ajatuskokeessa onkin Marradesin ja Gutiérrezin (2000) mukaan auttaa järjestämään päättelyn askeleet mahdollisimman helppolukuiseen ja ymmärrettävään muotoon. Päättelyssä voidaan viitata kuvaan tai muuhun esimerkkiin, mutta päättely tapahtuu kuitenkin yleisessä tilanteessa.

Ajatuskoe on ikään kuin malli siitä, miten formaali todistus tulee rakentumaan. Merkinnät voivat vielä viitata esimerkkiin ja todistuksen muoto ei ole formaali, mutta päättely tapahtuu kuitenkin täysin yleisessä tilanteessa.

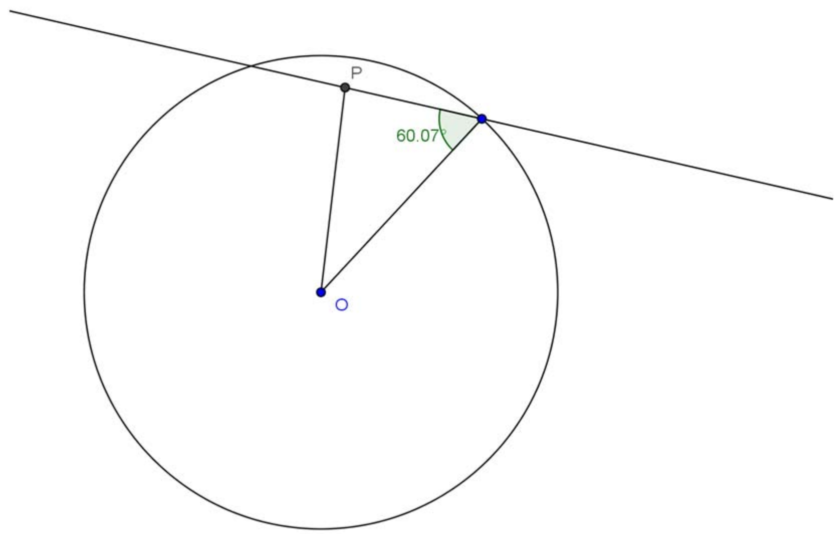
Opiskelijan todistaessa parittomien lukujen summan ongelmaa, geneerisessä päättelyssä käytetty esimerkki *7 + 9 = 16* voi olla apuna taustalla, mutta päättely esitetään yleisesti:

> *Jokainen pariton luku voidaan esittää parillisen luvun ja luvun 1 summana. Jos nyt laskemme yhteen kaksi paritonta lukua, saamme edellisen nojalla*
>
> *pariton luku + pariton luku*
>
> *= parillinen luku + 1 + parillinen luku + 1*
>
> *= parillinen luku + parillinen luku + 2*
>
> *jonka täytyy olla parillinen luku, sillä parillisten lukujen summa on parillinen.*

Opiskelija päätyy ajatuskokeessa samaan ratkaisuun kuin geneerisessäkin päättelyssä, mutta nyt hän ei käytä päättelyssään satunnaisia esimerkeiksi valitsemiaan numeroita, vaan hän käyttää yleisesti paritonta ja parillista lukua, jolloin päättely tapahtuu yleisessä tilanteessa.

Oppilaan ratkaistessa ympyrän tangentin ja säteen välistä kulmaa, hän käyttää annettua kuvaa apuna jäsentämään todistusta, mutta todistus tapahtuu kuitenkin yleisessä tilanteessa. Opiskelija voi perustella väitteen esimerkiksi antiteesin avulla.

*Jos ympyrän säteen ja tangentin välinen kulma ei olisikaan suora kulma, löytyisi tangentilta piste P (*Kuva 7*), joka on lähempänä ympyrän keskipistettä kuin alkuperäinen sivuamispiste. Pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä on siis lyhyempi kuin alkuperäisen sivuamispisteen etäisyys, joka on sama kuin ympyrän säde. Siis pisteen P on oltava ympyrän sisällä, jolloin ympyrä ja tangentti leikkaavat kahdessa pisteessä. Tämä on kuitenkin ristiriita tangentin määritelmän kanssa, joten ympyrän säteen ja tangentin välisen kulman on oltava suora kulma.*



Kuva 7: Ympyrän säteen ja tangentin välisen kulman ratkaiseminen ajatuskokeella.

2.4.2 Formaali päättely

Formaali päättely on täsmällisin ja muodollisin päättelyn muoto. Marrades ja Gutiérrez (2000) määrittelevät sen päättelynä, jossa ei käytetä apuna lainkaan esimerkkejä, vaan päättely perustuu kokonaan mentaalisiin operaatioihin. Reid ja Knipping (2010) muistuttavat, että todistuksissa olevat symbolit eivät kuvaa mitään konkreettista asiaa ja matemaattiset säännöt kuvataan merkkijonoina. Heidän mukaansa todistuksiin voidaan kuitenkin lisätä kuvaavia sanoja, tosin ne ovat vain apuna lukijalle, eivät osa todistusta.

Kuvia tai esimerkkejä voidaan siis käyttää todistuksen apuna havainnollistamaan päättelyä, mutta todistus on ymmärrettävissä myös ilman niitä.

Formaalissa päättelyssä käytettävät käsitteet määritellään tarkasti ja todistus kirjoitetaan täsmällisesti. Jotta edellä ajatuskokeessa esimerkkinä käyttämämme todistus kahden parittoman luvun summasta täyttäisi formaalin päättelyn kriteerit, ennen päättelyn aloittamista tulisi määritellä parittomille luvuille käytettävät symbolit ja lisäksi kiinnittää huomiota todistuksen aukottomuuteen.

> *Jokainen pariton luku on muotoa 2k+1, missä k on kokonaisluku sekä jokainen parillinen luku muotoa 2n, missä n on kokonaisluku. Olkoon* $k, m \in \mathbb{Z}$. *Kun nyt laskemme yhteen kaksi paritonta lukua, saamme*
>
> $(2k + 1) + (2m + 1)$
>
> $= (2k + 2m) + (1 + 1)$
>
> $= 2k + 2m + 2 \cdot 1$
>
> $= 2 \cdot (k + m + 1)$.
>
> *Koska* $k, m \in \mathbb{Z}$, *myös* $k + m + 1 \in \mathbb{Z}$. *Siten saatu luku on muotoa 2n, missä n on kokonaisluku, joten parittomien lukujen summa on parillinen luku.*

Formaalin päättelyn ympyrän tangentin ja säteen välisen kulman ratkaisusta on oltava lukijan ymmärrettävissä, vaikka lukija ei näkisi kuvaa tilanteesta. Siispä todistuksessa käytettävät merkinnät on määriteltävä huolellisesti. Kaikki todistuksessa tehtävät päätelmät perustellaan tunnettujen määritelmien ja lauseiden avulla.

> *Olkoon Y ympyrä, jonka keskipiste on O. Olkoon suora l ympyrän Y tangentti, joka sivuaa ympyrää pisteessä P. Osoitetaan, että tällöin tangentin l on oltava kohtisuorassa sädettä OP vastaan.*
>
> *Antiteesi: OP ei ole suoran l normaali.*

Tällöin normaalin olemassaolon perusteella löytyy piste $P \in l$ *siten, että* $\measuredangle PQO = 90°$ *(*Kuva 8*). Koska kolmiossa kahden kulman summa on aina alle kaksi suoraa kulmaa, kolmiossa ΔOPQ on oltava*

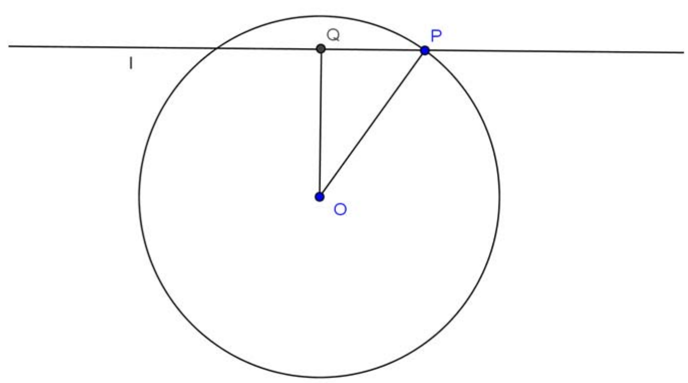
$$\measuredangle PQO + \measuredangle QPO < 180°.$$

Koska $\measuredangle PQO = 90°$*, saadaan* $\measuredangle QPO < 90°$*. Siis*

$$\measuredangle PQO > \measuredangle QPO.$$

Koska kolmiossa kulmat ja niiden vastinsivut ovat suuruusjärjestyksessä eli suurinta kulmaa vastaa pisin sivu, ja pienintä kulmaa lyhin sivu, on oltava $OQ < OP = r$*. Siis piste* $Q \in l$ *on ympyrän sisällä.*

Tällöin ympyrä Y ja suora l leikkaavat kahdessa pisteessä, mikä on ristiriita tangentin määritelmän kanssa. Siis säteen OP on oltava suoran l normaali eli ympyrän säteen ja tangentin välinen kulma on suora.



Kuva 8: Tehtävän ratkaiseminen formaalisti antiteesin avulla

2.5 Aiempia tutkimuksia matemaattisesta päättelystä

Opiskelijoiden matemaattista päättelyä on tutkittu runsaasti sekä tavallisten matematiikan oppituntien että dynaamisten geometriaohjelmien hyödyntämisen yhteydessä. Yhtenevänä johtopäätöksenä tutkimuksille (mm. Cañadas & Castro, 2007; Jones, 2000; Choi-Koh, 1999; Schoenfeld, 1986) näyttäisi olevan empiirisen päättelyn yleisyys. Esimerkiksi Schoenfeld toteaa ensimmäisen vuoden lukio-opiskelijoiden olevan geometriaan liittyvissä päättelyssä täysin empiirisellä tasolla ja käyttääkin heistä nimitystä ”naive empiricists”.

Cañadas ja Castro (2007) tutkivat toisen asteen opiskelijoiden induktiivista eli havaintoon perustuvaa päättelyä haastattelemalla opiskelijoita tilanteissa, joissa he ratkaisivat matemaattisia ongelmanratkaisutehtäviä. Induktiivinen päättely on verrattavissa edellä esiteltyyn empiiriseen päättelyyn, sillä myös induktiivisessa päättelyssä lähdetään liikkeelle yksittäisestä tai useammasta empiirisestä havainnosta ja tehdään niiden pohjalta yleistys. Cañadas ym. huomasivat tutkimuksessaan, että opiskelijat turvautuvat yksityiskohtaisiin havaintoihin, kun he yrittävät keksiä yleisen kaavan ja tulivat siihen tulokseen, että induktiivinen päättely on luontevaa toisen asteen opiskelijoille. He havaitsivat, että opiskelijoilla on taipumus lähestyä ongelmia empiirisesti matemaattisen rakenteen tarkastelun sijaan. Myös Choi-Koh (1999) havaitsi tutkimuksessaan koehenkilönsä lähestyvän geometrian ongelmia empiiristen havaintojen kautta. Hän huomasi opiskelijan etsivän kuvioista samankaltaisuuksia ja eroavuuksia muuttamalla kuvioita dynaamisen geometriaohjelman avulla ja muodostavan empiiristen havaintojen pohjalta väitteen, jota voi lähteä perustelemaan matemaattisesti.

Jones (2000), Marrades ja Gutiérrez (2000) sekä Choi-Koh (1999) ovat tutkineet opiskelijoiden päättelyn muotoja dynaamisen geometriaohjelman käytön yhteydessä. Jones havaitsi, että geometriaohjelman dynaaminen luonne vaikuttaa opiskelijoiden päättelyyn ja tukee empiiristä päättelyä. Kuitenkin Jonesin mukaan huolellisesti suunniteltujen tehtävien, opettajan ymmärtävän ohjauksen ja matemaattiseen perusteluun kannustavan ilmapiirin avulla opiskelijat voivat kehittyä matemaattisten lausekkeiden muotoilussa ja oppia tulemaan toimeen induktiivisten lausekkeiden kanssa. Jones korostaa, että nämä molemmat taidot ovat oleellisia siirryttäessä deduktiiviseen päättelyyn. Marrades ja Gutiérrez (2000) korostavat, että opiskelijat tarvitsevat runsaasti aikaa ja omistautumista tehtävien tekemiselle dynaamisella geometriaohjelmalla, jotta he oppivat luottamaan tuottamiinsa deduktiivisiin päättelyihin. Lisäksi heidän mukaansa opiskelijoiden päättelytaidot kehittyvät vain, mikäli samanaikaisesti opiskellaan myös aiheeseen liittyviä matemaattisia käsitteitä.

Choi-Koh (1999) tutki yksittäisen toisen asteen opiskelijan ongelmanratkaisua teknologia-avusteisessa matematiikassa kiinnittäen huomiota myös opettajan ohjauksen vaikutukseen. Tutkija keskusteli opiskelijan kanssa hänen ratkaistessaan tehtäviä ja huomasi, että aktiivisen opettajan (tässä tapauksessa tutkijan) kanssa keskustelun kautta opiskelija orientoitui geometriseen ajatteluun. Kun opiskelija sai keskustella opettajan kanssa geometriaohjelmalla tekemistä havainnoistaan, hän sai aikaiseksi päteviä päättelyitä geometrisille ongelmille. Myös Marrades ja Gutiérrez (2000) huomasivat, että sillä, millaisia vastauksia opettaja hyväksyy, on merkittävä rooli opiskelijoiden edistymisessä.

3 TUTKIMUS

3.1 Tutkimuksen tavoite

Tämän tutkimuksen tavoitteena on luoda aiempien tutkimusten (mm. Harel & Sowder, 2007; Marrades & Gutiérrez, 2000) pohjalta matemaattisen päättelyn muotojen luokittelu. Edellä esiteltyä kirjallisuuteen pohjaavaa luokittelua on tarkennettu ja muokattu kerätyn aineiston perusteella. Tavoitteena on myös saada kuvailevaa tietoa siitä, millaisia päättelyn muotoja opiskelijat käyttävät tutkivan matematiikan oppitunneilla. Lisäksi havainnoidaan sitä, vaikuttavatko tunnin aihe ja tehtävät päättelyn muodon valintaan.

Aikaisemmissa tutkimuksissa (mm. Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Choi-Koh, 1999) on käynyt ilmi, että opettajalla on merkittävä rooli opiskelijoiden käyttämään päättelyn muotoon vaikuttamisessa. Näiden tutkimusten mukaan opiskelijat tyytyvätkin helposti empiiriseen perusteluun, ellei opettaja kannusta heitä etsimään idealleen pätevämpää perustelua. Siten tässä tutkimuksessa analysoidaan myös opettajan ohjausta oppitunneilla sekä sen vaikutusta oppilaiden päättelyyn.

Tutkimuskysymykset kiteytyvät seuraavasti:

1. Millaisia matemaattisen päättelyn muotoja opiskelijat käyttävät tutkivan matematiikan oppitunneilla?

2. Miten opettajan ohjaus tutkimusvaiheessa vaikuttaa opiskelijoiden käyttämään päättelyyn ja väitteiden perusteluun?

Tutkimus on luonteeltaan laadullinen tutkimus, jossa käytetään teoriaohjaavaa sisällönanalyysiä. Tuomi ja Sarajärvi (2006) määrittelevät teoriaohjaavan analyysin siten, että sitä hyödyntävässä tutkimuksessa teoreettiset käsitteet tuodaan esiin valmiina ja aineiston analyysiä ohjaa valmis, tunnetun teoriatiedon perusteella luotu kehys. Tutkimuksessa tämä käy ilmi aiempien aineistojen pohjalta muodostetun päättelyn muotojen luokittelun muokkaamisena aineiston pohjalta.

Tuomen ja Sarajärven (2006) mukaan empiirisessä analyysissä korostuvat aineiston keräämis- ja analyysimetodit ja empiiristä analyysiä hyödyntävälle tutkimukselle on oleellista tutkimukseen osallistuvien yksilöiden tunnistettavuuden häivyttäminen. Tutkimuksen tuloksia esitettäessä on siis huolehdittava siitä, että tutkimukseen osallistuneita yksittäisiä oppilaita ei voida tunnistaa esimerkiksi tunneilta poimituista opiskelijoiden keskusteluista. Tuomen ym. mukaan laadullisessa tutkimuksessa ei pyritä tekemään tilastollisia yleistyksiä, vaan sen sijaan kuvataan tutkittavaa ilmiötä ja pyritään ymmärtämään yksilön tai ryhmän toimintaa tutkittavassa tilanteessa. Hirsjärvi, Remes ja Sajavaara (2004) kuvaavatkin laadullista tutkimusta kokonaisvaltaiseksi tiedon hankinnaksi, millä tarkoitetaan tilan antamista tutkittavien henkilöiden näkökulmille ja kokemuksille sekä perehtymistä tutkittavaan ilmiöön liittyviin ajatuksiin ja tunteisiin.

3.2 Tutkimusaineisto

Lukuvuonna 2010–2011 Jyväskylän yliopiston matematiikan aineenopettajaopiskelijat suunnittelivat ja toteuttivat opetusharjoittelussa yhteensä 26 tutkivan matematiikan tuntia yläkoulussa ja lukiossa. Opetustunnit olivat osa Hähkiöniemen (2011) johtamaa Tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa -projektia. Aineenopettajaopiskelijat saivat ennen tuntien suunnittelua opetusta tutkivan matematiikan periaatteista sekä perehtyivät tutkivaa matematiikkaa käsitteleviin tutkimuksiin. Tämän jälkeen he suunnittelivat ja toteuttivat 2-4 hengen ryhmissä tutkivan matematiikan oppitunnit. Kaikki tunnit pidettiin Jyväskylän normaalikoulussa. Näistä 14 tunnilla oppilaat ratkaisivat tehtäviä GeoGebralla. Tässä tutkimuksessa analysoidaan kuutta lukiossa pidettyä oppituntia, joilla kaikilla opiskelijat käyttivät GeoGebraa. Tutkimuksessa tarkasteltavien oppituntien tehtävät löytyvät liitteestä 1.

Aineistonkeruumenetelmänä tutkimuksessa käytettiin havainnointia ilman osallistumista. Hirsjärvi, Remes ja Sajavaara (2004) mainitsevat havainnoinnin hyväksi puoleksi sen, että verrattuna kyselyihin ja haastatteluihin, havainnoinnin avulla saadaan tietoa siitä, mitä tilanteessa *todella* tapahtuu, eikä vain siitä, mitä tutkimukseen osallistuvat henkilöt ajattelevat, tuntevat ja uskovat. He kuitenkin kritisoivat havainnointia menetelmänä siitä, että havainnoija saattaa häiritä tilannetta ja siten vääristää tuloksia. Tutkivan matematiikan oppitunneille osallistuneet opiskelijat olivat tietoisia osallistumisestaan tutkimukseen ja heiltä oli saatu lupa havainnointiin.

Käytännössä havainnointi toteutettiin kuvaamalla oppitunnit videolle. Videointi valittiin havainnointitavaksi, koska se mahdollistaa oppituntien katsomisen uudelleen ja uudelleen ja siten tilanteiden tarkan analysoinnin. Oppitunnit videoitiin kahdella kameralla. Toisella, käsivaralla olevalla kameralla seurattiin opettajaa, jolla oli langaton mikrofoni. Kamera kuvasi luokan perältä, kun opettaja johti koko luokan keskustelua sekä tallensi opettajan taululle tekemät merkinnät. Kamera myös seurasi opettajan kiertelyä luokassa. Toinen kamera kuvasi koko tunnin ajan läheltä yhtä opiskelijaryhmää, jolla oli myös langaton mikrofoni. Tarkoituksena oli tallentaa erityisesti opiskelijoiden tietokoneen näytöllä tekemä työskentely. Opiskelijat vastasivat kysymyksiin tunnin alussa jaetulle monisteelle, joihin he myös laittoivat oman nimensä. Opiskelijoiden kirjalliset tuotokset kerättiin tunnin jälkeen. Tässä tutkimuksessa tuntien analysoinnissa hyödynnettiin opiskelijaryhmää kuvanneen kameran tallenteita sekä opiskelijoiden kirjallisia ratkaisuja.

3.3 Aineiston analyysi

Ennen aineistoon tutustumista olin tutustunut aiempiin tutkimuksiin opiskelijoiden päättelyn muodoista sekä tehnyt alustavan luokittelun, jonka toivottaisiin sopivan perustelun lisäksi myös ratkaisun etsimisvaiheeseen.

Powell, Francisco ja Maher (2003) ovat kehittäneet erityisesti matemaattisen ajattelun tutkimiseen soveltuvan videoanalyysimenetelmän. He ovat ottaneet huomioon muun muassa videoituun dataan liittyvät erityisseikat ja kehittäneet näiden pohjalta seitsemän toisiinsa vaikuttavaa, epälineaarista vaihetta sisältävän menetelmän. Powellin ym. menetelmä koostuu seuraavista vaiheista:

1. Tarkkaavainen tutustuminen videomateriaaliin *(Viewing attentively the video data)*
2. Videomateriaalin kuvaileminen *(Describing the video data)*
3. Kriittisten tapahtumien tunnistaminen *(Identifying critical events)*
4. Litterointi *(Transcribing)*

5. Koodaus *(Coding)*
6. Juonen kokoaminen *(Constructing storyline)*
7. Kertomuksen laatiminen *(Composing narrative)*.

Otin tutkimukseeni analyysin pohjaksi Powellin ym. menetelmän ja muokkasin sitä omaan tutkimukseeni sopivaksi. Yksi tutkimuksen tavoitteista on muodostaa aineiston pohjalta luokittelu opiskelijoiden matemaattisen päättelyn muodoista. Siten aineistoon tutustumisen jälkeen seuraavaksi vaiheeksi lisäsin teorian pohjalta tehdyn päättelyn muotojen luokittelun muokkaamisen. Seuraava vaihe on Powellin ym. mukaisesti videomateriaalin kuvaileminen. Kuvailun yhteydessä merkitään myös, mitä päättelyn muotoa mikäkin tilanne edustaa, joten aineiston koodaus suoritetaan jo materiaalin kuvailun yhteydessä. Koska tutkimuksen tarkoituksena on saada kuvailevaa tietoa erilaisista päättelyn muodoista, koko aineistoa ei ole mielekästä litteroida. Siten valitsin tutkimuksen tavoitteen kannalta kriittiset kohdat ennen litterointia ja litteroin pelkästään oleelliset kohdat. Viimeisessä vaiheessa perehdyttiin opettajan ohjaukseen tutkivan matematiikan oppitunneilla. Aineiston analysointi voidaan siten jakaa viiteen vaiheeseen:

1. Videoihin tutustuminen
2. Päättelyn muotojen luokittelun muokkaaminen videoiden pohjalta
3. Videomateriaalin kuvaileminen ja videoiden koodaus
4. Päättelyn muotoja hyvin kuvaavien kohtien etsiminen ja litterointi
5. Opettajan ohjauksen analysointi.

Aineiston analysointi aloitettiin videoihin tutustumalla. Videoita ensimmäistä kertaa katsoessani kiinnitin huomiota erityisesti opiskelijoiden päättelyyn ja siihen, pystyisikö opiskelijoiden päättelyn tietyssä tilanteessa sijoittamaan johonkin aiemmin muodostamaani päättelyluokkaan.

Tutustuttuani aineistoon muokkasin alussa tekemääni luokittelua siten, että se vastasi paremmin oppitunneilla havaittuja päättelyitä. Päädyin esimerkiksi lisäämään jokaisen luokan kuvaukseen esimerkin myös yksittäisen tehtävän ratkaisusta, sillä useissa tehtävissä vaaditaan yleisen väitteen perustelun sijaan päättelemään jokin yksittäinen tulos, esimerkiksi tietyn kulman suuruus. Sisällytin manipulatiiviseen päättelyyn myös sellaiset tilanteet, joissa opiskelijat syöttävät pisteitä GeoGebraan tai sijoittavat arvoja lausekkeisiin, jotta myös tällaiset tilanteet saataisiin luokiteltua.

Kun luokittelu oli saatu valmiiksi, ryhdyin katsomaan videoita tarkemmin ja merkitsemään ylös jokaisen tehtävän kohdalle sen hetkisen työskentelyn vaiheen sekä oppilaiden käyttämän päättelyn muodon. Lisäksi liitin mukaan kuvauksen, josta käy ilmi, mitä opiskelijat sillä hetkellä tekevät sekä mahdollisen opettajan ohjauksen.

Työskentelyn vaiheet koodattiin seuraavasti:

1. Tehtävänannon ymmärtäminen ja ratkaisun etsiminen
2. Konjektuurin muodostaminen
3. Perusteleminen

Päättelyn muodon luokittelu toteutettiin seuraavasti:

1. Ulkopuoliseen lähteeseen vetoaminen
    - 1.1. Auktoriteettiin vetoaminen
    - 1.2. Manipulatiivinen päättely
2. Empiirinen päättely
    - 2.1. Havainto yksittäisestä/satunnaisesta esimerkistä
    - 2.2. Havainto tarkoin valitusta esimerkistä
3. Geneerinen päättely
    - 3.1. Esimerkin ominaisuuksiin perustuva päättely
    - 3.2. Osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuva päättely
4. Deduktiivinen päättely
    - 4.1. Ajatuskoe
    - 4.2. Formaali todistus

Merkitsin työskentelyn vaihe -kohtaan päättelyn muodon lisäksi myös lisähuomautuksen, jos opiskelijoiden päättely johti virheelliseen lopputulokseen. Oppitunneilla oli myös muutamia kohtia, joissa opiskelijat eivät osoittaneet minkäänlaista päättelyä. Tällaista esiintyi muun muassa silloin, kun oppilaat eivät oikein ymmärtäneet, mitä tehtävässä haettiin tai keskustelivat tehtäviin liittyvästä matematiikan ilmiöstä mutta eivät varsinaisesti pohtineet tehtävän ratkaisua. Näihin tyydyin merkitsemään *ei päättelyä*. Taulukossa 1 on esitetty esimerkki tunnin tapahtumien luokittelusta käytännössä.

Kun kaikki videot oli käyty läpi ja koodattu, katsoin videot vielä uudelleen läpi ja tarkistin, että eri tunneilla samanlaiset päättelyt oli koodattu samoiksi. Sen jälkeen valitsin jokaista päättelyn muotoa hyvin kuvaavan tilanteen aineistosta ja litteroin sen.

Tämän jälkeen tarkastelin aineistoa vielä opettajan ohjauksen näkökulmasta. Tarkkailin erityisesti sellaisia aiempien tutkimusten pohjalta esiin nousseita tilanteita, joissa opettaja ohjauksellaan saa opiskelijat orientoitumaan matemaattiseen ajatteluun, pohtimaan uudelleen ratkaisuaan tai kehittämään päättelyään. Näiden lisäksi valitsin lähempään tarkasteluun yhden tilanteen, jossa voidaan analysoida opettajan roolia tutkivan matematiikan oppitunneilla. Myös kaikki opettajan ohjauksesta tarkempaan analyysiin valitut tilanteet litteroitiin. Esimerkkeihin opiskelijoiden päättelystä ja opettajan ohjauksesta tutustutaan luvussa 4.

Taulukko 1. Esimerkki tunnin tapahtumien luokittelusta

Aika	Kuvaus oppilaiden toiminnasta	Tehtävä	Työsken-telyn vaihe	Päättelyn muoto	Opettajan ohjaus
17:53-18:04	Oppilaat perustelevat kulman suuruuden sillä, että kulma näyttää olevan 90°.	2a	3	2.1	Opettaja kysyy, miten oppilaat perustelevat väitteensä. Kun oppilaat kertovat kulman näyttävän suoralta, opettaja pyytää parempia perusteluja.
18:05-19:52	Oppilaat huomaavat, että kulmien CAD ja DBC summa on 180°. Koska nelikulmion summa on 360°, kulmien ACB ja BDC summa täytyy olla 180°. Tämä jaettuna kahdella tekee 90°.	2a	3	3.2	Opettaja kehottaa etsimään tarkempaa perustelua kuin edellä.
19:53-20:25	Oppilaat pohtivat suoran ja janan DA välistä kulmaa ja päätyvät siihen, että molempien kulmien on oltava 90°.	2b	2	2.1	
20:26-21:41	Oppilaat pohtivat tehtävää 3 aluksi miettimällä, mitä voisi tapahtua, kun pistettä B liikutetaan. He päätyvät siihen, että kulma α voi olla enintään 180°	3	1	4.1	
21:42-27:50	Oppilaat testaavat edellä muodostamaansa konjektuuria liikuttamalla pistettä B ja tarkkailemalla kulman α suuruutta. Oppilaat kokeilevat, saako kulma α arvoa 180°, jos pistettä B vetää tarpeeksi kauas. He huomaavat, että suorat eivät enää leikkaa toisiaan, jos α=180°. Siten he päätyvät siihen, että kulma voi olla korkeintaan 180°.	3	3	2.2	

4 TULOKSET

Luvussa käsitellään opiskelijoiden käyttämiä päättelyn muotoja tutkivan matematiikan oppitunneilla. Ensimmäisessä alaluvussa tarkastellaan käytettyjä päättelyn muotoja yleisesti kaikilla kuudella oppitunnilla sekä annetaan esimerkkejä opiskelijoiden päättelyketjuista. Toisessa alaluvussa keskitytään opettajan ohjaukseen ja sen vaikutukseen opiskelijoiden matemaattiseen päättelyyn.

4.1 Päättelyn muotojen esiintyminen oppitunneilla

Tutkivan matematiikan oppitunteja pidettiin lukiossa sekä lyhyen että pitkän matematiikan kursseilla. Oppitunteihin liittyvät kurssit ja tunneilla käsitellyt aiheet olivat seuraavat:

1. Pitkä matematiikka, Analyyttinen geometria (MAA4): Ympyrä
2. Lyhyt matematiikka, Geometria (MAB2): Ympyrän tangentti
3. Lyhyt matematiikka, Tilastot ja todennäköisyys (MAB5): Normaalijakauma
4. Pitkä matematiikka, Analyyttinen geometria (MAA4): Paraabeli
5. Pitkä matematiikka, Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9): Sini ja kosini yksikköympyrässä
6. Pitkä matematiikka, Derivaatta (MAA7): Derivaattafunktio ja derivoimissäännöt

Taulukossa 2 on esitetty opiskelijoiden käyttämien päättelyn muotojen esiintyminen edellä esitellyillä oppitunneilla.

Taulukko 2. Käytettyjen päättelyn muotojen frekvenssit tunneittain.

	Oppitunnit					
Päättelyn muoto	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1. Ulkopuoliseen lähteeseen vetoaminen						
1.1 Auktoriteettiin vetoaminen	1	0	1	0	5	0
1.2 Manipulatiivinen päättely	3	0	2	3	0	2
2. Empiirinen päättely						
2.1 Havainto yksittäisestä/satunnaisesta esimerkistä	12	6	1	3	3	12
2.2 Yleistys tarkoin valitusta esimerkistä	0	1	0	1	4	6
3. Geneerinen päättely						
3.1 Esimerkin ominaisuuksiin perustuva päättely	0	0	2	2	0	0
3.2 Osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuva päättely	2	2	6	0	0	3
4. Deduktiivinen päättely						
4.1. Ajatuskoe	0	2	2	0	0	2
4.2 Formaali päättely	0	0	0	0	0	0
Yhteensä	18	11	14	9	12	25

Oppituntikohtaisesta jaottelusta huomataan, että päättelyiden jakautuminen eri päättelyn muotoihin vaihtelee tunneittain. Esimerkiksi tunnilla 1 huomattavan suuri osa päättelyistä (12 päättelyä 18:sta) on empiirisiä yksittäiseen havaintoon perustuvia päättelyitä, kun taas tunnilla 3 lähes puolet päättelyistä (6 päättelyä 11:sta) on geneerisiä osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuvia päättelyitä. Näyttäisi siis, että oppitunnin aiheella ja opiskelijoille annetuilla tehtävillä on vaikutusta käytettävään päättelyn muotoon. Lisäksi tarkkailtavat opiskelijat vaihtuvat tunneittain, mikä vaikuttaa myös tuloksiin.

Tunti 1 on pitkän matematiikan analyyttisen geometrian oppitunti, jolla käsitellään ympyrään liittyviä lauseita ja käsitteitä. Tunti 3 on lyhyen matematiikan tilastot ja todennäköisyys -kurssin oppitunti, jolla käsitellään normaalijakauman ominaisuuksia. Ympyrään liittyvällä tunnilla opiskelijat selvittivät mm. vakioiden a, b ja c vaikutusta ympyrään sekä piirsivät mahdollisimman pienen ympyrän, joka kulkee annettujen pisteiden kautta. Suuri osa tehtävistä oli sellaisia, joihin opiskelijat pystyivät saamaan jonkinlaisen, ei kuitenkaan pätevän, ratkaisun empiirisesti kuvasta katsomalla ja opiskelijat tyytyivätkin usein tähän ratkaisuun. Esimerkiksi selvittäessään parametrien a ja b vaikutusta ympyrään, he muuttivat parametrien arvoja liu´usta ja huomasivat parametrin a muuttamisen liikuttavan ympyrää vaakasuunnassa ja parametrin b muuttamisen siirtävän ympyrää pystysuunnassa. Opiskelijoiden ratkaisu perustui siis täysin empiiriseen havaintoon tilanteesta. Empiirinen lähestymistapa onkin ratkaisun etsimisvaiheessa hyvin toimiva ja oppilaat saivat tehtävään ratkaisun, mutta he olisivat voineet vielä perustella väitteensä sen jälkeen esimerkiksi geneerisesti teoriatiedon avulla.

Normaalijakaumaa käsittelevällä tunnilla opiskelijoille oli annettu valmis GeoGebra-tiedosto, jossa olevaa normaalijakaumaa pystyi muokkaaman muuttamalla keskiarvoa ja keskihajontaa. Opiskelijoille esitettiin normaalisti jakautuneesta aineistosta kysymyksiä, kuten *”Kuinka monta prosenttia oppilaista on saanut pistemäärän neljän ja kuuden pisteen väliltä?”*. Opiskelijat pystyivät määrittämään käyrän alle jäävän alan helposti GeoGebran avulla ja hyödynsivät ratkaisuissaan teoriatietoa mm. siitä, että koko otoksen todennäköisyys on 1. He siis käyttivät ratkaisussaan geneeristä päättelyä, joka nojaa toisaalta esimerkin ominaisuuksiin ja toisaalta heidän tuntemaansa teoriatietoon todennäköisyyden käsitteestä ja normaalijakauman ominaisuuksista.

Oppitunneilla, joilla ei esiinny lainkaan deduktiivista päättelyä (tunnit 1, 4 ja 5), on käytetty suurimmaksi osaksi ulkopuoliseen lähteeseen vetoavaa sekä empiiristä päättelyä. Sen sijaan deduktiivista päättelyä sisältävillä tunneilla (tunnit 2, 3 ja 6) opiskelijat ovat käyttäneet monipuolisesti kaikkia päättelyn muotoja. Esimerkiksi tunnilta 2 löytyy 2 deduktiivista päättelyä, mutta myös runsaasti empiiristä päättelyä. Tällä tunnilla oppilaat tutkivat ympyrän tangenttia ja heitä pyydettiin muun muassa selvittämään, kuinka monta tietyn ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta kulkevaa tangenttia ympyrälle voi piirtää sekä ympyrän keskuskulman ja tangenttikulman välistä yhteyttä. Opiskelijat ratkaisivat piirtämistehtävän odotetusti empiirisesti ja pohtivat myös muita tehtäviä aluksi empiirisesti esimerkin avulla, mutta kehittivät sitten esimerkiksi ympyrän keskuskulman ja tangenttikulman väliselle yhteydelle deduktiivisen perustelun.

Opiskelijat käyttivät usein saman tehtävän sisällä useita eri päättelyn muotoja. Ratkaisun etsimisvaiheessa empiirinen päättely oli tyypillisin keino havainnollistaa tilannetta ja hahmotella ratkaisu annettuun tehtävään. Opiskelijoiden vakuututtua ratkaisustaan empiirisen havainnon avulla, he saattoivat jatkaa tehtävän pohdiskelua ja keksiä idealleen teoriaan pohjautuvan geneerisen tai deduktiivisen päättelyn. Toinen tyypillinen tapa ratkaista tehtäviä oli konstruoida väite geneerisesti tai deduktiivisesti ja sitten testata muodostamaansa konjektuuria empiirisesti. Siis tuloksia tarkasteltaessa on otettava huomioon, että yhtä geneeristä tai deduktiivista päättelyä saattaa vastata samaan tehtävään liittyen useampikin empiirinen päättely, mikä nostaa empiiristen päättelyiden osuutta kaikista päättelyistä. Tärkeintä on kuitenkin, että opiskelijat saivat viidellä tunnilla kuudesta aikaiseksi joko geneerisiä tai deduktiivisia päättelyitä.

Taulukkoon 3 on koottu päättelyn muotojen esiintymiset alaluokittain yhteensä kaikilla oppitunneilla sekä niiden prosentuaaliset osuudet kaikista päättelyistä. Taulukkoon 4 on laskettu edellisestä alaluokittain jaotellusta taulukosta kunkin päättelyn muodon prosentuaalinen osuus kaikista päättelyistä.

Taulukko 3: Käytettyjen päättelyn muotojen frekvenssit alaluokittain yhteensä kaikilla tunneilla sekä päättelyiden esiintymisen suhteelliset frekvenssit.

Päättelyn muoto	**frekvenssi**	**Suhteellinen frekvenssi (%)**
1. Ulkopuoliseen lähteeseen vetoaminen		
1.1 Auktoriteettiin vetoaminen	7	7,9
1.2 Manipulatiivinen päättely	10	11,2
2. Empiirinen päättely		
2.1 Havainto yksittäisestä/satunnaisesta esimerkistä	37	41,6
2.2 Yleistys tarkoin valitusta esimerkistä	12	13,5
3. Geneerinen päättely		
3.1 Esimerkin ominaisuuksiin perustuva päättely	4	4,5
3.2 Osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuva päättely	13	14,6
4. Deduktiivinen päättely		
4.1. Ajatuskoe	6	6,7
4.2 Formaali päättely	0	0
Yhteensä	89	100

Taulukko 4. Käytettyjen päättelyn muotojen suhteelliset frekvenssit yhteensä kaikilla tunneilla.

Päättelyn muoto	Suhteellinen frekvenssi (%)
1. Ulkopuoliseen lähteeseen vetoaminen	19,1
2. Empiirinen päättely	55,1
3. Geneerinen päättely	19,1
4. Deduktiivinen päättely	6,7

Taulukosta 4 huomataan, että yli puolet (55,1 %) tutkivan matematiikan oppitunneilla käytetyistä päättelyistä olivat empiirisiä. Toiseksi eniten (19,1 %) esiintyi ulkopuoliseen lähteeseen vetoavaa sekä geneeristä päättelyä, jossa hyödynnetään empiirisen päättelyn lailla esimerkkejä päättelyn apuna. GeoGebran hyödyntäminen tehtäviä ratkaistaessa näyttää ohjaavan oppilaita hyödyntämään esimerkkejä päättelyssään ja käyttämään siten tehtävien ratkaisussa empiiristä ja geneeristä päättelyä. GeoGebralla on helppo tutkia annetun kuvion ominaisuuksia esimerkiksi raahaamalla pisteitä ja päätellä sitten kuvasta katsomalla tehtävän ratkaisu. Geneerisestä päättelystä suurin osa oli osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuvaa päättelyä. Pelkästään esimerkin ominaisuuksiin perustuvaa geneeristä päättelyä esiintyi tunneilla melko vähän. Jos opiskelijat käyttivät päättelyssään apuna esimerkkiä, heidän päättelynsä liittyi yleensä juuri tehtävän esimerkkiin, eikä sitä voinut yleistää muihin samantapaisiin tehtäviin, joten näissä tapauksissa päättely oli empiiristä.

Oppitunneilla esiintyneestä ulkopuoliseen lähteeseen vetoavasta päättelystä hieman yli puolet oli manipulatiivista päättelyä. Kaikki opiskelijoiden tekemät manipulatiiviset päättelyt olivat joko pisteiden syöttämistä GeoGebraan tai mekaanista arvojen sijoittamista lausekkeeseen. Manipulatiiviseen päättelyyn lukeutuvaa lausekkeiden manipulointia ei esiintynyt lainkaan tutkivan matematiikan oppitunneilla, sillä tämän tyyppisiä tehtäviä ei ollut mukana. Auktoriteettiin vetoavaa päättelyä esiintyi yleisesti tunneilla melko vähän, kuitenkin tunnilla 5 tätä päättelyä käytettiin jopa 5 päättelyssä

12:sta. Oppitunnilla 5 käsiteltiin siniä ja kosinia yksikköympyrässä. Opiskelijoiden tuli selvittää muun muassa millä kulmalla yhtälö $\cos x = 0{,}5$ toteutuu sekä mikä muuttujan x arvo on yhtälön $\sin x = 0$ ratkaisu. Opiskelijat olivat laskeneet jo aiemmilla tunneilla trigonometrisiin funktioihin liittyviä tehtäviä, joten GeoGebralla tutkimisen sijaan he ratkaisivat tehtävät laskimella. Tällöin he saivat vain yhden ratkaisun, kun GeoGebran avulla he olisivat voineet huomata myös muita mahdollisia ehdot toteuttavia kulmia.

Deduktiivista päättelyä esiintyi oppitunneilla hyvin vähän, sillä vain 6,7 % päättelyistä oli deduktiivisia. Näistä kaikki päättelyt olivat ajatuskokeita, joten oppilaat eivät esittäneet yhtään formaalia päättelyä. Tutkivan matematiikan tehtävät ja GeoGebran käyttö tarjoavat mahdollisuuden tehtävien tutkimiseen ja ratkaisun etsimiseen kuvasta katsomalla ja esimerkin ominaisuuksien avulla, joten opiskelijat tyytyivät usein varsinkin ratkaisun etsimisvaiheessa empiirisiin havaintoihin. Usein opettajalla oli suuri rooli deduktiiviseen päättelyyn siirtymisessä. Kun opettaja kannusti opiskelijoita pohtimaan tarkempaa perustelua empiirisesti havaitsemalleen väitteelle, opiskelijat saattoivat keksiä hyvänkin deduktiivisen perustelun.

Tarkastellaan seuraavaksi otteita opiskelijoiden päättelyketjuista, jotka ilmentävät edellä esiteltyjä päättelyn muotoja.

4.1.1 Ulkopuoliseen lähteeseen vetoaminen

Auktoriteettiin vetoaminen

Auktoriteettiin vetoavaa päättelyä ilmeni kolmella oppitunnilla. Tunneilla opiskelijat perustelivat väitteitä GeoGebran toimintoon nojaten, vetosivat opettajan juuri opettamaan asiaan sekä käyttivät pelkästään laskinta tehtävän ratkaisemiseen.

Todennäköisyys ja tilastot -kurssiin liittyvällä tutkivan matematiikan tunnilla käsiteltiin normaalijakaumaa. Tunnin alussa opettaja alusti hieman normaalijakauman käsitettä ja sen ominaisuuksia, sillä aihe oli oppilaille uusi. Opettaja kävi läpi, mitä tarkoitetaan normaalijakauman keskiarvolla sekä keskihajonnalla ja antoi esimerkin normaalijakauman tarkastelusta.

Lämmittelykysymyksessä opiskelijoita pyydetään pohtimaan, miten keskiarvo ja keskihajonta vaikuttavat normaalijakauman muotoon.

Taru: No jos se keskiarvo on niinku, siis jos se keskihajonta on suuri, niin eiks se sitte ollu sillee leveempi, leveemmällä, niinku tuo on isompi (osoittaa ruudulta jakauman leveyttä). Ja jos se on pieni, niin se on kapeempi. Ja sit se keskiarvo, jos se on suuri, niin se on niinku tuola ylhäällä (näyttää ruudulta, kuinka jakauma jatkuisi ylöspäin). Olikse sillee?

Pilvi: Joo. Tai et jos niitä on paljon siinä tavallaan keskiarvon alueella.

Opiskelijat muistavat opettajan alustuksesta hyvin keskihajonnan vaikutuksen, mutta he ovat ymmärtäneet keskiarvon vaikutuksen jakaumaan väärin. He muistavat, että keskiarvo vaikuttaa jakauman korkeuteen, vaikka tosiasiassa keskiarvon muuttaminen vaikuttaa jakauman sijaintiin x-akselilla. Opiskelijoiden väärä käsitys tulee kuitenkin korjaantumaan tunnin edetessä.

Auktoriteettiin vetoavaa päättelyä esiintyi myös trigonometria ja lukujonot -kurssiin liittyvällä tunnilla, jossa opiskelijat tutkivat siniä ja kosinia yksikköympyrässä. Koska sinin ja kosinin arvojen laskeminen laskimella oli tuttua jo aiemmilta tunneilta, opiskelijat perustelivat ratkaisunsa useassa tehtävässä laskimen avulla, eivätkä pohtineet ongelmaa yksikköympyrän avulla. Seuraavassa opiskelijat pohtivat ratkaisua kysymykseen *”Millä kulmalla cosx = 0,5? Onko ehdon toteuttavia kulmia enemmän?”.*

Essi: Millä kulmalla cosx = 0,5? Eiks tää pidä laskee? (ottaa laskimen esiin)

Venla: (tutkii monisteessa annettua määritelmää ja yksikköympyrää) cosx = a elikkä...

Essi: (on saanut laskettua kulman arvon laskimella ja keskeyttää Venlan pohdinnat) 60 astetta.

Venla: Okei.

Essi: Oisko?

Venla: No joo, laitetaan siihen 60 astetta. (kirjoittavat vastauksen monisteeseen) Onko ehdon toteuttavia kulmia enemmän? Käyks -60? Jos laitat cos(-60).. No ei se varmaan kyllä käy.

Essi: (näppäilee laskimeen cos(-60)) Joo.

Opiskelijat luottavat tehtävän ratkaisussa täysin laskimeen. Videosta ei käy ilmi, mistä Venla keksii koettaa *-60* asteen kulmaa, kun etsitään muita kulmia, joilla ehto $\cos x = 0{,}5$ toteutuu. Opiskelijat testaavat Venlan ehdotusta laskemalla kosinin arvon laskimella ja ovat tyytyväisiä, kun laskin antaa halutun vastauksen. He eivät pohdi ongelmaa yksikköympyrän avulla, jolloin he voisivat keksiä selityksen vastauksen oikeellisuudelle sekä myös muita ratkaisuksi käyviä kulmia.

Manipulatiivinen päättely

Manipulatiivista päättelyä ilmeni neljällä oppitunnilla joko syötettäessä pisteitä GeoGebraan tai sijoitettaessa arvoja lausekkeeseen. Joissakin tehtävissä tarkoituksena olikin pelkästään syöttää pisteitä GeoGebraan ja sitten seuraavassa kohdassa tutkia syntyneen kappaleen ominaisuuksia. Esimerkiksi analyyttisen geometrian ympyrätunnilla tehtävän a-kohta oli pelkästään

> *Piirrä nelikulmio, jonka kärjet ovat A=(3½, 3½), B=(3½, -1), C=(-1, 3½) ja D=(-1, -1).*

Tehtävän b-kohdassa opiskelijoiden tuli sitten selvittää piirtämänsä nelikulmion sisälle piirretyn, mahdollisimman suuren ympyrän yhtälö.

4.1.2 Empiirinen päättely

Empiirinen päättely oli tyypillisin päättelyn muoto tutkivan matematiikan tunneilla. Jos opiskelijoiden oli mahdollista saada tehtävään jonkinlainen vastaus pelkästään kuvasta katsomalla, opiskelijat tekivät havainnon yksittäisestä esimerkistä. Jos taas opiskelijoiden tuli päätellä esimerkiksi jonkin parametrin vaikutusta kuvioon, he saattoivat muuttaa parametrin arvoa tai liikutella jotakin pistettä kuviossa ja tehdä päätelmänsä sitten useamman tarkoin valitun esimerkin pohjalta.

Havainto yksittäisestä/satunnaisesta esimerkistä

Yksittäiseen esimerkkiin perustuvaa havainnointia käytettiin esimerkiksi analyyttisen geometrian kurssilla paraabelin ominaisuuksien tarkastelun yhteydessä. Seuraavassa opiskelijoiden tehtävänä on määrittää annetun paraabelin $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$ huippupiste.

Mira: Huippupiste on tämä. (osoittaa paraabelin huippua) Mutta mistä mää tiiän sen?

Roosa: Miten tässä piti.. Mikä on pudotusvalikko?

Mira: En mää tiiä.

Roosa: Ai ku niin tarkottaako se tota? (osoittaa GeoGebra-ikkunan vasemmassa laidassa olevaa palkkia, jossa näkyvät funktiot ja pisteet)

Mira: Tätä näin?

Roosa: Niin.

Mira: (tutkii paraabelin yhtälöä) No siis se on +4.

Roosa: Se on se missä kohassa se leikkaa y-akselin.

Mira: ..y-akselin eli nelosessa. Eli tossa. (näyttää kuvasta paraabelin ja y-akselin leikkauskohdan) Ei se oo se huippu. Se on puoli. Heitetään siihen että.. Pistä a-kohta. Huippupiste, sitte tota tolla. (tarkoittavat pistettä (0,5 ; 4,5)) Elikkä huippupiste on.. Sanotaan nyt vaikka että se on neljä.. eiku oota x. Se on niinku 0,5. Sillee sulkuihin. Pilkku. Miten se muuten merkitään? Se on oikeestaan se kirjassa, ainaki matikan kirjassa, merkitään sillei että se on niinku että tähän tulee puolipiste. Vai tuleeko tähän puolipiste? Jos on tällein niinku pilkkuja kato. Elikkä siihen puolipiste. Sitte 4,5. Me voidaan muuttaa sitä myöhemmin. (naureskelua ratkaisutavalle) Tällä keinolla.

Roosa: Siihenhän vois kirjottaa, että miten on laskettu.

Mira: Siinä ei kysytty sitä. Se vaan piti määrittää. Niin me määritettiin se nyt GeoGebran avulla.

Oppilaiden tekemä päättely on täysin riippuvaista annetun tehtävän paraabelista. He katsovat kuvasta huipun arvon, joten päättely sopii vain kyseeseen tilanteeseen. Koska päättelyä ei voi yleistää koskemaan muita samantapaisia tehtäviä, kyse on empiirisestä päättelystä, tarkemmin yksittäiseen esimerkkiin perustuvasta havainnosta.

Esimerkistä huomataan myös opiskelijoiden taipumus vastausten arvaamiseen. Opettajan onkin oltava tarkkana, että GeoGebraa käytetään oppitunneilla oikein eikä vastauksia päätellä pelkästään kuvasta katsomalla. Opettaja puuttuukin myöhemmin opiskelijoiden tapaan määrittää paraabelin huippu kuvasta katsomalla, jonka jälkeen opiskelijat saavat aikaiseksi geneerisen ratkaisun samaan tehtävään. Tähän palataan geneerisen päättelyn yhteydessä luvussa 5.1.3.

Havainto tarkoin valitusta esimerkistä

Samalla tunnilla opiskelijoiden tuli tutkia myös paraabelin yhtälön $ax^2 + bx + c$ parametrien b ja c vaikutusta paraabelin huipun sijaintiin. Parametrin c vaikutuksen opiskelijat päättelivät satunnaisten esimerkkien perusteella, mutta tutkiessaan parametrin b vaikutusta, he kävivät säännöllisemmin läpi eri vaihtoehtoja parametrin b arvolle ja käyttivät siten empiiristä, tarkoin valittuihin esimerkkeihin pohjautuvaa päättelyä.

Mira: b on ykkönen (syöttää b:lle arvoksi 1 ja tarkkailee, mitä tapahtuu). Se menee noin. Sitte ku b on neljä se liikkuu tänne suuntaan. Tossa se on neljä (osoittaa kuvaajasta pisteen, jonka x-koordinaatti on neljä).

Roosa: Mitä toi niinku tekis?

Mira: Siis se liikutti sitä jotenki tästä tännepäin (oikealta vasemmalle).

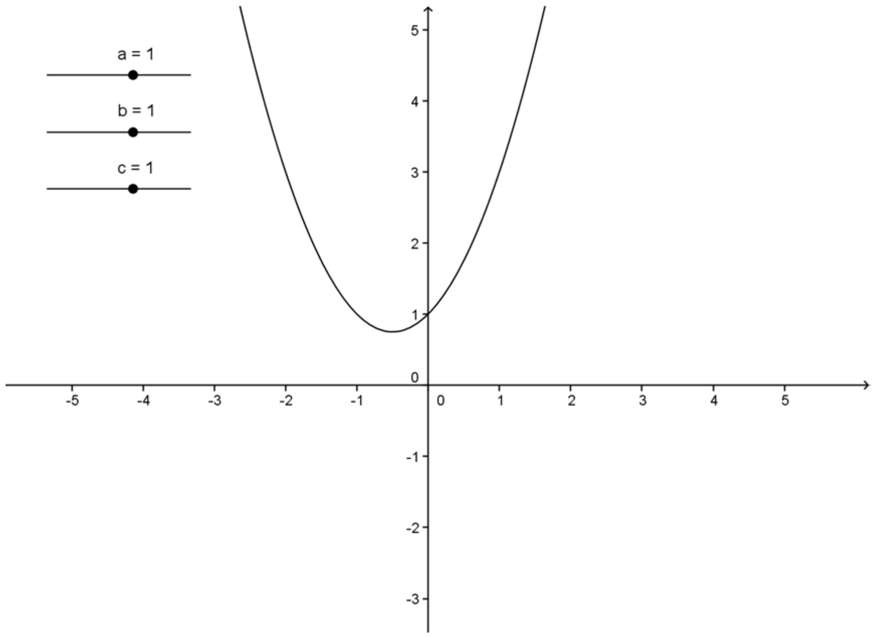
Roosa: Jotenki suuntaa silleen.

Mira: Onko se se miten se aukee? Kato, tänne tuli 4x. Kokeillaanpa vielä. c eiku b on… Ei se mun mielestä siihen (paraabelin leveyteen) vaikuta. Tähän näin ei (näyttää käsillään paraabelin aukeamista).

Roosa: Onko se sitte niinku… Ei…

Mira: Mä haluun näistä semmoset liukuvat (tarkoittaa parametrien arvojen muuttamista).

Opiskelijat etsivät GeoGebrasta toimintoa, jolla he saisivat liu'ulla muutettua parametrin b arvoa, jotta he voisivat tutkia parametrin vaikutusta paraabelin muotoon helpommin useissa eri pisteissä. Opiskelijat saavat GeoGebra-ikkunaan näkyville liu'ut kaikille parametreille (Kuva 9), mutta he eivät onnistu muuttamaan parametrien arvoja niistä. Opiskelijat kuitenkin löytävät liu'ulle animaatio-ominaisuuden ja käyttävät sitä.



Kuva 9: Liu'ut pabaabelin $ax^2 + bx + c$ parametreille *a*, *b* ja *c*

Mira: Sitte tää animaatio (valitsee parametrin b liu'usta hiiren oikealla näppäimellä animaation). Jes!

(Opiskelijat seuraavat tarkkaavaisesti paraabelin liikkumista.)

Mira: Toi ei muutu ollenkaan (osoittaa pistettä (0,1), jossa paraabeli leikkaa y-akselin). Tai siis tuo y-akseli. Se vaan tota…

Roosa: Mitä ihmettä?

Mira: …Se muuttaa sen sijaintia y-akselin suhteen. Koska ku se (parametrin c arvo) on miinus, niin se (paraabeli) menee tälle puolelle (y-akselin oikea puoli) ja plussaa niin se menee tälle puolelle (y-akselin vasen puoli). Onko se että se y-akselin suhteen, eiku x, eiku y? Oota. Katokku se on näin… Nyt. (lukee uudelleen tehtävänannon) Paraabelin huipun sijaintiin. Oho, pitäiskö nää lukee nää tehtävät?

Roosa: Tutki, miten paraabeli vaikuttaa huipun sijaintiin.

Mira: No leikkauspistehän se, sehän on se huippu kuiteski. Tai voijaanhan me vielä kattoa. Mitä tää tekee? Huippu.. (seuraa paraabelin liikettä ruudulta) Se…

Roosa: No se vaan vetää sitä ylös alas. Onko se sillee että se liikuttaa sitä niinku x-akselin suhteen?

Mira: x-akselin suhteen?

Roosa: Ei se kyllä voi olla ku toi on niin täälä (osoittaa koordinaatistosta kohtaa, jossa sekä x-, että y-koordinaatit saavat negatiivisia arvoja).

Mira: Seis! (pysäyttää animaation ja syöttää muuttujalle b arvon 1) b on ykkönen. Nyt pistetään tänne että b=2.

Roosa: Kato aina ku laittaa enemmän niin tuohon (x-akselille) tulee niinku yks ruutu lisää tolleen.

Mira: Elikkä… (syöttää seuraavaksi muuttujalle b arvon 3). Niin! Hei!

Roosa: No mitä se hyödyttää?

Mira: Ei tää hyödytä mitenkään. En mää tiiä mitä se tekee.

Roosa: Eiks tuo a vaan niinku levitä sitä?

Mira: Sit se tekee niinku näin (näyttä käsillään paraabelin aukemista). Mutta mitä tää (b) tekee? Se vaan… Se (paraabeli) liikkuu näin (piirtää sormella ruudulle alaspäin aukeavan paraabelin muodon, jota pitkin huippu animaatiossa liikkui).

Opiskelijat huomaavat siis empiirisesti, miten paraabeli käyttäytyy parametria *b* muutettaessa, mutta he eivät osaa pukea havaintoaan sanoiksi. Parametri *b* vaikuttaa siis paraabelin sijaintiin vaakasuunnassa. Voidaan lisäksi havaita, että paraabelin $\mathrm{y} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ huippupiste siirtyy parametria *b* muutettaessa paraabelin

$$y = -ax^2 + c$$

kuvaajaa pitkin (Schultz). Tämä voidaan osoittaa teoreettisesti ottamalla lähtökohdaksi paraabelin $\mathrm{y} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ huipun x-koordinaatti $x = -\frac{b}{2a}$. Tällöin paraabelin huipun y-koordinaatiksi saadaan

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

Siis paraabelin huipun koordinaatit ovat $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ ja ne toteuttavat yhtälön $y = -ax^2 + c$, sillä

$$
\begin{aligned}
-\frac{b^2 - 4ac}{4a} &= -a \cdot \left(-\frac{b^2}{2a}\right)^2 + c \\
-\frac{b^2 - 4ac}{4a} &= -\frac{b^2}{4a} + c \\
-b^2 + 4ac &= -b^2 + 4ac \\
0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Siten paraabelin huippu on b:n arvosta riippumatta aina paraabelilla $y = -ax^2 + c$. Juuri tämän havainnon opiskelijat tekivät GeoGebran animaatio-ominaisuuden avulla. He myös piirsivät ruudulle paraabelin kuvaajan sormellaan, mutta eivät osanneet kuvailla tarkemmin havaintoaan.

4.1.3 Geneerinen päättely

Esimerkin ominaisuuksiin perustuva päättely

Edellä empiirisesti paraabelin $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$ huippupisteen ratkaisseet opiskelijat palasivat opettajan kehotuksesta uudelleen tehtävään ja miettivät ratkaisulle pätevämpää perustelua aiemman kuvasta katsomisen sijaan. Tällöin he käyttivät geneeristä, esimerkin ominaisuuksiin perustuvaa päättelyä, jota voitaisiin soveltaa sellaisenaan myös muihin samantyylisiin tehtäviin. Opiskelijat keksivät, että heidän tulisi puolittaa paraabeli, jolloin he saisivat tietää huippupisteen koordinaatit. He etsivät GeoGebrasta toimintoa, jolla he pääsisivät tavoitteeseensa ja keksivät käyttää paraabelin ja x-akselin leikkauspisteiden välisen janan keskinormaalia. Lopputuloksena saatu kuvio näkyy kuvassa 10.

Roosa: Pystyykö sen tekeen niinku jos laittaa noihin kohtiin, kato, tossa 1 ja 2 (osoittaa paraabelin ja x-akselin leikkauspisteitä (-1,0) ja (2,0)). Niin sithän se menee niinku (näyttää sormella kuinka keskinormaali leikkaisi paraabelin kahtia). Eli -1 ja 2.

Mira: Eli jos mää pistän sillee niinku…

Roosa: Pystyykö täältä laittaan ne pisteet? (osoittaa komentoriviä) Jos kirjottaa tohon -1 ja 0?

Mira: Jos tästä on, se on kolme, niinku tää (osoittaa nollakohtien etäisyyttä). Sillä tavalla kolme, niinku yksi, kaksi, kolme. Joten se (paraabelin huippu) on tässä puolivälissä.

Roosa: Miten siihen pystyy piirtää niitä pisteitä?

Mira: Täältä uusi piste.

Roosa: Laita se tohon ihan kakkosen kohtaan. Ja sitte laita tohon ykkösen kohtaan. Sitte ota se puolittajajutska, mikä se oli… Keskinormaali. Nyt valitse ne pisteet.

Mira: Nyt se näyttää tommosen janan.

Roosa: Pystyykö tuolta nytte tota niin sen kahden jutun… yhteispisteen? Sielä oli jossain semmonen.

Mira: Yhteispiste? Niin jos mä nyt valitsen ton niin toihan on se keskipiste. Eikö ookki?

Roosa: Niin, noitten leikkauspiste. Pystyykö sen tuolta jostain kattoon?

Mira: Mikä leikkauspiste?

Roosa: Noitten suorien tai mitä lie onkaan. Missä se on? (etsii GeoGebran valikosta kahden objektin leikkauspiste –toimintoa)

Mira: Oisko se jossain täällä? Kahden objektin…(löytävät halutun toiminnon valikosta) Valitse kaksi suoraa tai osoita leikkauskohta. Leikkauskohta on tää (valitsee hiirellä parabeelin ja keskinormaalin leikkauspisteen).

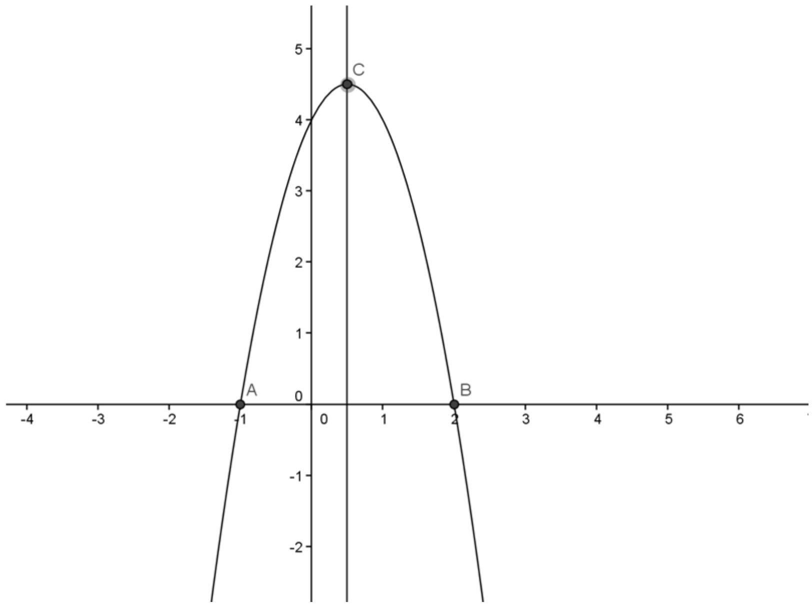
Roosa: Se on nyt valinnu ne molemmat (paraabelin ja keskinormaalin).

Mira: Se on tää. Elikkä C. Leikkauskohta on C.

Roosa: Se on (0,5; 4,5).

Mira: No niin!

Roosa: Kato mehän onnistuttiin!



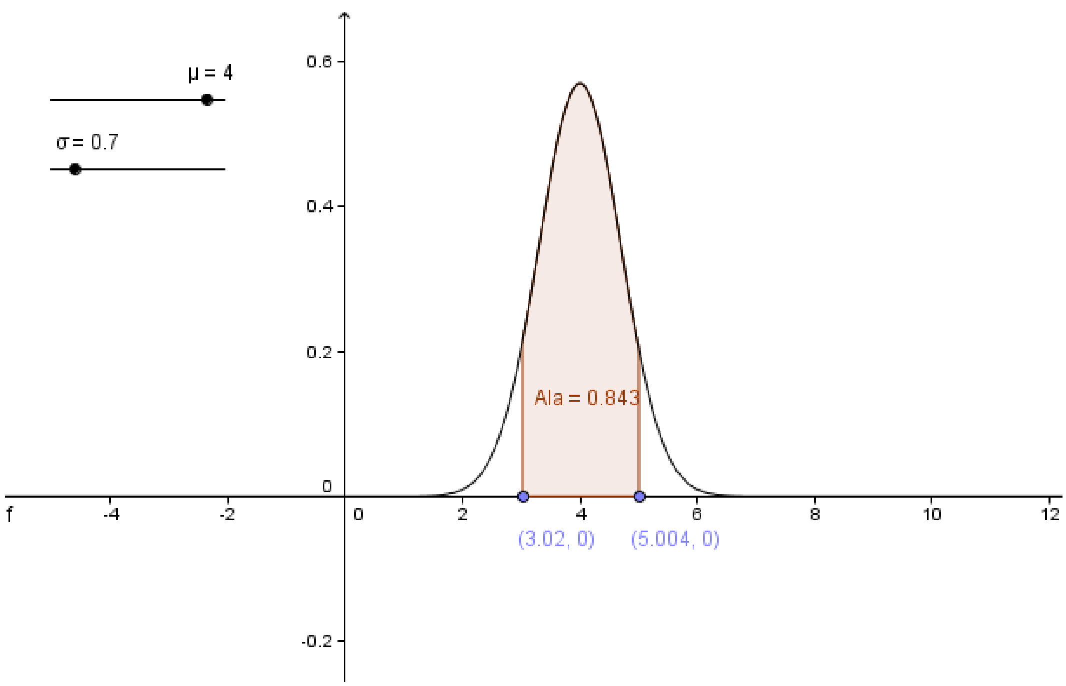
Kuva 10: Paraabelin huipun määrittäminen geneerisesti.

Päättelystä geneerisen tekee se, että täysin samanlainen päättely voidaan tehdä myös yleisessä tilanteessa. Siis jos opiskelijoille annetaan mikä tahansa paraabeli, joka leikkaa x-akselin, he pystyvät määrittämään paraabelin huipun koordinaatit edellä kehittämällään ratkaisutavalla. Päättely ei kuitenkaan täytä deduktiivisen päättelyn kriteereitä, sillä oppilaiden päättely nojaa vielä vahvasti esimerkkinä olevaan tilanteeseen, kun taas deduktiivisen päättelyn tulee olla riippumatonta esimerkeistä.

Osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuva päättely

Kuten jo aiemmin todettiin, eniten geneeristä, osittain esimerkin ominaisuuksiin ja osittain teoriaan perustuvaa päättelyä, esiintyi normaalijakaumaa käsittelevällä lyhyen matematiikan oppitunnilla. Opiskelijoilla oli käytössään valmis GeoGebra-tiedostosto (Kuva 11), jossa pystyi muuttamaan normaalijakauman muotoa säätämällä keskiarvoa μ ja keskihajontaa σ valmiista liu´uista.

Opiskelijoiden ensimmäisenä tehtävänä on muokata normaalijakauma vastaamaan annettua aineistoa, kun opiskelijoille on kerrottu: ”*Erään oppimistestin tulokset ovat jakautuneet normaalisti siten, että keskiarvo on 4 pistettä ja keskihajonta 0,7.*”. Muokattuaan normaalijakauman vastaamaan tehtävänantoa he siirtyvät pohtimaan tehtävää ”*Valitaan satunnaisesti yksi oppilas. Millä todennäköisyydellä hän on saanut pistemäärän, joka poikkeaa keskiarvosta yli 1 pistettä?*”.



Kuva 11: Normaalijakauman alle jäävän pinta-alan ratkaiseminen GeoGebran avulla.

Taru: Okei, valitaan satunnaisesti oppilas. Millä todennäköisyydellä hän on saanut pistemäärän, joka poikkeaa keskiarvosta yli 1 pistettä? Eli niinku onko se sitte kaikki muut paitsi... 1 piste on siis että se on saanu vähemmän ku kolme tai enemmän ku viis.

Pilvi: Pitääkö siinä olla vähintään yks piste niinkö?

Taru: Joo. Poikkeaa yli yks pistettä keskiarvosta.

Pilvi: Aa, okei. No sitte se on joko kolmen alapuolella tai viien yläpuolella.

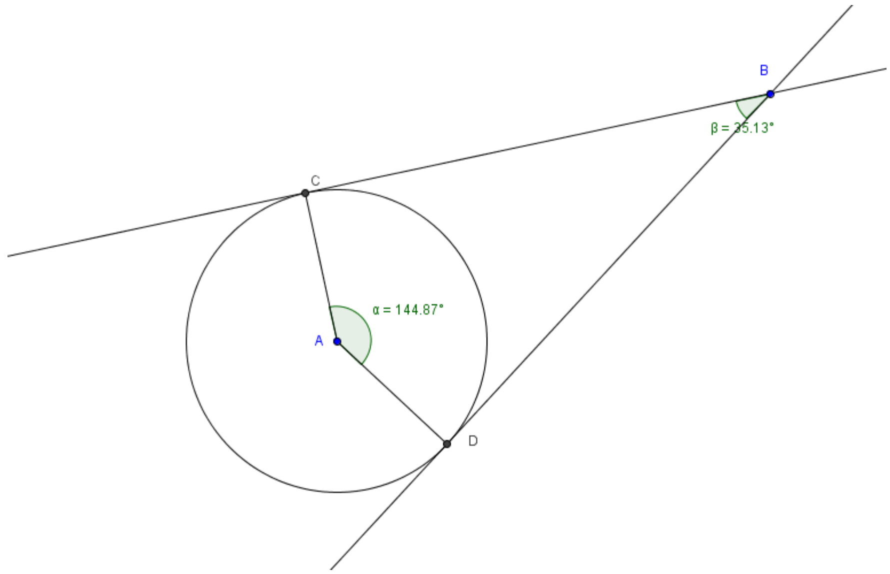
Taru: Laitetaanko tuohon nyt taas se ala ja miinustetaan siitä (koko alasta) se vai...

Opiskelijat ovat jo aiemmin tunnilla ratkaisseet samantapaisen tehtävän. He määrittävät GeoGebran avulla pisteiden 3 ja 5 välisen alan (Kuva 11) ja vähentävät sen koko pinta-alasta, jonka he tietävät teorian nojalla olevan 1. Tällöin he saavat vastaukseksi kysytyn ”häntien” alan eli todennäköisyyden, että satunnainen oppilas saa yli 1 pisteen keskiarvosta poikkeavan pistemäärän.

Opiskelijoiden käyttämä päättely on siis sovellettavissa yleiseen tilanteeseen. Annettiin heille minkä tahansa todennäköisyyden laskeminen, he voivat selvittää sen samalla keinolla laskemalla aluksi pisteiden väliin jäävän pinta-alan ja vähentämällä sen sitten teorian nojalla kokonaispinta-alasta 1. Siten opiskelijoiden käyttämä päättely osin esimerkin ominaisuuksiin ja osin teoriaan perustuvaa geneeristä päättelyä.

4.1.4 Deduktiivinen päättely

Deduktiivista päättelyä esiintyi oppitunneilla melko vähän. Formaalia päättelyä ei ilmennyt ollenkaan, vaan kaikki deduktiiviset päättelyt olivat ajatuskokeita. Ympyrän tangenttia käsittelevällä oppitunnilla opiskelijat selvittävät, onko kuvan 12 kulmilla α ja β jokin yhteys.



Kuva 12: Ympyrän keskuskulman ja tangenttikulman välinen yhteys

Terhi: No sitte, onko kulmilla A ja B jokin yhteys?

Opettaja: Se tarkottaa sitä, että jos te tiiätte toisen niin voitteko te jotenki toista päätellä siitä.

Aino: No noi on koko ajan 180 (osoittaa kulmia ACB ja ADB), niin näitten (osoittaa kulmia α ja β) summaks pitää tulla kans 180. Eiks vaan?

Opiskelijat käyttävät päättelyssä apuna esimerkkinä olevaa kuviota, mutta päättely tapahtuu kuitenkin täysin yleisessä tilanteessa. He eivät käytä kuvassa näkyviä kulmien astelukuja, vaan lähtevät päättelyssään liikkeelle aiemmin osoittamastaan tuloksesta, jonka mukaan ympyrän säteen ja tangentin välinen kulma on suora. Tämän jälkeen he päättelevät nelikulmion kulmien summan perusteella, että jäljellä olevien kulmien summan täytyy olla *180°*.

Vaikka opiskelijat ovat vakuuttuneita päättelynsä oikeellisuudesta, he sortuvat tietämättään käyttämään kehäpäätelmää, sillä he ovat aiemmin osoittaneet kulmien *ACB* ja *ADB* olevan suoria vähentämällä nelikulmion kulmien summasta ympyrän keskuskulman ja tangenttikulman suuruudet. Tässä vaiheessa opettajan ohjauksen rooli opiskelijoiden päättelyn oikeellisuudessa korostuu. Tutustumme seuraavassa alaluvussa opettajan ohjaukseen ja siihen, kuinka opettaja voi omalla toiminnallaan vaikuttaa opiskelijoiden käyttämiin päättelyn muotoihin.

4.2 Opettajan ohjauksen rooli päättelyssä

Seuraavassa tarkastellaan esimerkkien avulla, millainen vaikutus opettajan ohjauksella on opiskelijoiden käyttämään päättelyn muotoon. Aiempien tutkimusten (mm. Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Choi-Koh, 1999) mukaisesti havaitsin, että opettajan antama ohjaus ja kannustus edesauttavat opiskelijoita etsimään pätevämpiä perusteluja väitteilleen.

Yhden oppitunnin aikana opettaja ei ehtinyt yleensä käydä kovin montaa kertaa yhden opiskelijaparin luona. Niinpä tilanteita, joissa opettaja ohjaa opiskelijoita tehtävissä, ei ollut kovinkaan montaa yhtä tuntia kohden. Usein opettaja vain kävi katsomassa, mihin tehtävään asti opiskelijat ovat päässeet tai kävi tarkkailemassa opiskelijaparin työskentelyn sujumista. Lisäksi opiskelijat kaipasivat neuvoa tehtävänannon ymmärtämisessä, jolloin opettaja antoi vinkkejä siitä, mitä tehtävässä tulee tehdä tai vahvisti opiskelijoiden idean tehtävän tarkoituksesta. Tuntien aikana opettajat selvittivät opiskelijoille mm. mitä tarkoitetaan kulmien yhteydellä tai mitä tulee tehdä, kun tehtävässä pyydetään määrittämään yleinen sääntö esimerkiksi annetun funktion derivaatalle. Lähes joka tunnilla opiskelijat tarvitsivat apua myös GeoGebran käytössä. Peruskäyttö sujui oppilailta hyvin ja apua kaivattiinkin lähinnä erikoisempien toimintojen kanssa.

Tarkastellaan seuraavassa lähemmin neljää tilannetta, joista ensimmäisessä palaamme edellä luvussa 5.1.3. käsiteltyyn paraabelin huipun ratkaisemiseen ja tarkastelemme nyt keskustelua, jonka seurauksena opettaja saa opiskelijat palaamaan uudelleen tehtävään. Toisessa tarkasteltavassa tilanteessa opettaja saa ohjauksensa avulla opiskelijat nostamaan päättelynsä auktoriteettiin vetoavasta päättelystä empiiriseen päättelyyn ja kolmannessa tilanteessa korjaamaan kirjoittamansa vastauksen vastaamaan heidän tekemiään päättelyitä. Neljännessä katkelmassa tarkastellaan opettajan roolia tutkivan matematiikan oppitunneilla.

Aiemmin luvussa 5.1.3. tutustuimme tilanteeseen, jossa opettajan kehotuksesta opiskelijat palasivat uudelleen tehtävään, jossa tuli määrittää paraabelin huipun koordinaatit. Opettaja tuli opiskelijoiden luokse kysymään, miten he ovat ratkaisseet edelliset kaksi tehtävää, joissa piti määrittää annettujen paraabelien huippujen koordinaatit.

Opettaja:	Keksittekö te jotain perusteluja noihin? (paraabelien huippujen määrittämiset)
Mira:	Nooo... Ei. Me voidaan miettiä niitä sitte myöhemmin.
Opettaja:	Millä tavalla te saitte tuon?
Mira:	Tän avulla! (osoittaa tietokonetta ja GeoGebraa naureskellen) En mää sitte tiiä mitä mää tällä tein, mutta... Neuvo mua.
Opettaja:	Onkos teillä se jossain ylhäällä miten te laskitte sen?
Roosa:	Ei.
Mira:	Me voidaan kattoo niitä sitte myöhemmin vielä tarkemmin.
Opettaja:	Pitäis keksiä jotain perusteluja nytte. Elikkä jos kuvasta kattoo niin sielä voi olla vaikka että se onki 0,50000001 ja sitte sitä ei näākkään.
Mira:	Joo me voidaan kattoo ne myöhemmin.

Edellisestä keskustelusta huomataan, että opiskelijoiden vakuuttaminen perustelujen tärkeydestä ei aina ole opettajalle helppoa. Opiskelijat eivät millään viitsisi enää perustella omasta mielestään jo ratkaistua tehtävää, joten he jankkaavat opettajalle vastaan. Opiskelijat siirtyvätkin opettajan lähdettyä ratkaisemaan seuraavaa tehtävää, mutta kun he eivät oikein pääse tehtävässä alkuun, he palaavat kuitenkin vielä paraabelitehtävään.

Opettajan on siis ohjauksessaan oltava kannustava ja rohkaiseva, mutta kuitenkin jämäkkä ja vaatia opiskelijoilta hyviä perusteluita ja kannustaa heitä yrittämään parhaansa eikä menemään siitä, mistä aita on matalin. Opettaja toimi tilanteessa hyvin, sillä hän ei luovuttanut, vaikka opiskelijat useaan kertaan sanoivat miettivänsä perusteluja myöhemmin. Oppitunnilla voikin käydä helposti niin, että opiskelijoilta jäävät perustelut kokonaan miettimättä, vaikka he vakuuttavat opettajalle pohtivansa niitä myöhemmin, mikäli opettaja ei ole tarpeeksi tiukkana perustelujen vaatimisen suhteen.

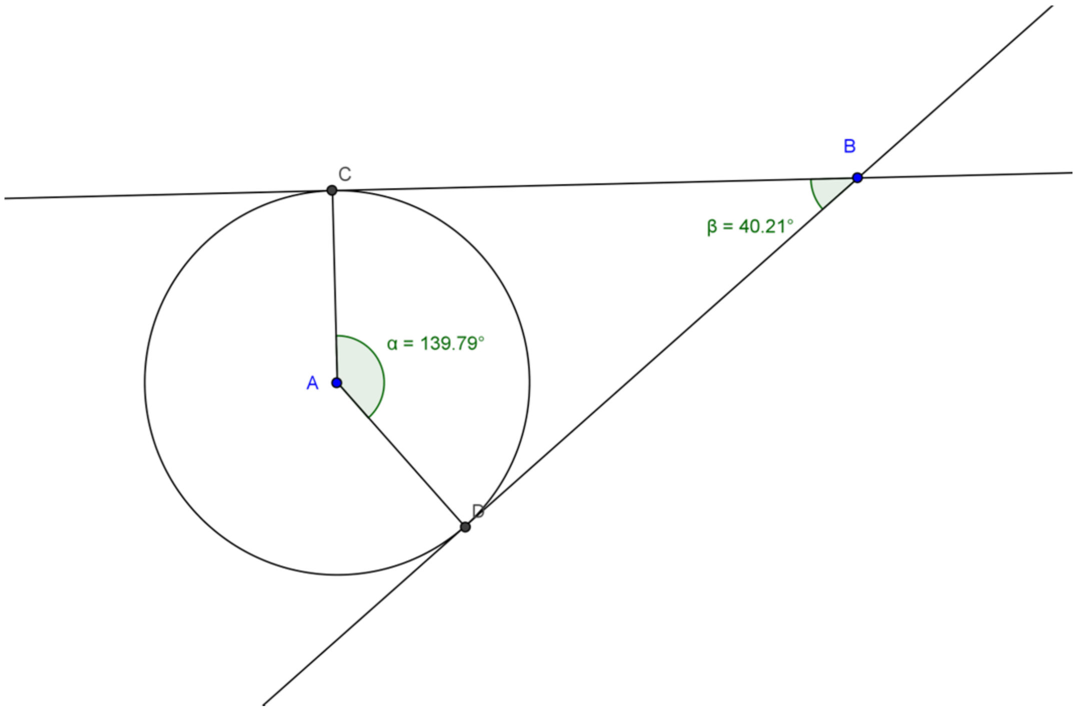
Auktoriteettiin vetoavan päättelyn yhteydessä tarkastelimme siniä ja kosinia yksikköympyrässä käsittelevää oppituntia, jossa opiskelijat selvittivät laskimen avulla, millä kulmalla yhtälö *cosx = 0,5* toteutuu. Lisäkysymykseen ”Onko ehdon toteuttavia kulmia enemmän?” opiskelijat veikkasivat *-60°* kulman käyvän ja tarkistivat asian laskimella. He eivät pohtineet muita mahdollisia ratkaisuksi sopivia kulmia. Opettaja saa kuitenkin opiskelijat tarkastelemaan tehtävää vielä uudelleen.

Venla:	Me ei oikeen tiietä että onks ne ihan oikeen…
Opettaja:	Ihan hyvältä näyttää. No, onko vielä muita tossa ku noi kaks (-60° ja -60° kulmat)?
Venla:	No, emmä tiä. En mää tiiä miten sen pystyy niinku ettimään.
Opettaja:	Katoitteko te niinku tolla GeoGebra-ohjelmalla noi?
Essi:	Ei… Laskettiin laskimella.
Opettaja:	Noniin. Kokeilkaapas sillä sitte pähkäillä se että…

Opiskelijat ryhtyvät opettajan kehotuksesta tarkastelemaan GeoGebralla systemaattisesti kosinin arvoja eri kulmilla. He luulevat jo löytäneensä ehdon toteuttavan kulman, mutta huomaavat sitten, että *cos120° = -0,5*, eikä *0,5*. Tämän jälkeen opiskelijat toteavat virheellisesti, että muita ehdon toteuttavia kulmia ei löydy, sillä he eivät hoksaa tarkastella yli *360°* olevia kulmia. Opettaja kuitenkin sai toiminnallaan ohjattua opiskelijat tarkastelemaan väitteensä todenmukaisuutta ja uudella tarkastelulla opiskelijat olisivat hyvinkin voineet löytää vielä lisää sopivia kulmia. Joka tapauksessa opettajan toiminta nosti opiskelijoiden päättelyn auktoriteettiin vetoavasta päättelystä empiiriseen päättelyyn, jossa yleistys tehdään tarkoin valituista esimerkeistä.

Edellä huomattiin siis sekä opiskelijoiden tyytyminen laskimella saatuun ratkaisuun, että opettajan ohjauksen positiivinen vaikutus opiskelijoiden käyttämään päättelyyn. Edellä opiskelijat eivät pääse päättelyssään kuin empiiriselle tasolle, mutta opettaja sai toiminnallaan opiskelijat ajattelemaan tilannetta käytännössä eikä vain luottamaan sokeasti laskimeen. Opettajan on siis tärkeää kannustaa opiskelijoita etsimään pätevämpiä perusteluja, jotta opiskelijat toisaalta ymmärtävät aukottoman päättelyn tärkeyden ja toisaalta oppivat tekemään johdonmukaisia ja loogisia päätelmiä.

Opiskelijat ratkaisivat ympyrän tangenttia käsittelevällä oppitunnilla ympyrän keskus- ja tangenttikulman yhteyteen liittyvää tehtävää. Opiskelijoilla oli käytössään valmis GeoGebra-tiedosto (Kuva 13), jossa pistettä *B* pystyi liikuttamaan ja samalla tarkkailemaan kulmien α ja β suuruuksia. Opiskelijoiden tehtävänä oli pisteen *B* sijaintia muuttamalla selvittää, kuinka suuri keskuskulma α voi korkeintaan olla.



Kuva 13: Tehtävä, jossa opiskelijoiden tulee tutkia pistettä B muuttamalla, kuinka suuri keskuskulma alfa voi olla.

Opiskelijat ovat liikuttaneet pistettä *B* mahdollisimman kauas ympyrästä ja huomanneet kulman α lähestyvät *180* astetta. Kulman ollessa *180* astetta, suorat eivät enää leikkaa, joten opiskelijat ovat kirjoittaneet vastaukseksi, että keskuskulma α voi olla *179°*. Opettaja puuttuu keskusteluun.

Opettaja: Mistä te päättelitte, että tuo ei voi olla 179 astetta?

Terhi: Voihan se olla vaikka 179,999 mutta sitte jos se on 180 astetta...

Aino: Niin sitte se menee päällekäin

Terhi: ...niin sitte tota ne on sillee yhdensuuntaset ne suorat eikä ne leikkaa ikinä.

Opettaja: Joo. Just.

Terhi: Et sillee alle 180 ku se on niin sitte ne voi leikata.

Opettaja: Oikeen hyvä. Mutta sitte toi 179 on vähä harhaanjohtava vastaus mutta oikea oli perustelu.

Opiskelijat muuttavat keskustelun seurauksena vastaukseksi: Keskuskulma alfa voi olla alle *180°*. Opiskelijat olivat siis päätelleet tehtävän ihan oikein, mutta he olivat kirjoittaneet vastauksen virheellisesti. Vaikka tutkivan matematiikan oppitunneilla oikea vastaus ei olekaan pääasia, vaan tarkoituksena on keskittyä päättelyihin ja perusteluihin, on opettajan mielestäni huolehdittava opiskelijoiden vastausten täsmällisyydestä. Opettaja toimi myös erittäin hienosti kysyessään opiskelijoilta perusteluita väitteelle sen sijaan, että olisi aluksi huomauttanut väärästä vastauksesta. Opiskelijat kertoivatkin innokkaasti perustelunsa opettajalle ja kokivat opettajan kannustavien ja hyväksyvien kommenttien myötä onnistuneensa tehtävässä.

Jo luvussa 2.2. esiteltäessä tutkivan matematiikan oppitunnin kulkua korostettiin sitä, että opettajan tulee kannustaa opiskelijoita keksimään ja esittämään omia ratkaisujaan eikä antaa valmiita vastauksia opiskelijoille. Derivaattafunktiota ja derivoimissääntöjä käsittelevällä oppitunnilla opiskelijat ovat yrittäneet muodostaa sääntöä, jolla saadaan funktion f derivaatta missä tahansa kohdassa x, kun funktiona on $f(x) = 3$. Opiskelijat kiistelevät siitä, onko derivaattaa olemassa kyseisessä tilanteessa ja jos on, onko derivaatta kyseisessä tilanteessa 0 vai 3. He kysyvät opettajalta neuvoa.

Ville: Hei, onks tämmösessä derivaatta aina 3?
Jaakko: Vai oks se nolla?
Ville: Eiks se oo nolla tässä eikä kolmonen?
Opettaja: Se on teidän nyt selvitettävä.
Ville: Okei.
Opettaja: Muistakaa vaan miten se katottiin se derivaatta ja...
Ville: Niin.
Jaakko: Niin joo.
Opettaja: ...miten se derivaatta katotaan geometrisesti. Kokeilkaa sitä b-kohtaa kans ja kattokaa mitä sieltä tulee.

Opiskelijat alkavat pohtia, mitä derivaatalla tarkoitettiinkaan ja muistavat sen olevan tangentin kulmakerroin. Ville tulee siihen tulokseen, että derivaatan arvon täytyy olla nolla, mutta pojat jatkavat edelleen kiistelyä aiheesta. He ovat turhautuneita siitä, että opettaja ei auttanut heitä heidän toivomallaan tavalla. Opiskelijat olisivat toivoneet opettajalta suoraa vastausta siitä, onko funktion $f(x) = 3$ derivaatan arvo nolla vai kolme. Opettaja toimi kuitenkin juuri oikein ohjatessaan opiskelijat itse pohtimaan vastausta ja antaessaan vain vinkin siitä, mistä opiskelijoiden kannattaa päättelyssä lähteä liikkeelle. Opiskelijat luultavasti vain vaativat hieman totuttelua uuteen työtapaan, jotta he oppivat luottamaan omiin johtopäätöksiinsä.

Opettaja voisi yrittää välttää opiskelijoiden turhautumista olematta näin suoraan antamatta vastausta opiskelijoille ja pyrkiä sen sijaan luomaan keskustelua tehtävästä opiskelijoiden kanssa. Opettaja voi esimerkiksi tiedustella opiskelijoilta syitä siihen, miksi he uskovat derivaatan olevan nolla tai vaihtoehtoisesti kolme. Tällöin opettaja ei edelleenkään paljasta suoraan vastausta opiskelijoille, mutta tehtävän pohtiminen yhdessä opiskelijoiden kanssa saattaa auttaa opiskelijoita keksimään itse ratkaisun.

Esimerkkien pohjalta voidaan havaita, että opettajan läsnäolo tutkivan matematiikan oppitunneilla on erittäin tärkeää. Opiskelijat saavat opettajalta tukea, rohkaisua ja tarvittaessa neuvoja päästäkseen eteenpäin tehtävissä. Opettajan kyseenalaistaessa opiskelijoiden ratkaisun, opiskelijat saavat aikaan pätevämpiä päättelyketjuja ja parantavat sitä kautta päättelyään teoreettisempaan suuntaan. Lisäksi opettajan kanssa keskustelu näyttäisi auttavan opiskelijoita jäsentämään omaa ajatteluaan.

5 POHDINTA

Tutkimuksen tarkoituksena oli muodostaa luokittelu opiskelijoiden matemaattisen päättelyn muodoista tutkivan matematiikan oppitunneilla. Lisäksi tavoitteena oli saada tietoa opiskelijoiden käyttämistä päättelyn muodoista sekä tarkastella opettajan ohjauksen vaikutusta oppitunneilla. Laadulliselle tutkimukselle ominaisesti tavoitteena oli myös pyrkiä ymmärtämään tutkittavien opiskelijoiden toimintaa tutkittavassa tilanteessa.

Tarkastellaan seuraavassa opiskelijoiden käyttämiä päättelyitä tutkivan matematiikan oppitunneilla, opettajan ohjauksen vaikutusta, opiskelijoiden keskusteluista tehtyjä johtopäätöksiä sekä tutkimuksen luotettavuutta. Esitellään myös tutkimuksen pohjalta esiin nousseita jatkotutkimusehdotuksia.

5.1 Opiskelijoiden käyttämät päättelyt oppitunneilla

Tutkivan matematiikan oppitunneilla esiintyi eniten empiiristä päättelyä, mikä vahvistaa edellisten tutkimusten (mm. Cañadas & Castro, 2007; Jones, 2000; Choi-Koh, 1999) tuloksia. Kaikista päättelyistä jopa yli puolet (55,1 %) oli empiirisiä. Toiseksi eniten esiintyi ulkopuoliseen lähteeseen vetoavaa päättelyä (19,1 %) sekä geneeristä päättelyä (19,1 %). Vähiten opiskelijat käyttivät oppitunneilla deduktiivista päättelyä (6,7 %). Dynaamisen geometriaohjelman, tässä tutkimuksessa GeoGebran, käyttö tekee esimerkkien käytön päättelyn apuna helpoksi, mikä lisää empiiristä ja geneeristä päättelyä. Havainto tukee Jonesin (2000) tutkimustuloksia, sillä myös hän huomasi tutkimuksessaan geometriaohjelman dynaamisen luonteen vaikuttavan opiskelijoiden päättelyyn ja ohjelman tukevan empiiristä päättelyä. GeoGebralla onkin erittäin helppo tutkia annetun kuvion ominaisuuksia esimerkiksi raahaamalla pisteitä ja päätellä sitten kuvasta katsomalla tehtävän ratkaisu. Tutkimuksen tulokset ovat yhteensopivia myös Cañadasin ja Castron (2007) huomioiden kanssa, joiden mukaan induktiivinen, havaintoihin pohjautuva, päättely on luontevaa toisen asteen opiskelijoille ja opiskelijoilla on taipumus lähestyä tehtäviä empiirisesti matemaattisen rakenteen tarkastelun sijaan.

Tehtävien tutkiminen empiirisesti auttaa opiskelijoita hahmottamaan tilannetta ja huomaamaan lainalaisuuksia esimerkiksi funktioiden käyttäytymisessä tai kuvioiden ominaisuuksissa. Myös Choi-Koh (1999) huomasi tutkimuksessaan koehenkilönsä lähestyvän geometrian ongelmia empiiristen havaintojen kautta ja muodostavan niiden pohjalta matemaattisen väitteen. Empiirinen päättely onkin tärkeää juuri ymmärtämisen ja väitteen muodostamisen kannalta. Empiirinen havainto saa opiskelijat uskomaan väitteen todenmukaisuuteen, jonka jälkeen sitä on mielekkäämpää lähteä osoittamaan todeksi. Opiskelijoille tulisi kuitenkin tähdentää, että empiirisen päättelyn lisäksi he tarvitsevat myös matemaattisempia, teoriaan pohjautuvia päättelyitä osoittaakseen konstruoimansa väitteen todenmukaisuuden aukottomasti. Empiirinen päättely ei siis saa olla opiskelijoiden ainut keino perustella väitteitä.

Usein opiskelijat toimivatkin oppitunneilla juuri edellä kuvatulla tavalla. He hahmottivat tehtävää ja etsivät ratkaisua empiirisesti GeoGebran avulla ja lähtivät sitten ideansa oikeellisuudesta vakuuttuneena etsimään konstruoimalleen väitteelle pätevämpää perustelua. Siten opiskelijat käyttivät saman tehtävän sisällä useita eri päättelyn muotoja. Käytettyjen päättelyn muotojen osuuksia tarkasteltaessa on siis muistettava, että geneeristä tai deduktiivista päättelyä on saattanut edeltää empiirinen havainto tilanteesta, mikä nostaa empiirisen päättelyn osuutta kaikista päättelyistä. Lisäksi joissakin tilanteissa opiskelijat saattoivat konstruoida väitteensä geneerisesti tai deduktiivisesti ja sen jälkeen testata väitteen paikkansa pitävyyttä empiirisesti. Myös nämä väitteiden testaamiset nostavat empiiristen päättelyiden määrää. Useilla tunneilla tehtävien joukossa oli myös lämmittelytehtäviä, jotka pystyi yleensä ratkaisemaan joko ulkopuoliseen lähteeseen vetoavan päättelyn tai empiirisen päättelyn avulla. Myös nämä tehtävät luokiteltiin samanarvoisina kuin muutkin tehtävät, joten nekin lisäävät muiden kuin geneeristen ja deduktiivisten päättelyiden osuutta kaikista päättelyistä.

Oppitunneilla käytetyt päättelyt eivät jakautuneet tasaisesti eri päättelyn luokkiin oppituntien välillä. Useimmilla oppitunneilla esiintyi eniten empiiristä päättelyä, mutta joillakin oppitunneilla geneerisen päättelyn osuus oli suurempi. Näyttäisi siis, että myös tunnin aihe ja erityisesti tunnilla ratkaistavat tehtävät vaikuttavat opiskelijoiden käyttämään päättelyyn. Lisäksi on huomioitava, että tutkittavat opiskelijat vaihtuivat joka tunnilla, joten myös opiskelijoiden taitotaso vaikuttaa päättelyihin. Oppitunneilla, joiden aiheet liittyivät puhtaasti geometriaan (esimerkiksi tunnit, joilla tarkasteltiin ympyrän ominaisuuksia), käytettiin eniten empiiristä päättelyä. Geometria onkin yleisesti aiheena sellainen, että empiirisellä päättelyllä on suuri rooli, sillä useimmat lukiogeometriassa käsiteltävät tehtävät on mahdollista piirtää ja pohtia ratkaisua käytännön kautta. Geneeristä ja deduktiivista päättelyä taas syntyi helpoiten, kun keksittiin käyttää GeoGebraa muussa kuin geometriaan liittyvissä tehtävissä. Esimerkiksi normaalijakauman yhteydessä opiskelijat pääsivät soveltamaan teoriatietouttaan todennäköisyyksistä ja samalla tutkimaan normaalijakauman ominaisuuksia GeoGebran avulla. Toki oppilaat saivat aikaiseksi geneerisiä ja jopa deduktiivisia päättelyitä myös geometriaan liittyvien tehtävien yhteydessä, mutta vähemmän kuin muilla oppitunneilla.

Aineistosta nousee esiin deduktiivisen päättelyn vähyys tutkivan matematiikan oppitunneilla. Lukion opetussuunnitelman (2003) mukaan pitkän matematiikan opiskelijoilta vaaditaan, että opiskelija osaa perusteluiden laatimisen lisäksi myös arvioida perustelujensa pätevyyttä sekä tulosten yleistettävyyttä. Opiskelijan on siis ymmärrettävä, että pelkkä empiirinen havainto ei riitä yleistämiseen vaan siihen vaaditaan loogisesti etenevää, teoriaan nojaavaa päättelyä. Opiskelijat kuitenkin pääsivät geneerisen tai deduktiivisen päättelyn tasolle viidellä oppitunnilla kuudesta. Kun huomioidaan opiskelijoiden työskentelyprosessi, jossa tehtäviä hahmotetaan yleensä empiirisesti, voidaan geneeristen ja deduktiivisten päättelyiden määrää oppitunneilla pitää hyvänä. Perinteisen matematiikan oppitunnin päättelyitä ei ole luokiteltu, mutta opetuskokemukseni perusteella uskaltaisin väittää, että oppikirjan tehtävien ratkaiseminen on useimpien opiskelijoiden kohdalla manipulatiivista lausekkeiden muokkaamista sekä annetun esimerkin soveltamista kyseessä olevaan tehtävään. Tässä valossa tutkiva matematiikka näyttää auttaneen opiskelijoita oikeasti pohtimaan matematiikan ilmiöitä ja muodostamaan monipuolisia päättelyitä pelkän laskimen käytön ja kirjan esimerkkien matkimisen sijaan.

Nostaisin tutkimuksen perusteella tärkeimmiksi deduktiivista päättelyä edistäviksi tekijöiksi opettajan motivoinnin ja toiminnan tunneilla sekä toisaalta tehtävien deduktiivista päättelyä vaativan luonteen. Opettajan on korostettava opiskelijoille perustelun tärkeyttä sekä toisaalta laadittava tunnilla ratkaistavat tehtävät sellaisiksi, että ne myös vaativat syvällisempää päättelyä pelkkien empiiristen havaintojen tekemisen sijaan. Inouen ja Buczynskin (2011) mukaan tutkivan matematiikan oppitunneilla esitettävien kysymysten tulisi olla avoimia, jotta ne mahdollistavat luovan ajattelun. Siis oppituntien tehtävien tulisi olla sellaisia, että ne vaativat pelkän vastauksen sijaan pohtimista ja perustelemista. Olisi myös hyvä, jos tehtäviin olisi useita eri ratkaisutapoja.

Jones (2000) on todennut matemaattisten lausekkeiden muotoilun ja niiden ymmärtämisen olevan oleellista siirryttäessä kohti deduktiivista päättelyä. Näiden taitojen kehittymistä voidaan hänen mukaansa edistää juuri huolellisesti suunniteltujen tehtävien ja opettajan ymmärtävän ohjauksen avulla, mikä tukee havaintojani. Lisäksi Marrades ja Gutiérrez (2000) korostavat samanaikaisen aiheeseen liittyvien matemaattisten käsitteiden opiskelun tärkeyttä opiskelijoiden päättelyn kehittymisen kannalta. Oppitunnin aiheeseen liittyvät matemaattiset käsitteet käydäänkin läpi tutkivan matematiikan oppitunnin viimeisessä osiossa eli koontivaiheessa.

5.2 Opettajan ohjaus oppitunneilla

Opettaja on oppitunneilla opiskelijoiden tuki ja turva, jolta he voivat kysyä tarvittaessa neuvoa esimerkiksi GeoGebran käyttöön, tehtävänantojen selkeyttämiseen tai uusien käsitteiden ymmärtämiseen liittyen. Vaikka tutkivan matematiikan perusajatuksena onkin itse tekeminen ja itse keksiminen, opettajan on kuitenkin tärkeää olla luokassa saatavilla, jotta opiskelijat saavat tarvittaessa neuvoja, eivätkä jämähdä hankalaan tehtävään ja turhaudu.

Tutkivan matematiikan oppitunneilla keskustelu opettajan kanssa sai opiskelijat virittäytymään matemaattiseen ajatteluun ja tuotti hedelmällisiä päättelyitä ja keskusteluita opiskelijoiden kesken, mikä vahvistaa Choi-Kohin (1999) havaintoja. Opettajan tulisikin mahdollisuuksien mukaan keskustella opiskelijoiden kanssa heidän GeoGebralla tekemistään havainnoista, jolloin opiskelijat toisaalta Choi-Kohin mukaan orientoituvat geometriseen ajatteluun, mutta myös saavat vahvistusta ajatuksilleen. Opettajan on lisäksi tärkeää kierrellä luokassa ja keskustella opiskelijoiden kanssa, jotta hän huomaa, ovatko opiskelijat oikeasti ymmärtäneet tehtävän ja tunnilla opiskeltavan asian. Kerannon (1997) mukaan opettaja pääsee selville opiskelijoiden ajattelusta myös pelkästään tarkkailemalla ja kuuntelemalla opiskelijoiden keskustelua.

Havaitsin tutkimuksessa Choi-Kohin (1999) tavoin myös opettajan positiivisen vaikutuksen opiskelijoiden muodostamiin päättelyihin. Useissa tapauksissa opettaja sai ohjauksellaan opiskelijat pohtimaan uudelleen päättelyään ja yleensä myös parantamaan sitä pätevämmäksi. Opettaja saattoi esimerkiksi pyytää lisäperusteluita tai tiedustella opiskelijoiden ratkaisutapaa tiettyyn tehtävään. Jos opettaja ei pitänyt perustelua tarpeeksi pätevänä, opiskelijat yleensä jatkoivat tehtävän pohtimista opettajan lähdettyä. Usein pelkkä opettajan kanssa keskustelu sai aikaan ahaa-elämyksiä ja ymmärryksen siitä, miksi opiskelijoiden oma päättely ei ole pätevä. Tämä vahvistaa myös Marradesin ja Gutiérrezin (2000) havainnon, jonka mukaan sillä, millaisia vastauksia opettaja hyväksyy, on tärkeä rooli opiskelijoiden edistymisessä.

Opettajan täytyy kuitenkin muistaa ohjauksessaan olla paljastamatta tehtävien vastauksia opiskelijoille ja olla suoraan vastaamatta opiskelijoiden kysymyksiin vastaustensa oikeellisuudesta. Tällaisissa tilanteissa opettaja voi esimerkiksi tiedustella opiskelijoilta, miten he päättelivät vastauksensa ja painottaa siten ajattelun ja päättelyn merkitystä oikeiden vastausten sijaan.

5.3 Opiskelijoiden keskustelut oppitunneilla

Opiskelijoiden keskusteluista huomataan, että he ratkaisevat tehtäviä yrityksen ja erehdyksen kautta. GeoGebra antaakin eri vaihtoehtojen kokeilemiseen erinomaisen mahdollisuuden. Kun kuvioiden piirtämiseen laskimella tai paperilla ei kulu turhaan aikaa, opiskelijat voivat käydä helposti läpi eri tilanteita ja tarkkailla, mitä annetulle kuviolle tapahtuu. GeoGebra tarjoaa usein myös mahdollisuuksia kokeilla ratkaisuja, joihin opiskelijoiden kärsivällisyys ei pelkän kynän ja paperin avulla riittäisi.

Keskusteluista huomataan myös, että opiskelijoilla kuluu jonkin verran aikaa GeoGebran toimintojen etsimiseen ja ohjelmaan tutustumiseen. He eivät välttämättä tiedä, mitä kaikkea ohjelmalla voisi tehdä eivätkä siten osaa täysin hyödyntää ohjelman tarjoamia mahdollisuuksia. Opiskelijoiden tottuessa käyttämään GeoGebraa ja ennen kaikkea tottuessa tutkivan matematiikan tyyliin, nämäkin ongelmat luultavasti väistyvät.

Oppituntien perusteella opiskelijat ovat epävarmoja omista, GeoGebran avulla aikaansaamistaan ratkaisuista. He tuntuvatkin tarvitsevat opettajalta vahvistusta vastaustensa oikeellisuuteen. Tutkivan matematiikan oppitunneilla opiskelijoilta toistuivat usein kysymykset *”Eikö ookki niin, että…”* tai *” Me ei oikeen tiietä että onks ne ihan oikeen…”*, vaikka useimmissa tapauksessa opiskelijat olivat ratkaisseet tehtävän täysin oikein. Opettajan tulisikin Hähkiöniemen (2011) mukaan muistuttaa opiskelijoita siitä, että tutkivan matematiikan oppitunneilla oikea vastaus ei ole pääasia ja korostaa ajattelun ja päättelyn merkitystä. Vastausten oikeellisuuden pohtimisen lisäksi suurin osa tutkivan matematiikan oppitunneille osallistuneista opiskelijoista epäili, ettei ole oppinut tunnin aikana yhtään mitään, vaikka todellisuudessa tutkimusten (mm. Battista, 2002) mukaan ongelmakeskeisen oppimisen kautta opitut tiedot ovat pysyviä verrattuna perinteisen matematiikan opetuksen pintapuoliseen oppimiseen. Näiden yhteydessä korostuukin tutkivan matematiikan oppitunnin koontivaiheen tärkeys. Kun tehtävät käydään läpi opettajajohtoisesti yhdessä koko luokan kanssa, opiskelijat sekä huomaavat ratkaisujensa oikeellisuuden että tajuavat oppineensa huomaamattaan uusia asioita.

Opiskelijat myös tuntuvat tehtävissä menevän mieluiten siitä, mistä aita on matalin. Jos tehtävänannossa ei pyydetä perustelua, opiskelijat eivät lähde sellaista kirjoittamaan. Myös perustelujen kirjoittaminen niitä vaadittaessa tuntuu olevan opiskelijoille todella työlästä. Esimerkiksi analyyttisen geometrian tunnilla opettaja kävi useaan otteeseen muistuttamassa opiskelijoita perusteluiden kirjoittamisesta, mutta opiskelijat vakuuttivat aina tekevänsä aluksi tehtävät ja kirjoittavansa sitten perustelut. Perustelut jäivät sillä oppitunnilla kirjoittamatta. Opettajan onkin Arzarellon ym. (2002) tutkimuksen mukaisesti tärkeää korostaa perustelujen merkitystä ja vaatia opiskelijoita kertomaan, miksi heidän saamansa tulos pätee.

5.4 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimus on luonteeltaan laadullinen tutkimus, jossa oli tarkoituksena saada kuvailevaa tietoa siitä, millaisia päättelyn muotoja opiskelijat käyttävät tutkivan matematiikan oppitunneilla. Tarkoituksena ei siis ollut niinkään saada yleistettävää tietoa opiskelijoiden päättelystä, vaan lisätä tietoutta opiskelijoiden päättelyn muodoista ja kuvata päättelyketjuja. Näiden avulla voidaan paremmin ymmärtää opiskelijoiden päättelyä ja sitä kautta löytää keinoja, joilla opiskelijoita voidaan parhaiten tukea.

Tuntien videointi ja Powellin, Franciscon ja Maherin (2003) videoanalysointimenetelmän pohjalta muokattu aineiston analysointitapa toimivat tutkimuksessa erittäin hyvin. Videoiden avulla opiskelijoiden päättelystä sai tarkan kuvan, sillä videoita pystyi katsomaan uudelleen ja uudelleen. Opiskelijoiden täyttämät tehtävämonisteet eivät tarjonneet juurikaan lisäinformaatiota videoiden rinnalla, sillä opiskelijat kirjasivat monisteisiin yleensä pelkästään vastaukset, eivät niinkään ratkaisutapoja tai sitä, miten olivat ratkaisuun päätyneet.

Videoiden koodauksessa pyrin varmistamaan videoiden usealla katsomiskerralla sen, että samanlaiset päättelyt on koodattu samaksi päättelyn muodoksi niin tuntien sisällä kuin myös eri tuntien välillä. Tutkimuksen luotettavuutta olisi voitu tässä vaiheessa parantaa toisen tutkijan avulla. Toisen luokittelijan koodattua saman aineiston saman päättelyn muotojen luokittelun avulla, merkintöjä olisi voitu verrata toisiinsa. Tuomen ja Sarajärven (2006) mukaan luotettavuus voidaan katsoa hyväksi, jos yli 80 % merkinnöistä on samoja. Pro gradu -tutkielman puitteissa toisen tutkijan käyttäminen ei kuitenkaan ole ajallisesti eikä resurssien puitteissa mahdollista. Sen lisäksi, että tuplakoodaus olisi vienyt paljon aikaa, toista luokittelijaa olisi ollut hyvin vaikeaa löytää.

Tutkimuseettisestä näkökulmasta on pidetty huolta siitä, että tutkimustiedot ovat olleet luottamuksellisia eikä tutkimuksen yhteydessä saatuja tietoja ole luovutettu ulkopuolisille. Lisäksi kuvattujen opiskelijoiden nimet vaihtamalla on huolehdittu siitä, ettei tutkimukseen osallistuneiden henkilöllisyys missään vaiheessa paljastu tutkimusraportin lukijalle.

Tutkivan matematiikan oppitunnit sekä aineiston keruu- ja analyysimenetelmät on pyritty kuvaamaan niin täsmällisesti, että tutkimus voidaan tarvittaessa toistaa täsmälleen samanlaisena.

5.5 Jatkotutkimusehdotuksia

Tutkimus tarjoaa matematiikan opettajille tietoa ja käytännön esimerkkejä opiskelijoiden päättelyistä sekä siitä, miten he päätyvät ratkaisuihinsa. Opiskelijoiden päättelyprosessin tunteminen helpottaa opettajaa hänen auttaessaan opiskelijoita tehtävien ratkaisuissa, sillä opettaja voi valmistautua paremmin opiskelijoiden mahdollisiin kysymyksiin ja heidän tehtävissä kohtaamiinsa ongelmiin. Opiskelijoiden päättelyprosessien tunteminen myös auttaa opettajaa suunnittelemaan tehtävät siten, että ne tukevat opiskelijoiden päättelyn kehittymistä.

Tutkimuksesta nousee esiin deduktiivisten päättelyiden vähyys tutkivan matematiikan oppitunneilla. Olisikin mielenkiintoista tutkia, millaisia tehtävänantojen tulisi olla, jotta oppitunneilla esiintyisi enemmän deduktiivista päättelyä. Erityisen kiinnostavaa olisi tietää, millaisia päättelyn muotoja opiskelijat käyttävät perinteisillä matematiikan oppitunneilla. Esiintyykö niillä lainkaan deduktiivista päättelyä vai onko kaikki päättely vain laskimeen tai kirjaan nojaavaa ulkopuoliseen lähteeseen vetoamista? Tunnin aiheeksi voisi valita jonkin tämän tutkimuksen oppituntien aiheista ja tarkkailla opiskelijaparin työskentelyä heidän ratkaistessaan kirjan tehtäviä. Kun tunti luokiteltaisiin tässä tutkimuksessa käytetyllä päättelyn muotojen luokittelulla, voitaisiin tunneilla käytettyjen päättelyiden osuuksia vertailla suoraan keskenään.

Tässä tutkimuksessa tarkkailtavat opiskelijaparit valittiin satunnaisesti. Tutkimusasetelmaa voitaisiin muuttaa tutkittavien opiskelijoiden kohdalta siten, että valittaisiin samalta tunnilta kaksi paria ja tutkittaisiin sitä, onko lahjakkaiden ja ns. tavallisten opiskelijoiden tekemien päättelyiden välillä eroja.

Tutkiva matematiikka ja GeoGebran käyttö opetuksessa ovat vielä melko uusia työskentelytapoja opiskelijoille. Olisikin mielenkiintoista selvittää, saadaanko tutkivaan matematiikkaan ja dynaamisten matematiikkaohjelmien käyttöön tottuneiden opiskelijoiden kanssa erilaisia tuloksia, mahdollisesti pätevämpiä päättelyitä, kuin tässä tutkimuksessa saatiin. Voitaisiin olettaa, että kun opiskelijoilla ei kulu aikaa työskentelytapaan totuttautumiseen ja GeoGebran toimintojen etsimiseen, he voivat keskittyä paremmin oppitunnin tehtäviin. GeoGebran käytön vaikutusta opiskelijoiden oppimiseen voitaisiin tutkia lisäksi pitkittäistutkimuksessa, jossa seurattaisiin opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja päättelyiden kehittymistä käytettäessä tunneilla pitkäaikaisesti GeoGebraa.

Lähteet

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. ZDM – *International Reviews on Mathematics Education,* 34(3), 66-72.

Balacheff, N. (1988) Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, in D. Pimm (Ed.). *Mathematics, Teachers and Children* (s. 216-235). London, Hodder and Stoughton.

Battista, M. 2002. Teoksessa Nathan, M., Schoenfeld, A., Kemeny, V., Lajoie, S., Lavigne, N., Battista, M., Lowber, C., Lamberg, T., Okamoto, Y., Brenner, M., Curtis, R., Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. Mathematics learning. Encyclopedia of Education.
http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-3403200392.html

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning. PNA, 1(2), 67-78.

Choi-Koh, S. (1999). A Student's Learning of Geometry Using the Computer. *Journal of Educational Research*, 92(5), 301-311.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactional analysis. *American Educational Research Journal,* 29(3), 573-604.

Francisco, J. & Maher, C. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24* (3–4), 361–372.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 35(4), 258-291.

Gordon, M. (1990). What is the Geometric Supposer a case of? (Report No. 90-5). Newton, MA: Center for Learning Technology, Education Development Center.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. Teoksessa F. Lester (Toim.), *Second handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* National Council of Teachers of Mathematics, 805-842.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. (2004). *Tutki ja kirjoita*. 10., osin uudistettu laitos. Jyväskylä: Gummerrus Kirjapaino Oy.

Hähkiöniemi, M., Leppäaho, J., & Francisco, J. (Lähetetty). Teacher-assisted open problem-solving model. Lähetetty julkaistavaksi.

Hähkiöniemi, M. (toim.) (2011). GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa: tutkimuksia opettajan ja oppilaan toiminnasta. Jyväskylän yliopisto, Opettajankoulutuslaitos.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010). Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M. Asikainen, P.E. Hirvonen & K. Sormunen (toim.), *Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.–23.10.2009* (s. 59–75). Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

Inoue, N. & Buczynski, S. (2011). You Asked Open-Ended Questions, Now What? Understanding the Nature of Stumbling Blocks in Teaching Inquiry Lessons. *The Mathematics Educator 2011,* 20(2), 10–23.

Jones, K. (2000). Providing a Foundation for Deductive Reasoning: Students' Interpretations when Using Dynamic Geometry Software and Their Evolving Mathematical Explanations. *Educational Studies in Mathematics,* 44 (1-3), 55-85.

Keranto, T. (1998). Kriittinen ajattelu ja tieteen tuntemus matematiikan opetuksessa. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (2. painos) Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 18–38.

Korhonen, H. (2007). Dynaamisia matematiikan työvälineitä. *Dimensio, 05/07.*

Luoma-aho, E. (2008). Funktion f(x) = a sin(kx) parametrien havainnollistus. GeoGebra-wiki. http://www.geogebra.org/en/upload/files/suomi/erluomaa/Sin_jaksojaamplitudi.html

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 87-125.

McCoy, L.P. (1991). The effect of geometry tool software on high school geometry achievement. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 10(3), 51-57.

Opetushallitus. (2003). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy.

Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem". Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Use of open-ended problems on mathematics classroom* (s.7-11). Research report 176. Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto.

Portaankorva-Koivisto, P. (2010). Elämyksellisyyttä tavoittelemassa – narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta. Acta Universitatis Tamperensis, 1550. Tampereen yliopisto.

Powell, A., Francisco, J. & Maher, C. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22* (2003), 405–435.

Reid, D. & Knipping, C. (2010). Proof in mathematics education. *Research, Learning and Teaching.* Rotterdam: Sense Publishers.

Schoenfeld, A. (1986). On Having and Using Geometric Knowledge. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schultz, E. How Does the Vertex Location of a Parabola Change?. Wolfram Demonstrations Project. http://demonstrations.wolfram.com/HowDoesTheVertexLocationOfAParabolaChange/

Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students´ justifications, *The Mathematics Teacher ,* 91(8), 670-675.

Stein, M., Engle, R., Smith, M. & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.

Sylianides, A. (2009). Breaking the Equation ' Empirical Argument = Proof '. *Mathematics Teaching 213 / March 2009*

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2006). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. 1.-4. painos. Jyväskylä: Gummerrus Kirjapaino Oy.

10 Tips for Inquiry-Based Learning. Teaching tip articles. Worksheet library. http://www.worksheetlibrary.com/teachingtips/inquirybasedlearningtips.html

LIITE 1: Tutkivan matematiikan oppituntien tehtävät

1. Pitkä matematiikka, Analyyttinen geometria (MAA4): Ympyrä

1. Tehtävä tehdään osoitteessa http://users.jyu.fi/~mahahkio/ympyra
    a. Mitä vakiot a, b ja c kertovat ympyrästä?
    b. Muuta nyt ympyrää siten, että sen keskipiste on (2, 3) ja että se kulkee pisteen P=(1, -½) kautta. (selitä, miten ratkaisit)
    c. Muodosta yleisen ympyrän yhtälö, ts. ympyrän, jonka keskipiste on (x_0, y_0) ja säde r.

2. Käynnistä Geogebra Webstart.
    a. Piirrä nelikulmio, jonka kärjet ovat A=(3½, 3½), B=(3½, -1), C=(-1, 3½) ja D=(-1, -1).
    b. Mikä on nelikulmion sisälle piirretyn, mahdollisimman suuren ympyrän yhtälö? (selitä myös, miten ratkaisit)

3. Piirrä mahdollisimman pieni ympyrä, joka kulkee pisteiden A=(2, 2) ja B=(5, 6) kautta. Mikä on ympyrän yhtälö? (muista myös selittää ratkaisutapa)

4. Selitä, MIKSI ympyrän yhtälö on sellainen, kuin sen tehtävässä 1 päättelit olevan!

5. Ympyrän Y keskipiste on (2, 3) ja säde $\sqrt{26}$, ja ympyrän W keskipiste on (-3, -2) ja säde 4. Y ja W leikkaavat kahdessa pisteessä. Nämä leikkauspisteet sekä ympyröiden keskipisteet muodostavat nelikulmion. Mikä on tämän nelikulmion pinta-ala? (selitä myös kuinka ratkaisit)

6. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ ja $x^2 + y^2 - 2x + 12y + 28 = 0$ kehien lyhin etäisyys.

2. Lyhyt matematiikka, Geometria (MAB2): Ympyrän tangentti

1. Merkitse piste A = (1,2). Piirrä sitten jokin ympyrä siten, että piste A on sen ulkopuolella. Piirrä pisteen A kautta kulkeva suora, joka sivuaa ympyrää täsmälleen yhdessä kohdassa. Kuinka monta tällaista suoraa on? (Avaa GeoGebra täältä: http://users.jyu.fi/~mahahkio/tyhja)

Avaa sitten linkki http://users.jyu.fi/~mahahkio/kulmat

2. Kuinka suuri on kulma, joka muodostuu suoran BC ja janan CA välille? Kuinka suuri on kulma, joka muodostuu toisen suoran ja janan DA välille?
3. Jos pisteen B sijaintia muuttaa, kuinka suuri voi keskuskulma α olla?
4. Milloin kulmat α ja β ovat yhtä suuret?
5. Onko kulmilla α ja β jokin yhteys?

3. Lyhyt matematiikka, Tilastot ja todennäköisyys (MAB5): Normaalijakauma

Lämmittelykysymys: Miten keskiarvo ja keskihajonta vaikuttavat normaalijakauman muotoon?

Vastaa apukuvion (http://users.jyu.fi/~mahahkio/OKLS610/Normaalijakauma.html) avulla seuraaviin kysymyksiin:

Erään oppimistestin tulokset ovat jakautuneet normaalisti siten, että keskiarvo on 4 pistettä ja keskihajonta 0,7.

1. Kuinka monta prosenttia oppilaista on saanut pistemäärän neljän ja kuuden pisteen väliltä?
2. Kuinka monta prosenttia oppilaista on saanut pistemäärän, joka poikkeaa keskiarvosta enintään 2 pistettä?
3. Valitaan satunnaisesti yksi oppilas. Millä todennäköisyydellä hän on saanut pistemäärän, joka poikkeaa keskiarvosta yli 1 pistettä?
4. Mikä on se pistemäärä, jonka alapuolella on 91% oppilaiden saamista pistemääristä?

Lisätehtävä: Valitse yksi vaikea tehtävä kirjan sivuilta 171-172 ja ratkaise se GeoGebralla.

4. Pitkä matematiikka, Analyyttinen geometria (MAA4): Paraabeli

1. *Määritä seuraavien paraabelien huippupisteiden koordinaatit (x_0, y_0):*
   a. $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$
   b. $g(x) = 3x^2 + x + 3$

   Kirjoita funktiot geogebran syöttökenttään muodossa f(x) = -2*x^2 + 2*x + 4 (paina lopuksi enter-näppäintä) jne. Eri toiminnot löytyvät yläreunan kuvakkeista. Huomaa pudotusvalikot kuvakkeiden oikeasta alanurkasta! Saat funktiot näkyviin/pois näkyvistä klikkaamalla funktion lausekkeen vasemmalla puolella olevaa pallukkaa.

2. *Määritä sitten yleisen paraabelin $h(x) = ax^2 + bx + c$ huippupisteen koordinaatit (x_0, y_0) vakioiden a, b ja c avulla ilmoitettuna.*

3. *a) Tutki miten c vaikuttaa paraabelin huipun sijaintiin*

   b) Tutki miten b vaikuttaa paraabelin huipun sijaintiin

   Kirjoita syötekenttään aluksi parametrit a, b ja c:

   a = 1 (enter)

   b = 1

   c = 1

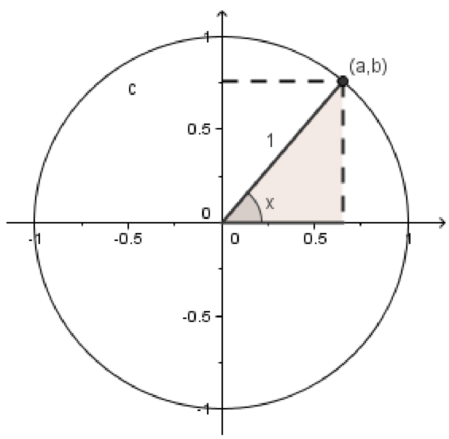
   Tämän jälkeen voit kirjoittaa funktion h(x) lausekkeen parametrimuodossa seuraavaan tapaan:

   h(x) = a*x^2 + b*x + c

   Klikkaamalla parametrien vasemmalla puolella olevia pallukoita, saat näkyviin liukusäätimet, joiden avulla on helppo tutkia parametrien vaikutusta funktioon.

5. Pitkä matematiikka, Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9): Sini ja kosini yksikköympyrässä

Määritelmä:



Olkoon kulman x kehäpiste (a,b). Tällöin kulman x sini ja kosini ovat:

cos x = a　　　　sin x =b

Lämmittelytehtävä:

a) $\sin 503^0 =$　　　　b) $\cos\frac{\pi}{2} =$　　　　c)$\sin(-680^0) =$

Seuraavissa tehtävissä käytä apuna tiedostoa geogebra tiedostoa: yksikulma.ggb
http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/yksikulma

1.

a) Milloin $\sin x$ saa positiivisia arvoja?

b) Millä x:n arvoilla $\cos x$ on negatiivinen?

2.

a) Millä kulmalla cos x = 0,5? Onko ehdon toteuttavia kulmia enemmän?

b) Mikä muuttujan x:n arvo on yhtälön sin x = 0 ratkaisu? Jos ratkaisuja löytyy enemmän, minkälaista sääntöä ratkaisut noudattavat?

c) Millä kulmilla $\cos x = \cos(-x)$

d) Mille kulmille $\sin x = \cos x$?

Seuraavissa tehtävissä käytä apuna tiedostoa geogebra tiedostoa: kaksikulmaa.ggb
http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/kaksikulmaa

3. Onko seuraava kaava tosi? Perustele. Korjaa epätodet kaavat.
    a) $\sin(\pi\text{-}x) = \sin x$
    b) $\sin x = \sin(-x)$
    c) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 =?$
    d) $\sin x = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$
    e) $\cos(\pi\text{-}x)=?$
    f) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

4. Määrittele funktion $f(x) = 2\cdot(\cos x) -1$ arvo- ja määrittelyjoukko

6. Pitkä matematiikka: Derivaatta (MAA7): Derivaattafunktio ja derivoimissäännöt

1. Mene sivulle http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/derivaatta1.html. Kuvassa näkyvä funktio on $f(x) = x^2$. Vaaleansinisellä on piirretty funktion f tangentti kohdassa A. Halutessasi voit vaihtaa funktiota kirjoittamalla uuden funktion syöttökenttään (esim. f(x)=x^3, mikä tarkoittaa funktiota $f(x) = x^3$)

Käytä seuraavissa tehtävissä apuna tehtävän 1 nettisivua.

2. Mikä on funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa
   a) $x = 0$
   b) $x = 1$
   c) $x = 2$
   d) $x = -2$

3. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion $f(x) = x^2$ derivaatta missä tahansa kohdassa *x*.

4. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion $f(x) = x$ derivaatta missä tahansa kohdassa *x*. Perustele vastauksesi!

5. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion *f* derivaatta missä tahansa kohdassa *x*, kun
   a) $f(x) = 3$
   b) $f(x) = -1$
   c) $f(x) = a$ (*a* on vakio)

   Perustele vastauksesi!

6. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion *f* derivaatta missä tahansa kohdassa *x*, kun

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -4x$

c) $f(x) = ax$ (a on vakio)

Perustele vastauksesi!

7. Mene sivulle http://users.jyu.fi/~mahahkio/TutMat2011/derivaatta2.html.
Mikä yhteys pisteen T uralla ja derivaatalla näyttäisi olevan? Voit kokeilla kirjoittamalla syöttökenttään säännön, jolla derivaatta saadaan kohdassa x.
Kirjoita sääntö muodossa $g(x)$ = *sääntö* (esim. $g(x)$ = 5x^2).

Käytä seuraavissa tehtävissä apuna tehtävän 7 nettisivua.

8. Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion f derivaatta missä tahansa kohdassa x, kun

   a) $f(x) = x^3$

   b) $f(x) = x^4$

   c) $f(x) = x^n$ (n on positiivinen kokonaisluku)

9. *Muodosta sääntö, jolla saadaan funktion f derivaatta missä tahansa kohdassa x, kun

   a) $f(x) = 5x^2$

   b) $f(x) = -3x^3$

   c) $f(x) = 2x^4$

   d) $f(x) = ax^n$ (a on vakio ja n on positiivinen kokonaisluku)