”NE ON VAIHTELEVIA LUKUJA”

MUUTTUJAT VIIDESLUOKKALAISTEN MATEMATIIKASSA

Minna Muje

Kasvatustieteen pro gradu – tutkielma
Kevät 2011
Opettajankoulutuslaitos
Jyväskylän yliopisto

TIIVISTELMÄ

MUJE M.
”’Ne on vaihtelevia lukuja’. Muuttujat viidesluokkalaisten matematiikassa”
Jyväskylän yliopisto
Opettajankoulutuslaitos
Pro gradu, 75 sivua, 5 liitesivua
Kasvatustiede

Algebran on useissa tutkimuksissa havaittu olevan oppilaille hankala aihe. Kuitenkin sen opettamisesta tavanomaista aiemmin on saatu myönteisiä kokemuksia. Tämä tutkimus selvitti viidesluokkalaisten valmiuksia käsitellä muuttujia matematiikassa. Aiempien tutkimusten mukaan algebran oppimista helpottavia keskeisiä seikkoja ovat muun muassa kyky merkitä muuttuja, käsitys muuttujasta sekä kyky ratkaista muuttujia sisältäviä tehtäviä. Nämä seikat olivat perusta tämän tutkimuksen ongelmille. Lisäksi selvitettiin yleisiä virhetyyppejä, joita esiintyy oppilaiden ratkaistessa muuttujia sisältäviä tehtäviä. Kiinnostuksen kohteena oli myös ohjauksen vaikutus oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia. Tutkimukseen osallistui 62 viidesluokkalaista. Tutkittavat tekivät matemaattista osaamista mittaavan alkutestin, muuttujan merkitsemiskykyä mittaavan testin sekä testin, joka selvitti oppilaiden käsitystä muuttujaa merkitsevästä symbolista ja kykyä ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä. Lisäksi yhdeksää oppilasta haastateltiin. Aineistoa käsiteltiin sekä laadullisesti että määrällisesti. Tutkimus osoitti, että puolet oppilaista kykenee merkitsemään muuttujan. Kaikilla oppilailla havaittiin olevan käsitys muuttujasta, ja tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen sujui tutkituilta hyvin. Oppilailla esiintyi kuitenkin muuttujien käsittelyyn liittyviä virheellisiä käsityksiä. Tutkimus osoitti lisäksi, että tuettuna oppilaat kykenevät korkeatasoisempaan algebralliseen ajatteluun. Tutkimuksen tulokset antavat käsityksen oppilaiden valmiudesta algebralliseen ajatteluun ja auttavat kehittämään algebran opetusta.

Asiasanat: matematiikan opettaminen, algebra, esialgebra, muuttuja

Esipuhe

Kiinnostuin algebran oppimisen ja opettamisen kysymyksistä proseminaarityössäni, joka käsitteli samaa aihetta kuin tämä tutkimus, mutta hieman eri painotuksin. Selvitin silloin, millainen vaikutus symbolin laadulla on oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia matematiikassa. Osoittautui, että symbolin laadulla eli sillä, onko symboli esitetty kuviona vai kirjaimena, ei ollut merkitystä oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia. Sen sijaan oppilaiden valmiudet muuttujien käsittelyyn olivat yllättävän hyvät, ja tutkimusaineistosta kumpusi mielenkiintoisia taustateoriankin tunnustamia ilmiöitä. Oli selvää, että samaan aiheeseen syventyminen jatkuisi myös tässä työssä.

Tässä tutkimuksessa halusin edelleen selvittää oppilaiden valmiuksia muuttujien käsittelyyn matematiikassa, mutta lisäksi halusin syvempää tietoa aiheesta. Päätin selvittää, kuinka saatu tuki vaikuttaa oppilaiden valmiuksiin käsitellä muuttujia, minkä vuoksi haastattelu valikoitui uudeksi aineistonkeruutavaksi. Tämän tutkimuksen myötä käsitykseni oppilaiden yllättävän vahvoista valmiuksista algebralliseen ajatteluun vahvistui, ja toisaalta tutkimus teki minulle näkyväksi algebran oppimiseen ja opettamiseen liittyviä ongelmia ja ilmiöitä.

Kiitos perheelleni ja Juholle kaikesta saamastani avusta ja tuesta. Kiitän myös kasvatustieteen tohtori Pirjo Tikkasta yhteistyöstä ja työni ohjaajaa filosofian tohtori Kauko Hihnalaa asiantuntevasta ja innostavasta ohjauksesta.

Jyväskylässä toukokuussa 2011
Minna Muje

Sisällys

1 ONGELMALLINEN ALGEBRA 6
2 ARITMETIIKASTA ALGEBRAAN 9
2.1 Koulualgebran perinteitä ja käytäntöjä 9
2.2 Konstruktivismi algebran opetuksessa 9
2.3 Siirtyminen aritmetiikasta algebraan 10
2.4 Esialgebran erityiskysymyksiä 13
2.4.1 Uusi merkitys tutuille symboleille 13
2.4.2 Laajempi lukukäsitys 14
2.4.3 Käsitys yhtäsuuruudesta 15
2.4.4 Aritmeettisten keinojen soveltaminen 17
2.5 Muuttujan merkitseminen 18
2.6 Käsitykset muuttujaa merkitsevästä symbolista 20
2.6.1 Symboli arvona 21
2.6.2 Symboli eliminoitavana 22
2.6.3 Symboli objektina 22
2.6.4 Symboli tuntemattomana lukuna 23
2.6.5 Symboli yleisenä lukuna 24
2.6.6 Symboli systemaattisena muuttujana 24
2.6.7 Oppilaiden käsitykset symboleista 25
2.7 Tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen 26
3 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN 28
3.1 Tutkimusongelma 28
3.2 Tutkimusjoukko 28
3.3 Tutkimuksen kulku 29
3.4 Tutkimuslomakkeet 30
3.5 Haastattelu 31
3.6 Aineiston analyysi 32
3.7 Kvalitatiiviset ja kvantitatiiviset menetelmät tapaustutkimuksen toteuttamisessa 34
3.8 Menetelmän luotettavuus 36
4 VIIDESLUOKKALAISTEN VALMIUDET KÄSITELLÄ MUUTTUJIA MATEMATIIKASSA 38
4.1 Oppilaiden tavat merkitä muuttujaa 38

4.2 Oppilaiden tavat tulkita muuttujia 42
4.3 Oppilaiden kyky ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä 47
4.4 Muuttujien käsittelyyn liittyvät virhetyypit ja virheelliset käsitykset 49
4.5 Ohjauksen vaikutus oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia 54
5 POHDINTA 59
5.1 Viidesluokkalaisilla on valmiuksia algebralliseen ajatteluun 59
5.1.1 Yli puolet oppilaista kykenee merkitsemään muuttujan 59
5.1.2 Kaikilla oppilailla on käsitys muuttujaa merkitsevästä symbolista 60
5.1.3 Oppilaat kykenevät ratkaisemaan tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä 61
5.1.4 Oppilailla esiintyy virheellisiä käsityksiä muuttujiin liittyen 62
5.1.5 Tuettuna oppilaat yltävät korkeatasoisempaan algebralliseen ajatteluun 62
5.1.6 Algebrallisen ajattelun valmiuksien yhteydet toisiinsa 63
5.2 Tutkimuksen luotettavuus 63
5.3 Jatkotutkimusehdotuksia 64
5.4 Algebraa alaluokille 64
Lähteet 66
Liitteet 71

1 ONGELMALLINEN ALGEBRA

Tässä tutkimuksessa selvitetään viidesluokkalaisten oppilaiden kykyä käsitellä muuttujia matematiikassa. Muuttujat liittyvät algebraan, ”kirjainlaskentaan”, joka on matematiikan osa-alue. Algebrassa käsitellään lukujen ohella yhtä tai useampaa tuntematonta lukua eli muuttujaa, jota kuvataan yleensä kirjainsymbolilla, kun aritmetiikka keskittyy pelkästään tunnettujen lukujen käsittelyyn (Christou & Vosniadou 2005, 453; Hassinen 2006, 9; Humberstone & Reeve 2008, 355). Opetussuunnitelmassa (2004) algebra esiintyy matematiikan osa-alueena ensimmäisestä luokasta lähtien. Raja aritmetiikan ja algebran välillä on kuitenkin vaikeasti määriteltävissä. Varsinaisesta algebrasta voidaan erottaa esialgebra, johon luetaan kuuluvaksi muuttujat ja helpot yhtälöt. Vaikka esialgebralliset tehtävät sisältävätkin muuttujan, ne ovat rakenteeltaan yksinkertaisia ja ratkaistavissa aritmetiikan keinoin. (Hihnala 2005, 53.) Tämä tutkimus selvittää nimenomaan oppilaiden esialgebrallisia taitoja ennen kuin algebraa on varsinaisesti opetettu.

Siirtymävaihe aritmetiikasta algebraan on matematiikan opetuksen kannalta oleellinen, sillä algebra vaatii oppilailta numerolaskuja enemmän abstraktia ajattelua (Hihnala 2005, 64). Algebraa pidetään matematiikassa tärkeänä alueena, mutta sen on todettu olevan oppilaille hankala aihe. Kuitenkin algebran opetuksesta tavanomaista aiemmin, jopa 8–9-vuotiaana, on saatu rohkaisevia tuloksia. (Brizuela & Schliemann 2003; Carpenter & Levi 2000; Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest 2006; Duke & Graham 2007; Earnest & Balti 2008; Freudenthal 1974; Kieran 1991; MacGregor & Stacey 1997; Schliemann, Carraher, Brizuela & Earnest 2003; Schliemann, Carraher, Brizuela & Jones 1998; Swafford & Langrall 2000; Ursini 2001; Warren & Cooper 2005.) Oppilaiden vaikeudet algebrassa myöhemmin koulu-uralla ja toisaalta onnistuneet kokeilut opettaa algebraa alemmilla luokilla osoittavat, että algebrallisen ajattelun sisällyttämistä alempien luokkien opetukseen tulisi vakavasti harkita. Tällainen muutos vaatii tietysti huolellista tutkimusta ja asiaan perehtymistä. (Schliemann ym. 1998, 5.) Tämän tutkimuksen tavoitteena onkin selvittää, millaiset valmiudet suomalaisilla viidesluokkalaisilla oppilailla on algebralliseen ajatteluun, ja olisiko sen perusteella algebran opetuksen aikaistaminen perusteltua.

Algebran vaikeus oppilaille on todettu useissa ulkomaisissa tutkimuksissa (Duke & Graham 2007; Farmaki, Klaoudatos & Verikios 2004; Herscovics & Linchevski 1999; Küchemann 1981; McNeil, Weinberg, Hattikudur, Stephens, Asquith, Knuth & Alibali 2010; Schliemann ym. 1998; Ursini 2001; Warren & Cooper 2005), ja myös suomalaisoppilaita koskevat lukuisat tutkimukset kertovat algebran osaamisen heikosta tasosta. TIMSS 1999 -tutkimuksen tulokset osoittavat, että algebra on yksi seitsemäsluokkalaisten matemaattisen osaamisen ongelmakohdista. Algebraa osattiin heikommin kuin muita matematiikan osa-alueita ja myös tutkimukseen osallistuneiden OECD-maiden keskiarvoa heikommin. Myös PISA 2000-tutkimuksessa ilmeni aukkoja algebran perustaitojen hallinnassa, vaikka muuten 15-vuotiaiden suomalaisnuorten matematiikan osaaminen oli hyvällä tasolla. (Kupari & Törnroos 2004, 144–145, 151.) Hihnalan (2005) tutkimus osoittaa lisäksi, että kuudes-, seitsemäs- ja kahdeksasluokkalaisten algebran osaamisessa ei juuri ole eroja, ja että 6.–9.-luokkien aikana oppilaiden esialgebran taidot paranivat tutkituista matematiikan osa-alueista vähiten (Hihnala 2005, 118, 131). Sukupuolten välillä ei ole algebran osaamisessa havaittu suuria eroja (Hannula, Kupari, Pehkonen, Räsänen & Soro 2004, 172; Hihnala 2005, 121).

Suomalaisnuorten heikon algebran osaamisen osoittavien tutkimustulosten valossa lienee selvää, että algebran opetusta tulisi kehittää, mikä vaatii tietoa oppilaiden valmiuksista algebralliseen ajatteluun. Konstruktivismin hengessä oppilaiden aiemmat tiedot ja käsitykset on otettava huomioon opetuksessa, ja näihin tietoihin ja käsityksiin tulisi matematiikan opetuksella myös olla vaikutusta (Leino 2004, 21). Tuloksellinen algebran opetus edellyttää tietoa oppilaiden algebraan liittämistä virhekäsityksistä ja ajattelua rajoittavista virheellisistä tulkinnoista. Tämä tutkimus toivottavasti lisää niin luokan- kuin aineenopettajienkin ja oppikirjantekijöiden tietoisuutta oppilaiden algebrallisen ajattelun valmiuksista ja niiden tukemista edellyttävistä toimista.

Aiemmat oppilaiden algebran osaamista koskevat tutkimukset ovat keskittyneet pitkälti erilaisten opetuskokeilujen ja tarvittaessa avustettujen haastattelutilanteiden tuloksellisuuden selvittämiseen. Suomalaisten peruskoululaisten esialgebran taitoja koskeva tutkimus on vähäistä, minkä vuoksi tarvitaan lisää tietoa erityisesti nuorten suomalaisten oppilaiden valmiuksista algebralliseen ajatteluun ennen kuin algebraa on opetettu. Tutkimusten mukaan algebran oppimista helpottavia keskeisiä seikkoja ovat muun muassa kyky merkitä muuttuja, käsitys muuttujasta vielä tuntemattomana lukuna, sekä kyky ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä (Carpenter & Levi 2000, 5; Duke & Graham 2007, 44–45; Schliemann ym. 1998, 15). Nämä seikat ovat perusta tämän tutkimuksen ongelmille. Lisäksi selvitetään yleisiä virhetyyppejä, joita esiintyy oppilaiden ratkaistessa muuttujia sisältäviä tehtäviä, sekä ohjauksen vaikutusta tutkittavan kykyyn käsitellä muuttujia.

2 ARITMETIIKASTA ALGEBRAAN

2.1 Koulualgebran perinteitä ja käytäntöjä

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004, 108, 111) mukaan viidesluokkalaisen tulisi kyetä ratkaisemaan yhtälöitä ja epäyhtälöitä päättelemällä, mutta laajemmin algebraa käsitellään vasta 6.–9.-luokilla. Esimerkiksi muuttujan käsite tulee oppilaille tutuksi vasta tuolloin. Perinteisesti algebran opetus aloitetaan tutkimalla yhden muuttujan malleja, harjoittelemalla yhden muuttujan yhtälöiden ratkaisemista ja näin opitaan manipuloimaan muuttujia sisältäviä lausekkeita. Perinteinen algebran opetus on kuitenkin katsottu ongelmalliseksi oppilaan ymmärryksen kannalta. (McNeil ym. 2010, 626.) Algebran on todettu näyttäytyvän oppilaille merkityksettömänä sääntöihin ja toimintatapoihin takertumisena ja symbolien manipuloimisena. (Herscovics & Linchevski 1994, 60; Küchemann 1981, 118).

Algebran sijoittumista opetussuunnitelmaan ja perinteistä algebran opetuksen järjestämistä onkin kritisoitu. Leinon (2004) mukaan lapsen matemaattisen ajattelun kehittymisen järjestys sekä koulumatematiikan perinteiset sisällöt ja käytännöt ovat ”valtaosin pelkkää luulottelua” (Leino 2004, 26). Toisaalta on esitetty, että algebran hankaluus oppilaille saattaa johtua siitä, että alempien luokkien opetussuunnitelman tarjoamat sisällöt ovat turhan rajalliset (Schliemann ym. 2003, 128). Oppilailla siis saattaisi olla valmiuksia enempäänkin, kuin mitä nykyinen opetussuunnitelma olettaa ja mihin nykyiset koulun käytännöt keskittyvät. Muutokset algebran opetuksen käytännöissä vaativat kuitenkin riittäviä ennakkotietoja oppilaiden algebrallisesta ajattelusta, ja tämän tutkimuksen tavoitteena onkin niitä osaltaan tarjota.

2.2 Konstruktivismi algebran opetuksessa

Konstruktivistinen oppimiskäsitys korostaa oppijan aiempien tietojen ja kokemusten merkitystä uuden oppimiselle. Konstruktivismiin liittyy oppilaiden ennakkokäsitysten huomioon ottaminen, sillä näiden ennakkokäsitysten varassa oppija konstruoi opetuksen sisällöt. (Rauste-von Wright, von Wright & Soini 2003, 162, 169.) Oppija siis oppii suhteessa aikaisempaan tietoonsa. Koska oppijan aikaisemmalla tiedolla on konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan olennainen osa oppimisessa, aikaisemman tiedon esille saaminen ja opetuksen mukauttaminen siihen on tärkeä osa opetusta (Leino 2004, 4, 21). Erityisesti algebran opetuksen ja oppimisen ongelmallisuuden vuoksi oppilaiden toimintamenetelmät ja ajattelun tasot on huomioitava entistä tarkemmin (Küchemann 1981, 118). Siten konstruktivistinen lähestymistapa sopii algebran opetuksen ja oppimisen kysymysten tarkasteluun erityisen hyvin.

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen keskeinen idea on, että oppija ei ole oppimistilanteeseen tullessaan tyhjä taulu, vaan oppilaalla on jo kokemuksia ja ajatuksia opittavasta asiasta (Rauste-von Wright ym. 2003, 163). Esimerkiksi kirjainten ja muiden merkkien käyttö on oppilaille tuttuja jo muista yhteyksistä (Stacey & MacGregor 1997, 110). Mielekkään algebran opettaminen vaatii oppilaiden aiempien tietojen ja kokemusten huomioimista. Opettajan on osattava ennakoida, millaisia käsityksiä oppilailla käsiteltävästä aiheesta todennäköisesti on. Kun muistetaan algebran oppimisen ongelmallisuus, on erityisesti huomioitava, että oppilaiden aiemmat kokemukset voivat myös rajoittaa oppimista. (Christou, Vosniadou & Vamvakoussi 2007, 285; Leino 1993, 1, 6.) Konstruktivistinen oppimiskäsitys soveltuu tämän tutkimuksen kehykseksi erityisen hyvin, sillä tutkimuksen tavoitteena on selvittää oppilaiden valmiuksia algebralliseen ajatteluun juuri ennen varsinaisen algebran opetuksen alkamista. Siten tämä tutkimus tukee konstruktivistista tavoitetta huomioida oppilaiden ennakkotiedot opetuksessa.

2.3 Siirtyminen aritmetiikasta algebraan

Algebra, ”kirjainlaskenta”, on matematiikan osa-alue, joka liittyy tuntemattomien lukujen eli muuttujien käsittelyyn. Algebraa voidaan kuvata matematiikan kieleksi, jolla ilmaistaan lukujen välisiä suhteita symbolisia merkintätapoja hyödyntäen. Kun algebra keskittyy tuntemattomien lukujen käsittelyyn, aritmetiikassa puolestaan käsitellään vain tunnettuja lukuja. Algebra voidaankin nähdä aritmetiikan yleistyksenä. (Carraher ym. 2006; Christou & Vosniadou 2005; Hassinen 2006; Humberstone & Reeve 2008; Koellner, Pittman & Frykholm 2008/2009; MacGregor & Stacey 1999; Malisani & Spagnolo 2009; Pitts Bannister & Wilkins 2007/2008; Slavit 1998/1999; Tent 2006.) Linchevski jakaa algebran tarkemmin viiteen osa-alueeseen, jotka liittyvät muuttujiin ja algebrallisten lausekkeiden sieventämiseen, yleistämiseen, algebrallisiin rakenteisiin, yhtälöihin ja sanallisiin tehtäviin (Linchevski 1995, 115).

Varsinaisesta algebrasta voidaan erottaa esialgebra, joka on välivaihe siirryttäessä aritmetiikasta algebraan (Linchevski 1995, 119). Ursini (2001) liittää esialgebraan kokemukset, joiden kautta oppilaat saavat käsityksen algebran keskeisistä ideoista ennen varsinaista algebran opetusta (Ursini 2001, 212). Hihnalan (2005) mukaan esialgebraan kuuluvat muuttujat ja helpot yhtälöt. Esialgebralliset tehtävät sisältävät muuttujan, mutta ne ovat rakenteeltaan yksinkertaisia ja ratkaistavissa aritmetiikan keinoin. (Hihnala 2005, 53.) Linchevski (1995) liittää esialgebraan aina numeerisen kontekstin. Esialgebrassa käsitellään hänen mukaansa yleistyksiä ja algebrallisia rakenteita numeerisessa kontekstissa ilman vaatimusta symbolien manipuloinnista eli lausekkeiden muuntamisesta toiseen muotoon niiden yksinkertaistamiseksi. Myös Linchevski sisällyttää esialgebraan yhtälöt, joiden osalta keskitytään lukujen korvaamiseen kirjainmerkinnöillä sekä yhtälöiden käsittelyyn, ratkaisemiseen ja muodostamiseen. Sanallisten tehtävien ratkaisussa esialgebran idea on viedä ratkaisutapoja aritmeettisesta esialgebralliseen ja lopulta algebralliseen kehottamalla oppilaita ajattelemaan pidemmälle. (Linchevski 1995, 115–118.) Tässä tutkimuksessa keskitytään nimenomaan oppilaiden esialgebran osaamiseen. Esialgebra nähdään Hihnalan ja Linchevskin määritelmiä mukaillen algebran esiasteena, jossa käsitellään muuttujia numeerisessa kontekstissa. Vaatimusta symbolien manipuloinnin hallinnasta ei ole, vaan esialgebralliset tehtävät, joita myös tämän tutkimuksen tehtävät ovat, voidaan ratkaista päättelemällä ja aritmetiikan keinoin.

Aritmetiikasta algebraan siirtyminen asettaa oppilaiden ajattelulle useita haasteita. Ensinnäkin algebra vaatii aritmetiikkaa enemmän abstraktia ajattelua (Hihnala 2005, 64). Esimerkiksi negatiivisten lukujen käyttöönotto aritmetiikasta algebraan siirryttäessä nostaa tehtävien abstraktiotasoa ja siten aiheuttaa oppilaille suuria ongelmia (Gallardo 2002 ja Vlassis 2002, ks. Hihnala 2005, 46). Toiseksi oppilaiden tulee kyetä käsittelemään heille usein merkityksettömiä symbolisia esityksiä matemaattisina objekteina ja suorittamaan näille objekteille operaatioita, joiden tulos ei ole numeerinen. Algebran historiassa tämä kehitys vei vuosisatoja, mutta oppilaiden oletetaan omaksuvan asiat suhteellisen nopeasti. (Kieran 1992, 394.) Kolmanneksi oppilaiden tulee omaksua algebran symbolinen kieli, joka eroaa oppilaille tutusta aritmetiikan kielestä. Aritmetiikassa oppilaat ovat tottuneet ratkaisemaan ongelmia tavalliseen kieleen pohjautuen ja saamaan yksikäsitteisen, numeerisen vastauksen (Malisani & Spagnolo 2009, 20). Aritmetiikan sanalliset ilmaukset, kuten ”yhteensä”, ”vähemmän” tai ”saadaan” ovat oppilaille tuttuja ja niihin perustuen ongelmia on helpompaa ratkaista kuin abstrakteihin algebrallisiin rakenteisiin nojautuen. Lisäksi sanalliset ilmaukset ovat luotettavampia, sillä niihin tukeutuessaan oppilaat tekevät vähemmän virheitä ja ovat herkempiä huomaamaan ja korjaamaan mahdolliset virheet. Algebran abstrakti kieli puolestaan vaatii oppilaille vähemmän tuttujen symbolisten ilmausten, kuten x ja =, merkitysten muistamista. (Koedinger, Alibali & Nathan 2008, 368, 389–390.)

Siirtymävaihetta aritmetiikasta algebraan on kuvattu monin termein. Filloy, Rojano ja Solares (2010) puhuvat didaktisesta kuilusta (*didactic cut*), joka ilmenee, kun oppilaat kohtaavat ensimmäistä kertaa algebrallisen ongelman ja joutuvat rakentamaan uusia merkityksiä aritmeettisille objekteille ja operaatioille (Filloy, Rojano & Solares 2010, 59). Tähän liittyy läheisesti käsite kognitiivinen kuilu, joka viittaa oppilaan kykenemättömyyteen käsitellä muuttujia spontaanisti (Linchevski & Herscovics 1996, 39). Myös kognitiivisen konfliktin käsite, joka viittaa ongelmanratkaisuun liittyvään ristiriita- ja epätasapainotilaan, voi auttaa ymmärtämään siirtymävaiheen ongelmallisuutta (Haapasalo 2004, 85). Siirtymävaihetta aritmetiikasta algebraan voidaan kuvata myös proseduraalisen ja strukturaalisen tiedon näkökulmasta. Proseduraalinen tai operationaalinen viittaa aritmeettisiin operaatioihin, joita suoritetaan luvuille ja tulokseksi saadaan lukuja. Esimerkiksi luvun sijoittaminen lausekkeeseen tai yhtälöön on proseduraalinen toiminto. Tärkeää on huomata, että tässä operaatiot suoritetaan luvuille eikä algebrallisille objekteille. Sen sijaan strukturaalinen näkökulma algebraan edellyttää operaatioiden suorittamista algebrallisille rakenteille, kuten sievennettäessä algebrallisia lausekkeita, jaettaessa lauseke muuttujalla tai ratkaistaessa yhtälö algebrallisin keinoin. Tulos ei nyt ole numeerinen, vaan algebrallinen lauseke. Ymmärtääkseen algebraa oppilaiden tulee kyetä siirtymään ajattelussaan proseduraaliselta strukturaaliselle tasolle. Oppilaat eivät enää voi operoida algebrallisilla lausekkeilla ja yhtälöillä kuten luvuilla, vaan heidän on opittava näkemään ne algebrallisina objekteina. (Kieran 1992, 392–393.)

Aritmetiikasta algebraan siirtymisen hankaluutta voidaan selittää myös käsitteellisen muutoksen teorialla (Christou & Vosniadou 2005, 458). Käsitteellinen muutos viittaa tilanteeseen, jossa oppijan aiempi tietämys on ristiriidassa opittavan tiedon kanssa. Tyypillistä on myös, että aikaisempi ajattelu estää tai rajoittaa muutosprosessia. Tällöin uuden asian omaksuminen vaatii käsitteellistä muutosta. (Christou ym. 2007, 285; Merenluoto & Lehtinen 2004, 303.) Siten algebran oppimisen ongelmallisuus ei selity pelkästään aiheen monimutkaisuudella tai abstraktiudella, vaan sitä voi selittää myös oppilaan aiemman tiedon luonne (Merenluoto & Lehtinen 2004, 304). Koska useissa tutkimuksissa on havaittu algebraan liittyvän monenlaisia virheellisiä käsityksiä ja ajattelumalleja, voi algebran menestyksellinen oppiminen hyvinkin vaatia käsitteellistä muutosta. On myös havaittu, että oppilailla esiintyvät virheelliset käsitykset ovat melko pysyviä ja vastuskykyisiä uudelle tiedolle (Merenluoto & Lehtinen 2004, 302, 315). Näihin virheellisiin käsityksiin vaikuttaminen opetuksen keinoin vaatii tietoa niistä ja niiden yleisyydestä oppilailla.

2.4 Esialgebran erityiskysymyksiä

2.4.1 Uusi merkitys tutuille symboleille

Kuten jo aiemmin on todettu, algebra on oppilaille hankala aihe. Lisäksi algebraan liittyvät virhekäsitykset näyttävät olevan melko pysyviä ja hankalasti muutettavissa (Christou ym. 2007, 286; Merenluoto & Lehtinen 2004, 302, 315). Nämä väärinkäsitykset ja virheelliset tulkinnat juontavat juurensa aiemmista kokemuksista, jotka saattavat olla algebran oppimisen kannalta ongelmallisia (Stacey & MacGregor 1997, 110). Erityisesti oppilaiden kokemukset luvuista aritmetiikassa vaikuttavat voimakkaasti siihen, kuinka oppilaat tulkitsevat symboleita algebrassa. Niinpä algebran opetuksen alkaessa oppilaat kohtaavat kaksi hankalaa tehtävää: heidän on annettava merkitys uusille symboleille ja uusi merkitys symboleille, jotka ovat tuttuja aritmetiikasta. (Christou ym. 2007, 288, 296.) Algebrassa oppilaiden muissa yhteyksissä oppimat symbolien käyttötavat eivät välttämättä enää toimi sellaisinaan. Normaalit kielioppisäännöt eivät päde algebrassa, eikä algebran keinoin voida ilmaista kaikkea, mitä oppilaat haluaisivat sen ilmaisevan. Algebra myös tuo mukanaan uudenlaisia merkintöjä, joihin aiemmin opitun soveltaminen johtaa virheisiin. Esimerkiksi h10 tarkoittaisi roomalaisten lukujen mukaisesti tulkittuna kymmentä enemmän kuin h. Algebrassa tulkinta ei kuitenkaan enää toimi. (MacGregor & Stacey 1997, 12; Stacey & MacGregor 1997, 110–111.)

Algebrassa oppilaat kohtaavat monenlaisia uusia symbolien käyttö- ja merkitsemistapoja. Oppilaille ei ole esimerkiksi selvää, että vaikkapa $5x$ tarkoittaa 5 kertaa x, eikä yhteenlaskua tai paikkalukua (Stacey & MacGregor 1997, 110; Matteson 2010, 91–92). Tällöin jos oppilasta kehotetaan sijoittamaan y:n paikalle 3 lausekkeeseen $2y$, oppilas vastaa virheellisesti 23 (Christou ym. 2007, 286; Hassinen 2006, 88). Tähän väärinkäsitykseen liittyy läheisesti luulo siitä, että ilman kerrointa esiintyvä symboli tarkoittaa aina yhtä numeroa (Stacey & MacGregor 1997, 111). Tällöin esimerkiksi x ei voi olla 21, vaan sen on oltava jotakin välillä 0–9. Toiseksi oppilaille ei ole itsestään selvää, että jos sama muuttuja esiintyy lausekkeessa useamman kerran, sen täytyy tarkoittaa samaa lukua (Duke & Graham 2007, 45). Oppilaat saattavatkin antaa samassa tehtävässä useamman kerran esiintyvälle symbolille eri arvot. Ilmiö saattaa olla peräisin aiemmin käytetyistä muuttujaa koskevista tulkinnoista. Oppilaat ovat mahdollisesti ratkaisseet tehtäviä, joissa sama symboli esittääkin eri lukuja, kuten tehtävässä ”Keksi kaikki tavat, joilla □ + □ = 10. (Warren & Cooper 2005, 69.) Toisaalta eri muuttujat voivat kyllä saada saman arvon, mikä on oppilaille hankalaa käsittää: Kun eräässä tutkimuksessa 6.–8.-luokkalaisilta oppilailta kysyttiin, ”Onko $h + m + n = h + p + n$ totta aina, joskus vai ei koskaan?”, kuudesluokkalaisista alle kolmannes vastasi oikein, ja kahdeksasluokkalaisistakin alle puolet. (Stephens 2005, 96–97.)

Oppilaiden tapoihin määrittää arvo muuttujalle liittyy monenlaisia virheellisiä käsityksiä. Oppilaat saattavat kuvitella, että muuttuja saa arvon 1, ellei toisin määritellä. Ilman kerrointa esiintyvän muuttujan oppilaat saattavat myös tulkita arvoksi 1, mikä saattaa juontua siitä, että ilman kerrointa esiintyvän kirjaimen on opetettu tarkoittavan samaa kuin kirjain kerrottuna yhdellä. Vanhemmilla oppilailla sekaannusta saattaa aiheuttaa tieto siitä, että $x^0 = 1$. (Darley 2009, 460; MacGregor & Stacey 1997, 10–11.) Lisäksi oppilaiden tapaan määrittää muuttujan arvo vaikuttaa algebrallisen objektin muoto, kuten miinusmerkin tai toisen luvun esiintyminen objektin yhteydessä. Oppilailla on myös taipumus tulkita symbolit luonnollisiksi luvuiksi. (Christou & Vosniadou 2005, 455.)

2.4.2 Laajempi lukukäsitys

Aritmetiikassa oppilaat ovat tottuneet tietynlaisten lukujen käsittelyyn. Oppilaat ovat tottuneet operoimaan lähinnä pienillä kokonaisluvuilla, minkä vuoksi he ovat epävarmoja, toimivatko opitut asiat myös suurilla luvuilla, desimaaliluvuilla tai murtoluvuilla. Esimerkiksi desimaalilukuja sisältävä yhtälö saattaa tuottaa oppilaille suuria vaikeuksia, vaikka kokonaislukuja sisältävän yhtälön he ratkaisivat helposti. (MacGregor & Stacey 1999, 82.) Oppilailla onkin taipumus tulkita kirjainsymbolit vain luonnollisiksi luvuiksi esimerkiksi rationaali- tai desimaalilukujen sijaan, mikä saattaa haitata oppilaiden myöhempää algebrallisen ajattelun kehitystä. Myös negatiiviset luvut algebrassa tuottavat oppilaille hankaluuksia. Tyypillisesti oppilaat ajattelevat, että esimerkiksi a ei voi saada negatiivisia arvoja ja vastaavasti $-b$ positiivisia arvoja. (Christou & Vosniadou 2005, 454–455, 457).

Aritmetiikassa luonnollisten lukujen joukossa yhtä lukua vastaa täsmälleen yhdenlainen symbolinen merkintä. Jokainen numero esittää vain yhtä arvoa ja eri symbolit esittävät eri arvoja. Lukualueen laajentuessa reaalilukuihin samalle luvulle löydetään monenlaisia symbolisia esityksiä. Esimerkiksi $2 = 4/2 = 32/16 = \sqrt{4}$. Kuitenkaan eri numerosymbolit eivät voi tarkoittaa samaa lukua. Algebrassa sen sijaan symbolia vastaa sarja lukuja ja eri symbolit voivat tarkoittaa samaa lukua. Lisäksi aritmetiikassa luonnollisilla luvuilla on järjestys, kun taas algebrassa symboleille ei voida määrittää järjestystä esimerkiksi aakkosjärjestyksen mukaan. (Christou & Vosniadou 2005, 453–454; Christou ym. 2007, 288.) Tästä aritmetiikan ja algebran eroavaisuudesta seuraa, että jotkut oppilaat yhdistävät virheellisesti kirjainsymbolin sen järjestyslukuun aakkosissa. Silloin esimerkiksi h-kirjaimelle annetaan arvo 8, sillä se on aakkosten kahdeksas kirjain. Kirjaimen arvon määrääminen aakkosjärjestyksen perusteella saattaa juontaa juurensa palapeleistä tai oppilaiden leikeissään käyttämistä salaisista koodeista. Myös joissakin oppikirjoissa käytetään aakkoskoodeja tehtävien tarkastuksen apuna. Lisäksi esimerkiksi tehtävien nimet (1(a), 1(b), 1(c) jne.) oppikirjoissa vahvistavat mielikuvaa aakkosista ja niitä vastaavista lukuarvoista. (Küchemann 1981, 106; MacGregor & Stacey 1997, 13; Slavit 1998/1999, 266; Stacey & MacGregor 1997, 110–112.)

2.4.3 Käsitys yhtäsuuruudesta

Yksi keskeisimmistä algebran oppimista vaikeuttavista tekijöistä on puutteellinen käsitys yhtäsuuruudesta. Yhtäsuuruus voidaan käsittää operationaalisesti tai relaationa, ja näistä relationaalinen käsitys on tavoiteltava. Se tarkoittaa ymmärrystä siitä, että yhtäsuuruusmerkki viittaa kahden lausekkeen väliseen yhtäsuuruuteen, täsmällisemmin ekvivalenssirelaatioon. Operationaalinen käsitys puolestaan ilmenee, jos oppilas ajattelee yhtäsuuruusmerkin tarkoittavan kehotusta suorittaa laskutoimitus tai antaa vastaus. Operationaalinen käsitys on hyvin yleinen. Eräässä tutkimuksessa kuudesluokkalaisista 58 % tulkitsi yhtäsuuruuden operationaalisesti, ja kahdeksasluokkalaisistakin vielä 45 %. Vastaavasti relationaalinen käsitys on harmillisen harvinainen, vaikka sen on todettu helpottavat algebran oppimista. (Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens 2008, 515–518.)

Operationaalisen käsityksen yleisyys selittyy oppilaiden kokemuksilla aritmetiikasta. Aritmetiikasta oppilaat omaksuvat algebran kannalta ongelmallisen rakenteen, jossa operaatiot ovat yhtälön vasemmalla puolella, ja vastaus oikealla puolella. Tästä seuraa, että oppilaat saattavat suorittaa laskutoimituksen kaikille tehtävässä esiintyville luvuille ja kirjoittaa vastauksen tyhjään ruutuun, kuten tehtävässä 2 + 3 + 4 + 5 = _ (Carpenter & Levi 2000, 7, 12–13; Knuth ym. 2008, 516; MacGregor & Stacey 1999, 79; McNeil & Alibali 2005, 884, 887; Stacey & MacGregor 1997, 111–112.) Strategia ei tietenkään toimi enää, kun yhtälön rakenne on monimutkaisempi ja vaatii yhtäsuuruusmerkin tietoista huomioimista, kuten tapauksessa 2 + 3 + 4 + 5 = _ + 1. Strategian rajallisuudesta raportoi esimerkiksi Hihnala (2005): Kun kuudesluokkalaisilta kysyttiin vastausta tehtävään 8 + 4 = [ ] + 5, yksikään ei antanut oikeaa vastausta, vaan ilmoitti tulokset 12 tai 17 (Falkner, Levi & Carpenter 1999, ks. Hihnala 2005, 47). Siten yhtäsuuruusmerkin huoleton käyttö aritmetiikassa johdattelee oppilaita luuloon, että yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa ”saadaan”, ”tulos on”, ”tästä tulee” tai muuta sellaista, mikä on ongelmallista, kun vuosia kestäneestä aritmetiikan opetuksesta siirrytään algebran opetukseen (Hassinen 2006, 97; Knuth ym. 2008, 516; MacGregor & Stacey 1999, 79; Schliemann ym. 1998, 4).

Tavallista on myös, että oppilaat ketjuttavat laskulausekkeita peräkkäisten yhtäsuuruusmerkkien avulla, kuten tapauksessa 2 + 3 = 5 - 1 = 4 (Hackbarth & Wilsman 2008, 124; Hihnala 2005, 76, 133–134; Knuth ym. 2008, 519). Oppilaat ovat tottuneet lausekkeiden ketjuttamiseen aritmetiikassa, ja se toimii laskinta käytettäessä, mutta algebrassa se on ongelmallinen tapa etenkin yhtälöitä ratkaistaessa (Hihnala 2005, 76, 133–134; MacGregor & Stacey 1999, 79). Lausekkeiden ketjuttamista esiintyy kuudes- ja seitsemäsluokkalaisista yli puolella, mutta ylemmillä luokilla tämä aritmeettinen ajattelu vähenee. On huomattava, että vaikka lausekkeiden ketjuttaminen onkin virheellinen merkintätapa, se ei välttämättä kerro oppilaan kehittymättömästä algebrallisesta ajattelusta. Oppilas saattaa kyetä ratkaisemaan tehtävän oikein ketjuttamisesta huolimatta. (Hihnala 2005, 76, 133–134; Matteson 2010, 93.)

2.4.4 Aritmeettisten keinojen soveltaminen

Algebran menestyksellinen oppiminen vaatii riittäviä tietoja aritmetiikasta. Esimerkiksi yhtälöiden ratkaisu perustuu yhtäsuuruuden ohella lukujen ja laskutoimitusten ominaisuuksiin. Siten oppilailla tulee olla lukujen ja laskutoimitusten ominaisuuksista aritmetiikassa vankka käsitys, jotta ne muodostavat riittävän pohjan algebran oppimiselle. (Darley 2009, 460; Dettori, Garuti & Lemut 2001, 192; Tent 2006, 25.) Vaikka algebran oppiminen vaatii riittävää aritmetiikan hallintaa, aritmeettiset keinot johtavat toisinaan algebrassa ongelmiin. Purkamisstrategia (*unwinding strategy*) on yksi ongelmallinen aritmeettinen lähestymistapa algebrallisiin tehtäviin ja ilmentää rajoittunutta käsitystä yhtälöiden rakenteesta. Purkamisstrategia tarkoittaa työskentelyä takaperin vastauksesta tuntemattomaan, jolloin oppilas voi sanallistaa yhtälön ”j – 2 = 16” muotoon ”Niityllä oli 16 + 2 lehmää” (Humberstone & Reeve 2008, 355–356, 359; Kieran 1992, 393.) Purkamisstrategia voi johtaa oikea ratkaisun saavuttamiseen, mutta sen rajallisuus ilmenee esimerkiksi, kun muuttuja esiintyy yhtälössä useammin kuin kerran (Koedinger ym. 2008, 370).

Aritmetiikan kieli eroaa algebran symbolikielestä siinä, että se keskittyy vastauksiin, kun taas algebran kieli suhteisiin (MacGregor & Stacey 1999, 79). Aritmeettisiin tehtäviin on usein selkeä numeerinen ratkaisu. Algebran keskeinen idea sen sijaan on tuntemattomien tai yleisten lukujen kuvaaminen kirjainsymbolein ja laskutoimitusten suorittaminen niillä. Oppilaille on vierasta, että vaikka itse laskutoimitus merkitään, vastaukseksi ei aina saada lukua. (Hassinen 2006, 85.) Tällöin tehtävä saattaa oppilaasta näyttää vielä keskeneräiseltä tai puutteelliselta. Oppilaat eivät mielellään hyväksykään tuntemattomia lukuja sisältäviä algebrallisia lausekkeita lopullisiksi vastauksiksi (Collis 1975, ks. Christou ym. 2007, 286). Sen sijaan muuttujan alkeellisesti käsittäville oppilaille on tyypillistä määrittää jokin arvo muuttujalle, jotta he saavat numeerisen vastauksen algebrallisen lausekkeen sijaan. (Küchemann 1981, 113).

2.5 Muuttujan merkitseminen

Muuttujan esittäminen symbolina on yksi algebran keskeisistä ideoista (Kieran 1992, 393). Kirjainten käyttö muuttujan merkitsemiseksi on kuitenkin ollut vaikea aihe aloitteleville algebran opiskelijoille (Kieran 1991, 51). Siirtyminen verbaalisesta kielestä symboliseen kieleen tuottaa vaikeuksia erityisesti heikoille oppilaille. Symboliseen kieleen siirryttäessä ilmaisua tulee tiivistää, valita muuttujat ja pohtia, mitkä niistä jo tunnetaan. Lahjakkailta oppilailta tämä sujuu usein lähes automaattisesti, kun taas heikoille oppilaille vaihe tuottaa suuria ongelmia. (Yrjönsuuri 2004, 119.)

Oppilaille aiheuttaa hankaluuksia operoida sellaisen luvun kanssa, jota ei tunneta. He haluaisivat tietää luvun tai arvaavat sen. Esimerkiksi Hihnalan (2005) tutkimuksessa 6.–9.-luokkalaisista 28,1 % korvasi muuttujan numeroluvulla tehtävässä, jossa piti muodostaa suorakulmion alan lauseke (Hihnala 2005, 108–109). Oppilaat ratkaisevat tehtävän ennemmin mielessään pohtimalla kuin symboleja käyttämällä. (Schliemann ym. 1998, 11). He pyrkivät laskemaan, vaikka tehtävässä pyydettäisiin vain merkitsemään. Aluksi oppilaat jopa pyrkivät välttämään symbolisia ilmauksia. (Hassinen 2006, 87.) Ongelmien taustalla saattaa olla vaikeus löytää sellaista symbolia, joka ei millään tavalla ilmaisisi sen mahdollisia arvoja tai tekisi niistä virheellisiä oletuksia (Schliemann ym. 1998, 3).

Schliemann ym. (1998) selvittivät tutkimuksessaan kolmasluokkalaisten esialgebrallisen ajattelun valmiuksia ennen algebran opetusta. Tutkimuksen mukaan kolmasluokkalaiset kykenivät kehittämään merkintätavan ilmaisemaan muuttujia, vaikkakin tämä vaati useimpien oppilaiden kohdalla haastattelijan tukea, sillä vain pieni osa oppilaista kykeni ratkaisemaan tehtävät itsenäisesti. Tehtävät tosin olivat melko vaikeita: niiden rakenne edellytti muuttujan sijoittamista yhtälön molemmin puolin. Haastattelijan tukemana oppilaat merkitsivät muuttujaa jonakin muotona, ja myöhemmin yksi tutkittavista kykeni itsenäisesti soveltamaan oppimaansa merkitsemistapaa. (Schliemann ym. 1998, 11, 14–16.) Myös muut tutkimukset vahvistavat käsitystä, että oppilaat kykenevät esittämään muuttujan kuvioina, muotoina tai kirjaimina ainakin ohjatusti (Carpenter & Levi 2000; Carraher ym. 2006). Aina tosin ei tarvita ohjaustakaan: Eräässä tutkimuksessa 8-vuotiaat oppilaat keksivät itse merkitä muuttujaa kysymysmerkillä laatikossa (Warren & Cooper 2005, 62). Kysymysmerkki esiintyy lasten merkitsemistavoissa usein (Brizuela & Schliemann 2003, 140; Carraher ym. 2006).

Muuttujan merkitseminen jollakin kuviolla, muodolla tai muulle oppilaille luontaisella tavalla voi olla aloittelevalle algebran oppijalle sopiva keino (Lannin, Townsend, Armer, Green & Schneider 2008, 482). Astetta edistyneempi tapa on ilmaista muuttuja lyhenteellä, sanalla tai useammalla sanalla. Hassisen (2006) mukaan tämä keino on 7-luokkalaisten keskuudessa yleinen ennen kuin muuttujan merkitsemiseen on annettu ohjeita (Hassinen 2006, 86). Edistyneimpänä tapana merkitä muuttujaa voidaan pitää kirjainsymbolia. Sen käyttö ei ole algebraa opiskelleillekaan itsestään selvä. Kun tutkijat esittivät yli kahdelle tuhannelle 11–15-vuotiaalle oppilaalle tehtävän: ”David on 10 cm pidempi kuin Con. Con on h cm pitkä. Kuinka voit kirjoittaa Davidin pituuden?”, oikeiden vastausten määrä oli yllättävän alhainen: ensimmäisen vuoden algebran opiskelijoista puolet vastasi oikein ja kolmannen ja neljännen vuoden opiskelijoistakin vain 75 % tiesi oikean vastauksen. Kun sama kysymys esitettiin 11–12-vuotiaille oppilaille, joille ei ollut opetettu algebraa, oppilaista kaksi kolmasosaa jätti täysin vastaamatta. Vastanneista 14 oppilaasta vain yksi muotoili oikean lausekkeen. Vastanneista kolmannes osoitti, ettei ymmärrä tehtävää lainkaan. Sen sijaan lyhyen opetusjakson jälkeen tulokset paranivat. Oikeiden vastausten määrä nousi parista prosentista yli kolmannekseen ja väärin vastanneistakin oppilaista neljännes oli yrittänyt käyttää muuttujaa. Näissä tutkimuksissa oppilaiden käyttämiä virheellisiä ratkaisutapoja olivat esimerkiksi $C + 10 = D$ ja $h = h + 10$. Jotkut antoivat h:lle arvon 8 aakkosjärjestyksen mukaan, kun osa sijoitti h:n paikalle pituudeksi sopivan luvun. Lisäksi oppilaat käyttivät roomalaisiin lukuihin perustuvaa merkintää $h10$. Osa oppilaista esitti kysytyn lausekkeen uudella muuttujalla. (MacGregor & Stacey 1997, 6–7, 12–13; Stacey & MacGregor 1997, 110, 112.) Muuttujan sisältävän lausekkeen muotoileminen ei siis näytä olevan helppo tehtävä, vaikka symboli olisikin annettu valmiiksi, kuten esimerkkitehtävässä.

Myös Hihnalan (2005) tutkimus vahvistaa käsitystä siitä, että algebrallisen lausekkeen muodostaminen on oppilaille hankalaa. Tehtävästä, jossa piti muodostaa tuntemattoman luvun sisältävä suorakulmion alan lauseke, suoriutui 2,7 % kuudesluokkalaisista, 11,4 % seitsemäsluokkalaisista, 24,9 % kahdeksasluokkalaisista ja yhdeksäsluokkalaisistakin vain 22,5 %. Edellä mainitun Staceyn ja McGregorin käyttämän tehtävän kaltainen monivalintatehtävä, jossa piti tunnistaa pojan pituuden lauseke, ei myöskään sujunut ongelmitta. Oikein vastasi kuudesluokkalaisista 33,9 % ja yhdeksäsluokkalaisistakin alle puolet. Vastaavanlainen tunnistamistehtävä, jossa piti tunnistaa luonnollisen luvun seuraaja, sujui paremmin. Siinä 58 % kuudesluokkalaisista vastasi oikein. (Hihnala 2005, 109.)

Kuitenkin nuorempia oppilaita tutkittaessa on saatu rohkaisevia viitteitä siitä, että oppilailla on valmiuksia kehittää merkintätapa muuttujalle spontaanisti tai ohjattuna. Brizuelan ja Schliemannin (2003) tutkimuksessa neljäsluokkalaiset (9–10-vuotiaat) olivat osallistuneet toiselta luokalta alkaen viikoittain esialgebraa käsitteleviin tuokioihin. Neljännen luokan lopussa oppilaista suurin osa, 78 %, teki algebralliseen ongelmaan kuvallisen ratkaisun, kolmannes sisällytti ratkaisuunsa yhtälön ja 39 % käytti ratkaisussaan kirjainta kuvaamaan yhtä tai useampaa tuntematonta lukua. Opetuskokeilun jälkeen tutkituista 18 oppilaasta 10 käytti haastattelutilanteessa esitetyssä ongelmassa kirjainta kuvaamaan muuttujaa, neljä muodosti ongelmasta täydellisen yhtälön ja kahdeksan oppilasta ratkaisi tehtävän oikein. Tosin algebrallisten menetelmien käyttö yhtälön ratkaisemiseksi oli harvinaista. Tutkijoiden mukaan noin kolmannes oppilaista oppi jakson aikana käyttämään yhtälöä algebrallisten ongelmien ratkaisussa. (Brizuela & Schliemann 2003, 140, 142–143.)

Tässä tutkimuksessa on huomioitava, että tutkittavat eivät luultavasti ole saaneet muuttujan merkitsemiseen liittyen opetusta. Muuttujan käsite tulee esille vasta 6.–9.-luokkalaisten opetuksessa (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004).

2.6 Käsitykset muuttujaa merkitsevästä symbolista

Perinteinen tapa opettaa algebraa on keskittynyt pitkälti symbolien manipuloimiseen, mikä on kuitenkin nähty ongelmalliseksi symbolien merkityksen ymmärtämisen kannalta (Lannin ym. 2008, 483). Merkityksen antaminen muuttujaa merkitseville kirjaimille onkin muodostunut yhdeksi algebran oppimisen keskeisimmistä ongelmakohdista (Fernandez & Anhalt 2001, 236; Malisani & Spagnolo 2009, 20). Käsitys muuttujaa esittävästä symbolista on monille epäselvä vielä algebran opetuksen jälkeen. Monet oppilaat läpäisevätkin algebran opetuksen tajuamatta, että esimerkiksi x voi merkitä toistaiseksi tuntematonta lukua, yleistettyä lukua tai muuttujaa (Duke &

Graham 2007, 43; Stacey & MacGregor 1997, 111). Muuttujan käsite on erityisen hankala, sillä sen käyttötapa riippuu tilanteesta (Christou & Vosniadou 2005, 453; Malisani & Spagnolo 2009, 21).

Küchemann (1981) on paljon viitatussa teoriassaan luokitellut oppilaiden symbolien tulkinnan tapoja kuuteen ryhmään. Luokituksessa edetään tasoittain kohti syvällisempää ymmärrystä tuntemattomasta. Kolmea ensimmäistä tasoa, symboli arvona, eliminoitavana ja objektina, pidetään alkeellisina tulkintatapoina. Näillä tasoilla oppilas pyrkii välttämään tuntemattomalla luvulla operointia. Näitä edistyneempiä tasoja ovat symboli tuntemattomana lukuna, yleisenä lukuna ja systemaattisena muuttujana. Käsitystä symbolista systemaattisena muuttujana pidetään tavoiteltavana. (Küchemann 1981, 105.)

2.6.1 Symboli arvona

Küchemannin luokituksen ensimmäisellä tasolla symbolille haetaan jotakin numeerista arvoa, kuten tehtävässä ”$a + 5 = 8$, $a = ?$” (Küchemann 1981, 104). Kysyttäessä mitä tietty symboli tarkoittaa jossakin yhtälössä, oppilaat tyypillisesti vastaavat sen tarkoittavan vastausta (Kieran 1991). Oppilaat siis pyrkivät ratkaisemaan yhtälön, etsimään oikean vastauksen. Käsitys symbolista yhtälön ratkaisuna, joka on tietty luku, on kuitenkin monissa muissa tilanteissa ongelmallinen. Sen rajoittuneisuus ilmenee esimerkiksi kuvattaessa lukujen ominaisuuksia, kuten yhtälössä $x + y = y + x$ (Carpenter & Levi 2000, 6).

Yhtälön kääntäminen on yksi oppilaille tyypillinen keino selvittää arvo tuntemattomalle luvulle. Tällöin oppilas ratkaisee yhtälön $5 + a = 12$ laskemalla $12 – 5$ ja saa vastaukseksi 7. Yhtälön kääntäminen ei kuitenkaan ole ongelmaton ratkaisutapa. Niillä oppilailla, jotka pyrkivät kääntämään yhtälön, on havaittu olevan huomattavia vaikeuksia ymmärtää yhtälöiden ratkaisumenetelmä, jossa sama operaatio suoritetaan yhtälön molemmille puolille. Tämän ratkaisustrategian ymmärtäminen sujui parhaiten niiltä oppilailta, jotka sanallistivat ongelman esimerkiksi muotoon ”luku, joka pitää lisätä viiteen, jotta saadaan 12”. (Kieran 1991, 50–51.)

2.6.2 Symboli eliminoitavana

Luokituksen toisella tasolla symbolia ei käytetä, se jätetään huomiotta tai sille ei anneta merkitystä. Tehtävät ratkaistaan oikein, vaikka muuttujaa ei varsinaisesti käsitelläkään. Muuttujat voidaan eliminoida sovittamalla yhteen annetut yhtälöt tai arvot. Tällöin esimerkiksi tehtävässä ”Jos $a + b = 43$, $a + b + 2 = \ldots$” tuntemattomat luvut voi eliminoida huomioimalla, että yhtälöiden vasemmat puolet eroavat toisistaan kahdella, jolloin yksinkertaisesti lisätään kaksi 43:n. (Küchemann 1981, 104, 106.) Oppilaan käsitys symbolista eliminoitavana voi ilmetä myös virheellisellä tavalla. Esimerkiksi pyydettäessä lisäämään 4 lausekkeeseen 3n, oppilaille on yleistä vastata 7, jolloin symboli on jätetty täysin huomiotta ja suoritettu annettu laskutoimitus tunnetuille luvuille. (Küchemann 1981, 108; MacGregor & Stacey 1997, 10.)

2.6.3 Symboli objektina

Kolmanneksi kirjain voidaan Küchemannin mukaan käsittää konkreettiseksi objektiksi tai sellaisen lyhenteeksi (Küchemann 1981, 104). Tällöin esimerkiksi $2a + 5a = 7a$ voisi tarkoittaa ”Kun kahteen omenaan lisätään viisi omenaa, saadaan 7 omenaa” (Hassinen 2006, 142). Tällaista ”hedelmäsalaattialgebrallista” lähestymistapaa opettajat saattavat suosia yrittäessään luoda yhteyksiä matematiikan abstraktien symbolien ja oikean maailman välille (McNeil ym. 2010, 627). Usein lähestymistapaa käytetäänkin algebrassa johdattelevana esimerkkinä (Duke & Graham 2007, 43; Hassinen 2006, 84, 140). Kirjain voidaan tulkita objektiksi myös, kun sitä käytetään yksikkönä, vastauksen merkkinä tai lyhenteenä kaavassa. Tämäkin käyttötapa toimii opetuksessa usein johdattelevana esimerkkinä ennen varsinaista muuttujan käsittelyä. (Hassinen 2006, 84–85, 140.) Käyttötapa on oppilaille tuttu jo algebran sisältöjen ulkopuoleltakin. He ovat tottuneet ennen algebran opetusta käyttämään kirjaimia useissa erilaisissa yhteyksissä: s. 6 tarkoittaa sivua 6, cm tarkoittaa senttimetriä, ABC kolmion kulmia, m massaa ja niin edelleen (McNeil ym. 2010, 627; Stacey & MacGregor 1997, 111).

Objektitulkinta on siis oppilaille tuttu jo ennen algebran opetusta esimerkiksi matematiikassa käytetyistä lyhenteistä. Lisäksi oppilaat ovat jo ennen koulun alkua oppineet yhdistämään sanan sen ensimmäiseen kirjaimeen (a niin kuin appelsiini, b niin kuin banaani). Näin objektitulkinta on muodostunut oppilaille hyvin vankaksi käsitykseksi ennen kuin muuttujan käsitettä aletaan opettaa. (McNeil ym. 2010, 631.) Objektitulkinta voi kuitenkin johtaa käsitteellisiin ongelmiin. Jos b tarkoittaa banaaneja, niin 6b tarkoittaa kuutta banaania, eikä kuutta kertaa jotakin tuntematonta määrää banaaneja. Sen sijaan, että opetetaan symbolin tarkoittavan jotakin objektia, olisi hyödyllisempää opettaa sen tarkoittavan jotakin määrää objekteja. Hyvä tapa ehkäistä väärien käsitysten muodostumista olisikin sanoa ”olkoon h eurojen määrä” tai ”olkoon hinta h euroa” kuin että ”merkitään hintaa h:lla”. (Küchemann 1981, 107; Stacey & MacGregor 1997, 112). Muistisääntöihin, kuten ”a niin kuin appelsiini”, perustuvien muuttujanimien käytössä on oltava erityisen varovainen. Niiden on nimittäin havaittu olevan oppilaille ongelmallisia, vaikka niitä käytettäisiinkin oikein kuvaamaan määrää, eikä objektia. (McNeil ym. 2010, 631.)

Sen lisäksi, että objektitulkinta ohjaa oppilaita ajattelemaan objektia objektien määrän sijasta, sen rajallisuus ilmenee myös esimerkiksi lausekkeita sieventäessä. Esimerkiksi lauseke $2a + 5b + a$ voidaan sieventää muotoon $3a + 5b$ ajattelemalla, että kahteen omenaan lisätään viisi banaania ja vielä yksi omena, jolloin saadaan kolme omenaa ja viisi banaania. Käsitys osoittautuu ongelmalliseksi, kun tarkastellaan esimerkiksi lauseketta $3a - b + a$, jossa banaanin vähentäminen kolmesta omenasta tuntuu järjettömältä. (Küchemann 1981, 107) Siispä vaikka objektitulkintaa algebran opetuksessa johdattelevana esimerkkinä usein käytetäänkin, sen käyttäminen ei tue oppilaiden muuttujakäsityksen rakentumista (McNeil ym. 2010, 631).

2.6.4 Symboli tuntemattomana lukuna

Küchemannin luokituksen neljännellä tasolla kirjain käsitetään yhdeksi tuntemattomaksi luvuksi. Tällä tasolla oppilas myös kykenee operoimaan tuntemattomalla luvulla. Käsitys voi ilmetä esimerkiksi tehtävässä ”Lisää 4 lausekkeeseen $3n$”. Haasteena on hyväksyä, että vastaukseksi todella riittää $3n + 4$, ja että enempää ei voi tehdä. (Küchemann 1981, 104, 108) Luokituksen ensimmäisestä tasosta tämän tason erottaa juuri sen hyväksyminen, että kirjain voi olla tuntematon, eikä sen arvoa välttämättä tarvitse saada selville. Astetta edistyneemmästä ajattelusta tämän tason puolestaan erottaa se, että kirjain voi saada tasan yhden arvon. Käsitys toimii tietysti yksinkertaisissa ensimmäisen asteen yhtälöissä, mutta myöhemmin, kun kirjain voi saada useita arvoja, tämä tulkitsemistapa on rajoittunut. Esimerkiksi $2n$ voi esittää parillisten luonnollisten lukujen joukkoa, ja siinä n voi olla mikä tahansa luonnollinen luku.

2.6.5 Symboli yleisenä lukuna

Viidennellä tasolla kirjaimen ajatellaan edustavan useita arvoja tai ainakin sen ymmärretään voivan saada useamman kuin yhden arvon. Tällainen käsitys muuttujasta voi ilmetä esimerkiksi tehtävissä ”Mitä voit sanoa d:stä, jos $c + d < 10$ ja $c < d$?” tai ”Onko $L + M + N = L + P + N$ ei koskaan, joskus (milloin?), aina?” (Küchemann 1981, 104, 109–110.) Algebrassa symbolia käytetään yleisenä lukuna usein, mutta esialgebran opetuksessa on hyvin harvinaista käyttää kirjainta tässä tarkoituksessa. Sen sijaan käytetään huomattavasti useammin kirjainta yhtenä tuntemattomana lukuna esimerkiksi yhtälössä. Tästä seuraa, että oppilailla on hyvin vähän kokemusta algebrallisten symbolien käyttämisestä yleisten riippuvuuksien ajattelemisessa ja ilmaisemisessa, minkä vuoksi tämä kirjainten käyttötarkoitus tuottaa heille huomattavia ongelmia. (Kieran 1991, 49.)

2.6.6 Symboli systemaattisena muuttujana

Luokituksen ylimmällä tasolla kirjain edustaa tuntemattomien arvojen joukkoa, ja siihen liitetään systemaattisuutta (Küchemann 1981, 104). Tällä tasolla ei riitä, että oppilas ajattelee symbolien saavan useita arvoja, vaan muuttujatulkinta vaatii lisäksi lukujen keskinäisten suhteiden tarkastelua eli käsitystä riippuvuudesta (Hassinen 2006, 142). Tulkintatavan ero alempiin luokkiin ilmenee, kun tarkastellaan yhtälöä $5b + 6r = 90$. Neljännellä tasolla, tulkittaessa symboli tuntemattomaksi luvuksi, sen ajatellaan olevan väittämä, joka toteutuu tietyllä arvoparilla. Viidennellä tasolla, kun symboli tulkitaan yleiseksi luvuksi, puolestaan käsitetään, että yhtälön toteuttavia arvopareja on useampia. Ylimmällä tasolla muuttujien välillä nähdään riippuvuus. (Küchemann 1981, 110.)

Muuttujatulkinta vaatii ymmärrystä erilaisista algebrallisista representaatioista. Filloyn ynnä muiden (2010) mukaan algebralliset representaatiot voivat olla eritasoisia. Ensimmäisellä tasolla, kuten yhtä muuttujaa sisältävissä yhtälöissä, muuttuja viittaa suoraan kirjaimen arvoon. Sen sijaan useamman kuin yhden muuttujan sisältävissä yhtälöissä muuttujan arvo riippuu toisesta muuttujasta ja sen arvoon viitataan suhteessa operaatioihin, joita toisen muuttujan arvolle pitää suorittaa. Tämä on toisen tason representaatio. Näin selvittääkseen kahden muuttujan yhtälön oppilaan täytyy liikkua molempien representaatioiden välillä. (Filloy ym. 2010, 54.) Edellä mainittujen tutkijoiden ensimmäisen tason representaatio voidaan liittää Küchemannin teorian ensimmäiseen tai neljänteen tasoon, jolloin symboli käsitetään arvoksi tai yhdeksi tuntemattomaksi luvuksi. Toisen tason representaatio puolestaan viittaa selvästi Küchemannin luokituksen ylimpään tasoon. Muuttujatulkinta edellyttää siis oppilaalta kykyä siirtyä representaatiosta toiseen, kykyä käyttää erilaisia tulkintoja muuttujasta.

2.6.7 Oppilaiden käsitykset symboleista

Symbolin tulkitseminen arvoksi eli Küchemannin luokituksen ensimmäisellä tasolla toimiminen on oppilaille yleistä. Küchemannin tutkimista 14-vuotiaista 92 % selvitti oikean vastauksen tehtävään ”Mitä voit sanoa *a*:sta, jos $a + 5 = 8$?” eli heidän tulkintansa symbolista oli vähintään ensimmäisellä tasolla (Küchemann 1981, 105). Tulkintatapa saattaa olla oppilaille tuttu tehtävistä kuten ”Mikä luku sopii *x*:n paikalle, kun $x + 5 = 12$?” (Hassinen 2006, 84–85). Oppilaat ovat todennäköisesti myös ratkaisseet avoimia tehtäviä, kuten □ + 5 = 8, ja ne ovat vaikuttaneet heidän symbolien tulkintatapoihinsa (Kieran 1991, 50).

Küchemannin tutkimista 13-vuotiaista, jotka olivat tutkituista nuorimpia ja siten tämän tutkimuksen kannalta vertailukelpoisimpia, kymmenesosalla ei ollut käsitystä muuttujasta. Oppilaista 73 % sijoitettiin alemmille tasoille, jossa ei tarvinnut operoida tuntemattomalla luvulla. (Küchemann 1981, 116.) Myös Hihnalan tutkimuksessa alimpien tasojen ajattelua esiintyi eniten. Tutkituista 6.–9.-luokkalaisista oppilaista 7 % sijoitettiin Küchemannin luokituksen alimmalle tasolle, 28 % toiselle tasolle ja 33 % kolmannelle tasolle. (Hihnala 2005, 133.) Kolmesta alimmasta tasosta objektitulkinta on oppilailla yleinen. Oppilaat ajattelevat symbolin tarkoittavan sanaa, kuten omenaa tai appelsiinia tai yksikköä, kuten metriä tai senttimetriä. Tämä ei ole yllättävää, sillä onhan kirjainten käyttö yksiköinä tai lyhenteenä oppilaille matematiikasta jo entuudestaan tuttua. (Hassinen 2006, 84–86; Stacey & McGregor 1997, 111.)

Küchemann sijoitti 13-vuotiaista tutkittavistaan 17 % neljännelle tasolle, jolla muuttuja tulkitaan tuntemattomaksi luvuksi. Osalla oppilaista havaittiin myös korkeamman ajattelun piirteitä. Vuotta vanhemmista oppilaista 39 % mainitsi vain yhden mahdollisen arvon tehtävässä ”Mitä voit sanoa d:stä, jos $c + d < 10$ ja $c < d$?” ja heidät sijoitettiin siten neljännelle tasolle. Oppilaista 34 % puolestaan sijoitettiin viidennelle tasolle. (Küchemann 1981, 109, 116.) Vaikka muuttujatulkinta eli luokituksen kuudes taso on Küchemannin teoriassa edistynein ajattelun taso, ja vaikka läheskään kaikki oppilaat eivät näytä sitä saavuttavan algebran opetuksesta huolimatta, yllättävän nuorillakin oppilailla saattaa esiintyä muuttujatulkintaan viittaavaa ajattelua. Carpenterin ja Levin (2000) tutkimuksessa 1.–2.-luokkalaisilla esiintyi ymmärrystä riippuvuudesta: tiettyä yhtälöä eivät toteuttaneet kaikki lukuparit, vaan toinen luku riippui toisesta. (Carpenter & Levi 2000, 10).

On huomattava, että monet tehtävät ovat ratkaistavissa täysin oikein myös ilman käsitystä symbolista muuttujana. Toisinaan ongelmanratkaisussa joutuukin käyttämään useita erilaisia symbolin tulkitsemistapoja. Tämän vuoksi tutkijan on hankalaa erottaa millä tasolla tutkittava ajattelussaan todella on. Esimerkiksi yhden yhtälön toteuttavan arvon mainitseminen ei välttämättä tarkoita sitä, ettei muuttuja voisi oppilaan mielestä saada muitakin arvoja. (Küchemann 1981, 110.) Lisäksi on huomioitava, että vaikka oppilaalla olisi melko edistynytkin käsitys symbolista, hän ei välttämättä osaa operoida sillä (Herscovics & Linchevski 1994, 62). Välttämättä siis oppilaan kyvyllä käsitellä muuttujia ei ole suoraa yhteyttä siihen, kuinka oppilas käsittää muuttujaa merkitsevän symbolin.

2.7 Tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2004, 108) 3.–5.-luokkien matematiikan sisällöissä on mainittu yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaiseminen päättelemällä. Lisäksi oppilaat ovat saattaneet kohdata tuntemattomia lukumääriä jo ennen kolmattakin luokkaa avoimien tehtävien, kuten $\square + 5 = 8$, muodossa (Kieran 1991, 50). Ulkomaisten tutkimusten perusteella yhtälöiden ratkaiseminen ei vaikuttaisi olevan oppilaille ylitsepääsemätön haaste. Jo kolmasluokkalaisilla, joille ei ole opetettu algebraa, saattaa olla riittävät valmiudet yhtälöiden ratkaisemiseen (Schliemann ym. 1998, 10). Myös vanhempia oppilaita koskevat tutkimustulokset vaikuttavat myönteisiltä. Eräässä tutkimuksessa oppilaista 91–100 % ratkaisi oikein yhtälöt, joissa esiintyi yksi muuttuja sekä yhteen- ja vähennyslaskuja. Myös kerto- ja jakolaskuja sisältävien yhden muuttujan yhtälöiden ratkaisuprosentit olivat korkeita: vain yhtä tehtävää lukuun ottamatta kaikki oppilaat osasivat ratkaista yhtälöt. Vielä tuntemattoman luvun esiintyessä yhtälön molemmin puolinkin 86–91 % oppilaista päätyi oikeaan lopputulokseen. (Herscovics & Linchevski 1994, 69, 73.) Toisaalta oppilaiden taito ratkaista yhtälöitä ei ole mikään itsestäänselvyys. Duke ja Graham (2007) muistuttavat, että kaikille oppilaille ei ole selvää, että vaikkapa ensimmäisen asteen yhtälön ideana on selvittää toistaiseksi tuntematon luku arvaamalla tai manipuloimalla yhtälöä (Duke & Graham 2007, 45). Muistutus on aiheellinen, sillä suomalaisnuorilla on havaittu ongelmia algebrassa esimerkiksi juuri perusyhtälöiden ratkaisemisessa (Kupari & Törnroos 2004, 144–145).

3 TUTKIMUKSEN TOTEUTTAMINEN

3.1 Tutkimusongelma

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaiset valmiudet oppilailla on käsitellä muuttujia matematiikassa ennen kuin asiaa on varsinaisesti opetettu. Aihetta tarkastellaan seuraavista näkökulmista, jotka aiemmat tutkimukset ovat osoittaneet keskeisiksi: muuttujan esittäminen, käsitys muuttujaa esittävästä symbolista ja tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen. Lisäksi tavoitteena on selvittää, millaisia virhetyyppejä esiintyy, kun oppilaat käsittelevät muuttujia sisältäviä tehtäviä. Haastattelun avulla selvitetään ohjauksen vaikutusta oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia. Tutkimusongelmat ovat seuraavat:

1 Millaiset valmiudet viidesluokkalaisilla on käsitellä muuttujia matematiikassa?

1.1 Kuinka oppilaat merkitsevät muuttujan?

1.2 Millainen käsitys oppilailla on muuttujaa merkitsevästä symbolista?

1.3 Millaiset valmiudet oppilailla on ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä?

1.4 Millaisia virhetyyppejä esiintyy oppilaiden käsitellessä muuttujia sisältäviä tehtäviä?

2 Millainen vaikutus ohjauksella on oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia matematiikassa?

3.2 Tutkimusjoukko

Tutkimusjoukko koostui 62 viidesluokkalaisesta, joista 35 oli tyttöjä ja 27 poikia. Tutkimusjoukko koottiin kolmesta saman keskisuomalaisen kaupunkikoulun viidennestä luokasta. Tutkimuksen kohteeksi valittiin viidesluokkalaiset, sillä heille varsinainen algebran opetus tulee pian ajankohtaiseksi. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2004, 108, 111) mukaan viidesluokkalaisen tulisi kyetä ratkaisemaan yhtälöitä ja epäyhtälöitä päättelemällä, mutta laajemmin algebraa käsitellään vasta 6.–9.-luokilla. Esimerkiksi muuttujan käsite tulee oppilaille tutuksi vasta silloin.

3.3 Tutkimuksen kulku

Aineiston keruu toteutettiin keväällä 2010. Tutkittavat tekivät matematiikan osaamista mittaavan alkutestin (RMAT-laskutaidon testi 9–12-vuotiaille, Räsänen 2004), joka sisälsi oppilaille tuttuja peruslaskutoimituksia. Alkutestin perusteella oppilaat jaettiin kolmeen tasoryhmään. Lisäksi tutkittavat tekivät tehtäväsarjat, jotka mittasivat heidän kykyään merkitä muuttuja, heidän käsitystään muuttujasta sekä heidän kykyään ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä. Tehtävät koostuivat sekä päättelemällä ratkaistavista ensimmäisen asteen yhtälöistä että avoimista tehtävistä, joissa tutkittavien tuli selittää ajatteluaan. Tehtävälomakkeiden lisäksi aineistoa kerättiin yhdeksää oppilasta haastattelemalla.

Taulukossa 1 on esitetty aineiston keruun ajoitus. Sekä alkutesti että lomakkeet 1 (Liite 1) ja 2 (Liite 2) tehtiin ensimmäisellä tutkimuskerralla, joka oli yhden oppitunnin mittainen. Kaikki oppilaat tekivät kutakin tehtäväsarjaa annetun ajan, jonka jälkeen se kerättiin pois ja siirryttiin seuraavaan. Ohjeistus annettiin aina suullisesti, minkä lisäksi se toistui kirjallisena tehtäväsarjojen alussa. Ennen lomakkeiden täyttämistä tutkittaville kerrottiin, että aineisto käsitellään luottamuksellisesti, ja että heidän nimensä kerätään vain, jotta eri lomakkeet osataan myöhemmin yhdistää toisiinsa. Tutkittavien panoksen merkitystä tutkimuksen onnistumisen kannalta korostettiin ja toivottiin, että he tekisivät tehtävät huolellisesti. Tutkittaville kerrottiin, että heidän vastauksiaan ei käytetä arviointiin eikä niitä näytetä ulkopuolisille. Ensimmäisen tutkimuskerran jälkeen tehtiin aineiston alustava analyysi: määritettiin tutkittavien osaamistaso, jotta sopivat haastateltavat voitiin valita. Toisella tutkimuskerralla suoritettiin yksilölliset haastattelut, jotka kestivät 12–28 minuuttia.

TAULUKKO 1. Aineiston keruun ajoitus (vuosi 2010)

Tutkimuksen kulku		
Ajankohta	Aihe	Lisätiedot
Viikko 20	Ensimmäinen tutkimuskerta: 1. Alkutesti (10 min) 2. Tehtäväsarja (lomake 1): muuttujan merkitseminen (10 min) 3. Tehtäväsarja (lomake 2): käsitys muuttujasta, tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen (15 min)	Aineisto kerättiin yhden oppitunnin aikana. Aineisto kerättiin kolmessa luokassa, jotka tekivät testit eri päivinä.
Viikko 20–21	Aineiston alustava analyysi: tutkittavien osaamistason määrittäminen, haastateltavien valinta	
Viikko 21	Toinen tutkimuskerta: yksilöhaastattelut, 9 kpl	Aineisto kerättiin kolmessa luokassa, jonka oppilaita haastateltiin eri päivinä.

3.4 Tutkimuslomakkeet

Aineistonkeruussa käytettiin kolmea eri lomaketta. Ensimmäinen lomake oli RMAT-laskutaidon testi 9–12-vuotiaille (Räsänen 2004), joka sisälsi oppilaille tuttuja peruslaskutoimituksia. Siitä oli poistettu viimeinen, muuttujia sisältävä tehtävä, jotta se ei ohjaisi oppilaiden ajattelua seuraavissa lomakkeissa. RMAT-testin tarkoituksena oli antaa luotettava kuva oppilaiden osaamisesta, jotta heidät voitiin myöhemmin jakaa tasoryhmiin matematiikan osaamisen perusteella. Varsinaisista tutkimuslomakkeista ensimmäinen selvitti oppilaiden kykyä esittää muuttuja. Tehtävä 1 muokattiin Staceyn ja MacGregorin (1997, 110, 112) sekä Hihnalan (2005, 164) käyttämän tehtävän pohjalta, ja tehtävä 2 oli sen kanssa samankaltainen. Tehtävä 3 perustui Hassisen tutkimuksessaan käyttämään tehtävään (Hassinen 2006, 87).

Toinen lomake selvitti oppilaiden käsitystä muuttujaa merkitsevästä symbolista ja kykyä ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä. Osa tehtävistä oli mukailtu Hassisen (2006) esittämien Küchemannin teoriaan liittyvien esimerkkien mukaan (Hassinen 2006, 142). Tehtävät vaihtelivat vaativuudeltaan ja ne suunniteltiin sellaisiksi, että niissä voisi ilmentyä erilaisia käsityksiä muuttujasta. Tehtävät 1 ja 4 sisälsivät päättelemällä ratkaistavissa olevia ensimmäisen asteen yhtälöitä, joissa esiintyi yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja sekä yhdessä tehtävässä tuntematon luku yhtälön molemmin puolin. Aineistonkeruussa käytetyt lomakkeet ovat samat kuin kandidaatin tutkielmassa käyttämäni lukuun ottamatta pieniä muutoksia ja parannuksia. Lomakkeiden esitestaus on siis tapahtunut kandidaatin tutkielman yhteydessä, minkä jälkeen niihin on tehty tarpeelliseksi katsotut muutokset.

3.5 Haastattelu

Kaikki oppilaat tekivät alkutestin sekä lomakkeet 1 ja 2, minkä lisäksi yhdeksää oppilaista haastateltiin. Oppilaista viisi oli tyttöjä ja neljä poikia. Haastateltavat valittiin lomakkeissa 1 ja 2 menestymisen perusteella siten, että haastatteluun päätyi mahdollisimman eritasoisia oppilaita. Tämän lisäksi tutkittava voitiin valita haastateltavaksi, jos hänen ratkaisutavoissaan oli jotakin epäselvää tai erityistä, josta haluttiin lisätietoa. Valinnoissa hyödynnettiin myös opettajien oppilaantuntemusta, jotta muut kriteerit täyttävistä oppilaista haastatteluun valikoituisi puhetaitoisia ja rohkeita haastateltavia (Aaltola & Valli 2001, 45). Haastattelujen tarkoituksena oli saada tarkempaa ja syvällisempää tietoa oppilaiden ajattelusta lisäkysymyksiä esittämällä ja tarkempia perusteluja pyytämällä (Hirsjärvi & Hurme 2001, 35; Hirsjärvi, Remes & Sajavaara 2009, 205). Lisäksi haastattelun tavoitteena oli selvittää, millainen vaikutus haastattelijan tuella on oppilaiden ajatteluun. Haastattelut tehtiin rauhallisessa tilassa ja ne nauhoitettiin. Haastattelun aluksi haastattelija selvitti oppilaalle haastattelun tavoitteet ja toimintatavan sekä painotti haastattelujen luottamuksellisuutta. Haastattelujen aikana oppilas sai tarkasteltavakseen molemmat lomakkeet, minkä lisäksi saatavilla oli paperia ja kyniä uusia merkintöjä varten. Suuntaa antava haastattelurunko on liitteenä (Liite 3).

Haastatteluissa haastattelijan rooli oli osallistuva: hän kannusti ja antoi palautetta ja ohjasi oppilaan ajattelua oikeaan suuntaan kysymyksillä ja ehdotuksilla. Palautteen antaminen ja kannustaminen katsottiin haastattelun onnistumisen kannalta tarpeelliseksi, sillä sen puuttuminen olisi saattanut heikentää oppilaan motivaatiota. Motivoimiskeinoina käytettiin äännähtelyjä ja pikkusanoja, jotka vahvistavat haastateltavan puhetta ja osoittavat tämän olevan oikeilla jäljillä, sekä palkitsemista, kuten ”Oletkin löytänyt tähän oikean arvon, hienoa. Miten päädyit tähän?” (Hirsjärvi &

Hurme 2001, 117). Haastattelija pyrki ohjaamaan oppilaan ajattelua mahdollisimman vähän. Aluksi haastateltava sai kertoa ajatuksistaan vapaasti ja perustella tekemiään ratkaisuja. Tarkentavia kysymyksiä esittämällä haastattelija pyrki saamaan syvällisemmän kuvan oppilaan ajattelusta. Kysymysten avulla haastattelija saattoi myös ohjata oppilaan ajattelua pidemmälle. Vasta, jos oppilas ei näyttänyt edistyvän tehtävässä, haastattelija antoi suorempia vihjeitä tai toimintaehdotuksia. Tämänkaltaisia haastatteluja ja oppilaan ohjauskeinoja haastatteluissa ovat aiemmin käyttäneet esimerkiksi Farmaki, Klaoudatos ja Verikios (2004), Linchevski ja Herscovics (1996) sekä Schliemann ym. (1998). Haastattelurunko testattiin haastattelemalla yhtä tutkimukseen osallistunutta oppilasta. Esitestauksen tavoitteena oli kokeilla haastattelurungon toimivuutta sekä selvittää haastatteluihin suunnilleen kuluva aika (Hirsjärvi & Hurme 2001, 72). Testausaineistoa ei käytetty haastatteluaineiston analysoinnissa.

3.6 Aineiston analyysi

RMAT-testi pisteytettiin siten, että jokaisesta oikeasta vastauksesta saattoi saada yhden pisteen. Näin testin kokonaispistemääräksi muodostui 54. Oppilaat jaettiin RMAT-testimenestyksen perusteella kolmeen ryhmään: heikkoihin, keskitasoisiin ja taitaviin. Jatkossa oppilaiden matemaattisella osaamistasolla viitataan juuri tähän jakoon.

Lomake 1:ssä esiintyneet merkitsemistavat luokiteltiin symbolisiin ja ei-symbolisiin merkitsemistapoihin. Luokittelun perusteet on esitetty taulukossa 2. Ratkaisujen tulkinnassa painotettiin kykyä merkitä muuttuja jotenkin, jolloin esimerkiksi yhtälön muodolle ei asetettu yhtä suurta painoarvoa. Esimerkiksi ”Jaakko – 10 cm = Kalle” on hyväksytty, vaikka se ei ole aivan tehtävänannon edellyttämässä muodossa. Oppilaiden merkitsemistapojen luokittelun jälkeen kullekin oppilaalle määritettiin symbolin merkitsemiskyvyn taso. Taso määräytyi oppilaan käyttämistä merkitsemistavoista edistyneimmän mukaan. Ei-symboliset merkitsemistavat päätyivät tällöin luokkaan ”ei käsitystä symbolista” ja symboliset merkitsemistavat omiin luokkiinsa. Lomakkeesta 1 eriteltiin lisäksi oppilailla tyypillisesti esiintyviä virheellisiä käsityksiä.

TAULUKKO 2. Merkitsemistapojen luokitteluperusteet

Merkitsemistapa		**Selitys**
Ei-symboliset merkitsemistavat	Piirros	Piirretty kuva tilanteesta
	Sijoitus	1) Muuttujan paikalle sijoitettu jokin luku 2) Piirros, jossa tehty oletus muuttujan arvosta, ja tehtävä ratkaistu selvästi numeerisesti
Symboliset merkitsemistavat	Kuvio	Muuttuja esitetty kuviona
	Objekti	Sana tai useampi sana, kuten ”Kalle” tai ”Kallen pituus”. Vastaa Küchemannin teorian objektikäsitystä.
	Kysymysmerkki	Muuttujaa merkitty kysymysmerkillä
	Kirjain	Muuttujaa merkitty kirjaimella

Lomake 2, jonka tavoitteena oli selvittää oppilaiden käsityksiä muuttujasta ja kykyä ratkaista tuntemattomia lukumääriä sisältäviä tehtäviä, analysoitiin Küchemannin (1981) luokitusta käyttäen. Luokitteluperusteet on esitetty taulukossa 3. Kuten lomakkeessa 1, myös lomakkeessa 2 sallittiin esimerkiksi laskuvirheitä, jos käsitys symbolista kuitenkin selvästi ilmenee. Oppilaiden symbolin tulkitsemistapojen analysoimisen jälkeen määritettiin tutkittavien symbolien tulkinnan tasot. Tutkittavan taso määräytyi aina tämän osoittaman edistyneimmän käsityksen mukaan, kuten lomakkeessa 1. Sen lisäksi, että lomakkeen 2 vastaukset luokiteltiin Küchemannin teorian mukaisesti, niistä eriteltiin yleisesti esiintyviä virhetyyppejä ja virheellisiä käsityksiä.

TAULUKKO 3. Muuttujan tulkintatapojen luokitteluperusteet Küchemannia (1981) mukaillen

Käsitys symbolista	**Selitys**
Ei käsitystä	a) Vastaukset, joissa ei ilmennyt käsitystä muuttujasta lukuna: *jotain, mitä vain*. b) Symboli luokkana (8a on 8. luokka)
1. taso: symboli arvona	a) Tehtävä ratkaistu, muuttujalle määritetty arvo b) Sanallinen selitys, kuten *x pitää ratkaista* tai *mitä pitää lisätä kuuteen, että tulee yksitoista.*
2. taso: symboli eliminoitavana	Aineistossa ei ilmennyt tähän luokkaan sijoitettavia vastauksia.
3. taso: symboli objektina	Symboli tulkittu sanaksi, lyhenteeksi tai yksiköksi, kuten aareiksi, viikoiksi, tunneiksi tai kuukausiksi
4. taso: symboli yhtenä tuntemattomana lukuna	Symboli tulkittu joksikin yhdeksi tuntemattomaksi luvuksi: salaiseksi, piilotetuksi tai tuntemattomaksi luvuksi tai piilonumeroksi.
5. taso: symboli yleistettynä lukuna	Symbolin ajatellaan voivan saada useita arvoja: *Se voi olla vaikka 3, se voi olla mikä tahansa luku, ne on vaihtelevia numeroita*.
6. taso: symboli systemaattisena muuttujana	Osoitettu ymmärrystä riippuvuudesta.

3.7 Kvalitatiiviset ja kvantitatiiviset menetelmät tapaustutkimuksen toteuttamisessa

Tämä tutkimus on tapaustutkimus, joka selvittää erään koulun viidesluokkalaisten kykyä käsitellä muuttujia matematiikassa. Tapaustutkimukselle ominaista on yksittäisestä tapauksesta tuotettu yksityiskohtainen ja intensiivinen tieto, ja sen tavoitteena on usein ilmiöiden kuvaaminen (Aaltola & Valli 2001, 159). Tässäkin tapauksessa tavoitteena on tuottaa syvällistä tietoa viidesluokkalaisten algebrallisesta ajattelusta ja kuvata heidän valmiuksiaan algebralliseen ajatteluun. Vaikka tutkimuskohteena tässä ovat yhden koulun viidesluokkalaiset, ei ole poissuljettua, että samat ilmiöt esiintyisivät myös laajemmin viidesluokkalaisten algebrallisessa ajattelussa. Tapaustutkimukselle on lisäksi tyypillistä useiden aineistonkeruumenetelmien käyttö (Aaltola & Valli 2001, 159). Tässä tutkimuksessa yhdistetään kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia menetelmiä sekä aineistonkeruussa että sen analysoinnissa. Menetelmien yhteiskäytön järjestys on tyypillinen: tutkimusaineiston runko kerätään kvantitatiivisilla menetelmillä ja aihetta syvennetään kvalitatiivisilla menetelmillä (Eskola & Suoranta 1999, 73). Kvantitatiiviseen tutkimukseen tämän tutkimuksen liittää sen aiempiin tutkimuksiin, niiden johtopäätöksiin ja teorioihin tukeutuva perusta. Kvantitatiivista otetta ilmentää myös numeeriseen mittaamiseen soveltuva aineisto, sen tilastollinen käsittely sekä tilastolliseen analyysiin perustuvat päätelmät. Kvalitatiivinen ote näkyy tässä tutkimuksessa laadullisten menetelmien, erityisesti haastattelun, käyttönä sekä tapausten käsitteleminen ainutlaatuisina ja sen mukainen aineiston tulkitseminen. (Hirsjärvi ym. 2009, 140, 164.)

Kvalitatiivisia aineistonkeruumuotoja edusti tässä tutkimuksessa vahvimmin haastattelu. Tutkimuksessa haastattelun tavoite oli sille tyypillinen: vastausten syventäminen ja selventäminen sekä perustelujen pyytäminen ja lisäkysymysten esittäminen. Haastatteluille luonteenomainen joustavuus ilmeni haastattelujen vaihtelevina kestoina sekä tarpeen mukaan vaihtelevina sisältöinä ja painotuksina. (Hirsjärvi ym. 2009, 204–205.) Haastattelumenetelmä oli tässä tutkimuksessa melko lähellä teemahaastattelua, joka on lomake- ja avoimen haastattelun välimuoto. Siinä käsiteltävät teema-alueet ovat ennalta tiedossa, mutta kysymyksille ei ole ole määritelty tarkkaa muotoa ja järjestystä. Käytetty haastattelumenetelmä vastasi melko hyvin myös puolistrukturoitua haastattelua, jossa kysymykset ovat kaikille samat, mutta valmiita vastausvaihtoehtoja ei ole, vaan haastateltava vastaa kysymyksiin omin sanoin. (Eskola & Suoranta 1999, 87; Hirsjärvi ym. 2009, 208). Tässä tutkimuksessa haastattelut noudattelivat ennalta laadittua haastattelurunkoa, mutta kysymykset vaihtelivat oppilaiden erilaisten ratkaisutapojen mukaan. Kaikkia kysymyksiä ei esitetty kaikille, ja tarkentavia lisäkysymyksiä esitettiin haastattelurungon ulkopuoleltakin tarpeen mukaan. Lisäksi haastatteluissa käsiteltyjen tehtävien käsittelyjärjestys vaihteli, eikä sen vuoksi kaikkia kysymyksiäkään esitetty kaikille samassa järjestyksessä.

3.8 Menetelmän luotettavuus

Tutkimuksen validius tarkoittaa sitä, että tutkimuksessa on mitattu sitä mitä pitikin. Useiden menetelmien käyttö parantaa tutkimuksen validiutta, sillä ne tuovat tutkimukseen lisää tulkintoja ja näkökulmia. Tätä useiden menetelmien käyttöä kutsutaan myös triangulaatioksi ja erityisesti metodologiseksi, metodiseksi tai menetelmätriangulaatioksi. Samassa merkityksessä puhutaan myös metodien yhdistämisestä ja monimetodisesta lähestymistavasta. Toiseksi käytetään termiä aineistotriangulaatio, jolla viitataan monenlaisten aineistojen yhdistelemiseen. (Eskola & Suoranta 1999, 69–70; Hirsjärvi & Hurme 2001, 39; Hirsjärvi ym. 2009, 233.) Tässä tutkimuksessa yhdistyy menetelmä- ja aineistotriangulaatio: aineistoa on kerätty ja sen analysoinnissa on hyödynnetty monimetodista lähestymistapaa. Näin myös tutkimuksen päätelmät perustuvat useiden menetelmien tuottamaan tietoon.

Tutkimuksen realiaabeliudella viitataan mittaustulosten toistettavuuteen. Tarkka kuvaus tutkimuksen toteuttamisesta edistää toistettavuutta, ja näin tutkimuksen luotettavuus paranee. (Hirsjärvi ym. 2009, 232.) Tässä luvussa oleelliset seikat tutkimuksen kulusta on selostettu mahdollisimman tarkkaan. Käytetyt lomakkeet ja haastattelurunko ovat liitteinä (liitteet 1,2 ja 3) ja ne ovat esitestattuja. Haastattelurunko vaihtoehtoisine lisäkysymyksineen on esitestattu ja esitestauksessa toimivaksi havaittu. Haastattelun tuottaman tiedon luotettavuutta saattaa usein heikentää haastateltavien pyrkimys antaa sosiaalisesti suotavia vastauksia (Hirsjärvi ym. 2009, 206). Tässä tutkimuksessa käsiteltävät aiheet eivät olleet arkaluontoisia, ja haastattelujen ilmapiiri pyrittiin luomaan pohdiskelevaksi ja kaikenlaiset vastaukset hyväksyväksi. Tätä kuvaa esimerkiksi yhden haastateltavan loppukommentti: ”Ihan jänniä tällaisia tehtäviä, kun saa vähän miettiä, eikä periaatteessa ole oikeaa eikä väärää vastausta.” Näin sosiaalisesti suotavien vastausten antaminen tuskin on tässä tutkimuksessa merkittävä ongelma.

Myös tutkittujen luokkien taitoerot vaikuttavat tutkimustulosten luotettavuuteen. Kruskal-Wallis-testin perusteella eri luokkien testimenestyksessä oli tilastollisesti merkitsevät erot kaikissa osioissa: RMAT-testissä ($\chi^2(2) = 5{,}95$, $p = 0{,}05$), symbolin merkitsemiskyvyssä ($\chi^2(2) = 37{,}40$, $p = 0{,}00$), tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemisessa ($\chi^2(2) = 7{,}01$, $p = 0{,}03$) ja symbolien tulkitsemisessa ($\chi^2(2) = 9{,}77$, $p = 0{,}01$). Eri luokkien testipisteiden keskiarvot ja -hajonnat on esitetty taulukossa

4. Tutkimustulosten luotettavuuteen vaikuttaa myös tarkasteltavien ryhmien ajoittainen pienuus. Esimerkiksi jaettaessa tutkittavat ryhmiin symbolin merkitsemiskyvyn mukaan osa ryhmistä jää hyvin pieniksi: Pienimmässä ryhmässä oppilaita on vain neljä, kun taas suurimmassa lähes puolet oppilaista. Tasaisempi ryhmiin jako johtaisi toisaalta mielenkiintoisten tulosten häviämiseen, joten tässä tarkka ryhmiin jako päätettiin säilyttää.

TAULUKKO 4. Luokkien väliset erot RMAT-testissä, kyvyssä merkitä muuttuja, tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemisessa ja symbolin tulkitsemistasossa (n = 62)

Testiosio	Luokka 1 (n = 21)		Luokka 2 (n = 21)		Luokka 3 (n=20)	
	ka	kh	ka	kh	ka	kh
RMAT	32,76	6,87	35,67	6,21	31,15	5,06
Muuttujan merkitseminen (tasot 0-4)	0,24	0,63	0,95	1,20	3,40	1,27
Tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen (pisteet 0-12)	10,33	1,46	9,67	2,33	11,00	1,26
Symbolin tulkinta (tasot 0-6)	2,90	1,70	1,75	1,41	3,4	1,67

4 VIIDESLUOKKALAISTEN VALMIUDET KÄSITELLÄ MUUTTUJIA MATEMATIIKASSA

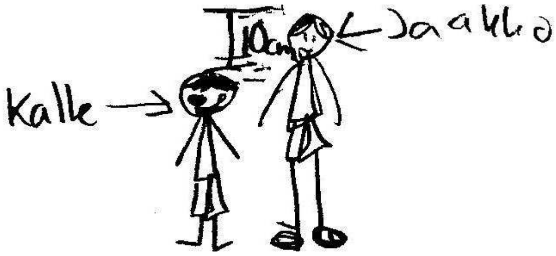
4.1 Oppilaiden tavat merkitä muuttujaa

Lomakkeen 1 tavoitteena oli selvittää, kuinka oppilaat merkitsevät muuttujan. Oppilaiden merkitsemistavat luokiteltiin ei-symbolisiin ja symbolisiin merkitsemistapoihin, joista erottui kuusi luokkaa. Ei-symbolisiin merkitsemistapoihin luettiin piirros, jossa tilanteesta on piirretty kuva, ja sijoitus, jossa muuttujan paikalle on sijoitettu jokin luku. Symbolisista merkitsemistavoista erottui neljä luokkaa: symbolin merkitseminen kuviolla, objektilla, kysymysmerkillä ja kirjaimella. Merkitsemistavoista objektimerkintä liittyy suoraan Küchemannin teorian kolmanteen tasoon. Kirjainmerkinnän voidaan tulkita viittaavan neljänteen, viidenteen tai kuudenteen tasoon. Sijoituksen voidaan ajatella löyhästi liittyvän Küchemannin teorian ensimmäiseen tasoon. Tehtäväkohtaiset merkitsemistavat on esitetty taulukossa 5 ja esimerkkejä oppilaiden ratkaisuista kuvioissa 1–6.

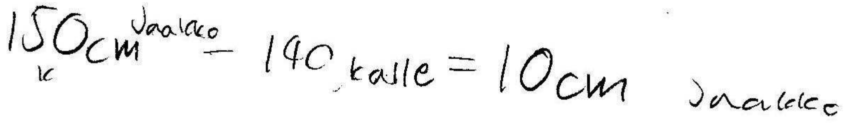
TAULUKKO 5. Tehtäväkohtaiset merkitsemistavat (frekvensseinä)

Merkitsemistapa	Tehtävä 1	Tehtävä 2	Tehtävä 3
Ei kykyä merkitä muuttujaa	6	7	4
Ei-symbolinen merkitsemistapa: piirros	20	5	0
Ei-symbolinen merkitsemistapa: sijoitus	19	21	34
Kuvio	5	10	0
Objekti	2	6	0
Merkki	1	2	2
Kirjain	7	6	16
Yhteensä	60	57	56

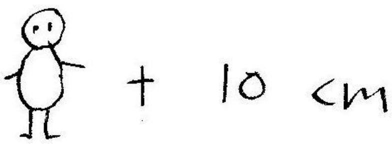
1. Miten merkitsisit matematiikan kielellä Jaakon pituuden, kun Jaakko on 10 cm pidempi kuin Kalle?



KUVIO 1. Esimerkki piirroksesta (oppilas 1).



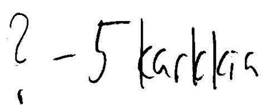
KUVIO 2. Esimerkki sijoituksesta (oppilas 2).



KUVIO 3. Esimerkki kuviomerkinnästä (oppilas 3).

2. Miten merkitsisit matematiikan kielellä Siljan karkkien määrän, kun hänellä on pussillinen karkkia ja hän syö karkeistaan viisi?

KUVIO 4. Esimerkki objekti- ja kuviomerkinnästä (oppilas 4).



KUVIO 5. Esimerkki kysymysmerkin käytöstä (oppilas 5).

KUVIO 6. Esimerkki kirjainmerkinnästä (oppilas 6).

Yleisin ei-symbolinen merkitsemistapa oli sijoitus, jota käytti edistyneimpänä merkitsemistapanaan 41,9 % oppilaista. Symbolisista merkitsemistavoista eniten käytetty oli kirjain, jolla muuttujaa merkitsi 25,8 % oppilaista. Oppilaiden tavat merkitä muuttujaa on esitetty taulukossa 6.

TAULUKKO 6. Oppilaiden edistyneimmät tavat merkitä muuttujaa lausekkeessa lomakkeen 1 tehtävissä 1–3 (n = 62)

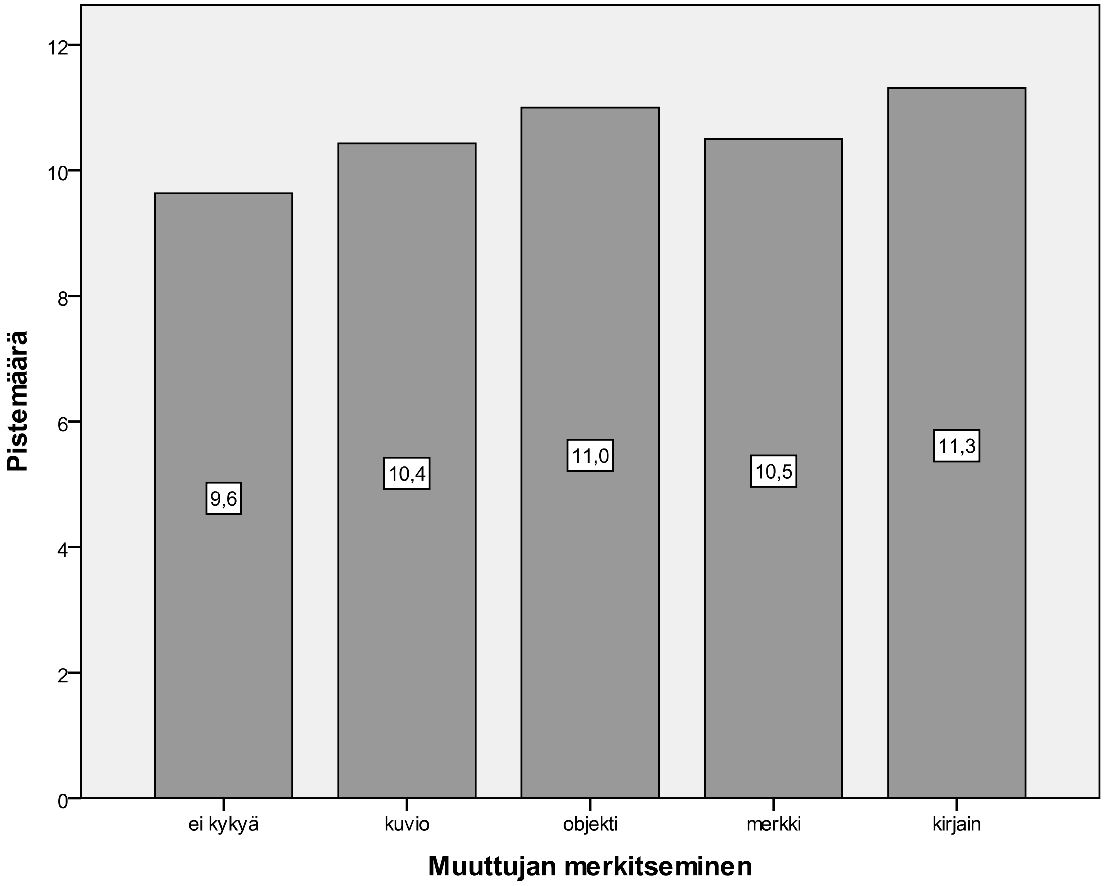
Merkitsemistapa	f	%
Ei kykyä merkitä muuttujaa	1	1,6
Ei-symbolinen merkitsemistapa: piirros	3	4,8
Ei-symbolinen merkitsemistapa: sijoitus	26	41,9
Symbolinen merkitsemistapa: kuvio	7	11,3
Symbolinen merkitsemistapa: objekti	5	8,1
Symbolinen merkitsemistapa: kysymysmerkki	4	6,5
Symbolinen merkitsemistapa: kirjain	16	25,8
Yhteensä	62	100,0

Hieman yli puolella oppilaista ilmeni kyky merkitä muuttuja jollakin symbolilla, joista yleisin oli kirjainmerkintä (25,8 %). Vastaavasti hieman alle puolet, 48,4 %, ei kyennyt merkitsemään muuttujaa symbolisesti. Oppilaiden kyvyt merkitä muuttujaa on esitetty taulukossa 7.

TAULUKKO 7. Oppilaiden kyky merkitä muuttuja lausekkeessa lomakkeen 1 tehtävissä 1–3 (n = 62)

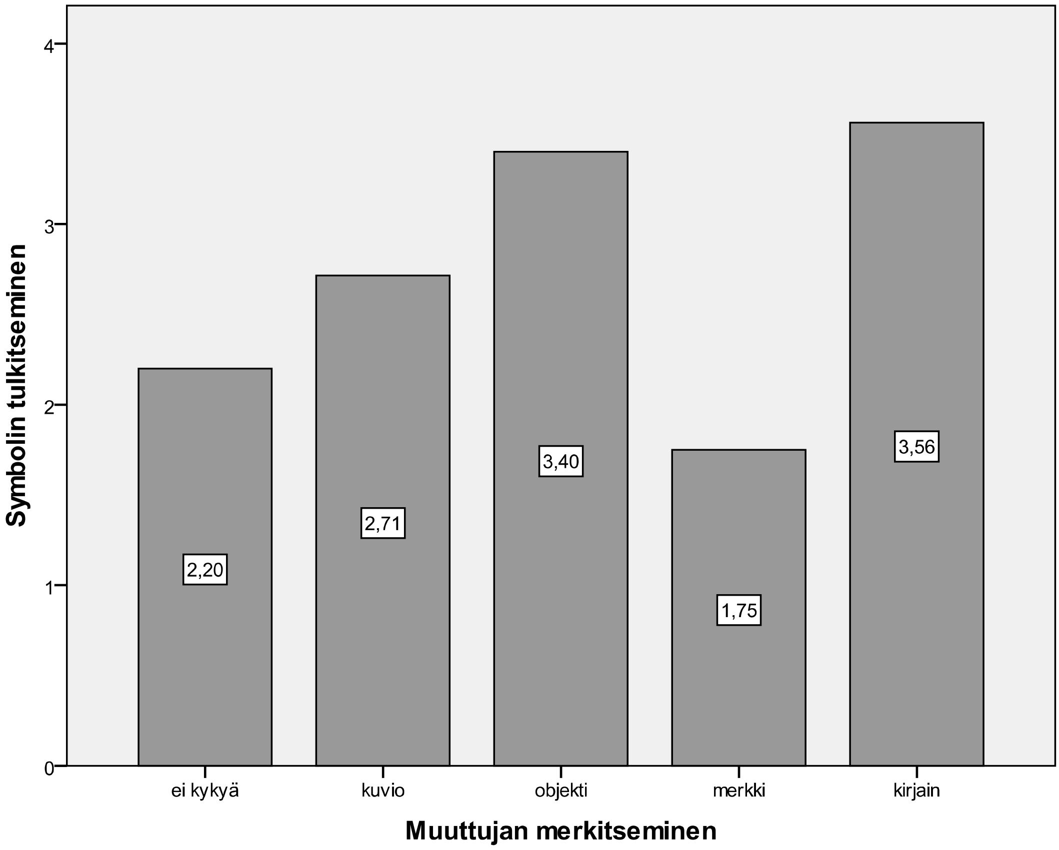
Merkitsemiskyky	f	%
Ei kykyä merkitä tuntematonta lukua	30	48,4
Kuvio	7	11,3
Objekti	5	8,1
Kysymysmerkki	4	6,5
Kirjain	16	25,8
Yhteensä	62	100,0

Muuttujan merkitsemiskyvyllä ilmeni tilastollisesti merkitsevä yhteys tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiskykyyn ($\chi^2(4) = 11{,}88$, $p = 0{,}02$). Erot keskiarvoissa, jotka on esitetty kuviossa 7, ovat tosin pieniä. Heikoiten tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä ratkaisivat lomakkeen 2 tehtävässä 5 oppilaat, joilla ei ollut kykyä merkitä muuttujaa. Parhaiten pärjäsivät kirjainmerkintää käyttäneet oppilaat.



KUVIO 7. Muuttujan merkitsemiskyvyn yhteys kykyyn ratkaista muuttujia sisältäviä tehtäviä, asteikko 0–12 (n = 62)

Muuttujan merkitsemiskyvyllä ja symbolin tulkitsemistasolla ei havaittu tilastollisesti merkitsevää yhteyttä ($\chi^2(4) = 8{,}23$, $p = 0{,}08$). Kuviosta 8 ilmenee kuitenkin, että muuttujan kysymysmerkillä merkinneet oppilaat menestyivät muihin ryhmiin verrattuna huonommin symbolin tulkitsemista mittaavassa osiossa.



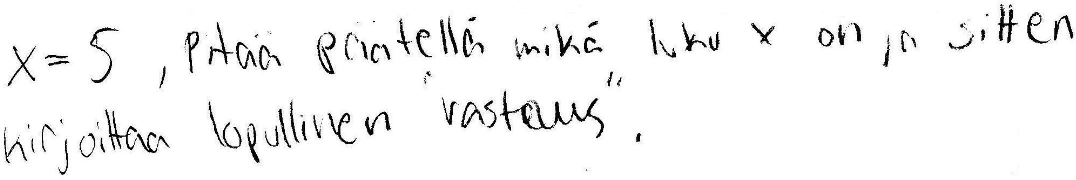
KUVIO 8. Muuttujan merkitsemiskyvyn yhteys symbolin tulkitsemistasoon, asteikko 0–4 (n = 62)

Merkitsemiskyky ei myöskään ollut yhteydessä RMAT-testissä menestymiseen ($\chi^2(4) = 4{,}67$, $p = 0{,}32$), eikä RMAT-testimenestyksellä mitattu tutkittavan matemaattinen osaamistaso vaikuttanut merkitsemiskykyyn ($\chi^2(2) = 1{,}30$, $p = 0{,}52$). Sukupuolten välilläkään ei havaittu eroja kyvyssä merkitä muuttujaa ($U = 426{,}50$, $p = 0{,}48$).

4.2 Oppilaiden tavat tulkita muuttujia

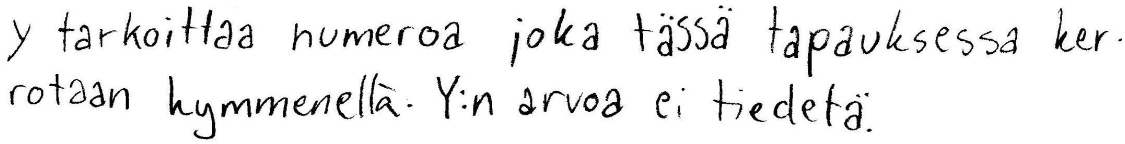
Lomakkeen 2 tavoitteena oli selvittää, millainen käsitys oppilailla on muuttujaa merkitsevästä symbolista. Oppilaiden symbolien tulkintatavat jaettiin Küchemannin luokituksen mukaisesti kuuteen luokkaan. Esimerkkejä oppilaiden tulkintatavoista on esitetty kuvioissa 9–14.

1. Mitä mielestäsi x voisi tarkoittaa tehtävässä x + 6 = 11? Mitä tehtävässä pitää tehdä?

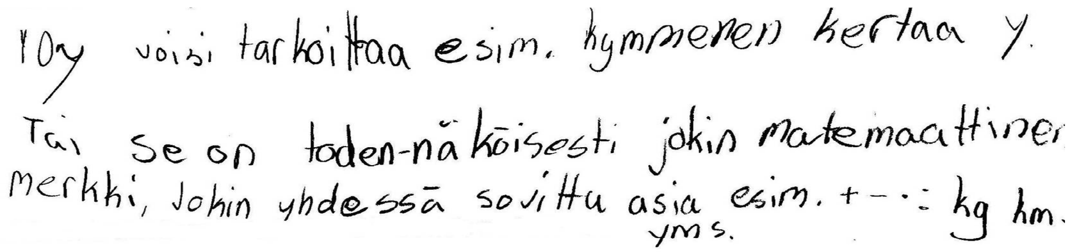


KUVIO 9. Esimerkki symbolin tulkitsemisesta arvoksi, taso K1 (oppilas 7).

2. Mitä mielestäsi 10·y voisi tarkoittaa? Perustele vastauksesi.

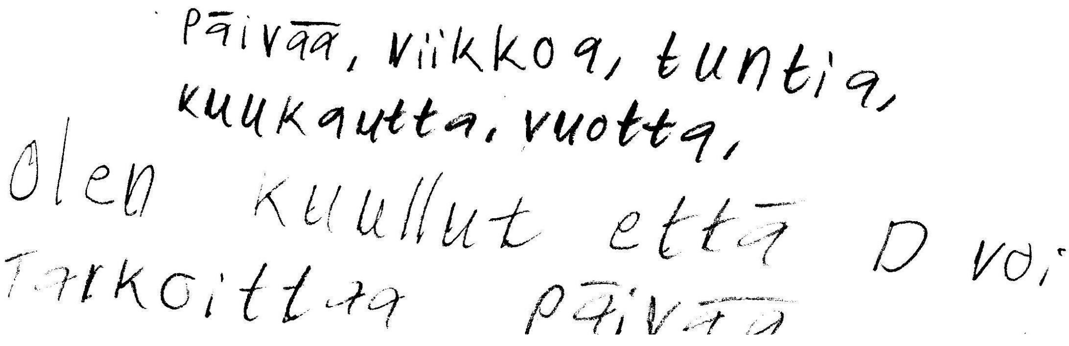


KUVIO 10. Esimerkki muuttujan tulkitsemisesta tuntemattomaksi luvuksi, taso K4 (oppilas 8).



KUVIO 11. Esimerkki objektitulkinnasta, taso K3 (oppilas 9).

4. Mitä mielestäsi 2·a + 3·b voisi tarkoittaa? Mitä a voisi tarkoittaa? Entä b? Perustele vastauksesi.



KUVIO 12. Esimerkki objektitulkinnasta, taso K3 (oppilas 10).

2. joku tuntematon numero/luku siihen lisätään
3. joku tuntematon numero/luku.
se voi olla mikä tahansa numero/luku.
Käännä!
Sekin voi olla mikä tahansa numero/luku.

KUVIO 13. Esimerkki muuttujan tulkitsemisesta yleiseksi luvuksi, taso K5 (oppilas 11).

7. Jos $c + d < 10$ ja $c < d$, mitä osaat sanoa d:stä? Kerro kaikki mitä siitä voit sanoa! Perustele vastauksesi.

c voisi olla joko 2, 3 tai 4
d voisi olla 7, 6, tai 5
2 < 7
3 < 6
4 < 5 → < 10

KUVIO 14. Esimerkki muuttujan tulkitsemisesta yleiseksi luvuksi, taso K5 (oppilas 12).

Oppilaiden osoittamat tulkinnat symboleista on esitelty tehtäväkohtaisesti taulukossa 8. Kullekin oppilaalle määritettiin symbolin tulkitsemisen taso tämän osoittaman edistyneimmän tulkinnan mukaan. Oppilaiden symbolien tulkitsemistasot on esitetty taulukossa 9.

TAULUKKO 8. Tehtäväkohtaiset tulkinnat symboleista (frekvensseinä)

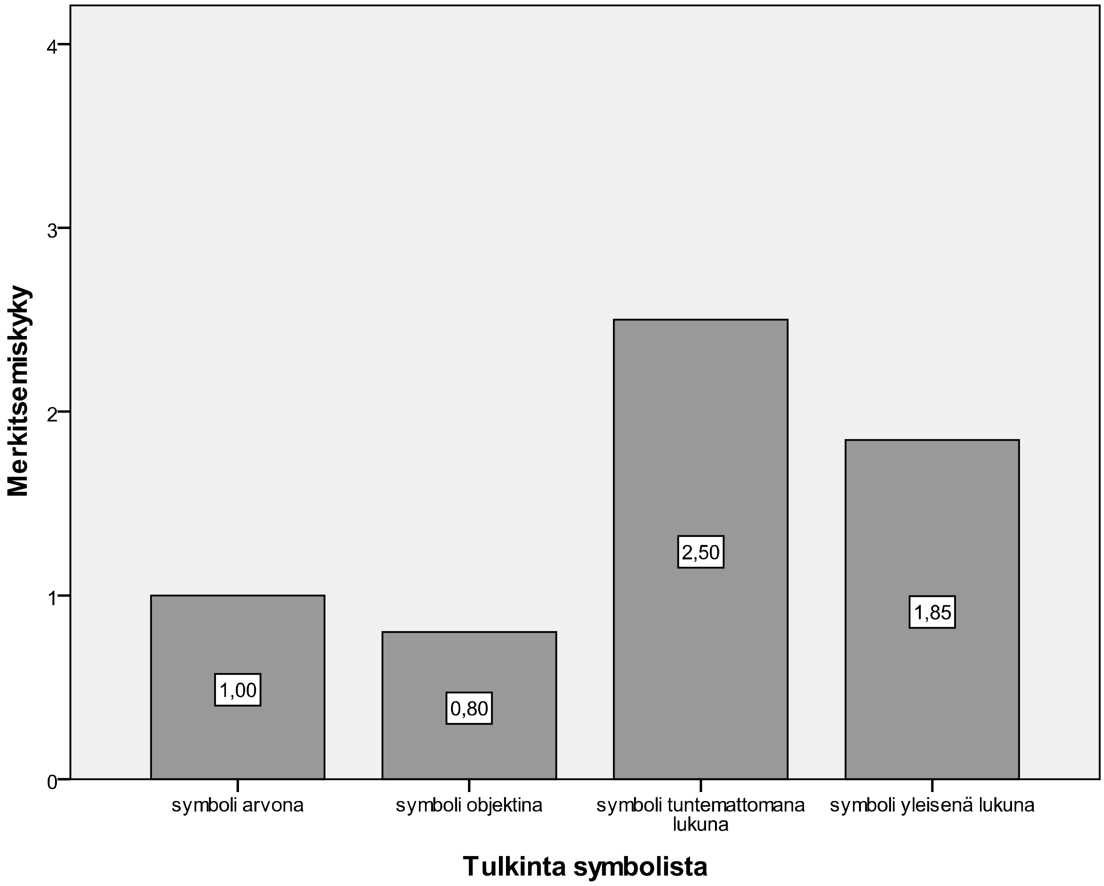
Symbolin tulkinta	Tehtävä 1 $x + 6 = 11$	Tehtävä 2 $10 \cdot y$	Tehtävä 3 8a	Tehtävä 4 $2 \cdot a + 3 \cdot b$	Tehtävä 6 $2 \cdot x + 3 \cdot y = 12$	Tehtävä 7 $c+d<10$, $c<d$, d=?
Ei tulkintaa	0	16	31	12	4	18
Taso K1: arvo	62	13	3	10	36	10
Taso K3: objekti	0	4	8	3	0	0
Taso K4: tuntematon luku	0	14	1	12	2	2
Taso K5: yleinen luku	0	5	2	6	1	6
Yhteensä	62	52	45	43	43	36

Luokkia symboli eliminoitavana (taso 2) ja symboli systemaattisena muuttujana (taso 6) ei tässä aineistossa esiintynyt. Kaikilla tutkituilla oli jonkinlainen käsitys symbolista. Suurin osa, 48,4 %, oppilaista käsitti symbolin arvoksi. Toiseksi yleisin tulkintatapa oli symbolin tulkitseminen tuntemattomaksi luvuksi (22,6 %). Aineistossa ilmennyt edistynein käsitys symbolista oli sen käsittäminen monia arvoja saavaksi muuttujaksi, kuten 21,0 % oppilaista ajatteli. Vähiten esiintyi symbolin tulkitsemista objektiksi (8,1 %).

TAULUKKO 9. Oppilaiden symbolien tulkitsemistasot (n = 62)

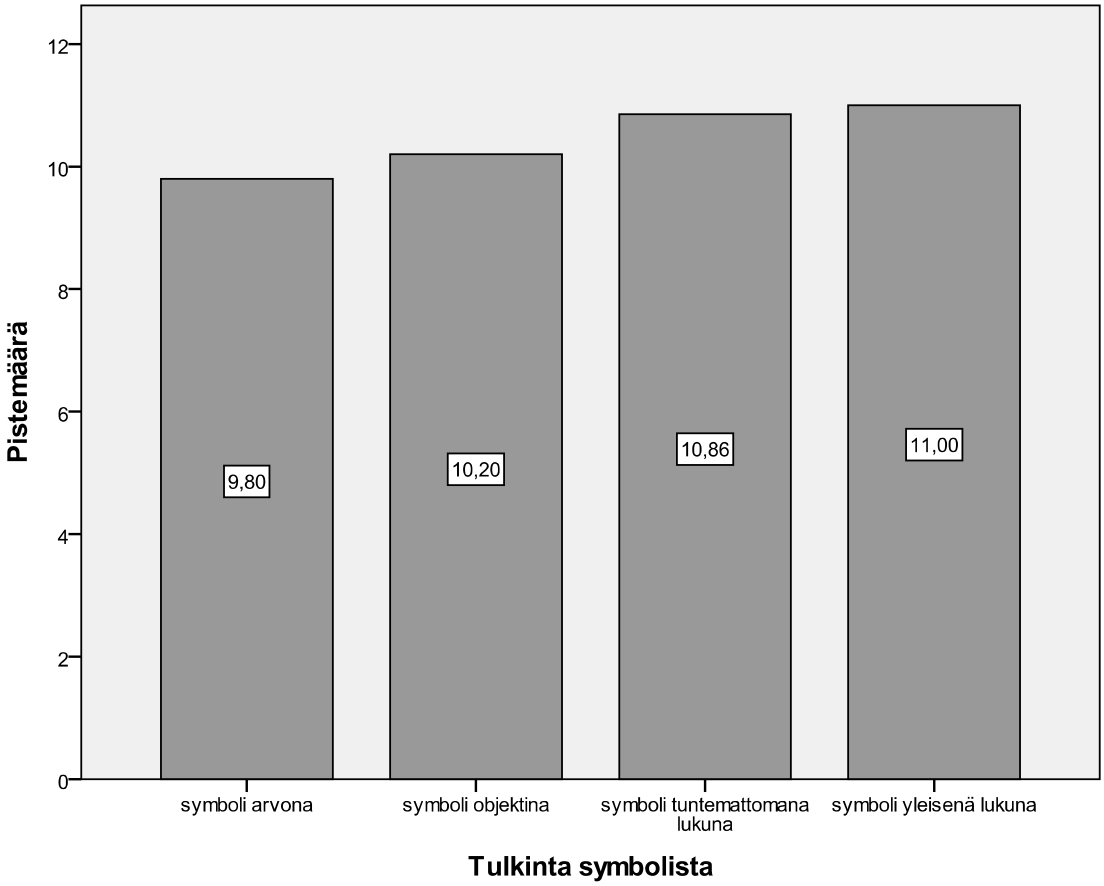
Tulkinta symbolista	f	%
Symboli arvona (taso K1)	30	48,4
Symboli objektina (taso K3)	5	8,1
Symboli tuntemattomana lukuna (taso K4)	14	22,6
Symboli yleisenä lukuna (taso K5)	13	21,0
Yhteensä	62	100,0

Symbolin tulkinnalla havaittiin olevan yhteys kykyyn merkitä muuttuja ($\chi^2(3) = 9{,}79$, $p = 0{,}02$). Kuviosta 15 ilmenee symbolin tulkinnan yhteys muuttujan merkitsemiskykyyn, jota selvitettiin lomakkeessa 1. Symbolin tuntemattomaksi luvuksi käsittäneet menestyivät parhaiten muuttujan merkitsemistä mittaavassa osiossa. Heikoiten menestyivät symbolin objektiksi käsittäneet. Edistyneimmin symbolin tulkinneet menestyivät merkitsemistä mittavassa osiossa heikommin kuin symbolin tuntemattomaksi luvuksi tulkinneet.



KUVIO 15. Symbolin tulkinnan yhteys muuttujan merkitsemiskykyyn, asteikko 0–4 (n = 62)

RMAT-testimenestykseen ($\chi^2(3) = 3{,}32$, $p = 0{,}35$) tai tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen ($\chi^2(3) = 5{,}01$, $p = 0{,}17$) symbolin tulkitsemisella ei ollut yhteyttä, joskin kuviosta 16 ilmenee, että mitä edistyneempi käsitys oppilaalla oli symbolista, sitä paremmin hän kykeni ratkaisemaan tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä lomakkeen 2 tehtävässä 5. Erot keskiarvoissa ovat tosin hyvin pieniä. RMAT-testimenestyksellä ja symbolin tulkitsemisella ei ilmennyt tilastollisesti merkitsevää yhteyttä ($\chi^2(2) = 4{,}01$, $p = 0{,}14$).

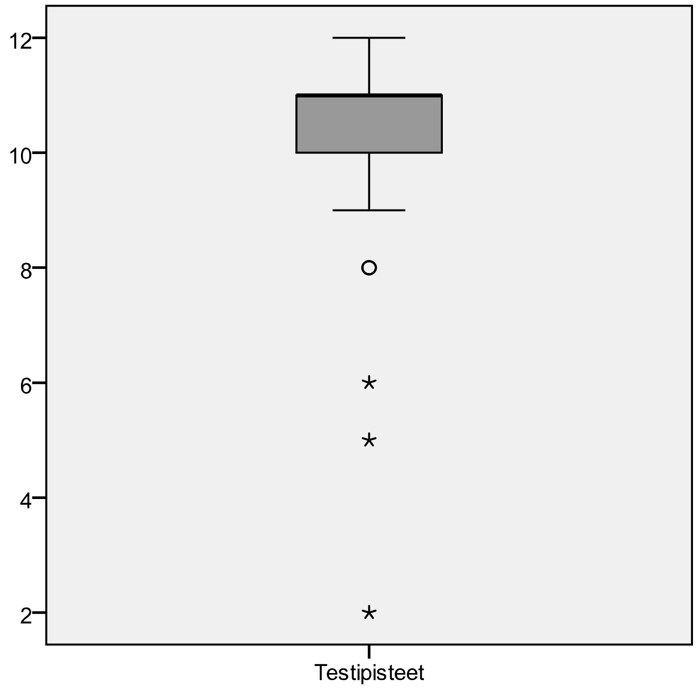


KUVIO 16. Symbolin tulkinnan yhteys tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen, asteikko 0–12 (n = 62).

Symbolien tulkitsemistasossa ilmeni U-testin mukaan tilastollisesti merkitsevä ero sukupuolten välillä (U = 318,50, p = 0,02). Tytöt menestyivät symbolin tulkitsemista mittaavassa osiossa hieman poikia paremmin tyttöjen tulkitsemistasojen keskiarvon ollessa 3,1 ja poikien 2,1.

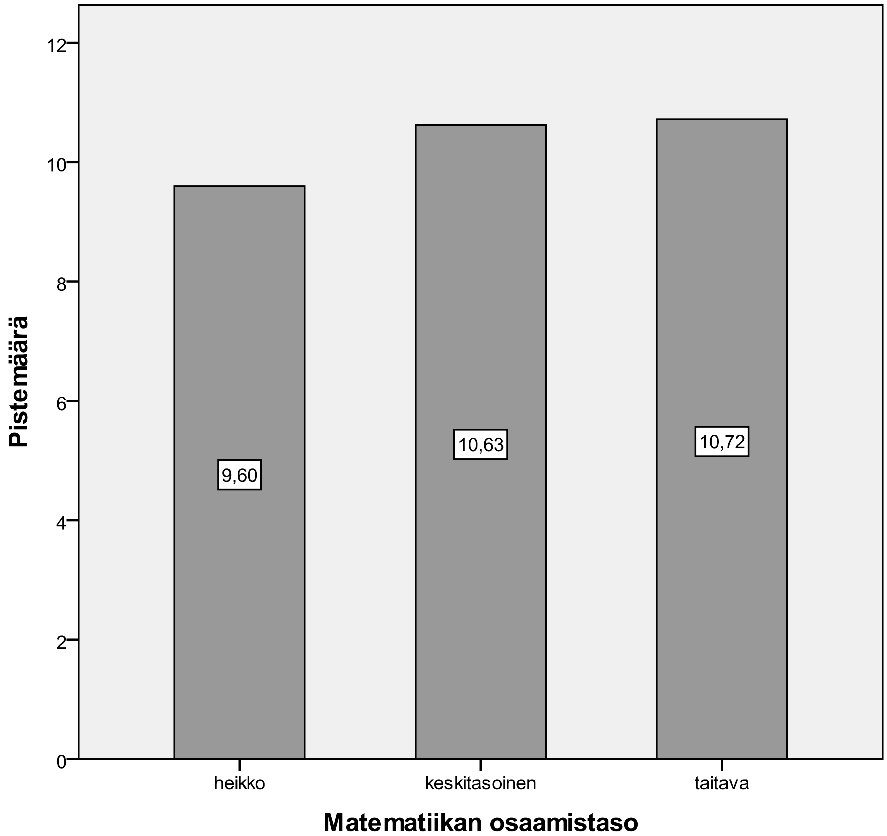
4.3 Oppilaiden kyky ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä

Lomakkeen 2 tehtävissä 1 ja 5 selvitettiin oppilaiden kykyä ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä. Tässä osiossa oppilaat menestyivät hyvin. Lomakkeen 2 tehtävässä 1 kaikki tutkittavat löysivät tuntemattomalle luvulle oikean arvon ja myös tehtävästä 5 oppilaat suoriutuivat hyvin. Osion sisältämästä 12 yhtälöstä oppilaat ratkaisivat keskimäärin 10,3 tehtävää oikein keskihajonnan ollessa 1,8. Kuviossa 17 on esitetty oppilaiden suoriutuminen tuntemattoman luvun sisältävien tehtävien ratkaisemista mittaavasta osiosta. Puolet oppilaista on ratkaissut 10–11 tehtävää oikein ja suurin osa oppilaistakin vähintään 9 tehtävää. Yleisin pistemäärä osiossa oli 11.



KUVIO 17. Tuntemattoman luvun sisältävien tehtävien ratkaiseminen lomakkeen 2 tehtävässä 5, asteikko 0–12. Pallo ja tähdet tarkoittavat yksittäisiä poikkeavia pistemääriä. (n = 62)

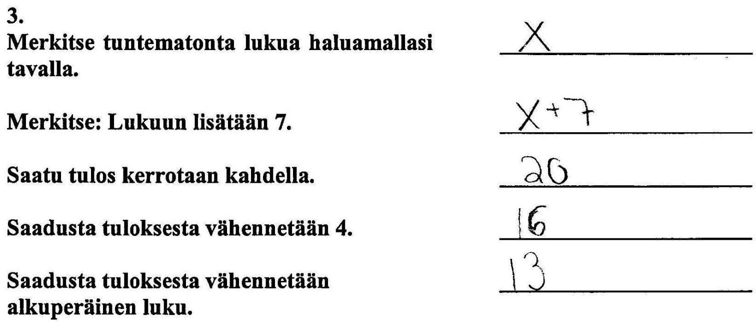
Tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemisessa ei ilmennyt eroa tyttöjen ja poikien välillä (U = 443,00, p = 0,66). RMAT-testimenestyksen perusteella määritetyllä matematiikan osaamistasolla havaittiin olevan tilastollisesti merkitsevä yhteys tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen ($\chi^2(2) = 8,59$, $p = 0,01$). Kuviosta 18 ilmenee, että mitä taitavampi oppilas on matematiikassa, sitä paremmin hän kykenee ratkaisemaan tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä.



KUVIO 18. Matematiikan osaamistason yhteys tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen lomakkeen 2 tehtävässä 5, asteikko 0–12. (n = 62)

4.4 Muuttujien käsittelyyn liittyvät virhetyypit ja virheelliset käsitykset

Luvun sijoittaminen muuttujan paikalle. Tämän tutkimuksen yhtenä tavoitteena oli selvittää, millaisia virhetyyppejä ja virheellisiä käsityksiä ilmenee, kun oppilaat käsittelevät muuttujia sisältäviä tehtäviä. Näitä seikkoja eriteltiin lomakkeista 1 ja 2. Tuntemattoman luvun merkitsemiskykyä mittaavassa osiossa (lomake 1) melko tyypillistä oli, että vaikka oppilas osaisi merkitä tuntemattoman luvun symbolisesti, hän ei kykene myöhemmin käsittelemään sitä osana lauseketta, vaan sijoittaa sen paikalle konkreettisen luvun. Näin toimi oppilaista 14,5 % (f = 9). Kuviossa 19 on esimerkkitapaus luvun sijoittamisesta muuttujan paikalle.



3.
Merkitse tuntematonta lukua haluamallasi tavalla. X

Merkitse: Lukuun lisätään 7. X+7

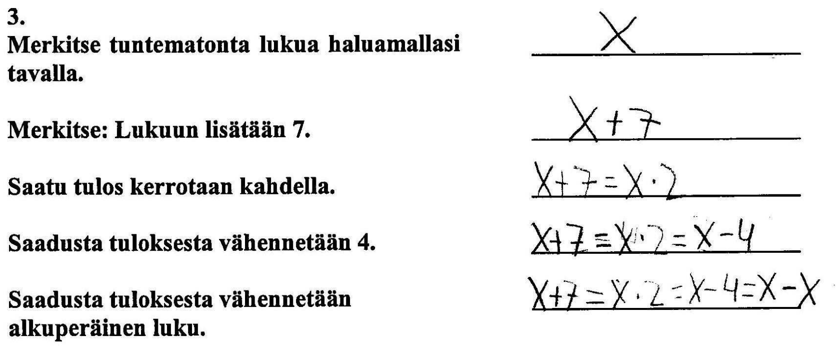
Saatu tulos kerrotaan kahdella. 20

Saadusta tuloksesta vähennetään 4. 16

Saadusta tuloksesta vähennetään alkuperäinen luku. 13

KUVIO 19. Esimerkki kirjainmerkinnästä, jonka tilalle on sijoitettu luku lomakkeen 1 tehtävässä 3.

Samalla symbolilla kaksi eri merkitystä. Toiseksi melko yleinen virhe oli ajatella saman symbolin voivan samassa tehtävässä merkitä kahta eri lukua, kuten oppilaista 11,3 % (f = 7) teki. Esimerkiksi lomakkeen 1 kolmannessa tehtävässä oli tavallista, että tuntematonta lukua oli merkitty *x*:llä, kuten myös saatua tulosta tehtävän seuraavissa kohdissa. Kuviossa 20 tällainen virheellinen ajattelutapa yhdistyy lausekkeiden ketjuttamiseen.



3.
Merkitse tuntematonta lukua haluamallasi tavalla. X

Merkitse: Lukuun lisätään 7. X+7

Saatu tulos kerrotaan kahdella. X+7=X·2

Saadusta tuloksesta vähennetään 4. X+7=X·2=X−4

Saadusta tuloksesta vähennetään alkuperäinen luku. X+7=X·2=X−4=X−X

KUVIO 20. Esimerkki ratkaisusta, jossa samalle symbolille on annettu eri merkitykset, minkä lisäksi tehtävässä ilmenee lausekkeiden ketjuttamista.

Symboli paikkajärjestelmässä. Oppilaista 6,5 % (f = 4) ymmärsi symbolin liittyvän paikkajärjestelmään, jolloin esimerkiksi 2*a*:n ajatellaan tarkoittavan lukua 23, kun *a* = 3. Tähän liittyy myös käsitys siitä, että esimerkiksi *x* ei voi tarkoittaa kaksi- tai useampinumeroista lukua, kuten eräs haastateltava esittää: ”Se voi olla periaatteessa vain yhdeksään saakka, koska siinä on vain yksi luku. Jos siinä olisi vaikka *y* ja *x*, niin sitten se voisi vaikka olla 16.”

Symbolin arvon määrittäminen aakkosjärjestyksen perusteella. Symbolin arvon liitti sen järjestyslukuun aakkosissa kaksi oppilasta. Eräässä tapauksessa aakkosvirhe ilmeni varsin monimutkaisella tavalla: Oppilaan mukaan $2\cdot a + 3\cdot b$ voisi olla ”5h koska $2\cdot a$ on $2\cdot b$ ja $3\cdot b$ on f siksi koska kerroin kirjaimet ja sitten laskin ne yhteen.” Oppilas on ilmeisesti ajatellut, että $a = 1$ aakkosjärjestyksen perusteella, jolloin $2\cdot a$ on 2. Jostakin syystä oppilas on ajatellut tämän tarkoittavan samaa kuin $2\cdot b$. Edelleen $3\cdot b$ on aakkosjärjestyksen perusteella 6, ja koska f on aakkosten kuudes kirjain, niin $3\cdot b$ on f. Vastaus 5h saadaan, kun lasketaan yhteen kertoimet 2 ja 3 ja kerrotaan summa aakkosten kahdeksannella kirjaimella, h:lla, koska $b + f = h$.

Symbolin arvon määrittäminen äänteen perusteella. Symbolin arvon määräämiseen aakkosjärjestyksen perusteella liittyy läheisesti sen arvon määrittäminen lukusanan ensimmäisen äänteen perusteella. Tällöin esimerkiksi y voi olla yksi tai yhdeksän tai mikä tahansa muu y:llä alkava luku. Tätä tulkintaa esiintyi tutkituista 8,1 %:lla (f = 5). Haastatelluista yksi oppilas osoitti kyllä ymmärtävänsä, että tuntematon voi tarkoittaa muutakin lukua kuin y:llä alkavaa, mutta silti hänen alkuperäinen tulkintansa oli hyvin vastustuskykyinen:

Oppilas 1: *Ja sitten tuo y viittaa yhdeksään, koska se alkaa y:llä. Ja sitten kun on 10 kertaa 9, niin siitä tulee 90.*

Haastattelija: *Joo. Voisiko y olla mielestäsi jotakin muuta?*

Oppilas 1: *Se voisi olla 90 tuossa, tai 900, mutta kyllä se mielestäni eniten viittaa yhdeksään. Jos siihen tulisi vaikka 8, niin se olisi epäloogista, koska se ei sovi siihen minun mielestäni.*

Haastattelija: *Olisiko se mahdollista, että siinä olisi 8?*

Oppilas 1: *Olisi, ei se mahdotontakaan ole.*

Haastattelija: *Voisiko siinä olla vielä jotakin muuta?*

Oppilas 1: *Siinä voisi olla melkein… No voisi olla myös ykkönen, koska se alkaa y:llä. Ja niin… Mutta mielestäni tuo on paras vaihtoehto.*

Rajoittuminen luonnollisiin lukuihin. Hyvin harva oppilas antoi tuntemattomalle luvulle muita esimerkkiarvoja kuin luonnollisia lukuja, vaikka etenkin lomakkeen 2 tehtävässä 6 se olisi ollut luontevaa. Yhdellä haastateltavista ratkaisustrategia oli hallussa, mutta sopivien arvojen löytämistä hankaloitti pysyminen luonnollisissa luvuissa: ”Jos kokeilisi jokaisen numeron, että 1 kertaa 2, paljonko on 1 kertaa 2, no 2. Sitten kolme kertaa mikä on 10. Ei mikään, eli ei toimi sitten, ja niin eteenpäin. Neljä miinus 12 on kahdeksan. Kolme kertaa mikä on kahdeksan. Ei mikään, eikä sekään toimi. Sitten miettii, että 2 kertaa 3 ja niin edespäin.” Eräs oppilas kuitenkin toi esille myös tuntemattoman luvun mahdolliset rationaalilukuarvot: ”Ajattelin sitä, että jos se *a* tarkoittaa vaikka puolikasta, niin se b voi olla kokonainen, sitten 2 kertaa puolikas on yksi kokonainen ja kolme kertaa se kokonainen on kolme kokonaista ja se olisi neljä.” Myös yksi haastatelluista oppilaista keksi rationaalilukujen käyttömahdollisuuden itsenäisesti, kun kysyttiin lomakkeen 2 tehtävään 5 sopivia arvoja: ”No jos mentäisiin puolikkaisiin, niin kyllä silloin löytyy. Silloin vaikka jos *y* olisi 3 kertaa 3, niin *x* voisi olla 1,5.”

Numeerisen vastauksen puuttuminen. Useille oppilaille oli hankalaa hyväksyä, että tehtävään ei saada numeerista vastausta. Heille algebrallinen lauseke ei riittänyt vastaukseksi. Toisaalta oppilas, joka oli edellisessä tehtävässä vastannut, että ”tehtävään pitää lisätä vielä vastaus”, sanoi seuraavassa tehtävässä, että ”8*a* voi olla jonkun laskun tulos. Esim. $2a \cdot 4 = 8a$”. Toisinaan siis tuntemattoman luvunkin sisältävä lauseke voidaan oppilaiden mielestä kelpuuttaa tehtävän vastaukseksi. Yhdellä haastatelluista oli suuria vaikeuksia hyväksyä, että saatu tulos on tuntemattoman luvun sisältävä lauseke, eikä konkreettinen luku, mutta oppilaan ajattelu kehittyi selvästi tehtävän edetessä.

Oppilas 9:	*Sittenhän se periaatteessa voisi olla mikä vaan. Se voi olla joku tietty, mutta ei sitä tästä voi vielä päätellä.*
Haastattelija:	*Ei voikaan. Mutta toi ihan riittävä, koska tässä on kyse vaan merkitsemisestä. Ei siinä tarvitse löytää lopputulosta. No osaisitko nyt tuohon perään jatkaa sitä seuraavaa kohtaa? Eli saadusta tuloksesta vähennetään neljä.*
Oppilas 9:	*Niin siis tästähän ei voi tietää paljonko tämä on. Niin silloinhan tämä on yhtä suurin kuin x. Ei, ei ole yhtä suuri kuin x, vaan… Mitenkähän mä merkkaisin tuon… No ihan sama, jos tämä olisi sama kuin joku tuntematon.*
Haastattelija:	*Niin on.*
Oppilas 9:	*En voi merkitä sitä mitenkään, jos ei tänne voinut laittaa sitä y:tä tai muuta semmoista. Niin jos saadusta tuloksesta vähennetään…*
Haastattelija:	*Mikä nyt on se saatu tulos?*
Oppilas 9:	*No eihän tuosta voi sitä päätellä, paljon se on.*
Haastattelija:	*Ei voikaan, mutta se tulos on tässä. Eli tästä taas koko lausekkeesta vähennät neljä.*
Oppilas 9:	*Elikkä siis… Eihän tässä ole muuta vaihtoehtoa…*

Haastattelija: *Ihan oikein. Just noin. No entä sitten viimeinen kohta?*

Oppilas 9: *No tuosta vähennetään alkuperäinen luku. No, sitten taas jotenkin tästä lausekkeesta vähennetään, koko lausekkeesta vähennetään… Ei sitä voi… Mikäköhän se alkuperäinen luku sitten onkaan?*

Haastattelija: *Eli se mikä oli täällä tehtävän alussa.*

Oppilas 9: *Eli se x. Eli saadusta tuloksesta vähennetään alkuperäinen luku.*

Haastattelija: *Kyllä. Se on siinä! Ja tässä oli kyse merkitsemisestä. Ei meidän tarvitse tietää sille vastausta.*

Muuttujan arvojen rajoittaminen. Jotkut oppilaat hapuilivat eri symboleille sopivien arvojen kanssa. Esimerkiksi monessa tapauksessa oppilaan mukaan *a*:n ja *b*:n tai *x*:n ja *y*:n tulisi olla eri lukuja. Tiukimman esiintyneen tulkinnan mukaan *a*:n olisi oltava *b*:tä pienempi, mikä varmaan juontaa juurensa aakkosjärjestyksestä. Eräs oppilas rajoitti tuntemattomalle luvulle sopivia arvoja lausekkeessa esiintyvän tunnetun luvun perusteella: ”8*a* voi tarkoittaa jotain muuta lukua kuin 8”. Yksi haastatelluista oppilaista pääsi jyvälle eri symbolien mahdollisista arvoista:

Oppilas 9: *Nämä ei tietenkään voi olla sama luku, nämä a ja b, koska eri kirjain. Kaksi kerrotaan jollakin tuntemattomalla luvulla ja kolme kerrotaan jollakin erillä tuntemattomalla luvulla.*

Haastattelija: *Joo. Ja mitä ne tuntemattomat luvut voi olla?*

Oppilas 9: *No mitä vaan paitsi samoja toistensa kanssa.*

Haastattelija: *Mitä jos ne olisikin samoja?*

Oppilas 9: *No sitten jos vaikka a olisi 10, niin tämä ei olisi sitten a, silloin jos ne olisi samoja, niin sitten tämänkin pitäisi olla 10.*

Haastattelija: *Mutta olisiko se ongelma?*

Oppilas 9: *Ei. Mutta silloin pitäisi olla samoja niitten numeroitten. Mutta eihän se ole ongelma, jos ne numerot on samoja. Mutta sitten se menisi väärin, jos siinä olisi kaksi samaa kirjainta, mutta ne olisi eri lukuja.*

Puutteellinen käsitys yhtäsuuruudesta. Kahdella oppilaalla esiintyi selviä vaikeuksia yhtäsuuruuden merkityksen ymmärtämisessä. Eräs haastatelluista oppilaista epäröi yhtälön ”$2 \cdot d = 4 + d$” kanssa, mutta selvitti oikean ratkaisun, kun haastattelija varmensi yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämisen:

Haastattelija: *Osaisitko sanoa, minkä takia 2 ei ole oikea vastaus?*

Oppilas 4: *En vaan tiedä, että saako sinne taakse lisättyä d:tä. Mietin, että…*

Haastattelija: *Mitä mielestäsi tarkoittaa tuo merkki tuossa keskellä?*

Oppilas 4: *Ai niin, se on yhtä suuri kuin.*

Haastattelija: *Sehän se on. Eli mitä se tarkoittaa?*

Oppilas 4: *No, se tarkoittaa ehkä sitä, että tuo 2 kertaa d on yhtä suuri kuin 4 + d.*

4.5 Ohjauksen vaikutus oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia

Tutkimuksen toisen pääongelman tavoitteena oli selvittää, millainen vaikutus ohjauksella on oppilaiden kykyyn käsitellä muuttujia. Ongelmaa selvitettiin haastattelujen avulla. Taulukossa 10 on esitelty haastateltujen oppilaiden tasot muuttujan merkitsemisessä lomakkeen perusteella (Lomake 1: kirjallinen) ja haastattelussa (Lomake 1: haastattelu) sekä oppilaiden symbolin tulkitsemistasot lomakkeen perusteella (Lomake 2: kirjallinen) ja haastattelussa (Lomake 2: haastattelu).

TAULUKKO 10. Oppilaiden osaamistasot (1–6) lomakkeiden ja haastattelun perusteella

Tutkittava	Lomake 1: kirjallinen	Lomake 1: haastattelu	Lomake 2: kirjallinen	Lomake 2: haastattelu
Oppilas 1	2	6	K5	K5
Oppilas 2	2	3 #	K3	K5
Oppilas 3	4	3 *	K3	K5
Oppilas 4	3	6 #	K4	K5
Oppilas 5	4	6 #	K5	K5
Oppilas 6	3	6 #	K4	K6
Oppilas 7	6	6	K1	K5
Oppilas 8	6	6	K4	K5
Oppilas 9	6	6	K4	K5

1 = piirros 2 = sijoitus 3 = kuvio 4 = objekti 5 = merkki 6 = kirjain

* = avustettuna # = ensin avustettuna, soveltaa myöhemmin itsenäisesti

K1 = arvo K3 = objekti K4 = tuntematon luku K5 = yleinen luku K6 = muuttuja

Kaikki oppilaat kykenivät haastattelussa kehittämään muuttujan merkitsemistapaansa joko itsenäisesti tai haastattelijan avustamana. Haastattelijan avustamistakin suurin osa sovelsi uutta merkitsemistapaa itsenäisesti seuraavissa tehtävissä. Eräs haastatelluista oppilaista keksi kirjainmerkinnän hyvin nopeasti ja spontaanisti lomakkeen 1 tehtävässä 1, kun hänen käyttämänsä sijoitusmerkintä osoittautui puutteelliseksi:

Oppilas1: *No mietin, että mikä voisi olla Jaakon pituus, koska sitä ei oltu missään määritelty. Ja tuli ensimmäisenä mieleen 110 cm. Ei kun siis se Kallehan oli 110 cm, jolloin sitten kun täällä kysytään, kun se on 10 cm:n pidempi kuin Kalle tuo Jaakko, niin sitten siihen plussataan se kymmenen senttimetriä, niin sitten siitä tulee 120 cm.*

Haastattelija: *Joo. Ihan oikein olet sen ajatellut ja ymmärtänyt, mutta tässä oli ongelmana se, että… Mitä me ei tiedetty? Sanoitkin sen jo.*

Oppilas 1: *Niin. Ei tiedetty, että mikä sen Kallen pituus on.*

Haastattelija: *Eli se pitäisi nyt jotenkin merkitä. Me ei tiedetä kuinka pitkä Kalle on. Keksitkö miten voisit merkitä sitä?*

Oppilas 1: *Se voi olla periaatteessa x.*

Ja myös uuden merkitsemistavan soveltaminen seuraavassa tehtävässä onnistui itsenäisesti:

Oppilas 1: *No sama juttu kuin tuossa. Ajattelin, että siellä on tietty määrä karkkeja, joka nyt oli mielestäni 20, ja sitten se syö siitä ne 5, jolloin siitä miinustetaan se 5 siitä 20:stä, jolloin jää 15. Mutta sitten jos sen vertaa tuohon ykköstehtävään, niin sitten periaatteessa se on x - 5.*

Myös toisella haastateltavalla kirjainmerkinnän käyttö sujui luontevasti haastattelijan vihjattua kirjainmerkinnän mahdollisuudesta, vaikka aihe olikin oppilaalle uusi:

Haastattelija: *Oletko koskaan nähnyt, että käytettäisiin kirjaimia?*

Oppilas 4: *Jaa…*

Haastattelija: *Kävisikö sellainen?*

Oppilas 4: *Joo. En vaan tiedä sitä.*

Haastattelija: *Eli tässä merkitsit Kallen pituutta ukolla. Mitä jos se olisikin kirjain se merkki? Mikä kirjain voisi merkitä Kallen pituutta?*

Oppilas 4: *Vaikka K.*

Haastattelija: *Joo. Mitä sitten?*

(Oppilas tekee lausekkeen)

Haastattelija: *Kyllä. Just noin.*

Seuraavissa tehtävissä oppilas viimeistelee ratkaisujaan itsenäisesti ja keksii spontaanisti kysymysmerkin tuntemattoman symboliksi, mutta muotoilee lopulta edistyneemmän ratkaisutavan:

Haastattelija: *Ne oli kaikki tuntemattomia lukuja. Miten täällä voisit merkitä tuntematonta lukua?*
Oppilas 4: *Kysymysmerkillä.*

Haastattelija: *Joo. Se kävisi.*

Oppilas 4: *Tai vaikka jollain x:llä.*

Haastattelija: *Joo, hyvä! Kokeilepa sitä.*

Kaikille muuttujan merkitseminen ei kuitenkaan ollut lainkaan yhtä helppoa. Erästä oppilasta haastattelija kehotti ensin merkitsemään Jaakon pituuden, kun Kallen pituus on 130 cm. Merkitsemistavan viimeistely kuviomerkintää käyttäen aiheutti oppilaalle suurta epäröintiä ja epäuskoa:

Haastattelija: *Aivan, noin se menisi. Mutta nyt me ei tiedettykään Kallen pituutta. Osaisitko merkitä sitä jotenkin? Saat ihan itse päättää, mikä mielestäsi olisi hyvä merkintätapa.*
Hiljaisuus

Haastattelija: *Tuleeko mieleen mitään?*

Hiljaisuus

Oppilas 2: *Ei nyt tule.*

Haastattelija: *Kävisikö joku kuvio?*

Hiljaisuus

Haastattelija: *Ihan mikä vaan.*

Oppilas 2: *No ei tämä varmaan käy, mutta esimerkiksi kolmio.*

Haastattelija: *Joo. Kyllä se käy. Kokeilepa, jos merkitset Kallen pituutta kolmiolla.*

Oppilas 2: *Piirränkö kolmion?*

Haastattelija: *Joo.*

Hiljaisuus

Haastattelija: *Eli se olisi tämän paikalla, eikö vaan? Ja sitten jos haluat merkitä Jaakon pituuden, niin mitä teet? Ihan niin kuin tässäkin.* (Näyttää laskua 130 + 10 = 140)
Oppilas 2: *Lisään siihen.*

Haastattelija: *Mitä?*

Oppilas 2: *10.*

Haastattelija: *Joo. Just noin.*

Seuraavassa tehtävässä ratkaisutavan soveltaminen onnistui jo paremmin haastattelijan avustuksella:

Haastattelija: *Jos esität karkkipussissa olevat karkit, joita on tuntematon määrä, jollakin kuviolla. Mikä voisi olla hyvä kuvio?*

Oppilas 2: *Ympyrä.*

Haastattelija: *Okei. Ja mitä sitten pitää tehdä?*

Oppilas 2: *Miinustaa viisi.*

Myös toiselle oppilaalle kuvion käyttäminen on hyvin hankalaa ja onnistuu vasta, kun haastattelija ehdottaa tikku-ukon käyttämistä:

Haastattelija: *Nyt saat itse päättää, mikä olisi hyvä tapa merkitä Kallen pituutta.*

Hiljaisuus

Haastattelija: *Voisiko sitä merkitä vaikka jollakin kuviolla?*

Oppilas 3: *En tiedä.*

Haastattelija: *Kokeilepa. Keksi joku kuvio, millä merkitset Kallen pituutta.*

Hiljaisuus

Haastattelija: *Ihan mikä vaan.*

Hiljaisuus

Haastattelija: *Vaikka tikku-ukko.*

Oppilas 3: *Noin.*

Haastattelija: *Ja nyt tuollaista tikku-ukkoa me voitaisiin käyttää tässä Kallen pituuden paikalla. Kokeilepa kirjoittaa sellainen lasku ylös, jossa ei olekaan Kallen pituuden paikalla 130 cm, vaan tikku-ukko.*

Oppilas 3: *Noin.*

Seuraavissakin tehtävissä oppilaalle on huomattavan vaikeaa keksiä sopivaa merkintätapaa muuttujalle, mutta kun ongelmasta on haastattelijan avustuksella päästy yli, lausekkeen muotoileminen onnistuu itsenäisesti:

Haastattelija: *Ihan mikä vaan merkki. Niin kuin täällä sinulla oli tikku-ukko ja tuolla tuollainen karkkipussi.*

Hiljaisuus

Haastattelija: *Vaikka kolmio. Jos merkitset kolmiolla sitä.*

(Oppilas piirtää kolmion)

Haastattelija: *Osaatko nyt merkitä, että lukuun lisätään 7?*

(Oppilas merkitsee lausekkeen)

Haastattelija: *Joo. Ihan oikein.*

Haastatteluissa kaikkien oppilaiden käsitys muuttujasta osoittautui olevan korkeampi, kuin mitä lomakkeesta ilmeni. Usein lisäkysymykset paljastivat, että oppilaan vastaus ei ilmentänyt tämän todellista ajattelun tasoa, vaan viittasivat alempiin tasoihin. Yhtä oppilasta lukuun ottamatta kaikkien oppilaiden käsitys tuntemattomasta luvusta täsmentyi Küchemannin luokituksen viidennelle tasolle, yleiseksi luvuksi. Yksi oppilas osoitti kuitenkin ymmärrystä riippuvuudesta tehtävässä ”Jos $c + d < 10$ ja $c < d$, mitä osaat sanoa d:stä?” ja hänet sijoitettiin luokituksen ylimmälle tasolle: ”Jos c olisi vaikka 1, niin silloin d voisi olla 5. Jos c olisi 2, niin silloin d voisi olla 5. Jos c olisi 3, silloin d voisi olla 5. Jos c olisi 4, silloin d voisi olla 5.”

5 POHDINTA

5.1 Viidesluokkalaisilla on valmiuksia algebralliseen ajatteluun

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, millaiset valmiudet viidesluokkalaisilla on käsitellä muuttujia matematiikassa. Kiinnostuksen kohteena olivat oppilaiden kyky merkitä muuttujaa, kyky ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä ja käsitykset muuttujaa merkitsevästä symbolista. Lisäksi selvitettiin virhetyyppejä ja virheellisiä käsityksiä, joita esiintyy oppilaiden käsitellessä muuttujia. Haastattelun avulla selvitettiin tuen vaikutusta oppilaan kykyyn käsitellä muuttujia.

5.1.1 Yli puolet oppilaista kykenee merkitsemään muuttujan

Yksi tutkimuksen tavoitteista oli selvittää, kuinka oppilaat merkitsevät muuttujan. Oppilaiden merkitsemistavoista erottui ei-symboliset merkitsemistavat piirros ja sijoitus sekä symboliset merkitsemistavat kuvio, objekti, kysymysmerkki ja kirjain. Ei-symbolisista merkitsemistavoista yleisin oli sijoitus, jota käytti melkein puolet oppilaista. Myös Hihnalan tutkimuksessa sijoitusstrategia oli yleinen: sitä käytti noin kolmannes oppilaista (Hihnala 2005). Symbolisista merkitsemistavoista tässä tutkimuksessa käytetyin oli kirjain, jolla muuttujan merkitsi neljännes oppilaista. Objektimerkintää esiintyi melko vähän, vaikka Hassisen mukaan se on paria vuotta vanhemmilla oppilailla yleinen (Hassinen 2006). Tässä tutkimuksessa tehtävänanto, joka kehotti merkitsemään tehtävät matematiikan kielellä matemaatikolle, joka ei ymmärrä suomen kieltä, todennäköisesti ohjasi oppilaita välttämään objektimerkintää.

Oppilaille määritettiin muuttujan merkitsemiskyvyn taso, jonka perusteella hieman yli puolet oppilaista kykeni merkitsemään muuttujan. Vastaavasti hieman alle puolet ei kyennyt merkitsemään muuttujaa symbolisesti. Muuttujan esittäminen oli oppilaille selvästi hankala asia. Tutkimustilanteessa he epäilivät, että lomakkeessa on virhe ja protestoivat, kun lukuja ei kerrottu. Tulosta voidaan kuitenkin pitää varsin rohkaisevana, sillä vaikka asia oli oppilaille todennäköisesti uusi ja selvästi vaikea, heistä yli puolet kykeni kehittämään symbolisen merkitsemistavan muuttujalle. Merkitsemistavoista neljännes oli vieläpä edistyneitä kirjainmerkintöjä.

Myös aiempiin tutkimuksiin verrattuna tämän tutkimuksen oppilaat menestyivät hyvin. Kun tässä tutkimuksessa algebraan perehtymättömistä oppilaista puolet kykeni kehittämään merkintätavan muuttujalle, Staceyn ja MacGregorin tutkimuksessa algebraa jo hieman opiskelleet ylsivät samaan. Tämän tutkimuksen tutkimusjoukon kanssa suunnilleen samanikäisistä tutkituista vain yksi kykeni merkitsemään muuttujaa lausekkeessa. Samanikäisistä oppilaista, joille algebraa oli opetettu, vain hieman yli kolmannes onnistui kehittämään merkintätavan muuttujalle. (MacGregor & Stacey 1997; Stacey & MacGregor 1997.) Myös Hihnalan (2005) tutkimukseen verrattuna tämän tutkimuksen tulokset ovat rohkaisevia. Kun Hihnalan tutkimista kuudesluokkalaisista noin kolmannes kykeni tunnistamaan oikean muuttujan sisältävän lausekkeen, tässä tutkimuksessa yli puolet kykeni kehittämään itsenäisesti merkitsemistavan muuttujalle. On toki huomattava, että tässä tutkimuksessa oikeaksi vastaukseksi ei luettu pelkästään edistyneitä kirjainmerkintöjä, vaan myös objekti-, kysymysmerkki- ja kuviomerkinnät hyväksyttiin tavoiksi merkitä muuttuja. Tämä selittää osaltaan hyviä tuloksia, mutta ei kuitenkaan täysin, sillä olihan tämän tutkimuksen merkinnöistä neljännes juuri kirjainmerkintöjä.

5.1.2 Kaikilla oppilailla on käsitys muuttujaa merkitsevästä symbolista

Tässä tutkimuksessa selvitettiin myös, millainen käsitys oppilailla on muuttujaa merkitsevästä symbolista. Käsitykset luokiteltiin Küchemannin (1981) teorian mukaisesti kuuteen luokkaan. Aineistosta erottuivat luokat symboli arvona, objektina, tuntemattomana lukuna ja yleisenä lukuna. Lisäksi haastattelussa ilmeni vielä teorian ylin taso symboli systemaattisena muuttujana. Oppilaan symbolin tulkitsemisen taso määritettiin tämän osoittaman edistyneimmän tulkinnan mukaan. Ilmeni, että kaikilla tutkituilla oli jonkinlainen käsitys symbolista. Lähes puolet oppilaista käsitti symbolin arvoksi. Toiseksi yleisin tulkintatapa oli symbolin tulkitseminen tuntemattomaksi luvuksi. Näin teki oppilaista vajaa neljännes. Lähes yhtä moni tulkitsi symbolin yleiseksi luvuksi.

Oppilaista hieman yli puolet sijoitettiin Küchemannin (1981) luokituksen kolmelle alimmalle tasolle, joihin myös Küchemannin mukaan oppilaiden ajattelu usein viittaa. Küchemann sijoitti tutkimistaan 13-vuotiaista näille tasoille lähes kolme neljäsosaa oppilaista. Myös Hihnalan (2005) tutkimista 6.–9.-luokkalaisista suurin osan sijoitettiin luokituksen kolmelle alimmalle tasolle. Küchemannin ja Hihnalan tutkimuksissa alempien tasojen ajattelua esiintyi siis jonkun verran enemmän kuin tässä tutkimuksessa. Objektitulkintoja oli tässä tutkimuksessa huomattavasti Hihnalan tutkimusta vähemmän. Objektitulkintojen vähäisyys oli yllättävää, sillä aiemmissa tutkimuksissa niiden on todettu olevan yleisiä – onhan kirjainten käyttö yksiköinä tai lyhenteenä oppilaille matematiikasta jo entuudestaan tuttua (Hassinen 2006; Stacey & McGregor 1997). Neljännelle tasolle sijoitettiin tässä tutkimuksessa noin neljännes oppilaista, mikä on lähellä Küchemannin tuloksia. Vaikka edistyneempiä viidennen tason tulkintojakin symbolista ilmeni runsaasti, yksikään tutkituista ei osoittanut ylimmän tason ajattelua ennen haastattelua.

Vaikka suurin osa tämän tutkimuksen oppilaista sijoitettiin Küchemannin luokituksen kolmelle alimmalle tasolle, jotka Küchemannin mukaan ovat alkeellisia tulkinnan tasoja, voidaan tämän tutkimuksen tuloksia pitää erittäin myönteisinä. On huomioitava, että tutkitut olivat Küchemannin ja Hihnalan tutkimia oppilaita nuorempia, eivätkä he olleet vielä saaneet varsinaista algebran opetusta. Siten oppilaiden ikä ja aiemmat kokemukset algebrasta selittävät tulosten erilaisuutta. Lisäksi tutkimusjoukot ovat vertailututkimuksissa olleet kattavampia. Tämän tutkimuksen tulosten vertailtavuutta heikentää pieni tutkimusjoukko, jossa tutkittujen luokkien menestys eri testiosioissa oli vielä epätasaista.

5.1.3 Oppilaat kykenevät ratkaisemaan tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, millaiset valmiudet oppilailla on ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä. Osoittautui, että oppilaiden algebrallisen ajattelun valmiudet tältä osin ovat hyvät, joten opetussuunnitelman (2004) vaatimukset täyttyvät. Myöskään ulkomaiset tutkimukset eivät ole osoittaneet erityisiä hankaluuksia päättelemällä ratkaistavissa olevien yhtälöiden ratkaisemisessa (Herscovics & Linchevski 1994; Schliemann ym. 1998). Mielenkiintoista on, että suomalaisnuorilla on kuitenkin havaittu ongelmia juuri yhtälöiden ratkaisemisessa (Kupari & Törnroos 2004).

On mahdollista, että nämä ongelmat ilmenevät vasta, kun yhtälöt vaativat algebrallisia ratkaisukeinoja, eikä päätteleminen enää riitä. Tähän kysymykseen tämä tutkimus ei kuitenkaan pyri vastamaan, vaan lisätutkimus on tältä osin tarpeen.

5.1.4 Oppilailla esiintyy virheellisiä käsityksiä muuttujiin liittyen

Algebrallisen ajattelun valmiuksien kartoittamisen lisäksi tässä tutkimuksessa selvitettiin, millaisia virhetyyppejä ja virheellisiä käsityksiä oppilailla on muuttujiin liittyen. Osoittautui, että oppilailla esiintyy aiemmissakin tutkimuksissa havaittuja virheellisiä ajattelutapoja. Oppilaat sijoittavat muuttujan paikalle luvun, kun eivät kykene käsittelemään muuttujaa lausekkeessa. Oppilaat antavat samassa tehtävässä symbolille kaksi eri merkitystä. Toisaalta ilmenee muuttujan arvojen rajoittamista virheellisin perustein. Algebran merkitsemistavat eivät ole oppilaille tuttuja, jolloin he liittävät symbolin paikkajärjestelmään. Oppilaat määrittävät symbolille sopivat arvot aakkosjärjestyksen tai äänteen perusteella. He rajoittuvat yleensä ajattelemaan luonnollisia lukuja, vaikka tehtävän kontekstiin sopisikin esimerkiksi rationaaliluvut. Numeerisen vastauksen puuttumisen hyväksyminen on oppilaille hankalaa, eivätkä he haluaisi hyväksyä algebrallista lauseketta tehtävän vastaukseksi. Lisäksi puutteellinen käsitys yhtäsuuruudesta heikentää oppilaiden valmiuksia algebralliseen ajatteluun. (Christou ym. 2007; Christou & Vosniadou 2005; Duke & Graham 2007; Hassinen 2006; Hihnala 2005; Knuth ym. 2008; Küchemann 1981; MacGregor & Stacey 1997, 1999; Matteson 2010; McNeil & Alibali 2005; Stacey & MacGregor 1997; Stephens 2005.)

5.1.5 Tuettuna oppilaat yltävät korkeatasoisempaan algebralliseen ajatteluun

Tässä tutkimuksessa selvitettiin tuen vaikutusta oppilaan kykyyn käsitellä muuttujia matematiikassa. Osoittautui, että kaikki oppilaat kykenivät haastattelussa kehittämään muuttujan merkitsemistapaansa joko itsenäisesti tai haastattelijan avustamana. Apua saaneista oppilaistakin suurin osa sovelsi uutta merkitsemistapaa itsenäisesti seuraavissa tehtävissä. Myös useissa muissa tutkimuksissa (Carpenter & Levi 2000; Schliemann ym. 1998; Warren & Cooper 2005) on havaittu, että oppilaat kykenevät joko spontaanisti tai tuettuina kehittämään merkitsemistapoja muuttujalle. Haastatteluissa täsmentyi myös oppilaiden tulkinnat muuttujasta. Kaikkien haastateltujen oppilaiden käsitys muuttujasta osoittautui olevan korkeampi, kuin mitä lomakkeesta ilmeni. Yksi oppilas sijoitettiin Küchemannin luokituksen ylimmälle tasolle ja loput toiseksi ylimmälle tasolle.

5.1.6 Algebrallisen ajattelun valmiuksien yhteydet toisiinsa

Osoittautui, että muuttujan merkitsemiskyvyllä on yhteys kykyyn ratkaista tuntemattomia lukuja sisältäviä tehtäviä. Algebran opetuksen kannalta tämä viittaa siihen, että muuttujan merkitsemistä voisi olla hyödyllistä harjoitella ennen kuin siirrytään yhtälöiden ratkaisemiseen. Perinteisestihän algebran opetus alkaa juuri yhtälöistä. Lisäksi symbolin tulkinnalla havaittiin olevan yhteys kykyyn merkitä muuttuja. Symbolin tuntemattomaksi luvuksi käsittäneet onnistuivat parhaiten merkitsemään muuttujan. Yllättäen edistyneimmin symbolin tulkinneet onnistuivat heitä huonommin. Heikoiten muuttujaa kykenivät merkitsemään symbolin objektiksi käsittäneet. Tulos viittaa siihen, että symbolin tulkitseminen tuntemattomaksi luvuksi voi olla aloitteleville algebran opiskelijoille hyvä tapa tutustua muuttujan käsitteeseen. Objektitulkintaa opetuksessa puolestaan ei kannata suosia. Matemaattisella osaamistasolla havaittiin olevan yhteys tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaisemiseen. Tämä viittaa siihen, että algebran oppiminen vaatii riittävää aritmetiikan hallintaa.

5.2 Tutkimuksen luotettavuus

Tämän tutkimuksen perustana on Küchemannin teoria oppilaiden tavoista tulkita muuttujia. Teoriaan on viitattu useissa tutkimuksissa, joten sitä voidaan pitää luotettavana kehyksenä tälle tutkimukselle. Toki on huomattava, että tämän tutkimuksen päätelmät perustuvat tutkijan tulkinnoille, joiden pohjana on Küchemannin teoria. Tutkijan tulkinta oppilaan esittämästä tehtävän ratkaisusta ei välttämättä edusta oppilaan todellisen ajattelun tasoa, eikä myöskään oppilaan tehtävän ratkaisusta ilmene tämän ajattelun taso. Lomaketutkimuksen osalta on huomattava, että tulokset saattavat vääristyä heikompaan suuntaan, sillä kuten haastatteluissa ilmeni, kaikki oppilaat eivät tutkimuslomakkeissa kyenneet ilmaisemaan todellista ajattelun tasoaan. Toiseksi on mahdollista, että kaikki oppilaat eivät ole suhtautuneet tutkimukseen tosissaan ja tehneet tehtäviä huolellisesti, sillä useisiin tutkimuksiin osallistuminen oli selvästi heikentänyt heidän motivaatiotaan.

Luvussa 3.8 on pohdittu tarkemmin menetelmän luotettavuuteen vaikuttavia seikkoja. Luvussa tutkimuksen toteuttamisen vaiheet on kuvattu tarkasti, joten tutkimus voidaan halutessa toistaa. Tutkimuslomakkeet ja haastattelurunko on esitestattu ja havaittu toimiviksi. Tulosten arvioinnissa on huomioitava tutkittujen luokkien epätasainen testimenestys ja vertailtavien ryhmien ajoittainen pienuus. Lisäksi on huomioitava, että tutkimuksen tutkimusjoukko oli melko pieni. Siten tulosten yleistämisessä on oltava varovainen. Jatkotutkimus auttaisi varmentamaan tutkimuksen tuloksia. Tämän tutkimuksen tulosten luotettavuutta parantaa useiden menetelmien yhteiskäyttö niin aineistonkeruussa kuin analyysissäkin. Siten myös tutkimuksen tulkinnat perustuvat useiden menetelmien tarjoamaan tietoon.

5.3 Jatkotutkimusehdotuksia

Tämä tutkimus antaa alustavan käsityksen suomalaisten viidesluokkalaisten valmiuksista käsitellä muuttujia matematiikassa. Tutkimus tekee myös näkyväksi muuttujien käsittelyyn liittyviä virheellisiä käsityksiä. Suurempaa otosta tutkimalla saataisiin tietoa ilmiöiden yleisyydestä. Algebran opetuksen kannalta erilaiset opetuskokeiluja koskevat tutkimukset olisivat hyödyllisiä. Pitkittäistutkimus tarjoaisi tietoa oppilaiden algebrallisen ajattelun kehittymisestä. Mielenkiintoista olisi myös selvittää, millaiset valmiudet nyt tutkittuja nuoremmilla oppilailla on algebralliseen ajatteluun.

5.4 Algebraa alaluokille

Tämä tutkimus osoittaa, että viidesluokkalaisilla on valmiuksia algebralliseen ajatteluun ennen kuin he ovat saaneet varsinaista algebran opetusta. Kaikilla oppilailla on käsitys muuttujasta ja puolet oppilaista kykenee myös merkitsemään muuttujan. Tuntemattomia lukuja sisältävien tehtävien ratkaiseminen sujuu hyvin. Oppilailla esiintyy kuitenkin virheellisiä käsityksiä, jotka saattavat vaikeuttaa algebran oppimista tulevaisuudessa. Jatkossa oppilaiden ennakkotiedot, niin oppimista helpottavat kuin oppimista hankaloittavatkin, tulee ottaa opetuksessa entistä tarkemmin huomioon. Erityisesti on huomioitava vastustuskykyisiksi havaitut virheelliset käsitykset, joista ylitse pääseminen saattaa vaatia käsitteellistä muutosta oppilaiden ajattelussa.

Ennen algebran opetuksen alkamista oppilaiden algebrallisen ajattelun valmiuksia on mahdollista kehittää. Tämä ei tietenkään tarkoita sitä, että algebran sisältöjä siirretään jo ennestään ahtaaseen alaluokkien opetussuunnitelmaan, tai että alaluokkien opetuksen pitäisi sisältää erityisiä esialgebran oppitunteja. Esialgebraa voitaisiin sisällyttää matematiikan muiden sisältöjen lomaan. Tämän tutkimuksen tulokset ja aiemmat tutkimukset viittaavat siihen, että algebran menestyksellinen oppiminen vaatii ainakin riittävää aritmetiikan hallintaa, kykyä käsitellä monenlaisia lukuja ja ulottaa ajattelu luonnollisia lukuja pidemmälle sekä oikeaa tulkintaa yhtäsuuruudesta. Algebraan siirryttäessä on kiinnitettävä huomio muuttujatulkinnan kehittämiseen, muuttujan merkityksen ymmärtämiseen ja muuttujan merkitsemiseen sen sijaan, että typistetään algebra symbolien manipuloimiseksi. Näiden seikkojen huomioiminen ei välttämättä vaadi muutoksia opetussuunnitelmaan tai matematiikan tuntimääriin. Sen sijaan huomioimalla viitteet oppilaan algebrallisen ajattelun rakentumisesta ja oppilaiden algebraan liittyvistä ennakkotiedoista voidaan algebran opetusta kehittää tuloksellisempaan, merkityksellisempään ja mielekkäämpään suuntaan.

Lähteet

Aaltola, J. & Valli, R. (toim.) 2001. Ikkunoita tutkimusmetodeihin 1. Metodin valinta ja aineiston keruu: virikkeitä aloittelevalle tutkijalle. Jyväskylä: PS-kustannus.

Brizuela, B. M. & Schliemann, A. D. 2003. Fourth Graders Solving Equations. International Group for the Psychology of Mathematics Education. Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference (Honolulu, HI, Jul 13-18, 2003), Vol. 2, 137–144.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest, D. 2006. Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education 37 (2), 87–115.

Carpenter, T. P. & Levi, L. 2000. Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. University of Wisconsin-Madison. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Christou, K. P., Vosniadou, S. 2005. How Students Interpret Literal Symbols in Algebra: A Conceptual Change Approach. Teoksessa B. G. Bara, L. Barsalou & M. Ducciarelli (toim.) Proceedings of the XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society, Italy, 453–458.

Christou, K. P., Vosniadou, S. & Vamvakoussi, X. 2007. Students' Interpretations of Literal Symbols in Algebra. Teoksessa S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (toim.) Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction. Advances in Learning and Instruction Series. Oxford: Elsevier Press, 283–297.

Darley, J. W. 2009. Traveling from Arithmetic to Algebra. Mathematics teaching in the middle school 14 (8), 458–464.

Dettori, G., Garuti, R. & Lemut, E. 2001. From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. Teoksessa R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (toim.) Perspectives on School Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 191–207.

Duke, R. & Graham, A. 2007. Inside the Letter. Mathematics teaching incorporating mikromath 200, 42–45.

Earnest, D. & Balti, A. A. 2008. Instructional Strategies for Teaching Algebra in Elementary School: Findings from a Research-Practice Collaboration. Teaching Children Mathematics 14 (9), 518–522.

Eskola, J. & Suoranta, J. 1999. Johdatus laadulliseen tutkimukseen. Jyväskylä: Vastapaino.

Farmaki, V., Klaoudatos, N. & Verikios, P. 2004. From Functions to Equations: Introduction of Algebraic Thinking to 13 Year-old Students. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4, 393–400.

Fernandez, M. L. & Anhalt, C. O. 2001. Transition toward algebra. Mathematics Teaching in the Middle School 7 (4), 236–239.

Filloy, E., Rojano, T. & Solares, A. 2010. Problems Dealing With Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. Journal for Research in Mathematics Education 41 (1), 52–80.

Freudenthal, H. 1974. Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. Educational Studies in Mathematics 5, 391–412.

Haapasalo, L. 2004. Ongelmanratkaisukulttuuri konstruktivismin peruselementtinä. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 84–99.

Hackbarth, A. J. & Wilsman, M. J. 2008. 1P + 4R = 5D: An Equation for Deepening Mathematical Understanding. Mathematics Teaching in the Middle School 14 (2), 122–126.

Hannula, M. S., Kupari, P., Pehkonen, L., Räsänen, P. & Soro, R. 2004. Matematiikka ja sukupuoli. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 170–197.

Hassinen, S. 2006. Idealähtöistä koulualgebraa. IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274. Väitöskirja.

Herscovics, N. & Linchevski, L. 1994. A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. Educational Studies in Mathematics 27, 59–78.

Hihnala, K. 2005. Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 278.

Hirsjärvi, S. & Hurme, H. 2001. Tutkimushaastattelu. Teemahaastattelun teoria ja käytäntö. Helsinki: Yliopistopaino.

Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. 2009. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Tammi.

Humberstone, J. & Reeve, R. A. 2008. Profiles of algebraic competence. Learning and instruction 18, 354–367.

Kieran, C. 1991. Helping to Make the Transition to Algebra. Arithmetic Teacher 38 (7), 49–51.

Kieran C. 1992. The learning and teaching of school algebra. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan Publishing Company, 390–419.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M. & Stephens, A. 2008. The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. Mathematics Teaching in the Middle School 13 (9), 514–519.

Koedinger, K. R., Alibali, M. W. & Nathan, M. J. 2008. Trade-Offs Between Grounded and Abstract Representations: Evidence From Algebra Problem Solving. Cognitive Science 32, 366–397.

Koellner, K., Pittman, M. & Frykholm, J. 2008/2009. Talking Generally or Generally Talking in an Algebra Classroom. Listening to students while they problem solve can produce valuable results. Mathematics Teaching in the Middle School 14 (5), 304–310.

Küchemann, D. E. 1981. Algebra. Teoksessa K. M. Hart (toim.) Children's Understanding of Mathematics, 11–16. Lontoo: John Murray, 102–119.

Kupari, P. & Törnroos, J. 2004. Matematiikan osaaminen peruskoulussa kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 138–169.

Lannin, J. K., Townsend, B. E., Armer, N., Green, S. & Schneider, J. 2008. Developing Meaning for Algebraic Symbols: Possibilities & Pitfalls. Mathematics Teaching in the Middle School 13 (8), 478–483.

Leino, J. 1993. Konstruktivismin suuntauksia. Teoksessa L. Haapasalo, & P. Kupari (toim.) Konstruktivismi matematiikan opetuksen ja opetussuunnitelman kehittämisessä. Jyväskylän yliopisto. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 6, 1–7.

Leino, J. 2004. Konstruktivismi matematiikan opetuksessa. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 20–31.

Linchevski, L. 1995. Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. Journal of Mathematical Behavior 14, 113–120.

Linchevski, L. & Herscovics, N. 1996. Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations. Educational Studies in Mathematics 30, 39–65.

Malisani, E. & Spagnolo, F. 2009. From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". Educational Studies in Mathematics 71 (1), 19–41.

Matteson, S. M. 2010. Problems with *n*th-Term Problems. Mathematics teaching in the middle school 16 (2), 88–94.

MacGregor, M. & Stacey, K. 1997. Students' understanding of algebraic notation: 11–15. Educational Studies in Mathematics 33, 1–19.

MacGregor, M. & Stacey, K. 1999. A flying start to algebra. Teaching Children Mathematics 6 (2), 78–85.

McNeil, N. M. & Alibali, M. W. 2005. Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. Child Development 76 (4), 883–899.

McNeil, N. M., Weinberg, A., Hattikudur, S., Stephens, A. C., Asquith, P., Knuth, E. J. & Alibali, M. W. 2010. A is for *Apple*: Mnemonic Symbols Hinder the Interpretation of Algebraic Expressions. Journal of Educational Psychology 102 (3), 625–634.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. 2004. Käsitteellisen muutoksen näkökulma matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 301–319.

Opetushallitus. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.

Pitts Bannister, V. R. & Wilkins, J. L. M. 2007/2008. "I Can't Write All the Way to 100": Recognizing Students' Emerging Algebraic Strategies. Mathematics Teaching in the Middle School 13 (5), 278–282.

Rauste-von Wright, M., von Wright, J. & Soini, T. 2003. Oppiminen ja koulutus. Juva: WSOY.

Räsänen, P. 2004. RMAT – laskutaidon testi 9–12-vuotiaille. Käsikirja. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B. & Earnest, D. 2003. Algebra in Elementary School. International Group for the Psychology of Mathematics Education. Paper presented at the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference (Honolulu, HI, Jul 13–18, 2003), Vol. 4, 127–134.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M. & Jones, W. 1998. Solving Algebra Problems before Algebra Instruction. Tufts University, TERC & Harvard University.

Slavit, D. 1998/1999. The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. Educational Studies in Mathematics 37 (3), 251–274.

Stacey, K. & MacGregor, M. 1997. Ideas about symbolism that students bring to algebra. The Mathematics Teacher 90 (2), 110–113.

Stephens, A. C. 2005. Developing Students' Understanding of Variable. Mathematics Teaching in the Middle School 11 (2), 96–100.

Swafford, J. O. & Langrall, C. W. 2000. Grade 6 Students' Preinstructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations. Journal for Research in Mathematics Education 31 (1), 89–112.

Tent, M. W. 2006. Understanding the Properties of Arithmetic: A Prerequisite for Success in Algebra. Mathematics Teaching in the Middle School 12 (1), 22–25.

Ursini, S. 2001. General methods: a way of entering the world of algebra. Teoksessa R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (toim.) Perspectives on School Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 209–229.

Warren, E. & Cooper, T. J. 2005. Young Children's Ability to Use the Balance Strategy to Solve for Unknowns. Mathematics Education Research Journal 17 (1), 58–72.

Yrjönsuuri, R. 2004. Matemaattisen ajattelun opettaminen ja oppiminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 111–122.

Liitteet

Liite 1: Lomake 1

NIMI:
Olen tyttö / poika (ympyröi).

Lue tehtävät huolellisesti. Mieti rauhassa. Näissä tehtävissä merkitseminen matematiikan kielelle on tärkeää. Kuvittele, että ratkaiset tehtäviä matemaatikolle, joka ei ymmärrä suomen kieltä. Pyri siis kirjoittamaan tehtävät sellaisiksi laskuiksi, jotka matemaatikko ymmärtäisi. Jos tämä tuntuu hankalalta, kerro kuitenkin kuvan tai kirjoituksen avulla, mitä ajattelet tehtävässä.

Jos tarvitset lisää tilaa, käytä paperin toista puolta. Muista merkitä tällöin, mistä tehtävästä on kyse!

Tee tehtävät järjestyksessä. Jos jokin tehtävä tuntuu hankalalta, voit siirtyä seuraavaan. Tee niin monta tehtävää kuin osaat.

---

1. Miten merkitsisit matematiikan kielellä Jaakon pituuden, kun Jaakko on 10 cm pidempi kuin Kalle?

2. Miten merkitsisit matematiikan kielellä Siljan karkkien määrän, kun hänellä on pussillinen karkkia ja hän syö karkeistaan viisi?

3.
Merkitse tuntematonta lukua haluamallasi tavalla. ______________________

Merkitse: Lukuun lisätään 7. ______________________

Saatu tulos kerrotaan kahdella. ______________________

Saadusta tuloksesta vähennetään 4. ______________________

Saadusta tuloksesta vähennetään alkuperäinen luku. ______________________

Kiitos vastauksistasi!

Liite 2: Lomake 2

NIMI:

Lue tehtävät huolellisesti. Mieti rauhassa. Piirrä kuva tai kirjoita ajatuksesi paperille, vaikka et osaisikaan antaa vastausta tehtävään. Oikeaa vastausta tärkeämpää on se, kuinka ajattelet tehtävissä.

Jos tarvitset lisää tilaa, käytä paperin toista puolta. Muista merkitä tällöin, mistä tehtävästä on kyse!

Tee tehtävät järjestyksessä. Jos jokin tehtävä tuntuu hankalalta, voit siirtyä seuraavaan. Tee niin monta tehtävää kuin osaat.

---

1. Mitä mielestäsi x voisi tarkoittaa tehtävässä $x + 6 = 11$? Mitä tehtävässä pitää tehdä?

2. Mitä mielestäsi $10 \cdot y$ voisi tarkoittaa? Perustele vastauksesi.

3. Mitä mielestäsi 8a voisi tarkoittaa? Perustele vastauksesi.

4. Mitä mielestäsi $2 \cdot a + 3 \cdot b$ voisi tarkoittaa? Mitä a voisi tarkoittaa? Entä b? Perustele vastauksesi.

Käännä!
(jatkuu)

(jatkuu)

5. Selvitä d seuraavissa tehtävissä.

5 + d = 12 **d =**	**2 = 1 + d** **d =**	**17 = d – 2** **d =**	**12 = d · 3** **d =**
d + d = 4 **d =**	**d – 3 = 5** **d =**	**5 = 9 – d** **d =**	**d / 2 = 8** **d =**
10 = d + 5 **d =**	**9 – d = 6** **d =**	**2 · d = 16** **d =**	**2 · d = 4 + d** **d =**

6. Jos 2·x + 3·y = 12, mitä osaat sanoa x:stä? Entä y:stä? Kerro kaikki mitä osaat sanoa! Perustele vastauksesi.

7. Jos c + d < 10 ja c < d, mitä osaat sanoa d:stä? Kerro kaikki mitä siitä voit sanoa! Perustele vastauksesi!

Kiitos vastauksistasi!

Liite 3: Haastattelurunko

Aluksi:

Teit viime viikolla kolme tehtäväsarjaa, ja nyt haluan saada hieman lisätietoa ratkaisuistasi.
Haastattelun tavoitteena on saada tarkempaa tietoa sinun ajattelustasi, joten koeta kertoa siitä mahdollisimman paljon, vaikka et olisikaan aivan varma. Äänen ajattelu on nyt sallittua, ja virheitä ei tarvitse pelätä.
Tulen esittämään sinulle kysymyksiä, joiden tarkoituksena on saada sinut ajattelemaan ongelmaa vielä pidemmälle ja ehkä uudesta näkökulmasta.
Haastattelua ei tarvitse jännittää.
Vastauksia ei kerrota ulkopuolisille eivätkä ne vaikuta arviointiin.
Haastattelu nauhoitetaan, jotta voin keskittyä kuuntelemiseen kirjoittamisen sijaan.

Lomake 1:

Tässä on tehtäväsarja, jonka teit viime viikolla. Katso tehtäviä ja omia ratkaisujasi rauhassa, ja palauta mieleesi, mitä olet ajatellut. Kerro minulle, kun olet valmis.

Kerro ensin omin sanoin, mitä ajattelit tätä tehtävää tehdessäsi?
Kuinka päädyit tähän tulokseen?
Ajattelitko muita vaihtoehtoja?

Sijoitustilanne:
Olet merkinnyt Jaakon pituudeksi 150 cm. Miksi päädyit tähän?
Sopisiko jokin muu vaihtoehto myös?
Miten merkitsisit laskun, jos Kallen pituus tiedettäisiin?
Jos Kallen pituus olisi 140 cm, miten merkitsisit Jaakon pituuden?
Nyt Kallen pituutta ei kuitenkaan tiedetä. Osaisitko kuitenkin merkitä laskun jotenkin?
Voisiko Kallen pituutta merkitä jotenkin? Voit itse keksiä sopivan tavan.
Voisiko Kallen pituutta merkitä esimerkiksi jollakin kuviolla?
Osaatko vielä viimeistellä vastausta niin, että matemaatikko varmasti ymmärtäisi sen?

Objektitilanne:
Osaatko vielä hioa vastausta niin, että matemaatikko varmasti ymmärtäisi sen?
Matematiikassa olet saattanut kohdata tällaisen tilanteen. Oletko nähnyt, että matematiikassa käytettäisiin kirjaimia?
Voisiko sitä merkitä kirjaimella?

Lomake 2:

Tässä on toinen tehtäväsarja, jonka olet tehnyt viime viikolla. Katso tehtäviä ja omia ratkaisujasi rauhassa, ja palauta mieleesi, mitä olet ajatellut. Kerro minulle, kun olet valmis.

Kerro ensin omin sanoin, mitä ajattelit tätä tehtävää tehdessäsi?
Kuinka päädyit tähän tulokseen?
Ajattelitko muita vaihtoehtoja?

(jatkuu)

(jatkuu)

Tuntematon arvona:
Voisiko x tarkoittaa jotakin muuta?
Osaatko antaa esimerkin?
Entä vielä?
Osaisitko nyt sanoa, kuinka monta erilaista vaihtoehtoa voi olla?

Objekti:
Voisiko x tarkoittaa jotakin muuta? Mitä?
Voiko x olla muu kuin jokin sana?

Jokin tuntematon luku:
Mikä x voi olla?
Käykö x:n paikalle mikä tahansa luku?
Jos x on kolme, mitä on y?
Osaatko antaa lisää esimerkkejä?
Osaatko nyt sanoa jotakin tarkempaa x:stä ja y:stä?
(Esimerkiksi tehtävässä 4 toinen muuttuja riippuu toisesta)