Merja Vihtilä

# Sanallisten tehtävien esiinmarssi

## Lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävät vuosina 1970–2009

Kasvatustieteen
pro gradu -tutkielma
Kevätlukukausi 2011
Kasvatustieteiden laitos
Jyväskylän yliopisto

# TIIVISTELMÄ

Vihtilä, Merja. SANALLISTEN TEHTÄVIEN ESIINMARSSI. Lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävät vuosina 1970–2009.
Kasvatustieteen pro gradu -tutkielma. Jyväskylän yliopiston kasvatustieteen laitos, 2011. 72 sivua.

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, millaisia ovat lukion lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävät. Ylioppilaskoetehtävät perustuvat lukion opetussuunnitelmaan, johon osaltaan vaikuttaa käsitys matematiikasta tieteenä ja koulumatematiikasta opetettavana sisältönä.

Lukion lyhyen matematiikan opetussuunnitelmaa on kehitetty 1980-luvulta alkaen. Merkittävin muutos opetussuunnitelmaan tehtiin 1990-luvun puolivälissä karsimalla opetuksen sisältöä ja lisäämällä soveltavaa ainesta. Samalla ylioppilastutkinnon rakennetta muutettiin siten, että tutkinnon aineet voi hajauttaa kolmeen peräkkäiseen tutkintokertaan. Lyhyen matematiikan opetussuunnitelman painottuminen sovelluksiin lisäsi arkielämään liittyvien tehtävien merkitystä opetuksessa. Sanallisten tehtävien ratkaisemisessa ovat matematiikan taitojen lisäksi keskeisellä sijalla kielelliset taidot.

Tutkimuksen aineistona ovat olleet vuosien 1970–2009 lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävät. Tehtävät on sisällönanalyysin menetelmällä jaettu ryhmiin sisällön ja tehtävissä esitettyjen kysymysten perusteella. Eri ryhmien esiintymistä on verrattu opetussuunnitelmassa tapahtuneisiin muutoksiin. Tehtävissä esitettyjen kysymysten perusteella on selvitetty, millainen matematiikkakäsitys tehtävien taustalla on.

Sanalliset tehtävät eri aihealueilta olivat suhteellisen harvinaisia 1980-luvun puoliväliin saakka, mutta 1990-luvun alusta lähtien ne ovat olleet tavallisin tehtävätyyppi.

Asiasanat: Sanalliset tehtävät, matematiikan kieli, ylioppilaskoe, matematiikan opetus, lukio, opetussuunnitelma.

# SISÄLTÖ

# 1 JOHDANTO

Matematiikan opetuksen tutkimus on perinteisesti keskittynyt selvittämään matematiikan oppimista ja oppimissaavutuksia. Yksilön tarkastelu ja psykologian näkökulma on muokannut matematiikan opetukseen liittyvää tutkimusta. Vaikuttavana tekijänä tutkimuksen suuntautumiseen ovat olleet myös näkemykset matematiikasta puhtaana, erillisenä oppirakennelmana, joka on sosiaalisen kentän yläpuolella ja siten vapaata arvoista ja kulttuurista. (Chassapis 2002.) Viime vuosina matematiikan opetuksen tutkimuksessa on entistä enemmän kiinnitetty huomiota sosiaaliseen ja kielitieteelliseen kontekstiin. Kielen merkitys opetuksen ja oppimisen tärkeimpänä välineenä on tunnustettu. (Morgan 2006, 219.) Tässä tutkimuksessa koulumatematiikkaa lähestytään sekä sosiologian, kriittisen pedagogiikan että kielen kautta.

Tässä työssä tarkastelen ensin erilaisia filosofisia näkemyksiä matematiikasta. Nämä näkemykset vaikuttavat siihen, miten ja millaista matematiikkaa koulussa opetetaan. Tarkastelun kohteena ovat myös matematiikan opetuksen sisältämät arvot ja kriittinen pedagogiikka matematiikan opetuksessa. Matematiikan kieli on yksi tämän tutkimuksen keskeisistä lähtökohdista. Lisäksi taustana tutkimukselle käsittelen suomalaisen lukion matematiikan opetuksen historiaa ja opetussuunnitelmia vuosilta 1985, 1994 ja 2003.

Tutkimuksessa selvitetään, *millaisia lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävät ovat luonteeltaan* ja *miten ylioppilaskoetehtävät ovat muuttuneet vuosien aikana*. Tutkimuksen aineistona ovat lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävät vuosilta 1970–2009.

# 2 MATEMATIIKAN FILOSOFIAA

Matematiikan filosofian tutkimus on 1900-luvulla keskittynyt matematiikan perusteiden tutkimukseen, mikä on ollut itse matematiikan tutkimuksen kannalta merkityksellistä. Tällöin ovat jääneet kuitenkin vähemmälle huomiolle laajemmat kysymykset, kuten matematiikan rooli yhteiskunnassa ja matematiikan opetuksen tutkimus filosofiselta kannalta. Monet kysymykset ovat kiinnostavia sekä matematiikan filosofian että matematiikan opetuksen kannalta. Esimerkkejä tällaisista kysymyksistä ovat: ”miksi abstrakti matematiikka on niin keskeisessä asemassa tieteissä?” ja ”miksi matematiikka on niin keskeisellä tilalla opetussuunnitelmassa kaikilla tasoilla ympäri maailman?” (Christensen 2008, 1–2.)

Seuraavaksi esittelen kaksi erilaista filosofista näkemystä matematiikan luonteesta.

## 2.1 Platonin käsitys matematiikasta

Platonin (427–347 eKr.) käsityksen mukaan matemaattinen todellisuus on jo olemassa ja matemaattiset teoriat vain paljastavat olemassa olevan totuuden. Matemaattiset objektit eivät ole samalla tavalla empiirisesti tutkittavissa kuin fysiikan tai biologian tutkimuskohteet, koska ne eivät ole aistiemme havaittavissa. Ne ovat olemassa ajan ja avaruuden ulkopuolella, mutta niitä voidaan tutkia päättelemällä. Ihmisen päättelykyvyn avulla voidaan etsiä totuuksia matematiikan maailmasta. Matemaattiset totuudet ovat ikuisia ja välttämättömiä, koska matemaattiset objektit ovat muuttumattomia. (Christensen 2008, 3–4.)

Platonin koulukunnan mukaan matematiikka oli yhtenäinen kokoelma totuuksia, joka voitiin esittää järjestettynä kokonaisuutena. Hieman Platonia myöhemmin eläneen Eukleideen teos *Alkeet* sisältää geometriasta yhtenäisen kokonaisesityksen. Siinä viiden aksiooman muodostamalle perustalle rakennetaan pitkä ketju lauseita ja todistuksia. Lauseiden todistamiseen käytetään vain jo aiemmin todistettuja lauseita, jotka kaikki perustuvat alussa esitettyihin aksioomiin. Eukleideen tapa esittää matematiikkaa on ollut hyvin vallitseva vuosisatoja. Vaikka se alun perin liittyi pelkästään geometriaan, niin se on vaikuttanut voimakkaasti siihen, kuinka matemaattista tietoa hankitaan ja esitetään vielä nykyäänkin. (Christensen 2008, 5.) Eukleideen *Alkeet* vaikutti pitkälle 1900-luvulle myös matematiikan kouluopetukseen ympäri maailman. Suomessakin keskikoulun geometrian opetus perustui vielä 1960-luvulla *Alkeisiin*.

Platonistisen käsityksen mukaan maailmankaikkeuden rakennelma voidaan saada selville matematiikan avulla. Esimerkiksi Galileo Galilein mukaan maailmankaikkeus on kuin kirja, joka on meidän edessämme ja jonka lukemiseen me tarvitsemme matematiikkaa. Galilein mielestä matematiikka ei ollut vain apukeino maailman ymmärtämiseksi, vaan pikemminkin maailma oli matematiikkaa. (Christensen 2008, 6.)

## 2.2 Wittgenstein ja matematiikka

Ludwig Wittgensteinin (1889–1951) näkemys matematiikasta on puolestaan hyvin sosiaalinen ja ihmiskeskeinen. Wittgenstein teos *Huomautuksia matematiikan perusteista* sisältää nimensä mukaisesti toisistaan irrallisia huomautuksia, joista ei välttämättä muodostu selkeää kokonaisuutta. Teos alkaa huomiolla: ”Ihmisiä on harjoitettu niin, että he kaikki tekevät käskystä ’+ 3’ samassa vaiheessa saman siirtymän” (Wittgenstein 1985, 17). Matematiikka on siis hänen käsityksensä mukaan harjoituksen tulosta.

Wittgensteinille matematiikka on ryhmä kielipelejä, joilla on yhteisiä ominaisuuksia ja joihin liittyy erilaisia laskutapoja. Matemaattisen tiedon synty ja kasvu kumpuavat vapaudesta tuottaa uusia matemaattisia rakenteita. Nämä matemaattiset rakenteet ovat esitysmuotoja, joilla voidaan kuvata maailmaa. (Christensen 2008, 17.)

Wittgenstein hylkää Platonin ajatuksen matematiikasta jonain jo ennestään olemassa olevana. ”Matemaatikko on keksijä, ei mikään löytäjä” (Wittgenstein 1985, 80 (I-168)). Hänelle matematiikka on alati laajeneva verkosto, joka laajenee mihin suuntaan tahansa, joko käytännön tarpeista, esteettisistä tarpeista tai jostain muusta syystä (Wittgenstein 1985, 80).

Platonistille matemaattiset objektit ja niiden väliset suhteet ovat olemassa ihmisen toiminnasta riippumatta. Wittgensteinille sen sijaan laskutavat ja tekniikat ovat ihmisen toimintaa ja siten riippuvaisia matematiikan opetuksesta. (Christensen 2008, 16–17.)

## 2.3 Absolutistinen ja fallibilistinen käsitys matematiikasta

Tässä kappaleessa määritellään, mitä tarkoitetaan absolutistisella ja fallibilistisella matematiikkanäkemyksellä. Matematiikkanäkemys vaikuttaa merkittävästi siihen, millainen on oppiaineen opetussuunnitelma ja kuinka oppiainetta opetetaan.

Absolutistisen näkemyksen mukaan matemaattinen tieto on ajasta riippumatonta, yli-inhimillistä sekä sosiaalisen ja historiallisen kehityksen koskemattomissa. Matemaattinen tieto on puhdasta, abstraktia ja täysin loogista. Tämän johdosta se pitää aina paikkansa ja on arvoista ja kulttuurista riippumatonta. Matematiikka vaikuttaa kylmältä, kovalta ja elämälle vieraalta. (Ernest 2001, 278–279.) Lisäksi rationaalisen päättelyn korostaminen tekee matematiikasta miehisen alueen (Paechter 2001, 53).

Fallibilistisen näkemys korostaa matematiikan käyttämistä ja inhimillisyyttä. Tämä näkemys ei pidä kaikkea matemaattista tietoa suhteellisena, vääränä tai epäiltävänä, mutta nostaa esille tiedon ajan mukana kehittyvän luonteen. Kokonaan uusia teorioita kehitetään, entiset totuudet määritellään ja muotoillaan uudelleen. Vaikka matemaattiset käsitteet määritellään tarkasti ja lauseille esitetään aukottomat todistukset, ei matematiikka voi koskaan saavuttaa lopullista, täydellistä muotoa. Fallibilistisen näkemyksen mukaan matematiikka koostuu erilaisista, toisistaan osittain erillään esiintyvistä käytännöistä. Näitä ovat esimerkiksi koulumatematiikka, matematiikan tutkijoiden matematiikka ja etnomatematiikka. Etnomatematiikalla tarkoitetaan niitä epämuodollisia matematiikan käyttötapoja, jotka syntyvät ihmisten kulttuurisissa toiminnoissa. Näiden eri matematiikan muotojen välillä olevat yhteydet ovat monimuotoisia. Ne eivät kulje pelkästään ylhäältä akateemisesta matematiikasta alaspäin, vaan suunta voi olla ihan toinen. (Ernest 2001, 279–280.) Kun matematiikka tunnustetaan kulttuurin tuotteeksi, niin huomataan, että kaikki kulttuurit eivät välttämättä tuota samaa matemaattista tietoa. Aivan kuin kielet, uskonto tai tavat ovat kehittyneet erilaisiksi eri puolilla maailmaa, on matematiikkakin erilaista. (Bishop 1991, 200.)

Monet ammattimatemaatikot ovat matematiikkakäsitykseltään absolutisteja, mikä ei siis automaattisesti johda negatiivisiin asenteisiin matematiikkaa kohtaan. Absolutistinen käsitys matematiikasta on hyvin lähellä edellä esitettyä Platonin näkemystä. Wittgenstein puolestaan edustaa fallibilistista näkemystä matematiikasta. Toinen fallibilistisen näkemyksen edustaja on Imre Lakatos, joka kirjassaan *Proofs and Refutations* (1976) kertoo tarinan monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärää koskevan tuloksen todistamisesta. Tarinassa vuoroin tarkennetaan monitahokkaan määritelmää, vuoroin tarkennetaan todistusta, jotta tulos saadaan lopulta todistettua.

## 2.4 Arvot matematiikan opetuksessa

Matematiikan opetuksessa arvot ovat niitä affektiivisia tekijöitä, jotka välittyvät oppiaineen nimeltä matematiikka kautta. Arvot ovat pysyvämpiä kuin proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto, joka käytön puutteessa unohtuu. (Bishop 2001, 94.) Koska monet matematiikan opettamisen kanssa tekemisissä olevat tahot pitävät matematiikkaa arvoista vapaana, niin useimmiten matematiikan oppitunneilla ei arvoja käsitellä tarkoituksellisesti. Oppikirjoissa harvoin pohditaan matematiikkaa oppiaineena eikä kokeissa kysytä kysymyksiä itse matematiikasta. Matematiikka on koulussa edelleen useimmiten suorituslaji, joka korostaa hankittuja teknisluonteisia taitoja. Arvot, jotka oppilaalle koulussa välittyvät matematiikan opetuksen kautta, jäävät piiloon ja tuntematta, koska opetus ei tuo niitä esille eikä kyseenalaista niitä. (Bishop 1991, 196.)

Frankensteinin (1989) mukaan mikään tieto tai opetus ei ole neutraalia. Hän sisällyttää niinkin yksinkertaiseen matematiikan sovellustehtävään kuin ruokakaupan laskun loppusumman laskemiseen ei-neutraalin kätketyn viestin siitä, että on luonnollista ostaa ruokaa kaupasta. Hänen mukaansa myös perinteinen matematiikan opetus, jossa ei ole mitään reaalimaailman aineistoa, sisältää kätketyn viestin siitä, että matematiikka on erillinen osa, joka ei voi auttaa ihmisiä ymmärtämään tai hallitsemaan maailmaa. (Frankenstein 1989, 5.)

Matematiikan opetuksen välittämät arvot jäävät usein piiloon. Onko tällaisilla arvoilla sitten merkitystä? Ja mitä nämä piiloon jäävät arvot ovat? Seuraavassa kappaleessa esitetään yksi tapa luokitella länsimaiseen matematiikan opetukseen liittyvät arvot.

### 2.4.1 Bishopin arvoklusterit

Bishopin (1991, 201–203) mukaan länsimaisen matematiikan ja matematiikan opetuksen välittämät keskeiset arvot ovat rationaalisuus, objektismi, kontrolli, edistys, avoimuus ja mysteerisyys.

Rationaalisuus on kaikkein eniten länsimaista matematiikkaa kuvaava arvo. Rationaalisuus vaatii abstraktiota, selittämistä ja väitteiden perustelemista logiikan periaatteiden mukaisesti. Jopa arkikielenkäytössä argumentointi tapahtuu logiikan sääntöjen mukaan. Bishopin mukaan ei pidä unohtaa ”kylmän” logiikan esteettistä viehätystä. Nykyajan sekaannuksen ja konfliktien keskellä loogisten argumenttien puhtaus, tarkkuus ja vääjäämättömyys ovat viehättäviä. (Mts. 201.)

Bishopin toisen arvoklusterin muodostaa *objektismi*. Käsitteet nimetään ja määritellään eli niitä käsitellään objekteina. Näiden objektien välisiä suhteita koskevat tulokset perustellaan rationaalisesti. Länsimaisen matemaattisen tiedon tehokkuus perustuu todellisuutta kuvaavien abstraktien käsitteiden määrittelemiseen. Symbolien avulla voidaan abstrakteja asioita käsitellä konkreettisempien objektien tavoin. (Mts. 202.)

Kolmatta arvoklusteria Bishop kuvaa sanalla *kontrolli*. Länsimainen matematiikka tarjoaa paljon varmuutta ja kontrollia. Ilmiöt ovat hallittavissa, kun niitä voidaan kuvailla matemaattisesti. Matematiikassa arvostetaan ”oikeita” ratkaisuja, mikä näkyy meidän länsimaisen yhteiskuntamme arvoissa. Mitä enemmän näemme matemaattiset ideat objektiivisina tosiasioina, sääntöjen noudattamisena ja lakeina, sitä enemmän arvostamme kontrollia. (Mts. 203.)

Kontrollia täydentävä arvoklusteri on *edistys*. Siinä missä matemaattinen kontrolli arvostaa varmuutta, stabiiliutta ja ennustettavuutta, matemaattista edistystä kuvaavat muutos ja vaihtoehdot. Monia matemaattisia ideoita voidaan yleistää koskemaan ennestään tuntemattomia tilanteita, jolloin saadaan uusia alueita kontrollin piiriin. Vastaesimerkin etsiminen, ääritilanteiden miettiminen ja loogisten aukkojen etsiminen johtaa uusiin ongelmatilanteisiin, jotka pitää pystyä ratkaisemaan. Uusien vaihtoehtojen tarkastelu on länsimaisen matematiikan edistystä ylläpitävä voima. (Mts. 203.)

Länsimaisen matemaattisen tiedon ominaispiirre on *avoimuus*. Tulokset ovat kaikkien tarkistettavissa, mikäli hallitsee riittävästi matematiikan teoriaa ymmärtääkseen kyseisen väittämän ja sen todistuksen. Länsimainen matemaattinen tieto edustaa sellaista, mitä pidetään totena. Matemaattinen tieto ei ole mielipide, vaan se on toteen näytettävissä oleva asia. (Mts. 203.)

Avoimuuden arvoa täydentävä pari on *mysteerisyyden* arvo. Mysteerisyys perustuu länsimaisen matematiikan korkeaan abstraktiotasoon. Kouluopetus voi jäädä mystisen symbolien pyörityksen tasolle ja kontekstista irrotettu tieto voi tulla tarkoituksettomaksi. Matemaattiset ideat muodostavat tietysti oman kontekstinsa, jonka sisällä tieto voi olla merkityksellinen. (Mts. 204.)

### 2.4.2 Erotettu ja yhdistetty päättely

Matematiikan opetukseen liittyviä arvoja voi tarkastella myös dikotomisella asteikolla erotetut/yhdistetyt (separated/connected) arvoasemat. Tämä Paul Ernestin (2008) esittämä jako perustuu Gilliganin (1982) teoriaan, joka koskee länsimaisten arvojen jakautumista stereotyyppisesti maskuliinisiin ja feminiinisiin arvoihin. Maskuliinisia ”erotettuja” arvoja ovat säännöt, abstraktio, esineellistäminen, persoonattomuus, tunteettomuus, objektiivinen järki ja analysointi. Arvoasema on luonteeltaan atomistinen ja asiakeskeinen. Feminiiniset ”yhdistetyt” arvot perustuvat suhteisiin, yhteyksiin, empatiaan, hoivaan, tunteisiin ja intuitioon. Arvoasema on luonteeltaan holistinen ja ihmiskeskeinen. Tämä jako voidaan helposti yhdistää edellä esitettyihin absolutistisiin ja fallibilistisiin näkemyksiin matematiikasta. (Ernest 2008.) Myös Frankenstein (1989, 54) ja Buerk (1985, 63) käyttävät samaa jakoa kahden tyyppisen päättelyn luonnehtimiseen. Taulukossa 1 on Buerkin esittämä vertailu erotetun ja yhdistetyn päättelyn eroista.

Eroa erotetun ja yhdistetyn päättelyn käytöstä matematiikan opetuksessa kuvaa seuraava lainaus:

> ”Ithaca Collegen matematiikan kesäkollokviossa (1983) … kysyin osallistujilta, kuinka nämä edellä esitetyt listat liittyivät matematiikan opettamiseen ja oppimiseen. Heidän yhteinen näkemyksensä oli, että yhdistetyn päättelyn lista kuvasi tapaa, jolla matemaatikot tekevät matematiikkaa. … Ja kuitenkin he olivat yhtä mieltä siitä, että erotetun päättelyn lista vastasi tapaa, jolla matematiikkaa esitettiin luokkahuoneissa, oppikirjoissa ja heidän omissa tieteellisissä kirjoituksissaan. Monille, erityisesti naisille, tämä onneton eroa-

> vaisuus vie elämän matematiikasta ja matematiikan heidän elämästään.” (Buerk 1985, 64.)

Matemaatikot siis käyttävät työskentelyssään monipuolisia strategioita uusien päätelmien tekemisessä, mutta yleisölle jaettavaksi annetaan vain viimeistelty, kiillotettu lopputulos, josta työskentelyprosessia ei voi nähdä (Buerk 1985, 64). Tämä on nähtävissä myös matematiikan oppikirjoissa ja tehtävien malliratkaisuissa.

TAULUKKO 1. Erotettu ja yhdistetty päättely (Buerk 1985, 63).

| EROTETTU PÄÄTTELY | YHDISTETTY PÄÄTTELY |
|---|---|
| menee suoraan ratkaisuun algoritmisella tavalla irtautuen kontekstista | yrittää kokea ongelman, yhdistää sen henkilökohtaiseen maailmaan, selkeyttää kieltä, luoda kontekstin, poistaa epämääräisyyden |
| käyttää abstraktia ja muodollista ajattelua | käyttää kontekstisidonnaista ja narratiivista ajattelua |
| tarkoituksena päästä oikeaan ratkaisuun, jonka jokainen järkevä ihminen voi hyväksyä | tarkoituksena tarkastella jokaisen ratkaisun rajoituksia ja kuvata ongelmia, jotka jäävät jäljelle |
| sääntöjen ja oikeiden proseduurien laillinen käyttö | vastustaa sääntöjä ja halukas tekemään poikkeuksia |
| arviointiperusteet ovat selvät | arviointia vältetään |

Boalerin (1997) mukaan perinteisissä luokkahuonetilanteissa oppilasta palkitaan siitä, kuinka monta oikeaa vastausta hän on saanut, eikä siitä, onko hän ymmärtänyt asian. Tällöin on turha odottaa, että oppilas etsisi vaikeita tai vaativia tilanteita, joihin ei välttämättä löydy oikeaa vastausta. Matematiikan oppitunnillahan oikeat vastaukset ovat tie menestykseen. (Boaler 1997, 117.) Suomalaisen lukion matematiikan opetuksessa arvostetaan oikeita vastauksia, mikä näkyy oppikirjoista. Jokaisen oppikirjan lopussa on lueteltu harjoitustehtävien vastaukset. Lähes jokaiseen tehtävään on annettu vastaus ja melkein aina vastaus on luku. Joissakin kirjoissa on myös tutkimustehtäviä ja avoimia tehtäviä, mutta niihinkin on useimmiten valmiit vastaukset ainakin opettajan materiaalissa.

## 2.5 Kriittinen pedagogiikka matematiikan opetuksessa

Kriittisen matematiikan opetuksen lähtökohtana on matematiikan rooli yhteiskunnan osallisuuteen kasvattamisessa. Kriittinen matematiikan opetus kyseenalaistaa matemaattisen tiedon luonteen, matematiikan opetuksen tarkoituksen sekä opetussuunnitelmat ja luokkahuonekäytännöt. (Chartres, 2008.)

Ole Skovsmosen (2004) mielestä on tärkeää tarkastella matematiikan opetusta yhtenä niistä tekijöistä, joiden mukaan ihmiset jakautuvat niihin, jotka kuuluvat tai eivät kuulu mukaan yhteiskuntaan. Matematiikan osaaminen voi antaa sellaisia mahdollisuuksia, joita ilman jäävät ne, joilla ei ole riittäviä matematiikan taitoja. Koska matematiikan opetuksen sosiopoliittinen rooli sisältää ristiriitoja, niin matematiikan opetus on kriittistä. Matematiikan opetus sinänsä ei palvele esimerkiksi demokratian päämääriä. (Skovsmose 2004, 4.) Restivon (1991, 171) mukaan modernia matematiikkaa voi pitää sosiaalisena ongelmana, koska matematiikka näyttää palvelevan hallitsevan luokan intressejä.

### 2.5.1 Matematiikka nyky-yhteiskunnassa

Nykyinen yhteiskunta on erittäin matematisoitunut, mutta tämä tapahtuu sellaisella tasolla, joka jää monelle näkymättömäksi (Ernest 2000, 3). Matematiikan välttäminen ja matematiikassa huonosti menestyminen voi estää esimerkiksi naisten uramahdollisuuksia (Buerk 1985, 65). Toisaalta Ernest (2000) ottaa asiaan sellaisen kannan, että peruslaskutoimitusten yläpuolelle meneviä matematiikan taitoja tarvitsee nyky-yhteiskunnassa vain pieni vähemmistö. Hänen mukaansa matematiikkaa sekä yliarvostetaan että aliarvostetaan nykyisissä länsimaissa. Ernestin mukaan matematiikan käytännöllinen merkitys on ymmärretty väärin, kun kaikille yritetään opettaa mahdollisimman paljon matematiikkaa. Matemaattinen osaaminen rinnastetaan älykkyyteen ja henkisiin voimavaroihin, joiden perusteella ihmisiä arvioidaan ja valitaan erilaisiin töihin. (Ernest 2000, 7.)

Matematiikan aliarvostaminen liittyy Ernestin mukaan siihen, että matematiikan roolia opetussuunnitelmissa perustellaan oppiaineen hyödyllisyydellä ja välineluonteella. Matematiikka on kuitenkin itsessään arvokas osa inhimillistä kulttuuria, joka tarjoaa älyllisiä haasteita ja monia mielenkiintoisia käsitteitä kuten äärettömyys, kaaos ja sattuma. (Ernest 2000, 7.)

Koulutuksella, opetuksella ja oppimisella on merkitystä *globalisaatiossa ja gettoistumisessa*. Maailman lapsista vain pieni osa (10 %) asuu kehittyneissä maissa, kun taas 16 % ei käy lainkaan koulua. Opetuksen tutkimus kohdistuu suurelta osin kehittyneissä maissa eläviin lapsiin. Matematiikan opetuksen tutkimuksessa lähtökohtana on yleensä hyvin varusteltu matematiikan luokka, jossa on koulutettu opettaja, tietokoneita ja tietoverkko käytössä. Tällaista luokkaa ei löydy kehitysmaista. Kriittinen matematiikan opetus yrittää kyseenalaistaa tällaisen prototyyppisen ajattelun. (Skovsmose 2004, 5-6.)

### 2.5.2 Matematiikka ja edistys

Edistys on yksi Bishopin mukaan matematiikan opetuksen kautta välittyvistä arvoista (Bishop 1991, 203). Skovsmosen (2004) mukaan edistykseen ja modernin oletuksiin liittyy yksi kriittisen matematiikan opetuksen huolenaiheista. *Modernille* luonteenomainen ajatus on, että tieteen suunta on kohti edistystä. Paitsi tiede myös yhteiskunta kehittyy kohti utopiaa. Toinen modernille ominainen piirre on käsitys siitä, mitä on tieto ja kuinka sitä hankitaan. Tieteen ja teknologian valtava kehitys on kuitenkin tuonut mukanaan myös sellaisia asioita, jotka hämärtävät kehityksen ja tiedon käsitteet. Matematiikka on keskellä tätä paradoksia. Kun modernin oletukset eivät enää ole voimassa, on matematiikan opetus uuden haasteen edessä. Matematiikan opettajat eivät voi enää olla matematiikan lähettiläitä, joiden tärkeimpänä tehtävänä on tutustuttaa oppilaat matematiikkaan. Jos näkymätön linkki matematiikan ja sosiopoliittisen kehityksen välillä ei säily, matematiikan opetus joutuu kohtaamaan epävarmuuden siitä, mitä matematiikan avulla voidaan tehdä. (Skovsmose 2004, 7–8.)

### 2.5.3 Matematiikka toiminnassa

Matematiikan avulla voidaan esittää sellaista, jota ei ole vielä olemassa, ja siten esittää teknologisia vaihtoehtoja annettuun tilanteeseen. *Matematiikka toimii* teknologisen mielikuvituksen lähteenä. Matematiikka antaa mahdollisuuden hypoteettiseen päättelyyn kuvitteellisen tilanteen seurausten analysoinnissa. Matematiikka on tärkeä väline yksityiskohtaisten ajattelukokeiden tekemisessä. Matematiikka auttaa oikeuttamaan ja legitimoimaan tiettyjä toimintoja. Tietokonemalleja käytetään poliittisessa päätöksenteossa esimerkiksi talouden, ympäristön ja liikenteen alueella. Tämä herättää kysymyksiä siitä, kuka on mallit rakentanut, mitä asioita mallit ottavat huomioon ja kuka malleja kontrolloi. Jos nämä kysymykset eivät ole riittävän selviä, voivat demokraattiset arvot hämärtyä. Kun vaihtoehto on valittu ja toteutettu, ympäristömme muuttuu. Osana teknologioiden toteuttamista matematiikasta itsestään tulee osa todellisuutta. Suuri määrä rutiinia tulee käyttöön. Esimerkiksi erilaisia internet-pohjaisia varausjärjestelmiä on käytössä. Yksi esimerkki matematiikasta käytössä on oikeuttaminen. Laskelmien avulla voidaan perustella tiettyjä toimintoja tai päätöksiä. Malleihin perustuvassa päätöksenteossa eettinen vastuu jakautuu usealle toimijalle eikä kenelläkään ole kokonaisvastuuta. (Skovsmose 2004, 10–12.)

Skovsmosen (2004) mukaan edellä mainitut matematiikan käytännön sovellukset ja niihin liittyvät ongelmat on syytä ottaa huomioon matematiikan opetuksessa. Matematiikan opetuksen päämääriä ei voi mielekkäästi arvioida erillään niiden sosiaalisesta kontekstista (Ernest 2000, 3).

### 2.5.4 Matematiikka ja resurssien jakautuminen

Matematiikan opetus vaatii *resursseja*, koska nykyisellään tietokoneet ja muut opetusvälineet ovat osa matematiikan opetusta. Epätasainen resurssien jakautuminen voi aiheuttaa eriarvoisuutta matematiikan oppimisessa. Tietyssä muodossa matematiikan oppiminen voi aiheuttaa olemassa olevan ajattelutavan tukahduttamista. Matematiikkaa voi pitää kielenä, joka antaa mahdollisuuksia valtaan, teknologiaan ja työnsaantiin. Diskriminointi tässä suhteessa voi tapahtua missä yhteiskuntaluokassa tahansa. Naisia on nykyisin puhtaan matematiikan opiskelijoina, mutta tietotekniikassa ja muilla matematiikkaan läheisesti liittyvillä aloilla on naisten määrä edelleen hyvin vähäinen. (Skovsmose 2004, 13–14.)

Matematiikan opetuksessa puhutaan usein siitä, että opiskelijat pitäisi jakaa kykyjen mukaan ryhmiin. Tämä voi johtaa elitismiin, jos resursseja jaetaan kykyjen mukaan. Matematiikan, tietotekniikan tai teknologian yliopisto-opiskelussakin on omat ongelmansa. Nämä oppiaineet ovat pieniin erikoisaloihin jakautuneita, mikä johtaa kapean erikoisalan hallintaan. Työelämässä sama erikoistuminen jatkuu, jolloin laajempien kokonaisuuksien hallinta on lähes mahdotonta. Tämä johtaa helposti eettisen vastuun vähenemiseen. (Skovsmose 2004, 15.)

### 2.5.5 Matematiikan lukutaito

Skovsmose käyttää käsitettä ”mathemacy” puhuessaan matematiikan opetuksen keskeisestä sisällöstä. Käsitteen voisi suomentaa matematiikan lukutaidoksi. Tämä käsite tarkoittaa erilaisia asioita eri tilanteissa oleville ihmisille. (Skovsmose 2004, 16.)

Juha Suorannan (2005) mukaan radikaalit kasvattajat puhuvat erilaisista lukutaidoista. Korvaan tässä hänen tekstinsä sanat ”lukutaito”, ”lukea” ja ”lukeminen” sanoilla ”matematiikan taito”, ”laskea” ja laskeminen”.

> ”Matematiikan taidot voidaan luokitella tavoitteiden mukaan kolmella eri tavalla. Akateemisissa ja toiminnallisissa matematiikan taidoissa on keskeisellä sijalla länsimaisen matematiikan kaanonin opiskelu ja matematiikan hyödyllisyys erilaisissa käytännön tehtävissä. Matematiikan taito nähdään ulkoisena ilmiönä, jota voidaan käyttää esineen tavoin. Toinen tapa käsitellä asiaa ovat kognitiiviset ja romanttiset käsitykset matematiikan taidosta. Niissä painottuu matematiikan merkitysten muodostuminen ja matematiikan tuottama mielihyvä. Näiden lisäksi on olemassa kolmas matematiikan taito eli kriittinen matematiikan taito. Kriittinen matematiikan taito pohjautuu toiminnalliselle matematiikan taidolle, mutta sen lähtökohtana on oppijan oma kokemusmaailma. Matematiikan taito ei ole ulkoinen ilmiö, vaan se on tiiviissä yhteydessä ihmisen elämään. Tärkeää on matematiikan liittyminen yhteiskunnan prosesseihin. Paitsi että on osattava laskea, niin laskeminen on nähtävä myös muutoksen välineenä.” (Suoranta 2005, 129–130. muokattu)

Ernestin (2001) mukaan koulumatematiikka useimmiten perustuu absolutistiseen käsitykseen matematiikasta. Tämän takia matematiikkaa opetetaan muista oppiaineista erillisenä rakennelmana, joka koostuu matematiikan oppikirjan tehtävien tekemisestä, algoritmien ja proseduurien toistamisesta ja ratkaisujen laskemisesta. Tämänkaltaiset taidot ovat tärkeitä, mutta kriittisen matematiikan opetuksen näkökulmasta pitäisi päästä vielä pitemmälle. Oppilaiden pitäisi pystyä ajattelemaan matemaattisesti, käyttämään matematiikkaa omassa elämässään ja ymmärtää matematiikan arvo historiassa, kulttuurissa ja nykymaailmassa. (Ernest 2001, 185.)

# 3 LYHYEN MATEMATIIKAN OPETUKSEN HISTORIAA

Matematiikkaa on opetettu aina kaikissa koulumuodoissa ja sitä pidetään yhtenä keskeisimmistä oppiaineista ympäri maailman. Matematiikan asemaa harvoin edes kyseenalaistetaan, ja on vaikea löytää sellaista valtiota, jonka opetussuunnitelmassa matematiikka ei olisi merkittävässä asemassa (Bishop 1991, 195). Useimmissa maissa jakautuminen kykyjen, mielenkiinnon ja päämärän mukaan erilaisiin oppimääriin tapahtuu siirryttäessä *primary shcool* -vaiheesta *secondary school* -vaiheeseen (Travers 1991, 825). Meillä jako tapahtuu siirryttäessä peruskoulusta toisen asteen koulutukseen. Suomen peruskoulussa kaikki oppilaat opiskelevat matematiikkaa saman opetussuunnitelman mukaisesti, mutta suomalaisessa lukiossa matematiikan opetus on jaettu kahteen eritasoiseen oppimäärään. Kansainvälisesti katsottuna Suomessa oppimäärä jakautuu tavoitetasoltaan erilaisiin osiin verraten myöhään.

## 3.1 Klassillisesta lyseosta luokattomaan lukioon

Suomalaisen lukion matematiikan oppimäärien kahtiajaolla on historiallinen tausta. Koululaitos on kehittynyt niin Suomessa kuin muuallakin Euroopassa siten, että alun perin päämääränä oli kasvattaa virkamiehiä valtion tarpeisiin. Ensimmäiset Suomeen perustetut yliopistoon johtavaa opetusta antaneet koulut pohjautuivat klassilliseen sivistykseen, jossa merkittävässä asemassa olivat latinan ja kreikan kielet. 1880-luvulla perustettiin näiden klassillisten lyseoiden rinnalle reaalilyseoita, koska koulutusta haluttiin entistä laajemmalle kansanosalle. Reaalilyseoissa opetettiin enemmän käytännöllisiä aineita, kuten matematiikkaa, luonnontieteitä ja piirustusta. (Kiuasmaa 1982, 25.) Tämän perusteella voisikin sanoa, että nykyinen matematiikan lyhyt oppimäärä on kuulunut perinteiseen yliopistoon johtavaan koulutukseen ja pitempi oppimäärä on tullut rinnalle myöhemmin.

Autonomian ajan ollessa lopuillaan Suomeen muodostettiin koulujärjestelmä, jossa reaalilyseot jakautuivat erillisiin keskikoululuokkiin ja lukioluokkiin, joissa oli reaaliosastot ja klassilliset osastot. Reaaliosasto oli matemaattisesti painottunut ja klassillinen osasto oli lukion kielilinjan edeltäjä. (Kiuasmaa 1982, 61.) Klassilliset lyseot pysyivät tässä vaiheessa vielä jakamattomina kahdeksanluokkaisina oppilaitoksina eli niissä ei ollut erillistä keskikouluun päättyvää opetusta. Klassillisten lyseoiden tehtäväksi nähtiin valmistaa oppilaitaan yliopisto-opintoihin. Tähän katsottiin parhaaksi pohjakoulutukseksi humanistis-klassilliset opinnot, joissa matematiikan tuntimäärät olivat pienemmät kuin linjajakoisen lyseon reaalilinjalla. Tyttölyseon lukukaavassa matematiikan tuntimäärät olivat suuremmat kuin klassillisen lyseon tai linjajakoisen lyseon klassillisella linjalla.  (Kiuasmaa 1982, 68, 75, 630–631). Tyttölyseon linjattomalla lukioasteella oli jopa viidennes kaikista tunneista matematiikkaa (Kiuasmaa 1982, 77). Pelkän tuntimäärän perusteella on kuitenkin hyvin vaikea verrata opetuksen tasoa ja sisältöä.

Suomen itsenäistyminen näkyi yliopistoon valmistavassa koulutuksessa selvimmin siinä, että venäjän kielen opetuksen määrää ja muutakin kielipainotteisuutta vähennettiin selvästi. Tämä koitui matemaattisten aineiden hyväksi ainoastaan linjajakoisten lyseoiden klassillisilla linjoilla. Sielläkin lisäys tuli maantietoon ja luonnonhistoriaan. Tyttölyseoissa matematiikan tunteja suorastaan vähennettiin. (Kiuasmaa 1982, 204–206.)

Seuraavat isommat muutokset tuntijakoihin tehtiin vuonna 1941 annetulla asetuksella. Tällöin lukion linjojen nimet muutettiin kielilinjaksi ja matemaattiseksi linjaksi ja linjajako tuli myös tyttölyseoihin. Ero matemaattisten aineiden tuntimäärissä linjojen välillä kasvoi selvästi, kun matemaattisella linjalla lisättiin fysiikan ja kemian opetusta. Tyttölyseoissa matemaattisten aineiden tuntimäärät jäivät kaikilta osin pienemmiksi kuin muissa lyseoissa. (Kiuasmaa 1982, 326–327.) 1950-luvulla matematiikan tunteja lisättiin yhdellä kaikissa koulumuodoissa, mikä nosti matematiikan suhteellista osuutta enemmän kielilinjoilla. Syynä tähän muutokseen oli ajankohtaan liittyvä voimistunut luonnontieteellis-tekninen ajattelu. Lisäksi matemaattisten aineiden opettajien liitto oli useammankin kerran esittänyt huolestumisensa tuntimäärien pienuudesta verrattuna muihin Euroopan maihin. (Kiuasmaa 1982, 368.)

Peruskouluun siirryttäessä lukio jäi irralliseksi osaksi entistä keskikouluun pohjautunutta järjestelmää. Peruskoulu oli lähempänä entistä kansalaiskoulua kuin keskikoulua, mikä muutti lukioon tulevien valmiuksia. Lukion linjajakoon tuli vuoden 1969 asetuksessa kielilinjan ja matemaattisen linjan lisäksi reaalilinja, jolla oli tarkoitus keskittyä yhteiskunnallisiin ja luonnontieteellisiin aineisiin ilman suurta kielimäärää ja pitkää matematiikkaa. Tämä muutos jäi hyvin lyhytaikaiseksi, sillä vuonna 1975 lukion linjajaosta luovuttiin kokonaan. Valinnan mahdollisuudet lisääntyivät nyt huomattavasti, koska aineyhdistelmät eivät olleet enää linjaan sidottuja. Matematiikan osalta piti valita joko pitkä matematiikka tai lyhyt matematiikka ja maantieto. Peruskoulun alkuaikoihin ns. välineaineissa (kielissä ja matematiikassa) oli yläasteen oppimäärä jaettu eri laajuisiin tasokursseihin. 1980-luvun alussa lukio oli vaativa koulu, ellei peruskoulussa ollut suorittanut välineaineiden laajimpia kursseja. (Kiuasmaa 1982, 464–466.)

Seuraavina vuosina lukion muutostahti oli nopea. Vuonna 1981 kouluhallitus antoi uudet oppimäärät kaikkiin oppiaineisiin kurssimuotoista lukiota varten, ja syksystä 1982 lähtien koko maassa siirryttiin asteittain luokalliseen kurssimuotoiseen lukioon. Samanaikaisesti lukioon siirtyi entistä suurempi osa ikäluokasta, mikä teki oppilasaineksen heterogeenisemmaksi. Vuoden 1984 lukiolakiin lisättiin peruskoulun kanssa yhteisiä tavoitteita, joiden mukaan myös lukion tavoitteena oli elinympäristön ja luonnon suojeleminen, kansalliset arvot ja rauhan edistäminen. Kurssimuotoisuus muutti huomattavasti arviointikäytäntöä, kun jokainen kurssi arvioitiin erikseen ja kaikki kurssit vaikuttivat oppiaineen päättöarvosanaan. Samaan aikaan alkoi opetussuunnitelman laatimisessa iso muutosvaihe. Vuonna 1985 kunnat saivat tehtäväkseen laatia omat opetussuunnitelmat ja sisällyttää niihin omia ratkaisujaan. Lisäksi alettiin kokeilla vuosiluokkiin sitomatonta kurssimuotoista opetusta. (Kaarninen & Kaarninen 2002, 321–322.) Luokattoman lukion ensimmäisessä vaiheessa matematiikan lyhyempää kurssia kutsuttiin yleiseksi oppimääräksi ja pitempää kurssia laajaksi oppimääräksi.

Uudet lukion opetussuunnitelmien perusteet vahvistettiin vuonna 1994. Tämä opetussuunnitelma lisäsi entisestään valinnaisuutta ja kaikki lukiot saattoivat siirtyä luokattomaan opetukseen. (Mts. 322–323.)

## 3.2 Matematiikan ylioppilaskokeen vaiheita

Ylioppilastutkinnon historia katsotaan alkaneeksi vuoden 1852 statuutista. Tätä ennenkin yliopistoon opiskelemaan haluavien oli pitänyt suorittaa yliopiston sisäänpääsykuulustelut, mutta nyt piti kokelaan esittää myös lukion tai vastaavan oppilaitoksen todistus, että hän oli suorittanut koulun loppukuulustelut. Yksityisopettajan johdolla saattoi edelleen suorittaa opinnot, mutta ennen ylioppilastutkintoa oli hankittava päästötodistus koulusta. Lukion asema yliopistoon johtavana kouluna vahvistui. Ylioppilastutkintoon kuului sekä kirjallinen että suullinen osa. Kirjalliset näytteet annettiin äidinkielessä sekä käännöksenä opetuskielestä latinaan tai muuhun vieraaseen kieleen. Muut aineet testattiin suullisissa kuulusteluissa. (Kaarninen & Kaarninen 2002, 62–63.) Vuonna 1858 tulleen määräyksen mukaan kirjalliset kokeet siirrettiin pidettäviksi kouluilla eli ne olivat ns. preliminäärit. Suulliset kuulustelut järjestettiin edelleen yliopistolla. (Kiuasmaa 1982, 30.) Matematiikan koe muuttui kirjalliseksi vuonna 1874. Kokeessa oli kymmenen tehtävää, joista piti suorittaa vähintään kolme. (YTL[1].)

Ylioppilastutkinto oli ennen vuoden 1919 asetusta yliopiston sisäänpääsytutkinto. Vuonna 1921 astui voimaan asetus, jonka mukaan ylioppilastutkinnosta tuli oppikoulujen lukioasteen päättötutkinto. Ylioppilastutkintoon kuului viisi kirjoituskoetta, jotka pidettiin äidinkielessä, toisessa kotimaisessa kielessä, vieraassa kielessä, matematiikassa ja reaalikokeessa. Reaalikoe oli tällöin uusi koemuoto. Matematiikan koe tuli hyväksytyksi, jos kolmea tehtävää kymmenestä oli käsitelty tyydyttävästi. Vuoden 1921 asetuksen mukaan myös ylioppilastutkintoon oleellisena osana kuuluneet suulliset kuulustelut alettiin järjestää kouluilla. Ylioppilastutkinto ei enää taannut varmasti opiskelupaikkaa yliopistossa. (Kiuasmaa 1982, 225–226.)

Sota-ajan poikkeusolosuhteissa järjestettiin vuosina 1944−1946 ns. sotilasylioppilaskirjoituksia, joissa kirjalliset kokeet oli suoritettava vain kolmessa aineessa: äidinkielessä, vieraassa kielessä ja joko matematiikassa tai reaalikokeessa. Matematiikan ja reaalikokeen vaihtoehtoisuus toteutettiin nyt ensimmäistä kertaa. Myöhemmin siitä tuli vakiintunut käytäntö. Vuonna 1947 annetussa asetuksessa vähennettiin ylioppilaskokeen pakollisten kokeiden määrä neljään ja näistä neljästä yksi oli joko matematiikan koe tai reaalikoe. Tämä asetus laajensi huomattavasti ylioppilastutkinnon valinnaisuutta, kun tuli mahdolliseksi suorittaa myös kaksi ylimääräistä koetta.

[1] Lyhennyksellä YTL viittaan Ylioppilastutkintolautakunnan verkkosivuille www.ylioppilastutkinto.fi

(Kiuasmaa 1982, 335–338, 380–381.) Matematiikan merkitys ylioppilaskokeessa heikkeni, kun se ei enää ollut pakollinen aine.

Ylioppilaskokeen valinnaisuus matematiikan ja reaalikokeen välillä herätti kritiikkiä. Tämän takia vuonna 1962 linjaa tiukennettiin siten, että kokeet olivat edelleen vaihtoehtoiset, mutta lukiossa vähintään 15 viikkotunnin matematiikan kurssin suorittaneiden oli suoritettava pitkän matematiikan koe pakollisena ja korkeintaan 8 viikkotunnin matematiikan kurssin opiskelleiden oli suoritettava reaalikoe pakollisena. Vuoden 1947 asetuksessa sallittu valinnaisuus oli helpottanut ylioppilastutkintoa, mutta vuonna 1962 tutkinto tehtiin jälleen vaativammaksi. (Kaarninen & Kaarninen 2002, 269.)

Itsenäisyyden alkuajan ylioppilaskokeissa lukion eri linjojen erilainen matematiikan opetuksen määrä ja laatu otettiin huomioon antamalla erilaiset tehtävät eri linjojen opiskelijoille. Lyhyen matematiikan koe tuli mukaan vuonna 1901 (YTL). Osa tehtävistä oli yhteisiä, osa erilaisia. 1930-luvulla yleensä kolme tehtävistä oli erilaisia. (Kaarninen & Kaarninen 2002, 183–184.) Sota-ajan jälkeen lyhyen ja pitkän matematiikan erilaisten tehtävien määrä kasvoi vähitellen niin, että 1940-luvun lopulla oppimäärillä oli 5−6 eri tehtävää eli ainakin puolet kokeen tehtävistä. Keväällä 1964 lyhyen matematiikan kaikki tehtävät olivat ensimmäisen kerran omia. Tämän jälkeen on enää silloin tällöin ollut yksi yhteinen tehtävä. (Laurén ym. 1966, Kannisto & Metsänkylä 1975.) Ratkaistavien tehtävien määrä on ollut kymmenen. Vuodesta 1963 lähtien tehtävät on arvosteltu pistein 0−6 ja vuodesta 1969 lähtien tehtävät on saanut kirjoittaa puhtaaksi lyijykynällä. Apuvälineinä kokeissa sai käyttää laskutikkua ja logaritmitauluja. Logaritmitaulut eivät saaneet sisältää koulukurssiin sisältyviä kaavoja. (Kaarninen & Kaarninen 2002, 270.)

Koska eri kouluissa käytettiin erilaisia oppimateriaaleja, pidettiin 1970-luvun alussa matematiikan kokeen tehtävien määrää riittämättömänä. Ylioppilastutkintolautakunta ei halunnut lisätä tehtävien määrää, vaan antoi joillekin tehtäville vaihtoehtoisen tehtävän vuodesta 1974 lähtien. Aluksi vaihtoehtoisia tehtäviä oli kaksi tai kolme, mutta niiden määrä lisääntyi, ja vuodesta 1986 lähtien vaihtoehtoisia tehtäviä oli jo viisi. (Kaarninen & Kaarninen 2002, 315.)

Koko ylioppilastutkinto vapautui merkittävästi vuoden 1994 tuntijaon ja opetussuunnitelman muutosten jälkeen. Koska lukio-opinnot luokattomaan lukioon siirtymisen myötä tulivat entistä vapaammiksi, niin myös ylioppilastutkinnon piti vastata tähän haasteeseen. Koska lukion voi nyt käydä 2−4 vuodessa, täytyi ylioppilaskirjoituksetkin voida kirjoittaa omassa tahdissa. Tutkinnon saattoi nyt hajauttaa kolmeen perättäiseen kertaan. Ylioppilastutkinnon pakolliset aineet säilyivät entisellään (äidinkieli, toinen kotimainen kieli, vieras kieli ja matematiikka tai reaali), mutta ylimääräisten kokeiden määrää ei enää rajoitettu. Matematiikassa ja kielissä voitiin järjestää kahden eri tason mukaisia kokeita. Kokelas saattoi valita kokeen tason vapaasti riippumatta opiskelemastaan oppimäärästä, kunhan yksi pakollisista kokeista oli vaativamman tason mukaan suoritettu. (Mts. 335–336.) Matematiikan osalta ylioppilaskirjoitukset vapautuivat nyt täysin. Kenenkään ei ollut enää pakko kirjoittaa matematiikkaa.

Ylioppilaskirjoitukset uudistuivat matematiikan osalta vuonna 2000. Matematiikan kokeeseen tuli nyt 15 tehtävää, joista sai vapaasti valita kymmenen. Tämä lisäsi huomattavasti tehtävien valinnan mahdollisuuksia. (Mts. 347.) Ylioppilastutkinnon rakennetta oli jo 1990-luvulla haluttu muuttaa siten, että ainoa pakollinen koe olisi äidinkielen koe ja muut kolme pakollista koetta valittaisiin aiemmin mainittujen kokeiden joukosta. Tätä tapaa kokeiltiin useissa kouluissa vuosina 1995−2003 (ns. rakennekokeilu). (Mts. 338.) Rakennekokeilun mukainen tutkintorakenne vakinaistettiin keväästä 2005 alkaen. Seuraava todella iso muutos ylioppilastutkintoon oli ainereaalikokeen tulo keväällä 2006. Yhden reaalikokeen tilalle tuli mahdollisuus kirjoittaa jopa kuusi erillistä koetta eri reaaliaineissa. Viimeinen muutos matematiikan ylioppilaskokeeseen tehtiin keväällä 2007, kun pitkän matematiikan kokeeseen tuli kaksi muita tehtäviä vaativampaa tehtävää, jotka arvostellaan pistein 0−9. Tehtävien kokonaismäärä (15) ei muuttunut eikä näitä niin sanottuja tähtitehtäviä ole lyhyen matematiikan kokeessa. (YTL.)

## 3.3 Tilastotietoja ylioppilaskokeista

Tutkintorakenteen muutos ja ainereaali ovat vaikuttaneet eri aineiden kirjoittamiseen. Aikaisempaan verrattuna lyhyen matematiikan kirjoittaminen pakollisena on lisääntynyt selvästi. Vanhan tutkintorakenteen viimeisenä keväänä 2004 lyhyen matematiikan kokeen valitsi pakolliseksi 46 % lyhyen matematiikan kirjoittajista. Sen jälkeen pakollisen kokeen suosio on koko ajan kasvanut ja keväällä 2008 jo yli 80 % lyhyen matematiikan kirjoittajista suoritti kokeen pakollisena. Lyhyen matematiikan kirjoittaneista naisista 72 % kirjoitti kokeen pakollisena ja miehistä 90 %. Samankaltainen kehityskulku on ollut myös pitkän matematiikan pakollisena kirjoittamisessa. Keväällä 2004 pitkän matematiikan kirjoitti pakollisena 44 % pitkän matematiikan kokeeseen osallistuneista. Neljä vuotta myöhemmin keväällä 2008 pakollisena kirjoittaneiden osuus oli jo 71 %. Naisten epävarmuus omista matematiikan taidoistaan näkyy siinä, että pitkän matematiikan kirjoittaneista naisista vain 55 % kirjoitti kokeen pakollisena, mutta miehistä 84 %. (Lahtinen 2008, 16–20.) Ylioppilastutkinnon hajauttaminen useampaan tutkintokertaan on lisääntynyt koko 2000-luvun ajan. Kun keväällä 1998 tutkinnon suorittaneista 57 % kirjoitti kaikki kokeet kerralla, niin keväällä 2007 enää vajaat 12 % (Ylioppilastutkinto 2007, 24).

TAULUKKO 2. Ilmoittautumiset matematiikan ylioppilaskokeisiin 1998–2008 . (Ylioppilastutkinto 2007, 13, Ylioppilastutkinto 2008, 15.)

Matematiikka, pitkä oppimäärä

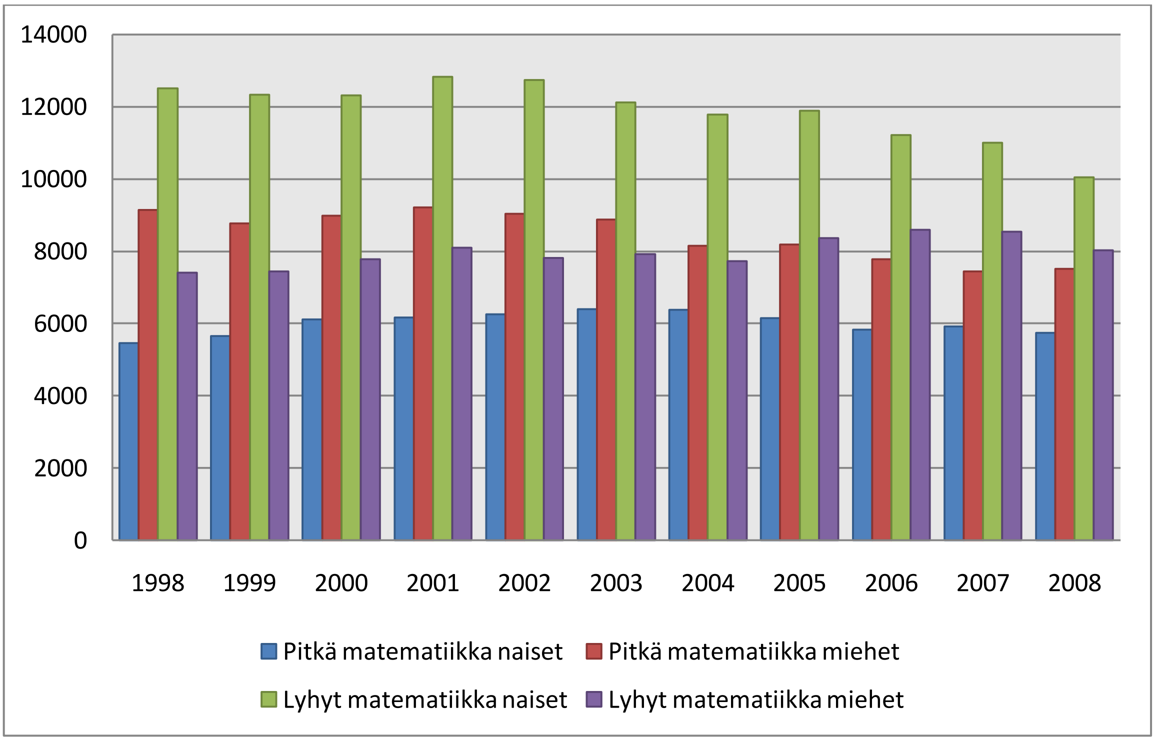
| Vuosi | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kevään tutkinto | 12460 | 12379 | 12822 | 13117 | 13348 | 12919 | 12668 | 12385 | 11727 | 11892 | 11779 |
| Syksyn tutkinto | 2153 | 2033 | 2264 | 2271 | 1942 | 2369 | 1872 | 1955 | 1879 | 1456 | 1483 |
| Yhteensä | 14613 | 14412 | 15086 | 15388 | 15290 | 15288 | 14540 | 14340 | 13606 | 13348 | 13262 |
| Miehiä % | 62,6 | 60,8 | 59,5 | 59,9 | 59,1 | 58,1 | 56,1 | 57,1 | 57,2 | 55,7 | 56,7 |
| Naisia % | 37,4 | 39,2 | 40,5 | 40,1 | 40,9 | 41,9 | 43,9 | 42,9 | 42,8 | 44,3 | 43,3 |

Matematiikka, lyhyt oppimäärä

| Vuosi | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kevään tutkinto | 15167 | 14532 | 14585 | 14724 | 14661 | 14256 | 13441 | 14336 | 13725 | 13901 | 12949 |
| Syksyn tutkinto | 4746 | 5244 | 5501 | 6191 | 5894 | 5776 | 6055 | 5927 | 6075 | 5640 | 5115 |
| Yhteensä | 19913 | 19776 | 20086 | 20915 | 20555 | 20032 | 19496 | 20263 | 19800 | 19541 | 18064 |
| Miehiä % | 37,2 | 37,6 | 38,7 | 38,7 | 38,0 | 39,5 | 39,6 | 41,3 | 43,4 | 43,7 | 44,4 |
| Naisia % | 62,8 | 62,4 | 61,3 | 61,3 | 62,0 | 60,5 | 60,4 | 58,7 | 56,6 | 56,3 | 55,6 |

Taulukossa 2 on matematiikan ylioppilaskokeisiin ilmoittautuneiden lukumäärät ylioppilastutkintolautakunnan julkaiseman tilaston mukaisesti. Lyhyen matematiikan kirjoittajien määrä on pysynyt vuoteen 2007 saakka noin 20 000 kirjoittajassa vuodessa. Vuonna 2008 yhteismäärässä tapahtui selvä lasku (noin 1400 kirjoittajaa). Pitkässä matematiikassa 2000-luvun alussa muutamana vuonna kirjoittajien määrä ylitti 15 000, mutta sen jälkeen määrä on laskenut selvästi alle vuoden 1998 tason. Lukuja tulkitessa on muistettava, että kyseessä ovat ylioppilaskirjoituksiin ilmoittautuneiden määrät. Erityisesti syksyllä kaikki ilmoittautuneet eivät saavu kokeisiin. Lisäksi sama opiskelija voi olla mukana sekä kevään että syksyn luvuissa. Lyhyttä matematiikkaa kirjoitetaan kuitenkin niin paljon syksyllä, että pelkkien kevään lukujen vertaaminen ei anna tilanteesta oikeaa kuvaa.

Kuvio 1 on tehty taulukon 2 tilaston perusteella. Tässä kuviossa näkyy selvästi, että vuodesta 2005 alkaen suurempi joukko miehiä kirjoittaa lyhyen kuin pitkän matematiikan. Jakson alussa tilanne oli toisin päin. Molempien kokeiden osallistujamäärissä sukupuolten väliset erot ovat tasoittuneet.




KUVIO 1. Matematiikan ylioppilaskokeisiin ilmoittautuneet vuosina 1998–2008.

Luma-projekti oli Opetushallituksen organisoima matematiikan ja luonnontieteiden kehittämishanke vuosina 1996–2002. Luma-projekti oli osa Opetusministeriön vuonna 1995 käynnistämää laajempaa valtakunnallista kehittämisohjelmaa, jonka tavoitteena oli nostaa matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen kansainväliselle tasolle. Luma-hankkeen tavoitteet olivat määrällisiä. Niillä pyrittiin lukion osalta paitsi matematiikan ja luonnontieteiden opiskelijoiden määrien kasvattamiseen niin myös naisten osuuden lisäämiseen. Pitkän matematiikan osalta on toteutunut tavoite, että vähintään 40 % matematiikan pitkän kurssin opiskelijoista on naisia (Kaarninen & Kaarninen 2002, 347). Kevään 2008 pitkän matematiikan kokeeseen osallistuneista 44 % oli naisia (Lahtinen 2008, 18). Keväällä 2010 pitkän matematiikan kirjoittajista oli jo 47 % naisia (Lahtinen 2010, 31).

# 4 LYHYEN MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMA

Tässä luvussa kerron niistä muutoksista, joita lukion opetussuunnitelmaan on tullut 1970-luvun jälkeen. Keskityn kuvailemaan lyhyen matematiikan opetussuunnitelman yleisiä tavoitteita. Muutos opetussuunnitelman tiedollisessa sisällössä ei ole tämän tutkimuksen kannalta keskeinen.

Lyhyen matematiikan opetussuunnitelma oli vuoden 1994 opetussuunnitelman muutokseen saakka vain typistetty versio pitkästä matematiikasta. Lyhyen matematiikan kurssia voitiin pitää jopa vaativampana kuin pitkän matematiikan kurssia, koska oppiaines piti omaksua pienemmän tuntimäärän aikana. (Kaarninen & Kaarninen 2002, 269.) Vuoden 1994 opetussuunnitelman mukaan lyhyt matematiikka ei ollut enää pitkän matematiikan osa vaan omaleimainen kokonaisuus.

Ylioppilaskirjoitusten merkittävää asemaa lukio-opetusta ohjaavana tekijänä on arvosteltu jo kauan. Kiuasmaa esittää 1930-luvulta peräisin olevan kritiikin seuraavasti: ”Arvosteltiin – ja pääasiassa näin tekivät opettajat – ylioppilaskirjoitusten lukion työskentelyä häiritsevää piirrettä, sillä ”opetustyö muodostuu melkein yksinomaan tutkintotreenaukseksi, ja varsinainen luonteen- niin myös älynkasvatus jää toisarvoiseksi asiaksi” (Kiuasmaa 1982, 227).

## 4.1 Vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteet

Lukiolaki (477/1983) muutti lukion opetussuunnitelman laatimismenettelyä ja sisältöä huomattavasti. Kun aiemmin opetuksen sisältö oli määritetty tarkasti oppiainekohtaisesti asetustasolla, niin nyt opetussuunnitelman pohjana olivat kaikkea lukion opetus- ja kasvatustyötä ohjaavat yleiset tavoitteet. Lukio muuttui eri oppiaineita opettavasta laitoksesta selkeäksi kokonaisuudeksi. Opetussuunnitelman laatiminen siirtyi koulun ylläpitäjän vastuulle valtiovallan säätämissä yleisissä rajoissa. Lukiota pystyttiin kehittämään joustavammin paikallisista tarpeista lähtien. (LOPS 1985[2], 5–6.)

Vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteissa todetaan, että lukion matematiikan opetus on perinteisesti jaettu kahdeksi erilliseksi ja erilaajuiseksi oppimääräksi. Tätä jakoa yleiseen ja laajaan oppimäärään puoltaa oppilaiden erilainen kiinnostus matematiikkaa kohtaan sekä jatko-opintojen edellyttämät erilaiset pohjatiedot. Yleisen oppimäärän opiskelussa tähdätään lähinnä humanistisiin, yhteiskuntatieteellisiin sekä palvelu- ja kauppa-alan jatko-opintoihin. (LOPS 1985, 283.)

Yleisen oppimäärän tavoitteina mainitaan tietyntasoiset laskutekniset valmiudet, matematiikan tavallisimpiin sovelluksiin perehtyminen sekä jossakin määrin myös matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen (LOPS 1985, 283). Vuoden 1985 opetussuunnitelman mukaan tavallisimmat sovellukset käsittävät matemaattisten menetelmien käyttämisen eri elämänaloilla esiintyvien probleemien ratkaisemiseen, esimerkiksi sanallisten probleemien ratkaisemiseen yhtälöiden avulla. Esimerkkeinä sovellusalueista ovat myös todennäköisyyslaskenta ja tilastotieteen menetelmät sekä matematiikan käyttö muilla tieteenaloilla, kuten fysiikassa, kemiassa, biologiassa, maantieteessä, tekniikassa ja psykologiassa. Lisäksi tutustutaan matematiikan asemaan kaupallisen, yhteiskuntatieteellisen ja palvelualan apuvälineenä. (LOPS 1985, 284.)

Matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen tapahtuu yleisessä matematiikassa kuvailemisen tasolla. Tarkoituksena on saada käsitys määrittelystä ja loogisen päättelyn asemasta sekä tottua käyttämään täsmällisiä ja oikeita merkintöjä ja lukemaan matemaattista tekstiä. (LOPS 1985, 284.)

Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa sanotaan, että kurssisuunnitelmat ovat osittain varsin yleisluontoisia, jolloin kunnissa tarjoutuu koulun ja ope-

---

[2] Lyhenne LOPS 1985 tarkoittaa vuonna 1985 hyväksyttyjä lukion opetussuunnitelman perusteita.

tusryhmän tasolla mahdollisuus muuttaa painotusta ja käsittelyjärjestystä kurssien sisällä. Yleisessä matematiikassa on seitsemän 38 oppitunnin pituista kurssia. Vaikka opetussuunnitelma antaa mahdollisuuden tehdä kunta- ja koulukohtaisia muutoksia, ovat kuuden ensimmäisen kurssin tavoitteet ja sisällöt melko tarkasti kuvattuja. Seitsemäs kurssi on oppimäärän syventävä ja täydentävä kurssi, jonka yksityiskohtainen suunnittelu tapahtuu koulun tasolla kutakin opetusryhmää varten erikseen. (LOPS 1985, 256–289.) Seitsemäs kurssi kuului kolmannella luokalla erikseen valittavaan jatko-oppimäärään (LOPS 1985, 28), joten kaikille pakollisia matematiikan kursseja oli kuusi.

## 4.2 Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman perusteet

Opetushallitus teki vuonna 1994 lukiokoulutuksen kansallisen kokonaisarvioinnin (Lukion tila 1994). Tällöin lukiokoulutus oli keskellä isoa muutosta. Opetus alettiin järjestää luokattomasti, opetussuunnitelma vaihtui ja ylioppilastutkintoon valittavat aineet voitiin valita vapaammin. Arvioinnin toteutuksen aikaan kolmasosa lukioista oli siirtynyt luokattomaan opetukseen. Samoin kolmasosa lukioista käytti vuoden 1994 opetussuunnitelmaa. (Lindström 1994, 11.)

Vaikka vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa siirryttiin valvonnasta ohjaamiseen, oli opetussuunnitelma kuitenkin hyvin tavoitesuuntautunut. Tavoitteet, niiden saavuttamisen välineet ja mittaamisen keinot määritettiin ylhäältä käsin. Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa sen sijaan ei enää anneta valmiita ratkaisumalleja. Valtakunnallisten tavoitteiden ja kehittämistavoitteiden kautta annetaan kouluille suunta omien opetussuunnitelmien laadintaan. (Lindström 1994, 12.)

Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994 on merkittävästi edeltäjäänsä suppeampi. Entistä enemmän opetussuunnitelmassa on kiinnitetty huomiota lukion opetus- ja kasvatustyön päämäärään sekä koulun arvoperustaan. Oppiainekohtaiset sisältökuvaukset ovat sen sijaan aikaisempaa väljemmät.

Vuoden 1994 opetussuunnitelman mukaan lyhyen matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää opiskelijoiden yleisiä kansalaisvalmiuksia matemaattisen tiedon hankkimisessa, käsittelyssä ja ymmärtämisessä sekä matematiikan käytössä elämän eri tilanteissa. Jatko-opintovalmiuksien hankkimisessa tähdätään humanistisia, yhteiskuntatieteellisiä ja kaupallisia aloja varten. (LOPS 1994, 70.)

Opetussuunnitelman mukaan lyhyen matematiikan opetuksen yhtenä tavoitteena on, että opiskelija osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän välttämättömänä apuvälineenä eteen tulevien tehtävien ja yhteiskunnassa esiintyvien ongelmien ratkaisemisessa. Tärkeänä pidetään myös myönteisiä oppimiskokemuksia ja omiin kykyihin, taitoihin ja ajatteluun luottamista. Tätä tavoitetta varten opiskelijaa rohkaistaan kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen. (LOPS 1994, 73.)

Lyhyen matematiikan tavoitteissa matematiikka nähdään välineenä, jolla todellisuus voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemiseen. Tavoitteiden mukaan opiskelija kehittää valmiuksiaan jäsentää matemaattista tietoja ja ymmärtää sen loogista rakennetta. Lyhyt matematiikka nähdään osana yleissivistystä siten, että opiskelija harjaantuu vastaanottamaan, analysoimaan ja kriittisesti arvioimaan eri viestintälähteiden matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota. (LOPS 1994, 73.)

Pakollisia lyhyen matematiikan kursseja on kuusi. Syventävistä kursseista sanotaan hyvin väljästi, että matematiikan opintoja voidaan syventää joko opiskelemalla laajemmin jotakin jo tuttua aluetta tai tutustumalla johonkin kokonaan uuteen matematiikan kohteeseen. Lyhyen matematiikan syventävien kurssien aihepiireiksi ehdotetaan talousmatematiikkaa sekä todennäköisyyslaskentaa ja tilastotiedettä. Muina aihepiireinä mainitaan vektorit ja analyyttinen geometria sekä analyysin jatkokurssi. (LOPS 1994, 75.)

Opiskelun luonnetta ja opetuksen lähtökohtia kuvattaessa mainitaan, että itse tekeminen ja uuden keksiminen kuuluvat olennaisesti matematiikan oppimisprosessiin. Lyhyen matematiikan opetuksessa myönteistä ja opiskelijoita aktivoivaa oppimisympäristöä pidetään tärkeänä. Oppimisympäristöt toivotaan rakennettavan konkreettisten ongelmanratkaisutilanteiden tai todellisten sovelluskohteiden ympärille. Tämän katsotaan motivoivan opiskeluun ja lisäävän käsitteiden hyvää ymmärtämistä. (LOPS 1994, 75–76.)

## 4.3 Vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman perusteet

Vuonna 2003 laadittu ja viimeistään vuonna 2005 käyttöön otettu lukion opetussuunnitelma on jälleen kokonaisuutena edellistä laajempi ja yksityiskohtaisempi. Muutos takaisin kohti opetuksen tiukempaa määrittämistä näkyy siinä, että opetussuunnitelman perusteet on annettu Opetushallituksen velvoittavana määräyksenä.

”Koulutuksen järjestäjä ei voi jättää noudattamatta tai poiketa opetussuunnitelman perusteista.” (Opetushallituksen määräys D nro 33/011/2003).

Vuoden 2003 opetussuunnitelmassa todetaan, että matematiikan asema kulttuurisamme edellyttää valmiutta ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa. Opiskelija tutustutetaan matemaattisen ajattelun malleihin ja sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin. Opetuksen tehtävänä on opettaa opiskelija käyttämään matematiikan puhuttua ja kirjoitettua kieltä sekä kehittää opiskelijan laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja. (LOPS 2003, 110.)

Opetussuunnitelman mukaan opetus järjestetään siten, että opiskelija itse tekee havaintojensa perusteella kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä. Opiskelijaa kannustetaan lisäksi käyttämään luovia ratkaisuja. Tärkeänä pidetään myös laajempien kokonaisuuksien muodostamista matematiikan käsitteiden välille sekä arkielämän ja matematiikan yhteyksien havaitsemista. Opetuksessa ” tietoisesti käytetään eteen tulevia mahdollisuuksia opiskelijan persoonallisuuden kehittämiseen, mikä tarkoittaa muun muassa hänen kiinnostuksensa ohjaamista, kokeiluihin kannustamista sekä tiedonhankintaprosessien kehittämistä.” (LOPS 2003, 110.)

Erityisesti matematiikan lyhyen oppimäärän tehtävänä on tarjota valmiuksia hankkia, käsitellä ja ymmärtää matemaattista tietoa ja käyttää matematiikkaa eri elämäntilanteissa ja jatko-opinnoissa. Lyhyen matematiikan tavoitteena on, että opiskelija saa myönteisiä oppimiskokemuksia ja oppii luottamaan omiin kykyihinsä ja ajatteluunsa. (LOPS 2003, 117.) Opetussuunnitelman mukaan pitkän matematiikan kohdalla (LOPS 2003, 111) luottamus omiin matemaattisiin kykyihin syntyy pitkäjänteisen työskentelyn kautta. Myönteisistä oppimiskokemuksista ei mainita mitään.

Lyhyen matematiikan opetuksen tavoitteena on, että opiskelija sisäistää matematiikan merkityksen ilmiöiden kuvaamisen, selittämisen ja mallintamisen välineenä. Jatko-opintojen osalta ei ole enää mainintaa, minkä alojen jatko-opintoihin lyhyt matematiikka antaa riittävät valmiudet. Matematiikan merkitykseen kulttuurin osana tutustutaan ja saadaan käsitys matematiikan loogisesta rakenteesta. (LOPS 2003, 117.)

Pakollisten kurssien määrä on säilynyt kuutena. Syventävien kurssien sisällöt luetellaan samalla tarkkuudella kuin pakollisten kurssien. Syventävistä kursseista toisen sisältönä on talousmatematiikka ja toisen vektorit ja trigonometria. (LOPS 2003, 120.)

## 4.4 Opetussuunnitelman muutokset

Opetussuunnitelman muutoksissa ovat usein keskeisiä opetettavat oppiaineet, niiden välinen tuntijako sekä oppiaineen sisällä opetettavat asiat. Tällöin on kyse pintatason muutoksista, joiden vaikutus käytännön opetustyöhön voi jäädä vähäiseksi. Matematiikan opetussuunnitelmaa voidaan hyvin muuttaa koskematta siihen perustaan, jonka mukaan oppilaille muodostuu käsitys matematiikasta ja matematiikan tarkoituksesta (Restivo 1991, 172). Seuraavassa esittelen suomalaisen ja ruotsalaisen tutkimuksen, joissa on tutkittu matematiikan opetussuunnitelmia ja niiden muutoksia.

Harry Silfverberg (2010) on tutkinut vuosien 1994 ja 2003 lukion matematiikan opetussuunnitelmatekstejä verbianalyysiksi nimeämällään menetelmällä. Hänen tarkastelunsa kohteena ovat ainekohtaisten tavoitelausumien kielen ja kielivalintojen heijastamat piiloviestit oppimisen kulttuureista. Hän on kerännyt matematiikan opetussuunnitelman perusteiden teksteistä tarkasteluun kaikki niissä esiintyneet verbit, laskenut niiden esiintymisfrekvenssit ja koonnut verbi-ilmaisut merkityssisältöjen mukaisiin ryhmiin. Silfverbergin aineistolähtöisesti saamat verbien pääluokat olivat seuraavat: proseduraalinen sujuvuus, strateginen osaaminen ja käsitteiden ymmärrys. Tämä luokittelu vastaa Kilpatrikin ym. (2001) esittämiä matemaattisten kompetenssien osa-alueita.

Silfverbergin mukaan teksteissä esiintyneiden pääverbien tarkastelun perusteella tavoitekuvaukset ovat muuttuneet oppimista, osaamista ja harjaantumista painottavaksi. Pitkän oppimäärän tavoitteissa proseduraalista sujuvuutta ja käsitteiden ymmärrystä painotetaan vuoden 2003 opetussuunnitelmassa vahvemmin kuin vuoden 1994 opetussuunnitelmassa. Strategisen osaamisen kompetenssi sisältää sisällölliset metataidot, matemaattisen ajattelun ja käsityksen itsestä matematiikan oppijana. Yllättäen opetussuunnitelmatekstien analysointi paljasti sen, että lyhyen matematiikan opetussuunnitelmassa strategisen osaamisen painottaminen on lisääntynyt ja pitkän matematiikan opetussuunnitelmassa vähentynyt. Tavoitteiden rakenne oli kaikissa opetussuunnitelmissa sisältölähtöistä ja yksilön oppimistavoitteita koskevaa. Matematiikan tavoiteteksteistä ei voi lukea selvää siirtymää kohti sosiokonstruktivistista oppimiskäsitystä. (Silfverberg, 2010.)

Teresia Jakobsson-Åhl (2006) on tutkinut lisensiaattityössään lukiotason algebran opetusta Ruotsissa vuosina 1960–2000. Hänen tutkimuksensa tarkoituksena oli selvittää, kuinka opettajien ja oppilaiden suunniteltu kokemus (intended experience) algebrasta osana opetussuunnitelmaa on muuttunut toisiaan seuranneiden koulureformien aikana. Tutkimusaihetta on lähestytty fenomenografista ja hermeneuttista otetta käyttäen. Tutkimuksen aineistona oli 11 lukion matematiikan oppikirjaa, jotka ovat ilmestyneet vuosina 1961–1999. Oppikirjat ovat olleet yleisesti käytössä Ruotsissa ja niissä on vuosien aikana ollut suurin piirtein samat tekijäryhmät. Kirjoja ei ole analysoitu kokonaan, vaan tarkastelussa on keskitytty kirjainlaskentaan ja algebran teoriaan. Lisensiaattityön tuloksena on esitetty kategoriat, joilla voidaan kuvata, mitä kirjantekijät ovat halunneet oppilaiden kokevan koulualgebrana. Saadut 19 kategoriaa on jaettu viiteen luokkaan, jotka ovat: opiskelun kohteet, opiskelun kohteisiin johdattelu, algebrallisten taitojen harjoittelutehtävät, sanallisten tehtävien ominaisuudet sekä kirjainsymbolit versus numeeriset esimerkit. Näihin kategorioihin kuuluvien tapausten esiintymistä on verrattu eri aikakausina ilmestyneissä oppikirjoissa. (Jakobsson-Åhl, 2006.)

Oman tutkimukseni kannalta mielenkiintoisia muutoksia algebran opetuksessa Ruotsissa on tapahtunut algebrallisten taitojen harjoittelutehtävissä, sanallisissa tehtävissä sekä kirjainsymbolien ja numeeristen esimerkkien suhteessa. Algebrallisten taitojen harjoittelu oli 1960-luvun alussa keskittynyt lausekkeiden käsittelyyn. Vuosikymmenen loppupuolella käsiteltävien lausekkeiden monimutkaisuus alkoi kuitenkin vähetä ja pelkkiä kirjainsymboleja sisältäviä lausekkeita esiintyi aiempaa harvemmin. Huomio siirtyi lausekkeiden arvojen laskemiseen ja laskennallisiin taitoihin sekä taulukoihin ja graafisiin esityksiin. 1970-luvun lopussa laskennalliset taidot eivät enää olleet keskeisiä. Taulukot ja graafiset esitykset säilyttivät asemansa, mutta painopiste oli edelleenkin algebrallisissa lausekkeissa. Vuonna 1999 tämä muuttui siten, että algebrallisia lausekkeita, yhtälöitä ja funktioita esitettiin useissa muodoissa, joista mikään ei ole muiden yläpuolella. (Jakobsson-Åhl 2006, 109–110.)

Sanalliset, soveltavat tehtävät olivat 1960-luvun alussa aihepiiriltään peräisin joko matematiikasta tai muista kouluaineista. Yleensä niihin ei annettu matemaattista mallia valmiina. 1960-luvun loppupuolella alkoi esiintyä soveltavia tehtäviä, joihin oli annettu valmis matemaattinen malli. 1970-luvun lopulla tehtävät ilman annettua matemaattista mallia hävisivät kokonaan. 1990-luvun puolivälissä oppikirjoista löytyi uusi tehtäväryhmä, jossa tehtävä on sijoitettu arkipäivän aktiviteetteihin ja malli oli useimmiten annettu tai ehdotettu. 1990-luvun oppikirjoissa tehtävien konteksti oli yleensä yhteiskunnallinen tai arkipäivään liittyvä. Vuosikymmenen lopulla tehtävät lähestyivät oppilaan kokemusmaailmaa ja autenttisia reaalimaailman ongelmia. (Jakobsson-Åhl, 2006, 110.)

1960-luvulla kirjainsymbolit olivat vallitsevana esitysmuotona algebran oppikirjoissa. Vuosikymmenen loppupuolella kirjainsymbolien lisäksi tuli numeerisia esimerkkejä. 1970-luvun lopulta lähtien numeeriset esimerkit olivat vallitsevia. (Jakobsson-Åhl, 2006, 110.)

# 5 MATEMATIIKAN KIELI

Tässä luvussa tarkastelen matematiikkaa kielitieteellisestä näkökulmasta. Luvussa selvitän matemaattisen diskurssin käsitettä ja matematiikan sanallisia tehtäviä omana tekstilajinaan. Lisäksi tarkastelun kohteena on tehtävien kontekstisidonnaisuuden merkitys matematiikalle ja matematiikan oppijalle.

Matematiikan kielen määritteleminen on vaikeaa, koska matemaattiseksi voidaan tulkita hyvin erilaisia tekstejä, esimerkiksi tutkijoiden julkaisut, matematiikan oppikirjat, oppilaiden tuotokset matematiikan kokeessa sekä ajanvietematematiikka. Matematiikan teksteillä on kuitenkin joitakin yhteisiä piirteitä. Näitä ovat erikoistunut sanasto, symbolien käyttö, abstrakti ja persoonaton tyyli sekä akateemisten perusteluiden rakentaminen. (Morgan 1998, 8–9.) Matematiikan kielestä puhuminen voi tuntua jopa tarpeettomalta, koska ”oikean matematiikan” tuottaminen ymmärretään joskus pelkästään oikean symbolijonon muodostamiseksi (Morgan 1998, 12.)

Halliday (1978) tarkoittaa rekisterillä sitä merkitysten joukkoa, joka on sopiva tiettyyn kielenkäyttötarkoitukseen. Matematiikkarekisteri tarkoittaa matematiikan kieleen kuuluvia merkityksiä sekä kielen käyttämistä matemaattisiin tarkoituksiin. Jotta voidaan puhua matematiikkarekisteristä, tarvitaan uusia tapoja nimittää asioita, objekteja, prosesseja, ominaisuuksia ja suhteita. Jo olemassa oleville sanoille voidaan antaa uusia merkityksiä, voidaan kehittää kokonaan uusia sanoja tai lainata sanoja muista kielistä. (Halliday 1978, 195.)

Suuri osa modernin matematiikan terminologiasta on lainattu arkikielestä. Tämä osaltaan tekee matematiikan ymmärtämisen vaikeammaksi, koska yksinkertaisella, arkikäytössä olevalla sanalla, kuten joukko, on myös tarkka matemaattinen merkitys. (Halliday 1978, 201.)

## 5.1 Matematiikan diskurssi

Sfardin (2000) mukaan oppiminen käsitetään nykyisin ennemminkin tiettyyn diskurssiin mukaan pääsemisenä kuin tiedon hankintana. Diskursiivisena aktiviteettina nähty tieto ei ole persoonaton kokoelma ”tosiasioita” maailman olemuksesta, vaan tieto on ihmisten konstruoimaa. Koska diskurssin käsite on merkityksellinen vain sosiaalisessa vuorovaikutuksessa, niin oppiminen ei ole pelkästään yksilön toimintaa. (Sfard 2000, 160–161.)

Koulumatematiikassa menestyäkseen oppilaan täytyy pystyä työskentelemään niiden muodollisten periaatteiden tasolla, jotka määrittelevät matemaattisia käsitteitä ja käsitteiden välisiä suhteita. Tämä tapahtuu kielen avulla eli matematiikan diskurssin avulla. Dowling kutsuu tätä tasoa matematiikan esoteeriseksi alueeksi. (Dowling 2001, 182.)

Koulumatematiikka muodostuu kahdesta eri tasosta. Muodollisesti määritellyt yleiset käsitteet ja periaatteet kuuluvat diskursiiviselle tasolle. Nämä voidaan yleistää koskemaan erilaisia tilanteita ja konteksteja. Toisaalta esimerkiksi kuvioiden piirtäminen vaatii manuaalisia taitoja, joita ei hankita kielen avulla. Kuitenkin matematiikan diskursiivinen taso on hallitseva ja oppilaan täytyy osata toimia sillä tasolla. (Dowling 2001, 183.)

O’Halloran (2004) esittää Hallidayn (1978) systeemis-funktionaaliseen lingvistiikkaan perustuvan teorian matematiikasta multisemioottisena rakennelmana. Matematiikan diskurssi muodostuu kielen, matemaattisten symbolien ja visuaalisten esitysten yhdistelmänä. Nämä kolme aluetta toimivat yhdessä ja niillä jokaisella on oma kielioppinsa. Merkitysten muodostuminen symbolisten lausekkeiden avulla noudattaa toisenlaisia lainalaisuuksia kuin kielen avulla tapahtuva merkitysten muodostuminen. Tietyn kulttuurin jäsenet pystyvät useimmiten käyttämään kieltä monenlaisissa tilanteissa, mutta matematiikan symbolismi on yleensä vain harvojen käytössä, koska sitä ei ymmärretä niin hyvin. Matemaattisen symbolismin kielioppi on kehittynyt siten, että siitä on tullut tehokas työväline matemaattisten ongelmien ratkaisemisessa. Matematiikan visuaaliset esitykset ovat tyypillisesti abstrakteja tai tilastollisia graafeja ja diagrammeja. Systeemis-funktionaalisella mallilla voidaan selittää, millainen erityinen merkitys abstrakteilla graafeilla on matemaattisen ongelman kielellisen ilmaisun ja symbolisen ratkaisun välillä. Graafeilla on aivan oma merkityksensä kielen ja symbolismin lisänä. Niiden merkitys on edelleen kasvamassa kehittyneen tietokonetekniikan tuomien mahdollisuuksien ansiosta. (O'Halloran 2004, 10–15.)

## 5.2 Matematiikan sanalliset tehtävät tekstilajina

Matematiikan sanallisia tehtäviä voidaan pitää omana tekstilajinaan. Niille tyypillisiä piirteitä ovat niukkasanainen ilmaisu ja pyrkimys tulkinnan yksikäsitteisyyteen. Tehtävissä on pääsääntöisesti ilmaistu vain ne faktat, joita tehtävän ratkaiseminen edellyttää. Uskottavan tilanteen luomiseksi joitakin ratkaisun kannalta epärelevanttejakin tietoja voidaan kuitenkin antaa. Kaikkia tehtävässä annettuja lukuarvoja käyttämällä löydetään tehtävän ainoa oikea ratkaisu. (Joutsenlahti & Kulju 2010, 82–83.)

Gerofskyn (1996) mukaan matematiikan sanallisen tehtävän tarkoituksena on lähinnä osoittaa, että tällainen tarinan tilanne on olemassa. Sanallisella tehtävällä ei ole totuusarvoa. (le Roux, 2008.) Koska tekstilajeilla on kaikuominaisuus, niin sanalliset tehtävät muistuttavat aina hyvin paljon muita sanallisia tehtäviä. Sanallisilla tehtävillä on enemmän yhteyttä toisiin sanallisiin tehtäviin kuin todellisuuteen. (Gerofsky 2010, 69.)

## 5.3 Kontekstisidonnaiset tehtävät


KUVA 1. Kuka on Kaija? (Keskisuomalainen 21.1.2010)

Kuvassa 1 esitetyn sarjakuvan tyttö ei halua tehdä matematiikan kotitehtävää, koska ei tunne ketään Kaijaa. Vaikka tämä esimerkkitehtävä on hyvin yksinkertainen, niin se kuvaa hyvin kontekstisidonnaisuuden ongelmaa, jota isä yrittää tyttärelleen selittää. Ei ole mitään merkitystä tehtävän kannalta, kenen kakku on kyseessä, mutta tytölle tämä selitys ei kelpaa. Jos tehtävän ratkaisija ei tunne matematiikan sanallisten tehtävien tekstilajia, niin hän ei osaa myöskään erottaa tehtävää kontekstistaan.

”Elävästä elämästä” otettujen kontekstien käyttämiseen liittyy yleisesti totena pidettyjä uskomuksia. Kontekstisidonnaisten tehtävien ajatellaan auttavan tiedon siirtoa matematiikan ja ympäröivän todellisuuden välillä. Reaalimaailman sovellusten katsotaan motivoivan oppilasta ja tekevän matematiikasta mielenkiintoisempaa. Lisäksi kontekstisidonnaisten tehtävien ajatellaan vaativan matalampitasoista ajattelua kuin abstraktin matematiikan ja tämän takia sopivan paremmin heikoille oppilaille. (Le Roux 2008a, 309.)

Ei ole yhdentekevää, millaiseen kontekstiin matematiikan sanallinen tehtävä sijoitetaan. Erilaisesta sosiaalisesta taustasta tulevat ja eri sukupuolta olevat oppilaat näkevät tehtävät eri tavoin. Tällä on merkitystä siihen, kuinka he pystyvät tehtäviä ratkaisemaan. Cooper ja Dunne (2004) ovat de Freitasin (2008, 81) mukaan osoittaneet tutkimuksissaan, että työväenluokkataustaiset oppilaat vastaavat ”realistiseen” ongelmaan ”realistisella” tavalla, eivätkä pysty tunnistamaan tehtävän koodia matemaattista ratkaisua vaativaksi. Realistiseen tehtävään vastaaminen on vain osittain realistista, sillä yhä edelleen pitää saada ”oikea” vastaus, useampia vaihtoehtoja ei sallita eikä reaalimaailman tietoja voi ratkaisussa käyttää hyödyksi (Cooper & Dunne 1998, 120).

Tytöt ja pojat antavat kontekstille erilaisen merkityksen pohtiessaan vaihtoehtoja ja tehdessään päätöksiä. Matematiikan tehtävissä konteksti pitää useimmiten häivyttää pois jo tehtävän ratkaisun alkuvaiheissa. Tytöt kiinnittävät enemmän huomiota tehtävän kontekstiin ja ”ei-matemaattisiin” puoliin, jolloin heillä jää vähemmän aikaa käytettäväksi tehtävän ”matemaattisen” puolen ymmärtämiseen. (Paechter 2001, 56.) Boalerin (1997, 113) mukaan tytöt haluavat ymmärtää käsiteltävät asiat, pojille riittää saada paljon tehtäviä tehtyä.

Reaalimaailmaan liittyvät sovellukset ovat yksi matematiikan opetuksen uudistajien keino siirtyä pois matematiikan esoteeriselta alueelta kohti oppilaille merkityksellisempää opetussuunnitelmaa. On kuitenkin syytä huomata, että tällaiset tehtävät eivät välttämättä lisää osallisuutta matematiikan opetukseen koulussa, koska sovellustehtävät voivat vaatia vielä uuden kooditason hallintaa koulumatematiikan diskurssissa. (de Freitas 2008, 81.) Yksi reaalimaailmaan liittyvien tehtävien ongelma on se, että ne vaativat oppilaalta tehtävän tilanteen tuntemista tai kiinnostusta tehtävän tilanteeseen, mutta tällaista oletusta ei aina voi tehdä (Boaler 2002, 251).

Yhdysvaltalainen Lubienski (2000) on toimintatutkimuksessaan havainnut, että matematiikan opetussuunnitelman ja pedagogiikan muuttaminen voi lisätä tai vähentää esteitä alemmasta sosioekonomisesta taustasta tulevien opiskelijoiden oppimiselle. Hän opetti seitsemättä luokkaa (30 oppilasta) vuoden ajan kokeilumateriaalilla, joka perustui avoimiin, kontekstiin sidottuihin ongelmiin. Oppilailla oli aiemmilta vuosilta kokemusta myös perinteisistä opetusmateriaaleista. Alemmista sosiaaliluokista tulevat oppilaat pitivät enemmän perinteisistä lähestymistavoista, kun taas ylemmistä sosiaaliluokista tulevat tunsivat hyötyvänsä kokeellisesta lähestymistavasta. Joissakin tapauksissa alemman sosiaaliluokan oppilaiden tapa kiinnittää paljon huomiota kontekstiin esti heitä oppimasta tehtävän takana ollutta matemaattista ideaa. Erityisesti alemmasta sosiaaliluokasta olevat tytöt olivat usein ymmällään avoimen tehtävän edessä ja vaativat opettajalta enemmän ohjeita. Avoimet tehtävät vaativat enemmän oma-aloitteisuutta ja tehtävän tarkastelua kuin perinteiset harjoitustehtävät, joihin on annettu valmis ratkaisumalli. Ylemmän sosiaaliluokan oppilaat pystyivät paremmin tutkimaan ongelmatehtäviä ja tunsivat omien ongelmanratkaisukykyjensä lisääntyvän. (Lubienski 2000.)

Pitää kuitenkin varoa liian suoraviivaisia päätelmiä siitä, että avoimet, ongelmanratkaisukeskeiset opetusmateriaalit ja -menetelmät ylläpitäisivät epätasa-arvoa matematiikan opetuksessa. Boalerin (2002) mukaan pitäisikin siirtää painopiste pois siitä, mitä opiskelijat eivät pysty tekemään. Tärkeämpää olisi miettiä, kuinka koulu voisi tehdä oppimiskokemuksesta tasa-arvoisemman. (Boaler 2002, 241.)

Brittiläinen Boaler (1997) tutki kahta koulua, joissa käytettiin hyvin erilaista lähestymistapaa matematiikan opetukseen. Toisessa koulussa oppilaat oli jaettu taitotason mukaisiin ryhmiin, joissa edettiin tiukasti oppikirjan mukaisesti. Toisessa koulussa matematiikan opetus perustui projekteihin, jotka kestivät muutaman viikon ja joiden toteutus oli hyvin vapaamuotoinen.

Boalerin tutkimassa koulussa perinteistä matematiikan opetusta saaneet oppilaat (n=182) selviytyivät päättökokeessa toisen koulun oppilaita heikommin tehtävistä, joissa tarvittava ratkaisumenetelmä ei ollut heti tunnistettavissa. Tämä saattoi johtua heidän käsityksestään, että matematiikka on sääntöihin perustuva, ulkoa opeteltava oppiaine, jossa tehtävien ratkaisemiseen ei kuulu oma ajattelu. (Boaler 1997, 85.) Projektien avulla opiskelleet oppilaat (n=115) sen sijaan pystyivät paremmin tulkitsemaan tehtävän tilanteen vaatimuksia, koska he olivat projekteja tehdessään tottuneet tällaiseen. He pystyivät ajattelemaan kysymyksiä, vaikka eivät tienneet tai muistaneet ratkaisuun tarvittavia proseduureja. He selvisivät paremmin kokeen käsitteellisistä tehtävistä kuin toisen koulun oppilaat. Proseduraalisissa tehtävissä molempien koulujen oppilaat selvisivät yhtä hyvin, vaikka perinteisemmän koulun oppilaat olivat motivoituneempia opettelemaan proseduureja. (Boaler 1997, 93.)

## 5.4 Opitaanko matematiikkaa koulua vai elämää varten?

Lave (1988) on tutkinut, kuinka aikuiset pystyvät käyttämään koulussa oppimaansa matematiikkaa arkielämän tilanteissa. Yleensä aikuiset tekivät arkielämän matemaattiset päätelmät käyttämättä koulumatematiikan tietoja. Sama ilmeni Boalerin tutkimuksessa perinteistä matematiikan opetusta saaneilla oppilailla. Tutkimuksessa havaittiin, että koulussa opittu matematiikka unohtui jo muutaman viikon päästä, kun oppikirjassa siirryttiin seuraavaan aiheeseen. (Boaler 1997, 87.)

Perinteistä matematiikan opetusta saaneet oppilaat eivät käyttäneet koulussa oppimiaan matematiikan metodeja, koska he eivät nähneet juuri yhteyttä koulumatematiikan ja arkielämän välillä. Sen sijaan projekteihin perustuvaa opetusta saaneet oppilaat eivät tehneet juuri eroa koulumatematiikan ja arkielämän matematiikan välillä. He käyttivät koulussa opittuja menetelmiä myös koulun ulkopuolella. (Boaler 1997, 93.)

Boaler tekee tutkimuksensa perusteella johtopäätöksen, että jos oppilaille opetetaan matematiikan tunnilla menetelmiä, joita ei liitetä yleisempään matemaattiseen näkökulmaan, niin oppilaalle muodostuu vain proseduraalista tietoa. Tällainen tiedon käyttökelpoisuus on kapea-alaista. Projekteihin perustuneessa opetuksessa puuttuivat valmiit proseduurit ja algoritmit, jolloin tehtävän tilanteen tulkinnalle jäi vapautta, jota eivät valmiit ratkaisumenetelmät kahlinneet. (Boaler 1997, 107.)

## 5.5 Tutkimuksia matematiikan kielestä

Kate Le Roux (2008b) on tutkinut diskurssianalyysin keinoin ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoille annettujen matematiikan tehtävien kieltä. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, kuinka teksti kuvaa matematiikan tehtävään vastaamista toimintana ja kuinka teksti asemoi opiskelijan. Tutkimuksessa tarkasteltiin yhtä autojen suhteellisiin nopeuksiin liittyvää tehtävää, tekstikirjassa juuri tehtävän edellä esitettyä yleistä ohjetta tämäntyyppisten tehtävien ratkaisemista varten sekä tehtävän valmiiksi laskettua ratkaisua.

Keskeinen toiminta näissä teksteissä on Le Roux'n mukaan suhteellisen nopeuden tehtävien ratkaiseminen. Ohjelaatikossa annettu menetelmä viittaa siihen, että systemaattista ongelmanratkaisua arvostetaan ja kaikki tällaiset ongelmat voi ratkaista samalla tavalla. Malliratkaisun perusteella voidaan päätellä, millaista ratkaisua arvostetaan. Opiskelija asemoituu tekstien kautta opiskelijaksi, joka on perillä ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden matematiikan diskurssista. Hänen oletetaan ymmärtävän ja osaavan käyttää tietynlaista kieltä sekä osaavan tiettyjä matemaattisia proseduureja. Lisäksi hänen oletetaan tuntevan koulumatematiikan sanallisen tehtävien ratkaisemiseen liittyvät oletukset. Le Roux'n mukaan tietyt tekstin piirteet (ohjelaatikossa esitetyt vaiheet, vaiheista muistuttaminen) asemoivat kuitenkin opiskelijan apua tarvitsevaksi. (Le Roux 2008b.)

Paul Dowling (1996) on analysoinut koulumatematiikan tekstejä sosiologisesta näkökulmasta. Tekstiaineistona hänellä oli Britannian oppivelvollisuuskoulussa kolmena viimeisenä kouluvuotena käytettyjä oppikirjoja. Nämä kirjat on jaettu oppilaiden ”kyvykkyyden” mukaan kolmeen tasoon, joista Dowling on tutkinut ylintä ja alinta sarjaa. Alimman sarjan kirjoissa asiat on esitetty tietyn kuvitteellisen yrityksen ja sen nuoren työntekijän näkökulmasta eli asiat on lokalisoitu. Teksti on enemmän proseduraalista kuin periaatteellista. Lukija asemoidaan nuoreksi, sarjakuvia lukevaksi kaupan työntekijäksi. Ylimmän sarjan kirjoissa annetaan yleisiä sääntöjä ja asiat esitetään symbolisessa muodossa. Lukija asemoituu matemaatikon työhön. Alimman sarjan lukijan oletetaan löytävän itsensä tekstistä ja näin teksti tekee hänestä objektin. Ylimmän sarjan lukija tunnistaa tekstistä matematiikan, joten hänen yksilöllisyytensä jää ulkopuoliseksi ja merkityksettömäksi. Hänestä tulee matematiikan subjekti. (Dowling 1996, 401–402.)

Dowling kritisoi tapaa, jolla alimman sarjan oppikirjassa kauppaan liittyvät asetelmat ovat erittäin näkyvässä roolissa. Useimmiten niissä on ostajan näkökulma. Kirjassa ei anneta mitään erityisiä ohjeita tehtävien ratkaisemiseksi. Tehtävät jäävätkin matematiikan ulkopuoliselle, julkiselle alueelle (public domain). Tehtävät näyttävätkin hyödyttävän ostamisen optimointia eikä matematiikan oppimista. Matematiikka rakennetaan ehtona julkiselle alueelle osallistumiselle. Tätä Dowling kutsuu osallistumisen myytiksi. (Dowling 1996, 406.)

Ylimmän sarjan kirjoissa kauppaan liittyvät tehtävät ovat asettelultaan ja tarinoiltaan avoimempia ja semanttisesti kauempana lukijasta. Tehtävissä on sellaisia piirteitä, että ne liittyvät tavalliseen kaupankäyntiin vain epäsuorasti. Niissä minimoidaan annetun asetelman merkitys, joten matematiikalla näyttää olevan mahdollisesti universaalia kuvausvoimaa. Tätä Dowling kutsuu referenssin myytiksi. (Dowling 1996, 407.)

Koulumatematiikan kontekstissa ei voi opettaa kaupassa käymistä. Toisaalta matematiikkaan liittyvät strategiat eivät ole johdettavissa arkielämästä. Pedagogisesta toiminnasta tulee myyttistä ja vieraannuttavaa, koska se ei ole kaupassakäyntiä eikä matematiikkaa. (Dowling 1996, 410.)

Vilenius-Tuohimaa, Aunola ja Nurmi (2008) ovat tutkineet matematiikan sanallisten tehtävien osaamisen yhteyttä mekaaniseen lukutaitoon ja luetun ymmärtämiseen. Tutkimukseen osallistui 225 neljäsluokkalaista lasta. Luetun ymmärtäminen testattiin käyttäen ALLU-testiä (ALLU – ala-asteen lukutesti), joka on normeerattu ryhmätesti lukemisvaikeuksien havaitsemista varten. Testin tulosten perusteella lapset jaettiin kahteen ryhmään teknisen lukutaidon tason mukaan. Matematiikan sanallisten tehtävien osaaminen testattiin käyttämällä osaa NMART-testistä. NMART -laskutaidon ja lukukäsitteen tehtävistö on tarkoitettu peruslaskutaitojen eri osa-alueilla ilmenevien oppimisvaikeuksien seulontaan. Tulokset osoittivat, että teknisen lukutaidon taso ennusti sekä menestystä matematiikan sanallisissa tehtävissä että luetun ymmärtämisessä. Kun teknisen lukutaidon taso kontrolloitiin, niin edelleen löytyi tilastollisesti merkitsevä yhteys matematiikan sanallisten tehtävien ja luetun ymmärtämisen välille. (Vilenius-Tuohimaa, Aunola & Nurmi 2006.)

# 6 TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Suurin osa lukion opiskelijoista suorittaa matematiikassa lyhyen oppimäärän ja ylioppilaskirjoituksissa lyhyen matematiikan koe on valtakunnallisesti suositumpi kuin pitkän matematiikan koe. Pitkää matematiikkaa pidetään usein tärkeämpänä, koska sen suorittaneet opiskelijat ovat valmiita jatko-opintoihin matemaattis-luonnontieteellisillä ja teknisillä aloilla. Lisäksi pitkä oppimäärä houkuttelee matemaattisesti lahjakkaampia ja matematiikkaan positiivisemmin suhtautuvia opiskelijoita. Lyhyen matematiikan opetussuunnitelmaa muutettiin 1990-luvulla huomattavasti, mutta vastaavaa uudistusta ei ole tehty pitkän matematiikan oppimäärälle. Tämän tutkimuksen kohteena on lyhyen matematiikan ylioppilaskoe. Tutkimuksessa selvitetään, millä tavalla lyhyen matematiikan ylioppilaskoe on muuttunut neljän vuosikymmenen aikana vuodesta 1970 vuoteen 2009 mennessä.

1990-luvun muutosten jälkeen lyhyen matematiikan ylioppilaskoetta on pidetty liian soveltavana ja pikemminkin luetun ymmärtämistä kuin matematiikan osaamista mittaavana. Ylioppilastutkintolautakunta onkin aloittanut kokeen kehittämistyön, jonka tavoitteena on lisätä matematiikan kontekstissa olevia tehtäviä ja vähentää jonkin verran soveltavan aineksen määrää.

Tässä työssä selvitetään seuraavia kysymyksiä:

1. Millaisia ovat lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävät?
   1.1 Millaisiin luokkiin ylioppilaskoetehtävät jakautuvat?
   1.2 Millaisia ovat ylioppilaskoetehtävien vastaustyypit?
   1.3 ”Kuka tekee” ylioppilaskoetehtävissä?
   1.4 Millainen matematiikkakäsitys näkyy ylioppilaskoetehtävissä?
2. Miten ylioppilaskoetehtävät ovat muuttuneet vuosien aikana?
   2.1 Onko ylioppilaskoetehtävien jakautuminen eri tehtävätyyppeihin muuttunut?
   2.2 Miten opetussuunnitelman muutos näkyy ylioppilaskoetehtävissä?

# 7 TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

## 7.1 Tutkimuksen aineisto

Tutkimuksen aineistona on käytetty vuosien 1970–2009 ylioppilaskokeiden lyhyen matematiikan tehtäviä. Kyseinen neljänkymmenen vuoden jakso on mielenkiintoinen siksi, että jakson alkuaikoina Suomen koululaitoksessa elettiin uuden matematiikan aikaa, josta 1980-luvulla siirryttiin perusasioita korostavaan *Back to Basics* -vaiheeseen. Lyhyen matematiikan opetussuunnitelmaa muutettiin merkittävästi 1990-luvulla, mikä vaikutti myös matematiikan ylioppilaskokeen tehtäviin.

## 7.2 Sisällönanalyysi tutkimusmenetelmänä

Sisällönanalyysin avulla voidaan analysoida kirjalliseen muotoon saatettua materiaalia systemaattisesti ja objektiivisesti. Tarkoituksena on saada tutkittavasta ilmiöstä kuvaus tiivistetyssä ja yleisessä muodossa. Sisällönanalyysi on tekstianalyysia, joka etsii tekstin merkityksiä. (Tuomi & Sarajärvi 2006, 105.)

Laadullisen aineiston sisällönanalyysi voi olla aineistolähtöistä, teoriaohjaavaa tai teorialähtöistä. *Aineistolähtöinen sisällönanalyysi* alkaa aineiston pelkistämisellä eli karsimalla aineistosta epäolennainen pois. Tutkimustehtävä ohjaa aineiston pelkistämistä. Aineistosta etsitään tutkimuksen kannalta olennaisia ilmauksia. Aineiston ryhmittelyssä alkuperäisilmauksista etsitään samankaltaisuuksia tai eroavuuksia. Ryhmittelyssä ilmaukset jaetaan luokkiin. Viimeisessä vaiheessa aineisto käsitteellistetään yhdistelemällä luokituksia. Käsitteellistämisvaiheessa empiirinen aineisto liitetään teoreettisiin käsitteisiin. Tutkimuksen tuloksissa esitetään empiirisestä aineistosta muodostettu malli, käsitejärjestelmä tai aineistoa kuvaavat teemat. (Tuomi & Sarajärvi 2006, 110–115.)

*Teoriaohjaava sisällönanalyysi* etenee aineiston käsittelyssä aineistolähtöisen sisällönanalyysin tavoin. Ero tulee käsitteellistämisvaiheessa, jossa aineistolähtöisessä analyysissa käsitteet luodaan aineistosta, mutta teoriaohjaavassa ne tuodaan esiin valmiina. (Tuomi & Sarajärvi 2006, 116.)

*Teorialähtöisessä sisällönanalyysissa* luokittelu perustuu ennestään tunnettuun teoriaan tai käsitejärjestelmään. Tutkimus alkaa analyysirungon muodostamisella. Aineistosta poimitaan ne asiat, jotka kuuluvat analyysirunkoon. Analyysirungon ulkopuolelle jääviä asioita voidaan käsitellä aineistolähtöisen sisällönanalyysin menetelmää käyttäen. (Tuomi & Sarajärvi 2006, 116.)

Luokittelun jälkeen sisällönanalyysia voidaan jatkaa kvantifioimalla aineisto. Tällöin aineistosta lasketaan eri luokkiin kuuluvien tapausten esiintymisfrekvenssit. (Tuomi & Sarajärvi 2006, 117.)

## 7.3 Tutkimusmenetelmät

Ylioppilaskoetehtävät on analysoitu luokittelemalla ne aineistolähtöisesti. Myös teoria on ohjannut luokittelua. Aloitin luokittelun ajanjakson ääripäistä eli 1970-luvun ja 2000-luvun tehtävistä, jotka kopioin ja levitin tehtävät eroteltuina pöydälle. Aineistoa tarkasteltuani sieltä alkoi erottua erityyppisiä tehtäviä. Ensimmäisenä omaksi ryhmäkseen erottuivat tehtävät, jotka sisälsivät taulukoita, tilastokuvioita tai funktion kuvaajia. Tämän jälkeen loput tehtävistä jakaantuivat kahteen osaan sen mukaan, oliko niissä käytetty pelkästään verbaalista vai myös symbolista esitystä. Lisäksi tehtävien aihealue jakoi tehtävät omiin ryhmiinsä. Pelkästään matematiikan käsitteistöä sisältävät tehtävät ovat omana ryhmänään ja arkielämän tilanteita ja käsitteistöä sisältävät omanaan.

Saadakseni käsityksen siitä, kuinka pitkälti oikean vastauksen saaminen korostuu ylioppilastehtävissä, luokittelin myös tehtävissä esitettyjen kysymysten perusteella tehtävät erilaisiin vastaustyyppeihin. Matematiikan kielen passiivisuusaspektia tutkiakseni etsin tehtävistä ne, joissa ihminen tekee jotain ja keräsin tehtävien subjekteina esiintyvät henkilöihin viittaavat sanat.

Taulukossa 3 on Lenni Haapasalon (1994, 43) mainitsemia esimerkkejä tavoista luokitella matemaattisia ongelmia. Suurin osa ylioppilaskoetehtävistä ei ole

Haapasalon määritelmän mukaisia ongelmia, vaan rutiini- tai harjoitustehtäviä, koska kokelaalla on tiedossaan ratkaisumenetelmä niihin (Haapasalo 1994, 17).

Aineistolähtöisesti tekemäni luokittelu vastaa osittain Haapasalon jaottelun mukaista tiedon esitysmuotoon perustuvaa luokittelua. Luokittelussa on nähtävissä myös O'Halloranin (2004, 10) teorian mukainen käsitys matematiikasta multisemioottisena rakennelmana, jonka diskurssi muodostuu kielen, matemaattisten symbolien ja visuaalisten esitysten yhdistelmänä.

TAULUKKO 3. Matemaattisten ongelmien luokitteluperusteita (Haapasalo 1994, 37–43, mukailtu.)

| LUOKITTELUPERUSTE | ESIMERKKEJÄ LUOKISTA |
|---|---|
| Tiedon esitysmuoto | Verbaaliset, kuvalliset tai symboliset ongelmat |
| Matematiikan osa-alue | Geometriset, algebralliset, topologiset ongelmat |
| Ongelman esiintymisen mukaan | Teknis-käytännölliset, abstraktit ongelmat |
| Ratkaisutapa | Algoritmisia, heuristisia menetelmiä vaativat |
| Strategiatyyppi | Etsimisongelmat, todistusongelmat |
| Tiedonhankintaprosessi | Objektiiviset ja subjektiiviset ongelmat |
| Yksittäistä oivallusta vaativat ongelmat | Pulmatehtävät |
| Lähtötila, lopputila ja askeleet ratkaisuun pääsemiseksi | Interpolaatio-, synteesi- ja dialektiset ongelmat |

Myös Haapasalon jaottelun mukainen strategiatyyppi on tässä tutkimuksessa erottanut joukon tehtäviä omaksi ryhmäkseen. Tämän tutkimuksen luokittelussa on kiinnitetty vain vähän tai ei lainkaan huomiota siihen, mihin matematiikan osa-alueeseen tehtävä kuuluu ja mikä on tehtävän ratkaisutapa. Myöskään tehtävän vaikeustaso ei ole ollut luokittelun perusteena.

Osa tehtävistä olisi voinut tulla luokitelluksi useampaan luokkaan. Tällöin luokittelu on noudattanut sitä järjestystä, että kuvion tai taulukon sisältyminen tehtävänantoon on heti määrännyt tehtävän kuulumisen tähän kategoriaan. Seuraavassa vaiheessa on otettu omaksi ryhmäkseen tehtävät, jotka ovat puhtaasti matematiikan aihesisällöistä eli kuuluvat Dowlingin (2001, 182) mukaan matematiikan esoteeriselle alueelle. Ne on jaettu kahteen osaan sen mukaan, onko kyse matematiikan rakenteeseen liittyvistä tehtävistä (osoitus- ja teoriatehtävät) vai muista tehtävätyypeistä. Tämän jälkeen jäivät jäljelle sanalliset tehtävät, joiden aihealue on muu kuin matematiikka.

Tehtävien luokittelun jälkeen niiden jakautuminen eri kategorioihin laskettiin. Ylioppilaskokeen ajallista muutosta tarkasteltiin selvittämällä tehtävien jakautuminen eri kategorioihin neljällä vuosikymmenellä.

## 7.4 Tutkimuksen reliabiliteetti ja validiteetti

Tutkimuksen laatu riippuu paljon käytetyistä menetelmistä. Tässä kappaleessa arvioin käyttämäni menetelmän sopivuutta tähän tutkimukseen.

Sisällönanalyysi sopii menetelmänä tekstiaineiston käsittelyyn. Laadullisen tutkimuksen luonteeseen kuuluu, että toinen tutkija voi saada samasta aineistosta erilaisen tuloksen. Olen luokitellut aineiston mahdollisimman yksikäsitteisesti, jotta tehtävän kuuluminen tiettyyn kategoriaan olisi selvää. Käyttämieni luokittelukriteerien ensisijaisuusjärjestys on kuitenkin tutkijan päätettävissä, joten jako voisi toisen tutkijan tekemänä muodostua erilaiseksi.

Tutkimuksen tarkoituksena on kuvailla lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoitustehtäviä ja selvittää, onko niissä tapahtunut muutosta. Vaikka lyhyen matematiikan ylioppilastehtäviä on 40 vuoden aikana ollut melko paljon (1174 kappaletta), päädyin luokittelemaan koko aineiston, jottei mitään oleellista jäisi pois.

## 7.5 Tutkimuksen eettisyys

Käyttämäni aineisto on julkista materiaalia, joten aineiston käyttöön ei liity eettisiä ongelmia. Tutkimuksen tarkoituksena on saada selville uutta tietoa lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa tapahtuneista muutoksista. Tarkoituksena on kuvata tilannetta, ei jakaa tehtäviä hyviin tai huonoihin. Tutkimus ei anna myöskään vastausta siihen, millaisia ylioppilaskirjoitustehtävien pitäisi olla.

# 8 TULOKSET

## 8.1 Ylioppilaskoetehtävien tehtävätyypit

Neljänkymmenen vuoden ajanjaksona 1970−2009 on ollut joka vuosi ylioppilaskoe sekä keväällä että syksyllä eli yhteensä 80 ylioppilaskoetta. Erillisiä tehtäviä lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa on ollut yhteensä 1174. Ylioppilaskoetta kohti tehtäviä on ollut keskimäärin 14,7 kappaletta. Tehtävämäärä on vaihdellut 1970-luvun alun 12 tehtävästä 1990-luvun alkupuolen 20 tehtävään. Vuodesta 2000 alkaen on kirjoituksissa ollut pääsääntöisesti 15 tehtävää.

Edellisessä kappaleessa esitetyllä tavalla luokitellut ylioppilaskoetehtävät jakautuvat seuraaviin osa-alueisiin:

A Matematiikan kontekstiin liittyvät tehtävät

B Sanalliset tehtävät eri aihealueilta

C Matematiikan rakenteeseen liittyvät tehtävät

D Kuvioita ja taulukkotietoja hyödyntävät tehtävät.

Osa-alueisiin A ja C kuuluvissa tehtävissä informaatio on verbaalisessa tai symbolisessa muodossa. Näiden osa-alueiden tehtävien aihe on puhtaasti matematiikan alueelta. Osa-alueen B tehtävissä on vain vähän tai ei lainkaan symbolisessa muodossa olevaa informaatiota. Nämä tehtävät ovat soveltavia ja ne kuuluvat tekstilajiin *koulumatematiikan sanalliset tehtävät*. Niiden ratkaiseminen vaatii paitsi tehtävänannon ymmärtämistä myös sen muuttamista matemaattiseen muotoon. Osa-alueen D tehtävissä kuviot tai taulukkotiedot ovat oleellinen osa tehtävää. Tähän osa-alueeseen tehtävät ovat valikoituneet ensisijaisesti esitysmuodon mukaan, joten tehtävissä on sekä matematiikan kontekstiin kuuluvia että soveltavia tehtäviä. Osa-alueet jakautuivat tarkempiin kategorioihin taulukon 4 mukaisesti.

TAULUKKO 4. Osa-alueiden jakautuminen kategorioihin.

| OSA-ALUE | f | f % |
|---|---|---|
| **A Matematiikan kontekstiin liittyvät tehtävät** | **600** | **51,1** |
| A1 Matematiikan tehtävät, jotka eivät sisällä muuttujamerkintöjä | 75 | 6,4 |
| A2 Symbolista esitystä sisältävät tehtävät | 359 | 30,6 |
| A3 Kirjainparametrin sisältävät tai sen käyttöä edellyttävät tehtävät | 142 | 12,1 |
| A4 Tehtävät, joissa esiintyy mittayksikköjä | 24 | 2,0 |
| **B Sanalliset tehtävät eri aihealueilta** | **453** | **38,6** |
| B1 Geometriaa reaalimaailmassa | 100 | 8,5 |
| B2 Fysiikkaan tai kemiaan liittyvät tehtävät | 97 | 8,3 |
| B2.1 Matka, nopeus, aika (45) | | |
| B2.2 Massa, tiheys, tilavuus ja liuoslaskut (20) | | |
| B2.3 Muut fysiikan ja kemian tehtävät (32) | | |
| B3 Rahaan ja talouteen liittyvät tehtävät | 106 | 9,0 |
| B3.1 Rahamäärää ei mainita (30) | | |
| B3.2 Rahamäärät mainitaan (76) | | |
| B4 Todennäköisyyslaskentaan ja tilastotieteeseen liittyvät tehtävät | 97 | 8,3 |
| B5 Muut sanalliset tehtävät | 53 | 4,5 |
| **C Matematiikan rakenteeseen liittyvät tehtävät** | **67** | **5,7** |
| C1 Osoitustehtävät ja teoreettiset tehtävät | 56 | 4,8 |
| C2 Tehtävät, joissa opetetaan uusi käsite | 11 | 0,9 |
| **D Kuvioita ja taulukkotietoja hyödyntävät tehtävät** | **54** | **4,6** |
| D1 Tehtävässä on annettu tietoa taulukkomuodossa | 32 | 2,7 |
| D2 Tehtävässä on annettu funktion kuvaaja | 8 | 0,7 |
| D3 Tehtävässä on annettu tilastokuvio | 3 | 0,3 |
| D4 Tehtävässä on annettu geometrinen kuvio | 8 | 0,7 |
| D5 Muuta kuvallista tietoa sisältävät tehtävät | 3 | 0,3 |
| $\sum$ | **1174** | **100,0** |

### 8.1.1 Matematiikan kontekstiin liittyvät tehtävät (Osa-alue A)

Matematiikan kontekstiin kuuluvia tehtäviä oli yhteensä 600 kappaletta eli 51,1 prosenttia kaikista tehtävistä. Kategoriaan A1 kuuluvissa tehtävissä (75 kappaletta) ei ole käytetty muuttujia ja tehtävä on selkeästi matematiikan kontekstissa. Useimmiten tehtävä on esitetty verbaalisessa muodossa tai verbaalisen ja symbolisen muodon yhdistelmänä.

(1) *Laske lausekkeen* $\log 2 + \log 0{,}5$ *tarkka arvo.* (k1972/13)[3]

Tämän kategorian tehtävissä on sanallisia tehtäviä, joissa kaikki esiintyvät termit ovat matematiikan käsitteistöä ja joka eivät sisällä symbolimerkintöjä.

(2) *Toisen asteen kuvaajan huippu on pisteessä (-1, 2), ja kuvaaja kulkee pisteen (0, ½) kautta. Määritä polynomi ja sen derivaatta. Piirrä polynomin kuvaaja.* (s1999/6 b))

Kategoriaan A2 kuuluvissa tehtävissä (359 kappaletta) on symbolista esitystä ja ne sisältävät sievennettävän muuttujan lausekkeen, yhtälön tai funktion lausekkeen. Myös vektorimerkintöjä sisältävät tehtävät kuuluvat tähän kategoriaan.

(3) *Millä* $x$ *:n arvoilla tulo* $3x^2(x+4)$ *saa negatiivisia arvoja?* (k1995/1 b))

Kategoriaan A3 kuuluvissa tehtävissä (142 kappaletta) on kirjainparametri valmiina tai tehtävän ratkaiseminen edellyttää kirjainparametrin käyttöä. Kun tehtävässä on jo valmiina kirjainparametri, niin silloin siinä on mukana myös symbolikieltä.

(4) *Tutki millainen luvun* $q$ *tulee olla, jotta polynomifunktio* $f(x) = x^3 + x^2 + qx + 1$ *olisi ainakin jollakin välillä vähenevä. Mikä on tällöin väli?* (k2002/11)

Kirjainparametrin käyttöä edellyttävät tehtävät ovat usein geometrian tehtäviä, joiden tehtävänanto on hyvin yleinen eikä sisällä lukuja eikä symbolimerkintöjä.

(5) *Neliöllä ja ympyrällä on yhtä suuret pinta-alat. Kuinka monta prosenttia pidempi on neliön piiri kuin ympyrän kehä? Kuutiolla ja pallolla on yhtä suuret tilavuudet. Kuinka monta prosenttia suurempi on kuution pinta-ala kuin pallon pinta-ala?* (k1996/7 a))

Kategoriaan A4 kuuluvat tehtävät (24 kappaletta) ovat matematiikan kontekstissa olevia tehtäviä, joissa on mainittu pituuden, pinta-alan tai tilavuuden yksikkö. Yksiköiden käytön vuoksi ratkaisuina ilmoitetaan yleensä likiarvot. Suurin osa näistä tehtävistä kuuluu geometrian alaan ja tehtävissä esiintyvistä geometrisista

---

[3] Ylioppilaskoetehtävän numerointi k1972/13 tarkoittaa kevään 1972 tehtävää numero 13.

muodoista käytetään täsmällisiä matemaattisia nimityksiä. Ensimmäinen tähän kategoriaan kuuluva tehtävä oli keväällä 1975. Tämä on yhteydessä laskimen käytön sallimiseen ylioppilaskokeessa 1970-luvun loppupuolelta lähtien. Likiarvotuloksen laskeminen laskimella on huomattavasti helpompaa kuin laskutikulla.

(6) *Neljäkkään (vinoneliön) sivun pituus on 8,0 cm. Lyhyempi lävistäjistä on 4,0 cm pitkä. Laske pitemmän lävistäjän pituus.* (k2009/7)

### 8.1.2 Sanalliset tehtävät eri aihealueilta (Osa-alue B)

Sanallisten tehtävien kohdalla jako eri kategorioihin perustuu tehtävien aihepiiriin. Arkielämään liittyviä sanallisia tehtäviä on ollut kaikkiaan 453 kappaletta, mikä on 38,6 % kaikista tehtävistä.

Kategoriaan B1 kuuluvat tehtävät (100 kappaletta) ovat geometrian tehtäviä, joiden konteksti on matematiikan ulkopuolella. Ensimmäinen tällainen tehtävä oli kevään 1981 ylioppilaskokeessa.

(7) *Neliön muotoisessa varastossa suoritettiin seinien sisäpuolinen lisäeristys, jolloin seinät tulivat 10 cm paksummiksi. Kuinka monta $m^2$ tällöin menetettiin, kun alkuperäinen pinta-ala oli 100 $m^2$?* (k1985/ 3 b))

Kategoriaan B2 kuuluvat tehtävät (97 kappaletta) ovat fysiikan ja kemian aihepiiristä. Tehtäviä on esiintynyt ylioppilaskokeessa keväästä 1985 lähtien. Yksittäinen tehtävä vuodelta 1970 tuli luokitelluksi tähän kategoriaan, koska siinä mainittiin ”pistemäinen valolähde”.

(8) *Autoilija havaitsi keskelle tietä pysähtyneen toisen auton 100 m:n etäisyydellä. Autoilijan reaktioaika (so. havainnon teosta jarrutuksen aloittamiseen kulunut aika) oli 1,0 s ja auton nopeus 100 km/h. Jarrutusmatka olisi ollut 50 m, jos nopeus olisi ollut 80 km/h. Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Pysähtyikö auto ennen yhteentörmäystä?* (k1985/10)

Kategorian B2 tehtävät jaoin vielä kolmeen alaryhmään tarkemman aihepiirin mukaan. Nopeuteen, matkaan ja aikaan liittyviä tehtäviä oli kaikkiaan 45 kappaletta. Liuoslaskuja sekä massaan, tiheyteen ja tilavuuteen liittyviä tehtäviä oli 20. Loput 32 liittyivät esimerkiksi radioaktiiviseen hajoamiseen tai maanjäristysten voimakkuuteen.

Rahaan ja talouteen liittyvät tehtävät (kategoria B3) ovat sanallisten tehtävien suurin ryhmä. Niitä oli kaikkiaan 106 kappaletta. Tehtävät jakautuvat edelleen kahteen alakategoriaan sen mukaan, millaista käsittelyä ne vaativat. Tavallisempi tehtävätyyppi (76 kappaletta) sisältää konkreettisia hintoja tai rahamääriä:

(9) *Nuoripari pitää kirjaa talousmenoistaan. Joka kuukauden viimeisenä päivänä he laskevat, kuinka paljon kuukauden menot ovat olleet. Eräänä vuonna marraskuun lopussa menot olivat olleet keskimäärin 1651,20 euroa kuukaudessa. Joulukuussa menot olivat 1814,88 euroa. Mikä oli talousmenojen kuukausikeskiarvo koko vuoden osalta?* (k2005/3)

Harvinaisemmassa vaihtoehdossa (30 kappaletta) ei ole annettu hintoja tai rahamääriä, vaan tehtävän ratkaisu täysin pistein edellyttää tilanteen käsittelyä yleisenä. Esimerkkinä seuraava tehtävä:

(10) *Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset laskivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?* (k2008/9)

Kategoriaan B4 on luokiteltu reaalimaailmaan sijoittuvat todennäköisyyslaskennan tehtävät (97 kappaletta).

(11) *Oletetaan, että Suomen itsenäisyyspäivä (6.12.) on satunnaisesti eri viikonpäivinä. Millä todennäköisyydellä itsenäisyyspäivä, joulupäivä (25.12.) ja tapaninpäivä (26.12.) sattuvat samana vuonna kaikki arkipäiviksi maanantaista perjantaihin?* (k1977/5b))

Kategoriaan B5 kuuluvat muut sanalliset tehtävät (53 kappaletta). Ensimmäinen tämän kategorian tehtävä on syksyltä 1978.

(12) *Suomen EU-äänestyksessä annettiin KYLLÄ-ääniä 57 % ja EI-ääniä 43 % äänestysprosentin ollessa 71. Kuinka monta prosenttia KYLLÄ-äänien määrä oli äänioikeutettujen määrästä?* (k1996/4 a))

### 8.1.3 Matematiikan rakenteeseen liittyvät tehtävät (Osa-alue C)

Matematiikka rakentuu tarkkaan käsitteiden määrittelyyn ja käsitteiden välisiä suhteita koskevien tulosten todistamiseen. Tähän osa-alueeseen kuuluvia tehtäviä on ylioppilaskokeessa ollut 67 kappaletta, mikä on 5,7 % kaikista tehtävistä.

Kategoriaan C1 kuuluvissa tehtävissä (56 kappaletta) pyydetään osoittamaan annettu tulos, selvittämään johonkin aihealueeseen liittyvää teoriaa tai johtamaan jokin kaava.

(13) *Osoita, että* $\sqrt{1+x} \le 1 + \frac{1}{2}x$ *, kun* $x \ge -1$*. Milloin yhtäsuuruusmerkki on voimassa? Piirrä kuvio.* (k1980/9)

Kategorian C2 tehtävissä (11 kappaletta) esitellään uusi käsite, jolla pitää operoida tehtävässä.

(14) *Mittaustuloksina on saatu $xy$ -koordinaatiston pisteet (1; 1,2), (2; 3,1) ja (4; 5,5). Näiden lomitse sovitetaan origon kautta kulkeva suora $y = kx$, jossa kulmakerroin $k$ määritetään pienimmän neliösumman menetelmällä: kunkin $x$ -arvon kohdalla lasketaan suoran $y = kx$ antaman $y$ -arvon ja mitatun $y$ -arvon erotus, ja kerroin $k$ valitaan siten, että erotusten neliöiden summa*

$$(k\cdot 1-1{,}2)^2+(k\cdot 2-3{,}1)^2+(k\cdot 4-5{,}5)^2$$

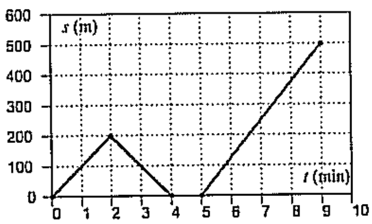
*on mahdollisimman pieni. Määritä $k$ tällä tavoin. Piirrä kuvio.* (s2008/13)

### 8.1.4 Kuvioita ja taulukkotietoja hyödyntävät tehtävät (Osa-alue D)

Kuvioita ja taulukkotietoja hyödyntäviä tehtäviä on ollut lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa tutkittavan ajanjakson aikana 54 kappaletta (4,6 %). Määrä on pieni, vaikka jatko-opintojen ja arkielämän kannalta tämäntyyppisen tiedon hallinta on tarpeellista. Valtaosa näistä tehtävistä (32 kappaletta) sisälsi taulukkotietoja. Erityisesti funktion kuvaajia sisältävien tehtävien määrää (8 kappaletta) ja tilastokuvioita sisältävien tehtävien määrää (3 kappaletta) voi pitää erityisen pienenä. Oheinen esimerkkitehtävä kuuluu kategoriaan D2 eli siinä on annettu funktion kuvaaja, josta pitää lukea tiedot tehtävän ratkaisemista varten.

(15)

**4.** Kuvaaja esittää Villen koulumatkaa kotoa kouluun. Vaaka-akselilla on aika (minuutteina) ja pystyakselilla etäisyys kotoa (metreinä). Ville lähtee maanantaiaamuna klo 8.00 jalan kotoa kouluun. Kun hän on kulkenut jonkin matkaa, hän huomaa unohtaneensa koululaukkunsa kotiin ja palaa sitä noutamaan. Hän lähtee kotoa uudelleen ja kulkee ripeästi ehtiäkseen perille ajoissa.




a) Kuinka pitkä on Villen koulumatka? Kuinka paljon kello on hänen saapuessaan maanantaiaamuna perille kouluun? Millä nopeudella (km/h) hän kulki noudettuaan laukkunsa?

b) Piirrä vastaavalla tavalla kuvaaja tilanteesta, jossa polkupyöräilijä lähtee polkemaan 6 000 metrin päässä olevalle leirintäpaikalle. Hän etenee kymmenessä minuutissa 2 500 metriä, pysähtyy kioskille 6 minuutiksi ja ajaa sitten loppumatkan 20 minuutissa.

(k2000/4)

## 8.2 Ylioppilaskoetehtävien vastaustyypit

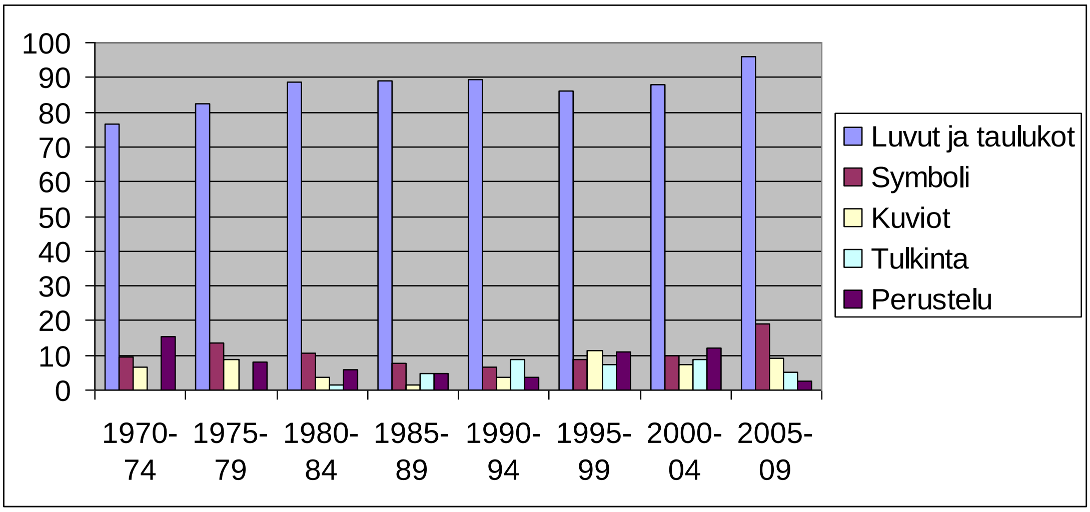
Jaoin ylioppilaskoetehtävät niissä esitettyjen kysymysten mukaan erilaisiin vastaustyyppeihin. Kun kysytään asiaa, johon vastauksena tulee luku (lukumäärä, pinta-ala, prosenttisosuus, kahden luvun suhde) tai taulukko, niin vastaus on luokiteltu tyyppiin *luvut ja taulukot*. Edellä esitetty esimerkkitehtävä (12) kuuluu tähän vastaustyyppiin.

Mikäli vastaus pyydetään symbolisessa muodossa (lauseke, integraalifunktio), niin vastaus kuuluu tyyppiin *symbolit*. Tehtävät, joissa pitää tuottaa funktion kuvaaja, diagrammi tai geometrinen kuvio on luokiteltu tyyppiin *kuviot*. Esimerkkitehtävän (2) ensimmäinen osa kuuluu vastaustyyppiin symbolit ja toinen osa vastaustyyppiin kuviot. Jos vastauksessa on pyydetty laskettujen lukujen avulla vastaamaan johonkin kysymykseen (mahtuuko vesi astiaan, kumpi on suurempi), niin kysymyksessä on *tulkinta*. Esimerkkitehtävä (8) kuuluu tähän vastaustyyppiin. Viimeisenä vastaustyyppinä on *perustelu*, joka sisältää osoitukset, teorian selitykset ja pyydetyt esimerkit. Tästä vastustyypistä on hyvä esimerkki tehtävä (20) (kappaleessa 8.4). Samassa tehtävässä voidaan kysyä useita kysymyksiä, joista jokainen vastaustyyppi on laskettu erikseen. Kuitenkin samaan tehtävään liittyvät samaan vastaustyyppiin tulevat vastaukset on laskettu vain kerran. Esimerkkitehtävä (13) on luokiteltu vastaustyyppeihin perustelu, luvut ja taulukot sekä kuviot.

Kuviossa 2 on esitetty tehtävien vastaustyyppien jakauma viiden vuoden aikajaksoissa. Hallitseva vastaustyyppi on koko ajan ollut *luvut ja taulukot*. Tehtävät ovat siis useimmiten olleet perinteisiä, suljettuja matematiikan tehtäviä, joihin on olemassa oikea vastaus. Kaikista tehtävistä 87,4 % kuului tähän ryhmään. Tämäntyyppiset tehtävät ovat vielä lisääntyneet 2000-luvun aikana. Viimeisen viiden vuoden aikana peräti 96,1 prosentissa tehtävistä haluttiin tämäntyyppinen vastaus.

Symbolisessa muodossa olevien vastausten lisääntyminen vuoden 2005 jälkeen johtuu lähinnä kahdesta asiasta. Ylioppilastehtävien ensimmäiset tehtävät ovat 2000-luvulla sisältäneet aina jonkin lausekkeen sievennystehtävän. Tämän lisäksi monissa sanallisissa tehtävissä on erikseen pyydetty muodostamaan tilannetta kuvaava yhtälö tai malli, jolloin tutkimuksen luokittelun perusteella tämä vastaus on tullut laskettua erikseen symboli-vastauksena. Aikaisemmin vastaavan tehtävän täyteen pistemäärään on vaadittu yhtälö tai funktion lauseke, vaikka sitä ei tehtävässä ole erikseen pyydetty muodostamaan.

Tyyppiä *kuviot* olevia kysymyksiä on ollut näiden neljänkymmenen vuoden aikana 72 kappaletta (6,6 %). Osassa tehtävistä toki on syytä piirtää apukuvioita vaikka niitä ei erikseen pyydetäkään. Tämä määrä on todella pieni, koska funktion kuvaajan, geometrisen kuvion tai tilastokuvion piirtämistehtäviä ei ole edes jokaisella ylioppilastutkintokerralla. Tehtävistä on tulkittavissa, että matematiikan diskurssi käsitetään pääsääntöisesti verbaalisesti tai symbolisesti ilmaistavaksi ja muu tapa tuottaa informaatiota on marginaalinen.




KUVIO 2. Ylioppilaskoetehtävien vastaustyypit vuosina 1970–2009 (prosentteina).

*Tulkintaa* vaativat tehtävät tulivat mukaan vastaustyyppeihin 1980-luvulla. Eniten niitä oli 1990-luvun alkupuolella ja 2000-luvun ensimmäisinä vuosina. Viimeisen viiden vuoden aikana nämä tehtävät ovat lähes hävinneet.

Vastaustyyppinä *perustelu* oli 1970-luvun alussa melko tavallinen, sillä noin kuudesosaan tehtävistä haluttiin tämäntyyppistä vastausta. Kun opetussuunnitelmaa muutettiin soveltavammaksi 1990-luvun puolivälissä, lisääntyivät oleellisesti myös perusteluja, teoriaa ja esimerkkejä vastauksina vaativat tehtävät. Niiden osuus ei kuitenkaan noussut ihan 1970-luvun alun tasolle, sillä vuosina 1995–99 tällaisia vastauksia haluttiin 10,9 % tehtävistä ja vuosina 2000–04 jo 12,0 % tehtävistä. Vuodesta 2005 alkaen on tämäntyyppisiä tehtäviä ollut enää neljä kappaletta.

## 8.3 ”Kuka tekee” ylioppilaskoetehtävissä?

Matematiikan tehtävät muotoillaan useimmiten passiivi-muotoon. Saadakseni selville, kuinka paljon lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa on tehtäviä, joissa joku ihminen toimii, kirjasin kaikki vuosien 1970–2009 aikana tehtävissä esiintyneet subjektit, jotka olivat ihmisiin viittaavia nimityksiä. Joissakin tehtävissä saattaa esiintyä nimiä tai ihmistä tarkoittavia substantiiveja, mutta ne eivät ole tulleet tähän laskuun mukaan, jos tehtävän ihminen ei ole aktiivinen toimija, vaan ihminen on vain osa tarinaa.

Ainoastaan yksi tehtävä on kirjoitettu *minä*-muotoon. Tämä tehtävä oli myös aikajärjestyksessä toinen ihmissubjektin sisältävä tehtävä. Ensimmäinen oli vuoden 1975 keväällä ollut tehtävä, jossa tekijöinä oli *kaksi miestä*:

(16) *Kaksi miestä harjoittaa savikiekkoammuntaa. Sääntöjen mukaan jokainen kilpailija ampuu vuorollaan ilmassa lentävää savikiekkoa kohti laukauksen, ja mikäli kiekko ei säry, vielä toisen laukauksen. Miesten todennäköisyydet särkeä kiekko yhdellä laukauksella ovat 2/5 ja 1/3. Mikä on todennäköisyys sille, että kummankin ampuessa yhtä kiekkoa ainakin toinen heistä saa kiekkonsa särjetyksi?* (k1975/17 b))

(17) *Kirjahyllyssäni olevista viidestä jännityskirjasta olen lukenut kaksi, mutta en muista, mitkä kaksi. Lomalukemiseksi otan mainituista viidestä kirjasta kaksi umpimähkään. Mikä on todennäköisyys sille, että en ole lukenut näistä kumpaakaan?* (s1975/5 b))

Useimmin esiintynyt subjekti on persoonaton *henkilö* (22 kertaa). Henkilöön voi liittyä myös määreitä, esimerkiksi kausiluonteista työtä tekevä henkilö (k1989/5 b)) tai toipilaana oleva henkilö (s1994/9c)). Henkilön jälkeen yleisimpiä subjekteja olivat autoilija (9 kertaa) ja oppilas/opiskelija (7 kertaa).

Etunimiä esiintyi 21 tehtävässä yhteensä 27 eri nimeä. Ensimmäinen etunimi oli kevään 1996 ylioppilaskokeessa esiintynyt Tuula. Vuonna 2005 tai myöhemmin on etunimiä ollut 13 tehtävässä. Etunimistä useimmin on esiintynyt Liisa (3 kertaa), Pekka, Antero ja Laura esiintyivät kukin kaksi kertaa. Erilaisia naisten etunimiä oli 11 ja miesten etunimiä 16. Erilaisten miesten nimien ylivoima on selvä. Kun otetaan huomioon esiintymiskerrat, niin etunimillä esiintyneitä miehiä oli 18 ja naisia 14 kappaletta. Kahdessa tehtävässä oli toimijana historiallinen henkilö, juoksijat Taisto Mäki ja Salah Hissou (k1997/5) ja matemaatikko Jacques Bernoulli (s2001/11). Sukunimellä esiintyi insinööri Virtanen (k2001/14).

Tyypillisiä toimijoita matematiikan sanallisissa tehtävissä ovat autoilijoiden (9 tehtävää) lisäksi erilaisten urheilulajien harrastajat (9 tehtävää). Näihin on luonnollisena selityksenä matkaan, nopeuteen ja aikaan liittyvien fysiikan sovellustehtävien kohtuullisen iso määrä (45 kappaletta).

Toimijoina esiintyy myös erilaisten ammattien harjoittajia (16 erilaista). Näistä autonkuljettaja, lentäjä ja liikennöitsijä liittyvät jo edellä mainittuun ryhmään eli liikkumiseen liittyviin tehtäviin. Ammatinharjoittajissa on mukana melko epätavallisia henkilöitä kuten strutsien kasvattaja.

Humoristisia piirteitä on muutamassa tehtävässä. Herra Hoppulainen on matkalla kokoukseen (k1994/4 a)) sekä harjoittelija Alku ja ammattitaitoinen Kelpo (s1995/5 b)) postittavat kirjeitä. Syksyllä 2007 veljekset Matti ja Teppo ostavat veljeltään Sepolta leikkuupuimurin.

Kaiken kaikkiaan 123 ylioppilastehtävässä (10,5 % tehtävistä) oli ihmistä tarkoittava toimija. Näistä tehtävistä 118 kuului osa-alueeseen B eli matematiikan sanallisiin tehtäviin. Sanallisista tehtävistä 19,7 prosentissa oli ihminen toimijana, mitä voi pitää kohtuullisen suurena määränä.

Matematiikan ylioppilastehtävien toimijoista määrällisesti suurin osa viittaa maskuliiniseen subjektiin, sillä miesten nimet olivat enemmistönä. Lisäksi monet mainitut ammatit (autoilija, lentäjä, maanviljelijä, virkamies) ovat maskuliinisia. Yksikään mainituista urheilulajeista ei ole naisten tyypillisesti harrastama laji (jalkapalloilija, pyöräilijä, suunnistaja, kuulantyöntäjä). Myöskään tehtävissä mainitut sukulaisuutta ilmaisevat sanat eivät yksilöi naisia (aviopari, vanhemmat, isovanhemmat) mutta miehiä kylläkin (veljekset, isoisä). Tältä osin tehtävistöä ei voi pitää sukupuolineutraalina.

Jaottelin subjektin sisältäneet tehtävät vielä sen mukaan, oliko varsinaisessa kysymyksessä mukana tekijä, vai esitettiinkö kysymys matematiikalle tyypillisenä passiivisena ilmaisuna. Kysymyksessä oli mukana aktiivinen tekijä 42 tehtävässä.

(18) *Toipilaan tulee leikkauksen jälkeen kuntouttaa lihaksiaan harjoittelemalla tiettyä liikesarjaa päivittäin kuukauden mittaisen kuntoutusjakson ajan. Hän aloittaa 15 minuutin pituisella voimistelulla ja lisää suoritusaikaa kuntoutusohjelman mukaan joka kerralla viidellä prosentilla. a) Kuinka pitkän ajan hän voimistelee kuntoutusjakson 30. päivänä? b) Kuinka paljon hän kaikkiaan käyttää aikaa voimisteluun kuntoutusjakson aikana? Anna vastaukset minuutin tarkkuudella.* (s2000/11)

Loput 81 tehtävää oli muotoiltu niin, että varsinainen kysymys ei sisältänyt tehtävässä esiintynyttä aktiivista toimijaa.

(19) *Maanviljelijä haluaa käyttäen 180 m aitaa aidata mahdollisimman suuren suorakulmion muotoisen laitumen ja jakaa sen kahteen osaan yhden sivun suuntaisella aidalla. Määritä laitumen pituus ja leveys.* (k1986/8)

## 8.4 Ylioppilaskoetehtävien matematiikkakäsitys

Tehtävien ja vastaustyyppien luokittelusta voi tehdä tulkintaa tehtävänlaadinnan takana olevasta matematiikkakäsityksestä. 1970-luvulla ja 1980-luvun alussa matematiikkakontekstissa olevat tehtävät ja matematiikan rakenteeseen liittyvät tehtävät muodostivat tehtävistä yli 80 %. Vuosina 1995–2004 lyhyen matematiikan ylioppilastehtävät olivat monimuotoisia sekä tehtävä- että vastaustyypeiltään. Tämä johtunee pitkälti halusta kokeilla uuden opetussuunnitelman tuomia mahdollisuuksia. Merkille pantavaa on myös se, että tänä aikana oli paljon matematiikan rakenteeseen liittyviä tehtäviä. Vaikka matematiikkaa soveltavat, sanalliset tehtävät valtasivat ison osuuden, niin matematiikan rakenne pysyi silti mukana. Seuraava tehtävä on esimerkkinä tällaisesta tehtävästä, jossa näkyy käsitys matematiikasta muunakin kuin laskujen laskemisena.

(20) *Mitä tarkoitetaan funktion suurimmalla arvolla? Anna esimerkki funktiosta, jolla ei ole suurinta arvoa. Voiko funktio saada suurimman arvonsa kahdessa eri pisteessä? Perustele vastauksesi esimerkillä.* (s2000/13)

Tämäntyyppisiä tehtäviä ei ole yleensä ollut kovin paljon ylioppilaskokeessa, mutta ne puoltavat paikkaansa ajattelua vaativina tehtävinä.

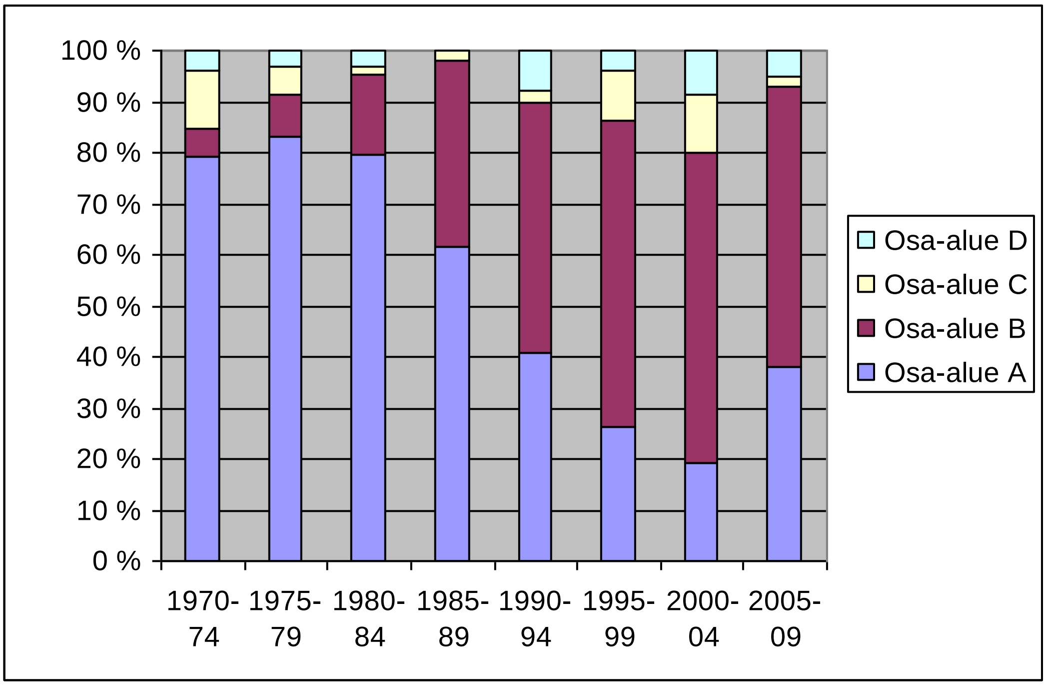
Viimeisten viiden vuoden aikana tehtävissä on ollut 1990-luvun alkupuolen tapaan enemmän matematiikkakontekstissa olevaa tehtävistöä, mutta kuvien ja taulukoiden käyttö tehtävissä on vähentynyt. Vastaustyyppien vertailussa näkyi, että viimeisimmissä ylioppilaskokeissa on korostuneesti ollut esillä lukujen ja taulukoiden muodossa annettavat vastaukset. Tehtävät ovat siis luonteeltaan juuri sellaisia, joihin on olemassa tietty oikea vastaus. Oikeat vastauksethan ovat Boalerin (1997, 117) mukaan tie menestykseen matematiikan oppitunnilla. Ne takaavat menestyksen myös matematiikan ylioppilaskokeessa.

1990-luvun puolivälistä lähtien tehtävissä esitettyjen kysymysten määrä on lisääntynyt. Vaikka tässä on laskettu vain erityyppistä vastausta hakevat kysymykset erikseen, niin 1970-luvun alussa tehtävää kohti esitettiin 1,08 kysymystä, mutta aikavälillä 2005–2009 kysymyksiä tehtävää kohti oli 1,33. Tehtävät ovat viime aikoina useammin paloiteltuina pienempiin osatehtäviin ja ohjaaviin kysymyksiin. Tarvitseeko siis 2000-luvun abiturientti enemmän ohjausta osatakseen vastata halutulla tavalla matematiikan ylioppilaskoetehtävään? Vai halutaanko vastausta ohjata tiettyyn suuntaan?

## 8.5 Ylioppilaskoetehtävien jakautuminen eri osa-alueisiin

Kuviossa 3 on esitetty lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävien jakautuminen eri osa-alueisiin vuosina 1970–2009. Kuviossa on tarkasteltu kehitystä viiden vuoden jaksoissa. Kuviosta näkyy selvästi, kuinka osa-alueeseen A eli matematiikka-kontekstiin kuuluvien tehtävien osuus on laskenut aina vuosiin 2000–2004 saakka. Viimeisimmän viisivuotisjakson aikana osa-alueen A tehtävien osuus on kuitenkin vähän lisääntynyt. Osa-alueen A tehtävien lukumäärän lisäys on tapahtunut lähinnä osa-alueisiin C ja D kuuluvien tehtävien kustannuksella.

Ylioppilaskoetehtävistä noin 80 % kuului osa-alueeseen A vuoteen 1984 saakka. Opetussuunnitelman muuttuessa soveltavampaan suuntaan muuttui myös ylioppilaskoetehtävien painopiste. 1990-luvulta lähtien suurin osa lyhyen matematiikan ylioppilastehtävistä on kuulunut osa-alueeseen B eli reaalimaailmaan sijoittuviin matematiikan sanallisiin tehtäviin, jotka vielä 1970-luvulla olivat harvinaisia.




KUVIO 3. Ylioppilaskoetehtävien jakautuminen eri osa-alueisiin vuosina 1970–2009.

Taulukossa 5 on esitetty lyhyen matematiikan ylioppilastehtävien jakautuminen eri osa-alueisiin viisivuotisjaksoissa. Taulukosta näkyy selvästi, kuinka osa-alueen A eli matematiikan kontekstiin kuuluvien tehtävien määrä on vähentynyt vuoteen 2004 saakka. Erityisen vähän osa-alueen A tehtäviä oli vuosina 2000–2004. Vähennys on kohdistunut symbolimerkintöjä sisältäviin tehtäviin (A2) ja parametrin sisältäviin tehtäviin (A3). Vuosina 2005–2009 osa-alueessa A tapahtunut lisäys on palauttanut symbolimerkintöjä sisältävien tehtävien määrän 1990-luvun alun tasolle.

Tämä johtuu osin siitä, että kokeen ensimmäiset tehtävät ovat vuodesta 2005 sisältäneet useita kohtia, joissa on ollut esimerkiksi yksinkertaisten yhtälöiden ratkaisemista ja lausekkeen sieventämistä.

Parametreja sisältävissä tehtävissä on lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa käynyt vastaavalla tavalla, kuin Jakobsson-Åhlin (2006, 109–110) tutkimien ruotsalaisten matematiikan oppikirjojen algebran opetuksessa. Pelkkiä kirjainsymboleja sisältävät tehtävät saavat oppikirjoissa väistyä numeeristen tehtävien tieltä. Suomen ylioppilaskokeissa kirjainparametrin sisältävät tai sellaisen käyttöä vaativat tehtävät lähestulkoon häviävät 2000-luvulle tultaessa. 1970-luvulla ne olivat toiseksi yleisin tehtävätyyppi symbolimerkintöjä sisältäneiden tehtävien jälkeen.

TAULUKKO 5. Tehtävien jakautuminen osa-alueisiin viisivuotisjaksoissa

| Osa-alue | 1970–1974 | 1975–1979 | 1980–1984 | 1985–1989 | 1990–1994 | 1995–1999 | 2000–2004 | 2005–2009 | yhteensä |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **98** | **105** | **106** | **89** | **69** | **46** | **29** | **58** | **600** |
| A1 | 12 | 9 | 15 | 9 | 13 | 2 | 8 | 7 | 75 |
| A2 | 47 | 63 | 69 | 55 | 41 | 29 | 13 | 42 | 359 |
| A3 | 39 | 27 | 17 | 22 | 14 | 14 | 5 | 4 | 142 |
| A4 | 0 | 6 | 5 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 24 |
| **B** | **7** | **10** | **21** | **53** | **83** | **104** | **91** | **84** | **453** |
| B1 | 0 | 0 | 3 | 18 | 19 | 31 | 15 | 14 | 100 |
| B2 | 1 | 0 | 0 | 13 | 17 | 24 | 18 | 24 | 97 |
| B3 | 0 | 1 | 6 | 9 | 19 | 21 | 29 | 21 | 106 |
| B4 | 6 | 8 | 10 | 10 | 14 | 15 | 17 | 17 | 97 |
| B5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 14 | 13 | 12 | 8 | 53 |
| **C** | **14** | **7** | **2** | **3** | **4** | **17** | **17** | **3** | **67** |
| C1 | 14 | 7 | 2 | 2 | 3 | 14 | 12 | 2 | 56 |
| C2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 5 | 1 | 11 |
| **D** | **5** | **4** | **4** | **0** | **13** | **7** | **13** | **8** | **54** |
| D1 | 5 | 4 | 4 | 0 | 7 | 3 | 7 | 2 | 32 |
| D2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 0 | 8 |
| D3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| D4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | 4 | 8 |
| D5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| Yhteensä | **124** | **126** | **133** | **145** | **169** | **174** | **150** | **153** | **1174** |

Osa-alue B eli sanalliset tehtävät eri aihealueilta oli suhteellisen harvinainen 1980-luvun puoliväliin saakka, mutta tutkimusjakson puolivälistä eli 1990-luvun alusta lähtien se on ollut tavallisin tehtävätyyppi. 1970-luvulla ja 1980-luvun alussa reaalimaailmaan liittyvät tehtävät olivat lähinnä todennäköisyyslaskennan tehtäviä. 1980-luvun puolivälistä alkaen tehtävien aihepiiri on monipuolistunut ja määrä lisääntynyt. Suurimmillaan reaalimaailman tilanteisiin liittyvien sanallisten tehtävien määrä oli 1990-luvun loppupuolella. Aihepiirit ovat tehtävissä monipuolistuneet. Geometrian tehtävät (B1) ovat vähentyneet 2000-luvulle tultaessa, mutta luonnontieteisiin (B2) ja talouteen liittyvät sovellukset (B3) ovat pysyneet samalla tasolla. Todennäköisyyslaskennan tehtävien (B4) määrä näyttää vakiintuneen yhteen tai kahteen tehtävään ylioppilaskirjoituskertaa kohden.

Matematiikan rakenteeseen liittyvien tehtävien osa-alue C on käynyt läpi mielenkiintoisen kehityskulun. 1970-luvun alussa osoitustehtävät olivat vielä melko tavallisia, mutta 1970-luvun lopulta 1990-luvun alkupuolelle asti niitä oli erittäin vähän. Kymmenvuotisjakson 1995–2004 aikana osoitustehtävät jälleen tulivat mukaan lyhyen matematiikan tehtävistöön, mutta vuoden 2005 jälkeen nämä tehtävät ovat lähestulkoon hävinneet ylioppilaskokeesta.

Osa-alue D eli kuvioita ja taulukkotietoja tehtävänannossa sisältävät tehtävät ovat pienin osa-alue. Ennen vuotta 1990 vain 13 tehtävässä esiintyi taulukkotietoja. Tämä on saattanut olla aikoinaan painotekninen ongelma, mutta teknisillä ongelmilla ei voi perustella sitä, että vielä 2000-luvullakaan ei tämäntyyppistä tehtävää ole jokaisella ylioppilaskoekerralla.

## 8.6 Opetussuunnitelmien ja ylioppilaskoetehtävien vastaavuus

Ylioppilaskokeen tehtäviä on tarpeen muuttaa, kun opetussuunnitelma muuttuu. Ennen vuoden 1994 muutosta uutta opetussuunnitelmaa kokeiltiin useissa lukioissa, ja tämän takia vuosina 1993–1995 ylioppilaskokeessa oli aikaisempaa enemmän vaihtoehtoisia tehtäviä, jotka oli tarkoitettu lähinnä kokeilukursseja opiskelleille. Näitten vaihtoehtoisten tehtävien valintaa ei kuitenkaan rajoitettu, vaan ne olivat kaikkien kokelaiden valittavissa riippumatta koulussa käytetystä opetussuunnitelmasta. Samoin vuoden 2003 opetussuunnitelman muutosvaiheessa annettiin vaihtoehtoisia tehtäviä syventävän kurssin muuttuneen sisällön takia. Ylioppilaskokeen hajauttamismahdollisuuden takia näitä tehtäviä jouduttiin antamaan useampana vuonna, koska opiskelijalla on mahdollisuus osallistua ylioppilaskokeeseen hyvin eri vaiheissa lukio-opintojaan.

Lyhyen matematiikan opetussuunnitelman matemaattinen sisältö keveni huomattavasti vuoden 1994 opetussuunnitelmassa. Soveltava aines ja arkielämän kontekstit lisääntyivät entisestään ylioppilaskoetehtävissä, mikä vastaa opetussuunnitelmaa. Sen sijaan vuoden 2003 opetussuunnitelman muutos kohdistui sisällöllisesti vain yhteen syventävään kurssiin, mutta lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoituksissa vuodesta 2005 lähtien tapahtunut muutos ei liity opetussuunnitelman muutokseen. Tämän muutoksen lähtökohtana on ollut Ylioppilastutkintolautakunnan halu palata ylioppilaskokeessa testaamaan matematiikan perustaitoja.

## 8.7 Ylioppilaskoetehtävät vuonna 2010

Vuosi 2010 ei kuulunut tutkimuksen varsinaiseen aineistoon. Olen kuitenkin analysoinut vuoden 2010 ylioppilaskoetehtävät tämän tutkimuksen luokittelun perusteella, sillä niistä voi päätellä, mihin suuntaan ylioppilaskoe on kehittymässä.

Vuonna 2010 matematiikan ylioppilaskokeen ulkoasua muutettiin niin, että entisen yhden sivun molemmilla puolilla tekstiä sisältäneen A4-kokoisen paperin tilalle tuli nelisivuiseksi taitettu tehtäväpaperi. Lyhyessä matematiikassa aikaisemmin käytössä ollut keltainen paperi sai väistyä ja uudessa painoasussa tästä muistuttaa enää keltainen raita paperin yläosassa. Uusi taitto mahdollistaa tehtävien entistä väljemmän asettelun ja useampien kuvioiden liittämisen tehtäviin. Lisäksi kokeessa voidaan käyttää monivärisiä kuvia, mikä on äidinkielen ja reaaliaineiden kokeissa ollut mahdollista jo useiden vuosien ajan.

Tehtävien ja vastaustyyppien jakautumisessa jatkuu edelleen sama linja kuin vuosina 2005–2009 eli sanallisten tehtävien osuus on pienenemässä ja matematiikan kontekstiin kuuluvat tehtävät suurenemassa. Tehtäviä vuoden 2010 kahdessa ylioppilaskokeessa oli yhteensä 30. Näistä matematiikan kontekstiin eli osa-alueeseen A kuului 16 tehtävää, eri aihealueiden sanallisiin tehtäviin eli osa-alueeseen B yhdeksän tehtävää ja kuvainformaatiota sisältävien tehtävien osa-alueeseen D viisi tehtävää. Matematiikan rakenteeseen liittyviä tehtäviä eli osa-aluetta C ei vuonna 2010 ollut lainkaan.

Vuoden 2010 tehtävien vastaustyypeissä näkyy edelleen voimistunut suuntaus kohti lukuja vastauksina. Tehtävistä yhtä lukuun ottamatta kaikkiin kysyttiin vastauksena lukua. Toiseksi yleisin oli kuvion tai kuvaajan piirtäminen, jota pyydettiin seitsemässä tehtävässä. Symbolisessa muodossa olevaa vastausta haettiin yhdessä tehtävässä, samoin tulkintaa vaati yksi ja perustelua yksi tehtävä.

# 9 POHDINTA

Tässä tutkimuksessa on selvitetty lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävissä tapahtuneita muutoksia vuosina 1970–2009. Tehtävät luokiteltiin sisällön perusteella neljään luokkaan, matematiikan kontekstiin kuuluviin tehtäviin, sanallisiin tehtäviin eri aihealueilta, matematiikan rakenteeseen liittyviin tehtäviin sekä kuvioita ja taulukkotietoja hyödyntäviin tehtäviin. Tehtävissä esitettyjen kysymysten perusteella muodostettiin viisi vastaustyyppiä, jotka ovat luvut ja taulukot, symbolit, kuviot, tulkinta ja perustelu. Sekä tehtävä- että vastaustyyppien jakauma on muuttunut tutkittavana olevan neljänkymmenen vuoden ajanjakson aikana. Lukion opetussuunnitelman muutokset ovat olleet tämän kehityksen taustalla, mutta viimeisten viiden vuoden aikana tapahtunutta kehitystä ei voi perustella opetussuunnitelmalla. Nämä muutokset ovat johtuneet pääasiallisesti ylioppilastutkintolautakunnan tekemistä matematiikan ylioppilaskokeen kehittämistoimista.

## 9.1 Tulosten arviointia

Arkielämän sanallisten tehtävien lisääntymisen huomaa helposti, kun vertaa 1970-luvun ja 1990-luvun lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtäviä. Tämän tutkimuksen perusteella voidaan tarkemmin arvioida, milloin tämä muutos on tapahtunut. Opetussuunnitelman muutos vuonna 1985 oli alkusysäys kohti uutta hakevaa lyhyen matematiikan opetusta. Tuolloin ei vielä muutettu juurikaan opetuksen sisältöjä, mutta matematiikan soveltamista alettiin pitää tärkeänä osana lyhyen matematiikan opetusta. Tämä suuntaus näkyi myös ylioppilaskoetehtävissä.

Reaalimaailman sanallisten tehtävien esiinmarssi on ollut voimakas. Kun 1970-luvun alussa tällaisia tehtäviä oli vain 5,6 prosenttia kaikista tehtävistä, niin 2000-luvun ensimmäisinä vuosina niiden määrä oli 60,7 %. Samaan aikaan matematiikan kontekstiin kuuluvien tehtävien määrä väheni 79,0 prosentista 19,3 prosenttiin.

Tehtävien realistisuuteen liittyy ongelma siitä, mitä todellisuuden tietoja niissä voi käyttää hyväksi (Cooper & Dunne 1998, 120). Hyvä esimerkki tästä on syksyn 2009 ruoan arvonlisän muutosta koskeva tehtävä.

(21) *Elintarvikkeiden arvonlisävero on 17 prosenttia tuotteen verottomasta hinnasta. Tapio maksoi ruokaostoksistaan 54,35 euroa. Kuinka monta euroa ostoksen hinta alenisi, jos ruoan arvonlisäveroa laskettaisiin 9 prosenttiyksiköllä? Kuinka suuri olisi ostoksen hinnan alennus prosentteina?* (s2009/4)

Ylioppilaskoe pidettiin 25.9.2009. Elintarvikkeiden arvonlisävero laski 17 prosentista 12 prosenttiin 1.10.2009. Tämä tapahtuma oli ajallisesti niin lähellä ylioppilaskoetta, että osa kokelaista laski tehtävän todellisen arvonlisämuutoksen mukaisesti. Tehtävässä kuitenkin edellytettiin todellisuudessa tapahtumassa olevan arvonlisämuutoksen sijaan laskemista tehtävässä esitetyllä tavalla. Tehtävä oli siis täysin teoreettinen, vaikka se tavoitteli ajankohtaisuutta ja opiskelijan kokemusmaailmaa.

Symbolimerkinnät vähenivät matematiikan ylioppilaskokeista niin paljon, että 2000-luvun alussa niitä oli enää parissa tehtävässä ylioppilaskokeen viidestätoista tehtävästä. 2000-luvun viisi ensimmäistä vuotta olivatkin matematiikan kontekstiin sijoittuvien tehtävien osalta laihoja vuosia. Tämä herätti kritiikkiä opettajien keskuudessa. Sanottiin, että matematiikan koe testaa enemmän luetun ymmärtämistä kuin matematiikan taitoja. Vilenius-Tuohimaan, Aunolan ja Nurmen (2008) tutkimuksen perusteella tätä väitettä voi pitää oikeutettuna. Jos neljäsluokkalaisten matematiikan sanallisten tehtävien ratkaisumenestys on yhteydessä tekniseen lukutaitoon ja luetun ymmärtämiseen, niin saman voi olettaa pitävän paikkansa myös abiturientteihin.

Matematiikan rakenteeseen liittyvien osoitustehtävien ja uusia käsitteitä opettavien tehtävien kohdalla kehityskulku on ollut mielenkiintoinen. 1970-luvun alun jälkeen tämäntyyppiset tehtävät katosivat ylioppilaskokeesta lähes täysin kahdeksikymmeneksi vuodeksi. Vuosina 1995–2004 niitä oli jälleen jopa enemmän kuin tutkittavan ajanjakson alussa. Tämän kymmenen vuoden aikana lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa näkyi opetussuunnitelman muutoksen vaikutus. Kun opetettavia sisältöjä oleellisesti kevennettiin, niin kokeiltiin monentyyppisiä tehtäviä.

Tehtävissä esitettyjen kysymysten määrä on lisääntynyt. Viime vuosina käytännöksi on muodostunut, että kaksi tai kolme ensimmäistä tehtävää sisältää useampia, toisiinsa liittymättömiä kohtia. Myös muissa tehtävissä esitetään entistä enemmän ohjaavia kysymyksiä, joihin kaikkiin tulee vastata. Lähes kaikissa tehtävissä on alettu kysyä jotain luvun avulla ilmoitettavaa. Matematiikalle on tieteenä olennaista perustelujen esittäminen, mutta lyhyen matematiikan tehtävissä perustelu on vain harvoin koko tehtävän ratkaisu. Tämän perusteella voidaankin sanoa, että lyhyt matematiikka on välineluonteista.

## 9.2 Onko ylioppilaskokeen taso laskenut?

Julkisuudessa on hämmästelty, kuinka helppoja matematiikan ja erityisesti lyhyen matematiikan ylioppilastehtävät ovat nykyisin. Peruskoulun tiedot riittävät hyväksyttyyn arvosanaan, mutta silti moni reputtaa ylioppilaskokeessa. Esimerkiksi keväällä 2008 lyhyen matematiikan kokeessa hylättiin 7,8 % kokelaista (Ylioppilastutkinto 2008, 43), kun hylättyjä arvosanoja pitäisi ohjeellisesti olla noin 5 %. Koe ei siis ole ollut kokelaille liian helppo.

Jos asiaa tarkastellaan miettimättä muuttunutta opetussuunnitelmaa, niin todennäköisesti 1970- ja 1980-luvun ylioppilastehtävistä löytyy paljon sellaisia tehtäviä, joita nykyiset abiturientit eivät osaa ratkaista. Lyhyen matematiikan opetussuunnitelmasta jätettiin huomattava määrä ainesta pois vuonna 1994. On luonnollista, ettei osata sitä, mitä ei opeteta. Nykyinen ylioppilaskoe sisältää puolestaan huomattavasti enemmän arkielämään liittyvää soveltavaa ainesta, mikä oli vierasta 1970-luvun ylioppilaskokelaille.

Matematiikan ylioppilaskokeessa tehtävien määrä on pysynyt muuttumattomana, vaikka reaalikokeessa on tehtäviä vähennetty ensin kymmenestä kahdeksaan ja ainereaalin myötä joidenkin aineiden kokeissa kuuteen tehtävään. Samalla on yhden reaalikoetehtävän vaatimustaso noussut. Sama on tapahtunut matematiikan kokeessa, kun vuodesta 2006 lähtien kokeen alkuun on tullut tehtäviä, joissa on kaksi tai kolme mekaanista laskutaitoa vaativaa kohtaa, jotka kaikki pitää ratkaista. Seuraavat kaksi esimerkkitehtävää kuvaavat hyvin tilannetta:

(22) *Määritä polynomin* $2x^3 - 3x^2$ *derivaatan nollakohdat*. (s1979/1)

(23) *a) Suureet* $x$ *ja* $y$ *ovat suoraan verrannolliset. Kun* $x = 2$ *, on* $y = 5$ *. Mikä on suureen* $y$ *arvo, kun* $x = 7$ *?*
*b) Määritä funktion* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ *derivaatan nollakohdat.*
*c) Laske lausekkeen* $\frac{2x-1}{x+1}$ *arvo, kun* $x = \frac{5}{8}$. (k2009/2)

Syksyn 1979 tehtävä 1 on lähes sama kuin kevään 2009 tehtävän 2 b-kohta. Erona on se, että vuonna 1979 samasta osaamisesta on saanut kuusi pistettä, mutta vuonna 2009 enää kaksi pistettä. Vuonna 2009 kuuteen pisteeseen on pitänyt vielä osata ratkaista täsmälleen oikein a- ja c-kohdat. Kokeen maksimipistemäärä ei näiden vuosien aikana ole muuttunut.

## 9.3 Aiheita tuleville tutkimuksille

Tämän tutkimuksen menetelmällä voisi tutkia pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävien muuttumista. Pitkän matematiikan opetussuunnitelmassa ei tosin ole tapahtunut niin isoa muutosta kuin lyhyen matematiikan opetussuunnitelmaan tehtiin 1990-luvulla. Soveltavien tehtävien pieni määrä pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa tulisi näkyviin ja vertailu lyhyen matematiikan kokeen muutokseen olisi mahdollista.

Ylioppilaskoe on vain yksi osa lukion matematiikan opetusta. Olisi kiinnostavaa analysoida opetusmateriaalia ja opiskelijoiden kirjoittamia matematiikan tekstejä matematiikan diskurssin näkökulmasta. Oppikirja-analyysissa voisi käyttää tässä tutkimuksessa käytettyä tapaa luokitella tehtävät ja vastaustyypit. Lisäksi ”kuka tekee” -teema oppikirjoissa olisi myös kiinnostavaa tietoa.

Käytännön työssä olen huomannut, että sanalliset tehtävät ovat vaikeita lukemisen ja kirjoittamisen häiriöistä kärsiville sekä maahanmuuttajataustaisille opiskelijoille. Osa opiskelijoista vastaa arkipäivän tilanteeseen liittyvään sanalliseen tehtävään ilman matemaattisia perusteita. Tästä näkökulmasta olisikin syytä selvittää, miten tasa-arvo toteutuu suomalaisen koulun matematiikan opetuksessa. Suomi on ollut pitkään kulttuuriltaan yhtenäinen, mutta viime aikoina kehityksen suunta on muuttunut. Myös Suomessa joudutaan pohtimaan sitä, miten tasa-arvoisia käytetyt opetusmenetelmät ja -suunnitelmat ovat.

## 9.4 Matematiikan ylioppilaskoe tulevaisuudessa

Matematiikan opetus näyttää Suomessa yhä edelleen olevan erillinen saareke muusta opetuksesta. Toukokuussa 2010 valmistuneessa esityksessä perusopetuksen uudeksi tuntijaoksi oppiaineita on jaettu aineryhmiin, joista matematiikka muodostaa yksin oman ryhmänsä. Lukiokoulutuksen kehittämistyöryhmän muistion mukaan yleissivistyksen tulee olla monipuolista ja edistää sekä vahvistaa tietoja, taitoja ja valmiuksia seitsemällä osa-alueella, joista matematiikka omana osa-alueenaan on ensimmäisenä mainittu (Lukiokoulutuksen kehittämisen toimenpide-ehdotuksia valmistelevan työryhmän muistio 2010, 30). Tätä voi pitää matematiikan opetuksen kannalta sekä hyvänä että huonona asiana. Hyvää esityksissä on se, että matematiikan merkitys itsenäisenä aineena tunnustetaan eikä sitä niputeta luonnontieteiden apuaineeksi. Huonoa tässä näkökulmassa on se, että matematiikan integroitumista muihin oppiaineisiin esimerkiksi valinnaisissa kursseissa tämä oppiaineryhmäjako ei millään tavalla edistä.

Lukiokoulutuksen kehittämistyöryhmä esittää, että tieto- ja viestintäteknologiaa hyödynnetään ylioppilaskokeessa asteittain vuodesta 2014 alkaen (Lukiokoulutuksen kehittämisen toimenpide-ehdotuksia valmistelevan työryhmän muistio 2010, 106). Aikataulu on todella nopea, sillä vuonna 2014 ylioppilastutkintoon osallistuvat aloittavat lukion tänä vuonna. Työryhmän muistiossa (mts. 106) ehdotetaan myös, että tutkinnon kokeita kehitetään entistä enemmän taitoja ja kokonaisuuksien hallintaa mittaaviksi. Tieto- ja viestintäteknologian käyttäminen matematiikan ylioppilaskokeessa on melkoinen haaste, joka vaatii muutoksia sekä perusopetuksen että lukion opetussuunnitelmaan. Haaste on suuri, koska siirtyminen kynän, paperin, taulukkokirjan ja laskimen käyttämisestä tietokoneen käyttämiseen apuvälineenä on iso muutos.

Tämä tutkimus on selvittänyt muutoksia lyhyen matematiikan ylioppilaskokeessa viimeisen neljänkymmenen vuoden aikana. Vaikka ylioppilaskoe on tuona aikana muuttunut, niin muutokset ovat kuitenkin olleet pieniä verrattuna siihen, mitä todennäköisesti tulee tapahtumaan seuraavien neljänkymmenen vuoden aikana.

# LÄHTEET

Bishop, A. J. 1991. Mathematical Values in the Teaching Process. Teoksessa A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen (toim.) Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 195–214.

Bishop, A. J. 2001. What values do you teach when you teach mathematics? Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching. London: Routledge Falmer, 93–104.

Boaler, J. 1997. Experiencing school mathematics. Teaching styles, sex and setting. Buckingham: Open University Press.

Boaler, J. 2002. Learning From Teaching. Exploring the Relationship Between Reform Curriculum and Equity. Journal for Research in Mathematics Education 33 (4), 239–258.

Buerk, D. 1985. The voices of women making meaning in mathematics. Journal of Education 167 (3), 59–70.

Chartres, M. 2008. Are my students engaged with critical mathematics education? Teoksessa J.F. Matos, P. Valero & K. Yasukawa (toim.) Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference. Lisbon: Centro de Investigação, Universidade de Lisboa – Department of Education, Learning and Philosophy, Aalborg University. (Luettu 25.9.2008)

Chassapis, D. 2002. Social groups in mathematics education research. An investigation into mathematics education-related research articles published from 1971 to 2000. Teoksessa P. Valero & O. Skovsmose (toim.) Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference. Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics. (Luettu 17.9.2008)

Christensen, O. R. 2008. Order of the world or order of the social – a Wittgensteinian conception of mathematics and its importance for research in mathematics education. Teoksessa J.F. Matos, P. Valero & K. Yasukawa (toim.) Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference. Lisbon: Centro de Investigação, Universidade de Lisboa – Department of Education, Learning and Philosophy, Aalborg University. (Luettu 25.9.2008)

Cooper, B. & Dunne, M. 1998. Anyone for tennis? Social class differences in children's responses to national curriculum mathematics testing. The Sociological Review 46, 115–148.

Cooper, B. & Dunne, M. 2004. Constructing the 'legitimate' goal of a 'realistic' Maths item: a comparison of 10-11 and 13-14 year olds. Teoksessa B. Allen & S. Johnston-Wilder (toim.) Mathematics education: Exploring the culture of learning. New York: RoutledgeFalmer, 69–90.

de Freitas, E. 2008. Critical mathematics education: recognizing the ethical dimension of problem solving. International Electronic Journal of Mathematics Education 3 (2).

Dowling, P. 1996. A sociological analysis of school mathematics texts. Educational Studies in Mathematics 31, 389–415.

Dowling P. 2001. Reading mathematics texts. Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching. London: RoutledgeFalmer, 180–196.

Ernest, P. 1991. The Philosophy of Mathematics Education. London: Falmer.

Ernest, P. 2000. Why teach Mathematics. http://people.exeter.ac.uk/PErnest/why.htm. Luettu 27.1.2011.

Ernest, P. 2001. Critical mathematics education. Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching. London: RoutledgeFalmer, 277–293.

Ernest, P. 2008. Espistemology plus values equals classroom image of mathematics. Philosophy of Mathematics Education Journal 23. Verkkolehti http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/index.htm. Luettu 14.11.2008.

Frankenstein, M. 1989. Relearning Mathematics: A Different Third A – Radical Maths, Vol. 1. London: Free Association Books.

Gerofsky, S. 2010. The impossibility of 'real-life' word problems (according to Bakhtin, Lacan, Zizek and Baudrillard). Discource: Studies in the Cultural Politics of Education 31 (1), 61–73.

Gilligan, C. 1982. In a different voice. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Haapasalo, L. 1994. Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Jyväskylä: MEDUSA-Software.

Halliday, M.A.K. 1978. Language as social semiotic. The social interperetation of language and meaning. London: Edward Arnold.

Jakobsson-Åhl, T. 2006. Algebra in upper secondary mathematics. A study of selection of textbooks used in the years 1960-2000 in Sweden. Luleå University of Technology, Department of Mathematics. Licenciate thesis.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. 2010. Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kielennettyihin ratkaisuihin. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Tampere: Tampereen yliopiston julkaisusarja A 31, 77–90.

Kaarninen, M. & Kaarninen, P. 2002. Sivistyksen portti. Ylioppilastutkinnon historia. Helsinki: Otava.

Kannisto, E.A. & Metsänkylä, Y. 1975. Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnoissa vuosina 1965–1975 . Jyväskylä: Gummerus.

Kiuasmaa, K. 1982. Oppikoulu 1880–1980. Oppikoulu ja sen opettajat koulujärjestyksestä peruskouluun. Oulu: Kustannusosakeyhtiö Pohjoinen.

Lahtinen, A. 2008. Matematiikan ylioppilaskirjoitus keväällä 2008. Dimensio 6/08, 15–34.

Lahtinen, A. 2010. Matematiikan koe ylioppilastutkinnossa keväällä 2010. Dimensio 6/2010, 28–51.

Lakatos, I. 1976. Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery. Cambridge: Cambridge University Press.

Laurén, R., Kannisto, E.A. & Metsänkylä, Y. 1966. Matemaattiset tehtävät ylioppilastutkinnoissa vuosina 1944–1966. Jyväskylä: Gummerus.

Lave, J. 1988. Cognition in practice. Mind, mathematic and culture in everyday life. Cambridge: Cambridge University Press.

Le Roux, K. 2008a. A critical discource analysis of a real-world problem in mathematics: looking for signs of change. Language and Education 22 (5), 307–326.

Le Roux, K. 2008b. Relevance and access in undergraduate mathematics: using discource analysis to study mathematics texts. Teoksessa J.F. Matos, P. Valero & K. Yasukawa (toim.) Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference. Lisbon: Centro de Investigação, Universidade de Lisboa – Department of Education, Learning and Philosophy, Aalborg University. Luettu 8.4.2009.

Lindström, A. 1994. Arviointityön käynnistys. Teoksessa Ritva Jakku-Sihvonen & Heikki Blom (toim.) Lukion tila 1994. Helsinki: Opetushallitus, 9-14.

Lubienski, S. 2000. Problem solving as a means toward mathematics for all: an exploratory look through a class Lens. Journal for Research in Mathematics Education 31 (4), 454–482 .

Lukiokoulutuksen kehittämisen toimenpide-ehdotuksia valmistelevan työryhmän muistio. Opetus- ja kulttuuriministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä 2010:14.

Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985. Helsinki: Kouluhallitus.

Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994. Helsinki: Opetushallitus.

Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Nuorille tarkoitetun lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet. Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/koulutuksen_jarjestaminen/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus

Lukion tila 1994. Ritva Jakku-Sihvonen & Heikki Blom (toim.) Helsinki: Opetushallitus.

Morgan, C. 1998. Writing mathematically: The discourse of investigation. London: RoutledgeFalmer.

Morgan, C. 2006. What does social semiotics have to offer mathematics education research? Educational Studies in Mathematics 61, 219–245.

O'Halloran, K. 2004. Mathematical discource. London: Continuum International Publishing.

Paechter, C. 2001. Gender, reason and emotion. Teoksessa P. Gates (toim.) Issues in mathematics teaching. London: RoutledgeFalmer, 51–63.

Restivo, S. 1991. The sociological worldview. Oxford: Basil Blackwell.

Sfard, A. 2000. On reform movement and the limits of mathematical discource. Mathematical Thinking and Learning 2 (3), 157–189.

Skovsmose, O. 2004. Critical mathematics education for the future. http://www.lfd.learning.aau.dk/resources/CME_for_the_Future.pdf (Luettu 17.9.2008)

Silfverberg, H. 2010. Opetussuunnitelmatekstien verbianalyysi − lukion matematiikan oppimäärät opetussuunnitelman perusteissa 1994 ja 2003. Teoksessa E. Ropo, H. Silfverberg & T. Soini (toim.) Toisensa kohtaavat ainedidaktiikat. Tampere: Tampereen yliopiston julkaisusarja A 31, 369–382.

Suoranta, J. 2005. Radikaali kasvatus. Kohti kasvatuksen poliittista sosiologiaa. Helsinki: Gaudeamus.

Travers, K.J. 1991. Mathematics: Secondary school programs. Teoksessa A. Levy (toim.) The International Encyclopedia of Curriculum. Oxford: Pergamon Press, 825–833.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. 2006. Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi. Helsinki: Tammi.

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K. & Nurmi, J.-E. 2008. The association between mathematical word problems and reading comprehension. Educational Psychology 28 (4), 409–426.

Wittgenstein, L. 1985. Huomautuksia matematiikan perusteista. (suom. Heikki Nyman). Helsinki: WSOY.

Ylioppilastutkinto 2007. Tilastoja ylioppilastutkinnosta. http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/files/documents/Tilastot/Ylioppilastutkinto2007_nettiin.pdf

Ylioppilastutkinto 2008. Tilastoja ylioppilastutkinnosta. Helsinki: Ylioppilastutkintolautakunta.

Ylioppilastutkintolautakunta. http://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/ylioppilastutkinto/150/)