

Integraalista ja
joukon mitan käsitteestä

Maria Arkko

Matematiikan Pro Gradu - tutkielma

Jyväskylän yliopisto

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Kevät 2012

JOHDANTO

Työn tarkoituksena oli tarkastella integraalilaskennan kehittymistä lähtien liikkeelle antiikista edeten lopulta Riemannin ja Lebesguen töihin. Historiaosuutta on pääasiassa koottu Tieteiden kuningattaren [2] ja Suomelan luentomonisteen [6] tietojen pohjalta, yksittäisiä havaintoja on tehty myös muista lähdeeteoksista. Historiallisen kehityksen tarkastelussa lähdetään liikkeelle tyhjennysmenetelmän ideasta ja päädytään viipalointiperiaatteen kautta nykyisin käytössä oleviin merkintätapoihin ja määrittelmiin. Määritelmien lisäksi tarjotaan myös tuloksia ja esimerkkejä funktioiden integroituvuuden tutkimiseen. Jordan-joukkojen tarkastelun jälkeen Fubinin lause ja muuttujanvaihto tarjoavat keinoja itse integraalien helpompaan laskemiseen.

Riemannin integraalia laajennetaan vielä Lebesguen ulkomitan ja mitallisuuden kautta yleiseen mittaan päätyen lopulta Lebesguen integraalin määrittelmään. Ehdotuksena lukio-opetukseen mukaan on otettu myös integraalien laskemiseen kehittyneiden erilaisten numeeristen menetelmien tarkastelua esimerkkien avulla.

SISÄLTÖ

1. Integraalin historiaa	3
1.1. Antiikki	3
1.2. Fermat	6
2. Viipalointiperiaate	7
2.1. Tasoalueen pinta-ala	7
2.2. Kappaleen tilavuus	8
2.3. Cavalieri	10
3. Differentiaali- ja integraalilaskennan kehittäminen	12
3.1. Newtonin määritelmä	12
3.2. Cauchyn määritelmä	13
4. Riemannin integraali yli kompaktin välin	13
4.1. Nollamittainen joukko	17
5. Riemannin integraali yli rajoitetun joukon	18
6. Fubinin lause	19
7. Jordan-joukko ja sen tilavuus	20
8. Muuttujanvaihto Riemannin integraalissa	24
8.1. Diffeomorfismi ja muuttujanvaihtolause	24
8.2. Napa- ja pallokoordinaatit	25
9. Lebesguen mitta ja integraali	28
9.1. Lebesguen mitan yhteys Jordan-pituuteen yksiulotteisessa avaruudessa	30
9.2. Lebesguen integraali	31
10. Ehdotus lukio-opetukseen: integraalien arvioiminen numeerisilla menetelmillä	33
10.1. Keskipistemenetelmä	33
10.2. Puolisuunnikasmenetelmä	35
10.3. Simpsonin sääntö	36
Viitteet	39

1. INTEGRAALIN HISTORIAA

1.1. **Antiikki.** Integraalin historian tarkastelu voidaan aloittaa tarkastelemalla kreikkalaisten integraalilaskennan vastineen ekshaustio- eli tyhjennysmenetelmän periaatteita. Menetelmän nimi itsessään esiintyy kirjallisuudessa vasta vuonna 1647 Gregoriuksen teoksessa 'Opus geometricum'. Myös latinankielen sana *exhauriant* viittaa tyhjentämiseen.

Menetelmän kehittäjä Eudoksos Knidoslainen (408 - 335 eKr.) lähti liikkeelle aksioomasta, jonka mukaan jos kahdella suureella on suhde, niin toisella on monikerta, joka on toista suurempi. Epäsuoralla todistuksella aksioomasta voidaan todistaa ekshaustiomenetelmän perustana oleva väite:

Jos annetusta suureesta vähennetään puolet ja siitä edelleen vähennetään taas puolet ja kun tätä prosessi jatketaan, päädytään lopulta suureeseen joka on pienempi kuin mikä tahansa annettu samankaltainen suure.

Väite tunnetaan myös nimellä Arkhimedeen lemma, vaikka itse Arkhimedes muotoilikin sen hieman eri tavalla. Nykymerkinnöillä meillä on siis annettu suure M ja ennalta määrätty $\epsilon > 0$. Suhteesta r tiedetään, että $0 < r \leq \frac{1}{2}$. Tällöin on olemassa kokonaisluku N siten, että

$$Mr^n < \epsilon$$

kaikille positiivisille kokonaisluvuille $n > N$.

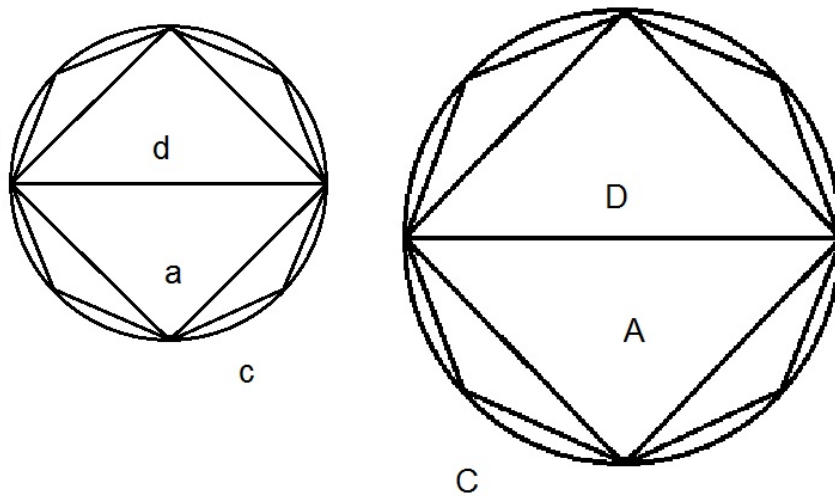
Kreikkalaiset käyttivät periaatetta kuvioiden aloja ja tilavuuksia käsittelevien tulosten todistamiseen. Arkhimedeelta (287-212 eKr.) löytyy esimerkiksi todistus kartion tilavuudelle vastaavan sylinterin tilavuuden kolmasosana. Arkhimedes käytti menetelmää sekä sisältä että ulkoapäin approksimointiin, hän siis sai pinta-aloille jonkinlaisen haarukan millä välillä pinta-ala on.

Ympyrän pinta-alaa voitiin arvioida piirtämällä ympyrän sisä- ja ulkopuolelle monikulmioita, joiden kulmien määrä kasvaa. Tällöin ympyrän ja monikulmioiden pinta-alojen erotus pienenee ja monikulmion pinta-alan avulla saadaan arvio myös ympyrän pinta-alalle. Yleisesti ottaen antiikin matemaatikot olivat lähellä raja-arvon käsitettä, vaikka kukaan ei sitä määritellytkään. Esimerkin omaisesti esitetään Eukleideen

Elementassa esitetty epäsuora tyhjennysmenetelmän käyttöä esittelevä tulos, jonka voi olettaa olevan juuri Eudoksoksen käsiälää.

1.1. **Lause.** *Ympyröiden alat suhtautuvat toisiinsa kuin halkaisijoiden neliöt.*

Todistus. Olkoon meillä siis kaksi ympyrää c ja C , joiden halkaisijat ovat d ja D ja pinta-alat ovat a ja A , kuva 1.



KUVA 1

Väite voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}.$$

Epäsuorasti riittää nyt siis todistaa, että väitteet

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2} \quad \text{ja} \quad \frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$$

eivät ole tosia.

Jos siis oletetaan, että

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2},$$

silloin on olemassa $a' < a$ siten, että

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}.$$

Olkoon $a - a' = \epsilon > 0$ annettu. Lisäksi ympyröiden sisään on piirretty säännölliset n -kulmiot, joiden pinta-alat vastaavasti ovat p_n ja P_n . Jos nyt n -kulmioiden sivujen määrä kaksinkertaistuu, ympyrän ja monikulmion välinen pinta-ala pienenee ainakin puolella, kuva 2.



KUVA 2

Annettaessa sivujen määrän kasvaa, ekshaustio-ominaisuuden perusteella päädytään lopulta tilanteeseen, jossa $a - p_n < \epsilon$. Koska $a - a' = \epsilon$ saadaan nämä kaksi tietoa yhdistämällä tulos, että olisi $p_n > a'$.

Monikulmoiden pinta-aloille voidaan laskea kaavat

$$p_n = d^2 \cdot \frac{n}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n} \quad \text{ja} \quad P_n = D^2 \cdot \frac{n}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}.$$

Pinta-alojen suhteelle saadaan siis

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}.$$

Yhdistämällä saatu tulos aiemman tiedon

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2},$$

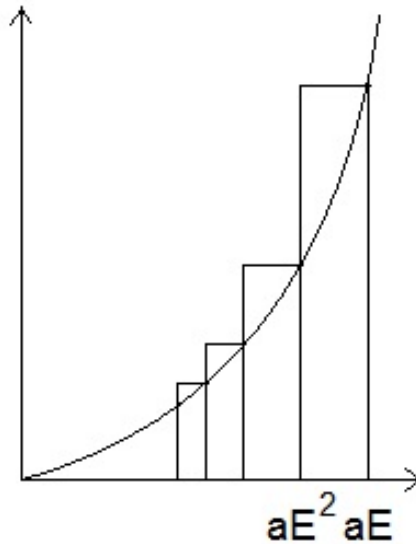
kanssa, saadaan

$$\frac{a'}{A} = \frac{p_n}{P_n}.$$

Todistetun tiedon $p_n > a'$ kanssa päädytään epäyhtälöön $p_n > A$. Saatu tulos väittäisi, että ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n -kulmion pinta-ala olisi suurempi kuin itse ympyrän ala, mikä on selvästikin ristiriita. Toinen alun epäyhtälöistä voidaan

todistaa vastaavalla päättelyllä virheelliseksi.

1.2. **Fermat.** 1600-luvulla ongelmaksi nousi käyrän alle jäävän pinta-alan laske-
minen. Esimerkiksi Pierre Fermat (1601-1665) lähestyi ongelmaa nykyisinkin tutulla
menetelmällä arvioida pinta-alaa suorakulmioilla. Arvioitaessa esimerkiksi käyrän
 $y = x^n$ ja x -akselin väliin jäävää pinta-alaa välillä $[0, a]$ väli jaetaan pisteillä
 $aE, aE^2, aE^3 \dots$, kun $E < 1$. Suorakulmiot muodostuvat kun jokaisen syntyvän
osavälin päätepiste määrää suorakulmion korkeuden, kuva 3.



KUVA 3

Nyt suorakulmioiden pinta-alojen summaksi saadaan

$$A_E = a^n(a - aE) + a^n E^n(aE - aE^2) + a^n E^{2n}(aE^2 - aE^3) + \dots$$

Summa voidaan sieventää muotoon

$$A_E = \frac{a^{n+1}(1 - E)}{1 - E^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{1 + E + E^2 + \dots + E^n}.$$

Nyt kun suorakulmiot kapenevat, siis $E \rightarrow 1$, niin tällöin $A_E \rightarrow A$ ja summaksi saadaan tuttu

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

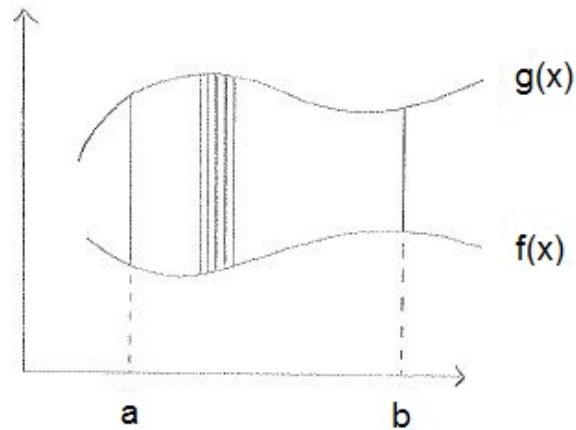
Fermat osasi tehdä vastaavan päättelyn negatiivisille potensseille, ei kuitenkaan kun $n = -1$. Fermat myös huomasi käänteisyyden differentioinnin ja integroinnin välillä mutta ei sitä mitenkään erikoisemmin korostanut, ei kai pitänyt sitä tärkeänä.

1600-luvulle tultaessa oli käytössä kaksi rinnakkaista apukeinoa integrointiongelmien ratkaisemiseksi: infinitesimaalit ja indivisiibelit. Kielenkäyttö näistä termeistä oli sekavaa mutta yleisempi mielipide oli, että infinitesimaalit ovat kappaleen kanssa samaa ulottuvuutta, kun taas indivisiibelit ovat alemmaa ulottuvuutta. Käytännön laskemista termien sekavuus ei hidastanut, käsitteiden tasolla ongelmia kuitenkin pohdittiin. Infinitesimaalien kohdalla mietittiin miten elementtejä, joilla on paksuutta, saataisiin äärelliseen tilavuuteen mahtumaan ääretön määrä. Vastaavasti indivisiibelien kohdalla mietittiin miten kappaleista, joilla ei ole paksuutta, saadaan koottua paksu kappale.

2. VIIPALOINTIPERIAATE

Tyhjennysmenetelmän jälkeen integraalin laskemiseksi syntyi idea halutun pinta-alan tai tilavuuden laskemiseksi viipaloimalla alue pienempiin osiin. Seuraavaksi tarkastellaan tasoalueen pinta-alan ja kappaleen tilavuuden laskemisen historiallista kehitystä viipalointiperiaatteella. Tämä tarkastelu johtaa myöhemmin Fubinin lauseeseen.

2.1. Tasoalueen pinta-ala. Aloitetaan viipalointiperiaatteen tarkastelu tasoalueen pinta-alasta. Tarkastellaan tasoaluetta, jota rajaa yläpuolelta jatkuvan funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja alapuolelta jatkuvan funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaaja. Jaetaan alue x -akselia vastaan kohtisuoriin suorakulmioihin, joiden leveyttä merkitään dx ,
kuva 4.

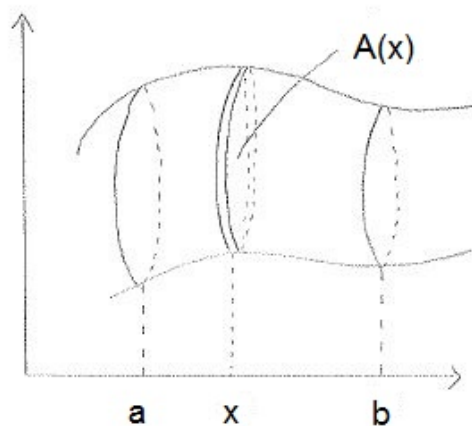


KUVA 4

Muuttujan x kohdalla viipaleen korkeudeksi saadaan $h(x) = g(x) - f(x)$. Näin ollen suorakulmion pinta-ala muuttujan x kohdalla on $h(x)dx$. Koko alueen pinta-ala saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta tällaista suorakulmiota eli laskemalla integraali

$$A = \int_a^b h(x)dx.$$

2.2. Kappaleen tilavuus. Vastaava idea toimii myös kappaleen tilavuuden laskemiseksi. Merkitään nyt muuttujan x kohdalla kappaleen x -akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-alaa $A(x)$, kuva 5.



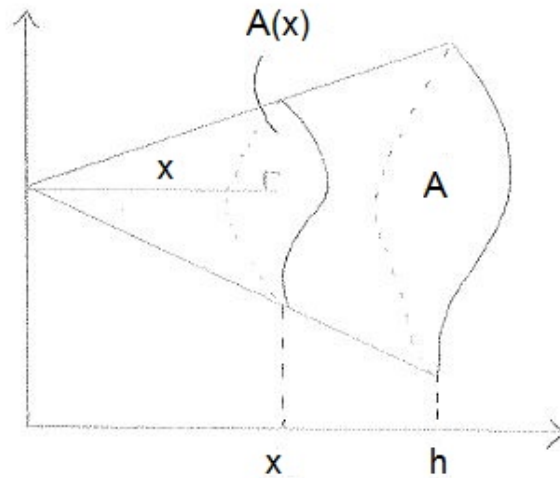
KUVA 5

Poikkileikkauskuvioiksi muodostuu nyt lieriö, jonka pohjan pinta-ala on $A(x)$ ja korkeus on dx . Kappaleen tilavuus on lieriöiden tilavuuksien summa, joka vastaa integraalia

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Riippuen nyt siitä kuinka helposti esimerkiksi juuri poikkileikkauksen pinta-ala saadaan laskettua, saadaan periaatetta hyödynnettyä käytännön ongelmissa. Kartion tilavuudelle saadaan laskukaava suhteellisen pienellä vaivalla.

2.1. **Esimerkki** (Kartion tilavuus). Määritetään tilavuus kartiolle, jonka pohjan pinta-ala on A ja korkeus h . Asetetaan kartio siten, että sen pohja on kohtisuorassa x -akselia vastaan ja sen huippu on tasossa, joka leikkaa x -akselia kohtisuorasti nollassa, kuva 6.



KUVA 6

Kartion tilavuus saadaan nyt viipalointiperiaatteen mukaisesti integraalista

$$\int_0^h A(x) dx,$$

missä $A(x)$ on kartion x -akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala muuttujan arvon x arvolla. Muodostetaan nyt annettujen tietojen avulla jonkinlainen lauseke pinta-alalle $A(x)$, joka voidaan sitten sijoittaa itsessään integraaliin.

Poikkileikkauskuvio on pohjana pienemmässä kartiossa, jonka korkeus on x . Pieni kartio on yhdenmuotoinen koko kartion kanssa suhteessa $x : h$. Kartioiden pohjien pinta-alojen suhde on nyt suhteen neliö. Tiedon avulla voidaan muodostaa verranto

$$\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2,$$

josta saadaan ratkaistua lauseke poikkileikkauksen pinta-alalle

$$A(x) = \frac{A}{h^2}x^2.$$

Nyt kartion tilavuus saadaan integroitua saatua tulosta hyödyntämällä

$$\int_0^h A(x) dx = \frac{A}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{Ah}{3}.$$

2.3. **Cavalieri.** Ideaa kappaleen viipaloinnista voidaan käyttää hyväksi esimerkiksi kun halutaan selvittää kappaleen tilavuus jonkin tunnetun kappaleen tilavuuden avulla. Tätä ideaa kehitteli Bonaventura Cavalieri (1598-1647), joka tutki tilavuutta viipalointimenetelmällä. Cavalieri käytti samoja menetelmiä, joita jo Arkhimedes käytti antiikissa. Jatkossa samoja menetelmiä käyttivät varsinaiset differentiaali- ja integraalilaskennan kehittäjät Newton ja Leibniz.

Seuraava Cavalierin periaatteen muotoilu on peräisin vuodelta 1634:

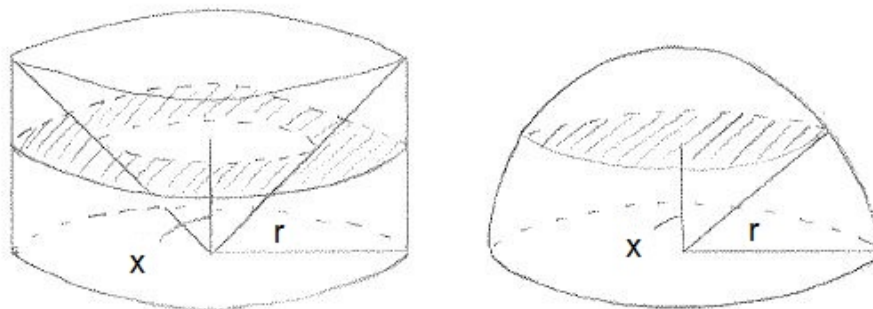
Jos yhdensuuntaisten suorien väliin piirretään kaksi tasokuviota ja jos mikä tahansa sanottujen suorien suuntainen suora leikkaa niistä yhtä pitkät viivat, niin kuviot ovat yhtä suuria; ja jos yhdensuuntaisten tasojen väliin konstruoidaan kaksi kappaletta ja jos mikä tahansa sanottujen tasojen suuntainen taso leikkaa niistä yhtä suuret kuviot niin kappaleet ovat yhtä suuria.

Cavalierin periaatteen ideana on siis, että jos kappaleiden leikkauskuvioiden pinta-alat vastaavat toisiaan niin tällöin kappaleilla on oltava myös sama tilavuus.

2.2. **Esimerkki** (Pallon tilavuus kartion tilavuuden avulla). Hyödynnetään Cavalierin menetelmää pallon tilavuuden määrittämissä, käyttäen hyödyksi tunnettua kartion tilavuuden kaavaa.

Määritellään ensin halutut kappaleet, jonka jälkeen voidaan tutkia poikkileikkausten

pinta-aloja. Merkitään ympyrälieriön korkeutta ja pohjan sädettä kirjaimella r . Poistetaan nyt lieriöstä kärjellään seisova ympyräkartio. Asetetaan näin muodostunut kappale puolipallon kanssa samaan tasoon ja leikataan kappaleita pohjan kanssa yhdensuuntaisella tasolla, kuva 7.



KUVA 7

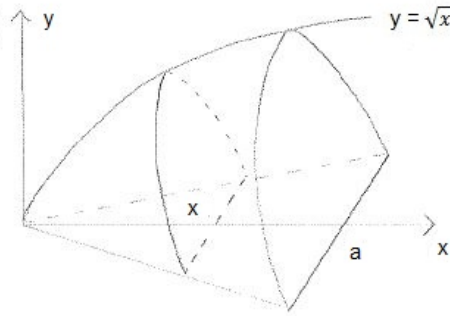
Tason etäisyyttä kappaleiden pohjasta merkitään kirjaimella x . Nyt puolipallon leikkauspinnan pinta-ala on $\pi(r^2 - x^2)$. Vastaavasti voidaan laskea, että lieriöstä syntyneen kappaleen leikkauspinnan pinta-ala on myös $\pi(r^2 - x^2)$. Näin ollen

Cavalierin periaatteen mukaisesti puolipallon tilavuus vastaa lieriökappaleen tilavuutta. Kun tiedetään, että kartion poistaminen lieriöstä vie kolmasosan sen tilavuudesta, jäljellä jäävän osan tilavuus on kaksi kolmasosaa koko lieriöstä siis $\frac{2}{3} \cdot \pi r^3$. Kaksinkertaistamalla puolipallolle saatu tulos saadaan pallon tilavuudelle tuttu kaava $\frac{4}{3} \pi r^3$.

2.3. Esimerkki. Määritellään viipalointiperiaatteella tilavuus pyörähdyskappaleen puolikkaalle, jonka sivuleikkauskuvio on käyrän $y = \sqrt{x}$ muotoinen, kuva 8.

Nyt x -akselia vastaan kohtisuora poikkileikkaus on puoliympyrän muotoinen. Tämän poikkileikkauksen pinta-ala muuttujan x kohdalla on $A(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi x$. Kappaleen tilavuudeksi, kun $x \in [0, a]$, saadaan

$$V = \int_0^a A(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^a x dx = \frac{\pi a^2}{4}.$$



KUVA 8

3. DIFFERENTIAALI- JA INTEGRAALILASKENNAN KEHITTÄMINEN

Varsinaisen infinitesimaalilaskennan eli differentiaali- ja integraalilaskennan katsotaan syntyneen Newtonin (1642-1727) ja Leibnizin (1646-1716) toisistaan riippumattoman työn tuloksena. Vaikka Newton ei ensimmäisenä derivoinut tai integroinut, eikä nähnyt näiden toimenpiteiden yhteyttä, voidaan hänen sanoa vakiinnuttaneen nämä teorit yleiseksi algoritmiksi, jota voitiin soveltaa moniin tunnettuihin funktioihin. Leibniz taasen ymmärsi itse tuloksia kehitellessään hyvien merkintöjen tärkeyden ja merkinnät \int integraalille ja dx infinitesimaaliselle muutokselle ovatkin lähtöisin juuri häneltä.

Integraalin määritelmän kehittyminen pohjautuu kiinteästi teorioita tutkineisiin matemaatikoihin ja luontevaa onkin aloittaa tarkastelu Newtonin määritelmästä, jossa on vielä paljon epämääräisyyttä. Lopulta raja-arvon kehittämisen myötä päädytään Riemannin määritelmiin ja niistä vielä edelleen Lebesguen integraaliin, edeten niin, että yhä suurempaa joukkoa funktioita voidaan integroida.

3.1. Newtonin määritelmä. Newtonille integraali oli vain derivaatan käänteisoperaatio. Nykyajan merkinnöin Newtonin integraalille saadaan seuraava määritelmä.

3.1. Määritelmä (Newton). Välillä $[a, b]$ määritelty reaaliarvoinen funktio f on Newton-integroituva, jos välillä $[a, b]$ funktiolle f on olemassa antiderivaatta, merkitään F , jolle $F' = f$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$(3.1) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Newtonin integraalia täytyy pitää keskeneräisenä, koska integroituvuus ja integraalin arvo riippuvat jostakin sellaisesta, jonka olemassaolon määrittämiseen tai laskemiseen tarvittavaa tapaa ei ole annettu. Ainoastaan, jos tällainen funktio F satutaan löytämään, niin integraali voidaan laskea. Muuten ei tiedetä onko integraalia edes olemassa. Jatkossa esiteltävät Cauchyn ja Riemannin integraalit vaativat myös jotain funktion jatkuvuudelta, Newtonin määritelmässä jatkuvuudesta ei puhuta.

3.2. Cauchyn määritelmä. Kunnollinen määritelmä integraalille saadaankin vasta Bernhard Riemannilta (1826-1866) 1800-luvun puolivälissä.

Augustin Cauchy (1789-1857) oli muotoillut vastaavan määritelmän aiemmin pelkästään jatkuville funktioille. Teorian kehittymisen mahdollisti Cauchyn työ raja-arvojen parissa. Seuraavassa esitellään nykyajan merkinnöin Cauchyn määritelmä integraalille, periaatteessa samalla tavalla kuin hän olisi sen itse luennoillaan esittänyt.

3.2. Määritelmä (Cauchy). Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$ ja olkoon P välin jako

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Muodostetaan summa

$$\mathcal{S}(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Olkoon $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ ja määritellään

$$(3.2) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \mathcal{S}(f, P).$$

Cauchy todisti, että tällainen raja-arvo on olemassa. Jatkuville funktioille muodostettu Cauchyn integraali vastaa Newtonin integraalia, kuitenkin joissakin rajoittamattomissa tilanteissa Newtonin määritelmä toimii Cauchyn määritelmää paremmin.

4. RIEMANNIN INTEGRAALI YLI KOMPAKTIN VÄLIN

Bernhard Riemann (1826-1866) kehitti omalta osaltaan integraalin määritelmää eteenpäin.

4.1. **Määritelmä** (Välin jako). Reaaliakselin kompaktille välille $I = [a, b]$ voidaan määrittää jako

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

missä $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Jako P jakaa välin $[a, b]$ osaväleihin, joita on n kappaletta.

Välin jaon voi vastaavasti määritellä myös joukolle $I \subset \mathbb{R}^n$:

Välin $I = I^1 \times \dots \times I^n \subset \mathbb{R}^n$ jako P on karteellinen tulo

$$P = P^1 \times \dots \times P^n,$$

missä P^i on komponenttinvälin I^i jako m_i osaväliin, $i = 1, \dots, n$.

Nyt voidaan määritellä mitä tarkoitetaan porraskäytöllä rajoitetulle funktiolle.

4.2. **Määritelmä** (Porraskäyttö). Rajoitettu funktio $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ on porraskäyttö jos on olemassa välin $I \subset \mathbb{R}^n$ jako P siten, että funktio h on vakio jokaisen osavälin sisuksessa.

Ennen kuin määrittelemme ylä- ja alaporraskäyttöiden avulla Riemannin integraalin määritellään ensin mitä tarkoitetaan alkeisintegraalilla.

4.3. **Määritelmä** (Alkeisintegraali). Olkoon $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ välin $I \subset \mathbb{R}^n$ porraskäyttö ja P väliin liittyvä jako. Näin ollen jokaisen osavälin I_j sisällä funktio saa vakioarvon $c_j \in \mathbb{R}$. Porraskäytön alkeisintegraaliksi yli välin I määritellään nyt

$$S(h) = S(h, I) = \sum_j c_j \lambda(I_j),$$

missä $\lambda(I_j)$ on osavälin I_j geometrinen tilavuus.

Huomautus. Välin $I \subset \mathbb{R}^n$ geometrinen tilavuus on

$$\lambda(I) = \lambda_n(I) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n),$$

missä $b_j - a_j$ on välin I^j pituus.

Porraskäyttöiden avulla saadaan integraalille määriteltyä ylä- ja ala-integraali. Jos nämä integraalit ovat yhtä suuret saadaan rajoitetun funktion integraali määritettyä.

4.4. **Määritelmä** (Riemannin integraali porraskäytöiden avulla). Rajoitettu funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroituva yli välin I , mikäli sen alaintegraali

$$\text{ala} \int_I f = \sup \{S(h, I) : h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ porraskäyttö, } h \leq f\}$$

ja yläintegraali

$$\text{ylä} \int_I f = \inf \{S(g, I) : g : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ porraskäyttö, } g \geq f\}$$

ovat yhtä suuret, jolloin funktion Riemannin integraali yli välin I on

$$(4.1) \quad \int_I f = \text{ala} \int_I f = \text{ylä} \int_I f.$$

4.5. **Esimerkki.** Ylä- ja alaporraskäytöiden avulla saadaan laskettua integraali esimerkiksi funktiolle $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, vaikkakin määritelmän käyttö jakoi-neen on työlästä.

Määritetään funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, integraali ylä- ja alaporraskäytöiden avulla. Valitaan välin $[0, 1]$ jaoks

$$P = \{0, 2^{-n}, 2 \cdot 2^{-n}, \dots, (2^{n-1}) \cdot 2^{-n}, 1\}.$$

Valitaan nyt osaväliltä $[(m-1) \cdot 2^{-n}, m \cdot 2^{-n}]$ vasemmanpuoleisen päätepisteen mukaan alaporraskäytön h_1 arvo ja oikeanpuoleisen päätepisteen mukaan yläporraskäytön h_2 arvo. Tällä osavälillä on

$$h_1(x) = \left(\frac{m-1}{2^n}\right)^2 \quad \text{ja} \quad h_2(x) = \left(\frac{m}{2^n}\right)^2.$$

Tarkastellaan seuraavaksi porraskäytöiden alkeisintegraaleja.

Yläporraskäytölle saadaan

$$\begin{aligned} S(h_2) &= \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{k}{2^n}\right)^2 \cdot 2^{-n} = \sum_{k=1}^{2^n} k^2 \cdot 2^{-3n} \\ &= 2^{-3n} \cdot \frac{2^n(2^n+1)(2 \cdot 2^n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} (2 + 2^{-n} + 2^{-n+1} + 2^{-2n}) \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Vastaavasti saadaan alaporraskäytöille

$$S(h_1) = \frac{1}{6} (2 - 2^{-n} - 2^{-n+1} + 2^{-2n}) \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Nyt koska

$$S(h_1) \rightarrow \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad S(h_2) \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty,$$

funktio f on määritelmän mukaan integroitava ja

$$\int_{[0,1]} f = \frac{1}{3}.$$

4.6. Esimerkki. Ylä- ja alaporrassfunktioiden avulla voidaan tutkia funktion integroituvuutta. Tarkastellaankin funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

integroituvuutta.

Nyt jokaiselle funktion alaporrassfunktiolle on $h_1 \leq 0$ ja yläporrasfunktiolle $h_2 \geq 1$. Tällöin on $S(h_1) \leq 0$ ja $S(h_2) \geq 1$, ja näin ollen f ei ole Riemann-integroitava.

Jatkossa funktion integroituvuutta voidaan tarkastella esimerkiksi Riemannin ehdon avulla, jonka ideana on tarkastella ylä- ja alaporrassfunktioiden alkeisintegraalien erotusta. Jos tämä erotus saadaan mielivaltaisen pieneksi, niin funktio on integroitava.

4.7. Lause (Riemannin ehto). *Rajoitettu funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroitava täsmälleen silloin kun jokaiselle annetulle $\epsilon > 0$ löytyy porrasfunktiot $h_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ja $h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, jotka täyttävät ehdot $h_1 \leq f \leq h_2$ ja*

$$(4.2) \quad S(h_2) - S(h_1) < \epsilon.$$

Todistus. Integroituvalla f on porrasfunktiot $h_1 \leq f$ ja $h_2 \geq f$, joille

$$\int_I f - S(h_1) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ja} \quad S(h_2) - \int_I f < \frac{\epsilon}{2},$$

ja siten ehto (4.2) täyttyy. Kääntäen, olkoon $\epsilon > 0$, ja $h_1 \leq f \leq h_2$ siten, että (4.2) on voimassa. Silloin

$$0 \leq \text{ylä } \int_I f - \text{ala } \int_I f \leq S(h_2) - S(h_1) < \epsilon,$$

joten f on integroitava.

4.8. **Esimerkki.** Tarkastellaan aikaisemman esimerkin 4.5 ylä- ja alaporrassfunktioiden alkeisintegraalien erotusta. Saadaan

$$S(h_2) - S(h_1) = \frac{1}{6} (2^{-n+1} + 2^{-n+2}),$$

jolloin, kun $n \rightarrow \infty$, saadaan

$$S(h_2) - S(h_1) \rightarrow 0.$$

Näin ollen funktio $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, on integroitava.

4.1. **Nollamittainen joukko.** Tunnettaessa tulos, että jatkuva funktio on integroitava, ks. [5, s. 13], voidaan integroitavuuden tarkastelussa keskittyä miettimään kuinka paljon funktiolla saa olla epäjatkuvuuspisteitä. Lebesguen ehto Riemann-integroitavuudelle kertoo funktion olevan Riemann-integroitava kun epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamittainen. Määritelläänkin ensin nollamittainen joukko.

4.9. **Määritelmä** (Nollamittaisuus). Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on nollamittainen, jos jokaiselle $\epsilon > 0$ löytyy numeroituva joukkoperhe $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kompakteja välejä $I_k \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(I_k) < \epsilon.$$

Nyt saadaan johdettua tulos funktion integroitavuudelle.

4.10. **Lause** (Lebesguen ehto). *Kompaktin välin $I \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu funktio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroitava täsmälleen silloin kun sen epäjatkuvuuspisteiden joukko*

$$\mathcal{E}_f = \{x \in I : f \text{ ei ole jatkuva pisteessä } x\}$$

on nollamittainen.

Todistus. Ks. [1, s. 171-173].

4.11. **Esimerkki.** Tarkastellaan funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

integroitavuutta Lebesguen ehdolla.

Nyt epäjatkuvuuspisteiden joukko $\mathcal{E} = [0, 1]$ ei ole nollamittainen, eikä funktiokaan siten ole integroitava.

4.12. **Esimerkki.** Olkoon joukko $A = \{a_k = (a_{k_1}, a_{k_2}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : k \in \mathbb{N}\}$ välin $I = [0, 1] \times [0, 1]$ rationaalipisteet. Tarkastellaan nyt funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-k}, & \text{kun } x = a_k \text{ jollakin } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{kun } x \in I \setminus A \end{cases}$$

integroituvuutta Lebesguen ehdolla.

Nyt $\mathcal{E}_f = A$, joka on numeroituvana joukkona nollamittainen. Jokainen $x \in I \setminus A$ on nimittäin jatkuvuus piste:

Jos $\epsilon > 0$ on annettu, niin $2^{-k} < \epsilon$ kun $k > k_\epsilon$. Kun valitaan

$$0 < \delta \leq \min\{\|x - a_k\| : k = 1, \dots, k_\epsilon\},$$

niin kaikille $y \in B(x, \delta) \cap I$ on

$$f(y) - f(x) < 2^{-k_\epsilon} \leq \epsilon.$$

Funktio on siis Lebesguen ehdon nojalla integroitava.

5. RIEMANNIN INTEGRAALI YLI RAJOITETUN JOUKON

Riemannin integraali rajoitetulle joukolle saadaan määriteltyä palauttamalla tilanne integroinniksi välin yli. Mietittäessä milloin funktio on Riemann-integroitava rajoitetun joukon suhteen lähestytään asiaa funktion nollajatkon avulla.

5.1. **Määritelmä** (Funktion nollajatko). Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nollajatko joukkoon $B \supset A$ on funktio $f^0 : B \rightarrow \mathbb{R}$, jolle

$$f^0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{kun } x \in A \\ 0 & \text{kun } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Funktion nollajatkon avulla saadaan määritelmä funktion Riemann-integroituvuudelle.

5.2. **Määritelmä** (Riemann-integroituvuus). Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko.

Rajoitettu funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on Riemann-integroitava, jos sen nollajatko $f^0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ kompaktiin väliin $I \supset A$ on integroitava, ja tällöin

$$\int_A f = \int_I f^0.$$

5.3. **Esimerkki.** Tiedetään, että kompaktin välin $I \subset \mathbb{R}^n$ integroituvan funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ graafi G_f on nollamittainen, ks. [5, s. 17]. Jos nyt rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva, niin sen nollajatko $f^0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ kompaktiin väliin $I \supset A$ on integroituva. Siten nollajatkon graafi G_{f^0} on nollamittainen, jolloin sitä on myös $G_f \subset G_{f^0}$.

6. FUBININ LAUSE

Tyhjennysmenetelmän ja viipalointimenetelmän periaatteiden mukainen menetelmä saada integraali paremmin laskettavaan muotoon saadaan Fubinin lauseesta. Useampiulotteisissa tilanteissa integrointi saadaan muutettua esimerkiksi useammiksi yksiulotteiseksi integroinneiksi. Vastaavaa ideaahan soveltavat myös esimerkiksi viipalointimenetelmä, joka muuttaa esimerkiksi kolmiulotteisen tilanteen peräkkäisiksi integroinneiksi yksi- ja kaksiulotteisissa tilanteissa. Cavalierin periaatteen mukaisesti saadaan esitettyä joukon $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y -leikkaus kiinteälle $y \in \mathbb{R}$ seuraavasti

$$A_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\}.$$

Nyt voidaan muotoilla Fubinin lause.

6.1. **Lause** (Fubinin lause). *Oletetaan, että funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva rajoitetussa joukossa $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Jos jokaiselle $y \in p_{n+1}(A)$, missä p_{n+1} on vastaava projektiokuvaus, funktion f y -leikkaus*

$$f_y : A_y \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x, y)$$

on integroituva, niin funktio

$$F : p_{n+1}(A) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_{A_y} f_y = \int_{A_y} f(x, y) dx$$

on integroituva, ja on voimassa Fubinin yhtälö

$$(6.1) \quad \int_A f = \int_A f(x, y) d(x, y) = \int_{p_{n+1}(A)} F = \int_{p_{n+1}(A)} \left(\int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Todistus. Ks. [5, s. 45].

6.2. **Esimerkki.** Olkoon $I = [0, \pi] \times [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Lasketaan funktion

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x_1 x_3^2 \cos(x_1 x_2)$$

integraali Fubinin lausetta hyödyntäen. Funktion x_i -leikkaukset, $i = 1, 2, 3$, ovat jatkuvina kuvauksina integroituvia, joten Fubinin lausetta voidaan soveltaa peräkkäisiä kertoja. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_I f(x) dx &= \int_0^{2\pi} x_3^2 \left(\int_0^\pi \int_0^1 x_1 \cos(x_1 x_2) dx_2 dx_1 \right) dx_3 \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} x_3^3 \left(\int_0^\pi \int_0^1 \sin(x_1 x_2) dx_1 \right) \\ &= \frac{8}{3} \pi^3 \left(\int_0^\pi \sin x_1 dx_1 \right) \\ &= \frac{8}{3} \pi^3 (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{16}{3} \pi^3. \end{aligned}$$

6.3. **Esimerkki.** Olkoon

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1 + x\}.$$

Lasketaan funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = 1 - y + x$ integraali Fubinin lausetta hyödyntäen. Nyt funktion x - ja y -leikkaukset ovat jatkuvina kuvauksina integroituvia ja Fubinin lausetta voidaan näin ollen käyttää. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_D (1 - y + x) d(x, y) &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} (1 - y + x) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} \left(y - \frac{1}{2} y^2 + xy \right) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right) dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

7. JORDAN-JOUKKO JA SEN TILAVUUS

Laajennetaan nyt tarkastelua yleisempiin Jordan-joukkoihin. Määritellään ensin Jordanin sisä- ja ulkotilavuuden käsitteet, joiden avulla saadaan sitten tulos Jordanmitallisuudelle.

7.1. Määritelmä. Olkoon $S \subset I$ kompaktille välille $I \subset \mathbb{R}^n$. Jokaiselle välin I jaolle määritellään $\underline{J}(P, S)$ summaksi niiden osavälien tilavuuksista, jotka sisältävät vain joukon S sisäpisteitä ja $\overline{J}(P, S)$ summaksi osavälien tilavuuksista, jotka sisältävät pisteitä joukosta $S \cup \partial S$. Lukuja

$$\underline{c}(S) = \sup \{ \underline{J}(P, S), P \text{ on välin } I \text{ jako} \}$$

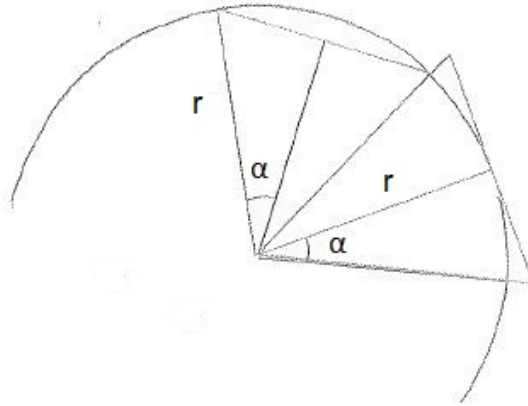
$$\overline{c}(S) = \inf \{ \overline{J}(P, S), P \text{ on välin } I \text{ jako} \}$$

kutsutaan joukon S n -ulotteiseksi Jordanin sisä- ja ulkotilavuudeksi. Joukon S sanotaan olevan Jordan-mitallinen jos $\overline{c}(S) = \underline{c}(S)$. Tällöin tätä arvoa kutsutaan joukon Jordan-tilavuudeksi ja sitä merkitään $c(S)$.

Huomautus. Aina on voimassa $0 \leq \underline{c}(S) \leq \overline{c}(S)$. Edelleen, jos S on äärellinen joukko, niin tällöin $\underline{c}(S) = \overline{c}(S) = 0$. Itse asiassa joukolle, jolla ei ole sisäpisteitä on $\underline{c}(S) = 0$ koska $\underline{J}(P, S) = 0$.

7.2. Esimerkki. Rationaalilukujen joukolle millä tahansa välillä $[a, b]$ Jordanin sisätilavuus on nolla, aivan kuten vastaavalle irrationaalilukujen joukolle. Kuitenkin molemmille joukoille Jordanin ulkotilavuus on $b - a$. Itse asiassa molemmille joukoille $\overline{J}(P, S) \geq b - a$ kaikilla jaoilla P , sillä jokainen väli sisältää sekä rationaali- että irrationaalilukuja. Kumpikaan joukoista ei ole siis Jordan-mitallinen.

7.3. Esimerkki. Ennen varsinaista integraalin keksimistä ympyrän pinta-alaa pystyttiin arvioimaan piirtämällä sen sisä- ja ulkopuolelle monikulmioita ja seuraamalla mitä monikulmoiden pinta-alalle tapahtuu kun kulmien määrä kasvaa. Tyhjennysmenetelmälle saadaan näin ollen yhteys integraaleihin Jordanin sisä- ja ulkotilavuuden kautta. Muodostetaan nyt r -säteisen ympyrän Y sisä- ja ulkopuolelle säännölliset monikulmiot, joiden pinta-alaa voimme tarkastella Jordanin sisä- ja ulkotilavuutena. Syntyvät joukot eivät ole aivan määritelmän 7.1 mukaisia mutta idea pysyy samana. Sillä, jos pinta-alojen erotus lähestyy nollaa kulmien määrän kasvaessa, on ympyrä Jordan-mitallinen joukko. Jaetaan siis ympyrä kulman $\alpha = \frac{\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, mukaisesti osiin, kuva 9.



KUVA 9

Näin saadaan muodostettua monikulmio, jossa on $k = \frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{N}$ kulmaa. Sisäpuolelle muodostuvan kulmion pinta-ala saadaan laskettua kolmioista, jonka korkeus on $\cos \alpha \cdot r$ ja kanta $2 \cdot \sin \alpha \cdot r$. Saadaan

$$\underline{J}(P, Y) = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot r^2.$$

Vastaavasti ympyrän ulkopuolelle voidaan muodostaa monikulmio kolmioista, joiden korkeus on r ja kanta $2 \tan \alpha \cdot r$. Monikulmion pinta-alaksi saadaan

$$\overline{J}(P, Y) = \frac{\pi}{\alpha} \tan \alpha \cdot r^2.$$

Näiden kahden monikulmion alojen erotukseksi saadaan

$$\pi r^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Nyt kulman α pienentyessä

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} \rightarrow 1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \rightarrow 0.$$

Erotus lähestyy siis nollaa ja ympyrä on täten Jordan-mitallinen.

Jordan-tilavuus itsessään on yhteydessä Riemannin integraaliin karakteristisen funktion kautta.

7.4. Määritelmä (Karakteristinen funktio). Funktio

$$\chi_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kun } x \in S \\ 0 & \text{kun } x \in \mathbb{R}^n \setminus S, \end{cases}$$

on joukon $S \subset \mathbb{R}^n$ karakteristinen funktio.

Jordanin sisä- ja ulkotilavuus voidaan nyt lausua integraaleina

$$\underline{c}(S) = \text{ala} \int_I \chi_S(x) dx \quad \text{ja} \quad \bar{c}(S) = \text{ylä} \int_I \chi_S(x) dx,$$

kun $S \subset I$ kompaktille välille $I \subset \mathbb{R}^n$ ja χ_S on joukon S karakteristinen funktio. Seuraavana voidaan antaa jatkossa hyödyllinen tulos sen määrittämiseksi milloin joukko on Jordan-mitallinen.

7.5. Lause. *Olkoon S rajoitettu joukko avaruudessa \mathbb{R}^n ja merkitään joukon reunaa ∂S . Saamme*

$$\bar{c}(\partial S) = \bar{c}(S) - \underline{c}(S).$$

Tällöin joukko S on Jordan-mitallinen jos ja vain jos $\bar{c}(\partial S) = 0$, ja edelleen yhtäpitävästi täsmälleen silloin kun ∂S on nollamittainen.

Todistus. Ks. [1, s. 397], [5, 5. §].

Jatkossa Jordan-joukon tilavuus voidaan laskea suoraan karakteristisen funktion kautta. Tilavuus saadaan integroimalla karakteristista funktiota välin I suhteen

$$c(A) = \int_I \chi_A = \int_A 1,$$

mille tahansa kompaktille välille $I \supset A$.

7.6. Esimerkki. Osoitetaan, että joukossa $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ käyrien $y = \sqrt{ax}$ ja $y = ax^2$, $a > 0$, rajaaman alueen pinta-ala ei riipu vakiosta a .

Ratkaistaan ensin käyrien leikkauspisteiksi $x = 0$ ja $x = a^{-1/3}$. Nyt koska käyrien rajaaman tasoalueen A reuna koostuu kahdesta nollamittaisen graafin osasta, ks. [5, s. 17], on joukon reuna nollamittainen ja joukko on Jordan-joukko.

Alueen A pinta-alaksi saadaan nyt Fubinin lauseella

$$\begin{aligned} \int_A 1 &= \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \int_{ax^2}^{\sqrt{ax}} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \sqrt{ax} - ax^2 \, dx \\ &= \int_0^{a^{-\frac{1}{3}}} \frac{2}{3} \sqrt{ax}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} ax^3 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Kuten huomataan alueen pinta-ala ei riipu vakiosta a .

8. MUUTTUJANVAIHTO RIEMANNIN INTEGRALISSA

Usein integroidessa syntyy tilanteita, joissa muuttujanvaihdosta on apua. Ideana on siis muuttaa integroitava funktio paremmin integroitavaan muotoon, jolloin pitää kuitenkin ottaa huomioon myös integrointialueen muodon ja koon muutos. Muuttujanvaihdolle voidaan johtaa varsinainen muuttujanvaihtolause, jossa oletetaan, että itse muuttujanvaihtokuvaus on diffeomorfismi ja joukot joiden suhteen integrointia suoritetaan ovat Jordan-joukkoja. Tarpeen muuttujanvaihdolle ja integrointialueen muutokselle luo Fubinin lause, jonka hyödyntäminen tehtävissä on riippuvainen nimenomaan integrointialueesta.

8.1. Diffeomorfismi ja muuttujanvaihtolause. Määritellään ensin mitä tarkoitetaan Jacobin determinantilla. Tämän jälkeen voidaan esitellä tulos diffeomorfismille.

8.1. Määritelmä (Jacobin determinantti). Avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{R}^n$ differentioituvan kuvauksen $g : (g_1, \dots, g_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ Jacobin determinantti pisteessä $x \in A$ on

$$(8.1) \quad J_g(x) = \det[\partial_i g_k(x)]_{i,k},$$

toisin sanoen sen derivaatan $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ matriisin determinantti.

Muuttujanvaihdon kannalta hyödyllinen tulos saadaan diffeomorfismille.

8.2. Lause (Diffeomorfismi). *Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $T : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti differentioituva injektio. Jos $J_T(x) \neq 0$ kaikille $x \in W$, niin $T(W) \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja $T : W \rightarrow T(W)$ on diffeomorfismi (ts. myös T^{-1} on jatkuvasti differentioituva).*

Todistus. Ks. [5, s. 52].

8.3. Lause (Muuttujanvaihtolause). *Oletetaan, että*

1) $T : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuvasti differentioituva kuvaus avoimessa joukossa $W \subset \mathbb{R}^n$,

2) $R \subset W$ on rajoitettu Jordan-joukko jolle $\bar{R} \subset W$, ja

3) jollekin suljetulle nollamittaiselle joukolle $N \subset \bar{R}$ avoimeen joukkoon

$R' := (\text{int } R) \setminus N$ rajoitettuna kuvaus $T : R' \rightarrow T(R')$ on diffeomorfismi.

Silloin $T(R)$ on Jordan-joukko, ja rajoitetulle integroituvalla funktiolla $f : T(R) \rightarrow \mathbb{R}$ on voimassa muuttujanvaihtoyhtälö

$$(8.2) \quad \int_{T(R)} f = \int_R (f \circ T) |J_T|.$$

Todistus. Ks. [7, s. 424-428].

Mitan mielessä voidaan tarkastella Jacobin determinantin osuutta muuttujanvaihdossa, se on kuitenkin juuri se korjaustermi, joka ottaa huomioon integrointialueen koon muutoksen muuttujanvaihtoa käytettäessä. Keskeisiä diffeomorfisia muuttujanvaihtokuvauksia ovat muunnokset napa- ja pallokoordinaatteihin.

8.2. Napa- ja pallokoordinaatit.

8.2.1. Napakoordinaattikuvaus. Napakoordinaattikuvaus

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

on jatkuvasti differentioituva, joten joukolle $W =]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ on

$$g : W \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}, \quad g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

on diffeomorfismi. Napakoordinaattikuvaukselle Jacobin determinantin itseisarvo on $|J_g| = r$.

8.4. Esimerkki. Lasketaan alueen

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq a^2, a > 0\}$$

yli funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^s$ integraali, kun $s \geq 0$. Integroidessa käytetään napakoordinaattimuunnosta g , jolle $D = g(U)$ joukolle $U = [0, a] \times [0, 2\pi]$.

Koska $g : \text{int } U \rightarrow g(\text{int } U)$ on diffeomorfismi (ks. 8.2.1), niin saadaan

$$\int_D f = \int_U (r^2)^s \cdot r \, d(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^{2s+1} \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{s+1} a^{2s+2}.$$

Tämä antaa esimerkiksi tapauksissa $s = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ vastaavasti

$$\frac{\pi a^4}{2}, \quad \frac{2\pi}{3} a^3 \quad \text{ja} \quad \frac{2\pi}{5} a^5.$$

8.2.2. Pallokoordinaattikuvaus. Pallokoordinaattikuvaukselle

$$g :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$g(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi),$$

voidaan myös laskea Jacobin determinantti

$$J_g = \det \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \cos \phi & -r \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi & 0 & r \cos \phi \end{bmatrix} = r^2 \cos \phi.$$

Pallokoordinaattikuvaus on joukossa $U =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ jatkuvasti differentioituva injektio, joten

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\},$$

$$g(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi),$$

on diffeomorfismi.

8.5. Esimerkki. Perinteinen kaava kolmiulotteisen pallon tilavuudella saadaan integroimalla pallokoordinaattimuunnoksen avulla. Olkoon siis $D = B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$ pallo, jonka säde on R ja keskipiste origo. Integroitirajoiksi pallokoordinaattimuunnoksessa saadaan

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \text{ja} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Koska $\text{int } R$ on pallokoordinaattimuunnoksen diffeomorfisuusalueella (ks. 8.2.2), niin muuttujanvaihtolauseen avulla pallon tilavuudeksi saadaan

$$\begin{aligned} \int_D 1 d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos \phi dr d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \int_0^R r^2 dr \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

8.6. **Esimerkki.** Olkoon $B = \bar{B}(0, 1)$ suljettu yksikköpallo. Lasketaan integraali

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z).$$

Käytetään pallokoordinaattimuunnosta g , jolloin uusi integrointi suoritetaan joukon

$$R = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

suhteen. Jacobin determinantin arvo on siis $r^2 \cos \phi$. Koska $\text{int } R$ on jälleen pallokoordinaattimuunnoksen diffeomorfisuusalueella (ks. 8.2.2), niin muuttujanvaihtolauseen avulla saadaan

$$\begin{aligned} \int_B \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}} d(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cos \phi \frac{1}{\sqrt{2 + r^2}} dr d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \int_0^1 r \cdot \frac{r dr}{\sqrt{2 + r^2}} \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \left(\int_0^1 r \cdot \sqrt{2 + r^2} - \int_0^1 \sqrt{2 + r^2} dr \right) \\ &= 2\pi \cdot 2 \left\{ \sqrt{3} - \left[\int_0^1 \left(\frac{r}{2} \sqrt{2 + r^2} + \frac{2}{2} \log |r + \sqrt{2 + r^2}| \right) \right] \right\} \\ &= 4\pi \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \log(1 + \sqrt{3}) + 0 + \log \sqrt{2} \right) \\ &= 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \log(1 + \sqrt{3}) + \log \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

8.7. Esimerkki. Olkoon joukko $A \subset \mathbb{R}^3$ alue, jota rajoittavat pallot $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, joille $0 < b < a$. Lasketaan pallokoordinaattikuvauksen avulla integraali

$$\int_A \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz.$$

Integrointi suoritetaan nyt joukon

$$R = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3, b \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

suhteen.

Koska $\text{int } R$ on pallokoordinaattimuunnoksen diffeomorfiisuusalueella (ks. 8.2.2), niin muuttujanvaihtolauseen avulla saadaan

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz &= \int_b^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \cos \phi}{r^3} dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_b^a \frac{1}{r} dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \\ &= 2\pi \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) \cdot 2 = 4\pi \ln\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

9. LEBESGUEN MITTA JA INTEGRAALI

Seuraavana tavoitteena olisi määritellä jonkinlainen mitta avaruudessa \mathbb{R}^n siten, että se vastaisi luonnollista geometrista mitta ja lisäksi sen tulisi olla siirtojen ja kierrosten suhteen invariantti. Lisäksi vaaditaan, että erillisten joukkojen yhdisteen mitta on joukkojen mittojen summa. Mitan pystyisi myös unelmatilanteessa määräämään kaikille joukoille. Osoittautuu kuitenkin, että tästä vaatimuksesta täytyy luopua.

Kaikkien joukkojen kohdalla voidaan kuitenkin tutkia Lebesguen ulkomittaa, jonka ideana on peittää mitattava joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ ulkoapäin äärettömän monella yksinkertaisella joukolla.

9.1. Määritelmä (Lebesguen ulkomitta). Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguen ulkomitta on luku

$$m^*(A) = m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) : I_j \in K, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\},$$

missä $\lambda(I_j)$ on avoimen n -välin I_j geometrinen mitta ja K on avaruuden \mathbb{R}^n kaikkien avoimien n -välien ja tyhjän joukon muodostama kokoelma.

Määritellyllä Lebesguen ulkomitalla voidaan todistaa olevan useita hyödyllisiä ominaisuuksia.

9.2. Lause. *Lebesguen ulkomitalle $m_n^* : \{A : A \subset \mathbb{R}^n\} \rightarrow [0, \infty]$ pätee*

- 1) $m_n^*(\emptyset) = 0$,
- 2) *monotonisuus: jos $A \subset B$, niin $m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$,*
- 3) *subadditiivisuus: jos $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$, niin*

$$m_n^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_n^*(A_k),$$

- 4) $m_n^*({x}) = 0$ jokaiselle $x \in \mathbb{R}^n$ ja yleisemmin
- 5) *jos A on numeroituva, niin $m_n^*(A) = 0$.*

Todistus. Ks. [3, s. 9].

9.3. Esimerkki. Välin $[0, 1]$ rationaaliluvuille voidaan määrittää Lebesguen ulkomitta. Koska välin rationaalipisteiden joukko on numeroituva, on sen ulkomitta lauseen 9.2 perusteella nolla.

Seuraavana tulisi miettiä millaisille joukoille pätee, että numeroituvan monen pistevieraan joukon yhdisteen mitta on täsmälleen joukkojen mittojen summa, toisin sanoen tutkia täydellisen additiivisuuden toteutumista. Pohtimalla kysymystä päädytään Carathéodoryn ehtoon, joka määrittelee Lebesgue-mitalliset joukot.

9.4. Määritelmä (Carathéodoryn ehto). Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen jos jokaiselle $E \subset \mathbb{R}^n$ pätee

$$m_n^*(E) = m_n^*(E \cap A) + m_n^*(E \setminus A).$$

Jatkossa avaruuden \mathbb{R}^n mitallisten osajoukkojen kokoelmasta käytetään merkintää \mathcal{M}_n . Yhdistämällä Lebesgue-mitallisuus ulkomitan määritelmään saadaan määritellyä Lebesguen mitta.

9.5. **Määritelmä.** Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesguen mitta on

$$m(A) = m_n(A) = m_n^*(A),$$

jos joukko A on Lebesgue-mitallinen.

Vastaavasti kuin Lebesguen ulkomitalle voidaan myös Lebesguen mitalla todistaa olevan hyödyllisiä ominaisuuksia.

9.6. **Lause.** Määritellään joukkofunktio $m : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$ asettamalla

$$m(A) = m_n^*(A).$$

Tällöin joukkofunktio m on täysadditiivinen mitta, toisin sanoen

1) $m(\emptyset) = 0$, ja

2) jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_n$ ovat pareittain pistevieraita, niin

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Todistus. Ks. [3, s. 15].

Lebesguen mitalla on tyhjennysmenetelmään liittyen rajankäyntiominaisuus: jos mitallisten joukkojen jono (A_i) on

1) kasvava, niin

$$m\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i),$$

2) vähenevä ja $m(A_k) < \infty$ jollekin k , niin

$$m\left(\bigcap_i A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Todistus. Ks. [3, s. 16].

9.1. **Lebesguen mitan yhteys Jordan-pituuteen yksiulotteisessa avaruudessa.**

Lebesguen mitalla ja joukon Jordan-pituudella on seuraava yhteys, ks. [1]:

a) Jokaiselle rajoitetulle joukolle E on voimassa $m^*(E) \leq \bar{c}(E)$.

b) Olkoot $E \subset \mathbb{R}$ rajoitettu joukko ja K joukon E kompakti osajoukko. Tällöin $\bar{c}(K) \leq m^*(E)$.

Nämä kaksi tulosta yhdistämällä saadaan, että jokaiselle kompaktille joukolle

$K \subset \mathbb{R}$ on voimassa $\bar{c}(K) = m^*(K)$. Koska rajoitetulle joukolle E joukon reuna ∂E on kompakti joukko, päädytään tilanteeseen:

Joukko E on Jordan-mitallinen, jos ja vain jos sen reuna on nollamittainen Lebesguen mielessä. Tätä ominaisuuttahan käytettiin Jordanin joukon määrittelyyn.

9.2. Lebesguen integraali. Lebesgue lähti tarkastelemaan integrointia eri tavalla kuin Riemann ja muut edeltäjänsä. Riemann keskittyi integraalissaan lähtöjoukkoon ja sen epäjatkuvuuspisteiden määrään, kun taas Lebesgue aloitti tarkastelun maali-joukon arvoista olettaen, että niitä on äärellinen määrä. Hän siis kävi läpi jokaisen maali-joukon arvon ja etsi arvoa vastaavan lähtöjoukon, jonka ei siis tarvitse olla esimerkiksi yhtenäinen väli. Sellaisia funktioita, jotka saavat vain äärellisen määrän arvoja kutsutaan yksinkertaisiksi funktioiksi.

9.7. Määritelmä (Yksinkertainen funktio). Funktio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on yksinkertainen, jos f saa äärellisen monta arvoa ja alkukuva $f^{-1}(c) \in \mathcal{M}_n$ jokaiselle $c \in \mathbb{R}$. Tällöin merkitään $f \in \mathcal{Y}$.

Otetaan käyttöön myös merkintä

$$\mathcal{Y}^+ = \{f \in \mathcal{Y} : f(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Huomattavaa on, että Riemannin integraalin määritelmässä esiintyvät porraskäyrät ovat yksinkertaisia. Myös mitallisen joukon A karakteristinen funktio on yksinkertainen. Nyt voidaan määritellä yksinkertaisen funktion Lebesguen integraali.

9.8. Määritelmä (Lebesguen integraali). Olkoon $f \in \mathcal{Y}^+$ ja

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}(x)$$

sen normaaliesitys. Jos $E \in \mathcal{M}$, niin

$$I(f, E) = \sum_{j=1}^k a_j m(A_j \cap E)$$

on funktion f Lebesguen integraali yli joukon E .

Huomautus. Normaalityksellä tarkoitetaan funktion esittämistä muodossa

$$f(x) = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}(x),$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, missä $A_j = f^{-1}(a_j)$ funktion f arvojoukolla $\{a_1, \dots, a_k\}$.

9.9. Esimerkki. Tiedetään, että välin $[0, 1]$ rationaalilukujen Lebesguen mitta on 0 ja välin kaikkien irrationaalilukujen mitta on 1. Tutkitaan nyt Lebesguen integraalia funktiolle

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f = a_1 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_2},$$

missä $a_1 = 0$, $A_1 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ja $a_2 = 1$, $A_2 = [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Lebesguen integraaliksi yli välin $[0, 1]$ saadaan

$$I(f, [0, 1]) = a_1 \cdot m(A_1) + a_2 \cdot m(A_2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1.$$

Tästä seuraa, että Lebesguen integraalin arvo on 1. Saman funktion Riemann-integraalia ei ole edes olemassa.

9.10. Määritelmä. Olkoon $f : A \rightarrow [0, \infty]$ mitallinen. Tällöin funktion Lebesgue-integraali yli joukon A on

$$\int_A f \, dm = \int_A f \, dx = \sup\{I(u, A) : u \in \mathcal{Y}^+, u \leq f \text{ joukossa } A\}.$$

Huomautus. Rajoitetulle Jordan-joukolla A on

$$c(A) = \int_A 1 = \int_A 1 \, dm = m(A).$$

Lebesguen integraalin määritelmää voidaan nyt laajentaa funktioihin, jotka saavat muitakin kuin positiivisia arvoja. Tämä mahdollistuu tarkastelemalla funktion positiivi- ja negatiiviosia. Määritellään ensin mitä tarkoitetaan funktion positiivi- ja negatiiviosilla.

9.11. Määritelmä. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ positiiviosa on

$$f^+ : A \rightarrow [0, \infty[: x \mapsto \max\{f(x), 0\}$$

ja negatiiviosa

$$f^- : A \rightarrow [0, \infty[: x \mapsto \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\}.$$

Nyt voidaan määritellä funktion Lebesguen integraali positiivi- ja negatiiviosien avulla.

9.12. **Määritelmä.** Olkoon $A \in \mathcal{M}$ ja $f : A \rightarrow [0, \infty]$ mitallinen. Jos

$$\int_A f^+ dm < \infty \quad \text{tai} \quad \int_A f^- dm < \infty,$$

niin funktion Lebesguen integraali yli joukon A on

$$\int_A f dm = \int_A f^+ dm - \int_A f^- dm.$$

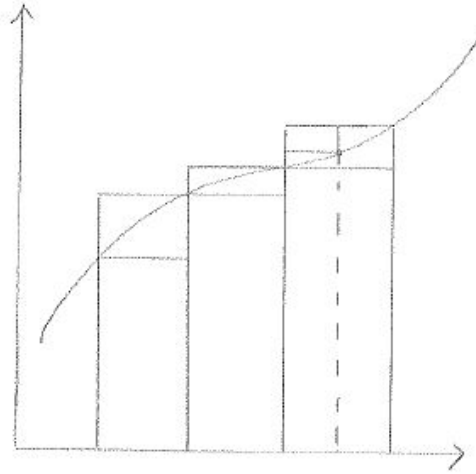
Funktiota sanotaan integroituvaksi, mikäli sen integraali on äärellinen.

Huomautus. Muillekin kuin integroituville funktioille voidaan siis muodostaa integraali, kunhan toinen funktion positiivi- tai negatiiviosan integraaleista on äärellinen.

10. EHDOTUS LUKIO-OPETUKSEEN: INTEGRAALIEN ARVIOIMINEN NUMEERISILLA MENETELMILLÄ

Lukiomatematiikan syventävillä kursseilla tutustutaan integrointiin erilaisilla numeerisilla menetelmillä. Nämä numeeriset menetelmät antavat arvioita käyrän alle jäävän alueen pinta-alasta. Pinta-alalle saadaan arvio laskemalla yhteen suorakulmioiden tai puolisuunnikkaiden pinta-aloja. Yhdistämällä nämä kaksi eri tapaa päädytään Simpsonin sääntöön, joka antaa yleensä menetelmistä parhaan arvion pinta-alasta. Lisäksi mainittakoon esimerkkinä uusista menetelmistä integraalien numeeriseen laskemiseen tarkoitettut erilaiset tietokoneohjelmat. Esimerkiksi koulumaailmassa käytössä oleva Geogebra-ohjelma antaa mahdollisuuden havainnollistaa opetuksessa sitä kuinka nopeasti välin jakopisteiden määrän kasvattaminen myös nopeasti tarkentaa arvioita pinta-aloille.

10.1. **Keskipistemenetelmä.** Lähdetään liikkeelle siis arvioimalla käyrän alle jäävää pinta-alaa suorakulmioilla. Jos funktio on kasvava annetulla välillä, niin valitsemalla suorakulmion korkeus jakovälin alku- tai loppupisteen perusteella saadaan pinta-alalle arvio vastaavasti ala- tai yläsummana muodostuneista suorakulmioista, kuva 10.



KUVA 10

Arviota voidaan parantaa valitsemalla jakoväliltä sen keskipiste, jolloin syntyvien suorakulmioiden yläreunat vastaavat vieläkin paremmin funktion graafia.

10.1. **Esimerkki.** Keskipistemenetelmällä voidaan laskea arvio yksikköympyrän pinta-alalle arvioimalla ympyrän neljänneksen

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, x \geq 0\}$$

pinta-alaa neljällä suorakulmiolla. Suorakulmioiden korkeus määräytyy keskipistemenetelmällä neljän jakovälin keskipisteiden $x_1 = 0,125$, $x_2 = 0,375$, $x_3 = 0,625$ ja $x_4 = 0,875$ antamien arvojen mukaan. Neljänneksen pinta-alaksi saadaan

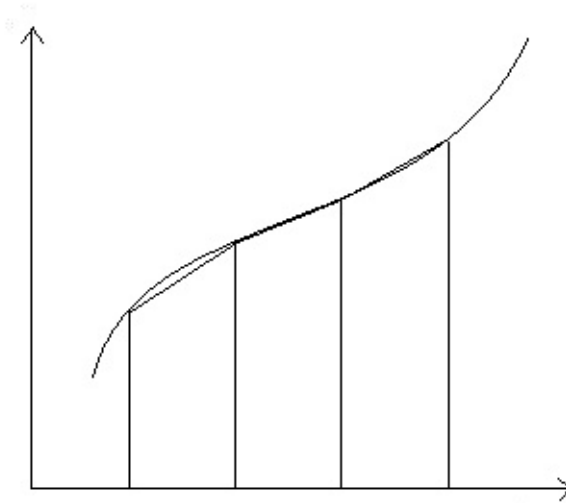
$$\begin{aligned} A_K(Y) &= 0,25(\sqrt{1 - 0,125^2} + \sqrt{1 - 0,375^2} + \sqrt{1 - 0,625^2} + \sqrt{1 - 0,875^2}) \\ &= 0,795982. \end{aligned}$$

Saatua arvoa voidaan verrata oikeaan yksikköympyrän neljänneksen alaan

$$A = \frac{\pi}{4} = 0,785398\dots,$$

jolloin huomataan keskipistemenetelmän antavan vain sadasosan verran liian suuren arvion pinta-alasta.

10.2. **Puolisuunnikasmenetelmä.** Yleensä suorakulmioita parempi arvio pinta-alalle saadaan korvaamalla suorakulmiot puolisuunnikkailla, jotka muodostuvat kun jakovälien päätepistearvot yhdistetään janoilla, kuva 11.



KUVA 11

Jos d on jakovälin pituus ja y_1 ja y_2 ovat funktion arvot jakovälin päätepisteissä, niin puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot d.$$

10.2. **Esimerkki.** Puolisuunnikasmenetelmä antaa ympyräneljänneksen pinta-alalle aina liian pienen arvion, koska muodostetut puolisuunnikkaat jäävät aina käyrän alapuolelle vaikka jakoa tihennettäisiinkin. Neljällä jakovälillä saadaan pinta-alan arvioksi

$$A_P(Y) = 0,25 \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 0,25^2}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{1 - 0,75^2} + 0}{2} \right) = 0,748927.$$

Puolisuunnikasmenetelmä tuottaa siis tässä tapauksessa neljä sadasosaa todellista liian pienen arvon.

10.3. Simpsonin sääntö. Yhdistämällä keskipistemenetelmä puolisuunnikkamene-
telmän kanssa painotettuna keskiarvona päädytään Simpsonin sääntöön. Puolisuun-
nikkaan pinta-ala otetaan huomioon kertoimella $\frac{1}{3}$ ja keskipistemenetelmän suorakul-
mio kertoimella $\frac{2}{3}$. Menetelmä on nimetty englantilaisen Thomas Simpsonin (1710-
1761) mukaan.

Johdetaan Simpsonin sääntö funktion kuvaajan ja x -akselin välillä $[a, b]$ rajaaman
alueen pinta-alalle. Sääntö vaatii, että jakovälejä on parillinen määrä, joten helpoin-
ta on lähteä liikkeelle soveltamalla menetelmiä koko välillä $[a, b]$. Merkitään funktion
arvoja välien päätepisteissä y_0 ja y_2 . Keskipistemenetelmän tarvitsemaa arvoa mer-
kitään y_1 . Jakovälejä pituudeltaan d on siis kaksi. Yhdistämällä kahdella eri taval-
la pinta-alalle lasketut arviot painotettuna keskiarvona saadaan Simpsonin säännön
mukaiseksi pinta-alaksi

$$(10.1) \quad A_{S_2} = \frac{1}{3}A_P + \frac{2}{3}A_K = \frac{1}{3} \cdot \frac{y_0 + y_2}{2} \cdot 2d + \frac{2}{3} \cdot 2d y_1 = \frac{d}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Vastaavasti neljän jakovälin tilanteessa kahdella ensimmäisellä ja kahdella viimeisel-
lä jakovälillä voidaan kummallakin erikseen soveltaa kaavaa (10.1). Neljän jakovälin
tilanteessa pinta-alaksi saadaan

$$(10.2) \quad A_{S_4} = \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{d}{3} \cdot (y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Kaavassa olevien jakopisteiden arvojen kertoimien voidaan huomata noudattavan
tiettyä kaavaa, joten jos jakoa halutaan tihentää tällöin myös Simpsonin säännön
johtaminen on helppoa.

10.3. Esimerkki. Simpsonin säännöllä saadaan myös arvio ympyräneljänneksen
pinta-alalle.

Neljällä jakovälillä pinta-alaksi saadaan

$$A_{S_4}(Y) = \frac{0,25}{3} \left(1 + 4\sqrt{1 - 0,25^2} + 2\sqrt{1 - 0,5^2} + 4\sqrt{1 - 0,75^2} + 0 \right) = 0,770898.$$

Kahdeksalla jakovälillä saadaan entistä parempi arvio

$$\begin{aligned} A_{S_8}(Y) &= \frac{0,125}{3} \left(1 + 4\sqrt{1 - 0,125^2} + 2\sqrt{1 - 0,25^2} + \dots + 4\sqrt{1 - 0,875^2} + 0 \right) \\ &= 0,780297. \end{aligned}$$

Neljällä jakovälillä päästään siis sadasosan päähän oikeasta arvosta kun taas kahdeksalla välillä päästään jo tuhannesosien tarkkuuteen.

10.4. Esimerkki. Lasketaan Simpsonin säännöllä käyrän $y = 2^x$ ja x -akselin välillä $[1, 3]$ rajaaman alueen pinta-ala kahdella ja neljällä jakovälillä ja verrataan sitä suoraan integroimalla saatuun arvoon.

Kahdella jakovälillä jakopisteet ovat siis $x_0 = 1, x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$. Jakovälin pituus on $d = 1$. Pinta-alaksi kaavalla (10.1) saadaan

$$\begin{aligned} A_{S_2} &= \frac{d}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{3}(2^1 + 4 \cdot 2^2 + 2^3) \\ &\approx 8,66666. \end{aligned}$$

Neljällä jakovälillä jakopisteet ovat $x_0 = 1, x_1 = 1,5, x_2 = 2, x_3 = 2,5$ ja $x_4 = 3$. Jakovälin pituus on $d = 0,5$. Sijoittamalla tiedot kaavaan (10.2) saadaan

$$\begin{aligned} A_{S_4} &= \frac{d}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &= \frac{0,5}{3} \cdot (2^1 + 4 \cdot 2^{1,5} + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^{2,5} + 2^3) \\ &\approx 8,65685. \end{aligned}$$

Suoraan integroimalla saadaan

$$\int_1^3 2^x dx = \int_1^3 e^{x \ln 2} dx = \left/ \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x = \frac{6}{\ln 2} \approx 8,65617. \right.$$

Verrattaessa tuloksia huomataan, että jo neljällä jakovälillä päästään kolmen desimaalin osalta oikeaan tulokseen.

10.5. Esimerkki. Lasketaan funktion $f(x) = x^2 \cdot \sin x$ kuvaajan ja x -akselin välillä $[0, \pi]$ rajaaman alueen pinta-ala Simpsonin säännöllä. Verrataan neljällä ja kahdeksalla osavälillä saatuja tuloksia kaksi osittaisintegroitua vaativan integraalin antamaan arvoon

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4 \approx 5,869604.$$

Jaettaessa integroimisväli neljään osaväliin tulee osavälin pituudeksi siis $d = \frac{\pi}{4}$, ja

Simpsonin säännöllä (10.2) pinta-alaksi saadaan

$$A_{S4} = \frac{\pi}{12} \left(0 + 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 \sin \frac{3\pi}{4} \right) \approx 5,85958.$$

Tulos poikkeaa integroinnin tuottamasta arvosta sadasosan verran.

Kahdeksalla osavälillä arviota saadaan tarkennettua entisestään. Nyt jakovälin pituuden ollessa $d = \frac{\pi}{8}$, pinta-alaksi saadaan

$$A_{S8} = \frac{\pi}{24} \left(4 \cdot \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 \sin \frac{\pi}{8} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin \frac{\pi}{4} + \dots + 4 \cdot \left(\frac{7\pi}{8}\right)^2 \sin \frac{7\pi}{8} \right) \approx 5,869246.$$

Kahdeksan jakovälin arvio antaa jo kolmen desimaalin osalta oikean tuloksen.

VIITTEET

- [1] Apostol, T.M.: *Mathematical analysis, A modern approach to advanced calculus (first ed.)*. -Addison-Wesley publishing company, Inc., 1963.
- [2] Boyer, C.B.: *Tieteiden kuningatar, matematiikan historia*. -WS Bookwell Oy, Juva, 2000.
- [3] Kilpeläinen, T.: *Mitta- ja integraaliteoria*. -luentomoniste 2003-2004.
- [4] Marsden, J.E., Tromba, A.J.: *Vector calculus (4th ed.)*. -W.H.Freeman and company, USA, 1996.
- [5] Purmonen, V.T.: *Integraalilaskentaa 1*. -Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 53, 2010.
- [6] Suomela, P.: *Matematiikan historia*. -Jyväskylän yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen luentomoniste 5, 2006.
- [7] Williamson, R.E., R.H. Crowell: *Calculus of vector functions (2nd ed.)*. -Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.