JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

TODISTAMINEN LUKION PITKÄSSÄ MATEMATIIKASSA

Anna-Kaisa Viertola

Pro Gradu tutkielma
Kesä 2011
Jyväskylän yliopisto
Matematiikan laitos

Sisällysluettelo

1 JOHDANTO

Lähtökohtana työlle on oletus siitä, että koulussa todistetaan matemaattisia tuloksia mitättömän vähän ja liian usein ne annetaan oppilaille suoraan perustelematta, mistä ne tulevat tai todistamatta niitä. Oletettavaa kun kuitenkin on, että matematiikan syvällistä ymmärtämistä ja osaamista edesauttaa paljonkin, jos tietää, mistä tulokset tulevat.

Todistamisen painotus koulumatematiikassa on vaihdellut vuosien saatossa. Mitä matematiikka oikeastaan nykypäivänä on? Koulumatematiikkaa tai sen opetusta tarkasteltaessa tulee voimakas tunne siitä, että se on laskuoppia. Mutta millainen painoarvo tulisi todistamisella olla koulussa, jotta se palvelisi oppilaita parhaiten?

Toisaalta voidaan ajatella, että lukiolla on yleissivistävä tehtävä. Laskutaidosta on hyötyä arkielämässä. Toisaalta lukion tehtävä olisi valmistaa yliopisto- ja korkeakouluopintoihin. Tätä päämäärää ei pelkällä laskuopin harjoittamisella saavuteta – ainakaan parhaalla mahdollisella tavalla.

Voisiko myös ajatella, että arkielämässä olisi monella tapaa hyötyä siitä, jos osaa loogisesti ja ymmärrettävästi perustella tekemisensä ja ajatuksensa ja päätellä, mistä seuraa mitäkin? Ymmärrettävästi perustellut väitteet ovat huomattavasti vahvemmassa asemassa kuin uskon varassa olevat väittämät. Siitonen ja Halonen kummastelevat sitä, miten nurinkurista on, että neljän peruslaskutoimituksen hallinta kuuluu yleissivistykseen, mutta loogisen seuraussuhteen vastaavanlainen tuntemus ei siihen kuulu. [Siitonen & Halonen, 1997, 113]

Työn alussa selvitän yleistä matematiikasta sekä määrittelen työssä esiintyviä käsitteitä. Matematiikan historiaa ja filosofiaa selvitetään hieman luvussa kolme, koska historiasta löytyy todistamisen historiaa valottavia seikkoja. Luvussa neljä esittelen tavallisimmat todistamismenetelmät ja mihin niiden käyttö perustuu. Luvussa viisi esittelen opetussuunnitelmaa jotta tiedetään, mitä on asetettu oppimisen tavoitteiksi ja jotta on, mihin peilata.

Todistamisen aseman tutkimisen lähtökohtana ovat ensisijaisesti lukion pitkän matematiikan oppikirjat. Kirjat vaikuttavat jossain määrin siihen, mitä tunneilla opetetaan ja tehdään, mutta niistä ei tietenkään voida päätellä, mitä oppitunneilla käytännössä tapahtuu. Lisäksi luon katsauksen pitkän matematiikan ylioppilaskokeisiin. Pyrkimyksenähän on, että oppilailla olisi hyvät valmiudet menestyä niissä.

Lopuksi analysoin paria todistamista käsittelevää yliopistotason oppikirjaa ja ehdotan, miten todistamista saataisiin lisättyä lukion matematiikkaan. Viimeisenä on yhteenvetoa työstä ja sen tuloksista.

2 YLEISTÄ

Matematiikka ei ole pelkästään mekaanista laskemista tai laskuoppia ja kaavoihin sijoittamista. Laskeminen on matematiikassa usein vain apuvälineen roolissa. Matematiikka eroaa muista tieteenaloista siinä, että se ei tuota tietoa empiirisesti tai kokemusperäisesti eikä korjaa myöhemmin itseään, vaan tieto laajenee koko ajan jo olemassa olevalle perustalle. Matemaattinen tieto on siten kasautuvaa, vanhoista tiedoista johdetaan uusia, ja uudet tulokset eivät voi kumota vanhoja. [Pyramidi 1 Funktiot ja yhtälöt, 2005, 26]

Matematiikassa lähtökohtana ovat tietyt perusoletukset, joita kutsutaan *aksioomiksi*. Aksioomia ei perustella tosiksi tai epätosiksi, ne vain oletetaan. Usein aksioomat valitaan niin, että ne tuntuvat ilmeisiltä tosiasioilta, mutta näin ei ole pakko toimia. Aksioomiksi voidaan valita, mitä halutaan. Näin siksi, että matematiikassa ei pyritä osoittamaan, että ”tämä on totta”, vaan ”jos tämä on totta, niin silloin myös tuo on totta”. [Pyramidi 1 Funktiot ja yhtälöt, 2005, 137]

Matemaattista tietoa tuotetaan deduktiivisella päättelyllä, aksioomat lähtökohtana. *Deduktioksi* kutsutaan päättelyä yleisestä yksityiseen ja päättely on *deduktiivinen*, jos se säilyttää totuuden eli jos johtopäätös on oletusten looginen seuraus. Siten sanotaan, että *matematiikka* on tietyistä aksioomista johdettavien deduktiivisten päättelyketjujen (todistusten) muodostamia tosia lauseita. Usein myös sanotaan, että matematiikka on sitä, mitä matemaatikot tekevät. [Käenmäki, 2005, 7]

Matemaattisen todistuksen keskeisiä käsitteitä ovat oletus, väite ja todistus. *Oletukseksi* kutsutaan niitä asioita, jotka oletetaan tosiksi riippumatta siitä, ovatko ne sitä vai eivät. *Väite* on sellainen käsitteiden yhteenliittymä, joka voi olla tosi tai epätosi eli pitää paikkansa tai olla pitämättä paikkaansa. [Siitonen & Halonen, 1997, 80] Väitteellä on kaksi mahdollista totuusarvoa, tosi tai epätosi. *Todistus* on periaatteessa päättelyketju aksioomista väitteisiin asti. Käytännössä välivaiheina on *lemmoja* eli aputuloksia ja aiemmin todistettuja lauseita, sillä ei ole mitenkään mahdollista joka kerta peruuttaa loogisesti aksioomiin asti. Todistuksissa hyödynnetään usein määritelmiä. *Määritelmä*, on eksakti, yksiselitteinen selvitys matemaattisen sanan tai käsitteen merkityksestä. [Hammack, 2009, 81]

Ankarasti ottaen todistamisesta voidaan puhua vain aksiomaattisten järjestelmien yhteydessä. Niiden ulkopuolella esiintyy vain perustelemista. [Siitonen & Halonen, 1997, 148] Siinä missä todistus etenee aksioomista deduktiivisesti väitteeseen, perustelu etenee usein päinvastoin: otetaan väite ja yritetään löytää todisteet, vaikka väitteellä ei välttämättä ole suurestikaan tekemistä totuuden kanssa. Siinä missä deduktiivinen päättely on sitova, ei-sitovassa, *induktiivisessa*, päätelmässä johtopäätöksen ajatellaan seuraavan oletuksista vain jollain todennäköisyydellä. [Siitonen & Halonen, 1997, 126] Matematiikan tehtävässä perustelu voidaan ymmärtää ratkaisua tukevaksi ja perustelevaksi argumentoinniksi, mutta se ei ole täsmällistä ja aukotonta samalla lailla kuin osoittaminen. Väärääkin ratkaisua tukemaan voi löytyä perusteluita.

Matematiikka on siinä mielessä paljolti erilaista kuin monet muut tieteenalat, että ulkoa opeteltavaa ja muistinvarassa olevaa tietoa ei vaadita paljon. Kun osaa aksioomat ja määritelmät, pystyy tietoa tuottamaan päättelemällä ja johtamaan tuloksia, vaikkei niitä muistaisikaan. Kyky ajatella ja ymmärtää asioita on matematiikassa arvokkaampaa kuin muistinvarainen tietäminen. Guzmánin mukaan matematiikka voi opettaa selkeän, järkevän ja luotettavan ajattelutavan. [Guzmán, 1990, 12]

3 MATEMATIIKAN FILOSOFIAA JA HISTORIAA

Lähteenä koko kolmannessa luvussa on käytetty pääasiassa Matti Lehtisen kirjaa Matematiikan lyhyt historia vuodelta 1995. Jos lähteenä on ollut jokin muu kirja, se on ilmoitettu kyseisessä kohdassa. Katsaus matematiikan historiaan on pyritty tekemään erityisesti todistamiseen liittyviä seikkoja silmällä pitäen.

3.1 MATEMATIIKAN HISTORIASTA

Matematiikasta, siinä mielessä kuin sana arkisesti ymmärretään, voidaan ruveta puhumaan Egyptin, Babylonian, Intian ja Kiinan jokilaaksojen ensimmäisten suurten muinaiskulttuurien yhteydessä. Noin kaksi kolme vuosituhatta ennen ajanlaskun alkua näiden kulttuurien kehittyneisyys vaati melkoisesti laskemista.

Omana itsenäisenä tieteenä matematiikan katsotaan alkaneen kuitenkin vasta noin 500 vuotta ennen ajanlaskun alkua antiikin Kreikassa, kun kreikkalaiset oivalsivat, että matemaattista tietoa voi tuottaa päättelemällä.

Perimätiedon mukaan ensimmäinen nimeltä tunnettu matemaatikko oli kreikkalainen Thales (624?-547? eKr.). Hänen sanotaan todistaneen joitakin yksinkertaisia geometrian lauseita, kuten että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, ristikulmat ovat yhtä suuret ja ympyrän jokainen halkaisija jakaa ympyrän kahteen yhtä suureen osaan.

Pythagoraan (572?-497 eKr.) perustamalla matemaattis-mystisellä koulukunnalla on ollut suuri merkitys matematiikan kehittymiselle omaksi itsenäiseksi tieteenalaksi. Keskeistä pythagoralaisten matematiikassa ja filosofiassa oli luonnollinen luku. Kriisi oli valtava, kun myöhemmin huomattiin, että esimerkiksi neliön lävistäjä ei olekaan luonnollinen luku, vaikka sivut ovatkin.

Filosofi Platonilla (427-347 eKr.) oli Ateenassa Akatemia. Platonin piirin huomattavin matemaattinen edustaja oli knidoslainen Eudoksos (408?-355 eKr.), joka keksi nk. *ekshaustio*- eli tyhjennysmenetelmän pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämiseksi. Menetelmän avulla voidaan muodostaa täsmällisiä epäsuoria todistuksia käyräviivaisia kuvioita koskeville lauseille. Eudoksosta voidaan pitää integraalilaskennan edelläkävijänä.

Eukleides (365?-300? eKr.) oli Aleksandriassa sijaitsevan Museion-instituutin ensimmäinen matematiikan edustaja. Instituuttia voidaan pitää maailman ensimmäisenä yliopistona. Eukleideen kuuluisin teos on Stoikheia eli Alkeet, latinankieliseltä nimeltään Elementa. Alkeet esittää koko Eukleidesta edeltävän ajan matematiikan. Todistus löytyy esim. alkulukujen lukumäärän rajattomuudesta ja täsmälleen viiden säännöllisen monitahokkaan olemassaolosta. Teoksen merkitys on sisällön lisäksi esitystavassa. Teos alkaa määritelmistä, aksioomista ja postulaateista, jotka oletetaan annetuiksi. Kaikki muut lauseet johdetaan näistä suoraan tai välillisesti. Tämä matemaattis-deduktiivinen metodi on jäänyt matematiikkaan vakiintuneeksi esitystavaksi.

Kreikkalaista Arkhimedesta (287?-212 eKr.) pidetään antiikin ajan lahjakkaimpana matemaatikkona. Hänen monipuolisen tuotantonsa painopiste on aiheissa, jotka katsotaan integraalilaskennaksi. Hän todisti täsmällisesti ekshaustiomenetelmää käyttäen, että ympyrän ala on puolet säteen ja kehän tulosta, laski paraabelin segmentin ja ellipsin alan, pallon alan ja tilavuuden, pyörähdyskappaleiden tilavuuksia, erilaisten kuvioiden ja kappaleiden painopisteitä, ympyrän kehän likiarvoja jne.

Muita merkittäviä kreikkalaisia matemaatikkoja olivat mm. Apollonios (260?-170 eKr.), Diofantos (250 jKr.), Hipparkhos (180?-125 eKr.), Klaudios Ptolemaios (85?-165 jKr.), Menelaos (noin 100 jKr.), Heron (noin 75 jKr) ja Pappos (noin 320). Antiikin matematiikka alkoi sammua muun antiikin kulttuurin mukana ajanlaskumme alkuvuosisatoina.

Rooman valtakunnan luhistuttua 400-luvulla lakkautettiin Ateenan filosofinen akatemiakin 529. Seuraavina vuosisatoina matematiikan tutkimus sammui. Vasta renessanssin aikana alkoi länsimaalainen matematiikka elpyä. Matematiikan kehityksen painopiste oli neljännestä kolmanteentoista vuosisataan ensin intialaisen ja sitten islamin kulttuurin piirissä.

Varhaiskeskiajan huomattavin matemaatikko oli intialainen Brahmagupta (noin 625). Hän käytti ensimmäisenä nollaa ja negatiivisia lukuja johdonmukaisesti. Hän hyväksyi toisen asteen yhtälölle myös mahdollisen negatiivisen ratkaisuja ja ratkaisi ensimmäisen asteen Diofantoksen yhtälön täydellisesti. Viimeinen huomattava intialainen matemaatikko oli Bhaskara (1114-1185). Hän ratkaisi Pellin yhtälön $x^2 = 1 + 61y^2$ ja oli kuuluisa yksisanaisesta Pythagoraan lauseen todistuksestaan.

Islamin kulttuurin suurin merkitys matematiikan historialle on ollut antiikin perinnön tallettamisessa ja intialaisen aritmetiikan omaksumisessa ja edelleen välittämisessä. Arabialaiset omaksuivat kreikkalaisesta matematiikasta kuitenkin mieluummin laskennallisia ja käytäntöön liittyviä aineksia kuin aksiomaattis-deduktiivisia. Siksi geometrian osa-alueista trigonometria kehittyi islamin piirissä pisimmälle, lähelle nykyistä. Arabitähtitieteilijät omaksuivat Intiasta sinifunktion ja ottivat itse käyttöön tangenttifunktion.

Länsi-Euroopassa matematiikan taso oli erittäin alhainen Rooman valtakunnan hajoamisen jälkeen. 1100- ja 1200-luvuilla alkoi matematiikka länsimaissa jossain määrin elpyä. Tuolloin alettiin kreikkalaisia ja arabialaisia matemaattisia tekstejä kääntää latinaksi. 1200-luvulla Länsi-Euroopan tiede saavutti arabialaisen tieteen tason ja ensimmäiset yliopistot perustettiin.

Renessanssin kiinnostus antiikkiin vaikutti siihen, että antiikin matemaattisia klassikoita käännettiin. Renessanssin aikana tehtiin ensimmäiset todella antiikin aikaa pidemmälle menevät keksinnöt. Kirjapainotaidon keksiminen mahdollisti 1400-luvun loppupuolella kasvaneeseen kaupan tarpeeseen kirjoitettujen laskuoppien tuoton.

Vuonna 1545 ilmestyneessä teoksessa Ars Magna julkaistiin kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisukaavat. Ratkaisukaavojen merkitys piili siinä, että nyt havaittiin uutta löydettävää vielä olevan jäljellä. Logaritmit levisivät ihmisten tietoisuuteen 1620-luvulla skotlantilaisen Jonh Napierin (1150-1617) ja lontoolaisen Henry Briggsin (1564-1639) ansiosta.

1600-luku on yksi matematiikan historian suurista käännekohdista. Tuolloin syntyivät differentiaali- ja integraalilaskenta sekä analyyttinen geometria. Analyyttisen geometrian synty liitetään yleensä René Descartesiin (1596-1650) ja differentiaali- ja integraalilaskenta Isaac Newtoniin (1642-1727) ja Gottfried Wilhelm Leibniziin (1646-1716). Infinitesimaalista päättelyä esiintyi jo ennen Newtonia ja Leibnizia. Johannes Kepler (1571-1630) laski ympyrän ja ellipsin alat täyttämällä kuvion pienillä kolmioilla ja antamalla niiden kantojen lähestyä nollaa.

Pierre de Fermat (1601-1665) saavutti tuloksia geometrian, analyysin ja lukuteorian aloilla. Hän kehitti todistusmenetelmän, jota hän nimitti ”äärettömäksi laskeutumiseksi”, eräänlaisen takaperoisen induktion ja todisti sen avulla muun muassa, että ei ole olemassa yhtälön $x^4 + y^4 = z^4$ toteuttavia positiivisia kokonaislukuja. Marginaalissa Fermat ilmoitti osaavansa todistaa saman tuloksen silloinkin, kun eksponenttina on mielivaltainen kolmosta suurempi kokonaisluku. Useimmat Fermat'n ilman todistusta ilmoittamista väitteistä ovat lopulta osoittautuneet oikeiksi. Poikkeuksen tekee Fermat'n väite, että kaikki muotoa $2^{2^n}+ 1$ olevat luvut olisivat alkulukuja. Nykyisen tietämyksen mukaan alkulukuja ne ovat vain n:n arvoilla 0, 1, 2, 3 ja 4.

Fermat'n suuri lause ”ei ole olemassa yhtälön $x^n + y^n = z^n$ toteuttavia luonnollisia lukuja, kun $n > 2$” pysyi todistamattomana yli 350 vuotta. Andrew Wiles, Princetonin yliopiston matematiikan professori ilmoitti kesällä 1993, seitsemän vuoden yksinäisen ja salaisen uurastuksen jälkeen, keksineensä todistuksen. Hänenkin todistuksestaan löytyi aukko, mutta hän sai sen paikattua seuraavan vuoden syksyllä työskenneltyään yhdessä Richard Taylorin kanssa. [Singh, 1998]

Todennäköisyyslaskennan katsotaan alkaneen Blaise Pascalin (1623-1662) ja Fermat'n kirjeenvaihdosta koskien oikeudenmukaista tapaa jakaa uhkapelissä pelipanos oikeudenmukaisesti, kun peli joudutaan keskeyttämään. Pascalin kolmion on esittänyt kiinalainen matemaatikko Jang Hui kylläkin jo 1200-luvulla. Pascal selvitti kuitenkin binomikertoimien ominaisuuksia ja käytti todistuksissaan eksplisiittisesti matemaattista induktiota.

Suurimmat keksintönsä, binomisarjan, differentiaali- ja integraalilaskennan sekä yleisen gravitaatiolain Newton teki vuosina 1665-1666. Differentiaali- ja integraalilaskennan kehityksen ratkaiseva askel oli derivointi- ja integrointioperaatioiden käänteisyyden huomaaminen. Raja-arvon käsite ei ollut Newtonille aivan selvä, pienen pienet lisäykset olivat tarpeen mukaan tasan nollia.

Leibniz on matematiikan historiassa toinen henkilö, joka muistetaan differentiaali- ja integraalilaskennan keksijänä. Hän oli itseoppinut ja joutui siksi keksimään uudelleen monia jo tunnettuja asioita. Vuonna 1684 Leibniz alkoi julkaista differentiaalilaskentaansa koskevia tiedonantoja. Leibnizin käyttämät symbolit ja merkintätavat olivat onnistuneita. Infinitesimaalilaskennan kehitys lähti kehittymään Leibnizin osoittamaan suuntaan. Newtonia seurattiin vain Englannissa. Englannin matematiikan taantumiseen vaikutti vuodesta 1699 käyty prioriteettikiista. Leibnizin syytettiin kopioineen Newtonin ideat ja siksi englantilaiset kieltäytyivät isänmaallisista syistä hyväksymästä Leibnizin merkintöjä ja analyysiä.

Jakob (1654-1705) ja Johann (1667-1748) Bernoulli kuuluivat matematiikan historian merkittävämpiin kuuluvaan Bernoullin sukuun, joka Alankomaista siirtyi Sveitsiin Baseliin 1500-luvun lopulla. Veljekset olivat Leibnizin oppilaita ja työtovereita. Jakob Bernoulli esitti Bernoullin epäyhtälön $1 + nx < (1 + x)^n$, todisti harmonisen sarjan hajaantuvaksi ja ratkaisi Bernoullin differentiaaliyhtälön $y' + p(x)y = q(x)y^n$, joka tosin onnistui samanaikaisesti myös hänen veljelleen ja Leibnizille. Hän otti käyttöön napakoordinaatit ja vuonna 1690 sanan integraali. Hän kirjoitti myös ensimmäisen varsinaisen todennäköisyyslaskentaa käsittelevän monografian Ars conjectandi. Johann opetti ranskalaiselle markiisille Guillaume l'Hôspitalille (1661-1704) uutta analyysiä ja antoi hänen käyttöönsä uudet matemaattiset keksintönsä, jotka tämä sitten julkaisi 1696 teoksessa Analyse des infiniment petits, joka oli ensimmäinen differentiaalilaskennan oppikirja.

1700-luvun merkittäviä matemaatikkoja Englannissa olivat ranskalaissyntyinen Abraham de Moivre (1667-1754) ja skotlantilainen Colin Maclaurin (1696-1746). De Moivre kuuluu todennäköisyyslaskennan ja vakuutusmatematiikan uranuurtajiin. Maclaurinin ansiot ovat korkeamman asteen käyrien tutkimuksessa. Hän kirjoitti ensimmäisen Newtonin differentiaali- ja integraalilaskentaa käsittelevän oppikirjan Treatise of Fluxions sekä suositun algebran oppikirjan, jossa ensi kertaa esiintyy kahden ja kolmen tuntemattoman lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisukaava, Cramerin sääntö.

Sveitsiläinen Leonhard Euler (1707-1783) oli yksi kaikkien aikojen merkittävämmistä matemaatikoista. Hänen tuotostensa laajuus on käsittämätön. Vieläkään kaikkea hänen tuotannostaan ei ole julkaistu. Euler todisti muun muassa, että e on irrationaalinen. Kaikki Eulerin päättelyt eivät kuitenkaan olleet korrekteja, mutta useimmissa tapauksissa intuitio johti hänet oikeaan tulokseen, vaikkeivät päättelyaskeleen aina olleetkaan täydellisiä. Euler selvitti pitkään matemaatikkoja vaivanneen kysymyksen negatiivisten lukujen logaritmeista todeten logaritmifunktion monikäsitteisyyden. Euler osoitti Fermatin olettamuksen kaikkien lukujen $2^{2^n} + 1$ jaottomuudesta vääräksi, julkaisi ensimmäisenä todistuksen ns. Fermatin pienelle lauseelle, osoitti alkulukujen käänteisluvuista muodostuvan sarjan hajaantuvaksi, todisti Fermatin suuren lauseen väitteen todeksi eksponentilla kolme.

1700-luvun jälkipuoliskon merkittävin ranskalainen matematiikko oli Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Hänen tutkimusotteensa oli kriittinen ja hän pyrki paikkaamaan analyysin perusteiden aukkokohtia sarjakehitelmien avulla yrittäen päästä eroon infinitesimaalisista suureista. Tämä ei onnistunut, koska hän jätti huomiotta suppenemisongelmat, joiden mukana seuraa kysymys raja-arvosta. Algebran alalla Lagrange kuuluu ryhmäkäsitteen ennakoijiin.

Ranskalainen Joseph Fourier (1768-1830) teki vallankumouksellisen huomion siitä, että jokainen funktio, vaikka epäjatkuvakin, voidaan esittää trigonometrisena sarjana, Fourier-sarjana $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n cosnax + b_n sinnax)$. Fourierin pääteos Théorie Analytique de la Chaleur, jossa trigometrisia sarjoja käytetään osittaisdifferentiaaliyhtälöiden reuna-arvotehtävien ratkaisuun, ei ollut loogisesti moitteeton. Teoksen epätäsmällisyydet olivat yksi merkittävä alkusyy siihen analyysin täsmällistyttämisohjelmaan, joka 1800-luvulla vietiin läpi.

Ranskalainen Pierre Laplace (1749-1827) kirjoitti suurteokset Théorie analytique des probabilités ja Mécanique céleste. Edellinen on todennäköisyyslaskennan kokonaisesitys, joka sisältää useita huomattavia keksintöjä, kuten Laplacen muunnos $\mathcal{L}$ f(s) = $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ ja pienimmän neliösumman menetelmä havaintovirheiden eliminoimiseksi. Menetelmän oli kyllä ensimmäisenä esittänyt Adrien Marie Legendre (1752-1833), mutta ilman todistusta. Legendre kirjoitti suosittuja oppikirjoja mm. geometriasta ja integraalilaskennasta. *Legendren funktiot* ovat differentiaaliyhtälön $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ ratkaisuja. Legendre todisti Fermatin suuren lauseen oikeaksi tapauksessa n = 5. Hän esitti myös alkulukuhypoteesin, jonka mukaan n:ää pienempien alkulukujen määrä lähestyy asymptoottisesti arvoa $\frac{n}{\log n}$, kun n kasvaa. Väitteen todistus onnistui vasta vuonna 1896.

Saksalainen Carl Friedrich Gauss (1777-1855) keksi, miten konstruoidaan 17-kulmio harpin ja viivaimen avulla. Pienimmän neliösumman menetelmän hän keksi 10 vuotta ennen Legendrea. 1799 ilmestyi Gaussin väitöskirja, joka sisälsi hyväksyttävän todistuksen algebran peruslauseelle. Myöhemmin Gauss esitti lauseelle kolme uutta todistusta. Gaussin tähtitieteellinen pääteos Theoria motus corporum caelestium sisältää monia matemaattisen tilastotieteen perusasioita; Gaussin käyrä muistuttaa Gaussin tuotannon tilastotieteellisestä puolesta. Gauss julkaisi tutkimuksen hypergeometrista sarjaa koskien. Tutkimukseen liittynyt täsmällinen todistus siitä, että sarja suppenee, on ensimmäinen varsinainen sarjan konvergenssitodistus matematiikan historiassa. Gaussin julkaisemattomista muistiinpanoista käy ilmi, että hän oli pitkälti perillä kompleksimuuttujan funktioteoriasta ja epäeuklidisen geometrian perusteista.

1700-luvun matemaattisessa analyysissä ei sen loogisten perusteiden pätevyydestä oltu kovin kiinnostuneita. 1800-luvulla alkoi ilmassa olla kriittisempää ja täsmällisyyttä vaativaa tutkimusasennetta. Tällöin syntyi myös kompleksimuuttujan funktioteoria. Ranskalainen Augustin Louis Cauchy (1789-1857) oli täsmällisyyden pioneeri analyysissä. Hänen oppikirjansa Cours d'analyse perustuu jokseenkin nykyaikaiseen raja-arvon määritelmään ja sarjojen suppenemisen tarkkaan tutkimukseen. Cauchy tutki derivoituvien kompleksifunktioiden integraaleja pitkin tason käyriä. Vuonna 1825 hän esitti Cauchyn integraalilauseen, jonka mukaan tällaisen funktion umpinaista käyrää pitkin laskettu integraali on aina nolla. Kuusi vuotta myöhemmin Cauchy osoitti, että analyyttinen funktio voidaan kehittää potenssisarjaksi, jonka suppenemissäde on funktion lähimmän erikoispisteen ja kehityskeskuksen etäisyys.

Norjalainen Niels Henrik Abel (1802-1829) oli ensimmäisiä, jotka ymmärsivät suppenemisen oleellisuuden päättymättömillä sarjoilla operoitaessa. Hän lopetti algebrallisten ratkaisujen etsinnät yli neljättä astetta oleville algebrallisille yhtälöille. Viidennen asteen yhtälön yleisen algebrallisen ratkeamattomuuden hän todisti jo 19-vuotiaana.

Saksalainen Bernhard Riemann (1826-1866) kehitti Riemannin integraalin, Cauchyn integralia paljon käyttökelpoisemman integraalin. Riemann ei ollut kuitenkaan kovin täsmällinen, vaan hänen tutkimuksensa perustui usein geometris-fysikaaliseen intuitioon. Esim. Riemannin kuvauslauseen todistus perustui puutteelliseen Dirichlet'n periaatteeseen.

Saksalaisen Karl Weierstraßin (1815-1897) asenne matematiikkaan oli tietyllä tapaa vastakohta Riemannin asenteelle. Hän pyrki vapauttamaan analyysin kaikesta intuitiivisesta ja saattamaan sen tyhjentävästi aritmeettiselle pohjalle. Weierstraß huomautti Riemannille Dirichlet'n periaatteen virheellisyydestä. Hän vei pätökseen Cauchyn aloittaman differentiaali- ja integraalilaskennan perusteiden lujittamisen huomioimalla tasaisen suppenemisen merkityksen mm. eri rajaprosessien järjestyksen vaihdossa. Nykyanalyysin epsilonit ovat Weierstraßin koulukunnan perintöä.

Epäeuklidinen geometria keksittiin, kun paralleeliaksioomaa oli turhaan yritetty todistaa muiden postulaattien avulla. Ansio luetaan venäläiselle Nikolai Ivanovits Lobatsevskille (1792-1856) ja unkarilaiselle János Bolyaille (1802-1860). Lobatsevski julkaisi oman teoriansa 1829 venäjäksi ja 1840 saksaksi, Bolyain tutkimus julkaistiin 1832.

1800-luvulla algebra kehittyi huimasti ja alettiin tutkia muita kuin luonnollisten lukujen tai reaalilukujen järjestelmiä. Englantilainen George Peacock (1791-1858) oli ensimmäisiä uutta suhtautumistapaa edustavista. Hän kirjoitti loogiseen täydellisyyteen pyrkivän algebran oppikirjan. Aikaisemmin algebra oli ymmärretty vain abstraktiksi laskennoksi ja todistamisen katsottiin kuuluvan lähinnä geometriaan. Irlantilainen William Rowan Hamilton (1805-0865) laajensi algebraa vielä paljon Peacockia oleellisemmin. Hän esitti vuonna 1833, miten kompleksiluvut ja niiden laskutoimitukset voidaan määritellä reaalilukuparien (a, b) avulla.

1800-lukuun kuuluu myös matemaattisen logiikan ja joukko-opin synty. Sinänsä logiikka oppina päättelemisen säännöistä kuului jo antiikin kreikkalaisten käsitteistöön. Luonnollisen kielen merkityssisällöstä irrallaan olevan matemaattisen logiikan perustajana pidetään kuitenkin englantilaista George Boolea (1815-1864). 1800-luvun lopulla syntyi vaatimuksia palauttaa matematiikan perusteet, ennen kaikkea aritmetiikka, logiikkaan ja rakentaa matematiikan järjestelmä deduktiivisten loogisten aksioomien päälle samoin kuin Eukleides oli rakentanut geometrian aksioomilleen ja postulaateilleen.

Saksalainen Georg Cantor (1845-1918) kehitti joukko-oppia. Hän osoitti, että algebrallisten lukujen joukon mahtavuus on sama kuin luonnollisten lukujen. Hän osoitti myös, että joukon osajoukkojen kokoelman mahtavuus on aina joukon omaa mahtavuutta suurempi. Lisäksi Cantor esitti hypoteesin, ettei ole olemassa joukkoa, jonka mahtavuus olisi suurempi kuin luonnollisten lukujen, mutta pienempi kuin reaalilukujen.

1900-luvu on tuottanut matematiikkaa ja merkittäviä matemaatikkoja varmasti saman verran kuin aiemmat vuosisadat yhteensä, mikä on aivan ymmärrettävää, koska tieteenharjoittamisen eksponentiaalinen kasvu merkitsee sitä, että suurin osa ikinä eläneistä matemaatikoista elää nyt. Vuosisadan vaihteen kaksi merkittävää matemaattista vaikuttajaa ovat ranskalainen Henri Poincaré (1854-1912) ja saksalainen David Hilbert (1862-1943). Poincaré on topologian perustajia ja differentiaaliyhtälöiden tutkija. Hilbertin ensimmäiset työt koskivat lukuteoriaa ja invarianttiteoriaa. Vuonna 1899 hän julkaisi kirjan Grundlagen der Geometrie, jossa esitetään täsmällinen geometrian aksioomajärjestelmä, joka on puhtaasti formaalinen, aistihavaintoihin perustuvista lausumattomista oletuksista kokonaan vapaa järjestelmä.

1900-luvun alkupuolella todennäköisyyslaskenta lakkasi olemasta uhkapelioppia ja kehittyi keskeiseksi matematiikan osa-alueeksi soveltamisaloinaan mm. vakuutustoimi, havaintovirheiden arviointi, statistinen mekaniikka, genetiikka sekä muut biotieteet. 1933 neuvostoliittolainen Andrei Nikolajevits Kolmogorov (1903-1987) aksiomatisoi todennäköisyyslaskennan ja osoitti sen olevan osa mittateoriaa.

1900-luvulla painotettiin abstraktiota matematiikassa, mikä näkyi ehkä selvimmin 1900-luvun puolivälin tienoissa ilmestyneissä Nicolas Bourbakin töissä. Kyseessä ei ollut yksi henkilö, vaan nimen taakse kätkeytyi ranskalainen matemaatikkojoukko. [2, Boyer, 1994, 876-877] Perusteiden kriisi vuosisadan alussa vei matematiikkaa formalismia kohti, kohti täsmällisyysvaatimuksia. Intuitiota piti tieteessä välttää. Joukko-oppia painotettiin, sillä perusteisiin asti menemistä pidettiin tärkeänä. [Guzmán, 1990, 137] 1950-luvun lopulla ja 1960-luvulla uudistettiin matematiikan opetusta perusteellisesti. Matematiikan opetuksen katsottiin olevan mahdollista paljon entistä abstraktimpana ja syvällisempänä. Uudistus sai nimekseen New Math, uusi matematiikka. Joukko-oppi oli osa uutta matematiikkaa. Liike levisi USA:sta myös muihin länsi-maihin. Liikkeen kukoistus himmeni käyttökelvottomuutensa vuoksi kuitenkin jo 1970-luvun alussa. Uusi matematiikka jätti jäljen selvemmin ylipisto- kuin koulumatematiikkaan. [Haapasalo, 1994, 144 & 146]

3.2 MATEMATIIKAN FILOSOFIASTA

Matemaattinen teoria on muista tieteistä riippumatonta. Se rakentuu perusoletuksiin, aksioomiin, jotka ovat keskenään riippumattomia ja ristiriidattomia, sekä peruskäsitteisiin eli määritelmiin. Aksioomien, määritelmien ja loogisten sääntöjen avulla johdetaan uusia tuloksia. Periaatteessa jokainen väite todistetaan näiden aksioomien ja määritelmien avulla, mutta käytännössä apuna käytetään aina jo todistettuja lauseita tai lemmoja. Resurssit eivät mitenkään riittäisi siihen, että jokainen todistus kirjoitettaisiin aksioomista alkaen.

Matematiikka tieteenä poikkeaa luonteeltaan merkittävästi muista tieteenaloista. Vain matematiikassa ei ole merkittäviä korjauksia, ainoastaan laajennuksia. Siitä asti kun kreikkalaiset noin 500 eKr. loivat deduktiivisen menetelmän, matemaatikot ovat aina olleet oikeassa. [1, Boyer, 1994, 16] Muissa tieteissä on hypoteeseja, joita testataan kokeellisesti, kunnes uudet hypoteesit kumoavat tai syrjäyttävät ne. Matematiikassa tavoite on absoluuttinen todistus. Kun väite on kerran todistettu, se pätee ikuisesti ja ilman muutoksia. [Singh, 1998, 10]

Pythagoralaiset jakoivat matematiikan neljään osa-alueeseen: geometria, aritmetiikka, tähtitiede ja musiikki. Nykyään matematiikka on eriytynyt tavattoman moniksi eri osa-alueiksi. Pääaloja on kuutisenkymmentä ja jokainen jakautuu vielä pienempiin osiin. Viime vuosisadan alun filosofiset käsitykset matematiikasta voidaan karkeasti jakaa kolmeksi suuntaukseksi: logistinen, intuitionistinen ja formalistinen.

Logistisen koulukunnan pääteesin mukaan matematiikka on yksi logiikan haara. Tavoitteena on johtaa luonnollisten lukujen järjestelmä aukottomasti loogisista primitiivi-ideoista ja primitiivilauseista, jotka puolestaan käsitetään reaalimaailman mielekkäiksi kuvauksiksi. Primitiiveistä johdetaan lausekalkyyli sekä luokkien ja relaatioiden teoria. Koulukunnan edelläkävijöitä ovat Dedekind, Frege ja Peano, mutta varsinainen huippukohta on Whiteheadin ja Russellin 1910-1913 ilmestynyt suurteos Principia Mathematica.

Intuitionistisen matematiikan lähtökohta on luonnollisten lukujen järjestelmä, josta ihmisellä katsotaan olevan valmis, intuitioon perustuva näkemys. Matemaattiset tulokset olisi voitava johtaa äärellisin, konstruktiivisin menetelmin. Olion olemassaolon todistamiseksi ei riitä se, että olion ei-olemassaolo johtaa ristiriitaan. Olio on voitava rakentaa äärellisin operaatioin olemassa oleviksi tiedetyistä olioista, viime kädessä luonnollisista luvuista. Esimerkiksi induktio ei ole riittävä olemassaoloperustelu. Intuitismin ohjelman muotoili Brower 1912. Myöhemmistä kehittäjistä tärkein on A Heyting.

Formalistisen koulukunnan perustaja on Hilbert. Hän loi esikuvan matemaattisesta järjestelmästä, jonka toimivuus ei riipu käytettyjen käsitteiden konkreettisesta tulkinnasta. Hän esitti käsityksen matematiikasta puhtaasti formaalina järjestelmänä, jolla sinänsä ei ole ”sisältöä”. Olennaista järjestelmässä on ristiriidattomuus eli järjestelmä ei saa sisältää muotoa ”P ja ei-P” olevaa lausetta. Hilbert yritti löytää todistuksen matematiikan tai ainakin mahdollisimman suuren matematiikan osan ristiriidattomuudelle. Vuonna 1931 tsekkiläissyntyinen Kurt Gödel (1906-1978) todisti, että kaikissa tarpeeksi rikkaissa matemaattisissa systeemeissä on aina lauseita, joita ei voida todistaa järjestelmään itseensä kuuluvin metodein. Yksi tällainen väite on juuri systeemin ristiriidattomuus.

4 TODISTAMISMENETELMIÄ

Logiikka on oppia oikeasta ajattelusta. Aristoteles (384-322 eKr.) otti ensimmäiset askeleet muodollisen logiikan suuntaan ja rakensi logiikan itsenäiseksi tutkimushaaraksi. Eukleideen Alkeissa on koottuna kreikkalaisten matemaattista tietoa. Vaikka Alkeet on tunnettu geometrian kirjana, sisältää se myös lukuteoriaa. Eukleideen alkeissa matematiikan ja logiikan suhde jäsentyi ensimmäistä kertaa kunnolla.

Kreikkalaisten keksintöjen jälkeen seuraavat pari vuosituhatta olivat logiikan saralla hiljaiseloa. Logiikkaa pidettiin merkittävänä oppiaineena keskiajalla, mutta opetus perustui aristoteeliseen logiikkaan eikä mitään merkittävää uutta keksitty. Matematiikka jopa taantui Euroopassa.

Uuden sysäyksen logiikalle antoi matematiikka. Luonnontieteet eriytyivät selvemmin matematiikasta omiksi tieteenaloikseen. Matematiikkaa tarvittiin luontoa kuvailevaksi kieleksi. Toisaalta alettiin ymmärtää matematiikan itsenäistä luonnetta hyvin erilaisia asioita kuvailevana tieteenä. Lauselogiikan uranuurtaja oli englantilainen George Boole. Gottlob Frege (1848-1925) puolestaan keksi predikaattilogiikan.

Logiikan voi jakaa lauselogiikkaan ja predikaattilogiikkaan. Predikaattilogiikassa esiintyy loogisia symboleita kuten konnektiivit ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$), ”on olemassa” ($\exists$) ja ”kaikki” ($\forall$) kvanttorit, sulkeet ja yhtäsuuruus. Lisäksi predikaattilogiikan kaavat sisältävät myös tulkittavia symboleita kuten muuttujia, vakiosymboleita, relaatiosymboleita ja funktiosymboleita. Lauselogiikassa käytetään vain konnektiiveja.

Logiikka on kiinnostunut totuuden säilyttävistä päätelmistä, joissa johtopäätös on oletusten looginen seuraus. Lauselogiikaksi kutsutaan logiikkaa, joka tutkii väitelauseita ja niiden välisiä suhteita. Väitelause on lause, joka on joko tosi (T) tai epätosi (E). Yhdistelemällä loogisia konnektiiveja negaatiota ”$\neg$”, konjunkiota ”$\wedge$” ja disjunktiota ”$\vee$”, implikaatiota ”$\Rightarrow$” ja ekvivalenssia ”$\Leftrightarrow$” saadaan molekyylilauseita, uusia väitelauseita. Luetteloa, jossa esitetään, kuinka molekyylilauseen totuusarvo riippuu siinä esiintyvien väitelauseiden totuusarvoista, sanotaan totuustaulukoksi. Taulukoiden avulla loogiset konnektiivit voidaan määritellä täsmällisesti. Nämä määritelmät ovat lauselogiikan aksioomia.

Olkoot P ja Q väitelauseita. Tällöin negaatio, konjunktio, disjunktio, implikaatio ja ekvivalenssi määritellään seuraavasti:

negaatio: konjunktio: disjunktio: implikaatio: ekvivalenssi:

P	$\neg$P		P	Q	P $\wedge$ Q		P	Q	P $\vee$ Q		P	Q	P $\Rightarrow$ Q		P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q
T	E		T	T	T		T	T	T		T	T	T		T	T	T
E	T		T	E	E		T	E	T		T	E	E		T	E	E
			E	T	E		E	T	T		E	T	T		E	T	E
			E	E	E		E	E	E		E	E	T		E	E	T

Tautologia on molekyylilause, joka on aina tosi, riippumatta siinä esiintyvien väitelauseiden totuusarvoista. Tautologiat antavat loogisille konnektiiveille laskusääntöjä. Tietyt tautologiat ovat perusteena tietyille todistusmenetelmille.

Matematiikassa todistettavat lauseet ovat usein muotoa $P \Rightarrow Q$, missä P on oletus ja Q väite. Väitteen negaatiota $\neg Q$ kutsutaan antiteesiksi. Tautologiat antavat päättelysäännöt väitteen Q johtamiseksi oletuksesta P. Esitetään kolme tapaa todistaa muotoa $P \Rightarrow Q$ olevia lauseita. Esiteltävät kolme päättelysääntöä, ovat vain edustavia esimerkkejä päättelysäännöistä, joita on todellisuudessa äärettömän paljon, sillä jokainen tautologia ilmaisee päättelysäännön.

4.1 SUORA PÄÄTTELY – MODUS PONES

Suora päättely on analoginen seuraavan tautologian kanssa:

$$(P \land (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q.$$

Todistamisen idea suoraa päättelyä käyttäen on se, että oletetaan, että P on totta ja yritetään johtaa oletuksen avulla väite Q. Jos tässä onnistutaan, niin myös väite Q on tosi.

Todistetaan esimerkkinä suorasta päättelystä, että jos $x^3 + x > 0$, niin $x > 0$.

Oletetaan, että $x^3 + x > 0$. Koska

$$x^3 + x = x(x^2 + 1) > 0$$

on aidosti positiivinen vain silloin kun kertolaskun molemmat tekijät ovat aidosti positiiviset tai aidosti negatiiviset ja tässä tapauksessa toinen tekijöistä $x^2 + 1$ ei ole koskaan negatiivinen, vaan aina aidosti positiivinen, niin jäljelle jää vain se vaihtoehto, että molemmat tekijät ovat aidosti positiiviset. Siispä $x > 0$. □

4.2 KÄÄNTEINEN SUORA PÄÄTTELY – MODUS TOLLENDO TOLLENS

Käänteinen suora päättely on analoginen seuraavan tautologian kanssa:

$$(P \land (\neg Q \Rightarrow \neg P)) \Rightarrow Q.$$

Todistamisen idea käänteistä suoraa päättelyä käyttäen on se, että oletetaan, että P on totta ja muodostetaan antiteesi $\neg Q$ ja yritetään johtaa antiteesin avulla $\neg P$. Jos tässä onnistutaan, niin antiteesi $\neg Q$ ei voi olla totta, joten väite Q on totta.

Todistetaan esimerkkinä käänteisestä suorasta päättelystä, että jos $x^3 + x > 0$, niin $x > 0$.

Oletetaan, että $x^3 + x > 0$. Tehdään antiteesi, että $x < 0$. Tällöin

$$x^3 + x < 0$$

koska summan molempien termien potenssit ovat parittomat, joten molemmat termit ovat välttämättä aidosti negatiiviset. Saatiin siis johdettua antiteesin avulla oletuksen negaatio. □

4.3 EPÄSUORA PÄÄTTELY – REDUCTIO AD ABSURDUM

Epäsuora päättely on analoginen seuraavan tautologian kanssa:

$$(P \land ((P \land \neg Q) \Rightarrow (S \land \neg S))) \Rightarrow Q.$$

Todistamisen idea epäsuoraa päättelyä käyttäen on se, että oletetaan, että P on totta ja muodostetaan antiteesi ¬Q ja yritetään johtaa jokin ristiriita oletuksen P ja antiteesin ¬Q avulla. Jos tässä onnistutaan, niin antiteesi ¬Q ei voi olla totta, joten väite on tosi.

Käänteinen suora päättely on epäsuoran päättelyn erikoistapaus, sillä siinä S = P, eli antiteesistä ¬Q johtamalla ¬P saadaan ristiriita oletuksen P kanssa.

Todistetaan esimerkkinä epäsuorasta päättelystä, että jos $x^3 + x > 0$, niin $x > 0$.

Oletetaan, että $x^3 + x > 0$. Tehdään antiteesi, että $x < 0$. Tällöin

$$0 < x^3 + x < 0 + 0 < 0,$$

mikä on ristiriita. Siten antiteesi on väärä ja väite on tosi. □

Muotoa P ⇔ Q olevat lauseet voidaan todistaa samoin kuin muotoa P ⇒ Q olevat lauseet, mutta koska ekvivalenssi tarkoittaa implikaatiota molempiin suuntiin, pitää tarkastella molemmat suunnat. Siis on todistettava, että P ⇒ Q ja Q ⇒ P.

4.4 INDUKTIOTODISTUS

Induktiotodistus on kätevä tapa todistaa kokonaislukuja koskevia tuloksia. Induktioperiaate sanoo seuraavaa:

> Olkoon P(n) luonnollista lukua n koskeva väite. Jos P(0) on tosi ja oletuksesta, että P(k) on tosi seuraa, että P(k + 1) on tosi, niin P(n) on tosi kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

Induktiotodistuksen ideana on, että todistetaan ensin alkuaskel eli että P(0) on tosi. Sitten tehdään induktio-oletus, että P(k) on tosi johonkin k = 0, 1, 2… asti. Sitten osoitetaan, että tällöin myös P(k+ 1) on tosi. Tällöin induktioperiaatteen nojalla väite on tosi kaikille luonnollisille luvuille.

Todistetaan esimerkkinä induktiotodistuksesta, että $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Alkuaskel: Osoitetaan, että P(1) on tosi. $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ eli alkuaskel toteutuu.

Induktio-oletus: $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ on tosi johonkin k = 1, 2, 3… asti.

Induktioväite: $1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Osoitetaan.

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. □

5 OPETUSSSUUNNITELMA

Opetushallitus on opetussuunnitelmien perusteisiin 2003 kirjannut matematiikan opetuksen tavoitteisiin mm. seuraavaa: *”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.”* Arvioinnin alla puolestaan lukee: *”Osaamisen arvioinnissa kiinnitetään huomio laskutaitoon, menetelmien valintaan ja päätelmien täsmälliseen ja johdonmukaiseen perustelemiseen.”*

Pitkän matematiikan opetuksen tavoitteisiin on kirjattuna seuraavaa: *”Opiskelija harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja ja arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä.”*

Geometrian kurssin yhtenä tavoitteena on, että *”opiskelija harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita”*.

Syventävien kurssien joukossa on Lukuteoria ja logiikka, kurssi 11. Siellä yhtenä tavoitteena on, että *”opiskelija oppii todistusperiaatteita ja harjoittelee todistamista”*.

Induktiotodistus ei enää sisälly opetussuunnitelmaan, vaikka se olisi kovin selkeä ja suoraviivainen todistusmenetelmä opettaa ja käyttää. Se saisi sinne palata. Sen opettaminen ja oppiminen ei vaadi kuin yhden oppitunnin ja hyötyä sen osaamisesta on kyllä tunnin työpanoksen edestä.

Tulosten yleistettävyyden arvioinnin oppimisen kannalta Laudatur ja Calculus saattavat olla hieman huonoja pitkän matematiikan oppikirjasarjoja, koska niissä usein yksittäisestä esimerkistä yleistetään tulos pätemään yleisestikin (vertaa luvut 6.2 ja 6.3). Näin niistä saattaa tulla oppilaalle virheellinen mielikuva tulosten helposta yleistettävyydestä.

Laskutaito on arvioinnin kriteerien joukossa mukana ensimmäisenä oletetusti ja itseoikeutetusti. Sen tärkeyttä nykyisessä yhteiskunnassa tuskin kukaan yrittääkään kiistää. Peruslaskutaito on verrattavissa luku- ja kirjoitustaitoon. Lukion pitkän matematiikan oppisisältö tosin on aika paljon enemmän kuin peruslaskutaito.

Päätelmien täsmällinen ja johdonmukainen perusteleminen on ilmeisen tärkeänä pidetty, koska se on sekä tavoitteissa että yksi arvioinnissa käytetyistä kriteereistä. Täsmällinen ja johdonmukainen perusteleminen luo pohjaa eteenpäin matemaattisille todistuksille.

Kokonaisuutena matematiikan opetussuunnitelman osalta ei näytä mitenkään hälyyttävältä. Jos tavoite perustelujen laatimisen ja niiden pätevyyden arvioinnin osalta saavutetaan, on todistaminenkin luultavasti jossain määrin hallussa. Jos vielä saataisiin Lukuteoria ja logiikka -kurssi suuren joukon suosioon, olisi todistamisen periaatteiden vähintäänkin jonkinasteinen tuntemus ja soveltaminen turvattu.

6 TODISTAMINEN ERI KIRJASARJOISSA

Mikä rooli tai osuus todistustehtävillä on lukion oppikirjoissa, saattaa antaa jonkinlaista kuvaa siitä, mikä rooli todistamisella on lukion matematiikassa. Siksipä alla olevat taulukko1 selvittää todistustehtävien esiintymistä eri kirjasarjojen eri kirjoissa ja taulukko2 prosentuaalista osuutta. Todistustehtäviksi luokitellaan sellaiset tehtävät, joissa tulos tai vastaus on annettu tai tiedossa ja se pitää osoittaa tai johtaa.

Tässä eri kirjasarjojen tehtävien tutkimuksessa todistustehtäviksi on luokiteltu kaikki ne tehtävät, joissa vaikka vain osa tehtävästä on osoita -tyyppinen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	K
Calculus	5	19	35	15	56	9	20	39	22	17	62	21	57	21
Laudatur	6	14	18	22	36	4	19	50	17	10	79	23	32	123
Pyramidi	9	15	24	29	31	9	54	61	64	22	143	32	50	79
Pitkäsigma	9	16	23	25	37	4	26	36	39					

Taulukko1 Todistustehtävien määrä eri kirjasarjoissa

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	K
Calculus	1,4	5,7	9,4	4,6	18,3	2,4	6,3	11,2	6,1	5,0	23,0	8,7	15,8	4,6
Laudatur	1,2	2,8	3,1	6,0	8,6	0,8	4,6	12,2	3,8	3,1	20,4	8,7	10,9	13,7
Pyramidi	2,8	4,2	6,7	6,4	8,1	3,1	11,6	13,6	12,4	7,3	55,6	15,6	14,0	10,7
Pitkäsigma	2,3	3,6	5,2	5,2	9,1	0,9	5,7	9,0	9,0					

Taulukko2 Todistustehtävien prosentuaalinen osuus eri kirjasarjoissa

Taukukosta2 käy ilmi, että Pyramidi –kirjasarjassa todistustehtäviksi luokiteltuja tehtäviä on eniten. Kaikkiaan kaikkien kirjojen tehtävistä noin yhdeksän prosenttia on todistustehtäviä. Todellisuudessa luvun voidaan ajatella olevan hieman yläkantissa, kun huomioidaan se, että tässä todistustehtäviksi on laskettu nekin tehtävät, joissa vain osa tehtävänantoa on ollut todistaa jotakin.

6.1 PYRAMIDI

Lukion pitkän matematiikan kirjasarjassa Pyramidi, todistustehtäviä on vaihtelevasti riippuen kurssista (katso taulukko1). Myös teoriaosa kirjassa on hyvin matemaattista siinä mielessä, että tulokset ja lauseet pyritään todistamaan ja perustelemaan, tai sitten on merkattu lauseen yhteyteen, mistä todistuksen löytää. Joitain kertoja lukee ”todistus sivuutetaan” tai ”voidaan osoittaa, että…”, mutta ei osoiteta.

Koska todistustekniikoita ei kuitenkaan ensimmäisestä kurssista alkaen esitellä, oletetaan oppilaan ilmeisesti tuntevan suoran todistuksen periaate. Viidennen kurssin kirjassa tulee ensimmäistä kertaa vastaan epäsuora todistus, kun teoriaosassa todistetaan lausetta. Sen yhteydessä on huomautus, jossa selitetään lyhyesti epäsuoran todistuksen periaate sekä mainitaan, että todistusmenetelmiä käsitellään tarkemmin Pyramidi 11 -kirjassa.

Seitsemännen kurssin kirjassa esitellään ensimmäistä kertaa vastaesimerkin toimintaperiaate virheellisen väittämän kumoamiseksi. Lisäksi kerrotaan, että yksi vastaesimerkki riittää kumoamaan virheellisen väittämän, mutta oikea väittämä on osoitettava todeksi kaikille väitteen alkioille.

Sen syvällisemmin ei todistustekniikoita pakollisissa kursseissa käsitellä. Syventävässä kurssissa Lukuteoria ja logiikka sen sijaan todistaminen on keskeisessä roolissa. Harjoitustehtävistä yli puolet on todistustehtäviä. Kirjassa esitellään epäsuora todistus ja induktiotodistus, mutta suora todistus oletetaan ilmeisesti tutuksi, sillä se katetaan epäsuoraa todistusta koskevan teorian jälkeen huomautuksella: ”*Jos väite todistetaan ilman vastaoletusta, niin todistusta kutsutaan vastaavasti suoraksi.*” [Pyramidi 11 Lukuteoria ja logiikka, 2006, 39] Teoriassa selitetään, miten todistetaan ekvivalenssimuotoinen väite ja se, miten vastaesimerkillä voidaan kumota väärä väittämä. Oletusten yhdistely -otsikon alla on konjunktion käsittelystä todistuksessa. Tapauskohtainen tarkastelu -otsikon alla on puolestaan disjunktiosta. Sitten on olemassaolotodistus. Yleistys ja valinta -otsikon alla on selitetty, miten mielivaltaisen alkion valitsemalla, saadaan tulos yleistettyä. Sitten esitellään vielä valintaan perustuva todistus.

Kuvasta todistamista tai perustelemista esiintyy jonkin verran, esim. jatkuvuuden yhteydessä Derivaatta -kirjassa, sillä jatkuvuuden tarkkaa määritelmää ei anneta yleisessä teoriaosassa. Sen sijaan kirjan lisätietoa -osiossa on tarkka määritelmä kiinnostuneelle, mutta lukion oppimäärään se ei sisälly.

6.2 LAUDATUR

Laudatur kirjasarjassa jo ensimmäisessä kirjassa esitetään todistamiseen liittyvä neuvo: ”*Osoittaminen on useimmiten suora laskutoimitus, jossa käytettään hyväksi määritelmiä.*” Tälle sarjalle hyvin tyypillistä on laskea ensin jokin yksittäinen esimerkki ja yleistää siitä jokin yleinen tulos.

Kolmannen kurssin kirjassa (Geometria) selitetään heti ensimmäisen luvun aluksi, mitä määritelmillä, lauseilla ja todistamisella tarkoitetaan. Kirja ei kuitenkaan käytä sanoja ”määritelmä” ja ”lause”, ne vain esitellään. Lisäksi on selvitetty laudeen todistamisen osat: oletus, väitös ja todistus. Matemaattisen todistuksen kerrotaan olevan loogista ja johtavan aina absoluuttisen totuuteen.

Lukion matematiikan kursseilla joudutaan matemaattisesta täsmällisyydestä tinkimään, sillä: *”Lukion matematiikan kursseissa joudutaan usein tilanteeseen, jossa esitetty lause vain perustellaan. Perustelu ei ole aivan pätevä todistus, mutta lukion tiedoilla ja ajan puutteen vuoksi se on yleensä ainoa tapa selventää asia.”* [Laudatur 3 Geometria, 2005, 8]

Muissa sarjan pakollisissa kursseissa ei todistamista tai todistustekniikoita suoranaisesti sitten opetetakaan.

Syventävässä kurssissa Lukuteoria ja logiikka esitellään matemaattista todistamista. Alkuun selitetään eroa välttämättömän ja riittävän ehdon välillä. Suora todistus, vastaesimerkin käyttö, epäsuora todistus ja induktiotodistus esitellään hyvin lyhyesti. Todistusmenetelmiä –luvun alla on myös maininta: *”Matematiikan opintojen yksi tärkeä päämäärä on oppia ajattelemaan järjestelmällisesti, tekemään oikeita johtopäätöksiä ja perustelemaan ne.”* [Laudatur 11 Lukuteoria ja logiikka, 2008, 38]

Kuvasta perustelemista ei esiinny kuin muutama kerta. ”Todistus sivuutetaan” –kommentti ei esiinny kirjasarjassa kuin pari kertaa.

6.3 CALCULUS

Calculuksessa samoin kuin Laudaturissa usein yksittäisestä esimerkistä laajennetaan tulos pätemään yleisestikin.

Sarjan ensimmäisessä kurssissa jo vilautetaan epäsuoran todistustavan käyttöä todistuksessa.

Maininta, että tulokset otetaan käyttöön perustelematta tai todistus sivuutetaan, esiintyy erittäin monta kertaa. Samoin ”voidaan osoittaa että” –kommentti esiintyy usein niissä yhteyksissä, kun ei kuitenkaan osoiteta.

Sarjan Derivaatta kirjassa on raja-arvon määritelmän yhteydessä lause: *”Se ei kuitenkaan sovi tarkaksi määritelmäksi* (raja-arvolle)*, sillä yksittäisten arvojen tai kuvaajan perusteella ei aina voi tehdä luotettavia johtopäätöksiä. Lukiomatematiikassa määritelmä voidaan kuitenkin antaa tähän havainnolliseen ajattelutapaan perustuen.”* Vielä samaisessa kirjassa on lause: *”Geometrisen havainnon perusteella lauseiden sisältö on ilmeinen.”*, kun esitetään, että jollain välillä aidosti monotoninen funktio saa tällä välillä jokaisen arvonsa vain kerran ja että jollain välillä jatkuvalla ja aidosti monotonisella funktiolla on tällä välillä enintään yksi nollakohta.

Tässäkään kirjasarjassa ei pakollisissa kursseissa tämän syvemmin todistamista opeteta.

Syventävässä kurssissa Lukuteoria ja logiikka esitellään Todistusmenetelmiä -otsikon alla ensin yleistä matematiikasta eli mitä aksioomilla ja lauseilla tarkoitetaan ja että lauseiden tulee aina sisältää oletus ja väite. Lauseen todistuksen kerrotaan sisältävän päättelyketjun, johon kuuluvia lauseita sitovat logiikan lait. Lisäksi selitetään, että *”Lukiossa opiskeltava matematiikka perustuu osittain näihin johdettuihin lauseisiin, osittain aksioomiin. Vasta korkeammassa matematiikassa opiskelun perustana on puhtaasti aksiomaattinen rakennelma.”* [Calculus 6 Lukuteoria ja Logiikka, 2010, 38] Yleisen osuuden jälkeen kirjassa seuraa suora todistus, vastaesimerkin käyttö, epäsuora todistus ja induktiotodistus. Induktiotodistus on kuitenkin merkitty tähdellä, mikä viittaa siihen, että se voidaan jättää käsittelemättä ajan puutteen tai muun syyn takia.

Syventävän kurssin Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi kirjassa lukee seuraavaa: *”Joidenkin lauseiden todistamiseen tarvittaisiin lukiokurssin ylittäviä tietoja, joten ne otetaan käyttöön ilman todistusta. Asiasta voi kuitenkin vakuuttua geometrisen havainnon nojalla.”* Tässä viitataan Bolzanon lauseeseen ja Funktion suurimman ja pienimmän arvon lauseen, jotka seuraavat edellistä lainausta.

6.4 PITKÄ SIGMA

Pitkä Sigma on uusi pitkän matematiikan kirjasarja ja siitä on ilmestynyt vasta yhdeksän ensimmäisen pakollisen kurssin kirjat. Sarjan ensimmäisessä kurssissa selitetään ekvivalenssinuolen oikeaoppisesta käytöstä.

Kovin usein esiintyy teksti ”todistus sivuutetaan” tai ”todistus jätetään harjoitustehtäväksi” tai ”voidaan osittaa, että” tai ”voidaan johtaa”, mutta ei osoiteta eikä johdeta.

Geometrian kirjassa ympyrän pinta-ala perustellaan kuvasta ja siinä yhteydessä on maininta, että *”tarkka todistaminen vaatii enemmän tietoa pinta-aloista”*. Kuvaan tukeutuvaa perustelua esiintyy muuallakin tässä kirjassa, geometrialle tyypillisesti.

Tämän kummemmin ei kirjasarjan yhdeksässä ilmestyneessä kirjassa todistamisen periaatteisiin paneuduta.

Sarja ei anna kovin matemaattista kuvaa itsestään. Voisiko se vaikuttaa, että Sigma on ollut alun perin lyhyen matematiikan kirjasarja ja nyt kun on alettu tekemään Pitkä Sigma -sarjaa, osa tekijöistä on samoja kuin lyhyen Sigman kirjasarjassa?

6.5 YHTEENVETOA KIRJASARJOISTA

Vaikka todistamistekniikoita ei pakollisten kurssien kirjoissa opettamalla opetetakaan, ei tilanne todellisuudessa ole niin huono. Se, että kirjojen teoriaosissa tulokset pyritään johtamaan ja todistamaan, opettaa todella paljon todistamisesta aivan huomaamatta, jos vain teoriaosaa luetaan ja tutkitaan. Syventävä kurssi Lukuteoria ja logiikka opettaa todistamisesta melko kattavastikin. Ongelmaksi jää se, että kurssi on vapaaehtoinen ja jää näin ollen monelta käymättä.

Opetussuunnitelmaan kirjasarjoja peilatessa näyttää myös ihan hyvältä. sillä kirjat vaikuttaisivat pääasiallisesti täyttävän opetussuunnitelmaan asetetut tavoitteet. Eräs mietityttään jäänyt kohta on geometrian kurssin tavoite siitä, että opiskelija harjaantuu muotoilemaan geometrista tietoa käsitteleviä lauseita. Mitähän sillä mahdetaan tarkoittaa? Tavoite kuulostaa syvällistä matematiikan osaamista vaativalta. Toteutuukohan kyseinen tavoite?

7 TODISTUSTEHTÄVÄT YLIOPPILASKIRJOITUKSISSA

	vastaajia %	pistekeskiarvo
K2003, 6	53,4	0,23
K2004, 13	12,1	1,56
K2007, 13	3,3	0,22
K2007, 15	35,1	0,85
K2008, 13	1,8	1,67
K2009, 15	4,8	2,05
K2010, 12	23,7	0,56

Taulukko3 Puhtaat todistustehtävät yo-kokeissa keväinä 2000-2010

Todistustehtävien määrä on lisääntynyt ylioppilaskirjoituksissa, kun verrataan 20 vuotta ennen matematiikan tutkinnon uudistusta eli vuosia 1980-1999 ja viimeisiä 11 vuotta (katso liite1). Tässä todistustehtävät luokitellaan samoin kuin luvussa kuusi. Mitenkään valtava ero ei kuitenkaan ole, kun vuosina 1980-1999 kokeissa on ollut keskimäärin kaksi todistustehtävää ja vuosina 2000-2010 vastaava luku on ollut 2,5. Enimmäkseen todistustehtävät ovat viime vuosikymmenenä olleet kokeessa loppupään tehtäviä, tehtäviä 11-15. Kevään 2002 koe on ainut 2000-luvun pitkän matematiikan koe, jossa ei ole ainoatakaan todistustehtävää. Vuosina 1980-1999 tällaisia pitkän matematiikan kokeita on ollut kaksi, syksyllä 1984 ja keväällä 1989.

Tutkittaessa pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden puhtaita todistustehtäviä vuodesta 2000 vuoteen 2010 (vain kevään kokeet) saadaan yllä oleva taulukko3. Mukaan on otettu siis vain ne tehtävät, jotka ovat kokonaan todistustehtäviä, ei vain osittain. Tehtäviä on yhteensä seitsemän kappaletta. Taulukosta3 näkyy, kuinka aktiivisesti tehtävään on vastattu ja paljonko tehtävästä on keskimäärin saatu pisteitä. [Dimensio 6/2003, 24, Dimensio 6/2004, 16, Dimensio 6/2007, 20, Dimensio 6/2008, 18, Dimensio 6/2009, 19, Dimensio 6/2010, 31]

Taulukosta näkyy selvästi, ettei todistustehtävissä ole loistavasti menestytty. Neljästä tehtävästä seitsemässä keskiarvo on vähemmän kuin yksi. Kahdessa se on ykkösen ja kakkosen välillä. Vain yhdessä se on yli kahden, mutta tämä sattuu olemaan jokeritehtävä, eli maksimipistemäärä ei ole normaali kuusi pistettä vaan yhdeksän.

Kevään 2003 kokeen todistustehtävä on koko kokeen huonoiten osattu tehtävä pistekeskiarvoja verrattaessa. Samoin kevään 2007 kokeen todistustehtävät 13 ja 15 ovat pistekeskiarvoltaan kyseisen kokeen kaikkein huonoimmat. Sama pätee vuoden 2010 kevään kokeen tehtävään 12. Kevään 2008 kokeessa vain yhden tehtävän pistekeskiarvo on huonompi kuin kokeen todistustehtävän, tehtävän 13. Keväiden 2004 ja 2009 kokeissa on sentään molemmissa neljä tehtävää, joissa pistekeskiarvo on matalampi kuin kyseisen kokeen todistustehtävän.

Todellisuudessa huono pistekeskiarvo todistustehtävissä ei tarkoita suoraviivaisesti sitä, ettei niitä osata. Osittain huono pistekeskiarvo tehtävissä johtuu siitä, että esimerkiksi näistä seitsemästä todistustehtävästä kuusi on kokeen loppupään tehtäviä. Tunnetusti kokeen loppupään tehtävät ovat alkupään tehtäviä vaativampia ja vaativat usein pitkän matematiikan syventävien kurssien tietoja.

Vastaajien määrä on ollut varsin vaihteleva näissä todistustehtävissä, 1,8 prosentista 53,4 prosenttiin. Kevään 2003 korkea vastausprosentti selittyy osittain sillä, että tehtävä on ollut kokeen kuudes tehtävä, eli melko alkupäässä koetta, kun taas muut näistä todistustehtävistä ovat aivan kokeen loppupäässä, tehtäviä 12-15. Myös kevään 2007 todistustehtävän 15 ratkaisun on valinnut huomiota herättävän moni. Tämä selittyy mahdollisesti osittain sillä, että tehtävä on jokeritehtävä, siis maksimipistemäärä jälleen yhdeksän normaalin kuuden pisteen sijaan ja mahdollisesti osittain sillä, että tehtävä vaikuttaa siedettävältä ja tehtävänanto on lyhyt. Keväällä 2004 ja keväällä 2010 on osallistuminen kokeen todistustehtävään myös ollut korkeahko. Molemmat tehtävät ovat lukuteorian todistustehtäviä, mikä vaikuttanee asiaan. Muissa kolmessa tehtävässä osallistumisaktiivisuus onkin sitten ollut vähäistä: 1,8, 3,3 ja 4,8 prosenttia, mikä on aivan ymmärrettävää, kun kyseessä on kokeen loppupään tehtävät.

8 TODISTAMISTA OPETTAVISTA KIRJOISTA

8.1 ANALYYSIÄ KIRJASTA BOOK OF PROOF

Richard Hammackin englanninkielinen kirja Book of Proof vuodelta 2009 opettaa yli kahden sadan sivun laajuisesti ja erittäin kattavasti erilaisia todistusmenetelmiä eri matematiikan osa-alueilla. Kirja on kirjoitettu varsinaisesti yliopiston matematiikan opiskelijoille pyrkimyksenä valmistaa heitä tuleviin matematiikan opintoihin, mutta esipuheessa kirjan arvellaan sopivan melkein mihin tahansa yliopiston alempaan tutkintoon kuuluvaan matematiikan ohjelmaan. Vaikka kirja ei ole todistamisen oppikirja lukiolaisille, on sitä kiinnostavaa tutkia siinä mielessä, että millaiset valmiudet lukion päättäneellä opiskelijalla on sitä opiskella.

Ensimmäisessä osassa käydään läpi todistamiseen tarvittavia perusteita matemaattisten käsitteiden, määritelmien, joukkojen ja logiikan osalta. Ensimmäisessä luvussa käsitellään joukkoja, karteesista tuloa, Vennin diagrammeja ja indeksoituja joukkoja. Toisessa luvussa käsitellään väitteitä, määritellään logiikan peruskäsitteet, esitellään totuustaulut väitelauseille, kvanttorit, looginen ekvivalenssi ja negaation muodostaminen väitteelle sekä looginen päättely. Kolmannessa luvussa käsitellään järjestettyjä joukkoja ja niiden osajoukkoja, n:n kertomaa, Pascalin kolmiota, Newtonin binomikaavaa ja joukkojen yhteenlaskua.

Toisessa osassa aiheena on, miten todistetaan ”jos-niin” -muotoa olevia väitteitä. Siinä esitetään suora todistus, käänteinen suora todistus ja epäsuora todistus. Neljännessä luvussa puhutaan teoreemoista, annetaan määritelmiä, esitellään suoran todistuksen periaate ja käyttöä, opetetaan sellaisia todistuksia, joissa todistus jakautuu eri tapauksiin ja ne on tarkasteltava erikseen sekä todistuksia, joissa molemmat eri tapaukset todistetaan samalla lailla. Viidennessä luvussa opetetaan käänteinen suora todistus, kongruenssi ja annetaan käytännön neuvoja matemaattiseen kirjoittamiseen. Kuudennessa luvussa opetetaan epäsuora todistus ja ”jos-niin” -muotoisten lauseiden todistus sen avulla, todistustekniikoiden yhdistelystä ja joitakin neuvoja oikean todistustekniikan valitsemiseen.

Kolmannessa osassa on lisää todistamisesta: väitteiden, jotka eivät ole ehtomuotoisia ja joukkoja koskevien väitteiden todistamisesta, vääräksi todistamisesta ja induktiotodistus. Seitsemännessä luvussa on jos-ja-vain-jos -muotoisen väitteen todistamisesta, väitteiden, jotka sisältävät useampia ekvivalentteja kohtia, todistamisesta ja olemassaolo todistuksista. Kahdeksannessa luvussa käsitellään sitä, miten todistetaan muotoa $a \in A$, $A \subset B$ ja $A = B$ olevia väitteitä ja täydellisistä luvuista. Yhdeksännessä luvussa kerrotaan, miten todistetaan vääräksi ”on olemassa” ja ”kaikilla” -muotoisia väitteitä ja epäsuoran todistuksen käyttöä vääräksi osoittamisessa. Kymmenennessä luvussa käsitellään matemaattista induktiotodistusta, todistamista vahvalla induktiolla ja pienimmän vastaesimerkin periaatteella sekä Fibonaccin numeroita.

Viimeisessä osassa on relaatioista, funktioista ja joukkojen mahtavuuksista. 11. luvussa opetetaan relaation ominaisuuksista, ekvivalenssirelaatiosta ja -luokista, kokonaislukujen modulosta ja relaatioista joukkojen välillä. 12. luvussa kerrotaan funktioista ja kyyhkyslakkaperiaate. 13. luvussa on yhtä mahtavista joukoista, numeroituvista ja ylinumeroituvista joukoista ja joukkojen mahtavuuksien vertailusta.

Kirja on yllättävän selkeä ja kattava. Läpi kirjan näkee, että todistus tosiaan on keskiössä. Kirjan toinen ja kolmas osa käsittelevätkin kyllä jo otsikoiden perusteella selvästi todistamisesta, mutta myös ensimmäisessä ja neljännessä osassa, vaikka aiheet ovat mitä ovat, niitä käsitellään todistamisen näkökulmasta; minkä tyylisiä todistuksia liittyy kyseisiin aiheisiin ja miten niitä todistetaan. Mitään todistamisen periaatteisiin tai keinoihin liittyvää seikkaa ei voi huomata ohitetuksi tai laiminlyödyksi. Kirjan kattavuudesta kertoo sekin, että olen matematiikan pääaineopiskelija ja suorittanut kaikki opintoihini kuuluvat matematiikan kurssit enkä koskaan opintojeni aikana muista törmänneeni vahvaan induktioon enkä pienimmän vastaesimerkin periaatteeseen, ellei se sitten ole tapahtunut tietämättäni.

Vahvan induktion periaate on sama kuin normaalin induktion, mutta sen sijaan, että todistettaisiin ”jos väite on totta jollain $k \geq 1$, niin se on totta myös arvolla $k + 1$” todistetaankin, että ”jos väite on totta kaikilla indekseillä johonkin $k \geq 1$ asti, niin se on totta myös arvolla $k + 1$”. Toisin sanoen normaalissa induktiossa todistetaan, että $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ on totta ja vahvassa induktiossa taas todistetaan, että $(P(1) \land P(2) \land P(3) \land \ldots \land P(k)) \Rightarrow P(k+1)$ on totta. Vahva induktio on käyttökelpoinen sellaisissa tapauksissa, joissa on vaikea osoittaa, että siitä, että väite on totta jollekin arvolle k, seuraisi että se on totta myös arvolle $k + 1$.

Todistamiseen on helppo päästä sisään, kun käsiteltävän asian jälkeen on harjoitustehtäviä kyseiseen aiheeseen liittyen. Esimerkiksi suoran todistuksen käytön opetuksen jälkeen harjoitustehtävissä lukee: ”Käytä suoraa todistusta.”, mikä helpottaa todistamisessa alkuun pääsyä, kun ei tarvitse miettiä, mitä menetelmää kyseisessä todistuksessa kannattaa käyttää. Myös kirjan teoriaosassa tuloksia todistettaessa mainitaan usein, mitä todistustapaa kyseisessä todistuksessa käytetään. Käytännöllisiä neuvoja löytyy myös useita. Esimerkiksi parillisiin ja parittomiin lukuihin liittyviä väitteitä todistettaessa neuvotaan käyttämään hyväksi määritelmiä ”kokonaisluku n on parillinen, jos $n = 2a$ jollakin kokonaisluvulla $a \in \mathbb{Z}$” ja ”kokonaisluku n on pariton, jos $n = 2a + 1$ jollakin kokonaisluvulla $a \in \mathbb{Z}$”, ja sitten on vielä esimerkkejä siitä, kuinka näitä määritelmiä todistuksessa hyödynnetään. Oikeaoppinen negaation muodostaminen neuvotaan konkreettisesti.

Kirjan esitystapa on selkeä ja perusteellinen. Esimerkkejä viljellään hyvin runsaasti ja ne ovat riittävän yksikertaisia, mikä selventää teoriaa ja lisää ymmärtämistä. Kuviot kirjassa ovat selkeitä ja havainnollisia. Harjoitustehtäviin on ratkaisut kirjan lopussa. Kirja vaikuttaa yliopisto-opiskelijalle soveltuvalta tekstiltä ja täyttää erinomaisesti tarkoituksensa, eli luo kantavan pohjan matematiikan syvemmille kursseille.

Lukion päättäneen, pitkässä matematiikassa hyvin menestyneen henkilön pitäisi pystyä kirjan tekstiä seuraamaan ja sisäistämään. Jos lukiossa todistustehtäviä on harjoiteltu läpi kurssien eikä niitä ole vältelty, ja jos syventävä kurssi Lukuteoria ja logiikka, jossa todistustekniikoita vähän esitellään, on käytynä, ovat valmiudet kirjan sisällön omaksumiseen paremmat. Kirjan sisältö tosin on laaja ja todistustekniikoita esitellään huomattavasti laajemmin ja perusteellisemmin kuin lukiossa, mutta ylivoimaisen vaikeaa ei kirjan asia ole. Paikoitellen, kun asia on abstraktimpaa, esimerkiksi relaatioiden yhteydessä, voi haastetta olla enemmänkin kuin riittävästi. Kirja sisältää kyllä runsaasti lukion pitkän matematiikan ylittävää tietoa, mutta kyllä matematiikasta innostuneelle lukiolaisellekin sitä voisi suositella vaikka harrastusmielessä luettavaksi. Myös lukion pitkän matematiikan opettaja voi saada kirjasta ideoita todistamisen opetukseen.

8.2 ANALYYSIÄ KIRJASTA FUNDAMENTAL CONCEPTS OF MATHEMATICS

Farshid Hajirin kirjassa Fundamental Concepts of Mathematics käsitellään useita matematiikan osa-alueita ja niihin liittyviä keskeisiä käsitteitä 69 sivun laajuisesti. Kirja esittelee myös todistamisen perusteita; induktiotodistuksen yhteydessä laajemminkin kuin vain perus induktion. Kirja on kirjoitettu yliopisto-opiskelijoille; se on itse asiassa Massachusettsin yliopiston erään matematiikan kurssin kurssimateriaali. Tarkastellaan tätäkin kirjaa ensisijaisesti todistamisen opetusta ja kirjan todistuksia silmällä pitäen, sekä arvioiden lukiolaisen valmiuksia omaksua kirjan sisältöä.

Kirja on jaettu yhdeksään osaan. Ensimmäisessä osassa puhutaan muutamin sanoin ongelmanratkaisusta ja deduktiivisen ja induktiivisen päättelyn eroista. Se pyrkii myös olemaan johdantona todistamiseen. Toinen osa käsittelee alkeislogiikkaa ja joukkoja. Kolmas osa selittää enemmän joukkojen ja funktioiden välisestä yhteydestä ja sen lisäksi yhdistetyistä funktioista ja funktioiden käänteiskuvauksista.

Neljäs osa esittelee suurimman ja pienimmän arvon periaatteen, kyyhkyslakkaperiaatteen ja tuloperiaatteen. Lisäksi puhutaan äärellisistä ryhmistä. Viides osa keskittyy relaatioihin, erityisesti ekvivalenssirelaatioihin ja luo katsauksen rationaalilukujen joukkoon ekvivalenssirelaation näkökulmasta. Kuudes osa esittelee matemaattisen induktion periaatteen ja induktiotodistuksen. Seitsemäs osa käsittelee lukuteoriaa, mm. alkulukuja. Eukleideen algoritmi todistetaan.

Kahdeksas osa selvittää numeroituvuuden ja ylinumeroituvuuden sekä sen, miten joukot luokitellaan kokonsa (tai mahtavuutensa) mukaan. Viimeinen osa kertoo hieman historiallista kulkua siitä, miten kompleksilukuihin on päädytty, siitä, miten kompleksilukujen joukko saadaan laajentamalla reaalilukujen joukko, sekä selventää kompleksilukujen geometriaa ja samankaltaisuutta $\mathbb{R}^2$ vektorien kanssa.

Kirja on alusta asti hyvin kaoottinen ja raskaslukuinen. Sivut vaikuttavat täyteen ahdetuilta, kun kaavat ja yhtälöt ovat yhtenä pötkönä muun tekstin seassa eivätkä selkeästi omilla riveillään. Välillä kirjoitetaan tekstin seassa yhtäkkiä isoilla kirjaimilla, ehkä on yritetty korostaa tärkeitä kohtia? Onko kirjassa mahdollisesti yritetty ottaa lukija mukaan, kun esiintyy kommentteja ”you get the idea” pitkin matkaa ja muita vastaavia kommentteja? Samalla se vaikuttaa siihen, että kirjan tieteellinen uskottavuus kärsii. Sama esimerkki ja määritelmiä esitetään kahteen kertaan. On ehkä sisäistetty, että ”kertaus on opintojen äiti”. Kirjoitusvirheitä on runsaasti: toinen sulkumerkki puuttuu, toinen sitaatti puuttuu, lause ei ala isolla kirjaimella, sama sana kirjoitettu kahdesti peräkkäin useammassa kohdassa.

Kielellisesti ja rakenteellisesti kirja on siis heikkoa tuotosta. Matemaattisesti vaikeustaso vaihtelee, mutta enimmäkseen kirjaa on raskasta lukea. Paikoitellen vaaditaan pohjatietoja yliopiston joltain toiselta kurssilta, joten lukiolaiselle tai lukion päättäneelle kirjaa ei oikein mitenkään voi pitää suositeltavana. Joissain kohdin asia on sen verran vaativaa tai lähestymistapa huono, että asian sisäistäminen tuottaa vaikeuksia.

Kirjaan on otettu perinteisestä poikkeavaa lähestymistapaa muutamiin asioihin. Esimerkiksi äärettömien joukkojen mahtavuuksista ja perustelut niihin liittyviin tuloksiin tuodaan kahden professorin kuvitteellisen, melko pitkän keskustelun muodossa. Samoin kompleksilukujen joukon konstruointi tehdään opiskelijoiden ja opettajan kuvitteellisen keskustelun avulla. Jälkimmäistä esimerkkiä olisi kiva soveltaa käytännössäkin koulumaailmassa, mutta ongelmana on yleensä ajan puute ja keskustelevan ilmapiirin luominen luokkaan. Onnistuminen on niin paljon kiinni siitä, lähtevätkö oppilaat keskusteluun mukaan.

Kirjassa on myös useita niin kutsuttuja epäesimerkkejä (non-example) tai huomioita. Erään tällaisen yhteydessä neuvotaan uuden määritelmän oppimisen jälkeen kehittämään määritelmälle sovellus ja *useita* sovelluksia, joihin määritelmä ei sovi. Näistä epäesimerkeistä arvellaan opittavan yhtä paljon tai jopa enemmän kuin sopivista esimerkeistä. [Hajir, 2005, 12] Joitain kertoja kirjoittaja tekee tahallaan epäpätevän tai virheellisen väitteen ja lukijaa pyydetään etsimään virhe tai puute. Eräässä epäyhtälöön liittyvässä todistusesimerkissä neuvotaan, miten todistus voidaan joskus helpommin keksiä liikkumalla takaperin ja kirjoittamalla se sitten lopuksi oikeinpäin. Tehtävään liittyvässä alaviitteessä sanotaan, että matematiikan lukemiseen liittyy se ongelma, että suttupaperityöskentelyä tai marginaaliin kirjoituksia ei koskaan näy, vaan todistukset ovat aina tyylikkäästi kirjoitettuja. [Hajir, 2005, 36] Tämä on realistinen huomio. Ehkä todistusten tekemistä oppisi tehokkaammin, jos näkisi todellisen prosessin siitä, miten todistus on keksitty.

Todistamista kirjassa on kyllä läpi linjan. Tulokset pyritään perustelemaan, jos ei heti asian yhteydessä, niin sitten myöhemmin, kun tarvittavat välineet todistukseen on luotu. Tai sitten todistus on laitettu opiskelijalle harjoitustehtäväksi. Joissain kohdin todistus on kyllä jätetty oman aktiivisuuden varaan.

Kirjan toisessa luvussa oleva, todistamisen taustalla oleva logiikka, on esitetty erittäin huterasti. Se ei luo vakaata pohjaa todistamisen syvemmälle oppimiselle. Ehkä se ei ole ollut tavoitteenakaan. Minkäänlaisia totuustauluja ei esitetä, kaikki esitetään sanallisesti, ja sekin epäselvästi. Induktiotodistus 12. luvussa esitetään selvemmin. Luvussa kerrotaan, että induktiotodistuksesta on eri variaatioita ja että niistä esitettään kolme: tavallinen, täydellinen ja 2-muuttujainen induktio. Kuitenkin luvussa 12 esitellään vain tavallinen induktio. Täydellinen induktio tulee vastaan vasta seuraavassa luvussa erään teoreeman todistuksen yhteydessä, josta löytyy maininta, että käytetään täydellistä induktiota ja sen periaate esitellään siinä yhteydessä yhden rivin laajuisesti. 2-muuttujainen induktio jää epäselväksi.

Kirja vaatisi sisällöllisesti ja ulkonäöllisesti korjauksia, jos lukijoita mielitään. Tällaisenaan kirjaa ei kykene suosittelemaan kuin varoittavana esimerkkinä. Kurssimateriaalina kirja antaa negatiivisen kuvan kurssista esityksen sekavuuden takia. Kun pitäisi todistaa esitetty väite ja tarkoituksena on tehdä se epäsuoralla todistuksella, aletaankin ensin selventää epäsuoran todistuksen toimintaperiaatetta. Varsinaisia harjoitustehtäviä kirjassa ei ole, ellei sellaisiksi lasketa joidenkin tulosten yhteydessä lukevaa ”todistus jätetään opiskelijalle”. Esimerkkejä on kohtalaisesti. Sisältö niissä on samaa tasoa kuin kirja muutenkin. Kirjan uudelleenkirjoittaminen siististi, esimerkiksi kaavojen ja yhtälöiden kirjoittaminen omille riveilleen, saattaisi tuplata sivumäärän.

9 MITEN LISÄTÄ TODISTAMISTA LUKION MATEMATIIKKAAN

Todistustekniikoita voidaan hyvinkin lukiossa opettaa. Sen sijaan ei ole niinkään helppoa antaa yleisiä ohjeita siitä, miten todistus keksitään. Ehkäpä todistamisessa, kuten muussakin matematiikassa toimiva mutta työläs keino oppia on harjoittelu. [Kahanpää, 1993, 42] Induktiotodistus ja se, milloin sitä käytetään, ovat selkeä opettaa. Jos väite koskee luonnollisia lukuja, induktiotodistus toimii hyvin usein.

Suurimpana esteenä todistamisen lisäämiselle lukiossa on oletettavasti aika. Kurssien sisältö on suunniteltu ja ohjelma täynnä. Jos kaikki tulokset johdettaisiin tai todistettaisiin, ei koko kurssisisältöä ehdittäisi käymään kurssin aikana. Kuitenkaan tulosten todistamisesta ei pitäisi luopua, ainakaan kokonaan. Tässä tilanteessa paljon apua on siitä, jos oppikirjat pyrkivät ja pysyvät täsmällisessä esityksessä, jossa kaikki tulokset johdetaan, todistetaan tai vähintään perustellaan. Näin oppilaalle tarjotaan ainakin mahdollisuus asioiden ja matematiikan luonteen syvällisempään ymmärtämiseen.

9.1 KOLMEN TUNNIN OPPITUNTIPAKETTI JOHDATTELUSTA TODISTAMISEEN

Pitkän matematiikan pakollisiin kursseihin olisi hyvä sisällyttää pari kolme tuntia konkreettista opetusta matemaattisesta todistamisesta. Tällaisen ei luulisi olevan ylivoimaista toteuttaa. Jos opetus pyrittäisiin sisällyttämään jo ensimmäiseen pitkän matematiikan kurssiin, olisi siitä hyötyä läpi koko lukion, kun todistustehtäviä kirjoissa kuitenkin on pitkin matkaa. Näin saataisiin luotua jonkinlainen kuva siitä, miten tehtäviin suhtaudutaan, eivätkä ne jäisi joiksikin kummajaisiksi, joita on kierrettävä ja vältettävä viimeiseen asti.

Ensimmäisellä tunnilla voisi esittää arvoituksia ja probleemoita. Ongelmien ei tarvitsisi olla numeerisia. Ne voisivat olla sanallisia ja mielenkiintoisia, helpommasta vaikeampaan eteneviä. Ongelmat, joissa intuitio johtaa harhaan, olisivat perusteltuja, jos sellaisia keksii tai löytää, sillä näin syntyisi tarve päteville perusteluille, todistuksille. Näin päästäisiin toisen tunnin aiheeseen. Toinen tavoite voisi olla motivointi ja hauskuus. Osa ensimmäisen tunnin ongelmista voisi olla kompatehtäviä, sillä hauskuuden lisäksi ne opettavat tehtävänannon tarkkaa lukemista.

Toisella tunnilla voisi opettaa suoran ja epäsuoran todistuksen periaatteet esimerkkien avulla ihan ilman niiden taustalla olevaa teoriaa, sehän selviää Lukuteoria ja logiikka kurssilla sille, joka kurssin valitsee. Induktioperiaatteen ja todistuksen voisi myös käydä esimerkin kera, vaikkei se opetussuunnitelmaan sisällykään. Se on sen verran selkeä opettaa ja käyttää, että sen poisjättäminen opetussuunnitelmasta hämmästyttää. Induktiotodistus on kuitenkin käyttökelpoinen monessa.

Kolmannelle tunnille voisi valmistaa monisteen, jossa olisi erikseen eriteltynä suoran todistuksen tehtävät, epäsuoran todistuksen tehtävät ja induktiotodistuksen tehtävät. Tällöin ei ainakaan tarvitsisi miettiä, minkä todistustavan valitsee. Mukaan voisi laittaa myös jonkin vähemmän matemaattisen piristävän loogisen ongelman. Tällä kolmen tunnin paketilla saisi jo jonkinlaisen kosketuksen todistamiseen. Yhdenlainen idea tällaisesta opetuspaketista löytyy liitteestä kaksi.

Liitteen opetuspaketin sisällön perusteena on käytetty yllä olevia perusteita: motivointi todistamiseen, hauskuus, hyöty läpi lukion kurssien, todistamisen tutuksi tekeminen, tarpeen synnyttäminen todistamiselle sekä tarkkuuden ja täsmällisyyden oppiminen.

Kolmannen tunnin tehtävät eivät välttämättä ole ihan helppoja, jos oletetaan taustalla olevan pelkkä peruskoulu. Vinkkejä pitää varmasti antaa. Esimerkiksi tehtävissä 1,2 ja 6 pitää kertoa, miten parillinen ja pariton luku määritellään ja miten määritelmiä sitten todistuksessa hyödynnetään.

9.2 KÄYTÄNNÖN OHJEITA TODISTAMISEN KIRJOITTAMISEKSI

Ohessa on koottuna eri lähteistä käytännön ohjeita todistamisen kirjoittamiseen. Tällaisista ohjeista voisi tehdä pienen seinäplakaatin matematiikan luokan seinälle. Siitä voisi käydä hakemassa ideoita todistustehtävän ratkaisuun, jos ei meinaa sujua.

1. Mieti, mitä saa olettaa ennalta tunnetuksi ja mitä on todistettava.
2. Erota selkeäsi toisistaan oletus ja väite. Kirjaa ne ylös selvästi.
3. Mieti, mitä osia väitteestä on tarpeen todistaa. Osaa väitteestä voi olla triviaalia tai ennestään todistettua. Kannattaako väite jakaa eri tapauksiin?
4. Turhaa työtä voidaan välttää. Jos todistus sisältää kaksi eri tapausta tai eri suunnat ja molemmat todistetaan samalla tavalla, riittää todistaa toinen ja kirjoittaa: ”Toinen tapaus/suunta vastaavasti.”.
5. Mikä on kunkin päättelyvaiheen suunta ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$). Yhtäpitävyyttä todistettaessa päättely on tehtävä molempiin suuntiin. Joukkoja samoiksi osoitettaessa sisältyminen on todistettava molempiin suuntiin.
6. Huomaa, että joissain todistuksissa nuolet voidaan kääntää ja saadaankin todistettua kerralla molemmat suunnat.
7. Kaikkia alkioita koskevaa väitettä todeksi osoitettaessa on osoitettava että väite todella pätee kaikissa mahdollisissa tapauksissa. Väitettä vääräksi ositettaessa riittää löytää yksi vastaesimerkki.
8. Käytä hyväksi aksioomia, määritelmiä ja jo todistettuja lauseita. Muista mainita, mitä tulosta käytät.
9. Arvioi ja valitse sopiva todistusmenetelmä.
10. Luonnollisia lukuja koskevat väitteet voidaan usein todistaa induktiotodistusta käyttäen.
11. Muista, että ”yksi kuva kertoo enemmän kuin tuhat sanaa”.
12. Antiteesiä käyttäessäsi tarkista, että väitteen negaatio on oikein muodostettu.
13. Joskus voi olla helpompaa keksiä todistus liikkumalla takaperin väitteestä oletukseen ja kirjoittaa todistus sitten puhtaaksi oikeinpäin, jos mahdollista.
14. Hyvä idea voi olla myös kirjoittaa todistuksen ensimmäinen ja viimeinen lause ja yrittää täyttää välissä oleva kuilu kulkemalla siinä edestakaisin. Näin päämäärä on näkyvissä ja pysyy mielessä.

15. Muista että molemmille puolille lisääminen tai molemmilta puolilta vähentäminen ei muuta yhtälöä eikä epäyhtälöä ja on monesti toimiva kikka. Binomikaavat kannattaa pitää myös mielessä. Joskus nollan lisääminen auttaa ratkaisevasti eteenpäin todistuksessa.
16. Todistustehtävästä voi ensin muokata helpomman tehtävän perusperiaatteet säilyttäen (esim. kolmiulotteisesta kaksiulotteiseen) ja etsiä ensin todistuksen helpompaan versioon ja palata sitten alkuperäiseen.
17. Muista, että tai (∨) ei matematiikassa tarkoita täysin samaa kuin puhutussa kielessä.
18. Joskus voi helpottaa, kun kirjoittaa logiikan kielelle mitä on tekemässä. Joskus taas liika symbolien käyttö sekoittaa. Selvien lauseiden kirjoittaminen kannattaa.
19. Käänteinen suora todistus auttaa pääsemään negaatiosta eroon, jos väite on muotoa ¬ P.
20. Kuvittele mielessäsi joku henkilö, jonka yrität saada vakuuttuneeksi väitteen todenperäisyydestä.
21. Yrityksen ja erehdyksen kautta oppii. Harjoittelu lisää taitoja. Anna tilaa luovuudelle. Ole kärsivällinen. Taistele. Älä luovuta.

Ohjeista suurin osa neuvoo todistamisen kirjoittamista. Keinoja todistuksen keksimiseksi on vaikeampi antaa kuin todistuksen kirjoittamiseksi. Ainoat neuvot, jotka saattavat auttaa todistuksen löytämiseen, ovat 10, 13, 14, 16 sekä 20 harjoittelu-kohdan osalta. Viimeinen neuvoista voi olla enemmän ärsyttävä kuin akuutisti auttava, koska et voi vaikuttaa siihen, paljonko menneisyydessäsi olet todistamista harjoitellut. Tulevaisuutta ajatellen kyseessä on työläs ja panostusta vaativa neuvo. Hyvän kuvan piirtäminen tilanteesta (kohta 11) voi joskus myös selkeyttää tilannetta ja synnyttää aivoissa hedelmällisen idean todistamisen keksimiseen.

9.3 TODISTAMISEN JA ONGELMANRATKAISUN YHTÄLÄISYYKSISTÄ JA EROISTA

Todistamisessa tulos on selvillä, mutta pitää keksiä, miten siihen päästään. Ongelmanratkaisussa pitää selvittää sekä tulos (ellei kyseessä ole ongelma, jossa vastaus tiedetään) että toimiva strategia siihen pääsemiseksi. Ongelmanratkaisussa on usein helpompi löytää ratkaisukeino, koska ongelmanratkaisua harjoitellaan ensimmäisiltä luokilta lähtien. Periaatteessa kuitenkin sekä ongelmanratkaisussa että todistamisessa ratkaisun löytyminen perustuu harjoitteluun ja kyseisen tyyppisiin tehtäviin harjaantumiseen.

Todistustehtävän ratkaisuun pätevät pitkälti samat neuvot kuin ongelmanratkaisuun. Esimerkiksi Haapasalon kirjassaan esittelemä Polyan ongelmanratkaisuprosessia kuvaava malli on sovellettavissa yhtä lailla todistustehtäviin kuin ongelmanratkaisuun. [Haapasalo, 1994, 178] Haapasalo kertoo todistusstrategioita tutkitun ja niiden omaksumisella todetun olevan positiivinen vaikutus ongelmanratkaisusuorituksissa. Hän näkee matemaattisissa ongelmissa johtopäätösten teon vaikeutena sen, että yleisiä päättelysääntöjä hallitaan niin puutteellisesti. [Haapasalo, 1994, 182]

Olen huomannut, että oppilaiden keskuudessa ongelmanratkaisu koetaan mielekkäämmäksi kuin todistustehtävät, koska ajatellaan tuloksen ja siihen pääsemisen olevan oleellisinta, niin tärkeänä ei pidätä sitä, miten siihen on päästy. Todistustehtävissä ”tulos” on tiedossa, joten miksi vaivata enää päätään niillä. Toisaalta todistustehtäväkin on eräänlainen ongelmanratkaisutehtävä.

10 YHTEENVETOA

Oppikirjoissa, erityisesti teoriaosassa, todistus on huomioitu kiitettävästi. Vielä kun saataisiin oppilaat niitä lukemaan. Tulosten todistamisia ja johtamisia pitäisi oppitunneillakin käydä läpi siinä määrin kuin aika sen sallii. Varsinkin keskeisimmät tulokset olisi syytä johtaa, ettei niitä vain suorilla anneta, uskota ja aleta soveltaa. Toki ymmärrettävää on, ettei kaikkien tulosten todistamiseen ole välttämättä lukiotasolla vielä riittävästi valmiuksia tai tarvittavia pohjatietoja.

Oppikirjat antavat melko positiivisen kuvan todistamisen asemasta lukion pitkässä matematiikassa. Tämä työ ei kuitenkaan anna realistista kuvaa otsikon aiheesta. Käytetyillä menetelmillä on oikeastaan mahdotonta saada realistista kuvaa asiasta. Todellista elämää lähempänä olevat tulokset saataisiin opettajia ja oppilaita haastattelemalla ja oppitunteja seuraamalla. Näin laajaan työhön ei tämän työn puitteissa kuitenkaan ollut mahdollisuutta. Mutta tästä työstä löytyy pohjatietoa, josta voi sitten jatkaa…

Ylioppilaskirjoitusten puhtaat todistustehtävät viimeisen kymmenen vuoden kevään kokeiden osalta antavat kuitenkin sen kuvan, etteivät todistustehtävät ole suosiossa eikä niissä kovin kehuttavasti menestytä. Samalla tulee se kuva, ettei niitä keskeisinä pidetäkään, kun niitä löytyy vain seitsemän kappaletta kymmenestä kokeesta ja kun kuusi seitsemästä tehtävästä on ylioppilaskokeen loppupään tehtäviä, siis tehtäviä 11-15. Kuitenkin todistustehtävien määrä ylioppilaskirjoituksissa oli hienoisessa nousussa, kun todistustehtäviksi luokiteltiin kaikki tehtävät, joissa vähintään osa tehtävänantoa oli todistaa jotakin.

Toivottavasti tulevaisuudessa todistaminen saa enemmän jalansijaa lukion matematiikassa ja sille annetaan enemmän arvoa. Asian mainostaminen ja tuominen valokeilaan voisi olla yksi keino kehittää tilannetta. Tai se, jos pääsisi vaikuttamaan opetussuunnitelman laatijoihin.

Todistaminen ei ole ainoastaan matematiikan asia. Ajattelu ja argumentointi kirja kuvaa hyvin matemaattisen todistuksen ja arkipäivän argumentoinnin yhtäläisyyksiä ja eroja. Matemaattisen todistamisen hallinta ja sen opettama täsmällisyys opettavat perustelemista, joka on periaatteessa sovellettavissa jokapäiväiseen elämään ja kanssakäymiseen ihmisten kanssa. Se antaa myös paremmat aseet menestyä väittelyissä

LÄHTEET

[1] Boyer, Carl: Tieteiden kuningatar I, Art House, WSOY, Juva, 1994

[2] Boyer, Carl: Tieteiden kuningatar II, Art House, WSOY, Juva, 1994

[3] Calculus 6 Lukuteoria ja Logiikka, Otava, 2010

[4] Dimensio 6/2003

[5] Dimensio 6/2004

[6] Dimensio 6/2007

[7] Dimensio 6/2008

[8] Dimensio 6/2009

[9] Dimensio 6/2010

[10] Guzmán, Miguel de: Matemaattisia seikkailuita, Loimaan kirjapaino Oy, 1990

[11] Haapasalo, Lenni: Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu, MEDUSA, Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä, 1994

[12] Hajir, Farshid: Fundamental Concepts of Mathematics, University of Massachusetts, 2005

[13] Kahanpää, Lauri: Johdatus matematiikkaan, Jyväskylän yliopisto, 1993

[14] Käenmäki, Antti: Johdatus matematiikkaan, Jyväskylän yliopisto, 2005

[15] Laudatur 3 Geometria, Otava, 2005

[16] Laudatur 11 Lukuteoria ja logiikka, Otava, 2008

[17] Lehtinen, Matti: Matematiikan lyhyt historia, Yliopistopaino Helsinki, 1995

[18] Pyramidi 1 Funktiot ja yhtälöt, Tammi, 2005

[19] Pyramidi 11 Lukuteoria ja logiikka, Tammi, 2006

[20] Richard Hammack, Book of Proof, Virginia Commonwealth University, 2009

[21] Siitonen, Arto & Halonen, Ilpo: Ajattelu on argumentointi, WSOY, Juva, 1997

[22] Singh, Simon: Fermat´n viimeinen teoreema, Tammi, Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä, 1998

[23] Smullyan, Raymond: Mikä tämän kirjan nimi on? Hakapaino Oy, Helsinki 2003

LIITTEET

Liite1. Todistustehtävien määrä yo-kokeissa

	Kevät	Syksy
1980	2	3
1981	3	3
1982	2	1
1983	2	3
1984	2	0
1985	1	2
1986	3	2
1987	2	1
1988	5	2
1989	0	3
1990	2	2
1991	1	4
1992	2	2
1993	1	1
1994	1	1
1995	2	1
1996	1	2
1997	1	5
1998	3	1
1999	4	1
2000	1	3
2001	4	3
2002	0	2
2003	3	4
2004	2	1
2005	1	1
2006	2	3
2007	5	4
2008	2	4
2009	3	3
2010	2	3

Liite2. Kolmen tunnin opetuspaketti johdattelusta todistamiseen

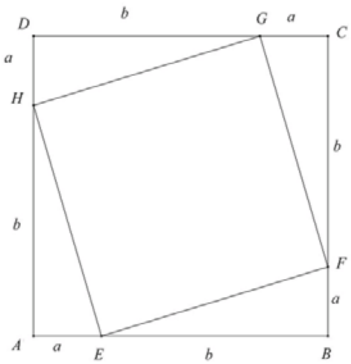
Ensimmäinen tunti:

Loogisia arvoituksia Raymond Smullyanin kirjasta Mikä tämän kirjan nimi on?

1. Jos lentokone putoaa täsmälleen Suomen ja Ruotsin rajalle, niin kumpaan maahan eloonjääneet tulisi haudata?
2. Etanalta menee puolitoista tuntia, kun se ryömii kilparadan ympäri myötäpäivään. Kun se ryömii radan vastapäivään, aikaa kuluu vain 90 minuuttia. Mistä tämä ero johtuu?
3. Mies katseli muotokuvaa, kun joku kysyi häneltä: ”Kenen kuvaa sinä katselet?” Hän vastasi: ”Minulla ei ole sisaria eikä veljiä, mutta tämän miehen isä on isäni poika.” (”Tämän miehen isä” tarkoittaa tietenkin kuvassa olevan miehen isää.) Kenen kuvaa mies katseli?
4. Pimeän huoneen laatikossa on 24 punaista sukkaa ja 24 sinistä sukkaa. Mikä on pienin sukkamäärä, joka minun on poimittava laatikosta, jotta varmasti saisin ainakin kaksi samanväristä sukkaa?
5. Pieksämäen asukkaista tiedetään seuraavat seikat: (1) Jokaisella on eri määrä hiuksia. (2) Kenelläkään ei ole täsmälleen 518 hiusta. (3) Asukkaita on enemmän kuin kenelläkään on hiuksia. Montako asukasta Pieksämäellä korkeintaan voi olla?
6. Kun kaksi kolikkoa lasketaan yhteen, saadaan 60 penniä. Toinen kolikko ei ole kymmenpenninen. Mitkä kolikot ovat kyseessä?
7. Sattuuko joku tietämään, salliiko katolinen kirkko miehen naida leskensä sisaren?
8. Erään kadun varrella on 100 rakennusta. Kyltintekijä saa tehtäväkseen numeroida talot yhdestä sataan. Tätä varten hänen on tilattava joukko numeroita. Osaatko laskea päässäsi, kuinka monta yhdeksikköä hän tarvitsee?

Toinen tunti:

Käydään lyhyesti läpi suoran todistuksen periaate, josta oletetaan olevan jonkinlainen käsitys jo peruskoulun perusteella. ”Jos P, niin Q” -muotoiset väitteet todistetaan olettamalla P ja yrittämällä todistaa, että tällöin myös Q. Tästä yksinkertaisena esimerkkinä todistetaan Pythagoraan lause kuvan1 avulla: Jos suorakulmaisen kolmion kateetin pituudet ovat a ja b, ja hypotenuusan pituus on c, niin pätee $a^2 + b^2 = c^2$.



Kuva1

Käydään seuraavaksi läpi epäsuora todistus. Eli ”jos P, niin Q” -muotoiset väitteet todistetaan olettamalla P ja muodostamalla ”ei-Q” ja yrittämällä sitten johtaa ”ei-Q”:n avulla jokin ristiriita. Jos tässä onnistutaan, ei ”ei-Q” voi olla totta ja siten Q on totta. Todistetaan esimerkkinä epäsuorasta todistuksesta, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.

Viimeisenä käydään läpi induktioperiaate. Piirretään tikkaat ja kerrotaan, että jos tiedät, miten pääset ensimmäiselle askelmalle ja sinulla on tiedossa, miten pääset miltä tahansa askelmalta seuraavalle askelmalle, niin pääset mille tahansa askelmalle. Selvitetään induktiotodistuksen kolme kohtaa: induktioaskel, induktio-oletus ja induktiotodistus. Todistuksesta esimerkkinä todistetaan väite: n:n ensimmäisen luonnollisen luvun summa on $\frac{n(n+1)}{2}$.

Kolmas tunti:

Suoran todistuksen tehtävät

1. Osoita, että kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen.
2. Osoita, että parittoman luonnollisen luvun neliö on aina pariton.
3. Osoita, että $(a - b)^2 < a^2 + b^2$, kun $a < 0$ ja $b < 0$.

Epäsuoran todistuksen tehtävät

4. Osoita, että nelikulmiossa, joka ei ole suorakulmio, vähintään yksi kulma on terävä.
5. Osoita, että jos $2a(a - 3) \leq 0$, niin $a \geq 0$.
6. Osoita, että jos $5n + 2$ on pariton luku, niin myös n on pariton, kun n on luonnollinen luku.

Induktiotodistus tehtävät

7. Osoita, että kaava on voimassa, kun n on positiivinen kokonaisluku.

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1)$$

8. Osoita, että n:n ensimmäisen parittoman luonnollisen luvun summa on n^2 eli että

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2n - 1) = n^2$.

9. Osoita, että $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, kun n = 1, 2, 3…

Pari pähkinää

10. Kaksi vastavihittyä paria saapuu joen rannalle. Siellä on vene, jolla joen voi ylittää kerralla vain kaksi henkilöä. Molemmat miehet ovat niin mustasukkaisia, etteivät voi antaa vaimonsa olla toisen miehen läheisyydessä ilman omaa läsnäoloaan. Voitko järjestää joen ylitykset? [Guzmán, 1990, 21]
11. Kaksi intiaania istui puunrungolla – iso intiaani ja pieni intiaani. Pieni intiaani oli ison intiaanin poika, mutta iso intiaani ei ollut pienen intiaanin isä. Miten sinä tämän selität? [Smullyan, 2003, 21]

Ratkaisut tehtäviin:

Ensimmäinen tunti:

1. Eloonjääneitä ei haudata.
2. Eroa ei ole, puolitoista tuntia on 90 minuuttia.
3. Isänsä poika, voi olla vain katselija itse, koska hänellä ei ole sisaruksia. Siten kuvan miehen isä on katselija ja siten kuvan mies on katselijan poika. Mies katselee poikansa kuvaa.
4. Ensimmäisellä kerralla tulee kumpi sukka tahansa. Toisella kerralla tulee (I) samanvärinen tai (II) erivärinen kuin ensimmäinen. Jos tulee samanvärinen, on saatu sukkapari kahdella poiminnalla. Jos tulee erivärinen, poimitaan kolmas kerta. Nyt tulee välttämättä jommallekummalle sukalle pari. Siten kolme poimintakertaa varmistaa ainakin kaksi samanväristä sukkaa.
5. Jos asukkaita olisi esim. 10000, niin ihmisten hiusten lukumäärä olisi 0, 1, 2, 3, …, 10000 poislukien luku 518. Tämä tarkoittaisi sitä, että asukkaita ei olisikaan enemmän kuin kenelläkään hiuksia. Sama pätee kaikissa niissä tapauksissa, joissa asukkaita on enemmän kuin 518. Siten Pieksämäellä voi olla korkeintaan 518 asukasta.
6. Toinen kolikoista ei ole kymmenpenninen, mutta se toinen on. Siten vastaus on 50 penniin ja 10 pennin kolikko.
7. Miehen leski on kuolleen miehen vaimo. Siten mies on kuollut, eikä kuollut voi mennä naimisiin.
8. Yhdestä yhdeksään on yksi yhdeksikkö. Samoin on kymmenestä 19:ään. Näin kaikilla kymmenillä 89:ään asti. Vain kymmenennellä pätkällä yhdeksikköjä on enemmän. Siis jokaisella kymmenellä pätkällä on yksi yhdeksikkö ja sen lisäksi viimeisellä pätkällä jokaisessa kymmenessä numerossa ensimmäinen numero on yhdeksikkö. Siten yhdeksikköjä tarvitaan 10 + 10 eli 20.

Toinen tunti:

Osoitetaan Pythagoraan lause todeksi. Neliön ABCD pinta-ala on

$$A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Toisaalta neliön pinta-ala voidaan määrittää laskemalla yhteen neljän pienen kolmion ja keskellä olevan neliön pinta-ala. Näin saadaan neliön ABCD pinta-alaksi

$$A = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2.$$

Nämä yhdistämällä saadaan

$$A = a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

Vähentämällä yhtälön molemmilta puolilta 2ab saadaan haluttu tulos. □

Osoitetaan, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Tehdään antiteesi, että se on rationaaliluku. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja supistetussa muodossa. Siispä vähintään toinen luvuista on pariton. Nyt

$$2 = (\sqrt{2})^2 = (\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

eli

$$m = 2n^2.$$

Luku m^2 on siis parillinen ja myös luku m on parillinen, sillä tunnetusti luku on parillinen, jos ja vain jos sen neliö on parillinen. Samoin luku on pariton, jos ja vain jos sen neliö on pariton. Koska m on parillinen, voidaan kirjoittaa m = 2k, jollakin k. Yllä olevan ja m:n parillisuuden nojalla saadaan

$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n^2.$$

Koska $2n^2 = 4k^2$ eli $n^2 = 2k^2$, niin n^2 on parillinen ja siten myös n on parillinen. Siispä sekä m että n ovat parillisia. Tämä on ristiriita sen kanssa, että vähintään toisen luvuista piti olla pariton. Siispä antiteesi on väärä ja väite on tosi. □

Osoitetaan induktiolla, että $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Vertaa luku 4.4, todistus on kirjoitettuna siellä. □

Kolmas tunti:

1. Osoitetaan, että kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen. Olkoon a ja b parittomia kokonaislukuja. Tällöin on olemassa kokonaisluvut k ja l siten, että $a = 2k - 1$ ja $b = 2l - 1$. Nyt

   $$a + b = (2k - 1) + (2l - 1) = 2k + 2l - 2 = 2(k + l - 1). \square$$

2. Osoitetaan, että parittoman luonnollisen luvun neliö on aina pariton. Olkoon a pariton luonnollinen luku. Tällöin on olemassa kokonaisluku k siten, että $a = 2k - 1$. Nyt

   $$a^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1. \square$$

3. Osoitetaan, että $(a - b)^2 < a^2 + b^2$, kun $a < 0$ ja $b < 0$. Nyt

   $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 < a^2 + b^2,$$

   sillä 2ab on positiivinen luku, koska $a < 0$ ja $b < 0$ ja siten tässä vähennetään positiivista lukua. □

4. Osoitetaan, että nelikulmiossa, joka ei ole suorakulmio, vähintään yksi kulma on terävä. Tehdään antiteesi, että mikään kulma ei ole terävä. Tällöin kulmien summa S on

   $$S > 4 \cdot 90° = 360°,$$

   mikä on ristiriita, sillä nelikulmion kulmien summa on 360°. Siten antiteesi on väärä ja väite tosi. □

5. Osoitetaan, että jos $2a(a - 3) \leq 0$, niin $a \geq 0$. Tehdään antiteesi, että $a < 0$. Nyt koska $2a < 0$ ja $a - 3 < 0$, niin tulo

   $$2a(a - 3) < 0,$$

   mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Siten antiteesi on väärä väite tosi. □

6. Osoitetaan, että jos $5n + 2$ on pariton luku, niin myös n on pariton, kun n on luonnollinen luku. Tehdään antiteesi, että n on parillinen. On siis olemassa kokonaisluku k, siten että $n = 2k$. Siten

   $$5n + 2 = 5(2k) + 2 = 10k + 2 = 2(5k + 1),$$

   mikä on ristiriita sen kanssa, että oletettiin, että $5n + 2$ on pariton luku. Siten antiteesi on väärä ja väite tosi. □

7. Osoitetaan induktiolla, että pätee $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1)$, kun n on positiivinen kokonaisluku.
   Alkuaskel: $1(1 + 1) = 2$ eli alkuaskel toteutuu.
   Induktio-oletus: $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k = k(k + 1)$ johonkin $k \geq 1$ asti.
   Induktioväite: $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k + (2k + 2) = (k+1)((k + 1) + 1)) = (k + 1)(k + 2)$.
   Osoitetaan.

   $$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2k + (2k + 2) = k(k + 1) + (2k + 2) = (k + 1)(k + 2). \square$$

8. Osoitetaan, että n:n ensimmäisen parittoman luonnollisen luvun summa on n^2.
   Alkuaskel: $1^2 = 1$ eli alkuaskel toteutuu.
   Induktio-oletus: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2k - 1) = k^2$ johonkin $k \geq 1$ asti.

   Induktioväite: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

   Osoitetaan.

   $$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2. \ \square$$

9. Osoitetaan, että $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, kun n = 1, 2, 3…
   Alkuaskel: $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = 1^2$ eli alkuaskel toteutuu.
   Induktio-oletus: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, johonkin $k \geq 1$ asti.
   Induktioväite: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.
   Osoitetaan.
   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k + 1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)(k+1)}{6} =$$
   $$\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \ \square$$
10. Rouvat voivat ensin yhdessä ylittää joen. Sitten toinen heistä palaa ja ottaa kyytiin miehensä. Ylitettyään joen mies palaa yksin hakemaan toisen miehen.
11. Iso intiaani oli pienen intiaaniin äiti.