

Fuchsin ryhmän perusalue

Matti Gröhn

Matematiikan pro gradu

Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011

Tiivistelmä: Gröhn, M. 2011, *Fuchsin ryhmän perusalue*, Jyväskylän yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, matematiikan pro gradu -tutkielma, 37 sivua.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Fuchsin ryhmän perusalueita Poincarén puolitaso- ja kiekkomalleissa. Epäjatkuva aliryhmä Möbius-muunnoksia on Fuchsin ryhmä, jos yksikkökiekkokäki tai vastaavasti ylempi kompleksinen puolitaso kuvautuu itselleen kaikilla aliryhmän Möbius-muunnoksilla. Osoittautuu, että Fuchsin ryhmän Möbius-muunnokset ovat puolitasomallissa muotoa

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Fuchsin ryhmän perusalue määritellään puolitasomallissa ylempään kompleksisen puolitason epätyhjäksi ja suljetuksi osajoukoksi, jonka kuvat täyttävät ylempään puolitason ja jonka kuvat ovat erilliset mahdollista yhteistä reunaa lukuunottamatta. Perusalueen jokainen sivu on ekvivalentti täsmälleen yhden eri sivun kanssa Fuchsin ryhmän Möbius-muunnosten suhteen. Ei-identtistä Möbius-muunnosta, joka kuvaa perusalueen sivun toiseksi sivuksi, kutsutaan sivunvaihtomuunnokseksi.

Fuchsin ryhmän Dirichlet'n alue pisteen $p \in \mathbb{H}$ suhteen on joukko, jossa hyperbolinen etäisyys pisteeseen p on pienempää tai yhtä suurta kuin mihinkään pisteen p kuvaan. Dirichlet'n alue on Fuchsin ryhmän yhtenäinen perusalue.

Fuchsin ryhmää kutsutaan äärellisviritteiseksi, jos äärellinen määrä Möbius-muunnoksia generoi sen, ja geometrisesti äärelliseksi, jos sen perusalueella on äärellisen monta sivua. Tutkielman päätulos on, että Fuchsin ryhmä on äärellisviritteinen täsmälleen silloin, kun se on geometrisesti äärellinen. Päätuloksen osoittamiseksi todistetaan, että Fuchsin ryhmän sivunvaihtomuunnokset generoivat sen.

Tutkielmassa annetaan havainnollisia esimerkkejä Fuchsin ryhmistä. Erityisesti tutustutaan modulaariryhmään

$$\left\{ T \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

ja sen perusalueen ominaisuuksiin.

SISÄLTÖ

1. Johdanto	1
2. Kompleksitason topologia ja Möbius-muunnokset	2
3. Fuchsin ryhmät	15
4. Perus- ja Dirichlet'n alueet	20
5. Geometrisesti äärelliset Fuchsin ryhmät	28
Viitteet	37

1. JOHDANTO

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Fuchsin ryhmän perusalueita Poincarén puolitaso- ja kiekkomalleissa. Toisessa kappaleessa määritellään tarvittavat metriset rakenteet, Möbius-muunnos ja isometrinen ympyrä. Kolmannessa ja neljännessä kappaleessa määritellään epäjatkuva aliryhmä ja Fuchsin ryhmä sekä Fuchsin ryhmän perus- ja Dirichlet'n alue. Osoittautuu, että perusalueen jokainen sivu on ekvivalentti täsmälleen yhden eri sivun kanssa Fuchsin ryhmän Möbius-muunnosten suhteen. Ei-identtistä Möbius-muunnosta, joka kuvaa perusalueen sivun toiseksi sivuksi, kutsutaan sivunvaihtomuunnokseksi.

Viidennessä kappaleessa todistetaan tutkielman päätulos. Fuchsin ryhmää kutsutaan äärellisviritteiseksi, jos äärellinen määrä Möbius-muunnoksia generoi sen, ja geometrisesti äärelliseksi, jos sen perusalueella on äärellisen monta sivua. Tutkielman päätulos on, että Fuchsin ryhmä on äärellisviritteinen täsmälleen silloin, kun se on geometrisesti äärellinen. Päätuloksen osoittamiseksi todistetaan, että Fuchsin ryhmän sivunvaihtomuunnokset generoivat sen.

Historiallisesti ajatellen kompleksiluvut eivät ole tärkeyteensä suhteutettuna kovin vanha keksintö. Ensimmäinen viite imaginaariyksikön i olemassaolosta on 800-luvun Intiasta. Matemaatikko Mahavira huomasi, ettei negatiivinen luku ollut minkään tunnetun luvun neliö, joten sillä ei voinut olla neliöjuurta [Smith, s.162]. Kompleksiluvut keksittiin uudelleen ja niitä alettiin tutkimaan tarkemmin 1600-luvun lopulla Euroopassa. Sir Isaac Newtonin kollega R. Cotes kehitti kaavan $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ja A. de Moivre kaavan $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ [Burn, s.33]. Kompleksilukujen esittämistä kompleksitasossa tutkivat Euroopassa C. Wessel, C.F. Gauss ja J.R. Argand 18. ja 19. vuosisadan taitteessa. Todistuksen tärkeimmälle kompleksilukujen dilemmalle, eli polynomien kompleksijuurien olemassaololle, esitti C.F. Gauss väitöskirjassaan vuonna 1799. Algebran peruslauseeksi nimetty tulos kertoi, että jokaiselle ei-vakiolle kompleksiselle polynomille oli olemassa kompleksijuuri.

Möbius-muunnoksen kaavan esitti ensimmäisenä L. Euler vuonna 1777 [Burn, s.52]. H. Poincaré tutki Fuchsin ryhmiä vuonna 1882 julkaisussaan "Théorie des groupes Fuchsiennes" [Hazewinkel, s.123]. Poincaré nimesi tutkittavat aliryhmät Fuchsin ryhmiksi Lazarus Fuchsin mukaan, jonka julkaisu "Über eine Klasse von Funktionen mehrerer Variablen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen" oli inspiraation lähde Poincaréille. Fuchsin ryhmät olivat perusta automorfisten funktioiden teorialle, jota Poincaré ja F. Klein tutkivat 1880-, 1890- ja 1900-luvuilla [Klein, s.325-326].

2. KOMPLEKSITASON TOPOLOGIA JA MÖBIUS-MUUNNOKSET

I. Kompleksitason topologia. Kompleksiluvut $z = (a, b)$ ovat kompleksitason $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ pisteitä, jossa kompleksiluvun reaaliosa on $\operatorname{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$ ja imaginaariosa $\operatorname{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$. Kompleksiluvun $z = a + bi$ konjugaatti on kompleksiluku $\bar{z} = a - bi$. Kompleksitason topologian indusoi euklidinen metriikka. Pisteiden z_1 ja z_2 välinen etäisyys on siis

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}.$$

Laajennetulla kompleksitasolla $\widehat{\mathbb{C}}$ tarkoitetaan kompleksitasoa, johon on lisätty yksi kompleksitasoon kuulumaton piste, jota merkitään symbolilla ∞ . Siis $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Laajennetun kompleksitason pisteet voidaan projisoida stereografisella projektiolla bijektiivisesti Riemannin palloon. Riemannin pallolla topologian indusoi metriikka [Colombo, s.7]

$$\widehat{d}(z_1, z_2) = \frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Äärettömyyspisteen etäisyys kompleksitason pisteeseen z_2 on [Colombo, s.11]

$$\widehat{d}(\infty, z_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

Joukko $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ on siis avoin, jos jokaiselle pisteelle $z \in A$ on olemassa reaaliluku $r > 0$, jolla avoin kiekko $\{w \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \widehat{d}(z, w) < r\} \subset A$.

II. Hyperbolinen metriikka. Merkitään ylempää kompleksista puolitasoa $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ symbolilla \mathbb{H} ja sen sulkeumaa $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ symbolilla $\widehat{\mathbb{H}}$. Olkoon puolitasossa \mathbb{H} hyperbolinen metriikka

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

Puolitaso \mathbb{H} yhdistettynä metriikkaan ds on hyperbolisen geometrian Poincarén puolitasomalli [Katok, s.1].

Määritelmä 2.1. Olkoon $I = [0, 1]$ ja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ paloittain differentioituva polku

$$\gamma(t) := \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{H} \mid t \in I\}.$$

Polun γ hyperbolinen pituus on siten puolitasomallissa

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt.$$

Määritelmä 2.2. Olkoon $z, w \in \mathbb{H}$. Pisteiden z ja w välinen hyperbolinen etäisyys on puolitasomallissa [Katok, s.2]

$$\rho(z, w) := \inf h(\gamma),$$

jossa infimum otetaan pisteitä z ja w yhdistävien paloittain differentioituvien käyrien $\gamma \subset \mathbb{H}$ yli. Etäisyyden kaava on [Katok, s.6]

$$\rho(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}.$$

Huomautus 2.3. Hyperbolinen etäisyys on metriikka [Katok, s.2].

Toinen hyperbolisen geometrian malli on Poincare'n kiekkomalli. Siinä geometria määritellään avoimessa yksikkökiekossa $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Yksikkökiekon \mathbb{U} reuna on yksikköympyrä, jota merkitään symbolilla Σ . Yksikkökiekon (euklidinen) sulkeuma on $\widehat{\mathbb{U}} := \mathbb{U} \cup \Sigma$. Bijektiot $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{U}$ ja $f^{-1} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$

$$f(z) = \frac{iz + 1}{z + i}, \quad f^{-1}(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}$$

yhdistävät puolitaso- ja kiekkomallin toisiinsa [Katok, s.7]. Tässä työssä käytetään puolitasomallia ellei toisin mainita.

Määritelmä 2.4. Pisteiden $z, w \in \mathbb{U}$ välinen hyperbolinen etäisyys on kiekkomallissa [Lehner, s.80]

$$\rho^*(z, w) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2}}{1 - \frac{w_2 - w_1}{1 - \bar{w}_1 w_2}}.$$

Origin ja pisteen $ae^{i\theta}$, $0 < a < 1$, välinen etäisyys on

$$\rho^*(0, ae^{i\theta}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + a}{1 - a}.$$

III. **Möbius-muunnokset.** Tässä työssä keskitytään tietyt ehdot täyttäviin kompleksitason kuvauksiin, ns. Möbius-muunnoksiin.

Määritelmä 2.5. Olkoot a, b, c ja $d \in \mathbb{C}$ vakioita, jotka täyttävät determinanttiehdon $ad - bc \neq 0$. Tällöin kuvausta $T(z) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$

$$T(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{jos } z \neq \infty \text{ ja } z \neq -\frac{d}{c}, \text{ mikäli } c \neq 0 \\ \frac{a}{c} & \text{jos } (c \neq 0 \text{ ja } z = \infty) \\ \infty & \text{jos } (c = 0 \text{ ja } z = -\frac{d}{c}) \text{ tai } (c = 0 \text{ ja } z = \infty) \end{cases}$$

kutsutaan Möbius-muunnokseksi.

Huomautus 2.6.

- (1) Tästä oletetaan, että muunnoksen $T(z)$ determinantti $ad - bc = 1$. Jakamalla jokainen vakio a, b, c ja d kompleksiluvulla $\sqrt{ad - bc}$, joka on determinanttiehdon mukaisesti nollasta poikkeava, huomataan, että

$$\frac{a}{\sqrt{ad - bc}} \frac{d}{\sqrt{ad - bc}} - \frac{b}{\sqrt{ad - bc}} \frac{c}{\sqrt{ad - bc}} = \frac{ad - bc}{(\sqrt{ad - bc})^2} = 1.$$

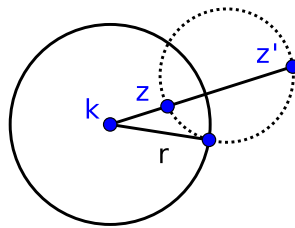
- (2) Möbius-muunnoksen $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ derivaatta $\frac{d}{dz}T(z)$ on

$$\begin{cases} \frac{1}{(cz+d)^2} & \text{jos } z \neq \infty \text{ ja } z \neq -\frac{d}{c}, \text{ mikäli } c \neq 0 \\ 0 & \text{jos } (c \neq 0 \text{ ja } z = \infty) \\ \text{ei määritelty} & \text{jos } (c = 0 \text{ ja } z = -\frac{d}{c}) \text{ tai } (c = 0 \text{ ja } z = \infty). \end{cases}$$

- (3) Möbius-muunnos kuvaa ympyrän tai suoran ympyräksi tai suoraksi [Ford, s.9].
- (4) Möbius-muunnos on (napoja lukuunottamatta) konformikuvaus eli se säilyttää kulmien suunnat ja suuruudet [Ford, s.2], [Lehto, s.25].
- (5) Möbius-muunnos T on bijektio $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, jonka käänteiskuvaus $T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$ on myös Möbius-muunnos [Ford, s.2].

- (6) Möbius-muunnokset muodostavat ryhmän \mathcal{M} laskutoimituksena kuvausten yhdistäminen.

Esimerkki 2.7. Erään tärkeän kuvaustyyppin karakterisoi inversio ympyrän suhteen. Inversio $z'(z)$ kuvaa inversiorympyrän sisällä olevat pisteet inversiorympyrän ulkopuolelle ja ulkopuolella olevat pisteet sisäpuolelle. Inversio-muunnettujen pisteiden kautta piirretty mikä tahansa ympyrä on aina kohtisuorassa inversiorympyrää kohden. Merkitään inversiorympyrän keskipistettä k ja sädettä r . Tällöin inversio määritellään yhtälönä $(z' - k)(\bar{z} - \bar{k}) = r^2$. Inversio ei ole Möbius-muunnos, koska se on antikonforminen (eli kulman suuruus säilyy, mutta suunta ei) [Ford, s.10-12].



KUVA 1. Inversiomuunnos

Huomautus 2.8. Olkoon $z \in \mathbb{H}$ ja $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{U}$, $f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$ puolitaso- ja kiekkomalleja yhdistävä Möbius-muunnos. Huomataan, että z ja $\bar{z} \in \mathbb{C}$ ovat inversiopisteitä reaaliakselin suhteen. Koska f kuvaa reaaliakselin yksikköympyräksi Σ , niin pisteet $f(z) \in \mathbb{U}$ ja $f(\bar{z}) \in \mathbb{C}$ ovat inversiopisteitä yksikköympyrän Σ suhteen [Ford, s.11].

Möbius-muunnos pitää tietyn määrän pisteitä muuttumattomana muunnoksessa. Osoittautuu, että identtinen muunnos on ainoa Möbius-muunnos, jolla on useampi kuin kaksi kiintopistettä.

Määritelmä 2.9. Pistettä $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ kutsutaan Möbius-muunnoksen T kiintopisteeksi, jos $T(z) = z$.

Lause 2.10. Jokaisella ei-identtisellä Möbius-muunnoksella on joko yksi tai kaksi kiintopistettä.

Todistus. Möbius-muunnoksen kiintopisteet saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Olkoon aluksi $c \neq 0$. Kiintopisteitä voi löytyä ainoastaan joukosta $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}, \infty\}$. Kiintopisteitä ovat siis

$$z_{1,2} = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c} \quad \left| \begin{array}{l} ad - bc = 1 \\ bc = ad - 1 \end{array} \right.$$

$$= \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Jos $a + d = \pm 2$, niin kiintopisteitä on yksi, $z_1 = \frac{a-d}{2c}$, ja muutoin kaksi. Olkoon sitten $c = 0$. Koska $c = 0$, niin ∞ on yksi kiintopiste. Jos $a = d$,

niin determinanttiehdon $ad = 1$ nojalla $|a| = |d| = 1$. Koska $ad = 1$ ja $|a| = |d| = 1$, niin $a = d = \pm 1$. Näin ollen Möbius-muunnos on siirto $T(z) = z \mp b$, jonka ainoa kiintopiste on ∞ . Jos $a \neq d$, niin kiintopisteitä ovat

$$z_1 = \frac{b}{d-a}, z_2 = \infty. \quad \square$$

Möbius-muunnokset jaotellaan neljään kategoriaan jäljen $\text{Tr}(T) = a + d$ perusteella [Katok, s.23].

Määritelmä 2.11. Ei-identtinen Möbius-muunnos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, on

$$\begin{cases} \text{hyperbolinen,} & \text{jos } \text{Tr}(T) \in \mathbb{R} \text{ ja } |\text{Tr}(T)| > 2 \\ \text{parabolinen,} & \text{jos } \text{Tr}(T) \in \mathbb{R} \text{ ja } |\text{Tr}(T)| = 2 \\ \text{elliptinen,} & \text{jos } \text{Tr}(T) \in \mathbb{R} \text{ ja } |\text{Tr}(T)| < 2 \\ \text{loxodrominen,} & \text{jos } \text{Tr}(T) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lemma 2.12. *Olkoot T ja S Möbius-muunnoksia. Möbius-muunnos T ja sen konjugaatti $S^{-1}TS$ ovat samaa kategoriaa.*

Todistus. Olkoot $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, ja $S(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$, $a'd' - b'c' = 1$. Tällöin $S^{-1}(z) = \frac{-d'z+b'}{c'z-a'}$. Riittää osoittaa, että Möbius-muunnoksen T ja sen konjugaatin $S^{-1}TS$ jäljet ovat (etumerkkiä lukuunottamatta) samat. Koska

$$\begin{aligned} S^{-1}TS(z) &= \frac{-d' \left(\frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} \right) + b'}{c' \left(\frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} \right) - a'} \\ &= \frac{(-aa'd' - bc'd' + a'b'c + b'c'd)z + (-ab'd' - bd'd' + b'b'c + b'dd')}{(aa'c' + bc'c' - a'a'c - a'c'd)z + (ab'c' + bc'd' - a'b'c - a'dd')} \end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(S^{-1}TS)| &= | -aa'd' - bc'd' + a'b'c + b'c'd + ab'c' + bc'd' - a'b'c - a'dd' | \\ &= |a(-a'd' + c'd') + d(-a'd' + c'd')| \\ &= |a + d| \\ &= |\text{Tr}(T)| \end{aligned} \quad \square$$

Seuraus 2.13. *Olkoon T ei-identtinen Möbius-muunnos. Jos T on parabolinen, niin kiintopisteitä on yksi. Jos T on hyperbolinen, elliptinen tai loxodrominen, niin kiintopisteitä on kaksi.*

Todistus. Lauseen 2.10 todistus. □

Seuraus 2.14. *Jos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ on ei-identtinen Möbius-muunnos, niin parabolinen kiintopiste kuuluu joukkoon $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, hyperboliset kiintopisteet joukkoon $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja elliptiset kiintopisteet ovat kompleksikonjugaatit eli täsmälleen yksi kiintopiste kuuluu puolitasoon \mathbb{H} .*

Todistus. Lauseen 2.10 todistus. □

Lause 2.15. *Jos $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ ja $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ ovat kolme keskenään eri pistettä, niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen Möbius-muunnos T , että*

$$T(z_i) = w_i \text{ kaikille } i = 1, 2, 3.$$

Todistus. [Ford, s.7] Osoitetaan aluksi vaaditunlaisen Möbius-muunnoksen yksikäsitteisyys. Olkoot U ja V sellaisia Möbius-muunnoksia, että

$$\begin{aligned}U(z_1) &= w_1 = V(z_1) \\U(z_2) &= w_2 = V(z_2) \\U(z_3) &= w_3 = V(z_3).\end{aligned}$$

Tällöin Möbius-muunnoksella $W := U^{-1} \circ V$ on kolme kiintopistettä

$$\begin{aligned}W(z_1) &= U^{-1} \circ V(z_1) = U^{-1}(w_1) = z_1 \\W(z_2) &= U^{-1} \circ V(z_2) = U^{-1}(w_2) = z_2 \\W(z_3) &= U^{-1} \circ V(z_3) = U^{-1}(w_3) = z_3.\end{aligned}$$

Lauseen 2.10 mukaan Möbius-muunnoksen W on siis oltava identtinen Möbius-muunnos eli $W = U^{-1} \circ V = Id$, josta $U = V$. Siis Möbius-muunnos on yksikäsitteinen.

Todistetaan seuraavaksi vaaditunlaisen Möbius-muunnoksen olemassaolo. Jos $z_i, w_i \neq \infty$, $i = 1, 2, 3$, niin määritellään kuvaukset

$$S(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \quad \text{ja} \quad R(z) = \frac{z - w_1}{z - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1},$$

jotka ovat Möbius-muunnoksia ja joille pätee

$$\begin{aligned}S(z_1) &= 0 & R(w_1) &= 0 \\S(z_2) &= \infty & R(w_2) &= \infty \\S(z_3) &= 1 & R(w_3) &= 1.\end{aligned}$$

Jos

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \infty, \text{ niin asetetaan } S(z) = \frac{z_3 - z_2}{z - z_2} \\ z_2 = \infty, \text{ niin asetetaan } S(z) = \frac{z - z_1}{z_3 - z_1} \\ z_3 = \infty, \text{ niin asetetaan } S(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \\ w_1 = \infty, \text{ niin asetetaan } R(z) = \frac{w_3 - w_2}{z - w_2} \\ w_2 = \infty, \text{ niin asetetaan } R(z) = \frac{z - w_1}{w_3 - w_1} \\ w_3 = \infty, \text{ niin asetetaan } R(z) = \frac{z - w_1}{z - w_2}. \end{array} \right.$$

Määritellään Möbius-muunnos $W := R^{-1} \circ S$, jolle

$$\begin{aligned}W(z_1) &= R^{-1} \circ S(z_1) = R^{-1}(0) = w_1 \\W(z_2) &= R^{-1} \circ S(z_2) = R^{-1}(\infty) = w_2 \\W(z_3) &= R^{-1} \circ S(z_3) = R^{-1}(1) = w_3.\end{aligned}$$

Valitetaan $T = W$ eli on olemassa ainakin yksi vaaditunlainen Möbius-muunnos. \square

Lause 2.16. *Möbius-muunnokset, jotka säilyttävät ylemmän puolitason \mathbb{H} , ovat muotoa*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Todistus. Lauseen 2.15 nojalla riittää tutkia tilannetta, jossa pisteet $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ ja $z_3 = 1$ kuvautuvat reaaliakselille eli $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$. Lauseen 2.15 merkinnöin $T(z) = W(z) = R^{-1}S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ja

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{\left(\frac{z+1}{2z}\right) w_2(w_3 - w_1) - w_1(w_3 - w_2)}{\left(\frac{z+1}{2z}\right) (w_3 - w_1) - (w_3 - w_2)} \\ &= \frac{(w_2w_3 - 2w_1w_3 + w_1w_2)z + (w_2w_3 - w_1w_2)}{(-w_1 + 2w_2 - w_3)z + (w_3 - w_1)}, \end{aligned}$$

josta seuraa, että $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Koska

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(T(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{|cz+d|^2}(c\bar{z}+d)\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{|cz+d|^2}(ac|z|^2 + bd + bc\bar{z} + adz)\right) \\ &= \frac{1}{|cz+d|^2}(ad \cdot \operatorname{Im}(z) + bc \cdot \operatorname{Im}(\bar{z})) \\ &= \frac{1}{|cz+d|^2}(ad \cdot \operatorname{Im}(z) - bc \cdot \operatorname{Im}(z)) \\ &= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}(\operatorname{Im}(z)), \end{aligned}$$

niin ylempi puolitaso \mathbb{H} säilyy täsmälleen silloin, kun $ad - bc > 0$. Huomautuksen 2.6 kohdan (1) nojalla vaaditaan, että $ad - bc = 1$. \square

Lause 2.17. *Möbius-muunnokset, jotka säilyttävät yksikkökiekkon \mathbb{U} , ovat (kiekkomallissa) muotoa*

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

Todistus. Möbius-muunnos $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{U}$, $f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$ ja sen käänteismuunnos $f^{-1}: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$, $f^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$ yhdistävät kiekko- ja puolitasomallit. Möbius-muunnokset ovat puolitasossa \mathbb{H} muotoa $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc = 1$. Tästä seuraa, että ne ovat yksikkökiekkossa \mathbb{U} muotoa

$$\begin{aligned} fTf^{-1}(z) &= \frac{i\left(\frac{-aiz+a+bz-bi}{-ciz+c+dz-di}\right) + 1}{\left(\frac{-aiz+a+bz-bi}{-ciz+c+dz-di}\right) + i} \\ &= \frac{az + ai + biz + b - ciz + c + dz - di}{-aiz + a + bz - bi + cz + ci + diz + d} \\ &= \frac{[a + d + i(b-c)]z + [b + c + i(a-d)]}{[b + c - i(a-d)]z + [a + d - i(b-c)]} \\ &= \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}, \end{aligned}$$

josta valitaan $\alpha = \frac{a+d+i(b-c)}{2}$ ja $\beta = \frac{b+c+i(a-d)}{2}$. Triviaalin laskun kautta huomataan, että edellä mainituille kompleksiluvuille α ja β on voimassa $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. \square

Seuraus 2.18. Olkoon $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, ei-identtinen Möbius-muunnos. Jos T on parabolinen, niin sen eräs konjugaatti on siirto. Jos T on hyperbolinen, niin sen eräs konjugaatti on venytys origon suhteen. Jos T on elliptinen, niin sen eräs konjugaatti on kierto origon suhteen.

Todistus. Lemman 2.12 nojalla Möbius-muunnos T ja sen konjugaatti $S^{-1}TS$ ovat samaa kategoriaa.

Olkoon K Möbius-muunnoksen $S^{-1}TS$ kiintopisteiden joukko. Seurauksen 2.13 mukaan parabolisella Möbius-muunnoksella on yksi kiintopiste. Hyperbolisella ja elliptisellä muunnoksella on kaksi kiintopistettä. Tehdään Möbius-muunnokselle T konjugointi siten, että

$$\begin{cases} K = \{\infty\}, & \text{jos } T \text{ on parabolinen} \\ K = \{0, \infty\}, & \text{jos } T \text{ on hyperbolinen tai elliptinen.} \end{cases}$$

Olkoon T parabolinen. Koska ∞ on Möbius-muunnoksen ainoa kiintopiste, niin Lauseen 2.10 todistuksen nojalla $S^{-1}TS$ on siirto.

Olkoon T hyperbolinen tai elliptinen. Lauseen 2.10 todistus osoittaa, että ei-identtiselle Möbius-muunnokselle $S^{-1}TS = \frac{az+b}{cz+d}$ on voimassa $c = 0$, koska ∞ on kiintopiste. Koska myös 0 on kiintopiste, niin saadaan $0 = \frac{b}{d}$, josta $b = 0$ ja $d \neq 0$. Koska $ad - bc = ad = 1$, niin $d = \frac{1}{a}$. Siis $S^{-1}TS = \frac{az}{\frac{1}{a}} = a^2z = kz$ jollain $k \in \mathbb{C}$, josta saadaan $a = \sqrt{k}$.

Koska $\text{Tr}(S^{-1}TS) = a + d = \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \in \mathbb{R}$, niin $k > 0$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, jolloin $S^{-1}TS$ on venytys origon suhteen, tai $|k| = 1$, $k \in \mathbb{C}$, eli $k = e^{i\theta}$, jolloin $S^{-1}TS$ on kierto origon suhteen. Ensimmäisessä tapauksessa $S^{-1}TS$ on hyperbolinen, koska $|a + d| > 2$, ja toisessa elliptinen, koska kolmioepäyhtälön nojalla $|a + d| < 2$. \square

Lause 2.19. Möbius-muunnokset, jotka säilyttävät puolitason \mathbb{H} , ovat isometrioitu hyperbolisessa metriikassa.

Todistus. Olkoot $z, w \in \mathbb{H}$ ja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Koska T säilyttää puolitason \mathbb{H} , niin Lauseen 2.16 nojalla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Näin ollen $\overline{T(w)} = T(\bar{w})$. Koska

$$\begin{aligned} T(z) - T(w) &= \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} \\ &= \frac{(ad-bc)z - (ad-bc)w}{c^2zw + cdz + cdw + d^2} \\ &= \frac{z-w}{c^2zw + cdz + cdw + d^2}, \end{aligned}$$

ja triviaalin laskun kautta huomataan, että

$$|c^2zw + cdz + cdw + d^2| = |c^2z\bar{w} + cdz + cd\bar{w} + d^2|,$$

niin

$$\begin{aligned}
\rho(T(z), T(w)) &= \ln \frac{|T(z) - \overline{T(w)}| + |T(z) - T(w)|}{|T(z) - \overline{T(w)}| - |T(z) - T(w)|} \\
&= \ln \frac{|T(z) - T(\bar{w})| + |T(z) - T(w)|}{|T(z) - T(\bar{w})| - |T(z) - T(w)|} \\
&= \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \\
&= \rho(z, w). \quad \square
\end{aligned}$$

Huomautus 2.20. Myös Möbius-muunnokset, jotka säilyttävät yksikkökieron \mathbb{U} , ovat isometrioita hyperbolisessa metriikassa.

IV. Isometriset ympyrät. Möbius-muunnos pitää euklidiset etäisyydet vakiona joukossa, jossa Möbius-muunnoksen derivaatta on itseisarvoltaan 1.

Lause 2.21. *Möbius-muunnos* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$, *pitää euklidiset etäisyydet muuttumattomana täsmälleen joukossa* $\left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \mid |cz + d| = 1 \right\}$.

Todistus. Olkoon $z \neq -\frac{d}{c}$ ja $c \neq 0$. Etäisyydet pysyvät vakiona, kun

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dz} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \right| &= 1 \\
\Leftrightarrow \left| \frac{1}{(cz+d)^2} \right| &= 1 \\
\Leftrightarrow |(cz+d)^2| &= 1 \\
\Leftrightarrow \underbrace{|cz+d|^2}_{\geq 0} &= 1 \\
\Leftrightarrow |cz+d| &= 1. \quad \square
\end{aligned}$$

Jakamalla Lauseen 2.21 yhtälö vakiolla c huomataan, että joukko, jossa etäisyydet pysyvät muuttumattomana, on euklidinen ympyrä, jonka keskipiste on $-\frac{d}{c}$ ja säde $\frac{1}{|c|}$.

$$|cz + d| = 1 \Leftrightarrow \left| z - \left(-\frac{d}{c} \right) \right| = \frac{1}{|c|}, \quad c \neq 0$$

Tästä kumpuaa luonnollinen määritelmä Möbius-muunnoksen isometriselle (eli etäisyydet säilyttävälle) ympyrälle.

Määritelmä 2.22. Möbius-muunnoksen $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$, isometrinen ympyrä on joukko

$$\mathfrak{S}(T) := \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |cz + d| = 1 \right\}.$$

Huomautus 2.23.

- (1) Jokaisella Möbius-muunnoksella T , jolla $c \neq 0$, on yksikäsitteinen isometrinen ympyrä $\mathfrak{S}(T)$, joka määräytyy kompleksikertoimista c ja d . Isometristä ympyrää ei määritellä Möbius-muunnoksille, joilla $c = 0$.

- (2) Isometrisen ympyrän sisällä etäisyydet kasvavat Möbius-muunnoksessa, koska kun $|cz + d| < 1$, niin $\left|\frac{d}{dz}T(z)\right| > 1$. Vastaavasti isometrisen ympyrän ulkopuolella etäisyydet pienenevät, koska jos $|cz + d| > 1$, niin $\left|\frac{d}{dz}T(z)\right| < 1$.
- (3) Merkitään Möbius-muunnoksen T isometrisen ympyrän sisäpuolta $\text{int}[\mathfrak{S}(T)]$ ja ulkopuolta $\text{ext}[\mathfrak{S}(T)]$.

Osoittautuu, että Möbius-muunnoksen ja sen käänteismuunnoksen isometrisillä ympyröillä on yhteys, joka mahdollistaa perusalueen määrittämisen isometristen ympyröiden avulla. Möbius-muunnos kuvaa isometrisen ympyränsä käänteismuunnoksensa isometriseksi ympyräksi.

Lause 2.24. *Olkkoon $\mathfrak{S}(T)$ isometrinen ympyrä. Tällöin $T(\mathfrak{S}(T)) = \mathfrak{S}(T^{-1})$.*

Todistus. Olkkoon $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\}$ ja $c \neq 0$. Möbius-muunnos

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

on bijektio $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, jonka käänteismuunnos on

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Möbius-muunnoksen T isometrisen ympyrän karakterisoivat vakiot c ja d ja käänteismuunnoksen T^{-1} isometrisen ympyrän vakiot c ja a .

$$\mathfrak{S}(T) = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |cz + d| = 1 \right\}$$

$$\mathfrak{S}(T^{-1}) = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |cz - a| = 1 \right\}$$

Olkkoon $w \in \mathfrak{S}(T)$. Nyt riittää osoittaa, että käänteismuunnoksen derivaatta saa itseisarvoltaan arvon 1 täsmälleen kaikissa kuvapisteissä $T(w)$. Koska T on konformikuvaus, niin

$$\left| \frac{d}{dw} T^{-1}(T(w)) \right| = \frac{1}{\left| \frac{d}{dw} T(w) \right|} = 1. \quad \square$$

Huomautuksen 2.23 ja Lauseen 2.24 avulla huomataan, miten isometrisen ympyrän sisus ja ulkopuoli kuvautuvat suhteessa käänteismuunnoksen isometriseen ympyrään.

Lause 2.25. *Möbius-muunnos kuvaa isometrisen ympyränsä*

- (1) *sisuksen käänteismuunnoksensa isometrisen ympyrän ulkopuoleksi.*
- (2) *ulkopuolen käänteismuunnoksensa isometrisen ympyrän sisukseksi.*

Todistus.

- (1) Olkkoon $w \in \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \mid |cz + d| < 1 \right\}$ ja $c \neq 0$. Tällöin

$$|cT(w) - a| = \left| c \frac{aw + b}{cw + d} - a \right| = \left| \frac{1}{cz + d} \right| = \underbrace{|cz + d|^{-1}}_{<1} > 1.$$

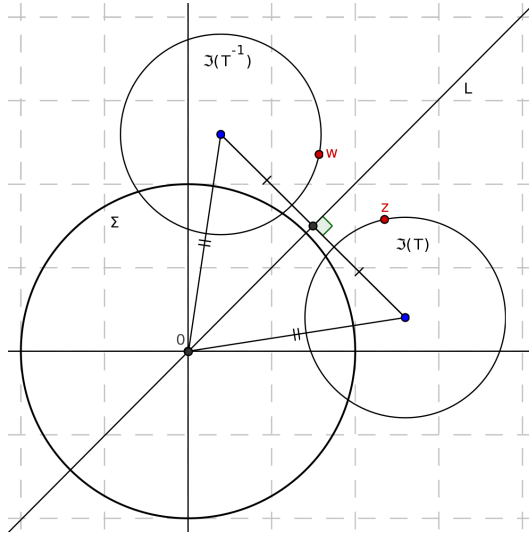
- (2) Olkkoon $w \in \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |cz + d| > 1 \right\}$ ja $c \neq 0$. Tällöin vastaavasti

$$|cT(w) - a| = \underbrace{|cz + d|^{-1}}_{>1} < 1.$$

□

Lause 2.26. Olkoon $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$, $|\bar{\alpha}|^2 - |\beta|^2 = 1$, ja L pisteiden $-\frac{\bar{\alpha}}{\beta}$ ja $\frac{\alpha}{\beta}$ välisen euklidisen janan keskinormaali. Möbius-muunnos T kiekkomallissa on inversio isometrisen ympyrän $\Im(T)$ suhteen yhdistettynä peilaukseen keskinormaalin L suhteen.

Todistus. [Katok, s.59-60] Todistuksessa käytetään euklidista metriikkaa. Suora L kulkee pisteen 0 kautta, koska euklidinen etäisyys origosta pisteeseen $-\frac{\bar{\alpha}}{\beta}$ on yhtä suuri kuin origosta pisteeseen $\frac{\alpha}{\beta}$. Isometriset ympyrät $\Im(T)$ ja $\Im(T^{-1})$ ovat symmetriset suoran L suhteen.



KUVA 2. Keskinormaali L kulkee origon kautta, koska etäisyys origosta isometristen ympyröiden $\Im(T)$ ja $\Im(T^{-1})$ keskipisteisiin on sama.

Olkoon $\beta = re^{i\phi}$, $T_k(z) = e^{i\phi}z$ ja $S(z) := T_k T T_k^{-1}(z)$. Koska isometristen ympyröiden $\Im(S)$ ja $\Im(S^{-1})$ keskipisteet ovat $\frac{\alpha}{r}$ ja $-\frac{\bar{\alpha}}{r}$, niin ne ovat symmetriset imaginaariakselin suhteen. Jos $S = S_p S_i$, jossa S_i on inversio ympyrän $\Im(S)$ suhteen ja S_p peilaus imaginaariakselin suhteen, niin

$$T = \underbrace{T_k^{-1} S_p T_k}_{=T_p} \underbrace{T_k^{-1} S_i T_k}_{=T_i},$$

jossa T_i on inversio ympyrän $\Im(T)$ suhteen ja T_p peilaus suoran L suhteen. Riittää siis osoittaa väite todeksi silloin, kun isometristen ympyröiden $\Im(T)$ ja $\Im(T^{-1})$ keskipisteet $-\frac{\bar{\alpha}}{\beta}$ ja $\frac{\alpha}{\beta}$ ovat symmetrisiä imaginaariakselin suhteen. Koska $-\frac{\bar{\alpha}}{\beta} = -\frac{\bar{\alpha}}{\beta}$, niin $\beta = \bar{\beta}$. Siis β on reaalinen. Esimerkin 2.7 nojalla

yhtälö

$$\begin{aligned} \left(z' - \left(-\frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right) \right) \left(\bar{z} - \left(-\frac{\alpha}{\bar{\beta}} \right) \right) &= \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \\ \Leftrightarrow z' &= \frac{\left(-\frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right) \bar{z} + \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 - \left| -\frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right|^2}{\bar{z} - \left(-\frac{\alpha}{\bar{\beta}} \right)} = -\frac{\frac{\bar{\alpha}}{\beta} \bar{z} + 1}{\bar{z} + \frac{\alpha}{\beta}} \end{aligned}$$

määrittelee inversion ympyrän $\Im(T)$ suhteen. Yhdistämällä edelliseen peilaus imaginaariakselin suhteen saadaan

$$z'' = -\bar{z}' = \frac{\frac{\alpha}{\beta} z + 1}{z + \frac{\bar{\alpha}}{\beta}} = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}} = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}. \quad \square$$

V. Geodeesit. Kahden puolitasoon \mathbb{H} (tai yksikkökiekkoon \mathbb{U}) kuuluvan pisteen välistä lyhintä käyrää annetun metriikan suhteen kutsutaan geodeesiksi. Seuraavaksi osoitetaan, että geodeesit ovat puoliympyröitä tai suoria, jotka ovat kohtisuorassa reaaliakselia (tai yksikköympyrää) kohtaan. Lisäksi osoitetaan, että kahden pisteen välillä on täsmälleen yksi geodeesi ja että näiden pisteiden välinen hyperbolinen etäisyys saadaan laskemalla pisteiden välisen geodeesin segmentin (eli hyperbolisen janan) pituus.

Määritelmä 2.27. Hyperbolinen jana on kahden ylemmän puolitason \mathbb{H} (tai yksikkökiekkoon \mathbb{U}) pisteen kautta kulkevan geodeesin segmentti. Merkitään pisteiden z, w välistä janaa $[z, w]$.

Lemma 2.28. *Olkoon L euklidinen ympyrä (tai suora), joka on kohtisuorassa reaaliakselia kohtaan. Tällöin on olemassa ylemmän puolitason säilyttävä Möbius-muunnos, joka kuvaa ympyrän L imaginaariakselille.*

Todistus. [Katok, s.21] Olkoot r ja t ympyrän L ja laajennetun reaaliakselin $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ leikkauspisteet ja olkoon r äärellinen. Jos t on äärellinen, niin kuvaus

$$T(z) = \frac{\frac{z}{t-r} - \left(\frac{r}{t-r} + 1 \right)}{z - r}$$

on reaalikertoiminen Möbius-muunnos, jonka determinantti on 1, joten se säilyttää ylemmän puolitason, ja se kuvaa ympyrän L imaginaariakselille. Jos $t = \infty$, niin kuvaus

$$T(z) = \frac{1}{z - r}$$

täyttää edellä vaaditut ehdot. □

Lause 2.29. *Puolitason \mathbb{H} geodeesit ovat puoliympyröitä tai suoria hyperbolisessa metriikassa. Geodeesit ovat kohtisuorassa reaaliakselia \mathbb{R} kohtaan.*

Todistus. Olkoot aluksi $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ sellaisia pisteitä, että $z_1 = ia$ ja $z_2 = ib$. Jos $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ on mikä tahansa paloittain differentioituva ja pisteitä ia ja ib yhdistävä polku, niin

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left| \frac{dy}{dt} \right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}.$$

Määritelmässä 2.1 esitetyn hyperbolisen etäisyyden kaavan avulla on nähtävissä, että $\ln \frac{b}{a}$ on pisteiden ia ja ib etäisyys imaginaariakselia pitkin. Näin ollen geodeesi, joka yhdistää pisteet z_1 ja z_2 , on imaginaariakselin segmentti.

Olkoot nyt $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ eri pisteitä ja L se ympyrä (tai suora), joka on kohtisuorassa reaaliakselia kohtaan ja joka kulkee pisteiden z_1 ja z_2 kautta. Kuvataan L imaginaariakselille Lemman 2.28 mukaisella kuvauksella T . Koska T on isometria, niin pisteiden z_1 ja z_2 välinen etäisyys on sama kuin pisteiden $T(z_1)$ ja $T(z_2)$ välinen etäisyys. Geodeesi, joka yhdistää pisteet z_1 ja z_2 , on siis ympyrän L kaari. \square

Seuraus 2.30. *Kahden pisteen $z, w \in \mathbb{H}$ kautta kulkee yksikäsitteinen geodeesi.*

Seuraus 2.31. *Kahden pisteen $z, w \in \mathbb{H}$ välinen hyperbolinen etäisyys on janan $[z, w]$ pituus.*

Seuraus 2.32. *Olkoot $z, w \in \mathbb{H}$ eri pisteitä. Tällöin*

$$\rho(z, w) = \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w) \Leftrightarrow \xi \in [z, w].$$

Seuraus 2.33. *Yksikkökiekon \mathbb{U} hyperboliset geodeesit ovat euklidisen ympyrän kaaria tai yksikkökiekon halkaisijoita ja ne ovat kohtisuorassa yksikköympyrää Σ kohtaan.*

Todistus. Bijektio $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{U}$, $f(z) = \frac{iz+1}{z+i}$ yhdistää puolitasomallin kiekkomalliin. Selvästi f on Möbius-muunnos. Näin ollen f kuvaa ympyrän tai suoran ympyräksi tai suoraksi. Koska f on Möbius-muunnos, niin se on konforminen. Koska puolitasomallin geodeesit leikkaavat reaaliakselin kohtisuorasti, niin kiekkomallin geodeesit leikkaavat yksikköympyrän Σ kohtisuorasti. \square

Lause 2.34. *Ylemmän puolitason \mathbb{H} tai yksikkökiekon \mathbb{U} säilyttävän Möbius-muunnoksen isometrinen ympyrä on geodeesi hyperbolisessa metriikassa.*

Todistus. Ylemmän puolitason \mathbb{H} säilyttävän Möbius-muunnoksen isometrisen ympyrän keskipiste on reaaliakselilla, koska Möbius-muunnoksen kertoimet $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Näin ollen isometrinen ympyrä leikkaa reaaliakselin kohtisuorasti ja on siten (puolitasomallin) geodeesi.

Koska yksikkökiekon \mathbb{U} säilyttävä Möbius-muunnos on $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$, jossa

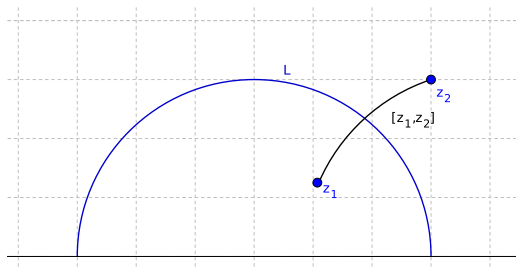
$$\begin{aligned} |\bar{\alpha}|^2 - |\beta|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{|\bar{\alpha}|^2}{|\beta|^2} &= 1 + \frac{1}{|\beta|^2} \\ \Rightarrow \left| \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \right|^2 &= |1|^2 + \left| \frac{1}{\beta} \right|^2, \end{aligned}$$

niin Pythagoraan lauseen nojalla $\Im(T)$ leikkaa yksikköympyrän Σ kohtisuorasti ja on siten (kiekkomallin) geodeesi. \square

Määritelmä 2.35. Hyperbolisen janan $[z_1, z_2]$ hyperbolinen keskinormaali on geodeesi, joka on kohtisuorassa hyperbolista janaa $[z_1, z_2]$ kohtaan ja kulkee hyperbolisen janan $[z_1, z_2]$ hyperbolisen keskipisteen kautta. Hyperbolisen janan $[p, T(p)]$ keskinormaalia merkitään $L_p(T)$.

Lause 2.36. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ ja L janan $[z_1, z_2]$ keskinormaali. Tällöin

- (1) $\rho(z, z_1) = \rho(z, z_2) \Leftrightarrow z \in L$
- (2) $\rho(z, z_1) < \rho(z, z_2) \Leftrightarrow z$ ja z_1 ovat samalla puolella keskinormaalia L
- (3) $\rho(z, z_1) > \rho(z, z_2) \Leftrightarrow z$ ja z_2 ovat samalla puolella keskinormaalia L



KUVA 3. Pisteet z_1, z_2 ja niiden välisen janan keskinormaali L

Todistus. Todistus alkeisgeometriaa. Ks. [Stahl, s.89]. \square

Lause 2.37. Jos $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, $\bar{\beta} \neq 0$, niin $\mathfrak{S}(T^{-1}) \cap \mathbb{U} = L_0(T)$.

Todistus. [Simon, s.505] Olkoon $z \in \mathfrak{S}(T^{-1}) \cap \mathbb{U}$. Lauseen 2.26 nojalla T^{-1} on inversio isometrisen ympyrän $\mathfrak{S}(T^{-1})$ suhteen yhdistettynä peilaukseen suoran L suhteen. Koska $z \in \mathfrak{S}(T^{-1})$ ja $0 \in L$, niin

$$|T^{-1}(z)| = |z|.$$

Määritelmästä 2.4 nähdään helposti, että jos $|z| = |w|$, niin $\rho^*(0, z) = \rho^*(0, w)$. Näin ollen

$$\rho^*(0, T^{-1}(z)) = \rho^*(0, z).$$

Koska T on isometria, niin

$$\rho^*(0, T^{-1}(z)) = \rho^*(T(0), z).$$

Yhdistämällä edelliset tulokset saadaan

$$\rho^*(0, z) = \rho^*(z, T(0)),$$

mikä on Lauseen 2.36 nojalla voimassa täsmälleen silloin, kun $z \in L_0(T)$. \square

3. FUCHSIN RYHMÄT

I. Epäjatkuvat aliryhmät. Kaikkien Möbius-muunnosten kokoelma muodostaa ryhmän \mathcal{M} , jossa laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. Tästä tarkastellaan ryhmän \mathcal{M} aliryhmiä.

Määritelmä 3.1. Olkoon A aliryhmä ja

$$z \sim w \Leftrightarrow w = T(z), \text{ jollain } T \in A,$$

relaatio \sim on selvästi ekvivalenssirelaatio eli laajennettu kompleksitaso $\widehat{\mathbb{C}}$ jakautuu ekvivalenssiluokkiin aliryhmän A suhteen. Nämä ekvivalenssiluokat ovat $Az := [z] = \{T(z) \mid T \in A\}$, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, ja niitä kutsutaan pisteen z radoiksi aliryhmän A suhteen.

Määritelmä 3.2. Joukkoa, joka sisältää täsmälleen yhden edustajan jokaisesta radasta, kutsutaan aliryhmän A perusjoukoksi \widetilde{F} .

Määritelmä 3.3. Olkoon \mathbb{X} metrinen avaruus. Joukkoperhe $\{U_i \mid i \in I\}$, $U_i \subset \mathbb{X}$, on lokaalisti äärellinen, jos mille tahansa kompaktille $V \subset \mathbb{X}$ on voimassa $U_i \cap V \neq \emptyset$ vain äärellisen monelle indeksille $i \in I$.

Määritelmä 3.4. Aliryhmä A on epäjatkuvaa joukossa $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$, jos rata Az on lokaalisti äärellinen kaikilla $z \in B$.

Lause 3.5. *Joukossa B epäjatkuvan aliryhmän Γ rata Γz on diskreetti joukossa B kaikilla $z \in B$.*

Todistus. Jos jollain $z \in B$ rata Γz ei ole diskreetti joukossa B , niin sillä on kasautumispiste $w \in B$. Tämä on ristiriita, koska rata Γz on lokaalisti äärellinen. \square

II. Rajapisteet. Epäjatkuvalla aliryhmällä on kahdenlaisia pisteitä laajennetussa kompleksitasossa: rajapisteitä ja säännöllisiä pisteitä.

Määritelmä 3.6. Piste $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ on aliryhmän Γ rajapiste, jos se on jonkin radan Γw , $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, alkioden kasautumispiste. Rajapisteiden muodostamaa joukkoa kutsutaan rajajoukoksi Λ .

Määritelmä 3.7. Piste $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ on aliryhmän Γ säännöllinen piste, jos se ei ole rajapiste.

Esimerkki 3.8.

(a) Aliryhmän $\{T_n \mid T_n(z) = 2^n z, n \in \mathbb{Z}\}$ rajajoukko on $\{0, \infty\}$, koska

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n z = \infty \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} T_n(z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} 2^n z = 0 \end{cases}$$

kaikilla $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$.

(b) Aliryhmän $\{T_n \mid T_n(z) = z + n, n \in \mathbb{Z}\}$ ainoa rajapiste on ∞ , koska

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} z + n = \infty \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} T_n(z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} z + n = \infty \end{cases}$$

kaikilla $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$.

III. Fuchsin ryhmät. Seuraavaksi määritellään Fuchsin ryhmä. Fuchsin ryhmä on epäjatkuva aliryhmä, joka kuvaa tietyn ympyrän (tai suoran) ja ympyrän sisuksen (tai suoran puolen) itselleen kaikilla siihen kuuluvilla Möbius-muunnoksilla.

Määritelmä 3.9. Epäjatkuva aliryhmä Γ on Fuchsin ryhmä, jos $\forall T \in \Gamma$ $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ tai $\forall T \in \Gamma$ $T(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. Puolitasomallissa laajennettua reaaliakselia $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja kiekkomallissa yksikköympyrää Σ kutsutaan Fuchsin ryhmän pääympyräksi.

Seuraus 3.10. *Fuchsin ryhmässä voi olla ainoastaan hyperbolisia, parabolisia tai elliptisiä Möbius-muunnoksia.*

Todistus. Lauseen 2.16 nojalla ylemmän puolitason \mathbb{H} säilyttävät Möbius-muunnokset ovat reaalikertoimisia. Näin ollen loxodromisia Möbius-muunnoksia ei voi kuulua Fuchsin ryhmään. Lauseen 2.17 nojalla yksikkökiekon \mathbb{U} säilyttävät Möbius-muunnokset ovat muotoa $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Möbius-muunnoksen T jälki on $\text{Tr}(T) = \alpha + \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, mistä seuraa, että T on hyperbolinen, parabolinen tai elliptinen. \square

Lemma 3.11. (*Dirichlet'n lause*) Jos $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin joukko

$$\{m + n\theta \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

on tiheä reaalilukujen joukossa.

Todistus. Ks. [Apostol, s.143-148] \square

Lause 3.12. Jos T on Fuchsin ryhmän Γ elliptinen Möbius-muunnos, niin sen kertaluku on äärellinen.

Todistus. [Lehner, s.87] Riittää osoittaa, ettei Fuchsin ryhmässä Γ ole elliptistä Möbius-muunnosta, jonka kertaluku on ääretön.

Olkoon $z \in \mathbb{H}$ mielivaltainen, Möbius-muunnoksen $T \in \Gamma$ kertaluku ääretön ja S konjugoiva Möbius-muunnos. Tällöin T on muotoa

$$T(z) = S^{-1}e^{2\pi i\theta}S(z), \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

josta saadaan

$$T^n(z) = S^{-1}e^{2\pi in\theta}S(z), \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Lemman 3.11 nojalla on kaksi sellaista jonoa eri kokonaislukuja m_j ja n_j , että $\lim_{j \rightarrow \infty} m_j + n_j\theta = 1$. Näin ollen

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e^{2\pi i(\theta n_j)} = \lim_{j \rightarrow \infty} e^{2\pi i(m_j + \theta n_j)} = e^{2\pi i} = 1.$$

Nyt $\lim_{j \rightarrow \infty} T^{n_j}(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} S^{-1}e^{2\pi i\theta n_j}S(z) = \text{Id}(z)$ eli $z \in \mathbb{H}$ on rajapiste, mikä on ristiriita, sillä Lauseen 3.5 nojalla puolitasossa \mathbb{H} ei ole rajapisteitä. \square

Esimerkki 3.13.

- (a) Esimerkin 3.8 aliryhmät ovat Fuchsin ryhmiä, koska ne säilyttävät puolitason \mathbb{H} ja ovat epäjatkuvia.

- (b) Olkoon $\theta \in \mathbb{R}$. Aliryhmä $\Gamma = \{T^n \mid T(z) = e^{i\pi\theta}z, n \in \mathbb{Z}\}$ säilyttää yksikkökieron \mathbb{U} . Radat Γz ovat lokaalisti äärellisiä kaikilla $z \in \mathbb{U}$ täsmälleen silloin, kun θ on rationaaliluku. Siis jos θ on rationaalinen, niin Γ on kierron $T(z) = e^{i\pi\theta}z$ generoima syklinen Fuchsin ryhmä. Jos θ on irrationaalinen, niin Γ ei ole Fuchsin ryhmä.

Fuchsin ryhmät jaetaan 1. ja 2. lajiin rajajoukon $\Lambda(\Gamma)$ perusteella.

Lause 3.14. *Jos Γ on Fuchsin ryhmä, niin puolitasomallissa $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja kiekkomallissa $\Lambda(\Gamma) \subset \Sigma$.*

Todistus. Todistetaan lause puolitasomallissa. Lauseen 3.5 nojalla puolitasossa \mathbb{H} ei ole rajapisteitä. Jos radalla Γz on kasautumispiste w , niin $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

Lause 3.15. *Jos Γ on Fuchsin ryhmä ja $w \in \Lambda(\Gamma)$, niin w on radan Γz_0 kasautumispiste jokaiselle säännölliselle pisteelle $z_0 \in \mathbb{H}$ (tai $z_0 \in \mathbb{U}$).*

Todistus. Tehdään todistus puolitasomallissa. Olkoon $w_0 \in \Lambda(\Gamma)$. Väitetään toisin, eli että on olemassa eri Möbius-muunnokset $T_n \in \Gamma$ ja säännölliset pisteet $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$, joille

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z_0) = w_0 \neq w_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z_1).$$

Koska $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$, niin $\rho(z_0, z_1)$ on äärellinen. Pisteet w_0 ja w_1 sen sijaan kuuluvat pääympyrälle eli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(T_n(z_0), T_n(z_1)) = \infty$$

Tämä on ristiriita, sillä Möbius-muunnokset T_n ovat isometrioita. \square

Lause 3.16. *Jos Γ on Fuchsin ryhmä, niin $\Lambda(\Gamma)$ on Γ -invariantti.*

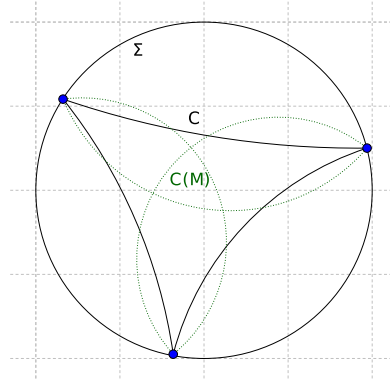
Todistus. Tehdään todistus puolitasomallissa. Olkoon $a \in \Lambda$. Tällöin Lauseen 3.15 nojalla on olemassa $b \in \mathbb{H}$ ja jono sellaisia Fuchsin ryhmän Γ eri Möbius-muunnoksia T_n , joille $T_n b \rightarrow a$. Olkoon $S \in \Gamma$ ja $S(b) =: c$. Tällöin $ST_n S^{-1} \in \Gamma$ kaikilla n ja $(ST_n S^{-1})(c) \rightarrow S(a)$. Siis jos $a \in \Lambda$, niin $S(a) \in \Lambda$. \square

Lause 3.17. *Jos Γ on Fuchsin ryhmä, niin rajajoukossa $\Lambda(\Gamma)$ on 0, 1, 2 tai äärettömän monta pistettä.*

Todistus. [Walkden, s.22-23] Tehdään todistus kiekkomallissa. Väitetään toisin, eli että rajajoukossa on äärellisen monta, mutta vähintään kolme pistettä. Olkoon C sellainen kokoelma hyperbolisia suorita L , että suorien päätepisteet kuuluvat rajajoukkoon $\Lambda(\Gamma)$ ja jokaisen kahden rajapisteen välillä on täsmälleen yksi suora. Koska kaksi rajapistettä määrää yksikäsitteisen geodesin ja $\Lambda(\Gamma)$ on Γ -invariantti, niin C on Γ -invariantti. Olkoon $M > 0$ ja $C(M)$ se yksikkökieron \mathbb{U} pistejoukko, jonka pisteet ovat enintään M :n etäisyydellä kaikista joukon C suorista L eli

$$C(M) = \left\{ z \in \mathbb{U} \mid \sup_{L \in C} \inf_{x \in L} \rho^*(z, x) \leq M \right\},$$

Koska C on Γ -invariantti ja Fuchsin ryhmän Γ Möbius-muunnokset ovat isometrioita, niin myös $C(M)$ on Γ -invariantti. Valitaan M niin suureksi, että $C(M) \neq \emptyset$. Koska rajajoukossa $\Lambda(\Gamma)$ on vähintään kolme pistettä, niin



KUVA 4. Kokoelma C ja joukko $C(M)$

jokaiselle rajapisteelle $w \in \Lambda(\Gamma)$ on olemassa sellainen suora $L_w \in C$, ettei w ole kumpikaan sen päätepisteistä. Olkoon $z \in \mathbb{U}$. Kun $z \rightarrow w$, niin

$$\rho^*(z, L_w) = \inf_{x \in L_w} \rho^*(z, x) \rightarrow \infty.$$

Koska rajapisteitä on vähintään kolme, niin $C(M)$ ei voi sisältää rajapisteitä, sillä rajapisteen etäisyys vastakkaiseen sivuun ylittäisi äärellisen ylärajan M . Näin ollen $C(M) \cap \Lambda(\Gamma) = \emptyset$. Olkoon $z_0 \in C(M)$ mielivaltainen. Koska $C(M)$ on Γ -invariantti, niin $\Gamma z_0 \subset C(M)$. Lauseen 3.15 nojalla Fuchsin ryhmällä Γ ei siten ole rajapisteitä, mikä on ristiriita. \square

Määritelmä 3.18. Joukko A on harva, jos $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

Määritelmä 3.19. Puolitasomallisissa Fuchsin ryhmä Γ on ensimmäistä lajia, jos $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ja toista lajia, jos sen rajajoukko on pääympyrän $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ harva osajoukko. Vastaavasti kiekkomallisissa Fuchsin ryhmä Γ on ensimmäistä lajia, jos $\Lambda(\Gamma) = \Sigma$, ja toista lajia, jos sen rajajoukko on pääympyrän Σ harva osajoukko.

Huomautus 3.20. Fuchsin ryhmät, joiden rajajoukossa on 0, 1 tai 2 pistettä, ovat toista lajia. Jos Fuchsin ryhmän rajajoukossa on puolitasomallisissa äärettömän monta pistettä, niin $\Lambda(\Gamma)$ on joko Cantorin joukko, jolloin Γ on toista lajia, tai $\Lambda(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, jolloin Γ on ensimmäistä lajia. Erityisesti siis Fuchsin ryhmä on aina joko ensimmäistä tai toista lajia [Walkden, s.33].

Esimerkki 3.21. Esimerkin 3.8 aliryhmät ovat toista lajia.

Lause 3.22. *Olkoon A aliryhmä, johon kuuluu parabolisia Möbius-muunnoksia, ja $K(A)$ aliryhmän A parabolisten Möbius-muunnosten kiintopisteiden joukko. Jos $\Lambda(A)$ koostuu vähintään kahdesta pisteestä, niin $\Lambda(A) = \overline{K(A)}$.*

Todistus. [Lehner, s.104-105] Paraboliset kiintopisteet ovat rajapisteitä. Koska $\Lambda(A)$ on suljettu, niin $\overline{K(A)} \subset \Lambda(A)$.

Olkoon $z \in \Lambda(A)$ mikä tahansa muu kuin parabolinen kiintopiste. Osoitetaan, että z on kiintopisteiden kasautumispiste. Koska $\Lambda(A)$ koostuu vähintään kahdesta pisteestä, niin aliryhmässä A on oltava muitakin kuin parabolisia Möbius-muunnoksia. Olkoon w_1 parabolisen Möbius-muunnoksen T kiintopiste. Tällöin $w_2 = STS^{-1}(w_1)$, jossa $S \in \Gamma$ on ei-parabolinen Möbius-muunnos, on parabolinen kiintopiste. Nyt Γw_1 tai Γw_2 on tiheä pisteessä z .

Koska kiintopisteen kuvapiste on myös kiintopiste, niin z on kiintopisteiden kasautumispiste. \square

Lause 3.23. *Modulaariryhmä*

$$\Gamma_M := \left\{ T \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

on ensimmäisen lajin Fuchsian ryhmä.

Todistus. Modulaariryhmä Γ_M on Fuchsian ryhmä, koska se on diskreetti [Katok, s.30]. Osoitetaan, että modulaariryhmän parabolisten kiintopisteiden joukko on tiheä laajennetulla reaaliakselilla, jolloin Lauseen 3.22 nojalla Γ_M on ensimmäistä lajia. Riittää siis osoittaa, että kaikki rationaaliluvut ovat parabolisia kiintopisteitä.

Olkoon $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\text{syt}(p, q) = 1$. Bezoutin yhtälön mukaan on olemassa sellaiset $r, s \in \mathbb{Z}$, että $pr - qs = 1$. Näin ollen $T(z) := \frac{pz + s}{qz + r} \in \Gamma_M$. Tästä seuraa, että $T(\infty) = \frac{p}{q}$ on parabolinen kiintopiste, koska ∞ on kiintopiste Möbius-muunnokselle $z + 1 \in \Gamma_M$. \square

4. PERUS- JA DIRICHLET'N ALUEET

I. Perusalue. Ylempi puolitaso \mathbb{H} tai yksikkökierokko \mathbb{U} voidaan jakaa osiin, joissa saman osan sisällä ei ole ekvivalentteja pisteitä. Määritelmässä 3.2 esitellyssä perusjoukossa \tilde{F} ei ole lainkaan keskenään ekvivalentteja pisteitä. Kuitenkaan \tilde{F} ei voi sisältää kaikkia reunapisteitään. Perusalue F on perusjoukko, johon sisältyy kaikki perusjoukon reunapisteet.

Määritelmä 4.1. Epätyhjä ja suljettu joukko $F \subset \mathbb{H}$ on puolitasomallissa Fuchsin ryhmän Γ perusalue Γ , jos

- (i) $\bigcup_{T \in \Gamma} T(F) = \mathbb{H}$ ja
- (ii) $\text{int}(F) \cap T(\text{int}(F)) = \emptyset$ kaikilla ei-identtisillä Möbius-muunnoksilla $T \in \Gamma$.

Huomautus 4.2.

- (1) Kiekkomallissa Määritelmän 4.1 ylempi puolitaso \mathbb{H} korvataan yksikkökierokolla \mathbb{U} .
- (2) Perhettä $\Gamma(F) := \{T(F) \mid T \in \Gamma\}$ kutsutaan ylempään puolitasoon \mathbb{H} (tai yksikkökierokoon \mathbb{U}) laatoitukseksi.

Määritelmä 4.3. Perusalue F on lokaalisti äärellinen, jos laatoitus $\Gamma(F)$ on lokaalisti äärellinen euklidisessa metriikassa.

Esimerkki 4.4. Tutkitaan säännöllisen pisteen z rataa $\{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, kun T on (a) elliptinen, (b) parabolinen ja (c) hyperbolinen ja määrätään perusalue Möbius-muunnoksen virittämälle aliryhmälle.

- (a) Käytetään kiekkomallia. Olkoon $T(z) = e^{\frac{i\pi}{3}}z$. Möbius-muunnoksen T kiintopiste on origo. Koska T on rationaalinen kierto origon suhteen, niin Esimerkin 3.13 nojalla $\langle T \rangle$ on syklinen Fuchsin ryhmä. Nyt $\{T^n(z)\} = \{z \in \mathbb{U} \mid e^{\frac{i\pi n}{3}}z, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jos $z = \frac{1}{2}$, niin

$$T^1(z) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad T^2(z) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i, \quad T^3(z) = -\frac{1}{2},$$

$$T^4(z) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad \text{ja} \quad T^5(z) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Rata $\{T^n(z) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ on (hyperbolisella) ympyrällä, jonka keskipiste on origo. Aloitetaan perusalueen määrittäminen positiivisesta reaaliakselista. Tällöin

$$F = \left\{ z = re^{i\theta} \in \widehat{\mathbb{C}} \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, r \in \mathbb{R}, 0 \leq r < 1 \right\}.$$

- (b) Käytetään puolitasomallia. Olkoon $T(z) = \frac{3z-2}{2z-1}$, jolle $z = 1$ on ainoa kiintopiste ja siten T on parabolinen. Konjugoidaan kiintopiste äärettömyyspisteeksi ∞ Möbius-muunnoksella $S(z) = \frac{-z+2}{z-1}$. Tällöin

$S^{-1}(z) = \frac{z+2}{z+1}$. Konjugoitu Möbius-muunnos G on nyt muotoa

$$\begin{aligned} G(z) &= STS^{-1}(z) = S \left(\frac{3 \left(\frac{z+2}{z+1} \right) - 2}{2 \left(\frac{z+2}{z+1} \right) - 1} \right) \\ &= S \left(\frac{z+4}{z+3} \right) = \frac{-\left(\frac{z+4}{z+3} \right) + 2}{\left(\frac{z+4}{z+3} \right) - 1} \\ &= z + 2 \end{aligned}$$

Pisteen z rata on vaakasuoralla suoralla. Esimerkiksi pisteelle $z = i$

$$\begin{aligned} G^1(z) &= 2 + i, \quad G^2(z) = 4 + i, \\ G^{-1}(z) &= -2 + i \text{ ja } G^{-2}(z) = -4 + i. \end{aligned}$$

Aliryhmän $\langle G \rangle$ perusalueeksi voidaan valita joukko

$$F = \{ z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \}.$$

Aliryhmän $\langle T \rangle$ perusalue saadaan kuvaamalla perusalue F takaisin Möbius-muunnoksella S .

- (c) Käytetään puolitasomallia. Olkoon $T(z) = \frac{2z+6}{\frac{1}{2}z+2}$, jolle $z = \pm\sqrt{12}$ ovat kiintopisteitä. Konjugoidaan $z = -\sqrt{12}$ origoon ja $z = \sqrt{12}$ äärettömyyspisteeseen. Esimerkiksi Möbius-muunnos $S(z) = \frac{z+\sqrt{12}}{z-\sqrt{12}}$ käy konjugoivaksi muunnokseksi, jolloin $S^{-1}(z) = \frac{\sqrt{12}z+\sqrt{12}}{z-1}$. Nyt

$$\begin{aligned} G(z) &= STS^{-1}(z) = S \left(\frac{2 \left(\frac{\sqrt{12}z+\sqrt{12}}{z-1} \right) + 6}{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{12}z+\sqrt{12}}{z-1} \right) + 2} \right) \\ &= S \left(\frac{(4\sqrt{12}+12)z + (4\sqrt{12}-12)}{(\sqrt{12}+4)z + (\sqrt{12}-4)} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{(4\sqrt{12}+12)z + (4\sqrt{12}-12)}{(\sqrt{12}+4)z + (\sqrt{12}-4)} \right) + \sqrt{12}}{\left(\frac{(4\sqrt{12}+12)z + (4\sqrt{12}-12)}{(\sqrt{12}+4)z + (\sqrt{12}-4)} \right) - \sqrt{12}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{12}+3}{\sqrt{12}-3} \right) z \end{aligned}$$

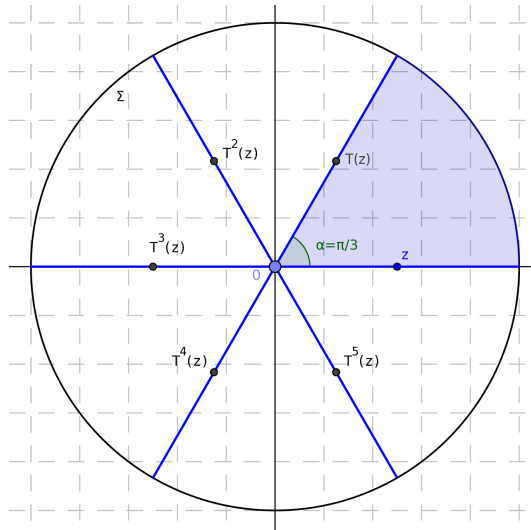
Pisteen z rata Möbius-muunnoksessa G on aina kiintopisteitä $z = 0$ ja $z = \infty$ yhdistävällä ympyrän kaarella. Pisteen $z = 1+i$ ratapisteet muunnoksessa G ovat muotoa

$$G^n(z) = \left(\frac{\sqrt{12}+3}{\sqrt{12}-3} \right)^n (1+i).$$

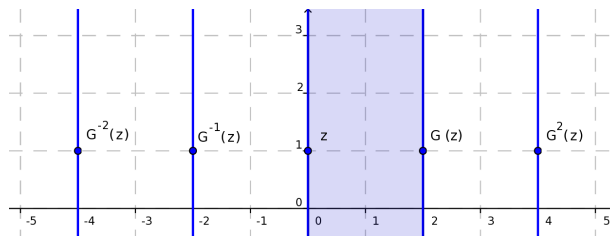
Aliryhmän $\langle G \rangle$ perusalueeksi voidaan valita joukko

$$F = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid \sqrt{2} \leq |z| \leq \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{12}+3}{\sqrt{12}-3} \right) \right\}.$$

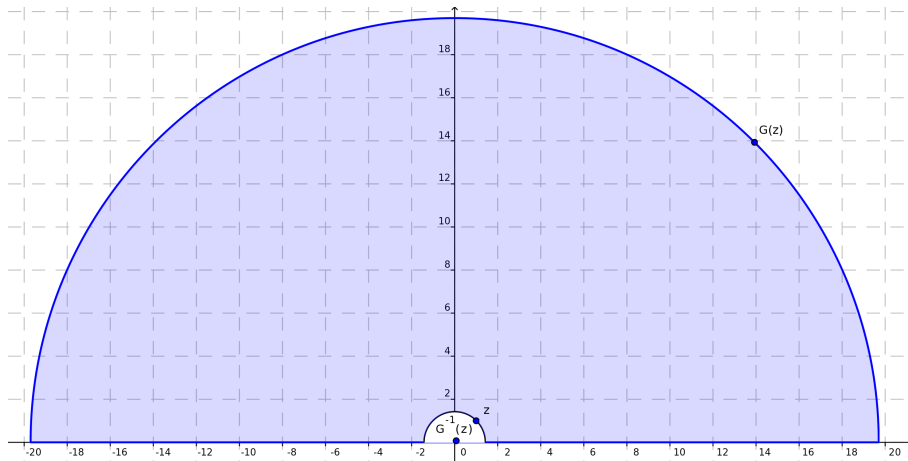
Aliryhmän $\langle T \rangle$ perusalue saadaan kuvaamalla perusalue F takaisin Möbius-muunnoksella S .



(a) T on elliptinen



(b) G on parabolinen



(c) G on hyperbolinen

KUVA 5. Perusalue F ja pisteen z rata, kun T tai G on elliptinen, parabolinen ja hyperbolinen (Esim. 4.4)

Huomautus 4.5. Suorittamalla konjugointi Esimerkin 4.4 tavoilla voidaan päätellä pisteen radan luonne eri kategorian Möbius-muunnoksissa. Jos T

on elliptinen, niin $\{T^n(z)\}$ on hyperbolisella ympyrällä, jonka keskipiste on Möbius-muunnoksen T kiintopiste. Jos T on parabolinen, niin pisteen z rata on kiekkomallissa parabolista kiintopistettä sivuavalla ympyrän kaarella ja puolitasomallissa vaakasuoralla suoralla tai reaaliakselia sivuavalla ympyrän kaarella. Jos T on hyperbolinen, niin pisteen z rata on aina hyperbolisia kiintopisteitä yhdistävällä ympyrän kaarella tai suoralla. Kaaren ei tarvitse leikata pääympyrää kohtisuorasti.

II. Dirichlet'n alue.

Määritelmä 4.6. Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja $p \in \mathbb{H}$ ei-kiintopiste kaikille Fuchsin ryhmän Γ Möbius-muunnoksille (pl. identtiselle muunnokselle). Tällöin Fuchsin ryhmän Γ Dirichlet'n alue pisteen p suhteen on

$$D_p(\Gamma) = D_p := \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T(p)) \forall T \in \Gamma\}.$$

Dirichlet'n alue voidaan myös lausua muodossa

$$D_p = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(T(z), p) \forall T \in \Gamma\}.$$

Huomautus 4.7. Jokaista Möbius-muunnosta $T_i \in \Gamma$ vastaa joukko $H_p(T_i)$, jonka pisteet ovat lähempänä tai yhtä lähellä pistettä p kuin pistettä $T_i(p)$

$$H_p(T_i) = \{z \in \mathbb{H} \mid \rho(z, p) \leq \rho(z, T_i(p))\}.$$

Dirichlet'n alue on leikkaus näistä hyperbolisista puolitasoista eli

$$D_p(\Gamma) = \bigcap_{T \in \Gamma \setminus Id} H_p(T).$$

Dirichlet'n alue on konveksien joukkojen leikkauksena hyperbolisesti konveksi alue.

Määritelmä 4.8. Dirichlet'n alueen muunnosta $T(D_p)$, jossa $T \in \Gamma$, kutsutaan laataksi. Joukkoa $\Gamma(D_p) := \{T(D_p) \mid T \in \Gamma\}$ kutsutaan Dirichlet'n laatoitukseksi.

Määritelmä 4.9. Dirichlet'n monikulmio on joukon \mathbb{H} (tai joukon \mathbb{U}) hyperbolisesti konveksi osajoukko, jonka reuna koostuu kärjistä ja sivupisteistä. Dirichlet'n monikulmion sivupiste on sellainen monikulmion reunapiste, jossa täsmälleen kaksi laattaa kohtaa, ja kärki sellainen reunapiste, jossa useampi kuin kaksi laattaa kohtaa. Sivupisteistä koostuvaa yhtenäistä komponenttia kutsutaan sivuksi.

Huomautus 4.10.

- (1) Sivut ovat hyperbolisia janoja. Pääympyrälle kuuluvat kärjet tai sivupisteet eivät kuulu Dirichlet'n monikulmioon. Dirichlet'n monikulmioon voi kuulua äärettömän monta sivua ja kärkeä.
- (2) Jos jokin sivu s sisältää kiintopisteen elliptiselle Möbius-muunnokselle T , jonka kertaluku on 2, niin $T(s) = s$. Möbius-muunnos T kuitenkin vaihtaa kiintopisteen jakamat sivun s segmentit keskenään. Nämä segmentit määritellään kahdeksi eri sivuksi ja elliptinen kiintopiste kärjeksi.
- (3) Dirichlet'n alue on Dirichlet'n monikulmio.

Lause 4.11. Jos $p \in \mathbb{H}$ ei ole kiintopiste millekään Fuchsin ryhmän Γ ei-identtiselle Möbius-muunnokselle, niin D_p on Fuchsin ryhmän Γ yhtenäinen perusalue.

Todistus. [Katok, s.54-55] Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Koska Γz on diskreetti ylemmässä puolitasossa \mathbb{H} , niin on olemassa sellainen $z_0 \in \Gamma z$, jolle $\rho(z_0, p)$ on pienimmillään. Tästä seuraa, että $\rho(z_0, p) \leq \rho(T(z_0), p)$, $\forall T \in \Gamma$ eli $z_0 \in D_p$. Dirichlet'n alue sisältää siis vähintään yhden pisteen jokaisesta radasta Γz .

Seuraavaksi osoitetaan, että jos $z_1, z_2 \in \text{int}(D_p)$, niin z_1, z_2 eivät voi kuulua samaan rataan. Jos z on Dirichlet'n alueen reunalla, niin $z \in L_p(T^{-1})$ eli $\rho(z, p) = \rho(z, T^{-1}(p))$ jollain ei-identtisellä $T \in \Gamma$. Näin ollen $\rho(z, p) = \rho(T(z), p)$. Jos $z \in \text{int}(D_p)$, niin $\rho(z, p) < \rho(T(z), p)$ kaikille ei-identtisille $T \in \Gamma$.

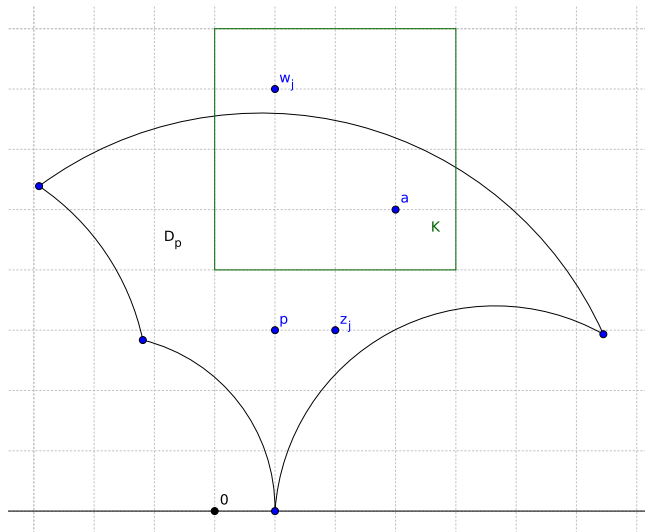
Jos pisteet $z_1, z_2 \in \text{int}(D_p)$ kuuluisivat samaan rataan, niin edellisen nojalla $\rho(z_1, p) < \rho(z_2, p)$ ja $\rho(z_1, p) > \rho(z_2, p)$, mikä johtaisi ristiriitaan. Joten $\text{int}(D_p)$ sisältää enintään yhden pisteen jokaisesta radasta Γz .

Koska D_p on leikkaus suljetuista puolitasoista, niin se on suljettu puolitasossa \mathbb{H} ja konvekksi. Tästä seuraa, että se on polkuyhtenäinen ja edelleen, että se on yhtenäinen. \square

Lause 4.12. Dirichlet'n alue on lokaalisti äärellinen puolitasossa \mathbb{H} .

Todistus. [Katok, s.69] Olkoon $p \in \mathbb{H}$ sellainen piste, että se ei ole kiintopiste millekään Fuchsin ryhmän Γ ei-identtiselle Möbius-muunnokselle. Olkoon $a \in D_p$ ja $K \subset \mathbb{H}$ pisteen a kompakti ympäristö.

Väitetään toisin, eli että $K \cap T_i(D_p) \neq \emptyset$ jollekin äärettömälle jonolle eri Möbius-muunnoksia T_1, T_2, \dots , jossa $T_i \in \Gamma \forall i$. Koska K on rajoitettu, niin $\sigma := \sup_{z \in K} \rho(p, z)$ on äärellinen.



KUVA 6. Dirichlet'n alue D_p , kompakti joukko K ja pisteet p, a, z_j ja w_j (Lause 4.12).

Olkoon $w_j \in K \cap T_j(D_p)$. Näin ollen $w_j = T_j(z_j)$ jollain $z_j \in D_p$. Koska $p \in D_p$ ja $z_j \in D_p$, mutta $w_j \notin D_p$, niin Dirichlet'n alueen määritelmän ja

kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\rho(p, T_j(p)) &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, T_j(p)) \\ &= \rho(p, w_j) + \rho(z_j, p) \\ &\leq \rho(p, w_j) + \rho(w_j, p) \\ &\leq 2\sigma\end{aligned}$$

Koska kaikki kuvapisteen $T_j(p)$ kuuluvat hyperboliseen kiekkkoon, jonka keskipiste on p ja säde 2σ , niin rata Γp ei ole lokaalisti äärellinen. Tästä seuraa, että Γ ei voi olla epäjatkuva, mikä on ristiriita. \square

Seuraavaksi osoitetaan, että kiekkomallissa lokaalisti äärellisten perusalueiden muunnosten euklidinen halkaisija suppenee kohti nollaa.

Lause 4.13. *Jos F on Fuchsin ryhmän Γ lokaalisti äärellinen konvekssi perusalue ja Möbius-muunnokset T_n ovat Fuchsin ryhmän Γ eri alkioita, niin kiekkomallissa $d(T_n(F)) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$.*

Todistus. Käytetään euklidista metriikkaa. Väitetään toisin, jolloin perusalueen kuvat kasautuvat kahteen eri pisteeseen z ja w . Koska F on lokaalisti äärellinen yksikkökiekossa \mathbb{U} , niin $z, w \in \Sigma$. Koska F on konvekssi, niin laatat $T_n(F)$ kasautuvat hyperboliselle suoralle $[z, w]$. Tämä on ristiriita, koska F on lokaalisti äärellinen yksikkökiekossa \mathbb{U} . \square

III. Standardiperusalue. Epäjatkuvalle aliryhmälle on mahdollista valita perusalueeksi kompleksitason joukko, jonka pisteitä ovat kaikkien isometristen ympyröiden ulkopuoliset pisteet eli (kiekkomallissa)

$$\mathfrak{R} = \bigcap_{T \in \Gamma} \overline{\text{ext}[\mathfrak{S}(T)]} \cap \mathbb{U}.$$

Osoitetaan, että \mathfrak{R} on perusalue osoittamalla, että se on Dirichlet'n alue.

Lemma 4.14. *Olkoon Γ Fuchsin ryhmä, $T \in \Gamma$, $h := \rho^*(0, z)$ ja $h' := \rho^*(0, T(z))$. Tällöin kiekkomallissa*

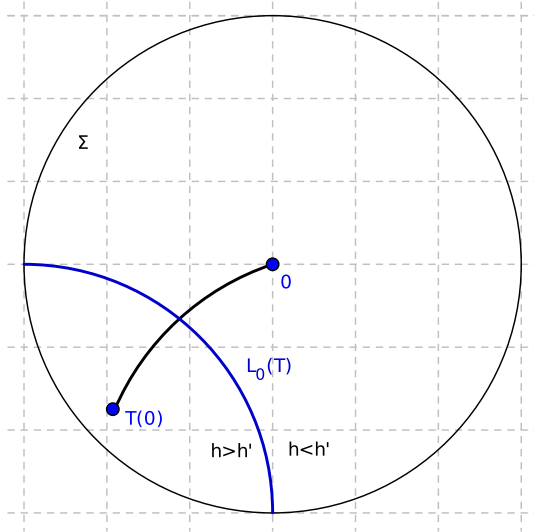
$$\begin{cases} h = h', & \text{jos } z \in \mathfrak{S}T \\ h > h', & \text{jos } z \in \text{int}[\mathfrak{S}(T)] \cap \mathbb{U} \\ h < h', & \text{jos } z \in \text{ext}[\mathfrak{S}(T)] \cap \mathbb{U}. \end{cases}$$

Todistus. Lauseen 2.37 nojalla isometrisen ympyrän $\mathfrak{S}(T)$ ja yksikköympyrän leikkaus on origon ja pisteen $T(0)$ välisen janan keskinormaali $L_0(T)$. Lauseen 2.36 nojalla väitteen ensimmäinen osa on selvä. Jos $z \in \text{int}[\mathfrak{S}(T)] \cap \mathbb{U}$, niin z on eri puolella keskinormaalia $L_0(T)$ kuin origo, koska isometrisen ympyrän sisus ei voi (hyperbolisen geodeesin rajoittamana) voi sisältää origoa. Vastaavasti z on samalla puolella keskinormaalia $L_0(T)$ origon kanssa, mikäli $z \in \text{ext}[\mathfrak{S}(T)] \cap \mathbb{U}$. Väitteen toinen ja kolmas osa seuraavat Lauseesta 2.36. \square

Lause 4.15. \mathfrak{R} on perusalue.

Todistus. [Katok, s.62] Tehdään todistus kiekkomallissa. Olkoon $z \in \mathfrak{R}$. Lemman 4.14 nojalla kaikilla $T \in \Gamma$ on voimassa $h' \geq h$ eli kaikilla $T \in \Gamma$

$$\rho^*(T(z), 0) \geq \rho^*(z, 0).$$



KUVA 7. Isometrinen ympyrä jakaa yksikkökiekon joukkoihin, joissa joko $h < h'$, $h = h'$ tai $h > h'$ (Lause 4.14).

Siis $\mathfrak{R} = D_0(\Gamma)$, josta Lauseen 4.11 nojalla seuraa, että \mathfrak{R} on perusalue. \square

Huomautus 4.16. Jos Γ on epäjatkuva aliryhmä, jonka Möbius-muunnokset ovat muotoa $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, $c \neq 0$, niin \mathfrak{R} on perusalue on myös puolitasomallissa.

Huomautus 4.17. Joukkoa \mathfrak{R} kutsutaan aliryhmän Γ standardiperusalueeksi.

Esimerkki 4.18. Olkoon tarkasteltava aliryhmä $A = \{T(z) = 2^n z | n \in \mathbb{Z}\}$ ja käytetään tarkasteluun puolitasomallia. Muunnetaan A epäjatkuvaksi aliryhmäksi Γ Möbius-muunnoksella $S(z) = \frac{z}{z+1}$ ja tehdään normitus, jotta saadaan isometriset ympyrät esiin.

$$\begin{aligned} G(z) &= STS^{-1}(z) = ST\left(\frac{-z}{z-1}\right) = S\left(\frac{-2^n z}{z-1}\right) = \frac{\left(\frac{-2^n z}{z-1}\right)}{\left(\frac{-2^n z}{z-1}\right) + 1} \\ &= \frac{-2^n z}{-2^n z + z - 1} = \frac{-2^n z}{(-2^n + 1)z - 1} \\ G_{norm}(z) &= \frac{\frac{-2^n z}{\sqrt{2^n}}}{\frac{-2^n + 1}{\sqrt{2^n}}z + \frac{-1}{\sqrt{2^n}}} \end{aligned}$$

Kun $n = 0$, niin $S(z) = Id(z)$. Aliryhmän Γ isometrisia ympyröitä ovat

$$\begin{aligned} &\left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \left\{ -\frac{1}{-2^n + 1} \right\} \mid \left| \frac{-2^n + 1}{\sqrt{2^n}}z - \frac{1}{\sqrt{2^n}} \right| = 1, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \\ &= \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \left\{ \frac{1}{-2^n + 1} \right\} \mid \left| z - \frac{1}{-2^n + 1} \right| = \left| \frac{1}{\frac{-2^n + 1}{\sqrt{2^n}}} \right|, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

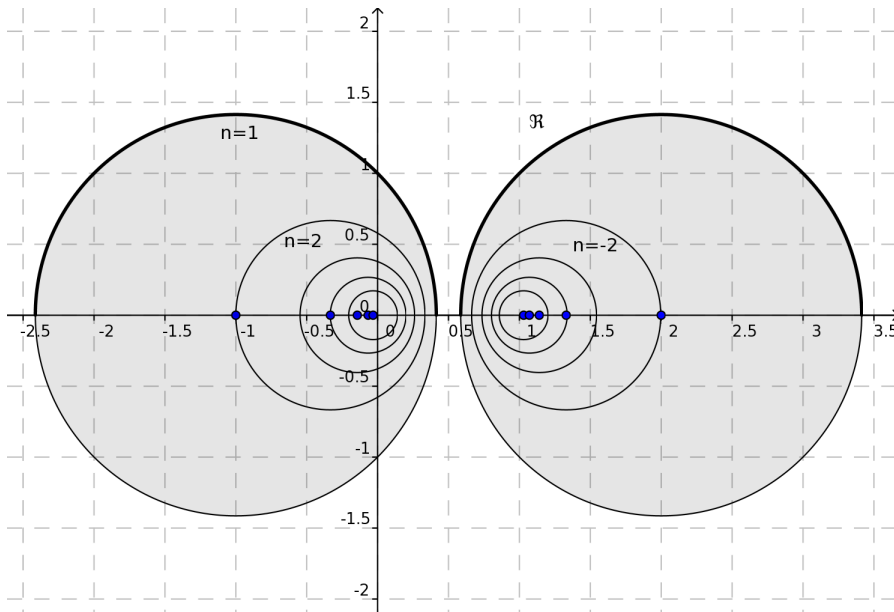
Tässä esimerkissä aliryhmän Γ perusalueeksi voidaan valita joukko

$$\mathfrak{R} = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z - 2| \geq \sqrt{2} \text{ ja } |z + 1| \geq \sqrt{2} \right\}.$$

Taulukossa 1 on laskettu isometristen ympyröiden keskipisteet k_n ja säteiden pituudet r_n , kun $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 10$. Esimerkiksi $k_1 = \frac{1}{-2^1+1} = -1$ ja $r_1 = \left| \frac{\sqrt{2^1}}{-2^1+1} \right| = \sqrt{2} \approx 1,414$. Piirretään isometriset ympyrät, kun $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 5$, samaan kuvaan.

TAULUKKO 1. Isometristen ympyröiden keskipisteitä ja säteitä (Esim. 4.18)

n	k_n	r_n	n	k_n	r_n
-10	1,001	0,031	10	-0,001	0,031
-9	1,002	0,044	9	-0,002	0,044
-8	1,004	0,063	8	-0,004	0,063
-7	1,008	0,089	7	-0,008	0,089
-6	1,016	0,127	6	-0,016	0,127
-5	1,032	0,172	5	-0,032	0,172
-4	1,067	0,267	4	-0,067	0,267
-3	1,143	0,404	3	-0,143	0,404
-2	1,333	0,667	2	-0,333	0,667
-1	2,000	1,414	1	-1,000	1,414



KUVA 8. Aliryhmän Γ isometrisiä ympyröitä ja standardiperusalue \mathfrak{R} (Esim. 4.18).

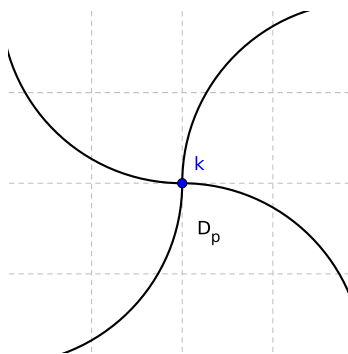
5. GEOMETRISESTI ÄÄRELLISET FUCHSIN RYHMÄT

I. Sivunvaihtomuunnokset. Fuchsian ryhmä on geometrisesti äärellinen, jos sen perusalueen reuna koostuu äärellisen monesta sivusta ja äärellisviritteinen, jos äärellinen määrä Möbius-muunnoksia generoi sen. Tässä kappaleessa osoitetaan, että Fuchsian ryhmä on geometrisesti äärellinen täsmälleen silloin, kun se on äärellisviritteinen. Aluksi näytetään, että Dirichlet'n alueessa jokaisella sivulla on täsmälleen yksi ekvivalentti sivu.

Määritelmä 5.1. Olkoon s_1 jokin Dirichlet'n alueen $D_p(\Gamma)$ sivuista. Ei-identtistä Möbius-muunnosta $T \in \Gamma$ kutsutaan sivunvaihtomuunnokseksi ja sivuja s_1 ja s_2 ekvivalenteiksi sivuiksi, jos $s_2 = T(s_1)$.

Lause 5.2. *Olkoon Γ Fuchsian ryhmä ja k sen Dirichlet'n alueen D_p kärki. Tällöin on olemassa sellainen ei-identtinen $T \in \Gamma$, että $T(k)$ on saman Dirichlet'n alueen kärki.*

Todistus. Koska Dirichlet'n alue on lokaalisti äärellinen, niin reunapistettä voidaan lähestyä Dirichlet'n alueen ulkopuolelta sopivalla janalla yhdestä (ja samasta) laatasta $T(D_p)$. Tällöin T^{-1} kuvaa kyseisen janan Dirichlet'n alueen sisälle ja sen päätepisteen Dirichlet'n alueen reunalle. Näin ollen Dirichlet'n alueen kärki k kuvautuu saman laatan reunapisteeksi jollain ei-identtisellä $T \in \Gamma$. Riittää siis osoittaa, ettei $T(k)$ voi olla sivupiste. Lokaalin äärellisyyden nojalla k voi olla ainoastaan äärellisen monen sivun kärki eli eri laattojen sivut muodostavat pisteeseen k tähtimäisen kuvion, joka koostuu äärellisen monesta osasta. Koska T on konforminen, niin pisteeseen $T(k)$ muodostuu vastaava tähtimäinen kuvio, jossa kulmat ovat täsmälleen samat kuin vastaavissa osissa pisteen k kuviossa. Näin ollen $T(k)$ on kärki. □



KUVA 9. Pisteeseen k muodostuva tähtimäinen kuvio (Lause 5.2).

Lause 5.3. *Jokaisella sivulla vähintään yksi ekvivalentti sivu Dirichlet'n alueessa.*

Todistus. Sivut ovat Dirichlet'n alueen reunalla, joten ne eivät voi kuvautua laattojen sisälle. Kärjet kuvautuvat Lauseen 5.2 nojalla kärjiksi, joten sivut kuvautuvat sivuiksi. Koska sivulla s oleva sivupiste voidaan kuvata Dirichlet'n alueen reunalle jollain ei-identtisellä $T \in \Gamma$, niin $T(s)$ on Dirichlet'n alueen sivu. □

Lause 5.4. *Jokaisella sivulla täsmälleen yksi ekvivalentti sivu Dirichlet'n alueessa*

Todistus. Osoitetaan, että sivulla ei voi olla kahta tai useampaa ekvivalenttia sivua, jolloin väite seuraa Lauseesta 5.3. Väitetään vastoin, eli että Dirichlet'n alueen sivulla s on ekvivalentit sivut $u \neq v$ samassa laatassa. Olkoon $u = U(s)$ ja $v = V(s)$. Tällöin U kuvaa sivun s sisäpuolen sivun u ulkopuoleksi ja vastaavasti V sivun s sisäpuolen sivun v ulkopuolelle (Dirichlet'n alueen suhteen).

Tällöin U^{-1} kuvaa sivun u sisäpuolen sivun s ulkopuolelle ja V kuvaa sivun s ulkopuolen sivun v sisäpuolelle. Näin ollen Dirichlet'n alueen sisällä on pisteitä, jotka ovat ekvivalentteja Möbius-muunnoksen $V \circ U^{-1}$ suhteen, mikä on ristiriita, koska laatan sisäpisteet eivät voi olla ekvivalentteja. \square

Seuraus 5.5. *Jos Dirichlet'n alueen D_p sivujen lukumäärä on äärellinen, niin se on parillinen.*

II. Geometrisesti äärelliset Fuchsin ryhmät. Seuraavaksi osoitetaan, että Fuchsin ryhmä on geometrisesti äärellinen täsmälleen silloin, kun se on äärellisviritteinen.

Määritelmä 5.6. Fuchsin ryhmä Γ on geometrisesti äärellinen, jos sillä on konvekksi perusalue, jonka reuna koostuu äärellisen monesta sivusta.

Määritelmä 5.7. Fuchsin ryhmä Γ on äärellisviritteinen, jos äärellinen määrä Möbius-muunnoksia generoi sen.

Määritelmä 5.8. Kaksi Dirichlet'n alueen laatkaa ovat vierekkäiset, jos niillä on yhteinen sivu.

Lause 5.9. *Olkoon D_p Fuchsin ryhmän Γ Dirichlet'n alue ja $\{T_n\} \subset \Gamma$ kaikista Fuchsin ryhmän Γ sivunvaihtomuunnoksista koostuva osajoukko. Tällöin Möbius-muunnokset T_n generoivat Fuchsin ryhmän Γ .*

Todistus. Tavoitteena on näyttää, että $G := \langle T_n \rangle = \Gamma$. Osoitetaan aluksi, että S on sivunvaihtomuunnos täsmälleen silloin, kun D_p ja $S(D_p)$ ovat vierekkäiset.

Jos S on sivunvaihtomuunnos ja s_1 Dirichlet'n alueen D_p sivu, niin $s_2 = S(s_1)$ on sekä laatan D_p että $S(D_p)$ sivu. Siis D_p ja $S(D_p)$ ovat vierekkäiset. Lauseen 5.4 nojalla on olemassa yksikäsitteinen sivunvaihtomuunnos T , joka kuvaa Dirichlet'n alueen jonkin sivun s_1 sivuksi s_2 . Siis $T^{-1}(s_2) = s_1$. Jos nyt laatat D_p ja $S(D_p)$ ovat vierekkäiset ja s_2 niiden yhteinen sivu, niin $S^{-1}(s_2)$ on sivu, joka on ekvivalentti sivun s_2 kanssa. Näin ollen $T^{-1} = S^{-1}$, josta $T = S$ eli S on sivunvaihtomuunnos.

Oletetaan, että S_1 on sivunvaihtomuunnos. Tästä seuraa, että laatat D_p ja $S_1(D_p)$ ovat vierekkäiset. Olkoon $S_2 \in \Gamma$ sellainen Möbius-muunnos, että laatat $S_1(D_p)$ ja $S_2(D_p)$ ovat vierekkäiset. Tällöin joillain laatan D_p sivuilla r ja s on voimassa $S_1(r) = S_2(s)$, josta seuraa, että $S_2^{-1}S_1(r) = s$. Näin ollen laatat D_p ja $S_2^{-1}S_1(D_p)$ ovat vierekkäiset ja $S_2^{-1}S_1 = T$ jollain sivunvaihtomuunnoksella T . Koska siis $S_2 = S_1T^{-1}$, niin $S_2 \in \langle T_n \rangle$.

Olkoon $S_3 \in \Gamma$ sellainen Möbius-muunnos, että laatat $S_1(D_p)$ ja $S_3(D_p)$ leikkaavat kärjessä v . Tällöin D_p ja $S_1^{-1}S_3(D_p)$ leikkaavat kärjessä $u = S_1^{-1}(v)$. Koska D_p on lokaalisti äärellinen, niin kärki u (ja siten v) voi olla ainoastaan

äärellisen monen laatan kärki. Laatta $S_3(D_p)$ voidaan siten lausua äärellisen monen Möbius-muunnoksen yhdistettynä muunnoksena

$$S_3(D_p) = U_i \dots U_2 U_1 S_1(D_p),$$

jossa $U_1, U_2, \dots, U_i \in \Gamma$ ja laatat $U_k U_{k-1} \dots U_1 S_1(D_p)$ ja $U_{k+1} U_k \dots U_1 S_1(D_p)$ ovat vierekkäiset kaikilla $k = 1, 2, \dots, i-1$. Edellisen tuloksen nojalla $U_1 S_1 \in \langle T_n \rangle$, josta seuraa, että $U_2 U_1 S_1 \in \langle T_n \rangle$. Jatkamalla päättelyä todetaan, että $S_3 \in \langle T_n \rangle$.

Koska $\Gamma(D_p) = \mathbb{U}$, niin riittää osoittaa, että $G(D_p)$ täyttää yksikkökiekon \mathbb{U} . Koska \mathbb{U} on yhtenäinen, niin todistetaan, että $G(D_p)$ on avoin ja suljettu.

Olkoon $T \in G$ ja $z \in T(D_p)$. Jos z on sisäpiste laatussa $T(D_p)$, niin se on sisäpiste joukossa $G(D_p)$. Jos z on laatan $T(D_p)$ reunapiste, muttei kärkipiste, niin z on sisäpiste joukossa $T(D_p) \cup S(D_p) \subset G(D_p)$, jossa S on se sivunvaihtomuunnos, jonka vaihtamalla sivulla piste z sijaitsee. Olkoon seuraavaksi z laatan $T(D_p)$ kärjessä. Koska Dirichlet'n laatoitus on lokaalisti äärellinen, niin z voi olla ainoastaan äärellisen monen muun laatan kärki. Laatat, joilla on yhteinen kärki pisteessä z , ovat joko vierekkäisiä tai ne voidaan kuvata toisilleen äärellisen monen sivunvaihtomuunnoksen yhdistettynä muunnoksena. Erityisesti siis z on sisäpiste z -kärkisten laattojen äärellisessä yhdisteessä, joka on joukon $G(D_p)$ osajoukko. $G(D_p)$ on siis avoin.

Merkitään $H = \Gamma \setminus G$. Osoitetaan $H(D_p)$ avoimeksi. Olkoon $w \in H(D_p)$. Koska $\Gamma(D_p) = \mathbb{U}$, niin on olemassa sellainen $T_k \in H$, että $w \in T_k(D_p)$. Merkitään $z = T_k^{-1}w$. Jos z on sisäpiste laatussa D_p , niin on olemassa sellainen avoin ympäristö $V_1 \subset D_p$, että $z \in V_1$. Koska T_k on ei-vakiona Möbius-muunnoksena homeomorfismi, niin avoimen joukon kuva on avoin. Näin ollen $T_k(V_1) \subset T_k(D_p) \subset H(D_p)$ on pisteen w avoin ympäristö. Jos z on reunapiste, muttei kärkipiste, laatussa D_p , niin on olemassa sellainen sivunvaihtomuunnos T_l , että z on sisäpiste joukossa $D_p \cup T_l(D_p)$. Näin ollen on olemassa pisteen z avoin ympäristö $V_2 \subset D_p \cup T_l(D_p)$, jonka kuva $T_k(V_2) \subset T_k(D_p \cup T_l(D_p)) \subset H(D)$ on pisteen w avoin ympäristö. Jos z on laatan D_p kärkipiste, niin on olemassa sellaiset sivunvaihtomuunnokset T_1, \dots, T_n , että z on sisäpiste joukossa $D_p \cup T_1(D_p) \cup \dots \cup T_n(D_p)$. Tästä seuraa, että olemassa pisteen z avoin ympäristö $V_3 \subset D_p \cup T_1(D_p) \cup \dots \cup T_n(D_p)$, jonka kuva $T_k(V_3) \subset T_k(D_p \cup T_1(D_p) \cup \dots \cup T_n(D_p)) \subset H(D_p)$ on pisteen w avoin ympäristö. $H(D_p)$ on siis avoin.

Koska $G(D_p)$ ja $H(D_p)$ ovat avoimia, niin ne ovat toistensa komplementteina myös suljettuja. Koska $G(D_p)$ on epätyhjä, niin $G(D_p) = \Gamma(D_p)$ ja $H(D_p) = \emptyset$. Siis $G = \Gamma$. \square

Seuraus 5.10. *Jos Fuchsin ryhmä on geometrisesti äärellinen, niin se on äärellisviritteinen.*

Lause 5.11. *Dirichlet'n alueen kärkien muodostama joukko on diskreetti puolitasossa \mathbb{H} .*

Todistus. Osoitetaan, että kärjet ovat isoituja pisteitä. Väitetään toisin, eli että kärjillä w_i on kasautumispiste $w \in \mathbb{H}$. Jos z kuuluu Dirichlet'n alueen $D_p(\Gamma)$ johonkin sivuun, niin on olemassa sellainen ei-identtinen $T \in \Gamma$, että $\rho(p, z) = \rho(T(p), z) = \rho(p, T^{-1}(z))$. Näin ollen jokaiselle w_i on olemassa

sellainen ei-identtinen $T_i \in \Gamma$, että $\rho(p, w_i) = \rho(p, T_i(w_i))$. Kun T_i ovat eri Möbius-muunnoksia, niin

$$\begin{aligned} \rho(w, T_i(w_i)) &\leq \rho(w, w_i) + \rho(w_i, T_i(w_i)) \\ &\leq \rho(w, w_i) + \rho(w_i, p) + \rho(p, T_i(w_i)) \\ &= \rho(w, w_i) + 2\rho(w_i, p) \\ &\leq \rho(w, w_i) + 2\rho(w_i, w) + 2\rho(w, p) \\ &= 2\rho(w, p) + 3\rho(w_i, w). \end{aligned}$$

Kun $i \rightarrow \infty$, niin $\rho(w_i, w) \rightarrow 0$. Näin ollen $T_i(w_i) \in K$ jollain kompaktilla $K \subset \mathbb{H}$, kun $i > N$. Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla joukossa K on suppeneva osajono kärkiä w_i , mikä on ristiriita, koska Dirichlet'n alue on lokaalisti äärellinen. \square

Huomautus 5.12. Dirichlet'n alueen kärkien muodostama joukko on diskreetti myös yksikkökiekossa \mathbb{U} .

Lause 5.13. *Kompaktin joukon diskreetti osajoukko on äärellinen.*

Todistus. Väitetään, että kompaktin joukon diskreetti osajoukko B on ääretön. Bolzano-Weierstrassin lauseen nojalla rajoitetulla ja äärettömällä joukolla B on kasautumispiste $b \in B$. Tämä on ristiriita, koska diskreetissä joukossa ei ole kasautumispisteitä. \square

Lause 5.14. *Jos Fuchsin ryhmä on äärellisviritteinen, niin se on geometrisesti äärellinen.*

Todistus. [Katok, s.104-109], [Beardon, s.254-258] Käytetään kiekkomallia ja euklidista metriikkaa. Olkoon $F := D_0(\Gamma)$ äärellisviritteisen Fuchsin ryhmän Γ Dirichlet'n alue origon suhteen ja olkoot S_1, S_2, \dots, S_j virittäjämuunnokset. Lauseen 5.9 mukaan Dirichlet'n alueen F sivunvaihtomuunnokset virittävät Fuchsin ryhmän Γ . Tästä seuraa, että jokainen Fuchsin ryhmän virittäjämuunnos voidaan esittää äärellisen monen sivunvaihtomuunnoksen yhdistettynä muunnoksena. Erityisesti siis $\langle S_1, S_2, \dots, S_j \rangle$ voidaan esittää äärellisen monen sivunvaihtomuunnoksen avulla. Merkitään edellä tarvittavia sivunvaihtomuunnoksia T_1, T_2, \dots, T_i . Näin ollen $\langle T_1, T_2, \dots, T_i \rangle = \Gamma$ eli Γ virittyy äärellisen monella sivunvaihtomuunnoksella.

Tavoitteena on todistaa, että

- (i) Dirichlet'n alue voidaan esittää muodossa

$$F = K \cup F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_i$$

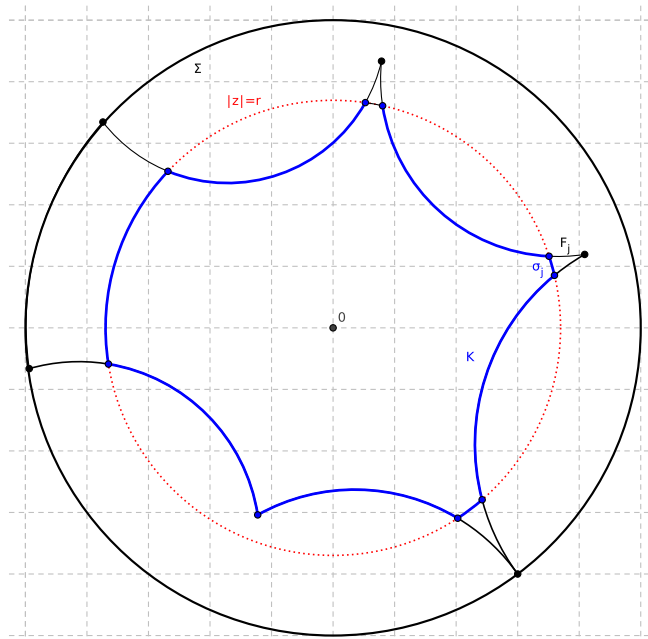
(ii) ja vain äärellisen moni Dirichlet'n alueen sivu leikkaa joukon $F_k \forall k$, missä K on Dirichlet'n alueen F ja r -säteisen, origokeskeisen kiekon leikkaus

$$K = F \cap \{|z| < r\}.$$

Säde $r \in]0, 1[$ on valittu siten, että suljetun kiekon $\{|z| \leq r\}$ ja Dirichlet'n alueen sivun leikkaus on epätyhjä ja sisältää useamman kuin yhden pisteen kaikilla Dirichlet'n alueen sivuilla, jotka Möbius-muunnokset T_1, T_2, \dots, T_i vaihtavat. Näin ollen edellä mainittu leikkaus on aito kaari kaikilla i . Valinta voidaan tehdä, koska Möbius-muunnoksia T_1, T_2, \dots, T_i , ja siten niiden vaihtamia sivuja, on äärellinen määrä. Lisäksi vaaditaan, ettei ympyrä $\{|z| = r\}$

leikkaa yhtään Dirichlet'n alueen kärkeä. Joukolla K on kompakti sulkeuma yksikkökiekossa \mathbb{U} .

Jos ehdot (i) ja (ii) toteutuvat, niin Lauseiden 5.11 ja 5.13 nojalla vain äärellisen moni Dirichlet'n alueen sivu leikkaa joukon K , mistä väite seuraa.



KUVA 10. Alue K

Osoitetaan aluksi, että

$$\Gamma(K) = \bigcup_{T \in \Gamma} T(K)$$

on yhtenäinen. Koska K on konvekksi, ja siten yhtenäinen, niin $T_j(K)$ on yhtenäinen kaikilla $T_j \in \Gamma$, $j = 1, 2, \dots, i$. Koska T_j on sivunvaihtomuunnos, niin joukoilla K ja $T_j(K)$ on yhteinen Dirichlet'n alueen sivu tai sen segmentti kaikilla $j = 1, 2, \dots, i$. Näin ollen $K \cup T_j(K)$ on yhtenäinen kaikilla $j = 1, 2, \dots, i$. Koska T_k on sivunvaihtomuunnos kaikilla $k = 1, 2, \dots, i$, niin $T_k T_j(K)$ on yhtenäinen ja joukoilla $T_j(K)$ ja $T_k T_j(K)$ on yhteinen Dirichlet'n alueen sivu tai sen segmentti kaikilla $j = 1, 2, \dots, i$. Siis $K \cup T_j(K) \cup T_k T_j(K)$ on yhtenäinen kaikilla $j = 1, 2, \dots, i$ ja $k = 1, 2, \dots, i$. Jos T_i on sivunvaihtomuunnos, niin selvästi T_i^{-1} on sivunvaihtomuunnos. Koska äärellisen moni sivunvaihtomuunnos virittää Fuchsin ryhmän Γ , niin jatkamalla edellistä päättelyä Möbius-muunnosten T_1, T_2, \dots, T_i yhdistettyjen muunnosten kuville joukosta K huomataan, että $\Gamma(K)$ on yhtenäinen.

Esitetään joukon K reunan osat, jotka eivät ole Dirichlet'n alueen reunan osia, muodossa

$$F \cap \{|z| = r\} = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_s,$$

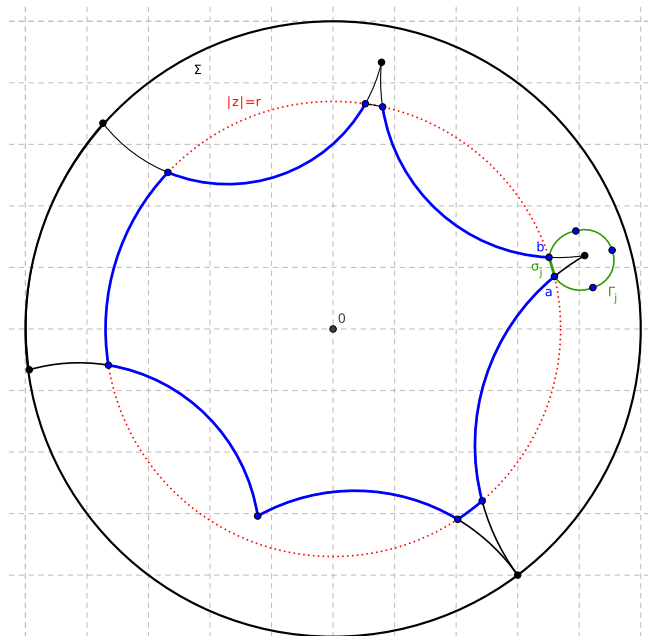
jossa joukot σ_i ovat pareittain pistevieraita, suljettuja ympyrän $\{|z| = r\}$ kaaria, joiden päätepisteet kuuluvat Dirichlet'n alueen reunaan. Esitystapa on mahdollinen, koska säde r on valittu sellaiseksi, että joukot σ_i ovat aitoja kaaria.

Koska kiekkomallissa Fuchsin ryhmän Dirichlet'n alue origon suhteen on sama kuin sen standardiperusalue, niin Dirichlet'n alueen sivut, joille T_j on sivunvaihtomuunnos, kuuluvat isometrisiin ympyröihin $\mathfrak{S}(T_j)$ ja $\mathfrak{S}(T_j^{-1})$. Olkoon $z \in \mathfrak{S}(T_j)$. Lauseen 2.24 mukaan $w := T_j(z) \in \mathfrak{S}(T_j^{-1})$. Koska näillä isometrisillä ympyröillä on sama säde ja ne ovat yhtä kaukana origosta, niin Lemmasta 2.26 seuraa, että $|w| = |z|$ (ks. kuva 2). Erityisesti siis näiden isometristen ympyröiden ja ympyrän $\{|z| = r\}$ leikkauspisteet ovat ekvivalentit.

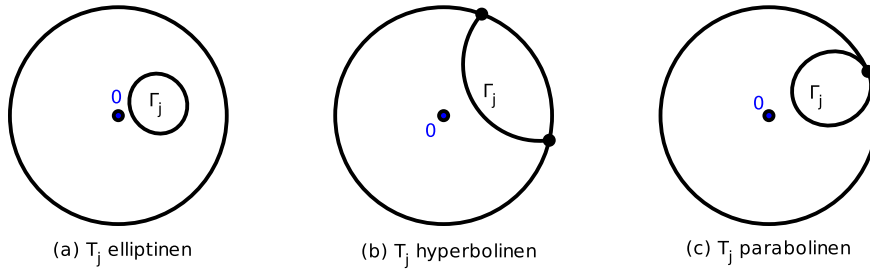
σ_j on se ympyrän $\{|z| = r\}$ kaari, joka jää isometristen ympyröiden $\mathfrak{S}(T_j)$ ja $\mathfrak{S}(T_j^{-1})$ väliin. Näin ollen kaaren σ_j päätepisteet a ja b ovat ekvivalentteja sivunvaihtomuunnoksen T_j suhteen. Käyrä $T_j(\sigma_j)$ yhdistää pisteet $T_j(a) = b$ ja $T_j(b) = T_j^2(a)$. Induktiivisesti $T_j^n(\sigma_j)$ yhdistää pisteet $T_j^n(a)$ ja $T_j^{n+1}(a)$. Koska vastaavasti $T_j^{-1}(\sigma_j)$ yhdistää pisteet $T_j^{-1}(b) = a$ ja $T_j^{-1}(a) = T_j^{-2}(b)$, niin $T_j^{-n}(\sigma_j)$ yhdistää pisteet $T_j^{-n}(a)$ ja $T_j^{-(n+1)}(a)$. Pisteiden a rata Möbiusmuunnoksessa T_j on siis osajoukko kaaren σ_j iteraatioista

$$\{T_j^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma_j := \{T_j^n(\sigma_j) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Huomautuksesta 4.5 seuraa, että Γ_j on Jordan-käyrä tai -kaari riippuen Möbiusmuunnoksen T_j kategoriasta. Jos T_j on elliptinen, niin Γ_j on Jordan-käyrä yksikkökiekossa, sillä Lauseen 3.12 nojalla Möbiusmuunnoksen T_j kertaluku on äärellinen eli käyrä Γ_j sulkeutuu tietyllä äärellisellä $n \in \mathbb{N}$. Jos T_j on hyperbolinen, niin kuvapisteen raja-arvot $\lim_{n \rightarrow \infty} T_j^n(a)$ ja $\lim_{n \rightarrow -\infty} T_j^n(a)$ ovat Möbiusmuunnoksen T_j kiintopisteet. Näin ollen Γ_j on Jordan-kaari,



KUVA 11. Joukko Γ_j on Jordan-käyrä tai -kaari, joka koostuu kaaren σ_j iteraatioista muunnoksessa T_j . Kuvan Γ_j on likimainen ympyrä.



KUVA 12. Jordan-käyrä Γ_j eri Möbius-muunnoksille T_j .

jonka päätepisteet ovat yksikkökielellä. Mikäli T_j on parabolinen, niin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_j^n(a) = \lim_{n \rightarrow -\infty} T_j^n(a)$$

eli Γ_j on Jordan-kaari, joka sivuaa yksikkökielellä ja sulkeutuu parabolisessa kiintopisteessä. Jordan-käyrä tai -kaari Γ_j on selvästi T_j -invariantti.

Mikään joukon K pisteistä ei voi olla ekvivalentti pisteen $a \in \sigma_j$ kanssa, koska K ja σ_j ovat saman perusalueen erillisiä osajoukkoja. Tästä seuraa, että $\Gamma(K) \cap \Gamma_j = \emptyset$ kaikilla $j = 1, 2, \dots, i$. Koska lisäksi K ja F_j ovat saman perusalueen erillisiä osajoukkoja ja $\Gamma(K)$ on yhtenäinen, niin Γ_j erottaa joukot F_j ja $\Gamma(K)$ yksikkökielellä.

Olkoon F_j , $j = 1, 2, \dots, n$, yhdiste kaaresta σ_j ja joukon $F \setminus \sigma_j$ komponentista, joka ei sisällä origoa. Näin Dirichlet'n alue voidaan esittää toivotussa muodossa ja ehto (i) täyttyy.

Olkoon T_j elliptinen. Toisella joukon $\mathbb{U} \setminus \Gamma_j$ komponenteista on kompakti sulkeuma yksikkökielellä \mathbb{U} . Merkitään tätä komponenttia V . Oletetaan, että $F_j \subset V$. Koska V on kompakti ja Dirichlet'n alueen kärkien muodostama joukko on Lauseen 5.11 nojalla diskreetti, niin Lauseen 5.13 nojalla joukossa V on äärellinen määrä kärkiä. Tästä seuraa, että vain äärellisen moni Dirichlet'n alueen sivu leikkaa joukon F_j . Jos $F_j \not\subset V$, niin $\Gamma(K) \subset V$. Koska Dirichlet'n laatoitus on lokaalisti äärellinen, niin Γ on äärellinen. Näin ollen Dirichlet'n monikulmiossa on äärellinen määrä sivuja.

Olkoon T_j hyperbolinen. Toinen joukon $\mathbb{U} \setminus \Gamma_j$ komponenteista sisältää joukon $\Gamma(K)$. Merkitään tätä komponenttia V . Koska $0 \in V$ ja $\Gamma_0 \subset V$, niin komponentin V euklidinen sulkeuma sisältää ekvivalenssiluokan Γ_0 kaikki rajapisteet. Lauseen 4.13 todistuksen nojalla Fuchsien ryhmän Γ kaikki rajapisteet kuuluvat komponentin V euklidiseen sulkeumaan.

Toinen joukon $\mathbb{U} \setminus \Gamma_j$ komponenteista sisältää joukon F_j . Merkitään tätä komponenttia W . Yksikköympyrän Σ avoimessa kaaressa Σ_W , joka on osa komponentin W reunaa, ei siis ole rajapisteitä. Koska $F_j \subset F$, niin F_j jää keskinormaalien $L_0(T_j)$ ja $L_0(T_j^{-1})$ väliin. Lauseen 2.37 nojalla $L_0(T_j) = \mathfrak{S}(T_j^{-1})$ ja $L_0(T_j^{-1}) = \mathfrak{S}(T_j)$. Jos z on Möbius-muunnoksen T_j kiintopiste, niin Lauseen 2.25 nojalla $z \in \text{int}[\mathfrak{S}(T_j)]$ tai $z \in \text{int}[\mathfrak{S}(T_j^{-1})]$. Koska triviaalin laskutoimituksen kautta huomataan, että isometriset ympyrät $\mathfrak{S}(T)$ ja $\mathfrak{S}(T^{-1})$ eivät leikkaa, niin joukossa F_j ei ole Möbius-muunnosten T_j kiintopisteitä.

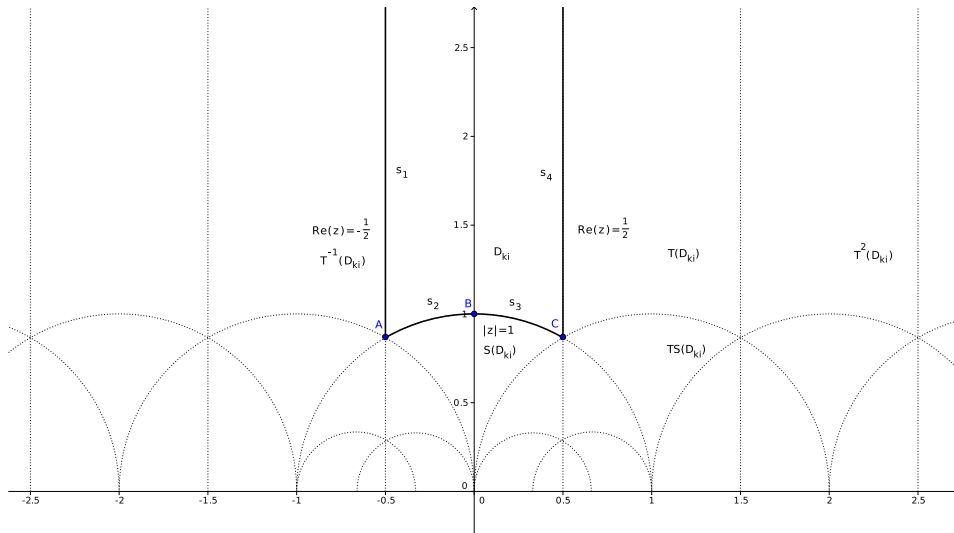
Koska Lauseen 4.13 nojalla lokaalisti äärellisen perusalueen euklidinen halkaisija suppenee kohti nollaa, leikkaa F_j vain äärellisen määrän Dirichlet'n alueen laattoja $T(F)$. Näin ollen joukon F_j reuna koostuu äärellisen monesta sivusta ja ehto (ii) täyttyy.

Olkoon T_j parabolinen. Joukon $\mathbb{U} \setminus \Gamma_j$ toiselle komponentille V on voimassa

$$\overline{V} \cap \Sigma = \alpha.$$

Jos $\Gamma(K) \subset V$, niin $\Lambda(\Gamma) = \alpha$. Näin ollen Γ koostuu vain parabolisista Möbius-muunnoksista (eli siirroista) ja on syklinen parabolinen aliryhmä, jonka perusalueeseen kuuluu täsmälleen kaksi sivua. Ehto (ii) siis toteutuu. Jos taas $\overline{F_j} \subset V$, niin joko $\overline{F_j} \cap \Sigma = \emptyset$ tai $\overline{F_j} \cap \Sigma = \alpha$. Ensimmäisessä tilanteessa ehto (ii) seuraa suoraan Lauseista 5.11 ja 5.13, koska Dirichlet'n alueen kärkiä on äärellinen määrä kompaktissa yksikkökierokkeen \mathbb{U} osajoukossa. Toisessa tilanteessa on triviaali lasku osoittava, että isometriset ympyrät $\mathfrak{S}(T_j)$ ja $\mathfrak{S}(T_j^{-1})$ ovat toistensa tangentteja kiintopisteessä α . Tästä seuraa, että vain kaksi sivua leikkaa yksikkökierokkeen Σ ja ensimmäisen tilanteen nojalla yksikkökierokossa \mathbb{U} on vain äärellinen määrä sivuja. Siis ehto (ii) toteutuu. \square

III. Modulaariryhmä. Lopuksi tutkitaan lisää modulaariryhmän Γ_M ominaisuuksia.



KUVA 13. Modulaariryhmän Dirichlet'n alue.

Lause 5.15. Modulaariryhmän Γ_M Dirichlet'n alue pisteen $p = ki, k > 1$ suhteen on joukko

$$F = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Todistus. [Katok, s.55-56] Olkoon $T(z) = z + 1$ ja $S(z) = -\frac{1}{z}$. Selvästi $T, S \in \Gamma_M$. Joukon D_{ki} sivuja ovat hyperboliset puolisuorat $Re(z) = \frac{1}{2}$ ja $Re(z) = -\frac{1}{2}$ sekä hyperbolinen suora $|z| = 1$, jotka voidaan lausua muodossa $L_{ki}(T)$, $L_{ki}(T^{-1})$ ja $L_{ki}(S)$. Näin ollen $D_{ki} \subset F$.

Tehdään vastaväite eli väitetään, että $D_{ki} \neq F$. Tällöin on olemassa sellainen $V \in \Gamma_M$, että $z, V(z) \in \text{int}(F)$. Jos $c = 0$, niin $V(z) = z + b$ on kokonaislukusiirto ja ristiriita on ilmeinen. Olkoon nyt $c \neq 0$, $V(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ jollain $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $ad - bc = 1$ ja $z = z_1 + iz_2$, jossa $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Triviaalin laskutoimituksen kautta huomataan, että

$$\frac{\text{Im}V(z)}{\text{Im}(z)} = \frac{(ad - bc)z_2}{|cz - d|^2 z_2} = \frac{1}{|cz + d|^2}.$$

Koska $|z| > 1$ ja $\text{Re}(z) > -\frac{1}{2}$, niin

$$|cz + d|^2 = c^2|z|^2 + 2\text{Re}(z)cd + d^2 > c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd|.$$

Yhtälön oikea puoli on ei-negatiivinen kokonaisluku ja koska $ad - bc = 1$, niin se on nolasta poikkeava eli vähintään 1. Tästä seuraa, että $|cz + d| > 1$ ja

$$\text{Im}V(z) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} < \text{Im}(z).$$

Koska lisäksi

$$\text{Im}(z) = \text{Im} V^{-1}V(z) = \frac{\text{Im}V(z)}{|cV(z) + d|^2} < \text{Im}V(z),$$

mikä johtaa ristiriitaan, niin $D_{ki} = F$. □

Lause 5.16. Möbius-muunnokset $T(z) = z + 1$ ja $S(z) = -\frac{1}{z}$ virittävät modulaariryhmän.

Todistus. Käytetään kuvan 13 merkintöjä. Dirichlet'n alueen $D_{ki}(\Gamma_M)$ reuna koostuu neljästä sivusta. Kärjet ovat $A = (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})$, $B = i$, $C = (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})$ ja $D = \infty$. Selvästi $T(s_1) = s_4$ eli Möbius-muunnos $T(z) = z + 1$ on modulaariryhmän Dirichlet'n sivunvaihtomuunnos.

Koska $S^2(z) = z$ ja $\text{Tr}(S) = 1$, niin S on elliptinen Möbius-muunnos, jonka kertaluku on 2. Koska $S(i) = \frac{-1}{i} = i$, niin B on sen kiintopiste. Huomautuksen 4.10 kohdan (2) nojalla $S(s_2) = s_3$. Näin ollen S on modulaariryhmän toinen sivunvaihtomuunnos.

Lauseen 5.4 nojalla T, S, T^{-1} ja S^{-1} ovat modulaariryhmän ainoat sivunvaihtomuunnokset. Lauseesta 5.9 seuraa, että T ja S generoivat modulaariryhmän. □

VIITTEET

- [Apostol] Apostol, T.M. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*, Springer-Verlag, 1990
- [Burn] Burn, R.P. *Groups - A Path To Geometry*, Cambridge University Press, 1985
- [Smith] Smith, D.E. *History of Mathematics*, Dover Publications, 1958
- [Beardon] Beardon, A.F. *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, 1983
- [Colombo] Colombo, S. *Holomorphic Functions of One Variable*, Gordon and Breach Science Publishers Inc, 1983
- [Ford] Ford, Lester R. *Automorphic Functions*, Chelsea Publishing Company, 2. painos, 1951
- [Hazewinkel] Hazewinkel, M. *Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 1987
- [Lehner] Lehner, J. *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*, American Mathematical Society, 1964
- [Lehto] Lehto, O. *Funktioteoria I-II*, Limes, 1985
- [Katok] Katok, S. *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, 1992
- [Klein] Klein, F. Hermann R. *Development of Mathematics in The 19th Century*, Math Sci Press, 1979
- [Simon] Simon, B. *Szego's Theorem and Its Descendants - Spectral Theory for L^2 Perturbations of Orthogonal Polynomials*, Princeton University Press, 2011
- [Stahl] Stahl, S. *The Poincaré half-plane: a gateway to modern geometry*, Jones and Barlett Publishers, 1993
- [Walkden] Walkden, C. *Limit sets*, The University of Manchester, viitattu 21.4.2011
http://www.maths.manchester.ac.uk/~cwalkden/hyperbolic-geometry/limit_sets.pdf